Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

500

$\models$ ISILC Proof Theory Symposion

Dedicated to Kurt Schütte on the Occasion of His 65th Birthday

Proceedings of the International Summer Institute and Logic Colloquium, Kiel 1974

Edited by J. Diller and G. H. Müller

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1975

Editors
Prof. Justus Diller
Westfälische Wilhelms-Universität
Institut für mathematische Logik
und Grundlagenforschung
Roxeler Straße 64
44 Münster/BRD

Prof. Gert H. Müller
Mathematisches Institut
der Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
69 Heidelberg 1/BRD

Library of Congress Cataloging in Publication Data
ISILC Proof Theory Symposium, University of Kiel, 1974.
ISILC Proof Theory Symposium.

(Lectures notes in mathematics ; 500)
Text in English or German.
1. Proof theory--Congresses. 2. Schütte, Kurt --Bibliography. I. Schütte, Kurt. II. Diller, Justus. III. Müller, Gert Heinz, 1923- IV. International Summer Institute and Logic Colloquium, University of Kiel, 1974. V. Series: Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 500.
QA3.L28 no.500 [QA9.54] 510'.8s [511'.3]
75-40482

AMS Subject Classifications (1970): 02D05, 02D99, 02E05, 02F29, 02F40

ISBN 3-540-07533-X Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-07533-X Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Printed in Germany
Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

INHALTSVERZEICHNIS

NORMALFUNKTIONEN UND KONSTRUKTIVE SYSTEME VON ORDINALZAHLEN

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte zum

65. Geburtstag gewidmet

W. Buchholz

Als Hilfsmittel für beweistheoretische Untersuchungen wurden von verschiedenen Autoren konstruktive Bezeichnungssysteme[1] für Ordinalzahlen eingeführt, die zwar auf sehr einfache Weise induktiv definiert sind, sich aber nur schwer von der klassischen Ordinalzahltheorie her verstehen lassen. Im folgenden sollen konstruktive Bezeichnungssysteme $\overline{\Theta}(\mathcal{G})$ entwickelt werden , die ihrem formalen Aufbau nach eng verwandt sind mit den Systemen $\Sigma(N)$, Σ, $W(X)$ von Schütte [17] und Pfeiffer [11] [12], die aber im Gegensatz zu jenen eine relativ einfache und natürliche Erklärung in der klassischen Ordinalzahltheorie besitzen. Wir werden dabei von gewissen von FEFERMAN und ACZEL [1] stammenden - und von BRIDGE in [3] näher untersuchten - Normalfunktionen Θ_α ausgehen, die sich sehr einfach und ohne Bezugnahme auf Hauptfolgen in der klassischen Theorie definieren lassen.

Zum Inhalt der vorliegenden Arbeit: Die Paragraphen 1 - 3 beinhalten die nichtkonstruktive Entwicklung der Bezeichnungssysteme $\overline{\Theta}(\mathcal{G})$ im Rahmen der klassischen Ordinalzahltheorie. Dabei enthält §1 im wesentlichen nur eine Zusammenstellung gewisser schon bei Bridge [3] bewiesener Ergebnisse über die Funktionen Θ_α mit zum Teil neuen Beweisen. In §4 werden die speziellen Bezeichnungssysteme $\overline{\Theta}(\tau)$ und $\overline{\Theta}(\{g\})$ behandelt und mit den Systemen anderer Autoren verglichen (ohne Beweise). In §5 wird ein konstruktiver Wohlordnungsbeweis für die Systeme $\overline{\Theta}(\tau)$, $\overline{\Theta}(\{g\})$ gegeben. Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung der Wohlordnungsbeweise von SCHÜTTE [17] und PFEIFFER [11],[12] .

---

1) z.B. die Systeme $O(n)$ von Takeuti [19] , $Od(I)$ von Kino [8] , $\Sigma(N)$ von Schütte [17] , Σ und $W(X)$ von Pfeiffer [11],[12] .

§1 Die Normalfunktionen Θ_α

Wir legen hier (in §1 - §4) die axiomatische Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom zugrunde. Die Klasse On der Ordinalzahlen sei in üblicher Weise so definiert, daß $\alpha = \{\xi \in On \mid \xi < \alpha\}$ für jedes $\alpha \in On$ ist. K sei die Klasse der Kardinalzahlen $> \omega$, d.h. die Klasse derjenigen Ordinalzahlen $> \omega$, die sich nicht bijektiv auf eine kleinere Ordinalzahl abbilden lassen. $\lambda\xi\Omega_\xi$ sei die Ordnungsfunktion der Klasse $K \cup \{0\}$, d.h. die (eindeutig bestimmte) Funktion, die On ordnungstreu und bijektiv auf $K \cup \{0\}$ abbildet. Es ist also $\Omega_0 = 0$ und $\Omega_\xi = \aleph_\xi$ für $\xi > 0$. Zu $\beta \in On$ gibt es genau ein $\xi \in On$ mit $\Omega_\xi \leq \beta < \Omega_{\xi+1}$; wir definieren $S\beta := \Omega_\xi$ und $\beta^+ := \Omega_{\xi+1}$. $S\beta$ heißt die Stufe von β. Aus dem Auswahlaxiom folgt, daß β^+ regulär ist, d.h. für jedes $\varphi : \alpha \to \beta^+$ mit $\alpha < \beta^+$ ist auch $\sup\{\varphi(\eta) \mid \eta \in \alpha\} < \beta^+$.

Eine Ordinalzahl γ heißt additive Hauptzahl, wenn für alle $\xi, \eta < \gamma$ auch $\xi + \eta < \gamma$ ist. Die Klasse der additiven Hauptzahlen bezeichnen wir mit H. H ist eine echte Klasse, und $\lambda\xi\omega^\xi$ ist die Ordnungsfunktion von H. Zu $0 \neq \gamma \in On$ gibt es eindeutig $n \geq 1$ und additive Hauptzahlen $\gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_n$ mit $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$; wir definieren $H[\gamma] := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ und $H[0] := \emptyset$. Es gilt: $K \subset H$, $\forall\gamma \in On(\gamma \in H \leftrightarrow H[\gamma] = \{\gamma\})$, $H[\eta] \subset H[\xi+\eta] \subset H[\xi] \cup H[\eta]$.

Ist M eine wohlgeordnete Menge, so bezeichnen wir mit $\|M\|$ ihren Ordnungstyp, d.h. diejenige Ordinalzahl, die ordnungsisomorph zu M ist.

Wir verwenden folgende Mitteilungszeichen:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \zeta$	(auch mit Indizes) für Ordinalzahlen,
ν, κ	für Elemente von $K \cup \{0\}$,
i, k, m, n	für natürliche Zahlen,
$A \setminus B$	für die Mengendifferenz $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definition der Funktionen Θ_α

Im folgenden bezeichne $\mathcal{G}$ eine abzählbare Menge von Funktionen $f : D(f) \to K$ mit $\emptyset \neq D(f) \subset On^m$, $1 \leq m$. $\mathcal{G}$ erfülle die folgende "Unitätsbedingung":

$$f_1, f_2 \in \mathcal{G} \wedge x_1 \in D(f_1) \wedge x_2 \in D(f_2) \wedge f_1(x_1) = f_2(x_2) \implies f_1 = f_2 \wedge x_1 = x_2 .$$

Wir definieren:

$|\mathcal{G}| := \{f(x) \mid f \in \mathcal{G} \wedge x \in D(f)\}$; $\mathcal{G}[\gamma] := \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, wenn $\gamma = f(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ mit $f \in \mathcal{G}$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in D(f)$.

Unter Bezugnahme auf $\mathcal{G}$ werden nun Ordinalzahlenmengen $C(\alpha, \beta)$ und Funktionen Θ_α [1] durch transfinite Rekursion nach α definiert:

---

[1] Wo es erforderlich ist, werden wir die Abhängigkeit von $\mathcal{G}$ durch die Schreibweise $C^{\mathcal{G}}(\alpha, \beta)$, $\Theta_\alpha^{\mathcal{G}}$ zum Ausdruck bringen.

$C_0(\alpha,\beta) := \{0\} \cup \beta$

$$C_{n+1}(\alpha,\beta) := \begin{cases} \{\gamma \mid H[\gamma] \subset C_n(\alpha,\beta)\} \cup \\ \{\gamma \mid \gamma \in |\mathcal{G}| \wedge \mathcal{G}[\gamma] \subset C_n(\alpha,\beta)\} \cup \\ \{\Theta\xi\eta \mid \xi < \alpha \wedge \xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta) \wedge \{\xi,\eta\} \subset C_n(\alpha,\beta)\} \end{cases}$$ 1)

$C(\alpha,\beta) := \bigcup_{n\in\omega} C_n(\alpha,\beta)$

$Kr(\alpha) := \{\beta \mid \beta \notin C(\alpha,\beta)\} \cup K$

$\Theta_\alpha : On \longrightarrow Kr(\alpha)$ sei die Ordnungsfunktion der Klasse $Kr(\alpha)$.

Die Elemente von $Kr(\alpha)$ heißen α-kritische Zahlen.

Folgerungen

(1) $\Theta\alpha\beta \in H$

(2) $\gamma \in C_n(\alpha,\beta) \implies H[\gamma] \subset C_n(\alpha,\beta)$

(3) $C_n(\alpha,\beta) \subset C_{n+1}(\alpha,\beta) \subset C(\alpha,\beta)$

(4) $C(\alpha,\beta)$ ist die kleinste gegenüber Addition und allen Funktionen aus $\mathcal{G}$ abgeschlossene Obermenge von $\{0\} \cup \beta$ mit der Eigenschaft:
(C) $\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta) \wedge \xi,\eta \in C(\alpha,\beta) \implies \Theta\xi\eta \in C(\alpha,\beta)$.

Anmerkung

In Aczel [1] und Bridge [3] wird $C(\alpha,\beta)$ als die kleinste gegenüber Addition und allen Funktionen aus $\mathcal{G}$ abgeschlossene Obermenge von $\{0\} \cup \beta$ definiert, welche (C') $\xi < \alpha \wedge \xi,\eta \in C(\alpha,\beta) \implies \Theta\xi\eta \in C(\alpha,\beta)$ erfüllt. In [4] wird gezeigt, daß für spezielle Mengen $\mathcal{G}$ (wie z.B. für die in §4 behandelten $\mathcal{G}_\tau$ und $\{g\}$) die oben definierten Mengen $C^{\mathcal{G}}(\alpha,\beta)$ ebenfalls die Bedingung (C') erfüllen. Zumindest in jenen Fällen ist also die hier gegebene Definition der Θ_α äquivalent zu der ursprünglichen Definition von Feferman und Aczel [1] 2). - Dadurch, daß man die Bedingung $\xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta)$ in die Definition der Mengen $C(\alpha,\beta)$ einfügt, kann man Corollar 1.16 und Theorem 1.17 aus Bridge [3] (bzw. Folgerung (12) und Lemma 5 der vorliegenden Arbeit) unmittelbar beweisen, ohne vorher den sehr komplizierten Beweis für das Theorem 1.15 aus [3] führen zu müssen. Diese Möglichkeit wurde von SCHÜTTE entdeckt und dem Autor während der Abfassung seiner Dissertation mitgeteilt.

Lemma 1

a) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \wedge \beta_1 \leqslant \beta_2 \implies C(\alpha_1,\beta_1) \subset C(\alpha_2,\beta_2)$

b) β Limeszahl $\implies C(\alpha,\beta) = \bigcup_{\eta\in\beta} C(\alpha,\eta)$

---

1) Wir schreiben $\Theta\xi\eta$ für $\Theta_\xi(\eta)$. 2) Dies folgt auch aus [3] 1.16 .

c) $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \forall\xi(\alpha_1 \leqslant \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1,\beta)) \Longrightarrow C(\alpha_1,\beta) = C(\alpha_2,\beta)$
d) $\alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow Kr(\alpha_2) \subset Kr(\alpha_1)$
e) $\alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \Theta\alpha_1\beta \leqslant \Theta\alpha_2\beta$
f) $\beta_1 < \beta_2 \Longrightarrow \beta_1 \leqslant \Theta\alpha\beta_1 < \Theta\alpha\beta_2$

Lemma 2

Ist $\beta_1 = \min\{\zeta \mid \zeta \notin C(\alpha,\beta)\}$, so gilt:

$$\beta \leqslant \beta_1 < \beta^+ \quad , \quad C(\alpha,\beta) = C(\alpha,\beta_1) \quad , \quad \beta_1 \in Kr(\alpha) \quad .$$

Beweis. Da $\mathcal{G}$ abzählbar ist, muß die Menge $C(\alpha,\beta)$ eine Mächtigkeit $< \beta^+$ haben. Also ist $\beta \leqslant \beta_1 < \beta^+$. Aus $\beta \subset \beta_1 \subset C(\alpha,\beta)$ folgt $\beta_1 \notin C(\alpha,\beta_1) = C(\alpha,\beta)$.

Folgerungen: (5) $C(\alpha,\Theta\alpha 0) = C(\alpha,0)$

(6) $C(\alpha,\Theta\alpha(\beta+1)) = C(\alpha,\Theta\alpha\beta+1)$

Satz 1

Es gilt $S\Theta\alpha\beta = S\beta$ und $\Theta\alpha\Omega_\xi = \Omega_\xi$ für $\xi > 0$.

Beweis. Nach Lemma 2 ist $\sup\{\zeta \mid \zeta \in Kr(\alpha) \wedge \zeta < \beta^+\} = \beta^+$. Da β^+ regulär ist, muß also $\{\eta \mid \Theta\alpha\eta < \beta^+\} = \beta^+$ sein. Folglich ist $\beta \leqslant \Theta\alpha\beta < \beta^+$, d.h. $S\Theta\alpha\beta = S\beta$. - Ist $0 < \xi$, so ist (wegen $K \subset Kr(\alpha)$) $\Omega_\xi = \Theta\alpha\beta$ für ein β . Mit $S\Theta\alpha\beta = S\beta$ folgt $\Omega_\xi \leqslant \beta \leqslant \Theta\alpha\beta = \Omega_\xi$, d.h. $\Omega_\xi = \Theta\alpha\Omega_\xi$.

Folgerungen: (7) $\beta \in K \Longleftrightarrow \Theta\alpha\beta \in K$

(8) $\beta \leqslant \gamma \in C(\alpha,\beta) \cap K \Longrightarrow \gamma \in |\mathcal{G}| \wedge \mathcal{G}[\gamma] \subset C(\alpha,\beta)$

(9) $\gamma \in C_n(\alpha,\beta) \Longrightarrow S\gamma \in C_n(\alpha,\beta)$

Satz 2

Θ_α ist Normalfunktion, d.h. Θ_α ist eine streng monotone Funktion von On in On mit $\Theta\alpha\beta = \sup\{\Theta\alpha\eta \mid \eta \in \beta\}$ für jede Limeszahl β .

Ferner gilt:

(i) $Kr(0) = H$
(ii) $Kr(\alpha+1) = \{\Theta\alpha\beta \mid \alpha \notin C(\alpha,\Theta\alpha\beta) \vee \Theta\alpha\beta = \beta\}$
(iii) $Kr(\alpha) = \bigcap_{\xi\in\alpha} Kr(\xi)$, wenn α Limeszahl ist .

Beweis. Wir beweisen zunächst (i) - (iii). (i): Nach (1) ist $Kr(0) \subset H$. Aus $\beta \in H \setminus K$ folgt $\beta \notin C_n(0,\beta)$ durch Induktion nach n, also ist $H \subset Kr(0)$.
(ii): 1. Ist $\Theta\alpha\beta \in K$, so gilt $\Theta\alpha\beta \in Kr(\alpha+1)$ und $\Theta\alpha\beta = \beta$. Ist $\Theta\alpha\beta \notin K$, so gilt: $\Theta\alpha\beta \in Kr(\alpha+1) \Longleftrightarrow \Theta\alpha\beta \notin C(\alpha+1,\Theta\alpha\beta)$.
2. Aus $\Theta\alpha\beta \notin K$ und $\alpha \notin C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$ folgt mit Lemma 1c $\Theta\alpha\beta \notin C(\alpha+1,\Theta\alpha\beta)$.
3. Aus $\Theta\alpha\beta \notin K$ und $\Theta\alpha\beta = \beta$ folgt $\Theta\alpha\beta \notin C_n(\alpha+1,\Theta\alpha\beta)$ durch Induktion nach n.
4. Aus $\alpha \in C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$ und $\beta < \Theta\alpha\beta$ folgt mit Lemma 1a $\Theta\alpha\beta \in C(\alpha+1,\Theta\alpha\beta)$.
Aus 1.-4. folgt unmittelbar die Behauptung (ii).

(iii): Für Limeszahlen α gilt $Kr(\alpha) = \{\beta \mid \beta \notin C(\alpha,\beta)\} \cup K =$
$= \{\beta \mid \forall\xi(\xi<\alpha \longrightarrow \beta\notin C(\xi,\beta))\} \cup K = \bigcap_{\xi\in\alpha}\{\beta \mid \beta\notin C(\xi,\beta)\} \cup K = \bigcap_{\xi\in\alpha} Kr(\xi)$.
Aus (i) - (iii) und Lemma 1a,b folgt durch transfinite Induktion nach α $\sup M \in Kr(\alpha)$ für jede nichtleere Teilmenge M von $Kr(\alpha)$. Daraus folgt $\Theta\alpha\beta = \sup_{\eta\in\beta} \Theta\alpha\eta$ für jede Limeszahl β .

Folgerungen

(10) $\Theta 0\beta = \omega^{\beta}$, $\Theta 1\beta = \varepsilon_{\beta}$.

(11) $\left.\begin{array}{l}\Theta\alpha_1\beta_1 = \Theta\alpha_2\beta_2 \quad \text{und} \\ \alpha_i \in C(\alpha_i,\Theta\alpha_i\beta_i)\ ,\ \beta_i < \Theta\alpha_i\beta_i \quad \text{für } i=1,2\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2\ ,\ \beta_1=\beta_2$

Wegen der Bedingung $\xi\in C(\xi,\Theta\xi\eta)$ in der Definition von $C(\alpha,\beta)$ folgt nun aus Satz 1 , (1) , (7) und (11) unmittelbar:

(12) $\left.\begin{array}{l}\beta \leqslant \Theta\xi\eta \in C_{n+1}(\alpha,\beta) \quad \text{und} \\ \xi\in C(\xi,\Theta\xi\eta)\ ,\ \eta<\Theta\xi\eta\end{array}\right\} \Longrightarrow \xi<\alpha \text{ und } \xi,\eta\in C_n(\alpha,\beta)$

Satz 3

a) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \wedge \forall\xi(\alpha_1\leqslant\xi<\alpha_2 \rightarrow \xi\notin C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta)) \Longrightarrow \Theta\alpha_1\beta = \Theta\alpha_2\beta$

b) $\exists\xi(\alpha_1\leqslant\xi<\alpha_2 \wedge \xi\in C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta)) \Longrightarrow \Theta\alpha_1(\Theta\alpha_2\beta) = \Theta\alpha_2\beta$

Beweis. a) Aus der Voraussetzung folgt mit Lemma 1a,c $C(\alpha_1,\eta) = C(\alpha_2,\eta)$ für alle $\eta\leqslant\Theta\alpha_1\beta$. Also ist $Kr(\alpha_1)\cap(\Theta\alpha_1\beta+1) = Kr(\alpha_2)\cap(\Theta\alpha_1\beta+1)$. Daraus folgt $\Theta\alpha_1\beta = \Theta\alpha_2\beta$. - b) Aus der Voraussetzung folgt: Es gibt ein ξ mit $\alpha_1\leqslant\xi\in C(\xi,\Theta\alpha_2\beta)$ und $\Theta\alpha_2\beta\in Kr(\xi+1)$ (Lemma 1a,d,e). Mit Satz 2(ii) folgt $\Theta\xi(\Theta\alpha_2\beta) = \Theta\alpha_2\beta$, also $\Theta\alpha_2\beta \leqslant \Theta\alpha_1(\Theta\alpha_2\beta) \leqslant \Theta\alpha_2\beta$.

Aus Satz 3a und Lemma 1a,c folgt:
$\forall\xi(\alpha_1\leqslant\xi<\alpha_2 \rightarrow \xi\notin C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta)) \Longleftrightarrow \forall\xi(\alpha_1\leqslant\xi<\alpha_2 \rightarrow \xi\notin C(\alpha_2,\Theta\alpha_2\beta))$;
und mit Satz 3b folgt daraus Lemma 3 .

Lemma 3

$\alpha_1<\alpha_2 \wedge \alpha_1\in C(\alpha_2,\Theta\alpha_2\beta_2) \wedge \beta_1<\Theta\alpha_2\beta_2 \Longrightarrow \Theta\alpha_1\beta_1<\Theta\alpha_2\beta_2$

Lemma 4

$\Theta\alpha\beta \notin C(\alpha,\Theta\alpha\beta) \Longrightarrow C(\alpha,\Theta\alpha\beta)\cap\beta^+ = \Theta\alpha\beta$

Beweis. Durch Induktion nach n zeigt man $C_n(\alpha,\Theta\alpha\beta)\cap\beta^+ \subset \Theta\alpha\beta$: Ist $\gamma<\beta^+$ und $H[\gamma]\subset C_{n-1}(\alpha,\beta)$, so folgt mit I.V. (Induktionsvoraussetzung) $H[\gamma]\subset \Theta\alpha\beta$, also $\gamma<\Theta\alpha\beta$, denn $\Theta\alpha\beta$ ist ja eine additive Hauptzahl. - Ist $\gamma\in |\mathcal{G}|\cap C(\alpha,\Theta\alpha\beta)\cap\beta^+$, so folgt $\Theta\alpha\beta \geqslant \gamma\in C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$, also nach Vorausssetzung $\gamma<\Theta\alpha\beta$. - Ist $\gamma = \Theta\xi\eta \in C_n(\alpha,\Theta\alpha\beta)\cap\beta^+$ mit $\xi<\alpha$ und $\xi,\eta\in C_{n-1}(\alpha,\Theta\alpha\beta)$, so folgt nach I.V. (wegen $\eta \leqslant \gamma$) $\eta < \Theta\alpha\beta$; aus $\xi < \alpha$, $\xi \in C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$, $\eta < \Theta\alpha\beta$ folgt nach Lemma 3 $\gamma = \Theta\xi\eta < \Theta\alpha\beta$.

Lemma 5

$$\gamma \in C_n(\alpha,\beta) \wedge \gamma \in C(\alpha_1,\Theta\alpha_1(\beta_1+1)) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1) \implies \beta_1 \in C_n(\alpha,\beta)$$

Beweis durch Induktion nach n. Es sei $\beta \leqslant \beta_1 \neq \gamma$, da sonst die Behauptung trivial ist. Wegen $\gamma \in C_n(\alpha,\beta) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$ gilt nun $\beta \leqslant \Theta\alpha_1\beta_1 \leqslant \gamma$ und $0 < n$. Aus $\gamma \in C(\alpha_1,\Theta\alpha_1(\beta_1+1)) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$ folgt $\zeta \in C(\alpha_1,\Theta\alpha_1(\beta_1+1)) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$ für mindestens ein $\zeta \in H[\gamma]$ bzw. $\zeta \in \mathcal{G}[\gamma]$, wenn $\gamma \in K$ (siehe dazu die Folgerungen (2),(3),(8)). Aus der I.V. folgt daher $\beta_1 \in C_{n-1}(\alpha,\beta)$, falls $H[\gamma] \subset C_{n-1}(\alpha,\beta)$ oder $\mathcal{G}[\gamma] \subset C_{n-1}(\alpha,\beta)$ $(\gamma \in K)$ ist. Es bleibt nun nur noch der folgende Fall zu behandeln:

(✱) $\gamma = \Theta\xi\eta \wedge \xi < \alpha \wedge \xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta) \wedge \{\xi,\eta\} \subset C_{n-1}(\alpha,\beta)$.

1. Ist $\eta = \gamma$, so ist $\gamma \in C_{n-1}(\alpha,\beta)$, und mit der I.V. folgt $\beta_1 \in C_{n-1}(\alpha,\beta)$.
2. Sei $\eta < \gamma = \Theta\alpha_1\beta_1$. Mit $\xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta)$ folgt nach Satz 2(ii) $\Theta\alpha_1\beta_1 \notin Kr(\xi+1)$, also $\alpha_1 \leqslant \xi$. Aus $\alpha_1 \leqslant \xi$ folgt mit Satz 3 $\Theta\alpha_1\eta = \Theta\xi\eta$ oder $\Theta\alpha_1(\Theta\xi\eta) = \Theta\xi\eta$, also $\beta_1 \in \{\eta,\gamma\} \subset C_n(\alpha,\beta)$.
3. Sei $\Theta\alpha_1\beta_1 < \gamma$ und $\eta < \gamma$. Wegen $\gamma \in C(\alpha_1,\Theta\alpha_1(\beta_1+1))$ folgt daraus mit (✱),(6) und (12) $\xi < \alpha_1$ und $\{\xi,\eta\} \subset C(\alpha_1,\Theta\alpha_1(\beta_1+1))$. Aus $\xi < \alpha_1$ und $\gamma \notin C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$ folgt außerdem $\{\xi,\eta\} \not\subset C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$. Also ist nach I.V. $\beta_1 \in C_{n-1}(\alpha,\beta)$.

§2 Die Funktionen $\overline{\Theta}_\alpha$

Θ_α ist die Ordnungsfunktion der Klasse $Kr(\alpha)$ der α-kritischen Zahlen. Wir betrachten nun im folgenden gewisse Hilfsfunktionen $\overline{\Theta}_\alpha$, deren Wertebereich jeweils die Klasse $Kr(\alpha) \setminus Kr(\alpha+1)$ der maximal α-kritischen Zahlen ist. Diese Funktionen stehen naturgemäß in enger Beziehung zu den Normalfunktionen Θ_α (vergl. Satz 4a,b) , sind aber besser als jene zur rekursiven Darstellung von Ordinalzahlen geeignet.

Anmerkung: Offenbar ist $\{\Theta\alpha(\beta+1) \mid \alpha \leqslant \beta\} \subset Kr(\alpha) \setminus Kr(\alpha+1)$. Die maximal α-kritischen Zahlen bilden also eine echte Klasse.

Definitionen

$\overline{Kr}(\alpha) := Kr(\alpha) \setminus Kr(\alpha+1)$

$\mu(\alpha) := \min\{\eta \mid \Theta\alpha\eta \in \overline{Kr}(\alpha)\}$

$\overline{\Theta}_\alpha$ sei der Ordnungsisomorphismus von $\{\eta \mid S\mu(\alpha) \leqslant \eta\}$ auf $\overline{Kr}(\alpha)$.

Bemerkung: Die Ordnungsfunktion von $\overline{Kr}(\alpha)$ ist $\lambda\eta\overline{\Theta}_\alpha(S\mu(\alpha)+\eta)$.

Wir schreiben wieder $\overline{\Theta}\alpha\beta$ statt $\overline{\Theta}_\alpha(\beta)$.

Aus Satz 2(ii) folgt:

$$(13) \qquad \Theta\alpha\beta \in \overline{Kr}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in C(\alpha,\Theta\alpha\beta) \wedge \beta < \Theta\alpha\beta$$

Lemma 6

$\mu(\alpha) = \min\{\eta \mid \alpha \in C(\alpha,\Theta\alpha\eta)\}$ und $\mu(\alpha)$ ist keine Limeszahl .

Beweis. Sei $\eta_o := \min\{\eta \mid \alpha \in C(\alpha,\Theta\alpha\eta)\}$. Wegen Lemma 1b und Satz 2 kann η_o keine Limeszahl sein, also ist $\eta_o < \Theta\alpha\eta_o$ und somit wegen (13) $\eta_o = \mu(\alpha)$

Lemma 7

$\alpha_1 \in C_n(\alpha,\beta) \quad \Longrightarrow \quad \mu(\alpha_1) \in C(\alpha,\beta) \wedge S\mu(\alpha_1) \in C_n(\alpha,\beta)$

Beweis. Sei $\mu(\alpha_1) \neq 0$. Nach Lemma 6 ist also $\mu(\alpha_1) = \beta_1 + 1$ mit $\alpha_1 \in C(\alpha_1, \Theta\alpha_1(\beta_1+1)) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$. Aus $\alpha_1 \in C(\alpha,\beta) \setminus C(\alpha_1,\Theta\alpha_1\beta_1)$ folgt mit Lemma 1a $\alpha_1 < \alpha$ oder $\Theta\alpha_1\beta_1 < \beta$, also $1 \in C(\alpha,\beta)$. Mit (9) und Lemma 5 folgt die Beh.

Definitionen

$$\iota\alpha\beta := \begin{cases} 1 & \text{, wenn } \beta = \beta_o + n \text{ mit } \mu(\alpha) < \beta_o = \Theta\alpha\beta_o \text{ und } n < \omega, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Für $\alpha \leq \beta$ sei $\underline{-\alpha + \beta}$ die eindeutig bestimmte Zahl γ mit $\alpha + \gamma = \beta$.

Satz 4

Für $S\mu(\alpha) \leq \beta$ bzw. $S\mu(\alpha_i) \leq \beta_i$ $(i = 1,2)$ gilt:

a) $\overline{\Theta}\alpha\beta = \Theta\alpha(\mu(\alpha) + (-S\mu(\alpha) + \beta) + \iota\alpha\beta)$

b) $S\overline{\Theta}\alpha\beta = S\beta$

c) $\overline{\Theta}\alpha_1\beta_1 = \overline{\Theta}\alpha_2\beta_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$

Beweis. a) 1. Sei $S\mu(\alpha) \leq \beta$ und $\beta_o := \mu(\alpha) + (-S\mu(\alpha) + \beta)$. Ist $\beta_o < \Theta\alpha\beta_o$, so ist auch $\beta_o + \iota\alpha\beta < \Theta\alpha(\beta_o + \iota\alpha\beta)$. Ist $\beta_o = \Theta\alpha\beta_o$, so ist β_o eine ε-Zahl, und nach Lemma 6 muß $\mu(\alpha) < \beta_o$ sein ; daraus folgt $\beta = \beta_o$; also ist $\iota\alpha\beta = 1$ und daher ebenfalls $\beta_o + \iota\alpha\beta < \Theta\alpha(\beta_o + \iota\alpha\beta)$. Nach Lemma 6 ist $\alpha \in C(\alpha, \Theta\alpha\mu(\alpha)) \subset C(\alpha,\Theta\alpha(\beta_o + \iota\alpha\beta))$. Mit (13) folgt $\Theta\alpha(\mu(\alpha)+(-S\mu(\alpha)+\beta)+\iota\alpha\beta) \in \overline{Kr}(\alpha)$.
2. Sei $\gamma \in \overline{Kr}(\alpha)$. Aus (13) und Lemma 6 folgt $\gamma = \Theta\alpha\eta$ mit $\mu(\alpha) \leq \eta < \Theta\alpha\eta$. Es gibt nun genau ein η_1 mit $\mu(\alpha) + \eta_1 + \iota\alpha\eta = \eta$. Sei $\beta := S\mu(\alpha) + \eta_1$, also $\eta_1 = -S\mu(\alpha) + \beta$. Wie man leicht nachprüft, ist $\iota\alpha\beta = \iota\alpha\eta$, denn aus $\iota\alpha\beta = 1$ oder $\iota\alpha\eta = 1$ folgt $\eta = \beta + \iota\alpha\eta$. Es folgt $\gamma = \Theta\alpha(\mu(\alpha) + (-S\mu(\alpha)+\beta)+\iota\alpha\beta)$
3. Aus $\beta_1 < \beta_2$ folgt $\beta_1 + \iota\alpha\beta_1 < \beta_2 + \iota\alpha\beta_2$.
Nach 1.,2.,3. liefert die Zuordnung $\beta \longmapsto \Theta\alpha(\mu(\alpha) + (-S\mu(\alpha) + \beta) + \iota\alpha\beta)$ eine ordnungstreue und bijektive Abbildung von $\{\eta \mid S\mu(\alpha) \leq \eta\}$ auf $\overline{Kr}(\alpha)$. Daraus folgt die Behauptung a).

b) folgt aus a); c) folgt mit Lemma 1d aus der Definition von $\bar{\Theta}_\alpha$.

<u>Satz 5</u>

Ist $S\mu(\xi) \leqslant \eta_o$, so gilt :

a) $\xi < \alpha \wedge \xi,\eta_o \in C(\alpha,\beta) \quad\Longrightarrow\quad \bar{\Theta}\xi\eta_o \in C(\alpha,\beta)$

b) $\beta \leqslant \bar{\Theta}\xi\eta_o \in C(\alpha,\beta) \quad\Longrightarrow\quad \xi < \alpha \wedge \xi,\eta_o \in C(\alpha,\beta)$

Beweis. Sei $\gamma := \bar{\Theta}\xi\eta_o$ und $\eta := \mu(\xi) + (-S\mu(\xi) + \eta_o) + \iota\xi\eta_o$. Dann gilt:

(i) $\gamma = \Theta\xi\eta \wedge \xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta) \wedge \eta < \Theta\xi\eta$ (siehe (13) und Satz4),

(ii) $H[\eta_o] \subset \{S\mu(\xi)\} \cup H[\eta]$.

a) Sei $\xi < \alpha$ und $\xi,\eta_o \in C(\alpha,\beta)$. Mit Lemma 7 folgt $\eta \in C(\alpha,\beta)$. Aus $\xi < \alpha$, $\xi,\eta \in C(\alpha,\beta)$ und (i) folgt $\gamma \in C(\alpha,\beta)$.

b) Sei $\beta \leqslant \gamma \in C_{n+1}(\alpha,\beta)$. Wegen (i) folgt daraus mit <u>(12)</u> $\xi < \alpha$ und $\xi,\eta \in C_n(\alpha,\beta)$. Mit (2),Lemma 7,und (ii) folgt weiter $H[\eta_o] \subset C_n(\alpha,\beta)$.

§3 O r d i n a l t e r m e und K o e f f i z i e n t e n m e n g e n

Wir betrachten nun die Menge T derjenigen Ordinalzahlen, die sich durch einen aus den Zeichen 0 , + , $\bar{\Theta}$, f ($f \in \mathcal{G}$) gebildeten <u>Ordinalterm</u> darstellen lassen. Nach Einführung sogenannter <u>Koeffizientenmengen</u> $K^*_\kappa\gamma$, $K_\kappa\gamma$ (für $\gamma \in T$) werden wir durch die Sätze 8 und 9 Hilfsmittel erhalten, die eine rekursive Charakterisierung der Menge T und der <-Relation auf T ermöglichen - vorausgesetzt, $\mathcal{G}$ erfüllt gewisse Rekursivitätsbedingungen.

<u>Induktive Definition einer Ordinalzahlenmenge T</u>

(T1) $0 \in T$

(T2) $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \subset T \cap H \wedge \gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n \wedge n > 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma_1 + \ldots + \gamma_n \in T$

(T3) $\alpha,\beta \in T \wedge S\mu(\alpha) \leqslant \beta \quad\Longrightarrow\quad \bar{\Theta}\alpha\beta \in T$

(T4) $\{\xi_1,\ldots,\xi_m\} \subset T \wedge f \in \mathcal{G} \wedge (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in D(f) \Longrightarrow f(\xi_1,\ldots,\xi_m) \in T$

<u>Definition</u>

$\Lambda := \min\{\nu \in K \mid \forall\gamma(\gamma \in |\mathcal{G}| \wedge \mathcal{G}[\gamma] \subset \nu \rightarrow \gamma \in \nu)\}$,

d.h. Λ ist die kleinste gegenüber allen Funktionen aus $\mathcal{G}$ abgeschlossene Kardinalzahl $> \omega$.

<u>Folgerungen:</u> (14) $T \subset \Lambda$

(15) $\beta \leqslant \Lambda \quad\Longrightarrow\quad C(\alpha,\beta) \subset \Lambda$

(16) $\beta \leqslant \Lambda \leqslant \alpha \quad\Longrightarrow\quad C(\alpha,\beta) = C(\Lambda,\beta) \wedge \Theta\alpha\beta = \Theta\Lambda\beta$

Satz 6

Es ist $T = C(\Lambda,0)$ und $T \cap \Omega_1 = \Theta\Lambda 0$.

Beweis. 1. Mit Satz 5 und $T \subset \Lambda$ folgt $T \subset C(\Lambda,0)$ durch T-Induktion (d.h. durch Induktion nach den Definitionsregeln (T1),...,(T4)).
2. Durch Induktion nach n beweist man $C_n(\Lambda,0) \subset T$. Der einzige nicht triviale Fall ist dabei folgender: $\gamma = \Theta\xi\eta \in C_{n+1}(\Lambda,0)$ mit $\xi < \Lambda$, $\eta < \Theta\xi\eta$ $\xi \in C(\xi,\Theta\xi\eta)$ und $\xi,\eta \in C_n(\Lambda,0)$. In diesem Falle folgt aus (13) $\gamma = \overline{\Theta}\xi\eta_o$ mit $S\mu(\xi) \leqslant \eta_o$. Nach dem Beweis von Satz 5b ist dann $H[\eta_o] \subset C_n(\Lambda,0)$. Aus $\{\xi\} \cup H[\eta_o] \subset C_n(\Lambda,0)$ folgt mit I.V. und (T2) $\xi,\eta_o \in T$. Mit (T3) folgt $\gamma = \overline{\Theta}\xi\eta_o \in T$.
3. Aus $T = C(\Lambda,0) = C(\Lambda,\Theta\Lambda 0)$ folgt mit Lemma 4 $T \cap \Omega_1 = \Theta\Lambda 0$.

Induktive Definition der Koeffizientenmengen $K^*_\kappa\gamma$ und $K_\kappa\gamma$ für $\gamma \in T$

Die Definition erfolgt durch T-Induktion. Die Regeln (T1),...,(T4) sind so abgefaßt , daß die Definition eindeutig wird. Für $M \subset T$ sei $K^{(*)}_\kappa M := \bigcup\{K^{(*)}_\kappa\gamma \mid \gamma \in M\}$.

1. $K^*_\kappa\gamma := K^*_\kappa H[\gamma]$ und $K_\kappa\gamma := K_\kappa H[\gamma]$, wenn $\gamma \in T \setminus H$.
2. $K^*_\kappa\gamma := K^*_\kappa\mathscr{G}[\gamma]$ und $K_\kappa\gamma := K_\kappa\mathscr{G}[\gamma]$, wenn $\gamma \in T \cap K$ und $\kappa^+ \leqslant \gamma$.
3. $K^*_\kappa\gamma := \emptyset$ und $K_\kappa\gamma := \{\gamma\}$, wenn $\gamma \in T \cap H$ und $\gamma < \kappa^+$.
4. $K^*_\kappa\overline{\Theta}\alpha\beta := \{\alpha\} \cup K^*_\kappa\alpha \cup K^*_\kappa\beta$ und $K_\kappa\overline{\Theta}\alpha\beta := K_\kappa\alpha \cup K_\kappa\beta$,
   wenn $\alpha,\beta \in T$, $S\mu(\alpha) \leqslant \beta$ und $\kappa^+ \leqslant \beta$.

Für $\gamma \in T$ sind $K^*_\kappa\gamma$ und $K_\kappa\gamma$ endliche Teilmengen von T . Die Elemente von $K_\kappa\gamma$ sind additive Hauptzahlen $< (\gamma+1) \cap \kappa^+$.

Für $M \subset On$ sei: $M < \alpha \;:\Longleftrightarrow\; \forall\xi(\xi \in M \rightarrow \xi < \alpha)$
$\alpha \leqslant M \;:\Longleftrightarrow\; \exists\xi(\xi \in M \wedge \alpha \leqslant \xi) \;\Longleftrightarrow\; \neg(M < \alpha)$

Satz 7

Für $\gamma \in T$ und $\beta \in Kr(\alpha) \setminus K$ gilt:

$$\gamma \in C(\alpha,\beta) \quad\Longleftrightarrow\quad K^*_{S\beta}\gamma < \alpha \;\wedge\; K_{S\beta}\gamma < \beta \;.$$

Beweis durch T-Induktion mit (2) , (8) , Lemma 4 und Satz 5 .

Satz 8

Für $\alpha \in T$ gilt : $\quad S\mu(\alpha) \leqslant \beta \iff K^*_{S\beta}\alpha < \alpha$.

Beweis. Aus Lemma 6 und Satz 7 folgt:
$S\mu(\alpha) \leqslant \beta \iff \exists\eta(S\beta = S\eta \wedge \alpha \in C(\alpha,\Theta\alpha\eta)) \iff K^*_{S\beta}\alpha < \alpha$.

Satz 9

Für $\alpha, \alpha_1 \in T$ und β, β_1 mit $S\mu(\alpha) \leqslant \beta$, $S\mu(\alpha_1) \leqslant \beta_1$ gilt:

a) $K_{S\beta}\alpha \cup \{\beta\} < \bar{\Theta}\alpha\beta$

b) $\alpha_1 < \alpha \wedge K_{S\beta_1}\alpha_1 \cup \{\beta_1\} < \bar{\Theta}\alpha\beta \implies \bar{\Theta}\alpha_1\beta_1 < \bar{\Theta}\alpha\beta$

Beweis. a) Aus Satz 4a folgt $\bar{\Theta}\alpha\beta = \Theta\alpha\bar{\beta}$ für ein $\bar{\beta} \geqslant \beta$. Nach (13) ist also $\alpha \in C(\alpha, \Theta\alpha\bar{\beta})$ und $\beta \leqslant \bar{\beta} < \Theta\alpha\bar{\beta}$. Mit Satz 7 folgt daraus $K_{S\beta}\alpha \cup \{\beta\} < \bar{\Theta}\alpha\beta$. b) Ist $S\beta_1 \neq S\beta$, so folgt die Behauptung aus Satz 4b. - Sei $S\beta_1 = S\beta$. Aus $\alpha_1 < \alpha$, $S\mu(\alpha_1) \leqslant \beta_1$ und $K_{S\beta_1}\alpha_1 < \bar{\Theta}\alpha\beta$ folgt nach den Sätzen 7 und 8 $\alpha_1 \in C(\alpha, \bar{\Theta}\alpha\beta)$. Mit $\beta_1 < \bar{\Theta}\alpha\beta$, Satz 4b , Satz 5a und Lemma 4 folgt daraus $\bar{\Theta}\alpha_1\beta_1 \in C(\alpha, \bar{\Theta}\alpha\beta) \cap \beta^+ = \bar{\Theta}\alpha\beta$.

Nichtkonstruktive Definition von $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$

Durch die induktive Definition von T wird zugleich jedem $\gamma \in T$ in eindeutiger Weise ein aus den Zeichen 0 , $+$, $\bar{\Theta}$, f ($f \in \mathcal{G}$) gebildeter Ordinalterm $\bar{\Theta}[\gamma]$ zugeordnet, der in der klassischen Ordinalzahltheorie die Zahl γ darstellt. Wir nennen $\bar{\Theta}[\gamma]$ die "$\bar{\Theta}$-Darstellung von γ". (Beispiele: $\bar{\Theta}[0] = 0$, $\bar{\Theta}[1] = \bar{\Theta}00$, $\bar{\Theta}[\omega+2] = \bar{\Theta}0\bar{\Theta}00 + \bar{\Theta}\,00 + \bar{\Theta}00$)

Das Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$ sei die Termmenge $\{\bar{\Theta}[\gamma] \mid \gamma \in T\}$ zusammen mit der durch $\bar{\Theta}[\gamma] < \bar{\Theta}[\delta] \;:\Longleftrightarrow\; \gamma < \delta$ definierten $<$-Relation auf dieser Menge.

Mittels der Sätze 4b , 8 , 9 läßt sich für Terme $\bar{\Theta}a_1b_1$ die Entscheidung darüber, ob $\bar{\Theta}a_1b_1 \in \bar{\Theta}(\mathcal{G})$ bzw. $\bar{\Theta}a_1b_1 < \bar{\Theta}a_2b_2$ ist, auf die Entscheidung entsprechender Fragen für kürzere Terme zurückführen. Gilt ähnliches für die Terme der Gestalt $fa_1 \ldots a_m$ ($f \in \mathcal{G}$), so kann das Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$ rekursiv definiert werden; dies trifft z.B. (wie wir in §5 zeigen werden) für die in §4 eingeführten Systeme $\bar{\Theta}(\tau)$ und $\bar{\Theta}(\{g\})$ zu.

Von besonderem Interesse ist stets die Teilmenge $\bar{\Theta}_0(\mathcal{G}) := \{\bar{\Theta}[\gamma] \mid \gamma \in T \cap \Omega_1\}$ von $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$; denn für $a = \bar{\Theta}[\gamma] \in \bar{\Theta}_0(\mathcal{G})$ ist nach Satz 6 $\gamma = \|\{x \in \bar{\Theta}(\mathcal{G}) \mid x < a\}\|$, d.h. ein Term aus $\bar{\Theta}_0(\mathcal{G})$ repräsentiert in dem wohlgeordneten System $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$ genau die Ordinalzahl, deren $\bar{\Theta}$-Darstellung er ist. - Der Ordnungstyp von $\bar{\Theta}_0(\mathcal{G})$ ist $\Theta\Lambda0$.

Eine Erweiterungseigenschaft von $\bar{\Theta}(\mathcal{G})$

Nehmen wir an, man habe mit Hilfe eines Systems $\bar{\Theta}(\mathcal{G}_0)$ eine Reihe beweistheoretischer Ergebnisse erhalten, aber zur Behandlung gewisser weiterer Probleme reiche der durch $\bar{\Theta}(\mathcal{G}_0)$ dargestellte Ordinalzahlenabschnitt nicht mehr aus. Man wird versuchen, durch Erweiterung der Menge $\mathcal{G}_0$ ein für den gewünschten Zweck genügend starkes Bezeichnungssystem

$\overline{\Theta}(\mathcal{G})$ herzustellen. Dabei wird man jedoch möglichst so verfahren wollen, daß $\overline{\Theta}(\mathcal{G}_0)$ in kanonischer Weise einem Teilsystem von $\overline{\Theta}(\mathcal{G})$ entspricht, d.h. daß $T^{\mathcal{G}_0} \subset T^{\mathcal{G}}$ ist, und für jedes $\gamma \in T^{\mathcal{G}_0}$ die $\overline{\Theta}$-Darstellung von γ bezüglich $\mathcal{G}_0$ mit der bezüglich $\mathcal{G}$ übereinstimmt. Hierzu liefert der folgende Satz 10 ein im allgemeinen ausreichendes Kriterium.

Definition

$f\upharpoonright\nu := \{(x,f(x)) \mid x \in D(f) \wedge f(x) < \nu\} \qquad (f \in \mathcal{G})$

$\mathcal{G}\upharpoonright\nu := \{f\upharpoonright\nu \mid f \in \mathcal{G} \wedge f\upharpoonright\nu \neq \emptyset\}$

Satz 10

Sei $\nu \in K$, $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}\upharpoonright\nu$ und gelte $\forall\gamma(\gamma \in |\mathcal{G}| \cap \nu \rightarrow \mathcal{G}[\gamma] < \nu)$.
Für $\alpha,\beta \leq \nu$ gilt dann: $\Theta_\alpha^{\mathcal{G}_0} = \Theta_\alpha^{\mathcal{G}}$ und $C^{\mathcal{G}_0}(\alpha,\beta) = C^{\mathcal{G}}(\alpha,\beta) \cap \nu$.
Daraus folgt speziell $T^{\mathcal{G}_0} = C^{\mathcal{G}}(\nu,0) \cap \nu$ und $\overline{\Theta}_\alpha^{\mathcal{G}_0} = \overline{\Theta}_\alpha^{\mathcal{G}}$ für $\alpha < \nu$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α (mit Satz 2).

§4 Die Systeme $\overline{\Theta}(\tau)$ und $\overline{\Theta}(\{g\})$ und ihre Beziehungen zu anderen Bezeichnungssystemen

τ, $\bar{\tau}$ mögen (rekursive) Ordinalzahlen $< \Omega_1$ bezeichnen.

Definitionen

1. $\mathcal{G}_\tau := \{\{(0,\Omega_{1+\xi})\} \mid \xi \in \tau\}$
   $\overline{\Theta}(\tau) := \overline{\Theta}(\mathcal{G}_\tau)$, $\Theta^\tau\alpha\beta := \Theta^{\mathcal{G}_\tau}\alpha\beta$, $C^\tau(\alpha,\beta) := C^{\mathcal{G}_\tau}(\alpha,\beta)$ usw.
2. $g_0 := \{(\xi,\Omega_{1+\xi}) \mid \xi \in On\}$
   $g_\alpha :=$ Ordnungsfunktion von $\{\eta \mid \forall\xi(\xi < \alpha \rightarrow g_\xi(\eta) = \eta)\}$, für $\alpha > 0$

   $$g\alpha\beta := \begin{cases} g_\alpha(\beta+1), & \text{wenn } \beta = \beta_0 + n \text{ mit } g_\alpha(\beta_0) = \beta_0 \\ g_\alpha(\beta), & \text{sonst} \end{cases}$$

   $g := \{((\xi,\eta),g\xi\eta) \mid (\xi,\eta) \in On \times On\}$

Folgerungen

(17) $\Lambda^\tau = \Omega_{1+\tau}$, $\Lambda^{\{g\}} = \min\{\xi \mid \xi = g\xi 0\}$. (17a) $K \cap \Omega_{1+\tau} \subset C^\tau(\alpha,\beta)$

(18) $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_{\bar{\tau}}\upharpoonright\Omega_{1+\tau}$, wenn $\tau \leq \bar{\tau}$

(19) $g\alpha_1\beta_1 < g\alpha_2\beta_2$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

(i)	$\alpha_1 < \alpha_2$	$\beta_1 < g\alpha_2\beta_2$
(ii)	$\alpha_1 = \alpha_2$	$\beta_1 < \beta_2$
(iii)	$\alpha_2 < \alpha_1$	$g\alpha_1\beta_1 \leq \beta_2$

$\{g\}$ erfüllt also die Unitätsbedingung von Seite 2.

Lemma 8

a) $\tau < \bar{\tau}$ und $\alpha, \beta \leqslant \Omega_{1+\tau} \implies \Theta^{\tau}_{\alpha} = \Theta^{\bar{\tau}}_{\alpha}$ und $C^{\tau}(\alpha,\beta) = C^{\bar{\tau}}(\alpha,\beta) \cap \Omega_{1+\tau}$

b) $\tau \leqslant \|\bar{\Theta}_0(\tau)\| = \Theta^{\tau}\Omega_{1+\tau}0$ und $\|\bar{\Theta}(\tau)\| < \Theta^{\bar{\tau}}\Omega_{1+\tau+1}0$ für $\tau < \bar{\tau}$

Beweis. a) folgt aus Satz 10 und (18) . b): Sei $\tau < \bar{\tau}$. Nach Satz 6, (17) und a) ist $\|\bar{\Theta}_0(\tau)\| = \Theta^{\tau}\Omega_{1+\tau}0$ und $\bar{\Theta}(\tau) = C^{\bar{\tau}}(\Omega_{1+\tau},0) \cap \Omega_{1+\tau}$. Nach (17a) u. Lemma 3 liefert die Zuordnung $\xi \longmapsto \Theta^{\tau}\Omega_{1+\xi}0$ bzw. $\xi \longmapsto \Theta^{\bar{\tau}}(\Omega_{1+\tau}+\xi)0$ eine ordnungstreue Abbildung von τ in $\Theta^{\tau}\Omega_{1+\tau}0$ bzw. von $C^{\bar{\tau}}(\Omega_{1+\tau},0) \cap \Omega_{1+\tau}$ in $\Theta^{\bar{\tau}}(\Omega_{1+\tau}+\Omega_{1+\tau})0$. Also ist $\tau \leqslant \|\bar{\Theta}_0(\tau)\|$ und $\|\bar{\Theta}(\tau)\| < \Theta^{\bar{\tau}}\Omega_{1+\tau+1}0$.

Vergleich der Funktionen Θ^{τ}_{α} und $\Theta^{\{g\}}_{\alpha}$

Festsetzung: Von jetzt an sei $\Theta\alpha\beta := \Theta^{\{g\}}\alpha\beta$, $C(\alpha,\beta) := C^{\{g\}}(\alpha,\beta)$ usw.

Lemma 9

a) $\Omega_{\Theta\Omega_{\Omega_1}\beta} \leqslant \alpha < \Omega_{\Omega_1} \implies \Theta\alpha\beta = \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$

b) $\alpha < \Omega_{\Theta\Omega_{\Omega_1}\beta} \wedge \beta < \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta < \Omega_1 \implies \Theta\alpha\beta < \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$

Beweis . Sei $\kappa := \Omega_{\Omega_1}$.

a) Sei $\Omega_{\Theta\kappa\beta} \leqslant \alpha \leqslant \xi < \kappa$. Dann ist $S\xi = \Omega_{\xi_0}$ mit $\Theta\kappa\beta \leqslant \xi_0 < \Omega_1$; also nach Lemma 4 $\xi_0 \notin C(\kappa,\Theta\kappa\beta)$ und somit auch $\xi \notin C(\kappa,\Theta\kappa\beta)$. Mit Satz 3a folgt $\Theta\alpha\beta = \Theta\kappa\beta$. - b) Aus $\alpha < \Omega_{\Theta\kappa\beta}$ folgt $S\alpha = \Omega_{\xi}$ mit $\xi < \Theta\kappa\beta$. Wegen $\beta < \Omega_1$ folgt weiter $\alpha < \Omega_{\xi+1} < \kappa$ und $\Omega_{\xi+1} \in C(\kappa,\Theta\kappa\beta)$. Mit $\beta < \Theta\kappa\beta$ und Lemma 3 folgt daraus $\Theta\alpha\beta \leqslant \Theta\Omega_{\xi+1}\beta < \Theta\kappa\beta$.

Definition: $\zeta_0(\beta) := \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$, $\zeta_0(-1) := \omega$

$\zeta_{n+1}(\beta) := \Theta\Omega_{\zeta_n(\beta)+1}(\beta+1)$ für $\beta \in On \cup \{-1\}$

Lemma 10

Sei $\beta \in \Omega_1 \cup \{-1\}$ und $\zeta_n := \zeta_n(\beta)$; dann gilt:

a) $\zeta_n < \Theta\Omega_{\zeta_n}(\beta+1) \leqslant \zeta_{n+1}$ und $\sup\{\zeta_n \mid n \in \omega\} = \Theta\Omega_{\Omega_1}(\beta+1)$

b) $\zeta_0 \leqslant \xi < \Theta\Omega_{\Omega_1}(\beta+1) \implies \xi < \Theta\Omega_{\xi}(\beta+1)$

c) $\xi < \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta \wedge \beta \in \Omega_1 \implies \xi < \Theta\Omega_{\xi}\beta$

Beweis. a) Durch Induktion nach n zeigt man: $\zeta_n < \Theta\Omega_{\zeta_n}(\beta+1) < \Theta\Omega_{\Omega_1}(\beta+1)$ und $C_n(\Omega_{\Omega_1},\zeta_0+1) \cap \Omega_{\Omega_1} \subset \bigcup_{i<\omega}(C(\Omega_{\zeta_i},\Theta\Omega_{\zeta_i}(\beta+1)) \cap \Omega_{\zeta_i})$. - b) Aus der Prämisse folgt mit a) $\zeta_n \leqslant \xi < \zeta_{n+1}$ für ein $n \in \omega$. Ist $\zeta_n = \xi$, so gilt die Behauptung nach a) . Ist $\zeta_n < \xi$, so folgt $\xi < \Theta\Omega_{\zeta_n+1}(\beta+1) \leqslant \Theta\Omega_{\xi}(\beta+1)$.

c) folgt aus b) .

Definition

$\alpha_* \;:=\; \min\{\eta \mid \alpha \leqslant \Omega_{\Theta\Omega_{\Omega_1}\eta}\}$

Satz 11 Für $\alpha < \Omega_{1+\tau}$ gilt :

a) $\Theta^\tau\alpha\beta = \Theta\alpha(\alpha_* + \beta)$

b) $C^\tau(\alpha,\Theta\alpha\beta) \cap \alpha^+ = C(\alpha,\Theta\alpha\beta) \cap \alpha^+$, wenn $\alpha < \Omega_{\Theta\Omega_{\Omega_1}\beta}$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α (gleichzeitig für a) und b)).

1. $\{\Theta\alpha\beta \mid \alpha_* \leqslant \beta\} \subset Kr^\tau(\alpha) \subset Kr(\alpha)$.

Beweis:

1.1. $\alpha = 0$: $Kr^\tau(0) = H = Kr(0)$.

1.2. $\alpha = \xi + 1$: Nach Satz 2(ii) ist $Kr^\tau(\alpha) = \{\Theta^\tau\xi\eta_1 \mid \xi \notin C^\tau(\xi,\Theta^\tau\xi\eta_1) \vee \eta_1 = \Theta^\tau\xi\eta_1\}$. Nach I.V. ist $\Theta^\tau\xi\eta_1 = \Theta\xi(\xi_* + \eta_1)$. Aus $\eta_1 = \Theta^\tau\xi\eta_1$ folgt $0 < \eta_1$ und somit $\xi < \Omega_{\Theta\kappa(\xi_* + \eta_1)}$ (es sei wieder $\kappa := \Omega_{\Omega_1}$) .
Aus $\xi \notin C^\tau(\xi,\Theta^\tau\xi\eta_1)$ folgt $\xi \notin K$, also ebenfalls $\xi < \Omega_{\Theta\kappa(\xi_* + \eta_1)}$. — Andererseits folgt aus $\xi < \Omega_{\Theta\kappa\eta}$ und der I.V.: $\xi_* \leqslant \eta$, $C^\tau(\xi,\Theta\xi\eta) \cap \xi^+ = C(\xi,\Theta\xi\eta) \cap \xi^+$ und $(\Theta\xi\eta = \eta \longleftrightarrow -\xi_* + \eta = \Theta\xi\eta)$. Zusammengefaßt ergibt sich: $Kr^\tau(\alpha) = \{\Theta\xi\eta \mid \xi < \Omega_{\Theta\kappa\eta} \wedge (\xi \notin C(\xi,\Theta\xi\eta) \vee \eta = \Theta\xi\eta)\} \subset Kr(\alpha)$.
Aus $\alpha_* \leqslant \beta$ folgt $\Theta\alpha\beta = \Theta\xi\eta$ für ein η mit $\xi < \alpha \leqslant \Omega_{\Theta\kappa\beta} \leqslant \Omega_{\Theta\kappa\eta}$, also $\Theta\alpha\beta \in Kr^\tau(\alpha) = \{\Theta\xi\eta \in Kr(\alpha) \mid \xi < \Omega_{\Theta\kappa\eta}\}$.

1.3. α Limeszahl : Nach I.V. gilt $\{\Theta\xi\eta \mid \xi_* \leqslant \eta\} = Kr^\tau(\xi)$ für $\xi < \alpha$. Daraus folgt $Kr^\tau(\alpha) = \bigcap_{\xi<\alpha} Kr^\tau(\xi) \subset \bigcap_{\xi<\alpha} Kr(\xi) = Kr(\alpha)$. Ist $\alpha_* \leqslant \beta$ und $\xi < \alpha$, so ist $\xi_* \leqslant \beta$ und $\Theta\alpha\beta = \Theta\xi\eta$ mit $\beta \leqslant \eta$, also $\Theta\alpha\beta \in Kr^\tau(\xi)$.

2. $\Theta\alpha\beta \in Kr^\tau(\alpha) \implies \alpha_* \leqslant \beta$.
Beweis indirekt. Sei $\beta < \alpha_*$, d.h. $\xi := \Omega_{\Theta\kappa\beta} < \alpha$ und $\beta = \xi_*$. Aus Lemma 9a und der I.V. folgt $\Theta\alpha\beta = \Theta\xi\beta = \Theta^\tau\xi 0$. Ferner gilt $\xi \in C^\tau(\xi, \Theta^\tau\xi 0)$, also nach Satz 2(ii) $\Theta^\tau\xi 0 \notin Kr^\tau(\xi+1)$. Es folgt $\Theta\alpha\beta \notin Kr^\tau(\alpha)$.

Aus 1. und 2. folgt $\Theta^\tau\alpha\beta = \Theta\alpha(\alpha_* + \beta)$.

3. Durch Nebeninduktion nach n beweist man $C^\tau_n(\alpha,\Theta\alpha\beta) \cap \alpha^+ \subset C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$ und $C_n(\alpha,\Theta\alpha\beta) \cap \alpha^+ \subset C^\tau(\alpha,\Theta\alpha\beta)$ für $\alpha < \Omega_{\Theta\kappa\beta}$. Man beachte dazu die folgenden Hinweise: Wegen $\alpha < \Omega_{\Theta\kappa\beta}$ ist nach 1. $\Theta\alpha\beta \in Kr^\tau(\alpha)$.
Ist $\gamma \in K \cap \alpha^+$, so ist $\gamma = \Omega_\xi \leqslant \alpha$ mit $\xi < \Omega_1 \cap \Theta\kappa\beta$; daraus folgt nach Lemma 10c $\xi < \Theta\Omega_\xi\beta \leqslant \Theta\alpha\beta$, also $\gamma \in C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$. Nach (17a) ist $K\cap\alpha^+ \subset C^\tau(\alpha,\Theta\alpha\beta)$.
Für $\gamma < \Omega_1$ ist nach Lemma 4 $\gamma \in C^\tau(\alpha,\Theta\alpha\beta) \leftrightarrow \gamma < \Theta\alpha\beta \leftrightarrow \gamma \in C(\alpha,\Theta\alpha\beta)$.
Für $\xi < \alpha$ und $\Omega_1 \leqslant \eta$ ist nach I.V. (und wegen $\xi_* < \Omega_1$) $\Theta\xi\eta = \Theta^\tau\xi\eta$ und $C^\tau(\xi,\Theta^\tau\xi\eta) \cap \xi^+ = C(\xi,\Theta\xi\eta) \cap \xi^+$.

Folgerung: Ist $\tau \leqslant \Theta\Omega_{\Omega_1}0$ und $\alpha < \Omega_{1+\tau}$, so gilt

$$(20) \qquad \Theta^\tau\alpha\beta = \Theta\alpha\beta \quad\text{und}\quad C^\tau(\alpha,\beta) \cap \alpha^+ = C(\alpha,\beta) \cap \alpha^+ \quad .$$

Mit Hilfe von Lemma 10 und Satz 11 können wir nun noch eine interessante Eigenschaft der Zahlen $\Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$ $(\beta < \Omega_1)$ beweisen.

<u>Definition einer Normalfunktion $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$</u>

$$\varphi 0 := \omega$$
$$\varphi(\alpha+1) := \|\overline{\Theta}(\varphi\alpha)\|$$
$$\varphi\beta := \sup\{\varphi\xi \mid \xi < \beta\} \text{ , wenn } \beta \text{ Limeszahl ist.}$$

(Nach Lemma 8b ist $\varphi\alpha \leqslant \|\overline{\Theta}_0(\varphi\alpha)\|$, also $\varphi\alpha < \|\overline{\Theta}(\varphi\alpha)\| = \varphi(\alpha+1)$.)

<u>Satz 12</u>

a) $\varphi(\omega\cdot(1+\beta)) = \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$

b) $\varphi'\beta = \Theta(\Omega_{\Omega_1}+1)\beta$ $\qquad$ (φ' := Ableitung von φ)

Beweis. Für $\alpha = \omega\cdot(1+\beta)+n$ mit $\beta \in \Omega_1 \cup \{-1\}$, $n \in \omega$ sei $\psi\alpha := \zeta_n(\beta)$. Nach Lemma 10 ist $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$ Normalfunktion. Ferner gilt:

(i) $\varphi\alpha = \psi\alpha$, wenn $\alpha = \omega\cdot(1+\beta)$,

(ii) $\varphi\alpha < \psi\alpha < \varphi(\alpha+1)$, wenn $\alpha = \alpha_1+1$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α . 1. $\varphi 0 = \omega = \zeta_0(-1) = \psi 0$. 2. Ist α Limeszahl, so folgt $\varphi\alpha = \psi\alpha$ aus der I.V. und der Stetigkeit von φ und ψ . 3. Sei $\alpha = \alpha_1+1$ und $\varphi\alpha_1 \leqslant \psi\alpha_1 < \varphi\alpha$. Sei $\alpha_1 = \omega\cdot(1+\beta)+n$ (mit $\beta \in \Omega_1 \cup \{-1\}$) und $\bar{\tau} := \Theta\Omega_{\Omega_1}(\beta+1)$. Es gilt $\psi\alpha_1 = \zeta_n(\beta)$, $\psi\alpha = \zeta_{n+1}(\beta)$. Aus Lemma 10 folgt $\zeta_n(\beta) < \bar{\tau}$ und $(\Omega_{\zeta_n(\beta)+1})_* = \beta+1$, also nach Satz 11 $\Theta^{\bar{\tau}}\Omega_{\zeta_n(\beta)+1}0 = \zeta_{n+1}(\beta) < \bar{\tau}$. Aus $\varphi\alpha_1 \leqslant \psi\alpha_1 = \zeta_n(\beta)$ folgt mit Lemma 8 $\varphi\alpha = \|\overline{\Theta}(\varphi\alpha_1)\| < \Theta^{\bar{\tau}}\Omega_{\zeta_n(\beta)+1}0$, also $\varphi\alpha < \psi\alpha$. Aus $\zeta_n(\beta)+1 \leqslant \varphi\alpha < \bar{\tau}$ folgt mit Lemma 8 $\psi\alpha = \Theta^{\bar{\tau}}\Omega_{\zeta_n(\beta)+1}0 \leqslant \|\overline{\Theta}_0(\varphi\alpha)\| < \|\overline{\Theta}(\varphi\alpha)\| = \varphi(\alpha+1)$.

Aus (i) folgt die Behauptung a). Zu b): Offenbar kommen als Fixpunkte von φ nur Limeszahlen in Betracht; also ist $\varphi' = \psi'$. Es gilt aber: $\psi\beta = \beta \longleftrightarrow \psi(\omega\cdot(1+\beta)) = \beta$ und $\psi(\omega\cdot(1+\beta)) = \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta$ (für $\beta \in \Omega_1$) . Und wegen $\Omega_{\Omega_1} \in C(\Omega_{\Omega_1}, \Theta\Omega_{\Omega_1}0)$ ist $Kr(\Omega_{\Omega_1}+1) = \{\beta \mid \Theta\Omega_{\Omega_1}\beta = \beta\}$.

<u>Vergleiche mit anderen Bezeichnungssystemen</u>

1. Die Schütte-Fefermansche Grenzzahl Γ_0 (nach Aczel [1]) :

   Sei $k(\beta) := \Theta\beta^+\beta$, $\alpha_+ := \min\{\eta \mid \alpha \leqslant k(\eta)\}$, $\varphi\alpha\beta := \Theta\alpha(\alpha_+ + \beta)$.

   Es gilt: $\varphi 0\beta = \omega^\beta$, und für $\alpha > 0$ ist $\lambda\eta(\varphi\alpha\eta)$ die Ordnungsfunktion von $\{\eta \mid \forall\xi(\xi < \alpha \longrightarrow \varphi\xi\eta = \eta)\}$. $\lambda\xi k(\xi)$ ist die Ordnungsfunktion von $\{\xi \mid \xi = \varphi\xi 0\}$.

   Daraus folgt $\Gamma_0 = \Theta\Omega_1 0$ und $Kr(\alpha+1) = \{\eta \mid \Theta\alpha\eta = \eta\}$ für $\alpha < \Gamma_0$.

2. Die Schütte-Pfeiffer-Systeme $\Sigma(N)$, Σ :

   In [5] wird gezeigt $\Sigma \cong \overline{\Theta}(\omega)$ und $\Sigma \cap \Sigma(N) \cong \overline{\Theta}(N)$.

3. Die Systeme W(X) von Pfeiffer:
   In [6] wird gezeigt $W(X) \cong \overline{\Theta}(\tau)$ (mit $\tau := -1 + \|X\|$). Daraus folgt mit Satz 12, daß die von Pfeiffer in [12],§5 definierte Grenzzahl α^* gleich $\Theta(\Omega_{\Omega_1} + 1)0$ ist .
4. Die Systeme Od(I) von Kino:
   In [6] wird gezeigt $\|Od(I),<_0\| \leqslant \Theta\Omega_{\Omega_1}\tau$ und $\|Od(I),<_\infty\| \leqslant \Theta\Omega_{\Omega_1}(\tau+1)$, wenn $\tau := -1 + \|I\| < \Theta\Lambda^{\{g\}}0$ ist .
5. Die Funktionen $F^p(\alpha,-)$ von Isles:
   In Bridge [3] wird gezeigt, daß $F^p(\alpha,-)$ im wesentlichen mit der Beschränkung von Θ_α auf Ω_{p+1} übereinstimmt, insbesondere daß die Grenzzahl $F^1(G(I,1),1)$ gleich $\Theta\Lambda^{\{g\}}0$ ist .

§5 Konstruktive Darstellung der Systeme $\overline{\Theta}(\tau)$ und $\overline{\Theta}(\{g\})$

Im folgenden werden wir die Bezeichnungssysteme $\overline{\Theta}(\tau)$ und $\overline{\Theta}(\{g\})$ ohne Bezugnahme auf die klassische Ordinalzahltheorie rekursiv definieren und einen konstruktiven Wohlordnungsbeweis für diese Systeme angeben.

Wir definieren gleichzeitig:

1. Termmengen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$
2. Eine Abbildung $S : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{K} \cup \{0\}$
3. Koeffizientenmengen $K_u^* a$ und $K_u a$
4. Eine zweistellige Relation $<$ auf $\mathfrak{T}$.

Wie man leicht sehen kann, ist das im Anschluß definierte Paar $(\mathfrak{T}, <)$ identisch mit dem auf den Seiten 10,11 definierten Bezeichnungssystem $\overline{\Theta}(\tau)$ bzw. $\overline{\Theta}(\{g\})$ (vergl. die Sätze 4b,8,9 und Folgerung (19)) . Die mit ′ bzw. ″ gekennzeichneten Definitionsregeln beziehen sich auf $\overline{\Theta}(\tau)$ bzw. $\overline{\Theta}(\{g\})$, die übrigen Regeln beziehen sich auf beide Systeme. Bei der Definition von $\overline{\Theta}(\tau)$ setzen wir außerdem voraus, daß eine rekursive Wohlordnung $(X, <_X)$ mit $\|(X, <_X)\| = \tau$ gegeben sei .

Abkürzungen:

$a = b \;:\Longleftrightarrow\;$ a und b sind identisch

$a \leqslant b \;:\Longleftrightarrow\; \neg(b < a)$

$M < a \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in M \longrightarrow x < a)$

$a \leqslant M \;:\Longleftrightarrow\; \exists x(x \in M \wedge a \leqslant x)$

$\mathfrak{K}_0 := \mathfrak{K} \cup \{0\}$

1. Induktive Definition von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$

1.0. $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{T}$

1.1. $0 \in \mathfrak{T}$

1.2. $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{H} \wedge 1<n \wedge a_n \leqslant \dots \leqslant a_1 \implies a_1+\dots+a_n \in \mathfrak{T}$

1.3. $a\,,\,b \in \mathfrak{T} \wedge K^*_{Sb}a < a \implies \overline{\Theta}ab \in \mathfrak{H}$

1.4'. $\mathfrak{K} = X$

1.4''. $a\,,\,b \in \mathfrak{T} \implies gab \in \mathfrak{K}$

2. Induktive Definition von $Sa \in \mathfrak{K}_0$ für $a \in \mathfrak{T}$

2.1. $Sa := a$, wenn $a \in \mathfrak{K}_0$

2.2. $S(a_1+\dots+a_n) := Sa_1$

2.3. $S\overline{\Theta}ab := Sb$

3. Induktive Definition von $K^*_u a$ und $K_u a$ für $a \in \mathfrak{T}$ und $u \in \mathfrak{K}_0$.

3.1. $K^*_u 0 := K_u 0 := \emptyset$

3.2. $K^{(*)}_u(a_1+\dots+a_n) := K^{(*)}_u a_1 \cup \dots \cup K^{(*)}_u a_n$

3.3. $K^*_u\overline{\Theta}ab := \{a\} \cup K^*_u a \cup K^*_u b$ und $K_u\overline{\Theta}ab := K_u a \cup K_u b$, wenn $u < Sb$

3.4. $K^*_u a := \emptyset$ und $K_u a := \{a\}$, wenn $a \in \mathfrak{H}$ mit $Sa \leqslant u$

3.5'. $K^*_u v := K_u v := \emptyset$, wenn $v \in \mathfrak{K}$ mit $u < v$

3.5''. $K^{(*)}_u gab := K^{(*)}_u a \cup K^{(*)}_u b$, wenn $u < gab$

4. Induktive Definition von $a < b$ für $a\,,b \in \mathfrak{T}$

4.1. $0 \neq a \implies 0 < a$

4.2. $u \in \mathfrak{K} \wedge u \leqslant b \implies u < \overline{\Theta}ab$

4.3. $u \in \mathfrak{K} \wedge b < u \implies \overline{\Theta}ab < u$

4.4. $a_1+\dots+a_m < b_1+\dots+b_n$ $(1 \leqslant m\,,\,1 \leqslant n\,,\,2 < m+n)$ gilt in genau folgenden zwei Fällen:

(i) $m < n$ und $a_i = b_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$

(ii) Es gibt ein k mit $1 \leqslant k \leqslant \min\{m,n\}$, $a_k < b_k$ und $a_i = b_i$ für $1 \leqslant i < k$.

4.5. $\overline{\Theta}a_1b_1 < \overline{\Theta}a_2b_2$ gilt in genau folgenden drei Fällen:

(i) $a_1 < a_2$ und $K_{Sb_1}a_1 \cup \{b_1\} < \overline{\Theta}a_2b_2$

(ii) $a_1 = a_2$ und $b_1 < b_2$

(iii) $a_2 < a_1$ und $\overline{\Theta}a_1b_1 \leqslant K_{Sb_2}a_2 \cup \{b_2\}$

4.6'. Für $u\,,\,v \in \mathfrak{K}$ gilt: $u < v \;:\Longleftrightarrow\; u <_X v$

4.6''. $ga_1b_1 < ga_2b_2$ gilt in genau folgenden drei Fällen:

(i) $a_1 < a_2$ und $b_1 < ga_2b_2$

(ii) $a_1 = a_2$ und $b_1 < b_2$

(iii) $a_2 < a_1$ und $ga_1b_1 \leqslant b_2$

Definition

Als den Grad Ga eines Terms a definieren wir die Anzahl der in a auftretenden Zeichen $+\,,\,\overline{\Theta}\,,\,g\,,\,0\,,\;u \in X$.

Zur Rekursivität von $(\mathfrak{T}, <)$

Wir nennen 2^{Ga} die Kennziffer der Aussage $a \in \mathfrak{T}$, $2^{Ga}+2^{Gb}$ die Kennziffer der Aussage $a < b$ und $2^{Ga}+2^{Gu}+1$ die Kennziffer der Menge $K_u^{(*)}a$. Durch Induktion nach der Kennziffer folgt nun unmittelbar aus den Definitionen 1.-4. die Entscheidbarkeit bzw. Berechenbarkeit von $a \in \mathfrak{T}$, $a < b$, $K_u^{(*)}a$. Die Entscheidbarkeit bzw. Berechenbarkeit von $a \in \mathfrak{H}$, $a \in \mathfrak{R}$, Sa für $a \in \mathfrak{T}$ ergibt sich auf triviale Weise.

Mitteilungszeichen

a, b, c, d, e, x, y für Elemente von $\mathfrak{T}$
u, v, w für Elemente von $\mathfrak{R}_0$

Satz 13

$(\mathfrak{T}, <)$ ist ein linear geordnetes System, d.h. für $a,b,c \in \mathfrak{T}$ gilt:

a) $\neg(a < a)$
b) $a \neq b \implies a < b$ oder $b < a$
c) $a < b$ und $b < c \implies a < c$

Man beweist a) durch Induktion nach Ga, b) durch Induktion nach $Ga + Gb$, c) durch Induktion nach $Ga + Gb + Gc$.

Folgerungen

(21) $a \leqslant b \iff a < b$ oder $a = b$

(22) $Sa \leqslant a$

(23) $Sa < Sb \implies a < b$

Satz 14

a) $\bar{\Theta}ab \in \mathfrak{T} \implies K_{Sb}a \cup \{b\} < \bar{\Theta}ab$

b)'' $\{a, b\} < gab$

Beweis.
a) Man zeigt durch Induktion nach Gc: $c \leqslant K_{Sb}a \cup \{b\} \implies c < \bar{\Theta}ab$.
b)'' Man zeigt durch Induktion nach Gc: $c \leqslant \{a, b\} \implies c < gab$.

Lemma 11

a) $c \in K_u a \implies c \in \mathfrak{H} \wedge c \leqslant a \wedge Sc \leqslant u$

b) $c = c_1 + \ldots + c_n$ (mit $n \geqslant 1$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathfrak{H}$) $\wedge Sc \leqslant u \implies$
$K_u c = \{c_1, \ldots, c_n\}$

c) $v < Sc \implies K_v Sc \subset K_v c$

d) $v \leqslant u \implies K_v K_u c = K_v c$ e) $u \leqslant v \implies K_v^* c \subset K_u^* c$

Lemma 12

$K_u^* c < a \ \wedge \ u < v \ \wedge \ \bar{\Theta} av \in \mathfrak{T} \quad \Longrightarrow \quad K_v c < \bar{\Theta} av$

Beweis durch Induktion nach Gc . Wir behandeln nur den Fall $v < c = \bar{\Theta} c_1 c_2$. Aus $\{c_1\} \cup K_u^* c_1 \cup K_u^* c_2 = K_u^* c < a$ folgt mit der I.V. $c_1 < a$ und $K_v c_1 \cup K_v c_2 < \bar{\Theta} av$. Ist $Sc = v$, so folgt (mit Lemma 11b) $K_v c = \{\bar{\Theta} c_1 c_2\}$, $c_1 < a$ und $K_v c_1 \cup \{c_2\} < \bar{\Theta} av$, also $K_v c < \bar{\Theta} av$ nach der Definition von $<$. Ist $Sc > v$, so folgt $K_v c = K_v c_1 \cup K_v c_2 < \bar{\Theta} av$.

Der Wohlordnungsbeweis

Definitionen

Q , Q_1 , Q_2 bezeichnen Teilmengen von $\mathfrak{T}$.

$Q \cap a \ := \ \{c \in Q \mid c < a\}$

$Q \cap u^+ \ := \ \{c \in Q \mid Sc \leqslant u\}$

$W[Q] \ := \ \{a \in Q \mid Q \cap a \text{ ist wohlgeordnet }\}$

$M_u^Q \ := \ \{a \mid \forall v (v \in Q \cap u \longrightarrow K_v a \subset Q)\}$

$W_u^Q \ := \ W[M_u^Q \cap u^+]$

Folgerungen

(24) $Q_1 \cap u = Q_2 \cap u \quad \Longrightarrow \quad M_u^{Q_1} = M_u^{Q_2} \ \wedge \ W_u^{Q_1} = W_u^{Q_2}$

(25) W_u^Q ist der größte wohlgeordnete Abschnitt von $M_u^Q \cap u^+$, d.h. W_u^Q ist wohlgeordnet, und es gilt:

$$a \in W_u^Q \iff a \in M_u^Q \cap u^+ \ \wedge \ M_u^Q \cap a \subset W_u^Q$$

Definition

Eine Teilmenge Q von $\mathfrak{T}$ heiße ausgezeichnet , wenn gilt:

(A1) $a \in Q \quad \Longrightarrow \quad Sa \in Q$

(A2) $u \in Q \quad \Longrightarrow \quad Q \cap u^+ = W_u^Q$.

Offenbar ist jede ausgezeichnete Teilmenge von $\mathfrak{T}$ auch wohlgeordnet.

Im folgenden sei Q irgendeine fest gewählte ausgezeichnete Teilmenge von $\mathfrak{T}$, und es sei $M_u := M_u^Q$, $W_u := W_u^Q$. Dies gelte bis Lemma 15 einschließlich.

Lemma 13

$a \in Q$ und $u \in Q \quad \Longrightarrow \quad K_u a \subset Q$

Beweis. 1. $u < Sa$: Aus $a \in Q$ folgt mit (A1),(A2) $a \in W_{Sa}$. Mit $u \in Q \cap (Sa)$

folgt daraus $K_u a \subset Q$. 2. $Sa \leqslant u$: Aus $a, u \in Q$ folgt $a \in Q \cap u^+ = W_u$. Aus $a \in W_u$ folgt mit Lemma 11d $K_v(K_u a) = K_v a \subset Q$ für $v \in Q \cap u$. Also gilt $K_u a \subset M_u$. Mit $K_u a \leqslant a \in W_u$ und (25) folgt daraus $K_u a \subset W_u \subset Q$.

Lemma 14

$u \in M_u$ und $u \leqslant Q \implies u \in Q$

Beweis. Sei $u \in M_u$, $u \leqslant Q$ und $v := \min\{w \in Q \mid u \leqslant w\}$. Dann gilt $u \in M_u = M_v$ und $u \leqslant v \in Q \cap v^+ = W_v$, also nach (25) $u \in W_v \subset Q$.

Satz 15

a) $a+b \in \mathfrak{T}$ und $a, b \in Q \implies a+b \in Q$

b) $\overline{\Theta}ab \in \mathfrak{T}$ und $a, b \in Q \implies \overline{\Theta}ab \in Q$

Beweis.

a) Sei $a+b \in \mathfrak{T}$ und $a, b \in Q$. Wir setzen $u := S(a+b) = Sa$, $a+0 := a$. Es ist $a, b \in Q \cap u^+ = W_u$; also ist $a+b \in M_u$, und $M_u \cap a$ und $M_u \cap b$ sind wohlgeordnet. Wir zeigen nun, daß $M_u \cap (a+b)$ wohlgeordnet ist; mit $a+b \in M_u$ folgt daraus $a+b \in W_u \subset Q$. - Sei $M_u^* := \{d \mid d \in M_u \wedge a \leqslant d < a+b\}$. Wie man sich leicht überzeugt, liefert die Zuordnung $c \longmapsto a+c$ eine ordnungstreue und bijektive Abbildung von $M_u \cap b$ auf M_u^* . Da $M_u \cap (a+b) = (M_u \cap a) \cup M_u^*$ ist, folgt daraus die Wohlordnung von $M_u \cap (a+b)$.

b) Abkürzung:

$$\mathfrak{B}[a,b] \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} a, b \in Q \;\wedge\; \overline{\Theta}ab \in \mathfrak{T} \;\wedge \\ \forall c \in Q \forall d \in Q (c < a \;\wedge\; \overline{\Theta}cd \in \mathfrak{T} \longrightarrow \overline{\Theta}cd \in Q) \\ \forall d \in Q (Sb \leqslant d < b \longrightarrow \overline{\Theta}ad \in Q) \end{cases}$$

Hilfssatz : $\mathfrak{B}[a,b] \wedge e \in M_{Sb} \cap \overline{\Theta}ab \implies e \in Q$.

Beweis des Hilfssatzes durch Induktion nach Ge :

Sei $u := Sb$ und gelte $\mathfrak{B}[a,b]$ und $e \in M_u \cap \overline{\Theta}ab$. Dann ist $u \in Q \cap u^+ = W_u$.

1. $e = c+d$ $(c, d \neq 0)$: $e \in Q$ folgt mit a) aus der I.V.

2. $e \leqslant K_u a \cup \{b\}$: Aus $a, b, u \in Q$ folgt mit Lemma 13 $K_u a \cup \{b\} \subset Q \cap u^+ = W_u$. Mit $e \in M_u$ und $e \leqslant K_u a \cup \{b\}$ folgt daraus nach (25) $e \in W_u \subset Q$.

3. $K_u a \cup \{b\} < e = \overline{\Theta}cd$: Aus $e \in M_u$ folgt mit Lemma 11d $K_v(K_u c \cup \{d\}) = K_v e \subset Q$ für $v \in Q \cap u$. Also ist $K_u c \cup \{d\} \subset M_u \cap \overline{\Theta}ab$ (siehe Satz 14a) . Mit I.V. folgt $\underline{\underline{K_u c \cup \{d\} \subset Q}}$. - Ist $c = a$ und $d < b$, so folgt $e \in Q$ aus $d \in Q$ und $\mathfrak{B}[a,b]$. - Sei nun $c < a$. Dann ist $c \in Q$ zu beweisen.

Durch transfinite Induktion nach v zeigen wir zunächst $K_v c \subset Q$ für $v \in Q$: Wegen $K_u c \subset M_u$ ist nach Lemma 11d $K_v c \subset Q$ für $v \in Q \cap u$. $K_u c \subset Q$ ist schon bewiesen.- Sei nun $u < v \in Q$ und $K_w c \subset Q$ für alle $w \in Q \cap v$. Mit Lemma 11d folgt $K_v c \subset M_v$. Aus $\mathfrak{B}[a,b]$ und $Sb < v$ folgt mit Lemma 11e $\mathfrak{B}[a,v]$. Wegen $\overline{\Theta}cd = e \in \mathfrak{T}$ u. $Sd = u$ ist $K_u^* c < c$. Mit $c < a$, $u < v$,

$\bar{\Theta}av \in \mathfrak{T}$ und Lemma 12 folgt daraus $K_v c < \bar{\Theta}av$. Es gilt also $\mathfrak{B}[a,v]$ und $K_v c \subset M_v \cap \bar{\Theta}av$, woraus nach der I.V. (wegen $\forall x \in K_v c\,(Gx < Ge)$) $K_v c \subset Q$ folgt. Damit ist $K_v c \subset Q$ für alle $v \in Q$ bewiesen .

Wegen $a \in Q$ ist $Sa \in Q$ und somit $K_{Sa} c \subset Q$. Wegen $c < a$ ist $Sc \leqslant Sa$. Mit Lemma 11b und Satz 15a folgt nun $c \in Q \cup \{0\}$. Wegen $Q \neq \emptyset$ gilt nach Lemma 14 $0 \in Q$, also $c \in Q$. Aus $\mathfrak{B}[a,b]$, $c \in Q$, $d \in Q$, $c < a$ folgt $e = \bar{\Theta}cd \in Q$. - Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Aus $\mathfrak{B}[a,b]$ folgt mit Lemma 13 und dem eben bewiesenen Hilfssatz $\bar{\Theta}ab \in M_{Sb}$ und $M_{Sb} \cap \bar{\Theta}ab \subset Q \cap (Sb)^+ = W_{Sb}$, also nach (25) $\bar{\Theta}ab \in W_{Sb} \subset Q$. Folglich gilt : $\mathfrak{B}[a,b] \Longrightarrow \bar{\Theta}ab \in Q$. Daraus schließt man durch "geschachtelte" transfinite Induktion über Q auf die Behauptung b) .

Lemma 15

$u \in M_u$ und $M_u \cap u \subset Q \Longrightarrow W_u$ ist ausgezeichnet und $u \in W_u$

Beweis. Aus $u \in M_u$ und $M_u \cap u \subset Q$ folgt (da Q wohlgeordnet ist) $u \in W_u$ und $W_u \cap u = M_u \cap u$. Nach Lemma 13 ist $Q \subset M_u$; also ist $W_u \cap u = Q \cap u$. Daraus folgt nach (24) $W_u^{W_u} = W_u \cap u^+$ und $W_v^{W_u} = W_v = Q \cap v^+ = W_u \cap v^+$ für $v \in W_u \cap u$. W_u erfüllt also (A2) (Seite 18) . Zu (A1): Ist $a \in W_u$ und $u \leqslant a$, so ist $Sa = u \in W_u$. Ist $a \in W_u \cap u$, so folgt $Sa \in W_u$ wegen $W_u \cap u = Q \cap u$.

Definition : $\mathcal{W} := \bigcup \{Q \mid Q$ ist ausgezeichnet $\}$

Anmerkung:
Sei $Pr_u[Q,Q_1] :\Longleftrightarrow \forall y (y \in M_u^Q \cap u^+ \wedge M_u^Q \cap y \subset Q_1 \longrightarrow y \in Q_1)$;
dann gilt:

$$a \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow \exists Q_1 \forall Q_2 (\, a \in Q_1 \wedge \forall x (x \in Q_1 \to Sx \in Q_1) \wedge \\ \wedge \forall u \in Q_1 (Pr_u[Q_1,Q_1] \wedge (\, Pr_u[Q_1,Q_2] \to Q_1 \cap u^+ \subset Q_2)))$$

Satz 16

$\mathcal{W}$ ist ausgezeichnete Teilmenge von $\mathfrak{T}$.

Beweis.
Hilfssatz: Sind Q_1 , Q_2 ausgezeichnet, so gilt:

$$u \in Q_1 \cup Q_2 \wedge u \leqslant Q_1 \wedge u \leqslant Q_2 \Longrightarrow Q_1 \cap u^+ = Q_2 \cap u^+ .$$

Beweis des Hilfssatzes durch transfinite Induktion nach $u \in Q_1 \cup Q_2$:
Sei $u \in Q_1$ und $u \leqslant Q_2$. Aus der I.V. folgt $Q_1 \cap u = Q_2 \cap u$; also gilt $u \in Q_1 \cap u^+ = W_u^{Q1} = W_u^{Q2}$. Mit Lemma 14 und $u \leqslant Q_2$ folgt daraus $u \in Q_2$. Somit gilt $Q_1 \cap u^+ = W_u^{Q2} = Q_2 \cap u^+$.

Aus der Definition von $\mathcal{W}$ folgt $\forall a (a \in \mathcal{W} \longrightarrow Sa \in \mathcal{W})$, und aus dem Hilfssatz folgt, daß jede ausgezeichnete Menge ein Abschnitt von $\mathcal{W}$ ist. Für $u \in \mathcal{W}$ gilt also : $\mathcal{W} \cap u^+ = \bigcup \{Q \cap u^+ \mid u \in Q \wedge Q$ ist ausgez.$\}$ =

$= \bigcup \{W_u^Q \mid u \in Q \wedge Q \text{ ausgez.}\} = W_u^{\mathcal{W}}$.

Satz 17

Es gilt $\mathcal{W} = \mathfrak{X}$, und folglich ist $\mathfrak{X}$ wohlgeordnet.

Beweis. Sei $M_u := M_u^{\mathcal{W}}$ und $W_u := W_u^{\mathcal{W}}$. Aus Lemma 15 und Satz 16 folgt:

$$\text{(I)} \quad u \in M_u \wedge M_u \cap u \subset \mathcal{W} \implies u \in \mathcal{W} \quad .$$

Daraus folgt $0 \in \mathcal{W}$. Nach den Sätzen 15, 16 ist $\mathcal{W}$ abgeschlossen gegenüber + und $\overline{\Theta}$. Wir müssen also noch

$$\text{(II)}' \quad X \subset \mathcal{W} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(II)}'' \quad a, b \in \mathcal{W} \implies gab \in \mathcal{W}$$

beweisen. - Wir wollen hier nur den Beweis von (II)″ ausführen ; dieser erfolgt durch "geschachtelte" transfinite Induktion über $\mathcal{W}$:

I.V.: $a, b \in \mathcal{W} \wedge \forall c \in \mathcal{W} \forall d \in \mathcal{W}(c < a \vee (c = a \wedge d < b) \longrightarrow gcd \in \mathcal{W})$.

Sei $u := gab$. Aus $a, b \in \mathcal{W}$ folgt mit Lemma 13 $K_v u = K_v a \cup K_v b \subset \mathcal{W}$ für alle $v \in \mathcal{W} \cap u$; also ist $u \in M_u$. - Wir beweisen nun $\forall e(e \in M_u \cap u \longrightarrow e \in \mathcal{W})$ durch Nebeninduktion nach Ge: Sei $e \in M_u \cap u$. Mit Lemma 11c folgt $Se \in M_{Se}$. - Nehmen wir an, es wäre $\mathcal{W} < Se$. Dann wäre $Se = gcd$ mit $b < gcd < gab$ und $c, d \in M_u \cap u$; mit N.I.V. und I.V. würde daraus $Se \in \mathcal{W}$ folgen, was im Widerspruch zur Annahme $\mathcal{W} < Se$ steht. - Also ist $Se \leqslant \mathcal{W}$. Mit $Se \in M_{Se}$ und Lemma 14 folgt daraus $Se \in \mathcal{W} \cap u$. Wegen $e \in M_u$ ist also $K_{Se} e \subset \mathcal{W}$, woraus nach Lemma 11b und Satz 15a $e \in \mathcal{W}$ folgt. — Wir haben nun $u \in M_u$ und $M_u \cap u \subset \mathcal{W}$ bewiesen . Mit (I) folgt daraus $gab = u \in \mathcal{W}$.

Anmerkung

Beim Beweis der Wohlordnung von $\overline{\Theta}(\tau)$ kann man mit schwächeren als den hier verwendeten Beweismitteln auskommen: Man definiere durch transfinite Rekursion über $(X, <_X)$ Mengen $\widetilde{M}_u \subset \overline{\Theta}(\tau)$, so daß $\widetilde{M}_u = \{a \mid \forall v \in X(v < u \longrightarrow K_v a \subset W[\widetilde{M}_v])\}$ für alle $u \in X$ ist . Außerdem definiere man $\widetilde{\mathcal{W}} := \bigcup \{W[\widetilde{M}_u \cap u^+] \mid u \in X\}$. Wie man leicht nachprüft, gilt dann $M_u^{\widetilde{\mathcal{W}}} = \widetilde{M}_u$, woraus folgt, daß $\widetilde{\mathcal{W}}$ eine ausgezeichnete Menge mit $X \subset \widetilde{\mathcal{W}}$ ist. Mit Satz 15 ergibt sich $\widetilde{\mathcal{W}} = \overline{\Theta}(\tau)$.

LITERATUR

[1] Aczel, P.: A new approach to the Bachmann method for describing large countable ordinals. (unveröffentlicht)

[2] Bachmann, H.: Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 95 (1950).

[3] Bridge,J.: Some problems in mathematical logic. Systems of ordinal functions and ordinal notations. Ph.D.Thesis, Oxford 1972 .

[4] Buchholz,W.: Rekursive Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen auf der Grundlage der Feferman-Aczelschen Normalfunktionen Θ_α . Dissertation München 1974 .

[5] Buchholz,W.,Schütte,K.: Die Beziehungen zwischen den Ordinalzahlsystemen Σ und $\overline{\Theta}(\omega)$. Erscheint in: Arch.Math.Log.u.Grundl.

[6] Buchholz,W.: Über die Beziehungen zwischen den Systemen $\overline{\Theta}(\{g\})$, W(X) und Od(I) . (unveröffentlicht)

[7] Isles,D.: Regular ordinals and normal forms. Intuitionism and Proof Theory, Proc.conference Buffalo 1968, North-Holland,Amsterdam (1970)

[8] Kino,A.: On ordinal diagrams. Jour.Math.Soc.Jap. 13 ,S.346 (1961)

[9] Levitz,H.und Schütte,K.: A Characterization of Takeuti's Ordinal Diagrams of Finite Orders. Arch.Math.Log.u.Grundl. 14, S.75 (1971)

[10] Pfeiffer,H.: Ausgezeichnete Folgen für gewisse Abschnitte der zweiten und weiterer Zahlenklassen. Dissertation Hannover 1964 .

[11] Pfeiffer,H.: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Arch.Math. Log.u.Grundl. 12 , S.12 (1969)

[12] Pfeiffer,H.: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Arch.Math. Log.u.Grundl. 13 , S.74 (1970)

[13] Pfeiffer,H.: Vergleich zweier Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 15 ,S.41 (1972)

[14] Pfeiffer,H.: Über zwei Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 16 , S.23 (1973)

[15] Pfeiffer,H.: Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Communic. of the Math.Inst. Rijksuniversiteit Utrecht 1973 - 1 .

[16] Schütte,K.: Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Math.Annalen 127 , S.15 (1954)

[17] Schütte,K.: Ein konstruktives System von Ordinalzahlen. Arch.Math. Log.u.Grundl. 11 , S.126 (1968) und 12 , S.3 (1969)

[18] Schütte,K.: Einführung der Normalfunktionen Θ_α ohne Auswahlaxiom und ohne Regularitätsbedingung. Erscheint in: Arch.Math.Log.u.Grundl.

[19] Takeuti,G.: Ordinal diagrams I , II . Journ.Math.Soc.Jap. 9 , S.386 (1957) und 12 , S.385 (1960)

[20] Weyhrauch,R.W.: Relations between some hierarchies of ordinal functions and functionals. Ph.D.Thesis Stanford 1972 .