



---

# Dissertation

an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

## Entwicklung eines hybriden Stresstests für Wertpapierportfolios

**Eingereicht von:** Andreas Ritter

**Erstgutachter:** Prof. Stefan Mittnik, PhD

**Zweitgutachter:** Prof. Dr. Ingo Klein

Eingereicht am 30.06.2016

Disputation am 09.02.2017

## **Dissertation**

Entwicklung eines hybriden Stresstests für Wertpapierportfolios

### **Herausgeber**

Seminar für Finanzökonomie  
Institut für Statistik  
LMU München  
Akademiestr. 1/I  
80799 München

Institut für Vermögensaufbau  
(IVA) AG  
  
Landsberger Str. 98  
80339 München

### **Eingereicht:**

30.06.2016

### **Disputation:**

09.02.2017

### **Eingereicht von:**

Andreas Ritter

### **Erstgutachter:**

Prof. Stefan Mittnik, PhD

### **Zweitgutachter:**

Prof. Dr. Ingo Klein

# Danksagung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit möchte ich mich an erster Stelle bei meinem Betreuer Herrn Prof. Stefan Mittnik bedanken, der es mir ermöglicht hat, diese Arbeit als externer Doktorand an seinem Seminar für Finanzökonomie anzufer-tigen. Ich bedanke mich für die interessierte und aufgeschlossene Zusammenarbeit, die es mir erlaubt hat, das gewählte Thema selbstbestimmt zu bearbeiten und es mir dennoch ermöglicht hat, in allen auftretenden wissenschaftlichen Fragen seinen Rat einzuholen.

In gleichem Maße möchte ich mich bei Herrn Dr. Andreas Beck und seinem Institut für Vermögensaufbau für die Möglichkeit bedanken, diese Arbeit berufs-begleitend anzufertigen. Ich bedanke mich für die Zeit und die Unterstützung, die ich für die Anfertigung dieser Arbeit erhalten habe, und für die Geduld und Flexibilität, die mir dabei entgegengebracht wurden.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Thorsten Hens vom Department of Banking and Finance der Universität Zürich für die freundliche Vermittlung des Portfolios der Vita Pensionskasse als Fallbeispiel.

Auch bei Herrn Prof. Dr. Ingo Klein von der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg möchte ich mich herzlich bedanken, der sich freundlicherweise bereit erklärt hat, die Zweitbegutachtung meiner Dissertation zu übernehmen.



## Abstract - DE

Stressszenarien sind Ereignisse, die sich in der Regel innerhalb des unteren Endes der Verteilung der zukünftigen Renditen eines Wertpapiers oder Portfolios abspielen. Ganz allgemein kann bei der Analyse von Stressereignissen und den damit einhergehenden Verlusten zwischen historischen und prospektiven Stresstests unterschieden werden. Historische Stresstestanalysen befassen sich mit Krisenereignissen, die sich in der Vergangenheit abgespielt haben, während prospektive Stresstests Ereignisse postulieren, die plausiblerweise in der Zukunft eintreten könnten. Einen Spezialfall der zukunftsbezogenen Szenarioanalysen stellen die hybriden Stresstests dar, die zwar zukünftige Ereignisse adressieren und somit prospektiv sind, die jedoch auf historischen Daten aufbauen, um die statistischen Zusammenhänge zwischen Stressfaktoren und Portfoliorenditen zu modellieren.

Im Hinblick auf die Klasse der hybriden Stresstests sind dementsprechend Modelle gefordert, die eine realitätsnahe Abbildung der spezifischen Eigenschaften von Zeitreihen des Kapitalmarkts - insbesondere des für die Risikobewertung maßgeblichen unteren Verteilungsendes - erlauben. Vor allem die zeitliche Variabilität der Parameter für Volatilität und Korrelation sowie die Nichtlinearität des Zusammenhangs von Kapitalmarktzeitreihen stellen eine erhebliche Herausforderung dar, an der Modelle mit zeitlich konstanten Parameterwerten in der Regel scheitern und somit eine Unterschätzung der im Krisenfall tatsächlich zu erwartenden Verluste herbeiführen.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit wird deshalb ein Modell entwickelt, welches die bedingte Simulation eines Stressereignisses in Gestalt einer spezifischen Ausprägung eines oder mehrerer marktrelevanter Faktoren unter Berücksichtigung von Heteroskedastizität sowie zeitlich nicht konstanten und nichtlinearen Abhängigkeiten ermöglicht. Der für den Erwartungswert maßgebliche Prozess ist ein

Vektorautoregressionsprozess auf der Ebene von Faktoren oder Hauptkomponenten, der zur Einbeziehung eines Stressereignisses um eine exogene Variable mit unverzögerter Auswirkung auf die endogenen Faktoren erweitert wird und sowohl mit den dynamischen Faktormodellen von [Sargent / Sims, 1977] als auch mit den Diffusionsindizes aus [Stock / Watson, 1998] und [Stock / Watson, 2002] eine gewisse Ähnlichkeit besitzt.

Der Prozess für die Varianz ist ein GARCH Prozess (vgl. [Bollerslev, 1986]), wobei für die Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Faktoren analog zu [Sun et al., 2008] eine schiefe t-Copula in der Version von [Demarta / McNeil, 2005] angepasst wird. Die bedingte Simulation der für die Portfoliorenditen maßgeblichen Faktoren in Abhängigkeit eines Stressfaktors kann dabei mit Hilfe der stochastischen Darstellung der schiefen t-Verteilung vorgenommen werden. Anstatt des mehrstufigen Verfahrens zur Parameterschätzung aus [Sun et al., 2008], das mit einer Fixierung der Freiheitsgrade und einer Schätzung der Korrelationsmatrix via Momentenmethode einher geht, wird statt dessen der Expectation Maximization Algorithmus von [Hu / Kercheval, 2008], der eine gleichzeitige Maximum Likelihood Schätzung aller Parameterwerte erlaubt, verwendet. Darüber hinaus wird die statische Korrelationsmatrix innerhalb der schiefen t-Copula durch das Dynamic Conditional Correlation Modell von [Engle, 2002] ersetzt. In Ergänzung zur isolierten Betrachtung der modellierten Stressereignisse werden an Hand des zweistufigen Modells von [Berkowitz, 2000] auch die Auswirkungen innerhalb eines Value at Risk oder Expected Shortfall Maßes dargestellt.

Im Rahmen einer Simulationsstudie analog zu [Kuester et al., 2006], bei denen die out-of-sample VaR-Prognose für den jeweils nächsten Handelstag der real eintretenden Tagesrendite auf Portfolioebene gegenübergestellt wurde, erzielt das vorgeschlagene Modell gute Ergebnisse im Sinne der Häufigkeit und Unabhängigkeit der auftretenden VaR-Überschreitungen. Insgesamt kann somit ein Modell konstruiert werden, welches die Auswirkungen eines ökonometrischen Schocks nicht nur im Hinblick auf den Erwartungswert berücksichtigt, sondern darüber hinaus auch die resultierenden Änderungen in den Parametern für Volatilität und Korrelation sowie im Rahmen der bedingten Simulation der schiefen t-Copula auch den Wahrscheinlichkeitswert des aufgetretenen Stressereignisses mit einbezieht.

## Abstract - EN

Stress scenarios are events that use to happen within the lower tail of the probability distribution function of the future returns of an asset or portfolio. Most generally, the evaluation of stress scenarios and the resulting losses breaks down to historical and prospective stress tests. Historical stress test analyses encompass scenarios of crisis that happened within the past, whereby prospective stress tests postulate events that are deemed plausible to happen in the future. A special case of prospective scenario analyses can be seen in the class of hybrid stress tests which adress future scenarios, thereby being classified as prospective, by relying on a set of historical data to model the statistical dependencies between stress factors and portfolio returns.

In regard to the class of hybrid stress tests, models which fascilitate a realistic match of the specific properties of capital market time series - especially within the lower tail of the distribution which is crucial for stress testing - are thereby required. Particularly the variability over time of parameter values for volatility and correlation as well as the nonlinearity of the dependencies between financial time series impose a severe challenge at which models with constant parameter values use to fail and thereby cause an underestimation of the losses that have to be taken into account in the course of an upcoming crisis.

The present paper therefore addresses the construction of a model which allows for the conditional simulation of stress scenarios in terms of a set of market factor realizations and thereby accounting for heteroskedasticity and time dependent as well as nonlinear dependencies. The process steering the expected value is a vector autoregressive process on the level of factors or principal components, similar to the dynamic factor models of [Sargent / Sims, 1977] and the diffusion indices of [Stock / Watson, 1998] and [Stock / Watson, 2002], which is complemented by an exogenous variable with immediate impact on the endogenous factors to incorporate

stress events.

The process steering the volatility is a first order GARCH process (see [Bollerslev, 1986]), whereby the factor dependencies are modeled via a skewed t-copula in the version of [Demarta / McNeil, 2005], similar to the copula-GARCH model of [Sun et al., 2008]. The stochastic representation of the skewed t-copula thereby turns out useful for the conditional simulation of the relevant factors depending on the realization of a stress factor. Instead of the step-by-step parameter estimation procedure of [Sun et al., 2008] which enforces an ad hoc determination of the degrees of freedom parameter and the estimation of the correlation matrix via method of moments, the expectation maximization algorithm of [Hu / Kercheval, 2008] can be used for a simultaneous maximum likelihood estimation of all parameter values. Furthermore, the static correlation matrix within the skewed t-copula is replaced by the dynamic correlation model of [Engle, 2002]. In addition to the isolated analysis of stress scenarios, the incorporation of stress test results into a value at risk or expected shortfall framework can be achieved via the two-step distribution model of [Berkowitz, 2000].

An out-of-sample backtest comparing simulated one day ahead VaR-values to real portfolio returns similar to [Kuester et al., 2006] was conducted for the proposed model, whereby the model shows good results in terms of frequency and independence of the observed VaR-violations. The evolving model in essence allows to cover the impact of an econometric shock not only with regard to the expected value, but also factors in the resulting changes in the parameter values for volatility and correlation as well as the probability value of the occurring stress event via the conditional simulation of the skewed t-copula.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Basiswissen und Rahmenbedingungen</b>	<b>21</b>
2.1	Einführung . . . . .	21
2.2	Stresstests in Banken . . . . .	23
2.2.1	Basel II und III . . . . .	23
2.2.2	Überblick: Stresstests in internationalen Banken . . . . .	25
2.3	Zwei exemplarische Stresstests aus der Praxis . . . . .	27
2.3.1	Beispiel: Einfacher Prospektiver Stresstest . . . . .	27
2.3.2	Beispiel: Historischer Stresstest . . . . .	28
2.3.3	Modellportfolio: Pensionskasse Vita . . . . .	30
2.3.4	Ergebnisse . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Modelle zur Konstruktion eines zukunftsorientierten Stresstests</b>	<b>37</b>
3.1	Übersicht . . . . .	37
3.2	Notation . . . . .	38
3.3	Zeitreihenmodelle für den Erwartungswert . . . . .	39
3.3.1	Grundlagen Zeitreihenanalyse . . . . .	39
3.3.1.1	Stationarität . . . . .	39
3.3.1.2	Invertierbarkeit . . . . .	41
3.3.2	Vektorautoregression, Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle . . . . .	41
3.3.2.1	Vektorautoregression . . . . .	41
3.3.2.2	Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle . . . . .	44
3.3.3	Strukturelle Vektorautoregressionsmodelle . . . . .	49
3.3.4	Parameterschätzung . . . . .	50
3.3.5	Impulse-Response-Analysis . . . . .	52

3.3.6	Reduktion der Parameteranzahl . . . . .	55
3.3.6.1	Dynamische Faktormodelle . . . . .	55
3.3.6.2	Diffusionsindizes . . . . .	56
3.3.6.3	Generalisierte Dynamische Faktormodelle . . . . .	58
3.3.6.4	Dynamische Hauptkomponentenanalyse . . . . .	60
3.3.6.5	Ein Kriterium für die Anzahl der Faktoren . . . . .	60
3.4	Heteroskedastizität und dynamische Korrelation . . . . .	63
3.4.1	Univariate Varianzmodelle . . . . .	63
3.4.2	Multivariate Varianzmodelle . . . . .	65
3.4.3	Faktormodelle für die Varianz . . . . .	67
3.4.4	Constant und Dynamic Conditional Correlation Modelle . . . . .	68
3.4.5	Copulae als Instrument für den nichtlinearen Zusammenhang . . . . .	70
3.4.6	Parameterschätzung . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Bewertungsregeln</b>	<b>83</b>
4.1	Übersicht . . . . .	83
4.2	Indexmodelle . . . . .	83
4.3	Bewertung von Optionen . . . . .	84
4.3.1	Itô's Lemma . . . . .	86
4.3.2	Risikoneutrale Bewertung von Optionsscheinen . . . . .	86
4.3.3	Die Griechen . . . . .	89
4.3.4	Weiterentwicklungen des Black Scholes Modells . . . . .	92
4.4	Modellierung von Anleihen . . . . .	92
4.4.1	Bewertung von Anleihen . . . . .	92
4.4.2	Modellierung von Zinssätzen . . . . .	94
4.4.3	Modellierung von Ausfallrisiken . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Risikomaße</b>	<b>105</b>
5.1	Über Risikomaße . . . . .	105
5.2	Kohärenz . . . . .	106
5.3	Value at Risk . . . . .	107
5.4	Conditional Value at Risk . . . . .	109
5.5	Einbeziehung von Stressereignissen . . . . .	111

<b>6</b>	<b>Fallbeispiel: Konstruktion eines hybriden Stresstests</b>	<b>113</b>
6.1	Anforderungen und Lösungen . . . . .	113
6.1.1	Ausgangslage . . . . .	113
6.1.2	Hauptkomponentenanalyse . . . . .	114
6.1.3	Modellanforderungen und Lösungen . . . . .	117
6.2	Modellwahl und Parameterschätzung . . . . .	118
6.2.1	Modellspezifikation . . . . .	118
6.2.2	Parameterschätzung . . . . .	119
6.3	Monte Carlo Simulation . . . . .	123
6.3.1	Einbeziehung von Stressereignissen . . . . .	123
6.3.2	Stressszenarien und Ergebnisse . . . . .	124
6.3.2.1	Szenario: Einbruch der weltweiten Aktienmärkte . . . . .	124
6.3.2.2	Aufhebung der Währungsuntergrenze des Schweizer Franken in Relation zum Euro . . . . .	128
6.3.3	Ergebnisse auf Portfolioebene . . . . .	133
6.4	Validierung des verwendeten Modells . . . . .	134
6.4.1	Methoden und Tests . . . . .	134
6.4.1.1	Basel-Verfahren zum Backtest von Value at Risk Mo- dellen . . . . .	135
6.4.1.2	Likelihood Ratio Test für die Häufigkeit von VaR- Überschreitungen . . . . .	135
6.4.1.3	Likelihood Ratio Test für die zeitliche Unabhängig- keit der VaR-Überschreitungen . . . . .	136
6.4.1.4	Likelihood Ratio Test für die Häufigkeit und zeitliche Unabhängigkeit von VaR-Überschreitungen . . . . .	137
6.4.1.5	Dynamischer Quantilstest . . . . .	137
6.4.2	Ergebnisse . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>141</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Stresstest-Szenarien und Value at Risk Quelle: [CGFS, 2005] . . . . .	18
2.1	Gewinnung von Stresstest-Szenarien Quelle: [CGFS, 2005] . . . . .	22
3.1	Joe-Clayton-Copula mit $\tau^l = 0,3$ und $\tau^u = 0,2$ Quelle: Eigene Berechnung . . . . .	74
3.2	Schiefe t-Copula mit $\rho = 0,5$ , $\vec{\gamma} = (-0,2, -0,3)$ und $\nu = 5$ Quelle: Eigene Berechnung . . . . .	77
4.1	Wert eines europäischen Calls in Abhängigkeit des Basiskurses für verschiedene Restlaufzeiten ( $K = 100$ , $\sigma = 25\%$ , $r_f = 2\%$ ) Quelle: Eigene Berechnung . . . . .	89
4.2	Wert eines europäischen Calls mit einjähriger Restlaufzeit in Ab- hängigkeit des Basiskurses für verschiedene implizite Volatilitäten ( $K = 100$ , $r_f = 2\%$ ) Quelle: Eigene Berechnung . . . . .	90
4.3	Schätzung der Marktpreisveränderung einer zehnjährigen Anleihe mit 4% Kupon in Relation zur Veränderung der Rendite, ausgehend von einer stetigen Rendite von 4% Quelle: Eigene Berechnung . . . . .	95
5.1	VaR und CVaR . . . . .	109
6.1	Simulation der Auswirkung einer Aktienmarktkrise für verschiedene Anlageklassen . . . . .	126
6.2	Auswirkungen der simulierten Shocks im MSCI World auf den MSCI Europe Index . . . . .	127

6.3	Auswirkungen der simulierten Shocks im MSCI World auf die Korrelation (30 Tage) zwischen dem MSCI Europe und dem MSCI USA . .	128
6.4	Simulation des dreimonatigen LIBOR Zinssatzes in CHF über ein <i>CTR</i> -Modell mit $a = 0,02$ und $b = 1,00\%$ . . . . .	129
6.5	Simulation der Auswirkung einer Wertsteigerung des Schweizer Franken in Relation zum Euro für verschiedene Anlageklassen . . . . .	132

# Tabellenverzeichnis

2.1	Stressverluste von Aktienanlagen innerhalb des BaFin Stresstests . . .	29
2.2	Vermögensallokation des Vita Portfolios . . . . .	32
2.3	BaFin Stressszenarien und Verluste . . . . .	33
2.4	Auswirkungen historischer Stressereignisse auf das Portfolio . . . . .	35
4.1	Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten je Rating Kategorie zwischen 1981 und 2010 Quelle: [S&P, 2011] . . . . .	98
4.2	Exemplarische Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit auf Basis eines CDS Quelle: Bloomberg, eigene Berechnung . . . . .	102
6.1	Ladungen der ersten fünf Hauptkomponenten . . . . .	114
6.2	Korrelationsmatrix der Residuen des Vektorautoregressionsmodells der Hauptkomponenten mit einer autoregressiven exogenen Stressvariable . . . . .	116
6.3	GARCH und DCC Parameter . . . . .	120
6.4	Parameter der schiefen t-Copula . . . . .	122
6.5	Durchschnittliche Auswirkungen des untersuchten Aktienmarktszenarios auf die verschiedenen Anlageklassen . . . . .	125
6.6	Durchschnittliche Durationen innerhalb der eingesetzten Portfolio- bausteine im Rentensegment . . . . .	130
6.7	Durchschnittliche Auswirkungen des untersuchten Währungs- und Zinsszenarios auf die verschiedenen Anlageklassen . . . . .	130
6.8	Volatilität und mittlere Wertentwicklung auf Portfolioebene . . . . .	133
6.9	Veränderung des Portfoliorisikos bei Einbeziehung von Stressereignissen	134
6.10	Obergrenzen für die Anzahl der VaR-Überschreitungen im Backtest .	135
6.11	VaR-Prognosequalität des Stresstestmodells - p-Wert je Teststatistik .	139

6.12 Häufigkeit der VaR-Überschreitungen je Anlageklasse und Einordnung nach der Basel-Klassifizierung . . . . .	140
--	-----



# 1 Einleitung

Im Kontext der klassischen finanzmathematischen Risikomessung werden die potentiellen Verluste eines Wertpapiers oder eines Portfolios stets in Form einer Schwankungskennzahl oder aber als Quantil oder bedingtes Moment einer Verteilung operationalisiert. Damit lassen sich die Häufigkeit und Höhe möglicher Verluste zwar abschätzen, doch ist ihr Auftreten ausschließlich dem Zufall unterworfen. Damit ist es den Portfoliomanagern im Rahmen der klassischen Risikomessung nicht möglich, gezielt auf spezielle Verlustgefahren in Gestalt einer möglichen Krise oder Katastrophe zu reagieren, ohne pauschal in eine Allokation mit geringerem Risiko umzuschichten. Stresstests bieten eine naheliegende Möglichkeit, genau diese Lücke zu füllen, ohne dabei die klassischen finanzmathematischen Risikomaße zu ersetzen. Stresstests bilden dementsprechend Ereignisse ab, die zwar mit *geringer* Wahrscheinlichkeit auftreten, aber dennoch plausibel erscheinen. Die relativ unspezifische Formulierung *gering* bedeutet an dieser Stelle, dass es sich hierbei um Ereignisse handelt, die bei der Betrachtung des Value at Risk keine besondere Rolle spielen. In diesem Sinne können Stresstestanalysen ein Value at Risk Modell um Aussagen erweitern, welche die Ereignisse unterhalb des Value at Risk Quantils betreffen. Auf der anderen Seite müssen mögliche Krisenszenarien in ein Value at Risk Modell eingebettet werden, um im Zuge der Risikokontrolle konsistent verarbeitet werden zu können. Auch wenn sich der Verlust, der für ein beliebiges Portfolio auf Grund des Eintretens eines speziellen Ereignisses resultiert, sehr genau schätzen lassen würde, könnte diese Information ohne die Belegung des Ereignisses mit einer Wahrscheinlichkeit kaum verarbeitet werden. Selbst ein Katastrophenszenario, welches einen annähernden Totalverlust zur Folge hätte, würde einen Portfoliomanager wahrscheinlich nicht zu entsprechenden Maßnahmen bewegen, wenn das Ereignis nur mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit, vielleicht im Mittel einmal in 10.000 Jahren, eintritt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist also die Konstruktion eines Stresstests, der

### Stress tests capturing exceptional but plausible events

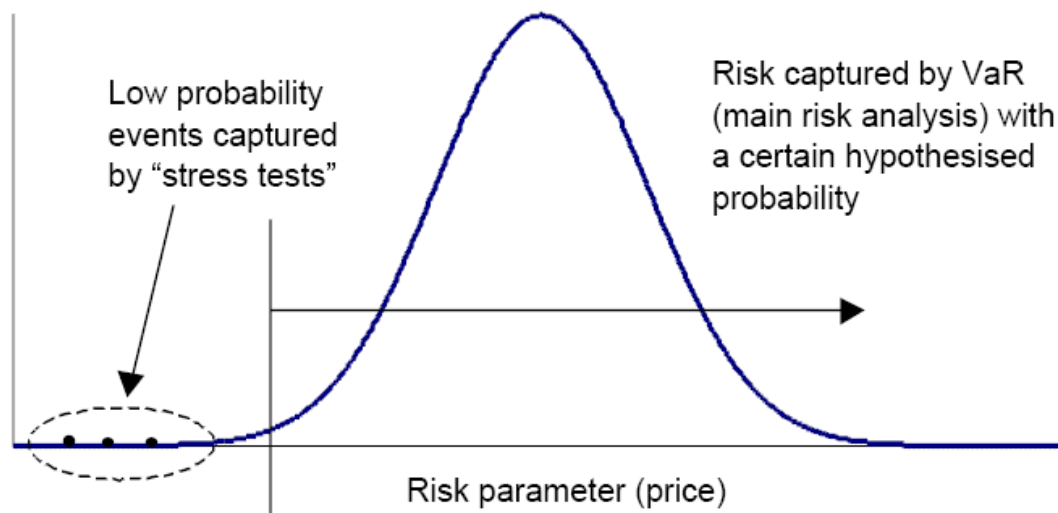


Abbildung 1.1: Stresstest-Szenarien und Value at Risk  
Quelle: [CGFS, 2005]

einerseits als prospektiv bezeichnet werden kann, da der Versuch unternommen wird, zukunftsbezogene Krisenszenarien zu modellieren, und der andererseits über ein statistisches Modell die Information über die Auswirkung einer gewissen Marktbewegung auf das analysierte Depot aus historischen Daten bezieht. Der auf diese Weise erarbeitete Stresstest soll zum Ende der Arbeit in ein Value at Risk Modell eingebettet werden, indem die verschiedenen Krisenereignisse mit Wahrscheinlichkeiten unterlegt werden und über eine Monte Carlo Simulation mit *normalen* Kursbewegungen vermischt werden.

Zu Beginn der vorliegenden Arbeit wird auf die Verwendung von Stresstests in der heutigen Praxis und die aufsichtsrechtlichen Rahmenbedingungen der Basel-II und Basel-III Verordnungen eingegangen. Dabei wird zwischen Sensitivitäts- und Szenarioanalysen, zwischen historischen und prospektiven sowie zwischen ereignisbasierten und portfoliobasierten Stresstests unterschieden. Anschließend wird auf die verschiedenen Möglichkeiten eingegangen, die Abhängigkeit der Portfoliorenditen von den Bewegungen verschiedener Märkte und Risikofaktoren zu

modellieren. Um einen zukunftsbezogenen Stresstest zu erhalten, müssen weiterhin mögliche Katastrophenereignisse festgelegt und in Form einer Veränderung von Marktparametern und Risikofaktoren spezifiziert werden. Im letzten Abschnitt werden die auf diese Weise konstruierten Ereignisse schließlich in die klassische Risikomessung in Gestalt des Value at Risk eingebettet.



## 2 Basiswissen und Rahmenbedingungen

### 2.1 Einführung

Grundsätzlich können Stresstests in Sensitivitätsanalysen und Szenarioanalysen untergliedert werden. Die am weitesten verbreiteten Varianten von Sensitivitätsanalysen geben Aufschluss über die Auswirkung, die eine Veränderung eines *Risikofaktors* um eine Einheit auf das untersuchte Portfolio hat. Der Begriff *Risikofaktor* bezeichnet allgemein eine Variable, die einen Einfluss auf die Wertentwicklung eines Vermögenswertes oder eines Portfolios hat. Dabei kann es sich um ein Wertpapier, aber auch um eine nicht direkt investierbare Variable wie das Verhältnis von zwei Währungen, einen Aktien- oder Rohstoffindex, einen Zinssatz oder eine andere Variable handeln. Andere Arten von Sensitivitätsanalysen untersuchen jeweils die Auswirkung der ungünstigsten historischen Bewegung eines Risikofaktors auf das analysierte Depot. Allerdings entsteht in diesem Fall bei der gemeinsamen Betrachtung mehrerer Risikofaktoren ein etwas ins Negative verzerrtes Bild des gemäß den historischen Daten plausiblen Maximalverlustes, da die Annahme impliziert wird, dass alle Risikofaktoren gleichzeitig ihr ungünstigstes Ergebnis erzielen.

Szenarioanalysen untersuchen den potentiellen Verlust eines Portfolios im Hinblick auf ein historisches oder fiktives zukünftiges Katastrophenereignis. Neben der Unterscheidung zwischen historischen und prospektiven Szenarien kann weiterhin zwischen einem portfoliobasierten und einem ereignisbasierten Ansatz differenziert werden. Historische Szenarioanalysen geben Aufschluss über die Verluste, die das untersuchte Depot innerhalb historischer Krisenszenarien wie dem Platzen der Technologieblase, den Terroranschlägen vom 11. September 2001 oder der Subprimekrise erlitten hätte. Sie sind dementsprechend unkompliziert zu berechnen, beinhalten allerdings die Gefahr, dass einige der historischen Szenarien heute keine Relevanz mehr besitzen könnten. Dem gegenüber stehen prospektive Stresstests,

die versuchen, eine in naher Zukunft drohende Krise zu beschreiben und ihre Auswirkungen auf das analysierte Depot abzuschätzen. Die Konstruktion von Ereignissen mit Zukunftsbezug kann entweder relativ pauschal durchgeführt werden oder aber auch mit einer sehr hohen Komplexität verbunden sein. Häufig werden bei der Konstruktion eines zukunftsorientierten Stresstests die Informationen über die Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren und Wertpapierpositionen über ein statistisches Modell aus historischen Daten bezogen, wobei Stresstests dieser Klasse als hybride Stresstests bezeichnet werden können.

Die Auswahl der Szenarien kann portfoliobasiert oder ereignisbasiert erfolgen. Im ersten Fall werden zunächst die Risikofaktoren identifiziert, die einen empfindlichen Einfluss auf den Wert des Depotwertes haben können, und im zweiten Schritt wird nach Szenarien gesucht, die signifikante Veränderungen in den maßgeblichen Risikofaktoren mit sich bringen. Im zweiten Fall wird dagegen direkt nach plausiblen Ereignissen gesucht, und anschließend werden die Auswirkungen der als plausibel anzusehenden Szenarien auf das analysierte Portfolio geschätzt.

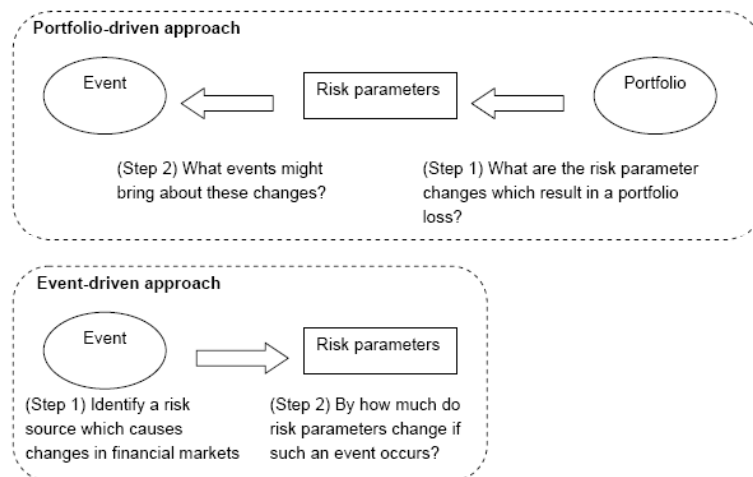


Abbildung 2.1: Gewinnung von Stresstest-Szenarien  
Quelle: [CGFS, 2005]

## 2.2 Stresstests in Banken

### 2.2.1 Basel II und III

Die Verwendung von Stresstests in Ergänzung zum Value at Risk wird den Kreditinstituten der Europäischen Union im Rahmen der Basel II Verordnung [Basel-II, 2006] vorgeschrieben. In Deutschland wird die Umsetzung der Basel II Verordnung durch das Kreditwesengesetz, die *Mindestanforderungen an das Risikomanagement* (MaRisk) und die Solvabilitätsverordnung festgelegt. Im Rahmen der Basel II Verordnung werden Stresstests innerhalb der ersten Säule, welche die Bemessung der Mindestkapitalanforderungen behandelt, und in der zweiten Säule, die den bankenaufsichtlichen Überprüfungsprozess regelt, vorgeschrieben.

Innerhalb der ersten Säule können die Banken bei der Bemessung der Mindestkapitalanforderung im Hinblick auf das Marktrisiko zwischen einer pauschalen Bemessung und der Bewertung an Hand bankinterner Modelle auswählen, wobei letztere von der Aufsichtsbehörde abgenommen werden müssen. Dabei werden die folgenden Anforderungen gestellt:

- Ein strenges und umfassendes Stresstestprogramm muss ein zentraler Bestandteil der Kapitalbemessung sein.
- Stressszenarien müssen unter anderem seltene Ereignisse bezüglich aller relevanten Risiken enthalten und Aufschluss über die Wertveränderung von Positionen mit linearen und nichtlinearen Auszahlungsprofilen geben.
- Die Stresstests der Banken sollen sowohl quantitativer als auch qualitativer Art sein und sowohl Marktrisiken als auch den möglichen Liquiditätsrückgang eines erschütterten Marktes berücksichtigen.
- Die Banken sollen die von der Aufsicht geforderten Stressszenarien mit ihren eigenen Stresstests verbinden.
- Die im Zuge eines Stresstests untersuchten Szenarien können historische Krisenereignisse beinhalten, welche die Empfindlichkeit des Trading Portfolios gegenüber den für eine Krise typischen Veränderungen von Volatilitäten und Korrelationen aufzeigen können.

- Die Banken sind angehalten, Stressszenarien zu erarbeiten, welche in Bezug auf die charakteristischen Eigenschaften ihrer Portfolios als am ungünstigsten anzusehen sind.
- Risiken, die an ein Ereignis gekoppelt sind, welches nicht durch die Berechnung des Value at Risk berücksichtigt wird, weil es entweder nicht im Zeithorizont von zehn Tagen oder unterhalb des 1%-Quantils liegt, müssen bei der Bemessung der Kapitalreserve einbezogen werden, beispielsweise durch einen geeigneten Stresstest.

In der zweiten Säule der Basel II Verordnung werden für die Bemessung des adäquaten Sicherheitskapitals sowohl die Berechnung des Value at Risk als auch die Durchführung eines Stresstests gefordert. In Bezug auf die durchzuführenden Stress-tests sollen die folgenden Effekte einer Finanzkrise berücksichtigt werden:

- Illiquidität und die damit verbundene Ausweitung der Geld/Brief-Spannen.
- Eine Konzentration in gewissen Positionen in Bezug auf das am Markt handelbare Volumen.
- One-way markets.<sup>1</sup>
- Produkte mit nichtlinearen Auszahlungsprofilen, beispielsweise Optionen.
- Plötzliche und unvorhersehbare Zahlungsausfälle.
- Signifikante Veränderungen der Korrelationsstruktur.

Im Rahmen der Basel III Verordnung wurden die Vorgaben für Banken, die bei der Bewertung ihrer Risiken auf interne Modelle zurückgreifen, vor allem im Hinblick auf Kontrahentenrisiken noch einmal verschärft bzw. konkretisiert (vgl. [Basel-III, 2011]):

- Banken müssen die vollständige Zusammensetzung ihres Exposures gegenüber allen Kontrahentenrisiken (nicht nur OTC Derivate) innerhalb ihrer regulären Stresstests berücksichtigen.

---

<sup>1</sup>Hier kann sowohl ein eingeschränkter Handel durch ein großes Ungleichgewicht zwischen Käufern und Verkäufern als auch eine sehr einseitige Marktbewegung gemeint sein.



- Für alle Gegenparteien soll zumindest auf monatlicher Basis deren Sensitivität bezüglich der wichtigsten Marktrisikofaktoren (Zinsen, Währungen, Aktien, Credit Spreads und Rohstoffpreise) analysiert werden.
- Banken sollen mehrfaktorielle Stressszenarien berechnen und nichtdirektionale<sup>2</sup> Risiken zumindest quartalsweise überwachen.
- Innerhalb eines Stresstests, der Kontrahentenrisiken adressiert, müssen sowohl die Veränderung des Exposures gegenüber einem Schuldner als auch die Veränderung von dessen Kreditwürdigkeit gemeinsam betrachtet werden.
- Diese Analyse von Exposure und Kreditwürdigkeit der Gegenparteien soll auf verschiedenen Aggregationsebenen (schuldnerspezifisch, nach Emittentengruppen und ganzheitlich) durchgeführt werden.
- Die Stresstestergebnisse sollen Bestandteil des regulären Reportings an die Unternehmensführung sein.
- Die Schwere der im Rahmen des Stresstests untersuchten Shocks in verschiedenen Risikofaktoren soll mit historischen Extremereignissen konsistent sein.
- Banken sollen auch den entgegengesetzten Weg gehen und auf Basis eines angenommenen Shocks in einem oder mehreren Risikofaktoren plausible Zukunftsszenarien identifizieren, die zu diesem führen können.
- Die Unternehmensführung soll bei der Einbettung der Stresstests in das Risikomanagement der Bank eine Führungsrolle einnehmen und gewährleisten, dass die Ergebnisse für das Risikomanagement von Ausfallrisiken berücksichtigt werden.

### 2.2.2 Überblick: Stresstests in internationalen Banken

In einer Erhebung des *Committee on the Global Financial System*<sup>3</sup> vom Mai 2004 wurden 64 Banken aus 16 Ländern in Bezug auf die Verwendung von Stresstests

<sup>2</sup>Hier sind Risiken gemeint, die von der Entwicklung eines zu Grunde liegenden Risikofaktors weitgehend unabhängig sind. Dazu gehören Risiken, die sich z. B. unabhängig von steigenden oder fallenden Zinsen aus der Form der Zinsstrukturkurve oder beispielsweise aus der Differenz zwischen dem Future- und dem Spotpreis bei einem Rohstoff ergeben.

<sup>3</sup>vgl. [CGFS, 2005].

innerhalb ihrer Risikosteuerung befragt. Dabei hat sich gezeigt, dass sich die erfassten Stresstests in erster Linie auf relativ liquide handelbare Trading Portfolios beziehen - gut 80% der in [CGFS, 2005] beobachteten Stresstests hatten ein Trading Portfolio zum Gegenstand. Stresstests für Kreditportfolios werden deutlich seltener und häufig auch von anderen Geschäftsbereichen durchgeführt, und auch Stresstests für Liquiditätsrisiken und operationelle Risiken konnten beobachtet werden.

Weiterhin wurde im Rahmen der Untersuchung von [CGFS, 2005] bereits festgestellt, dass bei der Verbesserung der auf Kreditrisiken zugeschnittenen Stresstests akuter Handlungsbedarf besteht und dass selbige technisch weit hinter den für Trading Portfolios eingesetzten Stresstests zurückgeblieben sind. Im Wesentlichen wurden zwei verschiedene Typen von kreditbasierten Stresstests durchgeführt: In der ersten Variante wurden die Auswirkungen sich verändernder Credit Spreads<sup>4</sup> auf Handelsbücher untersucht, während im zweiten Fall direkt die Kreditexposures von Kreditbüchern untersucht wurden. Die Untersuchung von Credit Spreads in Handelsbüchern bzw. Trading Portfolios ist unkompliziert, da hier in der Regel Marktpreise vorliegen, während beim Stresstest eines Kreditbuches alle relevanten Risikofaktoren, z. B. Ausfallwahrscheinlichkeiten, Recovery Rates<sup>5</sup>, der Wert der hinterlegten Sicherheiten und die Wahrscheinlichkeit einer Veränderung des Ratings getestet werden müssen. Vor allem im Hinblick auf die jüngste Finanzkrise, die durch weitreichende Kreditausfälle hervorgerufen wurde, verdient der Umstand, dass an den kreditbasierten Stresstests bereits in den Jahren 2004 und 2005 deutliche Mängel festgestellt wurden, eine kurze Erwähnung.

Auf der Seite der Szenarien spielen auf Zinsbewegungen basierende Ereignisse die größte Rolle, während Szenarien, die Kreditrisiken abbilden, am zweithäufigsten untersucht werden. Auf regionaler Ebene werden von den meisten Stresstests mehrere Regionen bedient, wobei im Falle der Beschränkung auf einzelne Regionen die USA und die Emerging Markets die größte Rolle spielen. Im Hinblick auf historische Stressszenarien werden der Börsencrash von 1987, die Finanzkrise in Asien 1997,

---

<sup>4</sup>Der Credit Spread ist eine Risikoprämie im Sinne der Differenz eines ausfallrisikobehafteten Zinssatzes und eines Zinssatzes ohne Ausfallrisiko, wobei die Duration der beiden Anleihen gleich sein muss, um die Risikoprämie nicht mit Laufzeiteffekten zu vermischen.

<sup>5</sup>Die Recovery Rate ist der Anteil des Positionswertes, der dem Anleger im Falle des Ausfalls eines Schuldners erhalten bleibt.

das Scheitern des Hedgefonds LTCM in Verbindung mit der Wirtschaftskrise in Russland 1998 und die Terroranschläge vom 11. September 2001 am häufigsten analysiert.

Neben der aufsichtsrechtlichen Notwendigkeit werden Stresstests auf Seiten der Banken hauptsächlich durch die folgenden Gründe motiviert:

- Stresstests sollen dabei helfen, das eigene Risikoprofil besser zu erfassen. Beispielsweise könnten Exposures, die auf der Ebene einzelner Geschäftsbereiche keine besondere Rolle spielen, bei der Betrachtung des Gesamtgeschäfts dennoch ein erhebliches Risiko darstellen.
- Stresstests können besonders hilfreich sein in Bereichen, in denen das Standardrisikomaß Value at Risk an seine Grenzen stößt, beispielsweise bei Positionen, deren Wert nicht linear von einer Bewegung der Risikofaktoren abhängt. Dies trifft unter anderem auf viele Optionsscheine und Derivate zu.
- Stresstests können dem Management dabei helfen, Risikobudgets auf verschiedene Abteilungen zu allokatieren.
- Stresstests können verwendet werden, um die Auswirkungen verschiedener Szenarien auf einen Geschäftsplan zu analysieren.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit liegt ein deutlicher Schwerpunkt auf der Modellierung von Stresstests für Portfolios, deren Bestandteile am Markt hinreichend liquide handelbar sind, so dass Kursdaten in regelmäßigen und einigermaßen kurzen Zeitabständen verfügbar sind. Der zusätzlichen Problematik kaum verfügbarer Daten die bei der Berechnung von Stresstests für Kreditportfolios vorliegt, wird in dieser Arbeit nicht Rechnung getragen.

## **2.3 Zwei exemplarische Stresstests aus der Praxis**

### **2.3.1 Beispiel: Einfacher Prospektiver Stresstest**

Ein Beispiel für einen relativ pauschalen aber dennoch zukunftsbezogenen Stress-test befindet sich in [BaFin, 2004]. Der vorliegende Stresstest beinhaltet vier einfache

Szenarien<sup>6</sup> und wurde von der BaFin für Pensionsfonds und Versicherungsunternehmen eingeführt.

1. Isoliertes Rentenszenario (R): Marktwertverlust aller Renten von 10%
2. Isoliertes Aktienszenario (A): Marktwertverlust aller Aktien gemäß untenstehender Tabelle
3. Renten- und Aktienszenario (RA): Marktwertverlust aller Renten von 5% und aller Aktien gemäß untenstehender Tabelle
4. Aktien- und Immobilienszenario (AI): Marktwertverlust aller Aktien gemäß untenstehender Tabelle und aller Immobilien von 10%

Bei allen Stressszenarien werden die Bonitätsrisiken aller Rentenpositionen mit den folgenden Abschlägen berücksichtigt:

- Investment-Grade AAA-BBB: Kein Abschlag
- Non-Investment-Grade BB-B: 10%
- Non-Investment-Grade CCC-D: 30%
- Ohne Rating: 10%

Die Verluste, welche für Aktienanlagen zu unterstellen sind, richten sich nach dem aktuellen Stand des EuroStoxx 50 Kursindex und können der Tabelle 2.1 entnommen werden.

Auffällig ist der deutlich höhere Auflösungsgrad bei den festverzinslichen Wertpapieren, wobei bei Aktien und Immobilien im Zuge des Stresstests keine weitere Unterscheidung mehr durchgeführt wird.

### 2.3.2 Beispiel: Historischer Stresstest

Als Beispiel für einen historischen Stresstest kann der Stresstest des Finanznachrichtendienstes Bloomberg angeführt werden. Im Herbst 2012 werden die folgenden Stressszenarien berechnet, wobei jedes Szenario mit einem Zeitraum unterlegt ist,

---

<sup>6</sup>Im Rundschreiben selbst werden drei Szenarien vorgestellt. Ein viertes Szenario, welches die Wertveränderung von Immobilienvermögen berücksichtigt, wurde später hinzugefügt.

Untergrenze	Obergrenze	Einzelzenario	Gemischtes Szenario
0	1825	-10%	-10%
1826	2015	-11%	-11%
2016	2205	-13%	-11%
2206	2395	-14%	-12%
2396	2585	-16%	-12%
2586	2775	-18%	-13%
2776	2965	-20%	-14%
2966	3155	-22%	-15%
3156	3345	-24%	-16%
3346	3535	-27%	-17%
3536	3725	-29%	-18%
3726	3915	-32%	-19%
3916	4105	-35%	-20%
4106	4295	-38%	-21%
4296	4485	-41%	-22%
4486	4675	-44%	-24%
4676	4865	-45%	-25%
4866	5055	-45%	-25%
5056	5245	-45%	-25%
5246	$\infty$	-45%	-25%

Tabelle 2.1: Stressverluste von Aktienanlagen innerhalb des BaFin Stresstests

auf Basis dessen die Verluste, die innerhalb des betrachteten Portfolios im Hinblick auf ein spezielles Stressereignis aufgetreten wären, berechnet werden können. Da die Auswertung ausschließlich auf historischen Daten basiert, liegen alle Ereignisse in der jüngeren Vergangenheit, um die Problematik fehlender Kurshistorien bei neueren Wertpapieren in Grenzen zu halten.

- **Kaukasuskrieg 2008 (07.08.2008 - 06.10.2008):** Ein Krieg zwischen Russland und Georgien sowie rapide sinkende Ölpreise wecken die Befürchtung einer regionalen ökonomischen Rezession.
- **Lehman Insolvenz 2008 (15.09.2008 - 14.10.2008):** Historische Renditen innerhalb eines Monats direkt nach der Insolvenz der Lehman Brothers Bank in 2008.
- **Erholung der Aktienmärkte 2009 (04.03.2009 - 01.06.2009):** Die globalen Aktienmärkte erholen sich im Anschluss an die Rezession des Jahres

2008 kräftig.

- **Griechenland Krise 2010 (26.04.2010 - 08.06.2010):** Griechenland war von 2000 bis 2007 eine der am schnellsten wachsenden Volkswirtschaften innerhalb der Eurozone. Die Finanzierungskosten dieses Wachstums resultierten jedoch in einem alarmierend hohen Haushaltsdefizit und einer erheblichen Staatsverschuldung in Relation zum BIP. Am 27. April 2010 wurde die Kreditwürdigkeit von Griechenland von BBB+ auf BB+ herabgesetzt.
- **Einbruch des Ölpreises 2010 (03.05.2010 - 20.05.2010):** Der Ölpreis brach wegen Bedenken zur Frage, wie die europäischen Länder ihre Haushaltsdefizite im Anschluss an die europäische Wirtschaftskrise reduzieren würden, um 20% ein.
- **Libyen Krise 2011 (14.02.2011 - 23.02.2011):** Der Bürgerkrieg in Libyen bricht am 15. Februar 2011 aus und hat einen starken Anstieg der Ölpreise zur Folge.
- **Erdbeben in Japan 2011 (10.03.2011 - 15.03.2011):** Am 11. März 2011 trat ein Erdbeben der Stärke neun vor der japanischen Küste auf und löste darüber hinaus einen erheblichen Tsunami aus.
- **US Haushaltskrise & Downgrade 2011 (22.07.2011 - 08.08.2011):** Die Schwierigkeiten bei der Anhebung der Verschuldungsgrenze haben eine Herabstufung des Credit Ratings der USA zur Folge. Dieses Szenario umfasst einen Zeitraum von 17 Tagen und beginnt am 22.07.2011 mit ersten Reaktionen der Märkte auf den Stillstand im Anhebungsverfahren der Schuldenobergrenze. Der 8. August 2011 ist der erste Handelstag nach der Ankündigung der Herabstufung.

### 2.3.3 Modellportfolio: Pensionskasse Vita

Für alle Berechnungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden, wird die strategische Allokation des Stiftungsportfolios der Schweizer Pensionskasse Vita als Fallbeispiel herangezogen. Die Vita Sammelstiftung ist eine Pensionskasse für kleine und mittelgroße Unternehmen und verwaltet zum Beginn

des Jahres 2013 ein Vorsorgekapital von 8,1 Mrd. Schweizer Franken.<sup>7</sup> Das Vita Portfolio ist ein über die verschiedenen Wertpapierklassen hinweg relativ breit diversifiziertes Depot, wobei die festverzinslichen Wertpapiere einen etwas höheren Anteil innehaben als die risikoreicheren Wertpapiere. Die strategische Allokation des Depots setzt sich folgendermaßen zusammen und wird wie unten dargestellt mit Indizes abgebildet.

Neben den ganz grundlegenden Anlageklassen wie Aktien und Anleihen kommen auch Geldmarktinstrumente, Wandelanleihen, Immobilien und Rohstoffe sowie auch exotischere Anlageklassen wie Hedge Fonds, Private Equity und Cat Bonds zum Einsatz. Private Equity bezeichnet illiquide Beteiligungen an in der Regel nicht börsennotierten Unternehmen wie z. B. Venture Capital, während Cat Bonds spezielle Anleihen sind, deren Verzinsung und / oder Rückzahlung von versicherungstechnischen Ereignissen, häufig dem (Nicht-)Eintreten von Naturkatastrophen, abhängig sind.

Bei der Unterlegung der verwendeten Anlageklassen mit Zeitreihen wurden so umfassend wie möglich breit investierte und repräsentative Indizes eingesetzt. Lediglich innerhalb der Anlageklasse der Immobilien liegen bis zum heutigen Tag keine Indizes vor, welche die Anforderungen einer langen Datenhistorie und einer täglichen Wertstellung erfüllen können, so dass in dieser Anlageklasse auf die Zeitreihen aktiv verwalteter Immobilienfonds zurückgegriffen werden muss, bei deren Auswahl neben der möglichst vollständigen Abdeckung der Anlageklasse auch auf ein hohes Fondsvolumen geachtet wurde. Alle verwendeten Zeitreihen bilden den Gesamtertrag ihrer Anlageklasse ab, d. h. Zinserträge und Dividenden, welche während der Haltedauer ausgeschüttet werden, werden unverzüglich wieder dem Index- oder Fondsvolumen zugeführt.

---

<sup>7</sup>Quelle: Informationen zur Sammelstiftung Vita, [http://www.vitasammelstiftung.ch/internet/vitasammelstiftung-ch/SiteCollectionDocuments/de/Informationen\\_Vita\\_d.pdf](http://www.vitasammelstiftung.ch/internet/vitasammelstiftung-ch/SiteCollectionDocuments/de/Informationen_Vita_d.pdf).

Assetklasse	Index	Gewicht
Aktien Schweiz	MSCI Switzerland Index	5,50%
Aktien Europa	MSCI Europe Index	4,00%
Aktien USA	MSCI USA Index	5,00%
Aktien Japan	MSCI Japan Index	1,50%
Aktien Emerging Markets	MSCI Emerging Markets Index	3,00%
Aktien Nachhaltigkeit	DJ Sustainability World Index	2,00%
<b>Total Aktien</b>		<b>21,00%</b>
Obligationen Schweiz	Bloomberg EFFAS Switzerland Government Bond Index	20,50%
Obligationen Ausland CHF	JPM Global Aggregate Bond Index	5,00%
Obligationen Credit 100	iBoxx Euro Corporates Overall Index	10,00%
Obligationen Euro	iBoxx Euro Overall Index	2,00%
Wandelanleihen	Exane Europe Convertible Index	5,00%
<b>Total Obligationen</b>		<b>42,50%</b>
Immobilien Schweiz	UBS (CH) PF Swiss Mixed Sima Fund	7,00%
Immobilien Global	Deka Immobilien Fund	1,00%
Immobilien Europa	Deka ImmobilienEuropa Fund	2,00%
<b>Total Immobilien</b>		<b>10,00%</b>
Private Equity	LPX 50 Index	2,00%
Infrastruktur	Macquarie Global Infrastructure 100 Index	2,00%
Hedge Funds	Morgan Stanley alt-era Hedge Fund Replication Index	10,00%
Rohstoffe	Rogers International Commodity Index	2,00%
Insurance Linked Securities	Swiss Re Cat Bond Index	2,00%
<b>Alternative Anlagen</b>		<b>18,00%</b>
<b>Hypotheken</b>	iBoxx Euro Collateralized Overall Index	<b>8,00%</b>
<b>Liquidität</b>	Deutsche Bank Swiss Overnight Money Market Index	<b>0,50%</b>
<b>Total</b>		<b>100,00%</b>

Tabelle 2.2: Vermögensallokation des Vita Portfolios



### 2.3.4 Ergebnisse

Im Hinblick auf den prospektiven Stresstest der BaFin ergeben sich jeweils die folgenden Verluste, wobei die von der BaFin nicht adressierten Anlageklassen Hedge Fonds und Rohstoffe im Hinblick auf die unterstellten Stressverluste der Einfachheit halber wie Aktien behandelt werden. Der EuroStoxx 50 Index notiert zum Zeitpunkt der Berechnung im November 2012 bei rund 2.500 Punkten, so dass gemäß Tabelle 2.1 bei einem reinen Aktienszenario mit einem Verlust aller Aktien von 16% zu rechnen ist, während in einem gemischten Szenario für alle Aktienpositionen ein Verlust von 12% angenommen wird.

Klasse	Gewicht	R	A	RA	AI
Renten	52,50%	-10,95%	-0,95%	-5,95%	-0,95%
Aktien	37,00%	0,00%	-16,00%	-12,00%	-12,00%
Immobilien	10,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-10,00%
Barreserve	0,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>Portfolio</b>	<b>100,0%</b>	<b>-5,75%</b>	<b>-6,42%</b>	<b>-7,57%</b>	<b>-5,94%</b>

Tabelle 2.3: BaFin Stressszenarien und Verluste

Falls einige der investierten Anleihen ein Rating unterhalb von BBB aufweisen, könnten die errechneten Stressverluste möglicherweise noch etwas höher ausfallen.<sup>8</sup> Wegen der durchaus relevanten Quote risikobehafteter Wertpapiere reagiert das Portfolio vor allem auf die beiden Szenarien empfindlich, die einen Wertverlust von Aktienanlagen beinhalten. Der größte Verlust tritt bei Eintreten des gemischten Renten- und Aktienszenarios auf. Eine Zunahme der angenommenen Stressverluste ist bei allen Szenarien möglich, die Aktien beinhalten, da ein Anstieg des EuroStoxx 50 Index mit der Unterstellung eines höheren Verlustpotentials für Aktien einhergeht.

Innerhalb des von Bloomberg bereitgestellten historischen Stresstests treten die höchsten Verluste des Modellportfolios vor allem innerhalb der beiden Szenarien auf, die Kreditrisiken von Schuldern des Investment Grades betreffen, d. h. die

<sup>8</sup>Um die erhöhten Risiken von Wandelanleihen näherungsweise zu berücksichtigen, wird für die Wandelanleihen allgemein eine Bonität von BB-B unterstellt, so dass die entsprechenden Abschläge für Anleihen unterhalb des Investment Grades innerhalb des Stresstests zum tragen kommen.

Insolvenz der Lehman Brothers Bank und die Herabstufung des Ratings der USA. Vor allem das letztere Szenario kann als ungünstig angesehen werden, da es einen deutlich kürzeren Zeitraum umfasst und der mittlere tägliche Wertverlust hier mit -0,40% deshalb fast doppelt so hoch wie beim Lehman Szenario ausfällt.

Assetklasse	Gewicht	Kaukasus- krieg	Lehman Insol- venz	Erholung der Aktien- märkte	Griechen- land Krise	Einbruch des Öl- preises	Lybien Krise	Erdbeben in Japan	US Haus- haltskri- se & Down- grade
Aktien Schweiz	5,50%	-11,04%	-10,32%	22,15%	-8,18%	-5,05%	-0,95%	-5,03%	-18,36%
Aktien Europa	4,00%	-20,18%	-16,13%	33,86%	-13,71%	-8,29%	-3,83%	-4,79%	-22,88%
Aktien USA	5,00%	-10,57%	-15,42%	20,73%	-6,36%	-5,26%	-5,68%	-2,83%	-23,18%
Aktien Japan	1,50%	-7,20%	-14,24%	19,17%	-5,01%	1,91%	-4,15%	-16,45%	-15,97%
Aktien Emerging Markets	3,00%	-28,06%	-17,10%	49,34%	-7,55%	-6,74%	-4,65%	-3,86%	-20,53%
Aktien Nachhaltigkeit	2,00%	-16,24%	-15,23%	31,17%	-10,79%	-6,79%	-4,50%	-4,91%	-21,71%
Obligationen Schweiz	20,50%	3,74%	0,22%	-1,02%	2,77%	1,83%	0,31%	0,50%	2,81%
Obligationen Ausland CHF	5,00%	4,73%	-1,91%	-2,81%	5,05%	5,91%	-2,44%	-0,61%	-6,24%
Obligationen Credit 100	10,00%	-4,76%	-6,82%	6,24%	-0,37%	-0,08%	0,37%	0,23%	0,40%
Obligationen Euro	2,00%	1,62%	-0,84%	1,44%	0,53%	1,11%	0,52%	0,83%	1,51%
Wandelanleihen	5,00%	-14,69%	-14,80%	8,92%	-9,93%	-5,43%	-3,37%	-2,28%	-14,66%
Immobilien Schweiz	7,00%	4,09%	0,75%	10,73%	6,84%	1,23%	1,14%	-0,77%	-1,13%
Immobilien Global	1,00%	-4,59%	-2,16%	2,96%	-3,11%	-0,22%	-2,10%	-0,71%	-8,34%
Immobilien Europa	2,00%	-4,40%	-2,12%	2,52%	-3,49%	-0,14%	-1,98%	-0,72%	-8,42%
Private Equity	2,00%	-22,10%	-25,37%	70,69%	-14,78%	-10,65%	-5,51%	-5,70%	-28,52%
Infrastruktur	2,00%	-14,09%	-14,62%	13,68%	-5,23%	-3,60%	-3,45%	-6,36%	-19,75%
Hedge Funds	10,00%	-10,43%	-5,04%	7,70%	-4,52%	-3,78%	-0,35%	-1,39%	-3,87%
Rohstoffe	2,00%	-19,44%	-16,39%	16,80%	-7,33%	-6,87%	-1,71%	-6,73%	-16,76%
Insurance Linked Securities	2,00%	4,75%	-2,17%	-6,42%	7,97%	5,64%	-3,39%	-1,87%	-5,54%
Hypotheken	8,00%	1,14%	-0,16%	1,02%	-0,09%	0,61%	0,54%	0,61%	1,62%
Liquidität	0,50%	0,38%	0,24%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>Portfolio</b>	<b>100,00%</b>	<b>-5,21%</b>	<b>-6,20%</b>	<b>10,33%</b>	<b>-2,01%</b>	<b>-1,33%</b>	<b>-1,21%</b>	<b>-1,65%</b>	<b>-6,77%</b>

Tabelle 2.4: Auswirkungen historischer Stressereignisse auf das Portfolio



## 3 Modelle zur Konstruktion eines zukunftsorientierten Stresstests

### 3.1 Übersicht

Innerhalb des vorliegenden Kapitels wird auf die ökonometrischen Zeitreihenmodelle, die zur Konstruktion eines modellgestützten Stresstests benötigt werden, eingegangen. Dabei wird ganz allgemein zwischen Risikofaktoren, die als Zeitreihen modelliert werden, und Bewertungsregeln, die den Zusammenhang zwischen den Risikofaktoren und den Wertpapieren innerhalb des betrachteten Portfolios abbilden, unterschieden. Die Risikofaktoren können dabei sowohl Wertpapierrenditen - in diesem Fall sind die Bewertungsregeln trivial - als auch nicht investierbare Variablen sein, die lediglich für die zukünftige Entwicklung der betrachteten Wertpapiere maßgeblich sind. Als Beispiele für Risikofaktoren können unter anderem die Kursentwicklung eines Aktienmarkts, ein Währungspaar, ein Rohstoffpreis oder ein Zinssatz genannt werden.

Auf die Modellierung von Risikofaktoren wird innerhalb der nächsten Abschnitte eingegangen. Dabei erfolgt zunächst eine Darstellung von univariaten und multivariaten Zeitreihenmodellen für den Erwartungswert der betrachteten Variablen. Da ökonometrische Zeitreihen häufig eine beträchtliche Heteroskedastizität aufweisen, werden diese stochastischen Prozesse anschließend um geeignete Modelle für die Varianz bzw. die Kovarianzmatrix der untersuchten Zeitreihen ergänzt. Zum Ende des Kapitels werden Modelle für einen dynamischen und / oder nichtlinearen Zusammenhang zwischen den einzelnen Risikofaktoren dargestellt.

## 3.2 Notation

Im Folgenden sei

- $y = y_t$  ein beliebiger stochastischer Prozess.
- $f(y_t)$  die Dichtefunktion des Prozesses  $y_t$ .
- $F(y_t)$  die Verteilungsfunktion des Prozesses  $y_t$ .
- $\vec{y} = \vec{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})$  ein multivariater stochastischer Prozess.
- $\vec{f} = \vec{f}_t = (f_{1,t}, \dots, f_{m,t})$  ein multivariater stochastischer Prozess von Faktoren oder auch Hauptkomponenten, die aus  $\vec{y}$  abgeleitet werden.
- $\Sigma = \Sigma_t$  die konstante oder zeitabhängige Kovarianzmatrix eines multivariaten stochastischen Prozesses.
- $S = S_t$  der Preis einer Aktie oder eines Aktienindex zum Zeitpunkt  $t$ .
- $B = B_t$  der Preis eines festverzinslichen Wertpapiers zum Zeitpunkt  $t$ .
- $r = r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$  die stetigen Tages-, Wochen- oder Monatsrenditen des stochastischen Prozesses  $S$ .
- $\varepsilon$  und  $\vec{\varepsilon}$  ein zufälliger Fehlerterm.
- $\nu$  und  $\vec{\nu}$  ein zufälliger Fehlerterm.
- $\epsilon$  und  $\vec{\epsilon}$  ein zufälliger Fehlerterm.
- $L$  der Lag-Operator, d. h.  $L^p y_t = y_{t-p}$ .
- $\det(A)$  die Determinante der Matrix  $A$ .
- $I_n$  die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix.

## 3.3 Zeitreihenmodelle für den Erwartungswert

### 3.3.1 Grundlagen Zeitreihenanalyse

Im vorliegenden Abschnitt werden drei weit verbreitete Zeitreihenmodelle zur Abbildung des stochastischen Prozesses  $y_t$  eingeführt. Das erste der betrachteten Modelle schätzt den Wert von  $y_t$  auf Basis der vergangenen Realisationen von  $y$ , während das zweite Modell die vergangenen Realisationen des Fehlerterms  $\varepsilon$  zur Schätzung verwendet. Anschließend wird ein Modell eingeführt, welches beide zuvor erklärten Modelle enthält. Für jeden der drei Prozesse wird zumindest für den einfachsten Fall, den jeweiligen Prozess erster Ordnung, eine Bedingung für die *Stationarität* des Prozesses angegeben.

Die folgende Definition der *Stationarität* und die Kriterien für die *Invertierbarkeit* eines stochastischen Prozesses wurden von [Tsay, 2005] übernommen, und die Darstellung der drei Zeitreihenmodelle stammt aus [Lütkepohl, 2004a].

#### 3.3.1.1 Stationarität

Ein stochastischer Prozess  $y_t$  heißt *schwach stationär*, wenn sein Erwartungswert und seine Kovarianzfunktion zeitinvariant sind, d. h.:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_t) &= \mu \quad \forall \quad t \in \mathbb{T} \\ \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t+h} - \mu)] = \gamma_h \quad \forall \quad t \in \mathbb{T}, h \geq 0 \end{aligned}$$

Da

$$\text{Cov}(y_t, y_{t+0}) = \text{Var}(y_t) = \gamma_0$$

gilt, ist die Varianz von  $y_t$  ebenfalls zeitinvariant.

Ein stochastischer Prozess  $y_t$  heißt *streng stationär*, wenn die gemeinsame Verteilung der  $y_{t_1}, \dots, y_{t_q}$  gegenüber einer Verschiebung auf der Zeitachse invariant ist, d. h.:

$$f(y_{t_1}, \dots, y_{t_n}) = f(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_n+h})$$

Ein  $AR(p)$  Prozess<sup>1</sup> besitzt folgende Gestalt:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Der Term  $\varepsilon_t$  ist eine zufällige zeitinvariante Störgröße mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$ . Die einfachste Version eines autoregressiven Prozesses, der  $AR(1)$  Prozess, ist schwach stationär, wenn  $|a_1| < 1$  ist.

Ein  $MA(q)$  Prozess<sup>2</sup> besitzt im allgemeinen Fall die Struktur:

$$y_t = b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Das heißt, statt der Realisationen von  $y_{t-1}, \dots, y_{t-q}$  werden hier die realisierten Fehlerterme, d. h. die Abweichungen von den vorhergesagten Werten  $\varepsilon_{t-1} = (y_{t-1} - \hat{y}_{t-1}), \dots, \varepsilon_{t-q} = (y_{t-q} - \hat{y}_{t-q})$  zur Schätzung von  $y_t$  verwendet. Endliche  $MA$  Prozesse sind immer schwach stationär und besitzen ebenfalls den Erwartungswert 0.

Ein Prozess, welcher sowohl vergangene Realisationen von  $y$  als auch von  $\varepsilon$  berücksichtigt, heißt  $ARMA(p, q)$  Prozess<sup>3</sup>. Der  $ARMA(p, q)$  Prozess enthält sowohl den  $AR(p)$  Prozess ( $q = 0$ ) als auch den  $MA(q)$  Prozess ( $p = 0$ ) und besitzt die untenstehende Gestalt:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Wie der  $AR(1)$  Prozess ist auch der  $ARMA(1, q)$  Prozess schwach stationär, wenn  $|a_1| < 1$  ist.

Mit Hilfe des Lag-Operators lassen sich die soeben eingeführten Prozesse noch etwas kompakter darstellen.

$$AR(p) : (1 - a_1 L - \dots - a_p L^p) y_t = a(L) y_t = \varepsilon_t$$

$$MA(q) : (1 + b_1 L + \dots + b_q L^q) \varepsilon_t = b(L) \varepsilon_t = y_t$$

$$ARMA(p, q) : a(L) y_t = b(L) \varepsilon_t$$

<sup>1</sup>Autoregressiver Prozess der Ordnung p.

<sup>2</sup>Moving Average Prozess der Ordnung q.

<sup>3</sup>Auto Regressive Moving Average Prozess der Ordnung (p,q).



Mit Hilfe dieser kompakten Notation können die Kriterien für Stationarität auch für höhere Ordnungen von  $p$  und  $q$  angegeben werden: Ein  $AR(p)$  Prozess bzw. ein  $ARMA(p, q)$  ist stationär, wenn für alle komplexen Zahlen  $z$   $a(z) \neq 0 \quad \forall \quad |z| \leq 1$  gilt. Außerdem lässt sich die Eigenschaft der *Invertierbarkeit* in dieser Notation übersichtlich definieren.

### 3.3.1.2 Invertierbarkeit

Ein  $MA(q)$  Prozess bzw. ein  $ARMA(p, q)$  Prozess ist invertierbar, wenn er eine Darstellung als  $AR$  Prozess unendlicher Ordnung besitzt. Die Darstellung als  $AR$  Prozess ist möglich, falls  $b(z) \neq 0 \quad \forall \quad |z| \leq 1$ .

## 3.3.2 Vektorautoregression, Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle

### 3.3.2.1 Vektorautoregression

Vektorautoregressionsmodelle sind eine Verallgemeinerung der univariaten Autoregressionsmodelle und werden häufig zur Modellierung mehrerer voneinander abhängiger ökonomischer Zeitreihen eingesetzt. Die Klasse der Vektorautoregressionsmodelle geht zurück auf die Arbeit von Christopher Sims, der in [Sims, 1980] die Einsetzung von a priori Restriktionen bezüglich der Abhängigkeiten unter den betrachteten Variablen, d. h. unter anderem die Aufteilung der einzelnen Variablen in *endogene* und *exogene* Variablen, verwirft.

Sims' Kritik an den strukturellen Modellen und ihren „unfassbaren Restriktionen“<sup>4</sup>, die zur Identifizierung der Modelle oftmals eingesetzt werden, beinhaltet die folgenden Punkte:

1. Die Restriktionen, die zur Identifizierung eines Modells eingesetzt werden müssen, sind nicht eindeutig. Eine häufig verwendete Klasse von Restriktionen, die *Normalisierungen*, fordern beispielsweise die Orthogonalität der Residuenvektoren über alle Gleichungen und eine Dreiecksform der Koeffizientenmatrix des *aktuellen* Variablenvektors auf der linken Seite des Gleichungssystems. Durch

---

<sup>4</sup>Eigene Übersetzung.

die trianguläre Struktur der Koeffizientenmatrix ergeben sich je nach Sortierung der Variablen unterschiedliche unverzögerte Wechselwirkungsbeziehungen. Wenn für die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite des Gleichungssystems eine untere Dreiecksform mit Diagonalelementen gleich 1 gefordert wird, können Schocks der im Variablenvektor weiter oben stehenden Variablen alle folgenden Variablen ohne Zeitverzögerung beeinflussen, die umgekehrten Wechselwirkungsbeziehungen „von unten nach oben“ werden jedoch nicht modelliert.

2. Auch wenn die Restriktionen, die jeweils für jede Gleichung eines Gleichungssystem eingesetzt werden, bei der isolierten Betrachtung dieser Gleichung angemessen erscheinen, ergibt sich bei der Betrachtung des gesamten Gleichungssystems oftmals ein System von Restriktionen mit *schlechten* Eigenschaften. Ein Beispiel für die Unangemessenheit eines Sets von a priori Restriktionen bei der Betrachtung des gesamten Gleichungssystems befindet sich in [Griliches, 1968], in welchem das Konsumverhalten für verschiedene Sektoren getrennt voneinander modelliert wird. Bei dem vorliegenden Beispiel handelt es sich um ein Teilmodell der ersten Version des Brookings Modells (vgl. [Duesenberry, 1965]), welches wie bereits erwähnt die Modellierung des Konsums für verschiedene Sektoren zum Gegenstand hat. Es wird kritisiert, dass das Konsumverhalten für Gebrauchsgüter getrennt von demjenigen für Dienstleistungen modelliert wird, wobei ein jeweils unterschiedliches Set von exogenen Variablen benutzt wird. Lags werden in den Gleichungen für Gebrauchsgüter und Dienstleistungen verwendet, aber nicht für die anderen Konsumvariablen. Das Kaufverhalten hängt für den Automobilsektor von einer Variable *Verhalten* ab, die in keiner der anderen Gleichungen auftaucht. Die Bevölkerungszahl besitzt nach dem vorliegenden Modell einen Einfluss auf den Konsum von Verbrauchsgütern, nicht jedoch auf den Bedarf an Gebrauchsgütern und Dienstleistungen. Das Preisniveau taucht in den Gleichungen für Lebensmittel und Dienstleistungen als erklärende Variable auf, nicht aber in der Gleichung für Gebrauchsgüter. Die Menge des liquiden Vermögens wird zur Modellierung des Konsums von Verbrauchsgütern und Dienstleistungen verwendet, nicht jedoch für Lebensmittel und Kraftfahrzeuge.
3. Auch Restriktionen, die das rationale Handeln der Marktakteure unter Un-

sicherheit erzwingen sollen, sind als problematisch anzusehen. Sims erläutert diesen Sachverhalt an folgendem Beispiel:

„Auch wenn wir uns sicher sind, dass der Geschmack der amerikanischen Verbraucher unabhängig von der Temperatur in Brasilien ist, müssen wir uns eingestehen, dass die amerikanischen Verbraucher Kaffee auf Vorrat einkaufen könnten, wenn sie in der Zeitung von einem Frost in Brasilien lesen, um auf diese Weise die Auswirkungen des Frostes zu antizipieren.“<sup>5</sup>

Statt dessen schlägt Sims vor, alle Zeitreihen im Modell als endogene Variablen zu behandeln und nur die Länge des Lags vorzugeben. Das resultierende  $VAR(p)$ -Modell<sup>6</sup> ist eine Verallgemeinerung des eindimensionalen  $AR(p)$ -Modells

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

und besitzt die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \vec{y}_t &= A_1 \vec{y}_{t-1} + \dots + A_p \vec{y}_{t-p} + \vec{\varepsilon}_t \\ \vec{y}_t &= (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})' \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei  $A_1, \dots, A_p$  die  $n \times n$  Matrizen mit den entsprechenden Koeffizienten sind.

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11,k} & \cdot & a_{1j,k} & \cdot & a_{1n,k} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{i1,k} & \cdot & a_{ij,k} & \cdot & a_{in,k} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1,k} & \cdot & a_{nj,k} & \cdot & a_{nn,k} \end{bmatrix}$$

Das Element  $a_{ij,k}$  bildet dabei den Einfluss der Variable  $y_{j,t-k}$  auf die Variable  $y_{i,t}$  ab, d. h. den Einfluss von  $y_j$  auf  $y_i$  mit der Verzögerung  $k$ .

Die in 3.1 wiedergegebene Darstellung heißt *reduzierte Form* des Vektorautoregressionsmodells, da alle eventuell vorhandenen sofortigen Wechselwirkungen zwischen den  $y_1, \dots, y_n$  bereits in die Koeffizientenmatrizen auf der rechten Seite des Glei-

<sup>5</sup>Eigene Übersetzung.

<sup>6</sup>Vektorautoregressionsmodell der Ordnung  $p$ .

chungssystems eingerechnet sind, d. h. auf der linken Seite stehen nur die aktuellen Variablen  $\vec{y}_t$  und auf der rechten Seite ausschließlich Variablen mit Lag, also  $\vec{y}_{t-1}, \dots, \vec{y}_{t-p}$ . Der Vektorautoregressionsprozess ist *stabil*, wenn

$$\det(I_n - A_1 z - \dots - A_p z^p) \neq 0 \quad \forall \quad |z| \leq 1,$$

d. h. wenn das Polynom, welches durch die Anwendung der Determinante definiert wird, keine Nullstellen auf dem Rand und innerhalb des komplexen Einheitskreises besitzt.

### 3.3.2.2 Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle

Falls zwischen einzelnen Variablen von  $\vec{y}$  langfristige Gleichgewichtsbeziehungen bestehen oder falls die  $y_i$  einen gemeinsamen stochastischen Trend besitzen, d. h. im Falle von *kointegrierten* Zeitreihen, ist die reduzierte Form des Vektorautoregressionsmodells aus 3.1 nicht die geeignete Darstellung. In diesem Fall ermöglicht die Parametrisierung als *Fehlerkorrekturmodell* eine anschaulichere Betrachtung des Vektorautoregressionsmodells einschließlich aller Kointegrationsbeziehungen.

Das Konzept der kointegrierten Variablen zur Formalisierung der Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den  $y_i$  wurde in [Granger, 1981] und [Granger / Weiss, 1983] eingeführt, und die Definition der Fehlerkorrekturmodelle wurde in [Engle / Granger, 1987] vorgenommen.

Obwohl eine einzelne ökonomische Zeitreihenvariable bei isolierter Betrachtung einen erheblichen Trend und erhebliche Schwankungen aufweisen kann, so ist es dennoch möglich, dass zwischen einem Paar ökonomischer Variablen bei der gemeinsamen Betrachtung ihrer Zeitreihen eine Gleichgewichtsbeziehung besteht, und dass ihr gemeinsamer stochastischer Prozess stets in Richtung des Gleichgewichtszustands tendiert.

Als Beispiele für Variablenpaare, bei denen eine derartige Gleichgewichtsbeziehung plausibel wäre, können langfristige und kurzfristige Zinssätze, Einkommen und Konsum von Haushalten, der Spot- und der Terminpreis eines Rohstoffs oder die effektive Verzinsung ähnlicher Anleihen angenommen werden.

Der Variablenvektor  $\vec{y}_t$  befindet sich im Gleichgewicht, wenn die lineare Restriktion

$$\alpha' \vec{y}_t = 0$$

erfüllt ist. Die Abweichung vom Gleichgewichtszustand

$$z_t = \alpha' \vec{y}_t$$

müsste dann um den Mittelwert 0 fluktuieren. Zur Formalisierung und Definition der beschriebenen Gleichgewichtsbeziehung werden die Begriffe der *Integration* und *Kointegration* von ökonometrischen Zeitreihen benötigt.

**Integration**

Eine Zeitreihenvariable ohne deterministische Komponente, die nach Bildung der  $d$ -ten Differenzen eine stationäre und invertierbare *ARMA*-Darstellung besitzt, heißt integriert. Die Notation ist  $y_t \sim I(d)$ .

**Kointegration**

Die Variablen des Variablenvektors  $\vec{y}_t$  heißen kointegriert mit der Ordnung  $(d, b)$ , wenn gilt:

1. Alle Komponenten von  $\vec{y}_t$  sind  $I(d)$ .
2. Es existiert ein Vektor  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ), so dass  $z_t = \alpha' \vec{y}_t \sim I(d - b)$ ,  $b > 0$ .

Die Notation ist  $\vec{y}_t \sim CI(d, b)$ .

Wenn zwischen den  $y_i$  Kointegrationsbeziehungen bestehen, lassen sich diese durch die Parametrisierung des Vektorautoregressionsmodells als Fehlerkorrekturmodell berücksichtigen. Die Darstellung von 3.1 als Fehlerkorrekturmodell besitzt die folgende Gestalt:

$$\Delta \vec{y}_t = \Pi \vec{y}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \vec{y}_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta \vec{y}_{t-p+1} + \vec{\varepsilon}_t \quad (3.2)$$

Die beiden Darstellungen sind äquivalent: Das Fehlerkorrekturmodell ergibt sich aus der reduzierten Form in 3.1, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung  $\vec{y}_{t-1}$  subtrahiert und die resultierenden Terme entsprechend umstellt. Die Parameter des Fehlerkorrekturmodells lassen sich ebenfalls aus den Parametern der reduzierten Form berechnen.

$$\Pi = -(I_n - A_1 - \dots - A_p)$$

$$\Gamma_k = -(A_{k+1} + \dots + A_p), \quad k = 1, \dots, p-1$$

und umgekehrt

$$A_1 = (\Gamma_1 + \Pi + I_n)$$

$$A_k = \Gamma_k - \Gamma_{k-1}, \quad k = 2, \dots, p-1$$

$$A_p = -\Gamma_{p-1}$$

Das Modell in 3.2 wird als  $VECM(p-1)$  Modell<sup>7</sup> bezeichnet.

Unter der häufig eingesetzten Annahme, dass alle ökonometrischen Variablen  $y_i$  höchstens  $I(1)$  sein können, muss  $\Delta\vec{y}_t$  also  $I(0)$  sein. Daraus folgt, dass auch  $\Pi\vec{y}_{t-1}$   $I(0)$  sein muss. Deshalb müssen alle Kointegrationsbeziehungen zwischen den  $y_i$  in der Matrix  $\Pi$  enthalten sein. Es gilt die folgende Beziehung: Falls die einzelnen Variablen von  $\vec{y}_t$  kointegriert sind, ist  $\Pi$  singulär. Der Rang von  $\Pi$  heißt *Kointegrationsrang* des Gleichungssystems. Wenn  $rg(\Pi) = r < n$ , dann kann  $\Pi$  als Produkt zweier  $(n \times r)$ -Matrizen  $\alpha$  und  $\beta$  dargestellt werden:  $\Pi = \alpha\beta'$ . Da die Linksmultiplikation eines  $I(0)$  Vektors mit einer Matrix wieder einen  $I(0)$  Prozess ergibt, müssen die Kointegrationsbeziehungen in der Matrix  $\beta$  enthalten sein.

Begründung:

$$\begin{aligned} \Pi\vec{y}_{t-1} \text{ ist } I(0) &\rightarrow A\Pi\vec{y}_{t-1} \text{ ist } I(0) \\ \text{Mit } A = (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha' &\rightarrow \beta'\vec{y}_{t-1} \text{ ist } I(0) \end{aligned}$$

Deshalb wird die Matrix  $\beta$  häufig als Kointegrationsmatrix bezeichnet, während  $\alpha$  als Gewichtsmatrix bezeichnet wird. Die Zerlegung von  $\Pi$  in  $\alpha$  und  $\beta$  ist nicht eindeutig und kann daher nicht ohne zusätzliche Informationen oder Restriktionen den beobachteten Daten entnommen werden. Die Matrizen  $\alpha$  und  $\beta$  werden später zur Parameterschätzung und zur Einführung eines Tests auf Kointegration benötigt.

### ***Ein Test auf Kointegration***

Eine Klasse von Likelihood-Ratio-Tests, die das Testen von Hypothesen bezüglich des Kointegrationsrangs ermöglichen, wurde in [Johansen, 1988], [Johansen, 1991] und [Johansen, 1995] vorgestellt, wobei die Darstellung der Tests aus [Lütkepohl, 2004b] entnommen wurde. Um den Kointegrationsrang eines Fehlerkorrekturmodells zu ermitteln, ist die folgende Sequenz von Likelihood-Ratio-Tests geeignet:

---

<sup>7</sup>Vector Error Correction Model.

$$\begin{array}{ll}
H_0(0) : rg(\Pi) = 0 & \text{gegen } H_1(0) : rg(\Pi) > 0 \\
H_0(1) : rg(\Pi) = 1 & \text{gegen } H_1(1) : rg(\Pi) > 1 \\
& \dots \\
H_0(r) : rg(\Pi) = r & \text{gegen } H_1(r) : rg(\Pi) > r \\
& \dots \\
H_0(n-1) : rg(\Pi) = n-1 & \text{gegen } H_1(n-1) : rg(\Pi) = n
\end{array}$$

Die Testreihe wird beendet und der entsprechende Kointegrationsrang wird ausgewählt, sobald die Nullhypothese erstmals nicht mehr abgelehnt werden kann. Wenn die erste Nullhypothese beibehalten wird, so entspricht das Fehlerkorrekturmodell dem ursprünglichen Vektorautoregressionsmodell aus 3.1, jedoch angewendet auf die ersten Differenzen. Wenn auf der anderen Seite aber alle getesteten Nullhypothesen abgelehnt werden, dann entspricht das Fehlerkorrekturmodell genau der reduzierten Form aus 3.1.

Die Teststatistik lautet

$$LR(r_0) = -(T-p) \sum_{j=r_0+1}^n \ln(1-\lambda_j)$$

wobei  $T$  die Länge der gesamten Zeitreihe ist und  $T-p$  die verbleibende Länge der Zeitreihe von  $\vec{y}_t$ , die durch das Fehlerkorrekturmodell modelliert werden kann. Die  $\lambda_j$  sind die Eigenwerte, die sich ergeben, wenn für 3.2 ein rangreduziertes Modell angepasst wird. Die Anpassung von Vektorautoregressionsmodellen und Fehlerkorrekturmodellen mit unvollständigem Rang wird in [Velu et al., 1986], [Ahn / Reinsel, 1988] und [Ahn / Reinsel, 1990] erarbeitet. Der obenstehende Test des Kointegrationsrangs wird allgemein als *Spur-Test* bezeichnet. Ein Test, mit welchem sich Hypothesen der Art

$$H_0(r_0) : rg(\Pi) = r_0 \quad \text{gegen} \quad H_1(r_0) : rg(\Pi) = r_0 + 1$$

gegeneinander testen lassen, ist der *Maximum-Eigenwert Test*, der ebenfalls in [Johansen, 1991] vorgeschlagen wird. Seine Teststatistik besitzt die Gestalt:

$$LR_{\max}(r_0) = -(T-p) \ln(1-\lambda_{r_0+1})$$



Die kritischen Werte beider Teststatistiken müssen via Simulation gewonnen werden und können für ausgewählte Fälle auch aus [Johansen, 1988] und [Johansen, 1995] entnommen werden.

### 3.3.3 Strukturelle Vektorautoregressionsmodelle

Eine Verallgemeinerung des Fehlerkorrekturmodells aus 3.2 beinhaltet auch deterministische Terme und exogene Variablen. Eine allgemeine und flexible Version des Fehlerkorrekturmodells besitzt dementsprechend die folgende Gestalt:

$$\Delta \vec{y}_t = \Pi \vec{y}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \vec{y}_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta \vec{y}_{t-p+1} + C D_t + B \vec{z}_t + \vec{\varepsilon}_t \quad (3.3)$$

Die Matrix  $D_t$  enthält alle deterministischen Regressoren, und  $\vec{z}_t$  enthält alle *exogenen* Variablen, d. h. alle Variablen, die im Modell nicht durch eine Gleichung modelliert werden. Die Koeffizienten für  $D_t$  und  $\vec{z}_t$  sind in den Matrizen  $C$  und  $B$  enthalten.

Alle bisher betrachteten Vektorautoregressionsmodelle berücksichtigen keine *augenblicklichen* Wechselwirkungen der Variablen von  $\vec{y}_t$ . Eine Parametrisierung, welche die zusätzliche Modellierung von sofortigen Wechselwirkungen zwischen den  $y_i$  ermöglicht, kann aus dem vorherigen Modell 3.3 gebildet werden.

$$A \Delta \vec{y}_t = \Pi^* \vec{y}_{t-1} + \Gamma_1^* \Delta \vec{y}_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1}^* \Delta \vec{y}_{t-p+1} + C^* D_t + B^* \vec{z}_t + \vec{v}_t \quad (3.4)$$

Alle sofortigen Wechselwirkungen zwischen den Variablen von  $\vec{y}_t$  sind in der Matrix  $A$  enthalten.<sup>8</sup> Modelle, die unverzögerte Wechselwirkungen zwischen den  $y_i$  berücksichtigen können, werden als *strukturelle* Vektorautoregressionsmodelle oder Fehlerkorrekturmodelle bezeichnet. Die Darstellung 3.4 lässt sich wieder in die reduzierte

---

<sup>8</sup>Die Matrix  $A$  muss invertierbar sein.

Form 3.3 überführen:

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= A^{-1}\Gamma_k^* \quad (k = 1, \dots, p-1) \\ C &= A^{-1}C^* \\ \Pi &= A^{-1}\Pi^* \\ B &= A^{-1}B^* \\ \vec{\varepsilon}_t &= A^{-1}\vec{\nu}_t\end{aligned}$$

In der Praxis werden strukturelle Vektorautoregressions- und Fehlerkorrekturmodelle jedoch nur selten verwendet, da sie einerseits sehr kompliziert zu schätzen sind und da andererseits durch die Existenz von sofortigen Wechselwirkungsbeziehungen eine *Vorhersage* unmöglich wird.

### 3.3.4 Parameterschätzung

Die Anpassung des zuerst betrachteten Vektorautoregressionsmodells aus 3.1, d. h. der reduzierten Form, ist unkompliziert, da der allgemeine Kleinste-Quadrate-Schätzer (KQ) zur Parameterschätzung verwendet werden kann. Zusätzlich zu den Stichprobenwerten  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_T$  wird zur Anpassung der Koeffizienten noch eine Datenhistorie der Länge  $p$  benötigt, also  $\vec{y}_{-p+1}, \dots, \vec{y}_0$ . Das Modell aus 3.1 kann dann in einer einzelnen Gleichung notiert werden:

$$Y = AZ + E$$

Dabei ist  $Y = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_T]$ ,  $A = [A_1, \dots, A_p]$ ,  $E = [\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_T]$  und

$$Z = \begin{bmatrix} \vec{y}_0 & \cdots & \vec{y}_{T-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{y}_{-p+1} & \cdots & \vec{y}_{T-p} \end{bmatrix}.$$

Der KQ-Schätzer für die Koeffizientenmatrizen  $A$  ist

$$\hat{A} = [\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p] = YZ'(ZZ')^{-1}.$$

Unter gängigen Regularitätsbedingungen, die beispielsweise in [Hamilton, 1994] zu finden sind, ist  $\hat{A}$  konsistent und asymptotisch normalverteilt.

$$\sqrt{T}vec(\hat{A} - A_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\hat{A}})$$

Der *vec*-Operator wandelt eine Matrix in einen Vektor um, indem er die einzelnen Spalten der Matrix in einem einzelnen Spaltenvektor untereinander notiert, und  $d$  bezeichnet die Konvergenz nach Verteilung.

Zur Anpassung des Fehlerkorrekturmodells aus 3.2 kann ein Maximum-Likelihood-Schätzverfahren angewendet werden. Im Folgenden sei  $\Delta Y = [\Delta \vec{y}_1, \dots, \Delta \vec{y}_T]$ ,  $Y_{-1} = [\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_{T-1}]$ ,  $\Gamma = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}]$ ,  $E = [\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_T]$  und

$$X = \begin{bmatrix} \Delta \vec{y}_0 & \cdots & \Delta \vec{y}_{T-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \vec{y}_{-p+2} & \cdots & \Delta \vec{y}_{T-p+1} \end{bmatrix}.$$

Die Matrixnotation für das Fehlerkorrekturmodell lautet dann:

$$\Delta Y = \Pi Y_{-1} + \Gamma X + E$$

Wenn  $\Pi$  bereits gegeben ist, lautet der KQ-Schätzer für  $\Gamma$

$$\hat{\Gamma} = (\Delta Y - \Pi Y_{-1})X'(X'X)^{-1}.$$

Setzt man den Schätzer für  $\Gamma$  in die Matrixgleichung ein, erhält man die Beziehung

$$\Delta M = \Pi Y_{-1}M + \hat{E},$$

wobei  $M = I - X'(X'X)^{-1}X$  ist. Nach [Johansen, 1995] ergibt sich der Schätzer für  $\Pi$  durch die Lösung des generalisierten Eigenwertproblems

$$\det(\lambda S_{11} - S'_{01}S^{-1}_{00}S_{01}) = 0,$$

wobei  $S_{00} = T^{-1}\Delta Y M \Delta Y'$ ,  $S_{01} = T^{-1}\Delta Y M Y'_{-1}$  und  $S_{11} = T^{-1}Y_{-1} M Y'_{-1}$  ist. Seien  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  die sortierten Eigenwerte und  $V = [b_1, \dots, b_n]$  die Matrix der kor-

respondierenden normierten Eigenvektoren. Die Normierung wird durch die Lösung der Matrixgleichung

$$V'S_{11}V = I_n$$

vorgenommen. Die Schätzung der rangreduzierten Matrix  $\Pi = \alpha\beta'$  ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= [b_1, \dots, b_r] \\ \hat{\alpha} &= \Delta Y M Y'_{-1} \hat{\beta} (\hat{\beta}' Y'_{-1} M Y'_{-1} \hat{\beta})^{-1}.\end{aligned}$$

Die Maximum-Likelihood Schätzer für  $\Gamma$  und  $\Pi$  sind unter allgemeinen Regularitätsbedingungen konsistent und gemeinsam asymptotisch normal.

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\Gamma} - \Gamma_0) &\xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\hat{\Gamma}}) \\ \sqrt{T}(\hat{\Pi} - \Pi_0) &\xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\hat{\Pi}})\end{aligned}$$

Die Anpassung von strukturellen Vektorautoregressionsmodellen ist erheblich komplizierter als die Schätzung von Vektorautoregressionsmodellen und Fehlerkorrekturmodellen ohne die Berücksichtigung von sofortigen Wechselwirkungen. Einerseits können strukturelle Modelle nur unter Verwendung von zusätzlichen Restriktionen identifiziert und eindeutig geschätzt werden, und andererseits können die Koeffizienten nicht in einem Schritt geschätzt werden.

Das erweiterte Fehlerkorrekturmodell aus 3.3 kann auch mit Hilfe des obenstehenden Schätzverfahrens angepasst werden, wenn die deterministischen Terme und die exogenen Variablen ebenfalls in  $Y$  oder  $\Delta Y$  aufgenommen werden, und anschließend passende Restriktionen für die Kointegrationsbeziehungen eingeführt werden, die verhindern, dass ein Einfluss der endogenen Variablen auf die exogenen Variablen modelliert wird.

### 3.3.5 Impulse-Response-Analysis

Das allgemeinste und flexibelste Modell, welches bisher betrachtet wurde, ist das strukturelle Fehlerkorrekturmodell aus 3.4. Beim Rechnen mit strukturellen Modellen und vor allem bei der Konstruktion eines Stresstests liegt das Hauptaugenmerk

auf den Auswirkungen von *strukturellen Schocks* im Vektor der Residuen, welche nicht vorhersagbar sind. Um die Auswirkungen eines Schocks isoliert modellieren und betrachten zu können, werden auf Basis der Residuen häufig *orthogonale* Schocks gebildet. Die strukturellen Schocks  $\epsilon$  ergeben sich über den Einsatz linearer Restriktionen aus den Residuen.

$$\begin{aligned}\vec{v}_t &= B\vec{\epsilon}_t \\ A\vec{\epsilon}_t &= B\vec{\epsilon}_t \\ \vec{\epsilon}_t &= A^{-1}B\vec{\epsilon}_t \\ \vec{\epsilon}_t &= B^{-1}A\vec{\epsilon}_t\end{aligned}$$

Ein Gleichungssystem dieser Gestalt ist nicht ohne den Einsatz von zahlreichen a priori Restriktionen identifizierbar. Insgesamt müssen für A und B  $2n^2$  Koeffizienten identifiziert werden, wobei nur  $n(n+1)/2$  Elemente von A und B wirklich geschätzt werden können.<sup>9</sup> Es müssen also weitere

$$2n^2 - n(n+1)/2 = n^2 + n(n-1)/2$$

Restriktionen eingesetzt werden. Selbst wenn auf die Modellierung der sofortigen Wechselwirkungen zwischen den  $y_i$  verzichtet wird ( $A = I_n$ ), müssen zusätzlich noch  $n(n-1)/2$  Restriktionen eingesetzt werden. Wenn man außerdem noch eine rekursive Struktur der Schocks, d. h. eine untere Dreiecksform der Matrix B fordert, erhält man dadurch die noch fehlenden  $n(n-1)/2$  Restriktionen.<sup>10</sup> Im Falle eines stationären Vektorautoregressionsprozesses lässt sich die Auswirkung eines Schocks am einfachsten durch die Darstellung als Moving Average Prozess erfassen, welche beispielsweise in [Breitung et al., 2004] erklärt wird.

$$\vec{y}_t = \Phi_0\vec{\epsilon}_t + \Phi_1\vec{\epsilon}_{t-1} + \Phi_2\vec{\epsilon}_{t-2} + \dots$$

Dabei ist  $\Phi_0 = I_n$  und die

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^k \Phi_{k-i}A_i$$

<sup>9</sup>Dies entspricht der Anzahl der nicht redundanten Kovarianzen in  $\Sigma_\epsilon$ .

<sup>10</sup>Die  $n(n-1)/2$  Elemente der Matrix B, welche oberhalb der Diagonale liegen, sind 0.

können rekursiv berechnet werden. Zur Betrachtung der über die Zeit hinweg kumulierten Auswirkung eines Schocks ist die Matrix

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k = (I_n - A_1 - \dots - A_p)^{-1}$$

geeignet. Diese existiert, falls der zu Grunde liegende Vektorautoregressionsprozess stabil ist. Da eine isolierte Betrachtung einzelner Schocks wegen möglicher Korrelationen zwischen den  $\varepsilon_i$  häufig zu unrealistischen Ergebnissen führt, werden über eine Choleski-Zerlegung der Kovarianzmatrix  $\Sigma_\varepsilon$  häufig orthogonale Schocks konstruiert.

$$\begin{aligned}\Sigma_\varepsilon &= \mathbf{B}\mathbf{B}' \\ \vec{\epsilon}_t &= \mathbf{B}^{-1}\vec{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

Dann ist

$$\vec{y}_t = \Psi_0\vec{\epsilon}_t + \Psi_1\vec{\epsilon}_{t-1} + \dots$$

und

$$\begin{aligned}\Psi_k &= \Phi_k\mathbf{B} \\ \Psi_0 &= \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Da  $\Psi_0 = \mathbf{B}$  eine untere Dreiecksmatrix ist, kann ein Schock in der ersten Variable einen sofortigen Effekt auf alle anderen Variablen haben, während  $y_2$  keinen unverzüglichen Einfluss auf  $y_1$  hat, jedoch auf  $y_3$  und alle folgenden Variablen. Diese rekursive Struktur wird als *Wold-Kausalitätskette* bezeichnet. Ein Problem bei dieser Modellstruktur ist die Tatsache, dass sich durch eine geänderte Anordnung der Variablen in  $\vec{y}_t$  auch die Auswirkungen eines Schocks verändern, so dass durch die Sortierung der Variablen eine gewisse Willkür entsteht. Es liegt deshalb nahe, verschiedene Anordnungen der  $y_i$  zu testen.

Bei der Impulse-Response-Analysis von strukturellen Vektorautoregressionsmodellen gilt für die strukturellen Schocks

$$\mathbf{A}\vec{\varepsilon}_t = \mathbf{B}\vec{\epsilon}_t$$

so dass für die Darstellung als Kausalitätskette

$$\Psi_k = \Phi_k A^{-1} B$$

gilt. Die kumulierten Auswirkungen eines Schocks ergeben sich für den Fall eines strukturellen Vektorautoregressionsmodells aus der Matrix

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k = \Phi A^{-1} B.$$

### 3.3.6 Reduktion der Parameteranzahl

Ein gravierendes Problem aller bereits erläuterten Vektorautoregressionsmodelle ist die sehr hohe Komplexität im Sinne der Anzahl der zu schätzenden Parameter, welche bezüglich der Variablenanzahl mit der Ordnung  $n^2$  ansteigt. Vor diesem Hintergrund wurden einige Methoden entwickelt, die eine Reduktion der Parameteranzahl und eine Lösung des Identifizierbarkeitsproblems als Ziel haben. Im folgenden werden verschiedene Verfahren vorgestellt, die dieses Ziel im Wesentlichen durch die Berechnung einer sehr viel kleineren Anzahl an Faktoren aus der relativ großen Anzahl an erklärenden Variablen realisieren.

#### 3.3.6.1 Dynamische Faktormodelle

Wenn die einzelnen Zeitreihen der untersuchten ökonomischen Variablen einen gemeinsamen Trend besitzen, ist die Modellierung der betreffenden Variablen durch einen gemeinsamen Index naheliegend - dieses Verfahren wurde zuerst von [Burns / Mitchell, 1946] vorgeschlagen und in [Sargent / Sims, 1977] in Form des dynamischen Faktormodells parametrisiert. Dabei werden die Variablen in  $\vec{y}_t$  durch eine Kombination von gemeinsamen Komponenten, Indizes oder Schocks  $\vec{f}_t$  und den (idiosynkratischen) Residuen  $\vec{\varepsilon}_t$  gebildet. Das Modell von Sargent und Sims besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \vec{y}_t &= B(L)\vec{f}_t + \vec{\varepsilon}_t \\ \vec{f}_t &= (f_{1,t}, \dots, f_{m,t})', \quad m \ll n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die folgenden Einschränkungen bzw. Eigenschaften sollen gelten:

- Die kleinste Potenz des Lagpolynoms  $B(L)$  ist nicht negativ.
- Wenn  $\vec{f}_t$  keine Funktion beobachtbarer Variablen ist, dann soll  $f_{j,t} \perp \varepsilon_{i,s} \quad \forall \quad i, j, s, t$  gelten.
- Wenn  $\vec{f}_t$  aus den aktuellen und verzögerten Variablen  $\vec{y}$  konstruiert wird, dann soll  $y_{j,t} \perp \varepsilon_{i,s} \quad \forall \quad i \neq j, s, t$  gelten.
- $\varepsilon_{j,t} \perp \varepsilon_{i,s} \quad \forall \quad i \neq j, s, t$ , d. h. die Residuen sind orthogonal zueinander, während Autokorrelationen jedoch möglich sind. Diese Restriktion wird nach [Sargent / Sims, 1977] für die Identifizierbarkeit des Modells benötigt.

### 3.3.6.2 Diffusionsindizes

Das Konzept der Diffusionsindizes wird in [Stock / Watson, 1998] und [Stock / Watson, 2002] erklärt. Dabei werden zunächst auf Basis der erklärenden Variablen  $\vec{x}_t$  durch eine Hauptkomponentenanalyse die Faktoren  $\vec{f}_t$  extrahiert, die dann im zweiten Schritt zur Vorhersage der abhängigen Variable  $y_{t+1}$  verwendet werden. Zunächst wird dabei von dem folgenden Modell ausgegangen:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= \vec{\beta}(L)\vec{f}_t + \varepsilon_{t+1} \\ \vec{x}_t &= \Lambda(L)\vec{f}_t + \vec{\varepsilon}_t \end{aligned}$$

Stock und Watson unterscheiden zwischen einer abhängigen Variable  $y$  und den erklärenden Variablen  $\vec{x}$ . Diese Unterscheidung passt nicht in den Kontext der Vektorautoregressionsmodelle und wird deshalb nicht übernommen, so dass im Kontext eines Vektorautoregressionsmodells  $\vec{x}_t = \vec{y}_t$  zu setzen ist.

$$\begin{aligned} \vec{y}_t &= B(L)\vec{f}_{t-1} + \vec{\varepsilon}_t & (3.6) \\ \vec{y}_{t-1} &= \Lambda(L)\vec{f}_{t-1} + \vec{\varepsilon}_{t-1} \\ B(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k L^k \\ \Lambda(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k L^k \end{aligned}$$



In der obenstehenden Darstellung sind  $\vec{y}_t$  die abhängigen Variablen und  $\vec{y}_{t-1}$  die erklärenden Variablen. Es wird angenommen, dass  $B(L)$  und  $\Lambda(L)$  die endliche Ordnung  $p$  besitzen, so dass die Darstellung 3.6 in eine statische Matrixnotation überführt werden kann.

$$\begin{aligned}\vec{y}_t &= BF_{t-1} + \vec{\epsilon}_t \\ \vec{y}_{t-1} &= \Lambda F_{t-1} + \vec{\epsilon}_{t-1} \\ B &= [B_1, \dots, B_p] \\ \Lambda &= [\Lambda_1, \dots, \Lambda_p] \\ F_{t-1} &= [\vec{f}_{t-1}^1, \dots, \vec{f}_{t-1}^p]'\end{aligned}$$

Die statische Notation ermöglicht die Anwendung der Hauptkomponentenanalyse. Die Hauptkomponentenanalyse wurde erstmalig von [Pearson, 1901] entwickelt und basiert auf einer Rotation und Dimensionsreduktion des Koordinatensystems. Dabei wird das System der Koordinaten (*Komponenten*) so konstruiert, dass die erste Achse (*Hauptkomponente*) in die Richtung der größten Abweichung, d. h. der größten Varianz, weist. Die zweite Achse wird so konstruiert, dass sie orthogonal zur ersten Komponente steht und so um die erste Achse rotiert wird, dass sie wieder in die Richtung der maximal möglichen Streuung weist. Häufig ist der größte Teil der Information des Variablensystems in den ersten Komponenten enthalten, so dass durch das Weglassen der Komponenten höherer Ordnung kaum Information verloren geht. Berechnen lässt sich die Hauptkomponentenanalyse auf Basis der Singulärwertzerlegung der Matrix  $Y_0$ , welche die standardisierten Zeitreihen von  $Y$  enthält. Wenn

$$Y_0 = V\Sigma W'$$

die Singulärwertzerlegung von  $Y_0$  ist, dann ergeben sich die Komponenten  $F$  von  $Y_0$  aus der Beziehung:<sup>11</sup>

$$F = Y_0 W = V\Sigma$$

Die Dimensionsreduktion wird vorgenommen, indem diejenigen Spalten von  $W$ , welche den kleinsten Eigenwerten bzw. Diagonalelementen von  $\Sigma$  entsprechen, entfernt werden. Die Einträge der Diagonalmatrix  $\Sigma$  heißen Singulärwerte von  $Y_0$  und ent-

<sup>11</sup>Es wird davon ausgegangen, dass  $Y_0$  eine reellwertige Matrix ist.

sprechen den Quadratwurzeln der Eigenwerte von  $Y_0'Y_0$ . Die Matrizen  $V$  und  $W$  sind orthonormal.

### 3.3.6.3 Generalisierte Dynamische Faktormodelle

In [Forni / Reichlin, 1998], [Forni et al., 2000] und [Forni / Lippi, 2001] wird das dynamische Faktormodell aus 3.5 dahingehend verallgemeinert, dass im generalisierten dynamischen Faktormodell die Residuen der einzelnen Variablen nicht mehr orthogonal zueinander sein müssen. Formal besitzt das generalisierte dynamische Faktormodell dieselbe Struktur wie das Modell von [Sargent / Sims, 1977].

$$\begin{aligned}\vec{y}_t &= B(L)\vec{f}_t + \vec{\varepsilon}_t \\ \vec{f}_t &= (f_{1,t}, \dots, f_{m,t})', \quad m \ll n\end{aligned}\tag{3.7}$$

Für die Anpassung des Modells werden die folgenden Annahmen benötigt.<sup>12</sup>

1.  $\mathbb{E}(f_{j,t}) = 0$ ,  $Var(f_{j,t}) = 1$ ,  $f_{j,t} \perp f_{j,s} \quad \forall \quad j, s \neq t$  und  $f_{j,t} \perp f_{i,s} \quad \forall \quad i \neq j, s, t$ .
2.  $\vec{\varepsilon}_t$  ist ein stationärer Prozess mit  $\mathbb{E}(\varepsilon_{i,t}) = 0$  und  $f_{j,t} \perp \varepsilon_{i,s} \quad \forall \quad i, j, s, t$ .
3. Die Koeffizienten von  $B(L)$  enthalten nur Lags mit nichtnegativer Potenz und sind quadratisch summierbar.
4. Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  existiert ein reelles  $c_i > 0$ , so dass  $\sigma_{ii}(\theta) \leq c_i \quad \forall \quad \theta \in [-\pi, \pi]$  gilt.
5. Der größte dynamische Eigenwert von  $\Sigma_n^\varepsilon(\theta)$  ist gleichmäßig beschränkt.
6. Die  $m$  größten dynamischen Eigenwerte von  $\Sigma_n^{\hat{y}}(\theta)$  divergieren für  $n \rightarrow \infty$  fast überall auf  $[-\pi, \pi]$ .

Die Konstruktion der  $\vec{f}_t$  ist kompliziert und wird in [Forni et al., 2000] behandelt, wobei die  $\vec{f}_t$  hier nicht explizit berechnet werden, sondern es werden Filter konstruiert, welche aus den  $\vec{y}_t$  direkt die  $\hat{y}_t$  extrahieren. Für eine natürliche Zahl  $M$  werden zunächst die Stichprobenkovarianzmatrizen  $\Sigma_k$  von  $\vec{y}_t$  und  $\vec{y}_{t-k}$  berechnet, wobei  $k = -M, \dots, M$  ist.<sup>13</sup> Anschließend wird aus den Kovarianzmatrizen der zeitver-

<sup>12</sup> $\Sigma_n^y(\theta)$ ,  $\Sigma_n^\varepsilon(\theta)$  und  $\Sigma_n^{\hat{y}}(\theta)$  sind hier keine Kovarianzmatrizen im engeren Sinne, sondern die spektralen Dichtematrizen der Vektorprozesse  $\vec{y}_t$ ,  $\hat{y}_t$  und  $\vec{\varepsilon}_t$ . Ihre Elemente werden mit  $\sigma_{ij}(\theta)$  bezeichnet.

<sup>13</sup>Es gilt die Symmetriebeziehung  $\Sigma_{-k} = \Sigma_k'$ .

schobenen  $\vec{y}$  auf Basis einer diskreten Fourier-Transformation auf  $(2M+1)$  Punkten die spektrale Dichtematrix geschätzt:

$$\Sigma_n^y(\theta_h) = \sum_{k=-M}^M \Sigma_k \omega_k e^{-ik\theta_h}$$

$$\theta_h = \frac{2\pi h}{2M+1}$$

$$h = 0, \dots, 2M$$

$$\omega_k = 1 - \frac{|k|}{M+1}$$

Im nächsten Schritt werden die ersten  $m$  Eigenvektoren  $\vec{p}_j(\theta_h)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) von  $\Sigma_n^y(\theta_h)$  berechnet. Eine umfangreiche Einführung in die Schätzung spektraler Dichtematrizen und deren Eigenvektoren befindet sich in [Brillinger, 1981]. Anschließend werden die Filter, die auf  $\vec{y}_t$  angewendet werden müssen, um  $\hat{y}_t$  zu erhalten, konstruiert.

$$K_i(\theta_h) = p_{1,i}^*(\theta_h)\vec{p}_1(\theta_h) + \dots + p_{m,i}^*(\theta_h)\vec{p}_m(\theta_h) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Der Operator  $*$  bezeichnet dabei die hermitesche Transposition:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle \quad \forall \quad v, w \in \mathbb{C}^n$$

Zum Schluss muss die zuvor angewendete Fourier-Transformation wieder aufgehoben werden - der Schätzer für die benötigten Filter  $\underline{K}_j(L)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) ergibt sich also aus der inversen diskreten Fourier-Transformation des Vektors  $(K_i(\theta_0), \dots, K_i(\theta_{2M}))$ :

$$\underline{K}_{i,k} = \frac{1}{2M+1} \sum_{h=0}^{2M} K_i(\theta_h) e^{ik\theta_h}$$

Die Konstruktion der dynamischen Hauptkomponenten ergibt sich nach [Forni et al., 2000] und [Forni et al., 2005] ebenfalls aus den Eigenvektoren  $\vec{p}_j(\theta) = (p_{j,1}(\theta), \dots, p_{j,n}(\theta))$  (Zeilenvektoren) der spektralen Dichtematrix  $\Sigma_n^y(\theta)$ . Der Prozess  $\underline{p}_j(L)y_t$  heißt j-te dynamische Hauptkomponente von  $\vec{y}$ , wobei

$$\underline{p}_j(L) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \vec{p}_j(\theta) e^{ik\theta} d\theta \right] L^k$$

ist.

### 3.3.6.4 Dynamische Hauptkomponentenanalyse

Eine weiterer Ansatz, der die Modellierung einer zeitlichen Dynamik innerhalb der aus den  $\vec{y}_t$  extrahierten Faktoren ermöglicht, wird in [Ku et al., 1995] vorgestellt. Die dort vorgeschlagene *Dynamische Hauptkomponentenanalyse* ist bezüglich der Komplexität wesentlich einfacher zu handhaben als das generalisierte dynamische Faktormodell in 3.7. Den Autokorrelationen der  $y_i$  wird im Zuge der dynamischen Hauptkomponentenanalyse Rechnung getragen, indem der Datensatz zuvor um die zeitlich verzögerten Zeitreihen der  $y_i$  erweitert wird.

$$X = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} y_{1,1} & \cdots & y_{n,1} & y_{1,0} & \cdots & y_{n,0} & \cdots & y_{1,-p+1} & \cdots & y_{n,-p+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{1,k} & \cdots & y_{n,k} & y_{1,k-1} & \cdots & y_{n,k-1} & \cdots & y_{1,k-p} & \cdots & y_{n,k-p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{1,T} & \cdots & y_{n,T} & y_{1,T-1} & \cdots & y_{n,T-1} & \cdots & y_{1,T-p} & \cdots & y_{n,T-p} \end{array} \right]$$

### 3.3.6.5 Ein Kriterium für die Anzahl der Faktoren

Die Anzahl  $m$  der Faktoren, die zur Modellierung von  $\vec{y}_t$  herangezogen werden, wird oftmals qualitativ und willkürlich festgelegt, anstatt wie die anderen Modellparameter ausschließlich auf Basis der zu Grunde liegenden Daten bestimmt zu werden. Eine datengestützte Bestimmung der optimalen Parameteranzahl kann mit Hilfe verschiedener Informationskriterien erreicht werden. [Bai / Ng, 2002] stellen fest, dass die Anzahl der Faktoren sowohl von  $n$  als auch von  $T$  abhängen muss, so dass

die beiden üblichen Informationskriterien  $AIC^{14}$  und  $BIC^{15}$  nicht geeignet sind. Ein Theorem, welches die konsistente Schätzung von  $m$  für  $n, T \rightarrow \infty$  ermöglicht, wird ebenfalls in [Bai / Ng, 2002] hergeleitet. Die von [Bai / Ng, 2002] betrachteten Informationskriterien besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned} PC(m) &= V(m, \hat{F}_m) + mg(n, T) \\ IC(m) &= \ln(V(m, \hat{F}_m)) + mg(n, T) \end{aligned}$$

wobei

$$V(m, \hat{F}_m) = \min_{\Lambda} \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{i,t} - \vec{\lambda}'_{m,i} \hat{f}_{m,t})^2$$

und  $g(n, T)$  die Gewichtsfunktion eines Strafterms für die Anzahl der Faktoren ist. Die Informationskriterien sollen die folgenden Annahmen erfüllen:

1. *Faktoren:* Die Faktoren müssen  $\mathbb{E}\|F_t\|^4 < \infty$  und  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t F_t' \rightarrow \Sigma_F$  wenn  $T \rightarrow \infty$  erfüllen, wobei  $\Sigma_F$  positiv definit sein muss.
2. *Gewichte:* Für die Gewichte muss  $\|\lambda_i\| \leq \lambda_{\max} < \infty$  und  $\|\frac{\Lambda'}{n} - D\| \rightarrow 0$  wenn  $n \rightarrow \infty$  für eine positiv definite  $(m \times m)$  Matrix  $D$  erfüllt sein.
3. *Serielle und wechselseitige Abhängigkeiten und Heteroskedastizität:* Es existiert

---

<sup>14</sup>Akaike Information Criterion.

<sup>15</sup>Bayesian Information Criterion.

eine positive Konstante  $M < \infty$ , so dass für alle  $n$  und  $T$  gilt:

$$(i) \quad \mathbb{E}(\varepsilon_{i,t}) = 0, \quad \mathbb{E}|\varepsilon_{i,t}|^8 \leq M$$

$$(ii) \quad \mathbb{E} \left( \frac{\vec{\varepsilon}'_s \vec{\varepsilon}_t}{n} \right) = \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,s} \varepsilon_{i,t} \right) = \gamma_n(s, t), \quad |\gamma_n(s, s)| \leq M \quad \forall \quad s,$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T |\gamma_n(s, t)| \leq M$$

$$(iii) \quad \mathbb{E}(\varepsilon_{i,t} \varepsilon_{j,t}) = \tau_{ij,t} \quad \text{mit} \quad |\tau_{ij,t}| \leq |\tau_{ij}| \quad \text{für ein} \quad \tau_{ij} \quad \text{und für alle } t$$

$$\text{und zusätzlich} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\tau_{ij}| \leq M$$

$$(iv) \quad \mathbb{E}(\varepsilon_{i,s} \varepsilon_{j,t}) = \tau_{ij,st} \quad \text{und} \quad \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T |\tau_{ij,st}| \leq M$$

$$(v) \quad \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{i,s} \varepsilon_{i,t} - \mathbb{E}(\varepsilon_{i,s} \varepsilon_{i,t})] \right|^4 \leq M \quad \forall \quad (s, t)$$

4. *Schwache Abhängigkeit zwischen den Faktoren und den Fehlertermen:*

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \vec{f}_t \varepsilon_{i,t} \right\|^2 \right) \leq M$$

Die verwendete Matrixnorm  $\|A\|$  ist  $\sqrt{sp(A'A)}$ .

Falls die Annahmen eins bis vier erfüllt sind und falls die Faktoren durch eine Hauptkomponentenanalyse geschätzt werden, dann gilt  $\lim_{n,T \rightarrow \infty} P(\hat{m} = m_0) = 1$  mit  $\hat{m} = \arg \min_{0 \leq m \leq m_{\max}} PC(m)$  falls außerdem  $g(n, T) \rightarrow 0$  und  $C_{nT}^2 \cdot g(n, T) \rightarrow \infty$  für  $n, T \rightarrow \infty$  und  $C_{nT} = \min(\sqrt{n}, \sqrt{T})$  erfüllt sind. Die Klasse von Informationskriterien  $IC(m) = \ln(V(m, \hat{F}_m)) + mg(n, T)$  schätzt  $m_0$  ebenfalls konsistent. In den

Simulationsstudien von [Bai / Ng, 2002], in denen jeweils drei Informationskriterien der Familien  $AIC$ ,  $BIC$ ,  $PC$  und  $IC$  miteinander verglichen werden, identifiziert unter anderem das Kriterium

$$IC(m) = \ln(V(m, \hat{F}_m)) + m \left( \frac{n+T}{nT} \right) \ln \left( \frac{nT}{n+T} \right)$$

über die verschiedenen simulierten Datensätze hinweg die tatsächliche Anzahl  $m_0$  der Faktoren am zuverlässigsten.

## 3.4 Heteroskedastizität und dynamische Korrelation

### 3.4.1 Univariate Varianzmodelle

Alle Zeitreihenmodelle aus Abschnitt 3.3 modellieren den Erwartungswert

$$\vec{\mu}_t = \mathbb{E}(\vec{y}_t | \vec{y}_{t-1}, \dots, \vec{y}_{t-p}).$$

Für die Abweichung  $\vec{\varepsilon}_t$  des beobachteten Wertes  $\vec{y}_t$  vom erwarteten Wert  $\hat{y}_t = \vec{\mu}_t$  wurde dabei bis zu diesem Zeitpunkt immer eine zeitlich konstante Kovarianzmatrix  $\Sigma_\varepsilon$  unterstellt. In der Regel besitzen ökonometrische Zeitreihen jedoch keine konstanten Varianzen und Kovarianzen, sondern weisen in den meisten Fällen die für Finanzmarktdaten typischen Eigenschaften *Heteroskedastizität*, *Fat Tails* und *Volatility Clustering* auf. Heteroskedastizität bezeichnet ganz allgemein den Sachverhalt einer sich verändernden Varianz, die Existenz von Fat Tails bedeutet, dass extreme Ausprägungen häufiger auftreten als bei einer Normalverteilung, und Volatility Clustering beschreibt das Phänomen, dass intensive Schwankungen häufig in unmittelbarer Folge auftreten. Es liegt deshalb nahe, die Varianz parallel zum Erwartungswert selbst als Zeitreihe zu modellieren. Das einfachste, univariate Modell dieser Art ist das  $ARCH(q)$ -Modell<sup>16</sup> aus [Engle, 1982] bei welchem die bedingte Varianz von  $\varepsilon_t$  auf Basis der vergangenen Realisationen des Fehlerterms  $\varepsilon_{t-1}$  bis  $\varepsilon_{t-q}$  geschätzt wird.

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (3.8)$$

<sup>16</sup>Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Prozess der Ordnung  $q$ .

Ein  $ARCH(q)$  Prozess heißt *stark*, wenn folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$\text{Var}(\varepsilon_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1) = \sigma_t^2$$

$$\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim iid$$

Wird nur die erste Bedingung eingehalten, spricht man von *semistarkem*  $ARCH$ . Ein starker  $ARCH(1)$  Prozess ist stationär, wenn die Bedingung

$$\mathbb{E} \left[ \ln \left( \frac{\beta_1 \varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right] < 0$$

erfüllt ist.

Eine Erweiterung des  $ARCH(q)$ -Prozesses ist das  $GARCH(p, q)$ -Modell<sup>17</sup> von [Bollerslev, 1986]. Dabei wird die Rekursionsformel für die bedingte Varianz  $\sigma_t^2$  durch die Hinzunahme ihrer vergangenen Werte  $\sigma_{t-1}^2$  bis  $\sigma_{t-p}^2$  ergänzt:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (3.9)$$

Die Bedingungen für einen *starken* oder *semistarken*  $GARCH$ -Prozess sind identisch zu den beiden Bedingungen beim  $ARCH$ -Prozess, und ein starker  $GARCH(1, 1)$  Prozess ist stationär, wenn gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \ln \left( \alpha_1 + \frac{\beta_1 \varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right] < 0.$$

Von dem Modell in 3.9 existieren zahlreiche Weiterentwicklungen und Verallgemeinerungen. [Taylor, 1986] und [Schwert, 1990] verändern in ihrem Modell die Potenz von  $\sigma_t$  und schätzen die bedingte Standardabweichung an Stelle der bedingten Varianz. Im *Threshold-GARCH*- oder *TGARCH*-Modell von [Zakoian, 1994] können negative und positive Schocks verschieden starke Auswirkungen auf die Varianz der nachfolgenden Beobachtung haben. Diese beiden Variationen des klassischen  $GARCH$ -Modells in 3.9 und noch andere Modifikationen des ursprünglichen Modells von [Bollerslev, 1986] sind in dem relativ flexiblen  $APARCH(p, q)$ -Modell<sup>18</sup>

<sup>17</sup>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Prozess der Ordnung  $(p, q)$ .

<sup>18</sup>Die Abkürzung steht für Asymmetric Power ARCH.



von [Ding et al., 1993] enthalten, bei dem die Potenz der bedingten Standardabweichung selbst als Parameter geschätzt wird. Das Modell resultiert aus einer Box-Cox-Transformation des bedingten Standardabweichungsprozesses und der asymmetrischen absoluten Residuen und besitzt folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta = & \omega + \alpha_1 \sigma_{t-1}^\delta + \dots + \alpha_p \sigma_{t-p}^\delta \\ & + \beta_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \dots + \beta_q (|\varepsilon_{t-q}| - \gamma_q \varepsilon_{t-q})^\delta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Parameter aller drei bereits erläuterten Modelle muss

$$\omega > 0, \delta \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, -1 < \gamma_j < 1.$$

erfüllt sein.

### 3.4.2 Multivariate Varianzmodelle

Allgemein sind die folgenden multivariaten Verallgemeinerungen des univariaten  $GARCH(p, q)$ -Modells den sogenannten  $VEC(p, q)$ -Modellen zuzuordnen, die ihren Namen dem bereits erklärten  $vec$ -Operator verdanken.

$$\begin{aligned} vec(\Sigma_t) = & vec(\Omega) + A_1 vec(\Sigma_{t-1}) + \dots + A_p vec(\Sigma_{t-p}) \\ & + B_1 vec(\vec{\varepsilon}_{t-1} \vec{\varepsilon}'_{t-1}) + \dots + B_q vec(\vec{\varepsilon}_{t-q} \vec{\varepsilon}'_{t-q}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der  $vec$ -Operator funktioniert analog zum  $vec$ -Operator, allerdings werden hier nur die Elemente der unteren Dreieckshälfte einschließlich der Diagonale in einer Spalte zusammengefasst - die in diesem Fall redundanten Elemente der kleineren oberen Dreieckshälfte werden nicht berücksichtigt. Die einfachste Form des Modells aus 3.11 ist das diagonale  $VEC$ -Modell,<sup>19</sup> welches in [Bollerslev et al., 1988] eingeführt wird. Es kann folgendermaßen parametrisiert werden<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} \Sigma_t = & \Omega + A_1 \odot \Sigma_{t-1} + \dots + A_p \odot \Sigma_{t-p} \\ & + B_1 \odot (\vec{\varepsilon}_{t-1} \vec{\varepsilon}'_{t-1}) + \dots + B_q \odot (\vec{\varepsilon}_{t-q} \vec{\varepsilon}'_{t-q}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

<sup>19</sup>im Folgenden auch  $DVEC(p, q)$ -Modell.

<sup>20</sup>Vgl. [Tsay, 2005].

wobei der Operator  $\odot$  das Hadamard-Produkt bezeichnet. Dies bedeutet, dass das Element  $ij$  der ersten Matrix skalar mit dem Element  $ij$  der zweiten Matrix multipliziert wird:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

Aus der Struktur des  $DVEC(p, q)$ -Modells aus 3.12 folgt unmittelbar, dass jedes Element von  $\Sigma_t$  einem univariaten  $GARCH(p, q)$ -Prozess folgt.

$$\sigma_{ij,t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij,1}\sigma_{ij,t-1} + \dots + \alpha_{ij,p}\sigma_{ij,t-p} + \beta_{ij,1}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} + \dots + \beta_{ij,q}\varepsilon_{i,t-q}\varepsilon_{j,t-q}$$

Aus der obenstehenden Darstellung geht deutlich hervor, dass dynamische Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Varianzprozessen mit diesem Modell nicht erfasst werden können, d. h. jedes Element von  $\Sigma_t$  hängt nur von seiner eigenen Historie und vom Produkt der korrespondierenden historischen Residuen ab. Neben den fehlenden Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Varianzen kann der Umstand, dass nicht zwangsläufig positiv definite Kovarianzmatrizen ausgegeben werden, als weiterer Nachteil des  $DVEC$ -Modells angesehen werden. Eine flexiblere Variante des multivariaten  $GARCH$ -Modells aus 3.11 ist das  $BEKK$ -Modell<sup>21</sup> aus [Engle / Kroner, 1995]. Das  $BEKK(p, q)$ -Modell ist eine *symmetrische* Version des  $VEC$ -Modells, so dass die modellierte Kovarianzmatrix fast sicher positiv definit ist.<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \Sigma_t = & \Omega\Omega' + A_1\Sigma_{t-1}A_1' + \dots + A_p\Sigma_{t-p}A_p' \\ & + B_1(\vec{\varepsilon}_{t-1}\vec{\varepsilon}'_{t-1})B_1' + \dots + B_q(\vec{\varepsilon}_{t-q}\vec{\varepsilon}'_{t-q})B_q' \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das einfache  $BEKK$ -Modell ist im Vergleich zum  $VEC$ -Modell bereits sehr restriktiv. Eine flexiblere Version des Modells erweitert das Modell aus 3.13 um eine zusätzliche Dimension  $K$ , um die wechselseitigen Abhängigkeiten der Varianzen und

<sup>21</sup>Das Akronym steht für die Autoren Baba, Engle, Kraft und Kroner, die eine frühere Version des Artikels von [Engle / Kroner, 1995] verfasst haben.

<sup>22</sup>Der Konstante Matrixterm muss positiv definit sein.

Kovarianzen genauer modellieren zu können.

$$\Sigma_t = \Omega\Omega' + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p A_{ik}\Sigma_{t-i}A'_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^q B_{jk}(\vec{\varepsilon}_{t-j}\vec{\varepsilon}'_{t-j})B'_{jk}$$

Für größere Werte von  $K$  ist das erweiterte *BEKK*-Modell nicht mehr eindeutig identifizierbar. Eine Bedingung für die Identifizierbarkeit und ein Vorschlag zur Konstruktion gerade noch identifizierbarer<sup>23</sup> *BEKK*-Modelle befindet sich ebenfalls in [Engle / Kroner, 1995]. Es wird davon ausgegangen, dass die Diagonalelemente von  $\Omega$  positiv sind. Eine Familie von *BEKK*( $K, 1, 1$ )-Modellen, in welcher  $A_{1k_r}$  mit  $k_r = n(r-1) + 1, \dots, nr$  und  $r = 1, \dots, n$  die Matrix ist, welche sich ergibt, wenn man die ersten  $r-1$  Spalten und die ersten  $k_r - n(r-1) - 1$  Zeilen von  $A_{1k}$  gleich Null setzt. Daraus ergibt sich, dass  $K = n^2$  gelten muss. Weiterhin muss  $a_{nn, k_r} \geq 0 \quad \forall \quad k_r$  gelten. Analoge Bedingungen müssen für die  $B_{1k_r}$  erfüllt sein. Die *BEKK*-Modelle der soeben eingeführten Klasse sind so allgemein wie möglich, d. h. sie können durch möglichst viele äquivalente *VEC*-Modelle parametrisiert werden, und besitzen andererseits keine äquivalente Darstellung in ihrer eigenen Klasse. Für  $n = 2$  ergibt sich beispielsweise für die vier ( $K = 4$ )  $A_{1k}$  Matrizen die folgende Struktur

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21,2} & a_{22,2} \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12,3} \\ 0 & a_{22,3} \end{bmatrix} \\ A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22,4} \end{bmatrix}.$$

### 3.4.3 Faktormodelle für die Varianz

Das in 3.3.6 angesprochene Problem der mit der Anzahl der Variablen zu schnell ansteigenden Parameteranzahl tritt bei den multivariaten Varianzmodellen in noch stärkerer Form auf. Im *VEC*-Modell besitzt  $\text{vech}(\Sigma)$  beispielsweise die Dimension  $n(n+1)/2 \times 1$ . Die Dimension der Koeffizientenmatrizen  $A_i$  und  $B_j$  ist also  $n(n+1)/2 \times n(n+1)/2$ , d. h. die Anzahl der zu schätzenden Parameter steigt in Relation zur Anzahl der Variablen mit der Ordnung  $O(n^4)$  an. Für Abhil-

<sup>23</sup>Die Formulierung „gerade noch identifizierbar“ bedeutet, dass die Anzahl der eingesetzten Restriktionen so gering wie möglich gehalten wird.

fe sorgt auch in diesem Fall wieder die Untersuchung einer kleineren Auswahl von Faktoren, die jedoch den größten Teil der Information über die Varianzen der  $y_i$  konserviert. Wird zur Konstruktion der entsprechenden Faktoren die in 3.3.6.2 erläuterte Hauptkomponentenanalyse verwendet, führt dies zum orthogonalen *GARCH* Modell oder *PCGARCH*( $p, q$ )-Modell,<sup>24</sup> welches in [Alexander, 2002] und [Specht / Gohout, 2003] näher erklärt wird. Zunächst müssen die untersuchten Zeitreihen standardisiert werden.

$$Y_0 = (Y - \bar{Y})S^{-1}$$

$\bar{Y}$  ist die  $T \times n$  Matrix der Mittelwerte ( $\mathbf{1}_{(T \times 1)} \bar{y}'_{(1 \times n)}$ ) und  $S = \text{diag}(s_{ii})$  ist die diagonale Matrix der Stichprobenstandardabweichungen. Anschließend werden wie in 3.3.6.2 beschrieben die Hauptkomponenten von  $Y_0$  berechnet.

$$F = Y_0 W$$

Das *GARCH*-Modell wird nun nicht für die  $n$  miteinander korrelierenden  $y_i$  berechnet, sondern für die  $m \ll n$  relevanten Hauptkomponenten  $f_1, \dots, f_m$ . Dieses Vorgehen ist unkompliziert, da die einzelnen Hauptkomponenten orthogonal bzw. unkorreliert sind, so dass für jede Hauptkomponente ein univariates *GARCH*( $p, q$ )-Modell angepasst werden kann. Daraus ergibt sich  $\Sigma_{F_m, t}$ , die zeitabhängige und diagonale Kovarianzmatrix der konstruierten Hauptkomponenten. Die zeitabhängige Kovarianzmatrix von  $Y$  ergibt sich dann durch einfache Matrixalgebra, d. h. die Transformationen, welche zuvor auf  $Y$  angewendet wurden, müssen jetzt in inverser und quadrierter Form auf  $\Sigma_{F_m, t}$  angewendet werden.

$$\Sigma_t = S W \Sigma_{F_m, t} W' S \quad \text{mit} \quad W^{-1} = W', \quad S = S'$$

### 3.4.4 Constant und Dynamic Conditional Correlation Modelle

Eine ähnliche Möglichkeit der Parametereinsparung ergibt sich durch die Zerlegung der Kovarianzmatrix  $\Sigma_t$  in zwei diagonale Matrizen, die die zeitabhängigen Standard-

<sup>24</sup>Principal Component *GARCH* Modell.

abweichungen enthalten, und eine Korrelationsmatrix, die entweder statisch oder zeitabhängig modelliert werden kann.

$$\Sigma_t = D_t R D_t \quad (3.14)$$

In dem von [Bollerslev, 1990] vorgeschlagenen Constant Conditional Correlation Model können die Varianzen der untersuchten Variablen individuell durch univariate *GARCH*-Prozesse modelliert und mit Hilfe der statischen Korrelationsmatrix anschließend in eine Kovarianzmatrix übernommen werden. Dieses Verfahren liefert demnach ohne die Notwendigkeit einer vorherigen Orthogonalisierung des Datensatzes auch für große Mengen von Variablen zeitdynamische Kovarianzmatrizen, wobei die Zerlegung der Kovarianzmatrix zudem anschaulich und interpretierbar ist. Auf der anderen Seite ist die Annahme von zeitlich konstanten Korrelationen problematisch, da Korrelationen bei der Betrachtung des Risikos eines Depots mit zwei oder mehr Wertpapieren ebenso relevant sind wie die Volatilitäten der enthaltenen Positionen und sich in der Realität über die Zeit hinweg ähnlich dynamisch verändern wie die Volatilitäten. Durch die Erweiterung des Constant Conditional Correlation Models in 3.14 durch eine zeitlich variable Korrelationsmatrix ergibt sich das Dynamic Conditional Correlation Model aus [Engle, 2002].

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t \quad (3.15)$$

Engle diskutiert im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, die sich für die Modellierung von  $R_t$  anbieten. Dabei ist es notwendig, dass die Residuen  $\varepsilon_{i,t}$  zuerst auf eine Varianz von 1 normiert werden.

$$\nu_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_{i,t}}$$

Die erste Alternative resultiert aus dem exponentiellen Smoother von RiskMetrics

$$\rho_{ij,t} = \frac{\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \nu_{i,t-s} \nu_{j,t-s}}{\sqrt{(\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \nu_{i,t-s}^2) (\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \nu_{j,t-s}^2)}}$$

und führt zu dem *integrierten* Korrelationsmodell

$$Q_t = (1 - \lambda)(\vec{\nu}_{t-1} \vec{\nu}'_{t-1}) + \lambda Q_{t-1}.$$

Die Konstante  $\lambda$  muss dabei zwischen null und eins liegen und wird bei RiskMetrics beispielsweise auf 0,94 gesetzt. Die zweite Möglichkeit ist aus dem  $GARCH(1,1)$ -Modell entnommen und führt zu dem folgenden Korrelationsmodell

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)R + \alpha Q_{t-1} + \beta(\vec{v}_{t-1}\vec{v}'_{t-1})$$

wobei  $\alpha + \beta < 1$  gelten soll, um eine Rückkehr des Korrelationsprozesses zur zeitunabhängigen durchschnittlichen Korrelationsmatrix  $R$  zu gewährleisten. Gilt  $\alpha + \beta = 1$ , dann sind die beiden Korrelationsmodelle äquivalent. Um die zeitabhängigen Korrelationsmatrizen  $R_t$  zu erhalten, müssen die Matrizen  $Q_t$  noch geeignet normiert werden.

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}}$$

### 3.4.5 Copulae als Instrument für den nichtlinearen Zusammenhang

Alle der bereits eingeführten Korrelations- und Kovarianzmodelle basieren auf dem Korrelationskoeffizienten als Maß für den linearen Zusammenhang. Die Modellierung dynamischer Zusammenhänge wird ermöglicht, in dem zeitlich veränderliche Korrelationen zugelassen werden. Das bedeutet, dass ein Schock in einer der analysierten Variablen einen Anstieg in den Korrelationen und Kovarianzen des folgenden Zufallsexperiments zur Folge haben kann, während ein gleichzeitiges Auftreten von signifikanten Schocks in mehreren Variablen wegen der Unabhängigkeit der  $\varepsilon_i$  nur mit relativ geringer Wahrscheinlichkeit erfolgt. Bei der Betrachtung realer Kurs- und Renditezeitreihen kann jedoch beobachtet werden, dass die Preise verschiedener Wertpapiere in Krisenzeiten auch dann gleichzeitig abstürzen, wenn ihre Korrelation in normalen Marktphasen sehr niedrig ist.

Die korrekte Erfassung dieses Phänomens in einem Modell bedeutet, dass die gemeinsame Verteilung der  $\varepsilon_i$  geschätzt werden muss. Dabei ermöglichen Copulae eine komfortable Zerlegung der multivariaten Verteilung in die univariaten Randverteilungen und eine Copula, die die Abhängigkeiten unter den Randverteilungen modelliert. Eine Copula ist eine multivariate Verteilungsfunktion, deren univariate

Randverteilungen auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilt sind.

$$C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$$

$$C(u_1, \dots, 0, \dots, u_n) = 0$$

Die Anforderung an die Randverteilungen lässt sich durch die folgende evidente Eigenschaft von Wahrscheinlichkeitsverteilungen begründen: Wenn  $Y_1, \dots, Y_n$  beliebige Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungen sind, dann sind die univariaten Zufallsvariablen  $F_{Y_i}(Y_i)$  jeweils gleichverteilt auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Die Zerlegung der gemeinsamen Verteilung der Zufallsvariablen  $Y_i$  in die univariaten Randverteilungen und die Copula wird durch den folgenden Satz aus [Sklar, 1959] ermöglicht.

**Satz von Sklar**

Sei  $F : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow [0, 1]$  eine n-dimensionale Verteilungsfunktion mit den eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_n : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$ , dann existiert eine n-dimensionale Copula  $C$ , so dass für alle  $(y_1, \dots, y_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$  die Gleichheitsbeziehung

$$F(y_1, \dots, y_n) = C(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n))$$

erfüllt ist. Sind alle  $F_i$  stetig, so ist die Copula eindeutig.

Die Konstruktion der korrespondierenden Copula zu einer multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung kann ebenfalls aus dem Satz von Sklar entnommen werden und wird beispielsweise in [Embrechts et al., 2003] wiedergegeben.

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (3.16)$$

Am Beispiel der Standardnormalverteilung  $\Phi$  und der n-dimensionalen Standardnormalverteilung  $\Phi_R^n$  mit der Korrelationsmatrix  $R$  kann die Gauss-Copula folgendermaßen bestimmt werden:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R^n(\Phi_1^{-1}(u_1), \dots, \Phi_n^{-1}(u_n))$$

Hauptaugenmerk einer Copula ist deren Abhängigkeitsstruktur an den Verteilungsenden, die jeweils für den bivariaten Fall definiert wird. Die Abhängigkeit am oberen Ende der Verteilung ist

$$\lambda_u = \lim_{u \nearrow 1} \frac{(1 - 2u + C(u, u))}{1 - u}$$

und analog

$$\lambda_l = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

für das untere Ende der Verteilung.

In [Embrechts et al., 2003] wird weiterhin gezeigt, dass die Gauss-Copula für  $\rho < 1$  keine Abhängigkeit an den Verteilungsenden aufweist, d. h.  $\lambda_u = \lambda_l = 0$ . Im Gegensatz zur Gauss-Copula kann die Abhängigkeit an den Enden bei der t-Copula durch die Parameter  $\rho$  bzw.  $R$  und die Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu$  modelliert werden. Dabei nimmt die Abhängigkeit an den Enden erwartungsgemäß zu, wenn  $\rho$  ansteigt, und nimmt ab mit einer wachsenden Anzahl von Freiheitsgraden. Sowohl die Gauss-Copula als auch die t-Copula gehören zur Klasse der elliptischen<sup>25</sup> Copulae, die die besondere Eigenschaft besitzen, dass die Abhängigkeit am oberen und am unteren Verteilungsende identisch ist, d. h.  $\lambda_u = \lambda_l$ . Bei der t-Copula kann die Abhängigkeit an den Verteilungsenden nach [Demarta / McNeil, 2005] folgendermaßen berechnet werden:

$$\lambda_u = \lambda_l = 2t_{\nu+1} \left( \frac{-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right)$$

Bei der Modellierung von Wertpapierrenditen zur Abschätzung von Verlustrisiken sind vor allem seltene und extreme Ereignisse von Bedeutung, so dass die Abhängigkeit an den Enden der Copula eine entscheidende Rolle spielt. Vor diesem Hintergrund ist die t-Copula besser geeignet, um die Zusammenhänge zwischen ökonomischen Zeitreihen zu modellieren, als die Gauss-Copula. In der Praxis kann jedoch weiterhin beobachtet werden, dass die Abhängigkeiten von Wertpapierrenditen bei erheblichen Verlusten stärker ausgeprägt sind als bei größeren Gewinnen. Die unterschiedliche Abhängigkeit am unteren und am oberen Verteilungsrand kann weder von der Gauss-Copula noch von der symmetrischen t-Copula erfasst werden. Unter den

<sup>25</sup>Die Höhenlinien einer elliptischen Verteilung sind Ellipsen. Im univariaten Fall sind die Eigenschaften *elliptisch* und *symmetrisch* gleichbedeutend.



bisher bekannten Copulae sind lediglich die Joe-Clayton Copula aus der Klasse der archimedischen Copulae sowie die schiefe t-Copula geeignet, um eine unterschiedliche Abhängigkeitsstruktur an den beiden Verteilungsrändern zu modellieren. Die Joe-Clayton-Copula wird in [Patton, 2006] angegeben und besitzt die Funktion

$$\phi(t) = (1 - (1 - t)^\kappa)^{-\gamma} - 1$$

als Erzeuger. Archimedische Copulae können in der Form

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))$$

angegeben werden und sind durch die erzeugende Funktion  $\phi(t)$  eindeutig spezifiziert. Die Funktion  $\phi(t)$  muss eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit  $\phi(1) = 0$  sein. Die Pseudo-Inverse  $\phi^{[-1]}$  von  $\phi$  ist durch

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

definiert. Im Falle der Joe-Clayton-Copula ergibt sich demnach die folgende Verteilungsfunktion:

$$C(u_1, \dots, u_n) = 1 - \left(1 - \left((1 - (1 - u_1)^\kappa)^{-\gamma} + \dots + (1 - (1 - u_n)^\kappa)^{-\gamma} - 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Parametrisiert wird die Joe-Clayton-Copula durch die beiden Parameter  $\tau^u$  und  $\tau^l \in (0, 1)$ , die direkt mit den internen Parametern von  $C(u_1, \dots, u_n)$

$$\kappa = \frac{1}{\log_2(2 - \tau^u)}$$

und

$$\gamma = \frac{-1}{\log_2(\tau^l)}$$

zusammenhängen. Die schiefe t-Copula wird in [Demarta / McNeil, 2005] diskutiert,

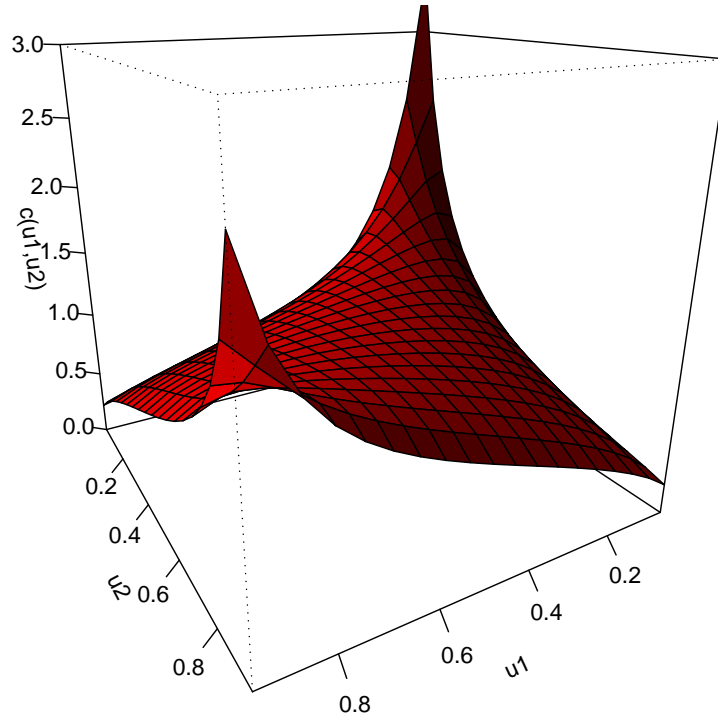


Abbildung 3.1: Joe-Clayton-Copula mit  $\tau^l = 0,3$  und  $\tau^u = 0,2$   
Quelle: Eigene Berechnung

und kann nach 3.16 aus der multivariaten schiefen t-Verteilung mit der Dichte

$$f(\vec{\mu}, \Sigma, \vec{\gamma}, \nu; \vec{y}) = k \frac{K_{\frac{\nu+n}{2}} \left( \sqrt{(\nu + (\vec{y} - \vec{\mu})' \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{\mu})) \vec{\gamma}' \Sigma^{-1} \vec{\gamma}} \right) \exp \left( (\vec{y} - \vec{\mu})' \Sigma^{-1} \vec{\gamma} \right)}{\left( \sqrt{(\nu + (\vec{y} - \vec{\mu})' \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{\mu})) \vec{\gamma}' \Sigma^{-1} \vec{\gamma}} \right)^{-\frac{\nu+n}{2}} \left( 1 + \frac{(\vec{y} - \vec{\mu})' \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{\mu})}{\nu} \right)^{\frac{\nu+n}{2}}} \quad (3.17)$$

und dem Lageparameter  $\vec{\mu}$ , der Dispersionsmatrix  $\Sigma$ , dem  $n$ -dimensionalen Schiefeffizientenparameter  $\vec{\gamma}$  und der Anzahl der Freiheitsgrade  $\nu$  berechnet werden. Dabei ist

$$k = \frac{2^{\frac{2-(\nu+n)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi\nu)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

eine Normalisierungskonstante und  $K_\lambda$  die modifizierte Bessel-Funktion der dritten Gattung. Multivariate schiefe t-Verteilungen sind Mischungen von multivariaten Normalverteilungen - in [Demarta / McNeil, 2005] wird für die Konstruktion einer Zufallsvariable mit multivariater schiefer t-Verteilung die Vorschrift

$$\vec{t} = \vec{\mu} + \vec{\gamma}g(x) + \sqrt{x}\vec{z}$$

gewählt, wobei sich die obenstehende Dichte ergibt, wenn  $x$  und  $\vec{z}$  unabhängig sind,  $\vec{z}$  einer multivariaten Normalverteilung  $N(0, \Sigma)$  und  $x \sim IG(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$  einer inversen Gammaverteilung unterliegt und wenn weiterhin  $g(x) = x$  gewählt wird (vgl. [Rachev / Mittnik, 2000]).

Eine andere und gut nachvollziehbare Herleitung einer schiefen t-Verteilung befindet sich in [Azzalini / Capitano, 2003]. Sie ergibt sich aus der Beziehung, in der die t-Verteilung, die Normalverteilung und die  $\chi^2$ -Verteilung zueinander stehen. Seien  $z \sim N(0, 1)$  und  $x \sim \chi_\nu^2$  und seien  $z$  und  $x$  außerdem unabhängig, dann ist

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{x}{\nu}}}$$

t-verteilt mit  $\nu$  Freiheitsgraden. Eine schiefe t-Verteilung lässt sich dementsprechend konstruieren, indem man in der obenstehenden Beziehung die Standardnormalverteilung durch eine schiefe Normalverteilung ersetzt. Eine multivariate schiefe Normalverteilung kann nach [Azzalini / Capitano, 2003] direkt aus der multivariaten Standardnormalverteilung berechnet werden und besitzt die Dichte

$$f(\vec{\mu}, \Sigma, \vec{\gamma}; \vec{z}) = 2\phi_R^n(\vec{z} - \vec{\mu})\Phi(\vec{\gamma}' \text{diag}(\sigma)^{-1}(\vec{z} - \vec{\mu}))$$

wobei  $\phi_R^n$  die Dichte der multivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix  $R$  und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung

ist. Eine multivariate schiefe t-Verteilung ergibt sich dann aus

$$\vec{t} = \vec{\mu} + x^{-\frac{1}{2}} \vec{z}$$

wobei  $\vec{z}$  nun einer multivariaten schiefen Normalverteilung und  $x$  gemäß  $\nu x \sim \chi_\nu^2$  verteilt ist. Die Dichte der schiefen t-Copula kann mit Hilfe der Beziehung 3.16 berechnet werden

$$c(R, \vec{\gamma}, \nu; \vec{u}) = \frac{f_{R, \vec{\gamma}, \nu}(t_{\gamma_1, \nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\gamma_n, \nu}^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_{\gamma_i, \nu}(t_{\gamma_i, \nu}^{-1}(u_i))}$$

wobei häufig  $\vec{\mu} = 0$  gesetzt wird und  $R$  eine Korrelationsmatrix ist. Insgesamt ist die schiefe t-Copula flexibler als die Joe-Clayton-Copula, da sie neben den Freiheitsgraden  $\nu$  und dem  $n$ -dimensionalen Schiefeparameter  $\vec{\gamma}$  auch die Einbeziehung einer Korrelationsmatrix  $R$  erlaubt, während die Joe-Clayton-Copula mit nur zwei Parametern  $\tau^l$  und  $\tau^u$  auskommt und somit erheblich sparsamer mit den zu schätzenden Parametern umgeht.

Die gemeinsame Simulation der verschiedenen  $u_i$  kann rekursiv durchgeführt werden und basiert auf der bedingten Verteilung von  $u_i$  gegeben  $u_1, \dots, u_{i-1}$

$$C(u_i | u_1, \dots, u_{i-1}) = \frac{\partial^{i-1} C(u_1, \dots, u_i)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{i-1}} \bigg/ \frac{\partial^{i-1} C(u_1, \dots, u_{i-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{i-1}} \quad (3.18)$$

die in [Embrechts et al., 2003] angegeben ist. Die Simulation der  $u_i$  erfolgt dann rekursiv:

- Zu Beginn wird  $u_1$  auf Basis einer Gleichverteilung auf dem Intervall  $[0, 1]$  simuliert.
- Anschließend wird  $u_2$  auf Basis der bedingten Copula  $C(u_2 | u_1)$  simuliert.
- ...
- Abschließend wird  $u_n$  auf Basis der bedingten Copula  $C(u_n | u_1, \dots, u_{n-1})$  simuliert.

Im Falle der symmetrischen oder schiefen t-Copula gibt es noch ein einfacheres Verfahren zur Generierung von zufälligen Ausprägungen von  $\vec{u}$ , das ohne das Dif-

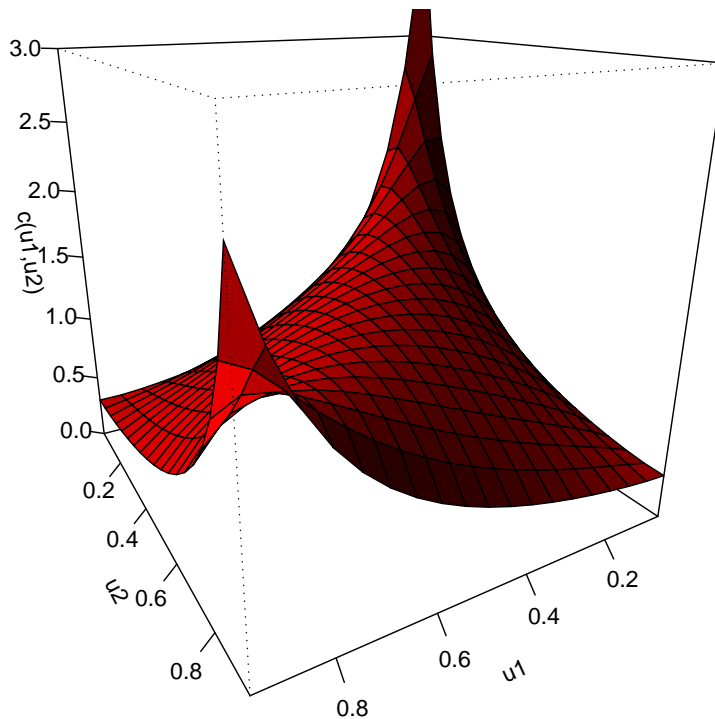


Abbildung 3.2: Schiefe t-Copula mit  $\rho = 0,5$ ,  $\vec{\gamma} = (-0,2, -0,3)$  und  $\nu = 5$   
Quelle: Eigene Berechnung

ferenzieren von  $C(u_1, \dots, u_i)$  nach  $u_1, \dots, u_{i-1}$  im Zähler von 3.18 auskommt. Der Nenner in 3.18 entspricht der Dichte von  $C(u_1, \dots, u_{i-1})$ . Für die t-Copula kann der folgende Simulationsalgorithmus verwendet werden:

- Zu Beginn wird die Cholesky-Zerlegung  $R^{1/2}$  von  $R$  berechnet.
- Anschließend werden  $n$  Zufallszahlen  $z_1, \dots, z_n$  aus  $N(0, 1)$  gezogen.<sup>26</sup>
- Eine weitere Zufallsvariable  $s$  wird aus  $\chi_\nu^2$  gezogen.

<sup>26</sup>Im Falle einer schiefen t-Copula kann die Standardnormalverteilung hier durch eine schiefe Normalverteilung ersetzt werden.

- Es wird  $\vec{y} = R^{1/2}\vec{z}$  berechnet.
- Es wird  $\vec{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}}\vec{y}$  berechnet.
- Es wird  $u_i = t_{\gamma_i, \nu}(x_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  berechnet.

### 3.4.6 Parameterschätzung

Zur Schätzung der Parameter wird bei allen multivariaten *GARCH*-Modellen üblicherweise ein (*Quasi*) *Maximum Likelihood* Verfahren angewendet. Echte Maximum Likelihood Schätzungen sind nur dann möglich, wenn die Verteilung bzw. die Dichtefunktion der Fehlerterme vollständig bekannt ist. Falls für die Fehlerterme eine Normalverteilung unterstellt wird, ist die Schätzung der Parameter auch dann noch konsistent und asymptotisch normalverteilt, wenn die Verteilungsannahme verletzt wird. Die Verwendung eines Maximum Likelihood (ML) Schätzverfahrens auf Basis einer Normalverteilung ohne Kenntniss der wahren Verteilung der Residuen führt zum Quasi Maximum Likelihood (QML) Schätzer. Die vollständige Herleitung eines QML-Schätzverfahrens für multivariate *GARCH*-Modelle befindet sich in [Hafner / Herwartz, 2008]. Ausgangspunkt ist die Log-Likelihood Funktion  $L(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$  mit

$$l_t(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det(\Sigma_t(\theta))) - \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}_t' \Sigma_t^{-1}(\theta) \vec{\varepsilon}_t.$$

Unter gewissen Regularitätsbedingungen, die in [Compte / Lieberman, 2003] behandelt werden und die im Falle der bereits eingeführten *VEC*- und *BEKK*-Modelle in allen für die Praxis relevanten Fällen erfüllt sind, ist der QML Schätzer  $\hat{\theta}$ , asymptotisch normalverteilt.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{J}^{-1} \mathcal{I} \mathcal{J}^{-1})$$

Die Matrizen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  werden folgendermaßen berechnet:

$$\mathcal{I} = \mathbb{E} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} & \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \\ \hline \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta'} \Big|_{\theta_0} & \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \end{array} \right], \quad \mathcal{J} = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta_0} \right]$$

$\mathcal{I}$  ist die *Fisher-Informationsmatrix* von  $\theta$ , und  $\mathcal{J}$  ist der negative Erwartungswert der *Hesse-Matrix*, beide ausgewertet für den wahren Parameterwert  $\theta_0$ . Falls  $\vec{\varepsilon}_t$  bedingt normalverteilt ist, dann gilt  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ , die asymptotische Kovarianzmatrix ist gleich  $\mathcal{I}^{-1}$  und nimmt damit die *Cramér-Rao-Schranke* an. Um Inferenz über  $\theta$  zu ermöglichen, werden jetzt noch der Score-Vektor und die Hesse-Matrix benötigt. Ihre Elemente ergeben sich aus

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2} sp \left[ \dot{\Sigma}_{i,t} \Sigma_t^{-1} - \vec{\varepsilon}_t \vec{\varepsilon}'_t \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{i,t} \Sigma_t^{-1} \right]$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = & \frac{1}{2} sp \left[ \ddot{\Sigma}_{ij,t} \Sigma_t^{-1} - \vec{\varepsilon}_t \vec{\varepsilon}'_t \Sigma_t^{-1} \ddot{\Sigma}_{ij,t} \Sigma_t^{-1} - \dot{\Sigma}_{i,t} \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{j,t} \Sigma_t^{-1} \right. \\ & \left. + \vec{\varepsilon}_t \vec{\varepsilon}'_t \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{j,t} \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{i,t} \Sigma_t^{-1} + \vec{\varepsilon}_t \vec{\varepsilon}'_t \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{i,t} \Sigma_t^{-1} \dot{\Sigma}_{j,t} \Sigma_t^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Es gilt die Notation

$$\Sigma_t = \Sigma_t(\theta), \quad \dot{\Sigma}_{i,t} = \frac{\partial \Sigma_t(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad \ddot{\Sigma}_{ij,t} = \frac{\partial^2 \Sigma_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Im Folgenden werden die partiellen Ableitungen für das *VEC*(1, 1)-Modell aus 3.11 wiedergegeben. Dabei seien  $\vec{\sigma}_t = vech(\Sigma_t)$ ,  $\vec{\omega} = vech(\Omega)$  und  $\vec{\varepsilon}_t = vech(\vec{\varepsilon}_t \vec{\varepsilon}'_t)$ . Weiterhin seien  $n^* = n(n+1)/2$  und  $K$  die Kommutationsmatrix, d. h.  $Kvec(A) = vec(A')$ . Die ersten Ableitungen von  $\vec{\sigma}_t$  sind

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\omega,t} &= (I_{n^*} - A)^{-1} \\ \dot{\vec{\sigma}}_{A,t} &= \vec{\sigma}'_{t-1} \otimes I_{n^*} + A \dot{\vec{\sigma}}_{A,t-1} \\ \dot{\vec{\sigma}}_{B,t} &= \vec{\varepsilon}'_{t-1} \otimes I_{n^*} + A \dot{\vec{\sigma}}_{B,t-1} \end{aligned}$$

und für die zweiten Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
\ddot{\sigma}_{\omega\omega,t} &= 0 \\
\ddot{\sigma}_{\omega A,t} &= (I_{n^*} - A')^{-1} \otimes (I_{n^*} - A)^{-1} \\
\ddot{\sigma}_{\omega B,t} &= 0 \\
\ddot{\sigma}_{A\omega,t} &= (I_{n^*3} - I_{n^*2} \otimes A)^{-1} K_{n^*2,n^*} (K_{n^*,n^*} \otimes I_{n^*}) (I_{n^*} \otimes \text{vec}(I_{n^*})) (I_{n^*} - A)^{-1} \\
\ddot{\sigma}_{AA,t} &= K_{n^*2,n^*} (K_{n^*,n^*} \otimes I_{n^*}) (I_{n^*} \otimes \text{vec}(I_{n^*})) \dot{\sigma}_{A,t-1} + (I_{n^*2} \otimes A) \ddot{\sigma}_{AA,t-1} \\
&\quad + (\dot{\sigma}'_{A,t-1} \otimes I_{n^*}) \\
\ddot{\sigma}_{AB,t} &= K_{n^*2,n^*} (K_{n^*,n^*} \otimes I_{n^*}) (I_{n^*} \otimes \text{vec}(I_{n^*})) \dot{\sigma}_{B,t-1} + (I_{n^*2} \otimes A) \ddot{\sigma}_{AB,t-1} \\
\ddot{\sigma}_{B\omega,t} &= 0 \\
\ddot{\sigma}_{BA,t} &= \dot{\sigma}'_{B,t-1} \otimes I_{n^*} + (I_{n^*2} \otimes A) \ddot{\sigma}_{BA,t-1} \\
\ddot{\sigma}_{BB,t} &= 0.
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Ableitungen für multivariate Varianzmodelle mit *BEKK*-Struktur befinden sich ebenfalls in [Hafner / Herwartz, 2008]. Mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitungen von  $\vec{\sigma}_t$  kann die Log-Likelihoodfunktion  $L(\theta)$  in Abhängigkeit von  $\theta = (\vec{\omega}, A, B)$  berechnet und (algorithmisch) maximiert werden.

Für Copulae können ebenfalls Maximum Likelihood Schätzungen eingesetzt werden. Die Dichte der Copula muss dabei entweder basierend auf der Dichte einer multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung oder direkt durch das Differenzieren der Copula berechnet werden. Falls die Copula durch eine multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung mit bekannter Dichte impliziert wird, kann die Dichte der Copula gemäß der Beziehung

$$c(\vec{\theta}; \vec{u}) = \frac{f_{\vec{\theta}}(F_{\theta_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{\theta_n}^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_i}(F_{\theta_i}^{-1}(u_i))}$$

berechnet werden. Dabei ist  $\vec{\theta}$  der Parametervektor der multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F$ . Im Falle einer archimedischen Copula kann die Dichte durch Differenzieren der Copula berechnet werden:

$$c(\vec{\theta}; \vec{u}) = \frac{\partial^n C(\vec{\theta}; \vec{u})}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}$$



Vor allem bei höherdimensionalen Anwendungen kann die schnelle Berechnung der Copuladichte zum Problem werden, so dass als Alternative zur Maximum Likelihood Schätzung auch ein Minimum Distance Schätzer verwendet werden kann, der den Wahrscheinlichkeitsabstand zwischen der modellierten und der empirischen Copula

$$\hat{C}_T(\vec{u}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}(U_{1,t} \leq u_1, \dots, U_{n,t} \leq u_n)$$

minimiert. Als Kriterium für die Qualität des Modells können beispielsweise der Kolmogorov-Smirnov Abstand

$$D_{KS} = \sup_{\vec{u}} |\mathbf{C}_T(\vec{u})|$$

$$\mathbf{C}_T(\vec{u}) = \sqrt{T} \left( \hat{C}_T(\vec{u}) - C(\vec{\theta}; \vec{u}) \right)$$

oder der Cramér-von-Mises Abstand

$$D_{CvM} = \int_{[0;1]^n} \mathbf{C}_T(\vec{u})^2 d\hat{C}_T(\vec{u})$$

gewählt werden. In der Simulationsstudie von [Weiß, 2009] wird jedoch gezeigt, dass die Maximum Likelihood Schätzung den Minimum Distance Schätzungen bezüglich des *MSE* in der Regel überlegen ist.



## 4 Bewertungenregeln

### 4.1 Übersicht

Nicht immer ist die direkte Modellierung und Simulation aller Wertpapiere eines Portfolios sinnvoll. Einerseits können diversifizierte Depots mitunter eine sehr große Anzahl verschiedener und hoch miteinander korrelierender Wertpapiere enthalten, und andererseits sind einige Wertpapierarten wegen stark unsymmetrischer oder un stetiger Verteilungen schlichtweg nicht für eine direkte Modellierung durch ein lineares Modell geeignet. Innerhalb des vorliegenden Kapitels werden deshalb für die klassischen Wertpapierarten Aktien, Anleihen und Derivate jeweils einige gebräuchliche Bewertungsverfahren dargestellt.

### 4.2 Indexmodelle

Zwischen den Renditen einzelner Aktien bestehen in der Regel hohe Korrelationen, so dass es innerhalb von Wertpapierportfolios mit einer großen Anzahl von Aktien sinnvoll sein kann, die Renditen der einzelnen Aktien  $r_i$  durch ein lineares Modell mit den Renditen eines Aktienindex  $r_m$  als erklärender Variable zu modellieren. Das Single Index Model besitzt dementsprechend die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} r_{i,t} - r_f &= \alpha_i + \beta_i(r_{M,t} - r_f) + \varepsilon_{i,t} \\ \varepsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_i^2) \end{aligned}$$

Das Modell bezieht sich hier auf die Überrenditen  $(r_i - r_f)$  oberhalb des risikofreien Zinssatzes, allerdings lässt sich die obenstehende Parametrisierung durch Addition

von  $r_f$  in das klassische einfache lineare Modell für  $r_{i,t}$  überführen.

$$\begin{aligned} r_{i,t} &= \tilde{\alpha}_i + \beta_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t} \\ \tilde{\alpha}_i &= \alpha_i + r_f + \beta_i r_f \end{aligned}$$

Für ein diversifiziertes Aktienportfolio ist es häufig nicht möglich, einen einzelnen Aktienindex zu finden, der alle investierten Aktien mit hinreichender Genauigkeit erklären kann. In diesem Fall kann auf ein Multi Index Model zurückgegriffen werden, welches die Renditen einer einzelnen Aktie auf Basis einer festgelegten Auswahl von Indizes abbildet.

$$r_{i,t} - r_f = \alpha_i + \beta_{1,i}(r_{1,t} - r_f) + \dots + \beta_{m,i}(r_{m,t} - r_f) + \varepsilon_{i,t}$$

Die oben skizzierten Indexmodelle sind damit den in Abschnitt 3.3.6 behandelten Faktormodellen zuzuordnen. Im Vergleich zu den dort schwerpunktmäßig diskutierten Hauptkomponentenanalysen haben die Indexmodelle den Vorteil, dass die erklärenden Variablen in Gestalt von Aktienmarktindizes interpretierbar sind, und den Nachteil, dass einzelne Aktienindizes mitunter hoch miteinander korrelieren, während die Hauptkomponenten orthogonal zueinander sind.

### 4.3 Bewertung von Optionen

Ein Optionsschein räumt seinem Besitzer das Recht ein, ein festgelegtes Wertpapier, den sogenannten Basiswert  $S$ , zu einem festgelegten Zeitpunkt  $T$  und zu einem festen Ausübungspreis  $K$  zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put). Kann die Option lediglich zum Zeitpunkt  $T$  ausgeübt werden, spricht man von einer europäischen Option, während die Ausübung bei einer amerikanischen Option zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  mit  $0 \leq t \leq T$  möglich ist. Die Ausübung eines Optionsrechts ist für dessen Besitzer optional und finanzmathematisch sinnvoll, wenn der Preis des Basiswerts  $S$  zum Ausübungszeitpunkt  $T$  oberhalb des zu bezahlenden Ausübungspreises (Call) bzw. darunter liegt (Put). Das Auszahlungsprofil eines Optionsscheins

ist dementsprechend:

$$C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

$$P(S, T) = \max(K - S_T, 0)$$

Zu einem früheren Zeitpunkt  $t < T$  stellt der Preis eines Optionsscheins eine monoton steigende (Call) oder fallende (Put) Funktion des Basiswerts  $S$  dar, wobei zwischen dem Optionspreis und dem Basiswert allerdings kein linearer Zusammenhang besteht. Für die Bewertung von Optionsscheinen gibt es mehrere theoretische Rahmenwerke - historisch wurde das Optionspreisproblem von [Black / Scholes, 1973] durch die Konstruktion eines risikofreien Portfolios mit dem Basiswert als Long Position und einer geeigneten Menge

$$\frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{\partial C(S, t)}{\partial S}$$

europäischer Call Optionen als Short Position gelöst. Da das konstruierte Portfolio keinen zufälligen Schwankungen unterworfen ist, muss es sich wegen der geforderten Arbitragefreiheit zum risikofreien Marktzins verzinsen. Aus dieser Beziehung kann dann der faire Wert der Option abgeleitet werden. Mathematisch einfacher ist die Herleitung eines risikoneutralen Optionspreises, die z. B. [Hull, 2006] entnommen werden kann. Insgesamt stellt die risikoneutrale Bewertung ein recht mächtiges und vielseitiges Instrument zur Herleitung marktgerechter Preise dar und wird an dieser Stelle am Beispiel des europäischen Calls erläutert. Für den stochastischen Prozess des Basiswerts wird in der Regel eine geometrische Brown'sche Bewegung angenommen, wobei die Optionspreisformeln in diesem Fall eine geschlossene Form besitzen.

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z_t \tag{4.1}$$

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

$S$  ist dementsprechend lognormalverteilt. Um den stochastischen Prozess von  $\ln S$  zu ermitteln, wird Itô's Lemma benötigt.

### 4.3.1 Itô's Lemma

Das Lemma von Itô ermöglicht die Konstruktion des stochastischen Prozesses einer mindestens zweimal in  $x$  und mindestens einmal in  $t$  differenzierbaren Funktion  $F(x, t)$ , wenn  $x$  selbst einem Itô Prozess

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\Delta z_t$$

folgt. Die Funktion  $F(x, t)$  folgt dann dem Prozess

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) \Delta t + \frac{\partial F}{\partial x} b \Delta z_t$$

### 4.3.2 Risikoneutrale Bewertung von Optionsscheinen

Mit

$$F(S, t) = \ln S, \quad \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

folgt  $F$  nach Itô's Lemma dem Prozess

$$\Delta F = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta z_t$$

so dass  $S_T$  gemäß

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_t &\sim \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right] \\ \ln S_T &\sim \left[ \ln S_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right] \end{aligned}$$

lognormalverteilt ist. Aus den Eigenschaften der Lognormalverteilung folgt

$$\mathbb{E}(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)}$$

für den Erwartungswert von  $S_T$ . Innerhalb der risikoneutralen Betrachtungsweise muss  $\mu = r_f$  gelten und der faire Wert einer Option entspricht dem diskontierten Erwartungswert der zukünftigen Auszahlung. Für einen europäischen Call muss

dementsprechend die Gleichung

$$C(S, t) = e^{-r_f(T-t)} \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)) = e^{-r_f(T-t)} \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T$$

erfüllt ein. Seien  $m$  und  $w$  im folgenden Erwartungswert und Standardabweichung von  $S_T$ , also

$$m = \ln S_t + \left( r_f - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)$$

$$w = \sigma \sqrt{T - t}$$

Die Variable

$$Q_T = \frac{\ln S_T - m}{w}$$

mit Dichte  $h(Q_T)$  unterliegt dann einer Standardnormalverteilung. Durch diese Substitution lässt sich dementsprechend das Integral über  $S_T$  in ein Integral über  $Q_T$  umwandeln.

$$\begin{aligned} e^{-r_f(T-t)} \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)) &= e^{-r_f(T-t)} \int_{(\ln K - m)/w}^\infty (e^{Q_T w + m} - K) h(Q_T) dQ_T \\ &= e^{-r_f(T-t)} \int_{(\ln K - m)/w}^\infty e^{Q_T w + m} h(Q_T) dQ_T \\ &\quad - K e^{-r_f(T-t)} \int_{(\ln K - m)/w}^\infty h(Q_T) dQ_T \end{aligned}$$

Während innerhalb des zweiten Terms lediglich über die Dichte der Standardnormalverteilung integriert wird, muss  $Q_T$  innerhalb des ersten Terms außerhalb der

Dichtefunktion eliminiert werden.

$$\begin{aligned}
e^{Q_T w + m} h(Q_T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(-Q_T^2 + 2Q_T w + 2m)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(Q_T^2 - 2Q_T w + w^2) + w^2 + 2m}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{[-(Q_T - w)^2 + 2m + w^2]}{2}} \\
&= \frac{e^{m + \frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Q_T - w)^2}{2}} \\
&= e^{m + \frac{w^2}{2}} h(Q_T - w)
\end{aligned}$$

Mit dieser Umformung tritt als Integrand in beiden Termen ausschließlich die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung auf

$$\begin{aligned}
e^{-r_f(T-t)} \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)) &= e^{-r_f(T-t)} e^{m + \frac{w^2}{2}} \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q_T - w) dQ_T \\
&\quad - K e^{-r_f(T-t)} \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q_T) dQ_T
\end{aligned}$$

so dass die risikoneutrale Bewertung nun in einer geschlossenen Form angegeben werden kann.

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= S_t \left( 1 - \Phi \left( \frac{\ln K - m}{w} - w \right) \right) - K e^{-r_f(T-t)} \left( 1 - \Phi \left( \frac{\ln K - m}{w} \right) \right) \\
&= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r_f(T-t)} \Phi(d_2) \tag{4.2}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left( r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \\
d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left( r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}
\end{aligned}$$



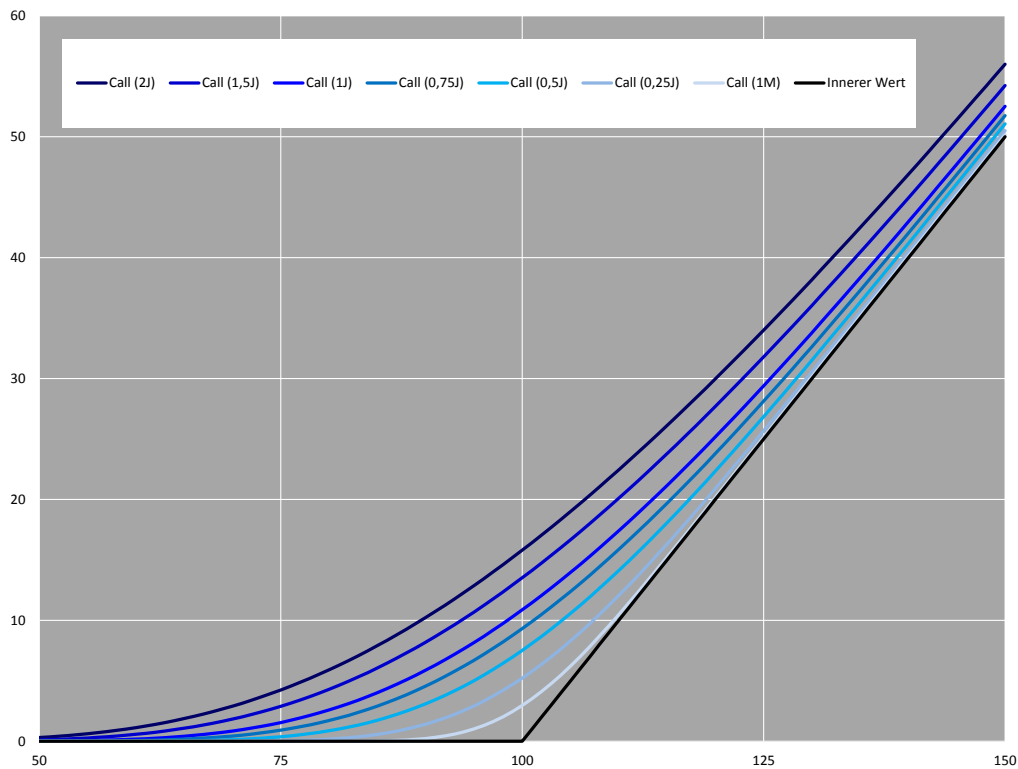


Abbildung 4.1: Wert eines europäischen Calls in Abhängigkeit des Basiskurses für verschiedene Restlaufzeiten ( $K = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $r_f = 2\%$ )

Quelle: Eigene Berechnung

### 4.3.3 Die Griechen

Die sogenannten *Griechen* sind eine Auswahl von Sensitivitätskennzahlen für Derivate, welche die Abschätzung der Wertveränderung eines Derivats erlauben, wenn sich ein erklärender Risikofaktor um eine Einheit verändert. Bei Betrachtung der Black Scholes Formel 4.2 können vier Risikofaktoren ermittelt werden, die für die Preisbestimmung einer Option maßgeblich sind: Der Preis des Basiswerts  $S_t$ , der risikofreie Zins  $r_f$ , die Volatilität<sup>1</sup>  $\sigma$  und die Zeit  $t$ . Da die größten Wertschwankungen einer Option in der Regel auf ihren inneren Wert, im Fall des europäischen Calls  $\max(S_t - K, 0)$ , und damit den Marktpreis des Basiswerts  $S_t$  als Risikofaktor

<sup>1</sup>An dieser Stelle ist die implizite Volatilität des Optionsscheins gemeint, d. h. die Volatilität, die bei Beobachtung des Optionspreises  $C(S, t)$  in die Black Scholes Gleichung eingesetzt werden muss, damit der Marktpreis der Option als Black Scholes Preis resultiert.

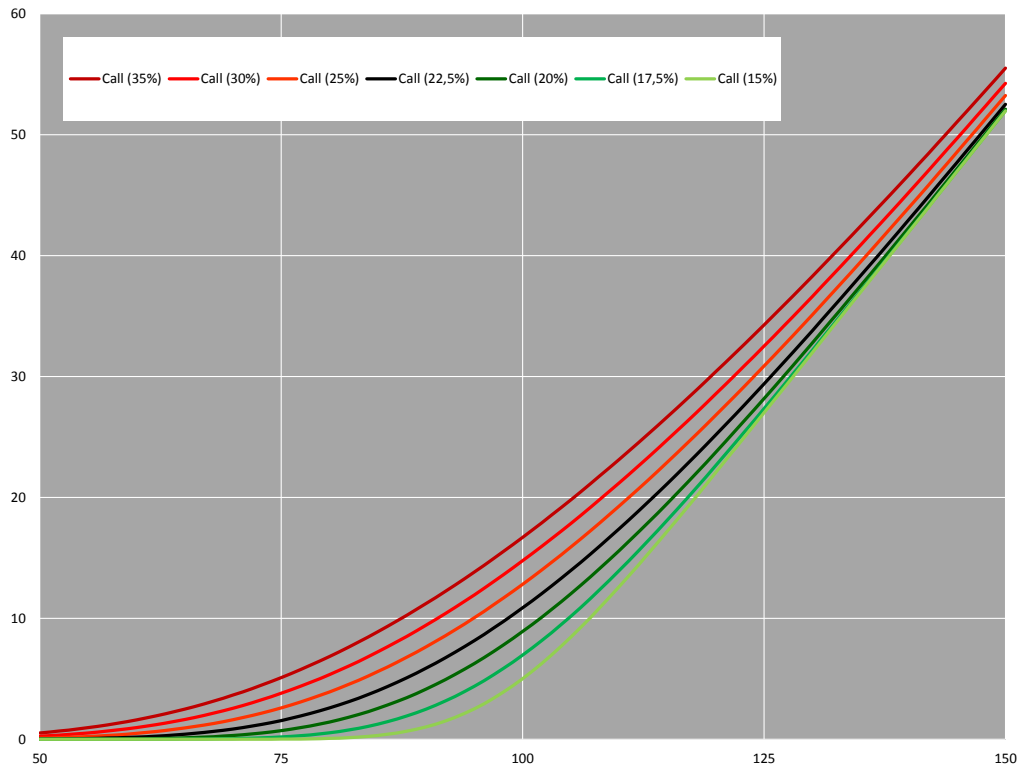


Abbildung 4.2: Wert eines europäischen Calls mit einjähriger Restlaufzeit in Abhängigkeit des Basiskurses für verschiedene implizite Volatilitäten ( $K = 100$ ,  $r_f = 2\%$ )

Quelle: Eigene Berechnung

zurückzuführen sind, werden für diesen zwei Sensitivitätskennzahlen angegeben, die Steigung und Krümmung der Optionspreises in Abhängigkeit des Basiswerts entsprechen. Damit kann der Einfluss von Marktpreisveränderungen des Basiswerts durch ein Taylor Polynom zweiten Grades etwas genauer abgeschätzt werden als bei den anderen Risikofaktoren, bei denen nur der lineare Term berücksichtigt wird. Für einen europäischen Call ergeben sich die für die Griechen die folgenden Formeln.

Linearer Einfluss des Basiswerts:

$$\delta = \frac{\partial C(S, t)}{\partial S_t} = \Phi(d_1)$$

Quadratischer Einfluss des Basiswerts:

$$\gamma = \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S_t^2} = \frac{\phi(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

Linearer Einfluss der Volatilität:

$$vega = \frac{\partial C(S, t)}{\partial \sigma} = S_t \phi(d_1) \sqrt{T-t}$$

Linearer Einfluss der Zeit (Zeitwertverlust):

$$\theta = \frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = \frac{-S_t \phi(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} - r_f K e^{-r_f(T-t)} \Phi(d_2)$$

Linearer Einfluss des risikolosen Zinssatzes:

$$\rho = \frac{\partial C(S, t)}{\partial r_f} = K(T-t) e^{-r_f(T-t)} \Phi(d_2)$$

Bei einem europäischen Call ist der Optionspreis eine monoton steigende Funktion des Basiswerts sowie der impliziten Volatilität (vgl. Abbildung 4.2). Der Einfluss der Zeit ist negativ, d. h. mit näherrückendem Fälligkeitsdatum nähert sich der Optionspreis seinem inneren Wert an und der Zeitwert verschwindet (vgl. Abbildung 4.1). Ein Anstieg des risikofreien Referenzzinssatzes führt bei einem europäischen Call wiederum zu einer Erhöhung der Optionsprämie. Die Griechen spielen vor allem bei der Betrachtung größerer Portfolios mit einer großen Anzahl einzelner Derivate eine Rolle. Während es bei einer geringen Anzahl von Optionen praktikabel ist, diese auf Basis eines geänderten Risikofaktors direkt gemäß der Black Scholes Formel 4.2 neu zu bewerten, kann dies bei großen Portfolios numerisch aufwändig sein. In diesem Fall können die *Griechen* für das gesamte Portfolio berechnet werden, indem die Sensitivitätskennzahlen der einzelnen Derivate mit den entsprechenden Depotanteilen gewichtet und addiert werden, so dass sich die Wertveränderung des Portfolios in Abhängigkeit eines Risikofaktors dann leicht abschätzen lässt.

### 4.3.4 Weiterentwicklungen des Black Scholes Modells

Verschiedene Weiterentwicklungen des Black Scholes Modells ergänzen die geometrische Brown'sche Bewegung in 4.1 um einen stochastischen Volatilitätsparameter. Das *Constant Elasticity of Variance* Modell erweitert den stochastischen Term der geometrischen Brown'schen Bewegung um einen konstanten Hebel  $\delta \geq 0$  als Exponent des Basiswerts  $S$ .

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S^\delta \Delta z_t$$

An Stelle der Normalverteilung resultiert nun eine nichtzentrale  $\chi^2$ -Verteilung innerhalb der Optionspreisformel (vgl. [Schroder, 1989]). In [Heston, 1993] wird die stochastische Volatilität durch einen Cox-Ingersoll-Ross Prozess (*CIR*, vgl. [Cox et al., 1985]) modelliert.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma_t S \Delta z_{1,t} \\ \Delta \sigma_t^2 &= \kappa(\theta - \sigma_t^2) \Delta t + \nu \sigma_t \Delta z_{2,t} \end{aligned}$$

Die beiden Wiener Prozesse  $z_{1,t}$  und  $z_{2,t}$  sind nicht unabhängig, sondern korrelieren mit dem konstanten Korrelationsparameter  $\rho$ . Innerhalb des Heston Modells ergibt sich eine analoge Optionspreisformel wie in 4.2

$$C(S, t) = S_t P_1 - K e^{-r_f(T-t)} P_2$$

wobei für die Wahrscheinlichkeiten  $P_1$  und  $P_2$  keine geschlossene Dichte- oder Verteilungsfunktion mehr angegeben werden kann. Es ist jedoch möglich, die beiden Wahrscheinlichkeiten auf Basis der charakteristischen Funktion der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung zu schätzen.

## 4.4 Modellierung von Anleihen

### 4.4.1 Bewertung von Anleihen

Im Vergleich zu Aktien ist die Preisbildung bei festverzinslichen Wertpapieren in der Regel mit geringerer Unsicherheit behaftet, d. h. der Marktpreis  $B_i$  einer Anleihe  $i$  spiegelt einen Barwert zukünftiger Zahlungsströme  $C_{i,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  wieder, deren

Höhe und Auszahlungszeitpunkte bekannt sind.<sup>2</sup> Die Fälligkeitsrendite  $r_{i,T}$  einer Anleihe  $i$  mit Restlaufzeit  $T$  entspricht dabei demjenigen Diskontierungszinssatz, der zur Übereinstimmung des Barwerts der zukünftigen Cash Flows mit dem Marktpreis der Anleihe führt. Sie setzt sich aus dem laufzeitabhängigen risikofreien Zinssatz  $r_{f,T}$  und dem Credit Spread  $s_i$  der Anleihe  $i$  zusammen, der im Wesentlichen die Risikoprämien für Kreditausfallrisiken und Liquiditätsrisiken enthält.

$$B_i = \sum_{k=1}^n C_{i,k} e^{-r_{i,T} t_k}$$

$$r_{i,T} = r_{f,T} + s_i$$

Dementsprechend kann sowohl ein Anstieg des entsprechenden laufzeitabhängigen Referenzzinssatzes als auch ein Anstieg des individuellen Credit Spreads, beispielsweise wegen einer Verschlechterung der Bonität des Schuldners, zu einer Erhöhung der Fälligkeitsrendite und damit zu einer Verringerung des Marktpreises einer Anleihe führen. Die Auswirkung einer veränderten Fälligkeitsrendite auf den Marktpreis einer Anleihe kann entweder durch die Neuberechnung des Barwerts auf Basis der neuen Fälligkeitsrendite ermittelt oder durch ein Taylor Polynom zweiter Ordnung geschätzt werden (siehe z. B. [Jorion, 2011]).<sup>3</sup>

Die beiden Ableitungen des Anleihenurses nach der Fälligkeitsrendite werden im Falle der ersten Ableitung als Euro Duration und im Falle der zweiten Ableitung als Euro Konvexität bezeichnet. Normiert man die erhaltenen Ableitungen noch mit dem Marktpreis der Anleihe, erhält man die beiden Kennzahlen

<sup>2</sup>Bei einer klassischen Anleihe entspricht  $C_{i,k}, k < n$  den Kuponzahlungen und  $C_{i,n}$  beinhaltet neben der Zahlung des letzten Kupons auch die Rückzahlung des Nennwerts.

<sup>3</sup>Üblicherweise werden im Kontext von festverzinslichen Wertpapieren diskrete Zinssätze und Renditen betrachtet. Wegen ihrer mathematisch besseren Eigenschaften und aus Gründen der Kompatibilität zu den (stetigen) Aktienmarktrenditen wird hier auch für Anleihen die Verwendung stetiger Renditen beibehalten.

Duration  $D$  und Konvexität  $C$ .<sup>4</sup>

$$-DB_i = \frac{dB_i}{dr_{i,T}} = \sum_{k=1}^n -t_k C_{i,k} e^{-r_{i,T} t_k}$$

$$CB_i = \frac{d^2 B_i}{d^2 r_{i,T}} = \sum_{k=1}^n t_k^2 C_{i,k} e^{-r_{i,T} t_k}$$

Die Wertveränderung einer Anleihe in Abhängigkeit der Fälligkeitsrendite kann dann durch das Taylor Polynom zweiter Ordnung approximiert werden.

$$\Delta B_i \approx -(DB_i)(\Delta r_{i,T}) + \frac{1}{2}(CB_i)(\Delta r_{i,T})^2$$

Die Schätzung der Marktpreisveränderung durch ein Taylor Polynom zweiter Ordnung liefert bei kurz- und mittelfristigen Laufzeiten und moderaten Veränderungen der Rendite gute Ergebnisse - in Abbildung 4.3 ergibt sich beispielsweise für eine zehnjährige Anleihe bei einer Veränderung der annualisierten Fälligkeitsrendite von bis zu 3 Prozentpunkten ein maximaler relativer Fehler unterhalb von 0,5%.

Auf die Modellierung der beiden für Anleihen maßgeblichen Risikofaktoren, d. h. Zinsänderungsrisiko und Ausfallrisiko, wird innerhalb der folgenden Abschnitte eingegangen.

#### 4.4.2 Modellierung von Zinssätzen

Im Gegensatz zu Aktienmarktrenditen können die Renditen von Anleihen im Allgemeinen nicht beliebig weit von ihrem Ausgangswert weg driften, sondern sind einer gewissen Rückkehr zu einem langfristigen Mittelwert unterworfen, die durch die deterministische Höhe der ausstehenden Zahlungsströme zu Stande kommt. Darüber hinaus können Zinssätze - ebenfalls im Gegensatz zu Aktienmarktrenditen - nicht oder nur extrem selten negative Werte annehmen. Während Aktienkurse üblicherweise durch eine geometrische Brown'sche Bewegung modelliert werden, werden Zinsänderungen dementsprechend durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess abgebil-

<sup>4</sup>In der Praxis wird die mit dem aktuellen Marktpreis normierte Ableitung des Anleihenurses nach der Fälligkeitsrendite als Modified Duration bezeichnet, während die durchschnittliche Dauer, mit der das investierte Kapital in der Anleihe gebunden ist, als Macauley Duration bezeichnet wird. Bei der Betrachtung von stetigen Zinssätzen sind diese beiden Kennzahlen jedoch identisch.

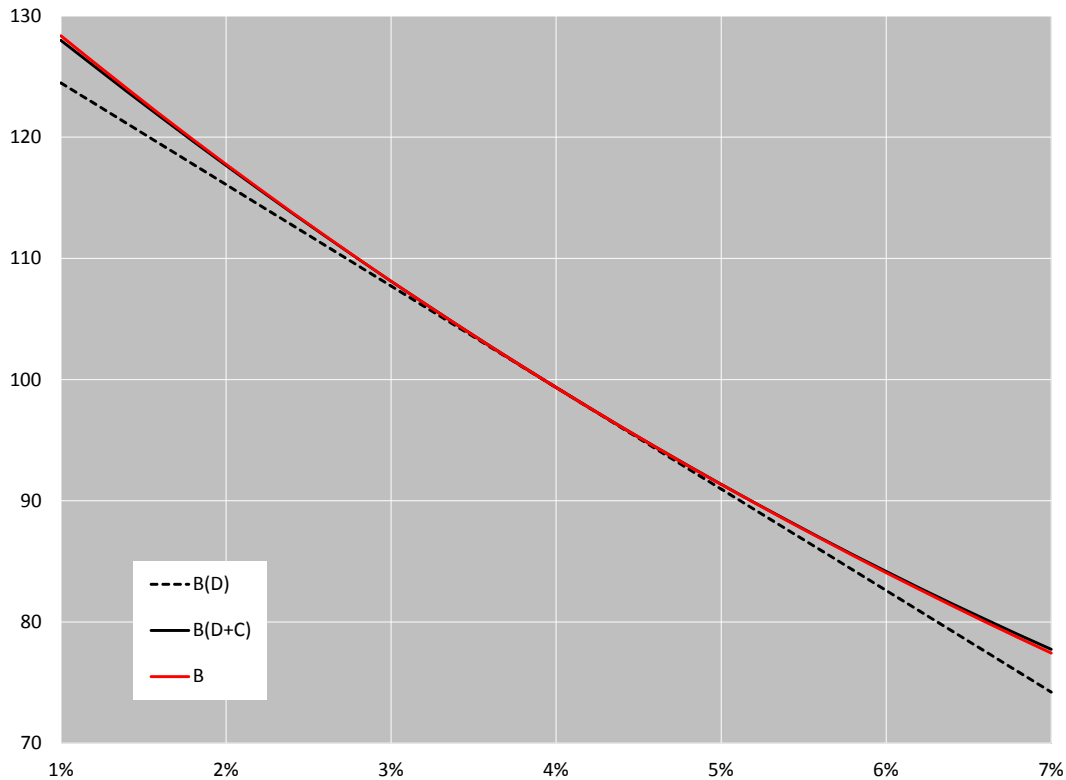


Abbildung 4.3: Schätzung der Marktpreisveränderung einer zehnjährigen Anleihe mit 4% Kupon in Relation zur Veränderung der Rendite, ausgehend von einer stetigen Rendite von 4%

Quelle: Eigene Berechnung

det. Das einfachste Modell dieser Klasse ist das Modell von [Vasicek, 1977]. Der stochastische Prozess für die Änderung des aktuellen Zinssatzes<sup>5</sup>  $r_{f,t}$  innerhalb des Zeitraums  $[t, t + \Delta t]$  besitzt dementsprechend die folgende Gestalt

$$\Delta r_{f,t} = a(b - r_{f,t})\Delta t + \sigma\Delta z_t$$

wobei  $\Delta z_t$  ein Wiener Prozess ist. Der Parameter  $b$  entspricht dabei dem langfristigen Mittelwert, von dem sich der stochastische Prozess nicht dauerhaft entfernen kann, und  $a$  steuert die Geschwindigkeit der Rückkehr zum Mittelwert. Ein Nachteil

<sup>5</sup>Der Zinssatz, der innerhalb der folgenden stochastischen Prozesse modelliert wird, ist die sogenannte *Short Rate*. Die Short Rate oder der Momentanzins ist der Zinssatz eines risikofreien Geldmarktkontos ( $T = 0$ ) für einen infinitesimal kleinen Zeitraum.

des Vasicek Modells ist die theoretische Möglichkeit von negativen Zinssätzen. Eine Weiterentwicklung des Modells, welche diesen Nachteil weitgehend beseitigt, ist das Modell von Cox, Ingersoll und Ross (*CIR*, vgl. [Cox et al., 1985]).

$$\Delta r_{f,t} = a(b - r_{f,t})\Delta t + \sigma\sqrt{r_{f,t}}\Delta z_t \quad (4.3)$$

Durch die Skalierung des zufälligen Terms mit  $\sqrt{r_{f,t}}$  ist dafür gesorgt, dass der zufällige Term im Falle eines aktuellen Zinssatzes in der Nähe von 0 weitgehend verschwindet, so dass die nächste Zinsänderung von der Mittelwertumkehr dominiert wird. Ersetzt man die Wurzelfunktion innerhalb des zufälligen Terms durch

$$\sqrt{r_{f,t}} \longrightarrow \operatorname{sgn}(r_{f,t})\sqrt{|r_{f,t}|}$$

so ist der stochastische Prozess auch für negative Zinssätze definiert, was für den Einsatz des Modells in der Praxis von Vorteil ist. Das *CIR*-Modell lässt sich durch

$$\Delta r_{f,t} = a(b - r_{f,t})\Delta t + \sigma r_{f,t}^c \Delta z_t$$

verallgemeinern. Gebräuchliche Parameterwerte für  $c$  sind  $c = 0$  (Vasicek Modell),  $c = 0,5$  (*CIR*-Modell) und  $c = 1$  (Lognormal Modell). Die Modelle dieser Klasse werden allgemein als Gleichgewichtsmodelle bezeichnet, da sie für den modellierten Zinssatz die Rückkehr zu einem langfristigen Mittelwert unterstellen.

Es ist innerhalb dieser Modellklasse jedoch nicht möglich, die in der aktuellen Zinsstrukturkurve enthaltenen Forward Rates als Trend für die zukünftige Entwicklung des stochastischen Prozesses einzubeziehen.<sup>6</sup> Um diese für die Praxis oftmals wünschenswerte Eigenschaft zu realisieren, muss für den Mittelwert des Prozesses ein zeitabhängiger Parameterwert  $b_t$  zugelassen werden, der im Allgemeinen aus der aktuellen Zinsstruktur geschätzt werden kann. Modelle, welche die aktuelle Zinsstruktur auf diese Weise berücksichtigen, werden als No-Arbitrage Modelle

---

<sup>6</sup>Forward Rates sind die zukünftigen laufzeitabhängigen Zinssätze, die durch die Zinsstrukturkurve impliziert werden. Liegt der (stetige) Zinssatz für eine Laufzeit von einem Jahr beispielsweise bei 2% und für eine zweijährige Laufzeit bei 2,5%, so impliziert dies, dass der einjährige Zinssatz im zweiten Jahr bei 3% liegen muss, um nach einer Verzinsung von 2% im ersten Jahr nach einem weiteren Jahr auf eine durchschnittliche Verzinsung von 2,5% zu kommen, welche durch die Zinsstrukturkurve vorgegeben ist.



bezeichnet. Das älteste Modell dieser Klasse ist das Modell von [Ho / Lee, 1986].

$$\Delta r_{f,t} = b_t \Delta t + \sigma \Delta z_t$$

Das Modell wird von [Hull / White, 1990] analog zu den Modellen von Vasicek und Cox, Ingersoll und Ross um Mittelwertkorrektur erweitert und besitzt im einfachsten Fall die folgende Gestalt:

$$\Delta r_{f,t} = a(b_t - r_{f,t})\Delta t + \sigma \Delta z_t$$

Ein Nachteil der No-Arbitrage Modelle ist die fehlende Konsistenz von Parameterschätzungen zu verschiedenen Zeitpunkten - Der aus der Zinsstrukturkurve resultierende Schätzwert für  $b_t$  kann sich innerhalb weniger Tage sehr stark verändern.

Neben den Modellen für die Short Rate, d. h. das unterste Ende der Zinsstrukturkurve, gibt es umfangreichere Modelle, welche die gesamte Zinsstruktur in Gestalt ihrer Forward Rates simultan modellieren. Den theoretischen Überbau für diese Modelle liefern Heath, Jarrow und Morton (vgl. [Heath et al., 1990], [Heath et al., 1991] und [Heath et al., 1992]), während das LIBOR Market Model von Brace, Gatarek und Musiela (vgl. [Brace et al., 1997]) größere Bedeutung für die Praxis besitzt.

### 4.4.3 Modellierung von Ausfallrisiken

Die einfachste Methode zur Gewinnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten ist die Verwendung der historischen relativen Häufigkeit von Ausfallereignissen einer bestimmten Rating Kategorie. Ein Rating ist eine kategoriale Indikation für die Kreditwürdigkeit eines Schuldners, die von einer Rating Agentur auf Basis verschiedener betriebswirtschaftlicher Kennzahlen ermittelt wird. Die Rating Agenturen erfassen alle Ausfallereignisse der von ihnen bewerteten Schuldner und veröffentlichen regelmäßig Häufigkeitstabellen, welche die historischen Ausfallhäufigkeiten je Rating Kategorie für verschiedene Zeiträume beinhalten. Tatsächlich ist der Ausfall eines Schuldners mit einem sehr guten Rating ein eher unplausibles Szenario - bevor das Ausfallereignis eintritt, steigt ein Schuldner in der Regel zunächst innerhalb des Rating Systems ab. Vor diesem Hintergrund ist es notwendig, anstatt der Ausfallhäufigkeiten die

komplette Übergangsmatrix der einzelnen Ratingkategorien zu betrachten (vgl. 4.1). Für die tatsächliche Schätzung des Ausfallrisikos eines Schuldners sind historische

Von / Nach	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	88,56%	5,92%	0,51%	0,20%	0,10%	0,00%	0,00%	0,00%	4,70%
AA	0,40%	85,93%	9,19%	0,34%	0,00%	0,00%	0,00%	0,03%	4,11%
A	0,03%	2,49%	87,31%	3,98%	0,23%	0,08%	0,02%	0,09%	5,77%
BBB	0,00%	0,37%	4,67%	82,80%	3,27%	0,68%	0,07%	0,44%	7,69%
BB	0,00%	0,15%	0,15%	6,39%	74,95%	5,03%	0,86%	1,16%	11,32%
B	0,00%	0,00%	0,08%	0,47%	8,38%	72,15%	3,03%	3,72%	12,18%
CCC/C	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,74%	15,65%	46,09%	15,65%	20,87%

Tabelle 4.1: Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten je Rating Kategorie zwischen 1981 und 2010  
Quelle: [S&P, 2011]

Übergangshäufigkeiten aus den folgenden Gründen jedoch nur bedingt geeignet:

- Einige Zellen der Übergangsmatrix sind mit nur sehr wenigen Ereignissen besetzt, so dass die Standardabweichungen der geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten mitunter recht hoch ausfallen. Ein Schuldner mit einem Rating von BBB wird gemäß 4.1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,44% binnen eines Jahres insolvent, wobei die mit dem Schätzwert korrespondierende Standardabweichung bei 0,98% liegt.
- Alle Schuldner einer Rating Kategorie besitzen dieselbe geschätzte Ausfallwahrscheinlichkeit und können unter diesem Gesichtspunkt nicht unterschieden werden. Es gibt zwar noch eine feinere Unterteilung der Kategorien in AAA+, AAA und AAA-, deren Verwendung jedoch die im ersten Punkt angesprochene Problematik mit den hohen Standardfehlern verschärft.
- Die geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten basieren allein auf historischen Ausfallereignissen.
- Zwischen einer tatsächlichen Verschlechterung der Bonität eines Schuldners und der Veränderung seines Ratings und damit seiner geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeit liegt eine gewisse Verzögerung.

Eine alternative Möglichkeit zur Schätzung risikoneutraler Ausfallwahrscheinlichkeiten kann auf Basis des risikofreien laufzeitbezogenen Zinssatzes  $r_{f,T}$  und dem

Marktpreis  $B_i$  einer Anleihe mit Laufzeit  $T$  ermittelt werden. Bei risikoneutraler Betrachtung muss der Marktpreis der Anleihe dem zum risikofreien Zinssatz  $r_{f,T}$  diskontierten Erwartungswert der zukünftigen Zahlungsströme entsprechen.

$$B_i = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( e^{-r_{f,T} t_k} C_{i,k} \right) + \mathbb{E} \left( e^{-r_{f,T} T} R_i \right)$$

Der erste Term der Gleichung beinhaltet dabei den Erwartungswert der Kuponzahlungen einschließlich der Rückzahlung des Nennbetrags, welche zu den diskreten Zeitpunkten  $t_k, k = 1, \dots, n$  vereinnahmt werden, wenn kein Ausfallereignis eintritt. Der zweite Term enthält den diskontierten Erwartungswert der Rückzahlung im Falle eines Ausfallereignisses. Ausfallereignisse können im Gegensatz zu Kuponzahlungen zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  auftreten, wobei im Falle der Zahlungsunfähigkeit eines Schuldners die Recovery Rate<sup>7</sup>  $R_i$  als Rückzahlung unterstellt wird.

Es wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass die Lebensdauer  $\tau_i$  einer Anleihe  $i$  exponentialverteilt mit Ausfallintensität  $\lambda_i$  ist.

$$\begin{aligned} f(\tau_i) &= \lambda_i e^{-\lambda_i \tau_i} \\ F(\tau_i) &= 1 - e^{-\lambda_i \tau_i} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, die  $k$ -te Kuponzahlung noch vereinnahmen zu können, beträgt dann:

$$P(\tau_i > t_k) = 1 - F(t_k) = e^{-\lambda_i t_k}$$

Die risikoneutrale Ausfallintensität kann dann auf Basis des aktuellen Marktpreises  $B_i$  durch Auflösung der folgenden Gleichung ermittelt werden.

<sup>7</sup>Die Recovery Rate ist die im Falle eines Ausfallereignisses zu erwartende Rückzahlung. Typischerweise wird bei regulären Anleihen eine Recovery Rate von 40% angenommen, während bei nachrangigen Anleihen von einer Recovery Rate von 20% ausgegangen wird.

$$\begin{aligned}
B_i &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} (e^{-r_{f,T}t_k} C_{i,k}) + \mathbb{E} (e^{-r_{f,T}T} R_i) \\
&= \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_i t_k} e^{-r_{f,T}t_k} C_{i,k} + R_i \int_0^T e^{-r_{f,T}t} f(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n e^{-(\lambda_i + r_{f,T})t_k} C_{i,k} + R_i \int_0^T \lambda_i e^{-(\lambda_i + r_{f,T})t} dt \\
&= \sum_{k=1}^n e^{-(\lambda_i + r_{f,T})t_k} C_{i,k} + R_i \left[ -\frac{\lambda_i}{\lambda_i + r_{f,T}} e^{-(\lambda_i + r_{f,T})t} \right]_0^T \\
&= \sum_{k=1}^n e^{-(\lambda_i + r_{f,T})t_k} C_{i,k} + R_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i + r_{f,T}} \right) (1 - e^{-(\lambda_i + r_{f,T})T})
\end{aligned}$$

Problematisch bei diesem Vorgehen ist, dass der Credit Spread  $s_i$  bzw. der Marktpreis  $B_i$  nicht nur die risikoneutrale Kompensation für das Ausfallrisiko beinhaltet, sondern weiterhin Risikoprämien für Liquiditätsrisiken und darüber hinaus steuerliche Effekte beinhalten kann. Weiterhin können sich für die verschiedenen Anleihen desselben Schuldners unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten ergeben, was widersprüchlich ist.

Eine bessere Möglichkeit zur Gewinnung von risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeiten nach demselben Prinzip wird dementsprechend durch die Verwendung von Credit Default Swaps (CDS) ermöglicht. Ein Credit Default Swap ist ein (außerbörsliches) Kreditderivat, welches die Absicherung von Kreditausfallrisiken ermöglicht. Dabei entrichtet der Sicherungsnehmer - solange noch kein Ausfallereignis eingetreten ist - eine festgelegte Prämie in Gestalt des sogenannten CDS Spreads, dessen jährliche Höhe in Prozent des abgesicherten Nennwerts angegeben wird und der in vierteljährlichen Raten zu entrichten ist, an den Sicherungsgeber. Im Gegenzug ist der Sicherungsgeber dem Sicherungsnehmer im Falle eines Kreditereignisses des zu Grunde liegenden Schuldners zur Kompensation des entstehenden Verlusts, d. h. der Differenz zwischen dem Nennwert der Anleihe und der Recovery Rate, verpflichtet. Die anzusetzende Recovery Rate kann vor dem Eintreten eines Kreditereignisses entweder unbekannt oder innerhalb des CDS Kontrakts fixiert sein. Innerhalb eines CDS Kontrakts müssen die folgenden Rahmenbedingungen festgehalten werden:

- Der Referenzschuldner bzw. die Referenzanleihe fungiert als Underlying des Credit Default Swaps.
- Der Nominalbetrag in Gestalt des abgesicherten Nennwert Volumens der zu Grunde liegenden Anleihe.
- Die Laufzeit des Absicherungsgeschäfts.
- Die spezifischen Kreditereignisse, die eine Ausgleichszahlung durch den Sicherungsgeber auslösen. Üblicherweise werden Kreditereignisse in Form von Zahlungsverzug und Insolvenz abgesichert. Umschuldungen, d. h. der Austausch von kurz laufenden Anleihen gegen Anleihen mit längerer Laufzeit, können optional als versicherte Kreditereignisse vereinbart werden.
- Die Prämie, die der Sicherungsnehmer an den den Sicherungsgeber entrichten muss.
- Die Leistungsart, die beim Eintritt eines Kreditereignisses durch den Sicherungsgeber zu erbringen ist. Üblich sind das Leisten einer Ausgleichszahlung oder der Ankauf der abgesicherten Anleihen zum Nennwert.

Die Ermittlung von risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeiten bzw. -intensitäten ergibt sich aus der Überlegung, dass ein Credit Default Swap genau dann als fair bezeichnet werden kann, wenn die diskontierten Erwartungswerte der Prämienzahlungen mit dem diskontierten Erwartungswert der im Falle eines Kreditereignisses anfallenden Zahlung identisch ist.

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( e^{-r_f, T t_k} C_{i,k} \right) = \mathbb{E} \left( e^{-r_f, T t} (1 - R_i) \right) \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^n e^{-(\lambda_i + r_f, T) t_k} C_{i,k} = (1 - R_i) \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i + r_f, T} \right) (1 - e^{-(\lambda_i + r_f, T) T})$$

Hierbei ist zu beachten, dass unter den  $C_{i,k}$  nun die vom Sicherungsnehmer zu zahlenden CDS-Prämien in Relation zum abgesicherten Nennwert zu verstehen sind, während im Falle eines Ausfallereignisses ein Anteil von  $(1 - R_i)$  des abgesicherten Nennwerts vom Sicherungsgeber an den Sicherungsnehmer bezahlt werden muss. Obwohl die häufig mit einer Kreditausfallversicherung verglichenen Credit Default

Swaps einige Eigenschaften einer typischen Versicherung besitzen, gibt es keinen notwendigen Zusammenhang zwischen dem im Kreditausfall erlittenen Schaden und der erhaltenen Ausfallzahlung, d. h. der Sicherungsnehmer muss gegenüber dem abgesicherten Kreditrisiko nicht notwendigerweise exponiert sein. Es ist durchaus möglich, durch das Abschließen eines Credit Default Swaps ohne den Besitz der zu Grunde liegenden Referenzanleihe auf ein Kreditereignis zu spekulieren. Credit Default Swaps sind daher eher mit Put Optionen zu vergleichen, die es dem Sicherungsnehmer erlauben, dem Sicherungsnehmer eine Anleihe zum Nennwert anzudienen, wenn die tatsächliche Rückzahlung wegen eines Kreditereignisses geringer als der Nennwert ausfällt. Der wesentlichste Unterschied zu einer klassischen Put Option ist die Zahlungsweise der Optionsprämie, die bei einem klassischen Optionsschein initial, bei einem klassischen CDS dagegen ratierlich zu bezahlen ist.

<b>CDS auf Daimler mit Laufzeit 1 Jahr</b>		
<b>CDS-Spread</b>		0,4176%
<b>Upfront Zahlung</b>		0,2298%
$t_0$		
04.10.2012		
$t_k$	$t_k$ in Jahren	$C_k$
09.10.2012	0,014	0,2298%
20.12.2012	0,211	0,1044%
20.03.2013	0,458	0,1044%
20.06.2013	0,710	0,1044%
20.09.2013	0,962	0,1044%
T	T in Jahren	
20.12.2013	1,211	
$r_{f,T}$		0,000%
Recovery Rate		40,00%
Ausfallzahlung		60,00%
<b>Rating (S&amp;P)</b>		<b>A-</b>
<b>P(hist)</b>		<b>0,090%</b>
$\lambda$		<b>0,00893</b>
<b>P(CDS)</b>		<b>0,889%</b>

Tabelle 4.2: Exemplarische Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit auf Basis eines CDS

Quelle: Bloomberg, eigene Berechnung

Tabelle 4.2 beschreibt die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit für einen CDS auf die Daimler AG mit einer Laufzeit von gut einem Jahr.<sup>8</sup> Die Kosten für den dargestellten CDS setzen sich für den Sicherungsnehmer aus einer initial fälligen Zahlung von 0,2298% des abgesicherten Nennwerts sowie einer Prämie von 0,4176% zusammen, wobei die Prämie in vier Raten à 0,1044% quartalsweise zu entrichten ist. Bei den besicherten Verbindlichkeiten handelt es sich um Senior Tranchen, die im Falle eines Insolvenzereignisses vor den nachrangigen Verbindlichkeiten aus der Insolvenzmasse bedient werden. In der Praxis ist die Annahme einer Recovery Rate von 40% für vorrangige Verbindlichkeiten gebräuchlich, so dass der Sicherungsgeber im Falle eines Ausfallereignisses 60% des versicherten Nennwerts an den Sicherungsnehmer bezahlen muss. Da die Höhe der möglichen Zahlungsströme, die zwischen dem Sicherungsgeber und dem Sicherungsnehmer auftreten können, bekannt sind, kann die dadurch implizierte Ausfallintensität durch Gleichsetzen der Erwartungswerte der diskontierten Zahlungsströme von Sicherungsgeber und Sicherungsnehmer gemäß der Gleichung 4.4 bestimmt werden. Insgesamt kann festgestellt werden, dass die durch die CDS Prämie implizierte einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit im vorliegenden Beispiel rund zehn mal so hoch liegt wie die historische Ausfallwahrscheinlichkeit eines Schuldners mit einem Rating von A (vgl. Tabelle 4.1). Unter Berücksichtigung der tatsächlichen Altersstruktur realer Unternehmen bzw. deren mittlerer Lebensdauer erscheint die auf Basis des CDS ermittelte Ausfallwahrscheinlichkeit als praxistauglicherer Schätzwert als die extrem niedrige Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,09%, die aus der Betrachtung des Ratings und der historischen Ausfallereignisse resultiert.

---

<sup>8</sup>Stichtag: 04.10.2012





## 5 Risikomaße

### 5.1 Über Risikomaße

In diesem Kapitel steht die Messung des Risikos von Wertpapieren mit ungewisser zukünftiger Rückzahlung im Mittelpunkt. Es ist daher zunächst erforderlich, den Begriff des Risikomaßes zu definieren und zu operationalisieren. Ziel der Risikomessung ist die aktuelle ( $t = 0$ ) Bewertung einer Position  $Y$ , deren Wert zu einem späteren Zeitpunkt ( $t = T$ ) unsicher ist, d. h. mit einem monetären oder zumindest numerisch messbaren Verlust behaftet sein kann. Eine erste und sehr grobe Form der Risikomessung ist die Unterteilung der risikobehafteten Positionen an Hand ihres zukünftigen Wertes in akzeptable und inakzeptable Risiken, welche z. B. von einem Regulator oder einer Aufsichtsbehörde festgelegt werden könnte. Ein inakzeptables Risiko könnte durch eine Zusatzinvestition in ein risikoloses Referenzinstrument<sup>1</sup> in eine akzeptable Position umgewandelt werden, und der dazu benötigte Geldbetrag wäre eine gute erste Möglichkeit für ein Risikomaß. Die folgenden Axiome zur Definition einer Menge akzeptabler Risiken und anschließend eines Risikomaßes sind aus [Artzner et al., 1999] entnommen, werden hier aber etwas vereinfacht dargestellt. Es seien

- $\Omega$  die Menge aller möglichen Umweltzustände. Für jeden dieser Umweltzustände kann der finale Wert einer riskanten Position berechnet werden, der hier mit  $Y$  bezeichnet wird.
- $\mathcal{G}$  die Menge aller Risiken, d. h. aller reellwertigen Funktionen auf  $\Omega$ . Der Anteil ihrer nichtnegativen Elemente wird mit  $L_+$ , der ihrer negativen Elemente mit  $L_-$  bezeichnet.

---

<sup>1</sup>Eine Investitionsmöglichkeit, deren Wert im Zeitpunkt  $T$  für jede zum Zeitpunkt 0 investierte Geldeinheit  $i$  Geldeinheiten beträgt. Wenn  $r_f$  der risikofreie Marktzins ist, gilt  $i = e^{r_f T}$ .

- $\mathcal{A}$  die Menge aller akzeptablen Endwerte von  $Y$ , welche aus den Ausprägungen von  $(\Omega, \mathcal{G})$  resultieren.

Die Menge  $\mathcal{A}$  soll die folgenden vier Axiome erfüllen:

1. Die Menge  $\mathcal{A}$  enthält  $L_+$ .
2.  $\mathcal{A} \cap L_{--} = \{0\}$ , wobei  $L_{--} = \{Y \mid Y(\omega) < 0 \text{ für jedes } \omega \in \Omega\}$ .
3. Die Menge  $\mathcal{A}$  ist konvex.
4. Die Menge  $\mathcal{A}$  ist ein positiv homogener Kegel, d. h.  $Y \in \mathcal{A}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda Y \in \mathcal{A}$ .

Auf Basis der Menge  $\mathcal{A}$  gibt es einen natürlichen Weg, ein Risikomaß festzulegen. Das zur Menge  $\mathcal{A}$  konstruierte Risikomaß  $\rho_{\mathcal{A},i}$  besitzt folgende Gestalt:

$$\rho_{\mathcal{A},i}(Y) = \inf\{m \mid mi + Y \in \mathcal{A}\}.$$

$\rho_{\mathcal{A},i}(Y)$  ist also der minimale Geldbetrag, der zusätzlich in ein risikoloses Finanzinstrument investiert werden muss, um zusammen mit dem Risiko  $Y$  eine akzeptable Position zu bilden.

## 5.2 Kohärenz

Nachdem der Begriff des Risikomaßes im vorherigen Abschnitt definiert wurde, werden jetzt Kriterien eingeführt, an welchen sich ein *geeignetes* (d. h. kohärentes) Risikomaß festmachen lässt. Dazu werden vier Axiome benötigt, welche ebenfalls in [Artzner et al., 1999] verwendet werden.

**Axiom T:** *Translationsinvarianz*

Für alle  $Y \in \mathcal{G}$  und alle reellen Zahlen  $\alpha$  gilt  $\rho(Y + \alpha i) = \rho(Y) - \alpha$ .

Axiom T bedeutet, dass  $\rho(Y + \rho(Y)i) = 0$  für alle  $Y$  gilt. Diese Gleichung resultiert aus der Konstruktion von  $\rho$  auf Basis der Menge  $\mathcal{A}$ , wie sie oben beschrieben wurde.

**Axiom S:** *Subadditivität*

Für alle  $Y_1$  und  $Y_2 \in \mathcal{G}$  gilt  $\rho(Y_1 + Y_2) \leq \rho(Y_1) + \rho(Y_2)$ .

Axiom S sagt aus, dass das Zusammenfassen verschiedener Positionen zu einem Portfolio kein zusätzliches Risiko mit sich bringt. Dies ist in der Portfoliotheorie von zentraler Bedeutung.

**Axiom PH:** *Positive Homogenität*

Für alle  $\lambda > 0$  und alle  $Y \in \mathcal{G}$  gilt  $\rho(\lambda Y) = \lambda \rho(Y)$ .

Axiom PH hat zur Folge, dass sich Liquiditätsrisiken nicht berücksichtigen lassen. In der Realität könnte der Verkauf sehr großer Positionen jedoch zu Liquiditätsengpässen führen.

**Axiom M:** *Monotonie*

Für alle  $X$  und  $Y \in \mathcal{G}$  mit  $X \leq Y$  gilt  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ .

Axiom M bedeutet, dass eine Position, welche in allen Umweltzuständen besser abschneidet als eine andere Position folglich weniger Zusatzkapital benötigt, um der Menge akzeptabler Risiken zugeordnet zu werden.

**Definition:** *Kohärenz*

Ein Risikomaß  $\rho$  ist kohärent, wenn es die Axiome **T**, **S**, **PH** und **M** erfüllt.

## 5.3 Value at Risk

Das Risikomaß *Value at Risk* wurde 1994 von der Bank JP Morgan eingeführt, und wurde 2001 durch das Baseler Bankenaufsichtskomitee als geeignetes Maß für den Eigenkapitalbedarf der Banken empfohlen. Heute ist der Value at Risk das in der Praxis am häufigsten verwendete Risikomaß. Für einen festgelegten Zeithorizont  $T$  und eine festgelegte Sicherheitswahrscheinlichkeit  $\gamma$  ist der Value at Risk eine Schranke für den Verlust einer riskanten Position, der zum Zeitpunkt  $T$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  nicht überschritten wird. Sei also  $Y_t$  der Wert einer riskanten Position und  $Z_t = Y_t - Y_0$  die Veränderung ihres Wertes bis zum Zeitpunkt  $t$ , dann gilt für stetige Verteilungen von  $Y$  und  $Z$ :

$$\text{VaR}_\gamma(Y) = -F_{Z_T}^{-1}(1 - \gamma).$$

Da sich das  $(1 - \gamma)$ -Quantil bei multimodalen oder diskreten Verteilungen manchmal nur in Intervallform angeben lässt, wird häufig auch eine etwas allgemeinere Darstellung gewählt.

$$VaR_\gamma(Y) = \inf\{-F_{Z_T}^{-1}(1 - \gamma)\}.$$

Wenn man beispielsweise ein Wertpapier betrachtet, dessen jährliche Rendite normalverteilt ist mit  $\mu = 10\%$  und  $\sigma = 25\%$  dann beträgt der 95% Value at Risk

$$VaR_{0,95}(Y) = -(10\% - 1,645 \cdot 25\%) = 31,13\%.$$

Der Verlust des Wertpapiers würde also nach einem Jahr 31,13% seines Anfangswertes mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht übersteigen.

Ein Schwachpunkt des Risikomaßes Value at Risk ist die Tatsache, dass der Value at Risk nicht notwendigerweise kohärent ist. In [Embrechts et al., 1999] wird gezeigt, dass der Value at Risk ein kohärentes Risikomaß ist, wenn die gemeinsame Verteilung der Risiken elliptisch ist, d. h. die Höhenlinien der gemeinsamen Verteilung Ellipsen sind. Für Optionsscheine, die einer stark unsymmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen, kann beispielsweise leicht gezeigt werden, dass diese das geforderte Axiom der Subadditivität verletzen.

*Man stelle sich ein Portfolio vor, welches von zwei Tradern A und B verwaltet wird. Trader A hält einen Put, der weit außerhalb des Geldes liegt und am nächsten Tag ausläuft, als Shortposition. Trader B hält einen Call, der ebenfalls weit außerhalb des Geldes liegt und am nächsten Tag ausläuft, als Shortposition. Historische VaR-Berechnungen haben ergeben, dass jede der beiden Optionen zum Fälligkeitstermin mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% im Geld liegt und dementsprechend einen Verlust produziert. Trader A und B halten also einzeln betrachtet jeweils eine Position, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% kein Geld verliert, so dass jede der beiden Positionen einen 95%-VaR von Null aufweist. Beim gesamten Portfolio beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein verlustfreies Ergebnis jedoch nur 92%, was einen positiven 95%-VaR zur Folge hat. Damit ergibt sich ein Szenario, in welchem das gemeinsame Risiko der beiden Positionen größer als die Summe der einzelnen Risiken ausfällt, d. h. ein negativer Diversifikationsnutzen.*

([Artzner et al., 1997], eigene Übersetzung)

### 5.4 Conditional Value at Risk

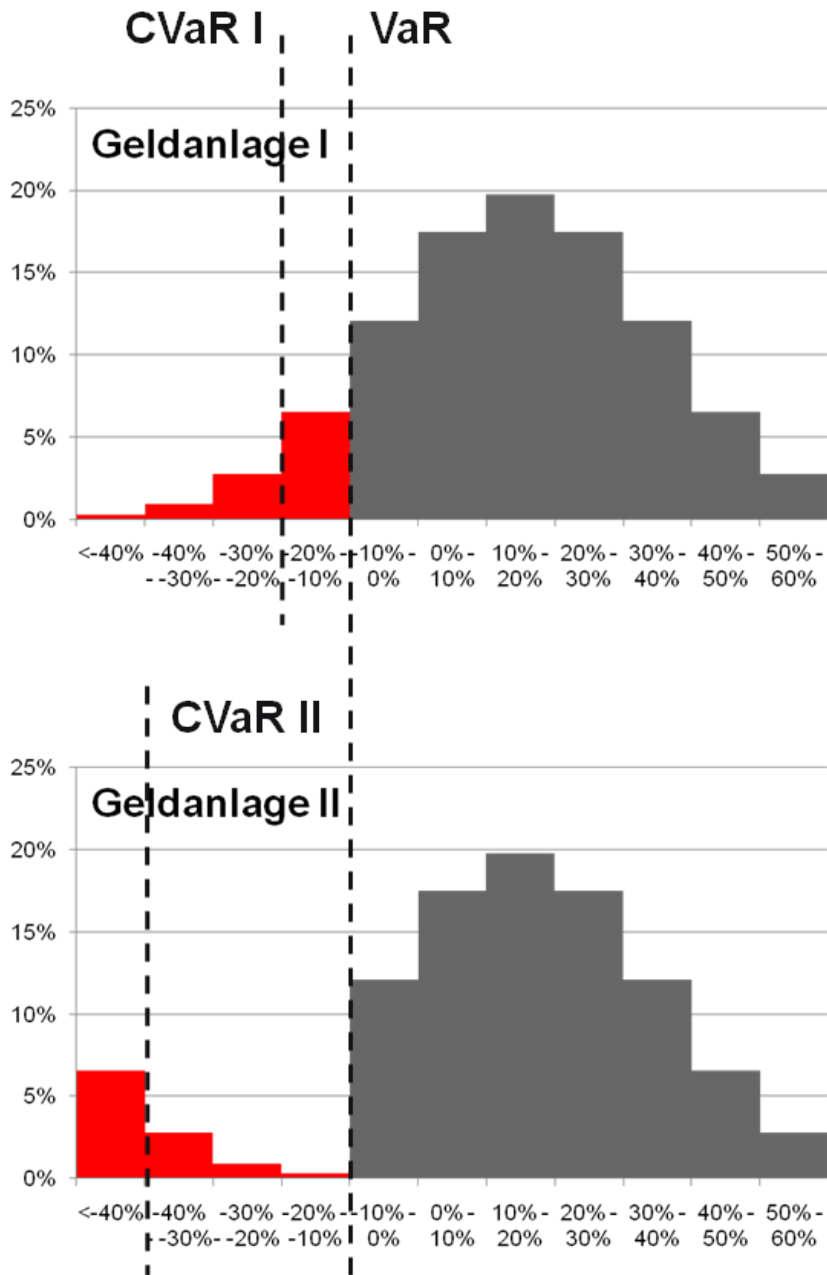


Abbildung 5.1: VaR und CVaR

Eine Weiterentwicklung des Risikomaßes Value at Risk ist der *Conditional Value at Risk*. Der Conditional Value at Risk ist der im Falle einer Überschreitung der Value

at Risk Schranke zu erwartende Verlust, also:

$$CVaR_\gamma(Y) = \mathbb{E}[(-Z_T) | (-Z_T) > VaR_\gamma(Y)].$$

Für die beiden Risikomaße gilt folglich immer

$$VaR_\gamma(Y) \leq CVaR_\gamma(Y).$$

Diese Ungleichung bedeutet, dass der Conditional Value at Risk ein konservativeres Risikomaß als der Value at Risk ist. Im oben aufgeführten Beispiel (Normalverteilung mit  $\mu = 10\%$  und  $\sigma = 25\%$ ) beträgt der 95% Conditional Value at Risk:

$$CVaR_{0,95}(Y) = -(10\% - \frac{\varphi(1,645)}{1 - 0,95} \cdot 25\%) = 41,56\%$$

wobei  $\varphi$  die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Wenn also die durch den Value at Risk festgelegte Verlustschranke von 31,13% überschritten wird, beträgt der zu erwartende Verlust 41,56% des eingesetzten Kapitals.

Darüber hinaus ist der Conditional Value at Risk nach [Szegö, 2002] im Falle einer stetigen Verteilung von  $Y$  und  $Z$  immer kohärent, was ihn zumindest formal gesehen zu dem *besseren* Risikomaß macht.

Neben der Kohärenz ist der Conditional Value at Risk auch deshalb für die Risikomessung unter Einbeziehung von Stressereignissen geeignet, weil er empfindlicher auf Ereignisse innerhalb des unteren Verteilungsendes reagiert als der klassische Value at Risk. Abbildung 5.1 zeigt zwei exemplarische Verteilungen für die zukünftige Wertentwicklung einer Geldanlage, die identische untere 5%-Quantile und damit einen identischen 95%-VaR besitzen. Tatsächlich sind in der zweiten dargestellten Verteilung die im Falle einer Unterschreitung des VaR zu erwartenden Verluste deutlich größer als in der ersten Verteilung, da sich in beiden Fällen jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeitsmasse unterhalb des entsprechenden Quantils konzentriert, kann der VaR diesen Unterschied in der Höhe der noch als plausibel anzusehenden Verluste nicht identifizieren. Vor allem für die Einbeziehung von Stressereignissen, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten deutlich unterhalb des für den Value at Risk üblicherweise eingesetzten Quantilen liegen, ist der Value at Risk deshalb ungeeignet, da sich die Hinzunahme einer sehr geringen Anzahl von sehr hohen Verlusten kaum auf

das gemessene Risiko auswirkt.

Auf Einbeziehung von Stressereignissen in die klassischen Risikomaße VaR und CVaR wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

## 5.5 Einbeziehung von Stressereignissen

Die Berücksichtigung von Stressszenarien, die unabhängig von einer klassischen Risikokennzahl wie dem Value at Risk oder Conditional Value at Risk berechnet werden, kann als schwierig angesehen werden. Es ist ohne die Verfügbarkeit von Eintrittswahrscheinlichkeiten kaum zu beantworten, wie mit den jenseits eines Value at Risk berechneten Stressszenarien bzw. den damit assoziierten Verlusten des analysierten Wertpapierportfolios umzugehen ist. Selbst ein Stressereignis, das mit einem Totalverlust einhergeht, könnte für das Risikomanagement irrelevant sein, wenn sein Eintreten nur mit extrem niedriger Wahrscheinlichkeit erfolgt und somit unplausibel ist. Vor diesem Hintergrund schlägt [Berkowitz, 2000] vor, die Stressszenarien mit Wahrscheinlichkeiten zu unterlegen und in das Standardrisikomaß Value at Risk einzubetten. Dabei werden für die betrachteten Risikofaktoren zwei oder mehr Wahrscheinlichkeitsverteilungen<sup>2</sup> unterschieden, eine für das ereignisfreie Szenario ( $f_0(\vec{y})$ ) und jeweils eine für jedes Stressszenario ( $f_1(\vec{y}), \dots, f_k(\vec{y})$ ). Darüber hinaus muss jedes Stressereignis mit einer - möglicherweise subjektiven - Eintrittswahrscheinlichkeit  $p_1, \dots, p_k$  unterlegt werden. Die kombinierte Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. deren Dichte besitzt dementsprechend die folgende Gestalt:

$$f(\vec{y}) = \begin{cases} f_0(\vec{y}) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - p_1 - \dots - p_k) \\ f_1(\vec{y}) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_1 \\ \dots & \\ f_k(\vec{y}) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_k \end{cases}$$

Die Monte Carlo Simulation der Variablen  $\vec{y}$  oder der Risikofaktoren  $\vec{f}$  muss in diesem Kontext in zwei Schritten vorgenommen werden, wobei im ersten Schritt mit Hilfe einer multinomial verteilten Zufallsvariable ermittelt werden muss, welches Szenario bzw. welche Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Simulation von  $\vec{y}$  oder

<sup>2</sup>In der Praxis werden Stressereignisse häufig als eine spezifische Ausprägung von Risikofaktoren parametrisiert, so dass die (triviale) Wahrscheinlichkeitsverteilung im Falle eines Stressereignisses häufig nur ein Ereignis enthält.

$\vec{f}$  zu verwenden ist. Auf diese Weise lässt sich für die untersuchten Variablen oder Risikofaktoren eine simulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung generieren, die zufällige Stressereignisse beinhaltet und die für die Berechnung eines klassischen verteilungsbasierten Risikomaßes verwendet werden kann.



## 6 Fallbeispiel: Konstruktion eines hybriden Stresstests

### 6.1 Anforderungen und Lösungen

#### 6.1.1 Ausgangslage

Im Folgenden wird für das in Tabelle 2.2 dargestellte Portfolio der Vita Pensionskasse ein exemplarischer Stresstest konstruiert. Dabei wird auf einem Modell aufgebaut, welches sowohl zeitdynamische Varianzen und Korrelationen erlaubt als auch unterschiedliche stochastische Abhängigkeiten am unteren und oberen Verteilungsende berücksichtigt. Um Stressereignisse in die Monte Carlo Simulation zu integrieren, wird auch auf die bedingte Simulation der multivariaten Verteilung bei Vorgabe eines Variablenwertes für eine beliebige Variable eingegangen. Darüber hinaus werden innerhalb der multivariaten Varianz- und Korrelationsmodelle die Hauptkomponenten der verwendeten Zeitreihen verwendet, was nicht unbedingt notwendig ist, da man bereits bei den vorliegenden Anlageklassen / Indizes von einer Dimensionsreduktion durch die Verwendung von Faktoren sprechen kann, was es jedoch ermöglicht, das untersuchte Beispiel auch auf deutlich größere Portfolios zu übertragen. Es wird dementsprechend akzeptiert, dass das gewählte Modell zu Gunsten einer unproblematischen Übertragbarkeit auf größere Datensätze im vorliegenden Fall möglicherweise zu einem gewissen Grad überparametrisiert ist. Die Indexzeitreihen, die für die Anpassung des Modells eingesetzt werden, beinhalten den Zeitraum vom 31.12.2002 bis zum 31.12.2012 auf täglicher Basis, d. h. 21 Indizes à 2.609 Tagesrenditen, so dass die Anzahl der zu schätzenden Parameter trotz einer leichten Überparametrisierung des Modells gemessen an der Länge der Datenhistorien nicht problematisch ist. Als Referenzwährung wird der Schweizer Franken (CHF) gewählt, so dass alle Kurse und Renditen in CHF zu verstehen sind. Die Stressereignisse werden abschließend entsprechend des Ansatzes von [Berkowitz, 2000] in ein klassisches Risikomaß (VaR

und CVaR) eingebettet.

### 6.1.2 Hauptkomponentenanalyse

Damit alle verwendeten Indizes durch die konstruierten Hauptkomponenten gleichmäßig gut erklärt werden bzw. dass die Hauptkomponenten nicht durch die im Vergleich zu den im Portfolio höher gewichteten Renten deutlich volatileren Aktien dominiert werden, werden die stetigen Renditen der Indizes im Vorfeld standardisiert. Um die Varianz der standardisierten Renditen der 21 Indizes zu mindestens 95% durch die ersten Hauptkomponenten abzubilden, werden 12 Hauptkomponenten benötigt, wobei dann 95,2% der Varianz in den Hauptkomponenten enthalten sind.

Index	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
NDDUSZ Index	-0,270	-0,001	0,220	0,027	-0,049
NDDUE15 Index	-0,304	0,009	0,179	-0,057	-0,010
NDDUUS Index	-0,255	0,061	0,026	0,083	-0,040
NDDUJN Index	-0,132	0,186	-0,022	0,463	-0,231
NDUEEGF Index	-0,275	0,100	0,122	0,169	-0,080
WISGITRD Index	-0,318	0,046	0,137	0,054	-0,047
SZGATR Index	0,176	0,365	-0,006	-0,063	0,029
JGAGGUSD Index	-0,127	0,314	-0,435	0,145	-0,043
QW5A Index	0,137	0,467	0,215	-0,009	0,012
QW7A Index	0,155	0,461	0,161	-0,108	-0,008
EECIEECI Index	-0,293	0,098	-0,065	-0,180	0,080
SIMA SW Equity	-0,039	0,025	0,079	0,123	0,530
DEKAIMM GR Equity	-0,239	0,132	-0,356	-0,364	0,142
DESPAEU GR Equity	-0,240	0,130	-0,356	-0,364	0,145
LPX50TR Index	-0,289	0,052	0,191	0,009	0,006
MCGIGIDT Index	-0,293	0,110	0,027	0,044	-0,066
ALTERAQI Index	-0,200	-0,005	0,404	-0,104	-0,060
RICIGLTR Index	-0,197	0,048	0,021	-0,023	0,104
SRCATTRR Index	-0,069	0,091	-0,362	0,537	-0,075
QX2M Index	0,171	0,466	0,137	-0,058	-0,013
DBDCHFON Index	0,005	-0,017	-0,089	-0,299	-0,760

Tabelle 6.1: Ladungen der ersten fünf Hauptkomponenten

Betrachtet man die ersten Hauptkomponenten (vgl. Tabelle 6.1), so fällt auf, dass die erste Komponente erwartungsgemäß mit hohem Gewicht auf die Aktienindizes

lädt. Innerhalb des zweiten Faktors besitzen Anleihen die höchsten Gewichte, während vor allem die in EUR notierten Anleihenindizes einen deutlichen Schwerpunkt besitzen. Die dritte Komponente beinhaltet schwerpunktmäßig die USD-lastigen internationalen Anleihen und Hedgefonds. Die vierte Komponente lädt sehr schwer auf Catastrophe Bonds, internationale Immobilien und den japanischen Aktienindex, der vergleichsweise niedrig mit den übrigen Aktienindizes korreliert. Die fünfte Hauptkomponente besitzt einen deutlichen Schwerpunkt in Liquidität und Immobilien in der Schweiz. Das im Folgenden dargestellte multivariate Varianz- und Korrelationsmodell baut auf den konstruierten Hauptkomponenten auf, ist jedoch auf nicht orthogonale Zeitreihen bzw. Faktoren übertragbar. Tatsächlich sind die konstruierten Hauptkomponenten orthogonal zueinander und bedürfen deshalb keines Modells für die Korrelation. Die Residuen, die nach der Abbildung der Hauptkomponenten durch ein Vektorautoregressionsmodell mit einem exogenen Stressfaktor verbleiben, sind jedoch nicht mehr orthogonal. Die Korrelationsmatrix der Residuen des auf die Hauptkomponenten angewendeten Vektorautoregressionsmodells zeigt, dass bei der Einbeziehung einer exogenen Stressvariable, die nicht orthogonal zu den vorher konstruierten Hauptkomponenten ist, mitunter hohe Korrelationen zwischen den berechneten Residuen auftreten können - vor allem die Residuen der ersten Hauptkomponente, die wie oben gezeigt sehr stark auf die Aktienindizes lädt, korrelieren nach Einbeziehung des MSCI World als exogener Stressvariable für eine weltweite Erschütterung der Aktienmärkte recht hoch mit einigen der anderen Faktoren.

	Exo	PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	PC 5	PC 6	PC 7	PC 8	PC 9	PC 10	PC 11	PC 12
Exo	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
PC 1	0,000	1,000	0,336	0,370	0,345	-0,192	0,011	-0,467	-0,043	-0,429	-0,168	-0,071	0,150
PC 2	0,000	0,336	1,000	0,008	-0,109	0,003	0,010	-0,024	0,013	-0,009	0,016	0,019	-0,010
PC 3	0,000	0,370	0,008	1,000	0,140	-0,041	0,047	-0,199	0,005	0,166	-0,033	0,021	-0,033
PC 4	0,000	0,345	-0,109	0,140	1,000	-0,017	0,018	0,026	0,029	-0,184	0,026	0,003	-0,024
PC 5	0,000	-0,192	0,003	-0,041	-0,017	1,000	0,103	0,020	0,010	0,005	-0,032	-0,001	0,018
PC 6	0,000	0,011	0,010	0,047	0,018	0,103	1,000	0,029	-0,006	-0,040	-0,004	-0,023	0,004
PC 7	-0,001	-0,467	-0,024	-0,199	0,026	0,020	0,029	1,000	0,035	-0,054	-0,085	0,004	-0,033
PC 8	0,000	-0,043	0,013	0,005	0,029	0,010	-0,006	0,035	1,000	0,035	0,016	-0,004	0,002
PC 9	0,000	-0,429	-0,009	0,166	-0,184	0,005	-0,040	-0,054	0,035	1,000	-0,075	-0,052	-0,016
PC 10	0,000	-0,168	0,016	-0,033	0,026	-0,032	-0,004	-0,085	0,016	-0,075	1,000	-0,048	0,044
PC 11	0,000	-0,071	0,019	0,021	0,003	-0,001	-0,023	0,004	-0,004	-0,052	-0,048	1,000	0,023
PC 12	0,000	0,150	-0,010	-0,033	-0,024	0,018	0,004	-0,033	0,002	-0,016	0,044	0,023	1,000

Tabelle 6.2: Korrelationsmatrix der Residuen des Vektorautoregressionsmodells der Hauptkomponenten mit einer autoregressiven exogenen Stressvariable

Darüber hinaus wird auf die Übertragbarkeit des Modells auf nicht orthogonale Faktoren Wert gelegt, so dass ein flexibles Korrelationsmodell in jedem Fall benötigt wird.

### 6.1.3 Modellanforderungen und Lösungen

Die Renditen von Finanzmarktzeitreihen besitzen in der Regel einige spezifische Eigenschaften, die gewisse Anforderungen an ein ökonometrisches Modell stellen und die im Folgenden wiedergegeben werden. Dabei wird insbesondere erklärt, inwieweit die resultierenden Anforderungen innerhalb des gewählten Modells umgesetzt werden.

- Wertpapierrenditen sind leptokurtisch verteilt, d. h. Ereignisse am oberen und unteren Verteilungsende treten mit höherer Wahrscheinlichkeit auf, als bei der Normalverteilung.
- Wertpapierrenditen sind heteroskedastisch, d. h. die Varianz ist kein konstanter Parameter, sondern verändert sich über die Zeit hinweg.
- Wertpapierrenditen weisen sogenannte Volatility Cluster auf, d. h. Kursbewegungen mit hohen positiven oder negativen Renditen folgen häufig dicht aufeinander.
- Die stochastische Abhängigkeit zwischen den Renditen zweier Wertpapiere ist zeitlich nicht konstant.
- Die stochastische Abhängigkeit zwischen den Renditen zweier Wertpapiere ist nicht linear, sondern nimmt häufig am unteren Verteilungsende zu.

Die ersten drei Anforderungen, d. h. Kurtosis, Heteroskedastizität und Volatility Clustering lassen sich univariat durch einen der in Abschnitt 3.4.1 erläuterten *GARCH*-Prozesse erfüllen. Für die Berücksichtigung zeitabhängiger Korrelationen wird ein multivariates Kovarianzmodell bzw. Korrelationsmodell benötigt. Die letzte Eigenschaft, d. h. unterschiedliche Abhängigkeiten am unteren und oberen Verteilungsende, kann durch eine geeignete Copula modelliert werden.

## 6.2 Modellwahl und Parameterschätzung

### 6.2.1 Modellspezifikation

Konkret wird für die Verteilung der Tagesrenditen  $r_{i,t}$  die folgende Modellstruktur angenommen:

$$\begin{aligned}\vec{r}_t &= \vec{c}_1 + B\vec{f}_t + \vec{\varepsilon}_t \\ \vec{f}_t &= \vec{c}_2 + A\vec{f}_{t-1} + \vec{d}z_t + \vec{\varepsilon}_t \\ z_t &= c_3 + az_{t-1} + \tau_t\end{aligned}$$

Das Vektorautoregressionsmodell bezieht sich dementsprechend auf die ersten Hauptkomponenten  $\vec{f}_t = (f_{1,t}, \dots, f_{m,t})'$  von  $\vec{r}_t = (r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$ . Die exogene Variable  $z_t$  ist eine für die Einbeziehung von Stressfaktoren vorgesehene Variable und geht ohne Verzögerung in  $\vec{f}_t$  und indirekt in  $\vec{r}_t$  ein. Sie wird durch ein Autoregressionsmodell erster Ordnung parametrisiert. Abgesehen von der exogenen Stressvariable ist das gewählte Modell dementsprechend mit dem Modell in 3.6 vergleichbar, d. h. den von [Stock / Watson, 1998] und [Stock / Watson, 2002] vorgeschlagenen Diffusionsindizes, bezogen auf ein Vektorautoregressionsmodell und mit einer leicht abweichenden Parametrisierung. Für alle Residuen  $\vec{\varepsilon}_t$ ,  $\vec{\varepsilon}_t$  und  $\tau_t$  wird eine schiefe Version der Generalized Error Distribution (GED) (vgl. [Varanasi / Aazhang, 1989] und [Nadarajah, 2005]) verwendet. Die GED erweitert die Normalverteilung um einen Wölbungsparameter  $\beta$  und stimmt im Fall  $\beta = 2$  mit der Normalverteilung überein.

$$f(x; \mu, \alpha, \beta) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-(|x-\mu|/\alpha)^\beta}$$

Eine unimodale und symmetrische Verteilung, in diesem Fall die GED, kann um einen Schiefeparameter  $\gamma > 0$  erweitert werden, in dem beide Verteilungshälften unterschiedlich gestreckt und neu normiert werden (vgl. [Fernandez / Steel, 1998]).

$$g(x|\gamma) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \left[ f\left(\frac{x}{\gamma}\right) I_{[0,\infty)}(x) + f(\gamma x) I_{(-\infty,0)}(x) \right]$$

Während bei den äußeren Residuen  $\varepsilon_{i,t}$  Unabhängigkeit angenommen wird, wird die gemeinsame Verteilung der  $\varepsilon_{j,t}$  und  $\tau_t$  über eine schiefe t-Copula

$C_{\mu,\gamma,\Sigma,\nu}(u_{\tau,t}, u_{1,t}, \dots, u_{m,t})$  in Ergänzung zu den univariaten Randverteilungen (GED) modelliert. Wegen ihrer für die später benötigte Monte Carlo Simulation günstigen Eigenschaften wird die Version von [Rachev / Mittnik, 2000] und [Demarta / McNeil, 2005] der schiefen multivariaten t-Verteilung verwendet, welche in Gleichung 3.17 dargestellt ist. Die Varianzen der  $\epsilon_{j,t}$  und  $\tau_t$  unterliegen einem *GARCH*-Prozess erster Ordnung (vgl. Gleichung 3.9). Ein ähnlicher Copula Ansatz wurde in [Sun et al., 2008] bereits erfolgreich eingesetzt, allerdings mit einer konstanten Korrelationsmatrix. Innerhalb des vorliegenden Modells wird die zeitdynamische Korrelationsmatrix über das Dynamic Conditional Correlation Model von [Engle, 2002] angepasst und in die Copula eingebettet und ersetzt den Parameter  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} Q_t &= (1 - \alpha - \beta)R + \alpha Q_{t-1} + \beta(\vec{\epsilon}_{t-1}\vec{\epsilon}'_{t-1}) \\ R_t &= \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \\ R_t \hat{=} \text{Cov}(\vec{y}) &= \frac{\nu}{\nu - 2} \Sigma_t + \frac{2\nu^2}{(\nu - 2)^2(\nu - 4)} \gamma\gamma' \end{aligned}$$

### 6.2.2 Parameterschätzung

Die Schätzung aller Regressionsparameter erfolgt mit einem einfachen Kleinst-Quadrat-Schätzer wie zu Beginn von Abschnitt 3.3.4 für Vektorautoregressionsmodelle dargestellt. Die Schätzung der *GARCH*- und *DCC*-Parameter wird mit Hilfe der Quasi Maximum Likelihood Methode durchgeführt, d. h. die Parameter werden unabhängig von der tatsächlichen Verteilung der Residuen über die Annahme einer Normalverteilung geschätzt. Bei den verwendeten *GARCH*(1,1) Modellen werden jeweils nur die beiden Koeffizienten über das Quasi Maximum Likelihood Verfahren geschätzt, während der konstante Term  $\omega$  jeweils so kalibriert wird, dass das Modell im Hinblick auf die unbedingte Varianz erwartungstreu ist (vgl. [Engle / Mezrich, 1996]). Die Parameter der univariaten schiefen GED Verteilungen, die für die Modellierung aller um ihre zeitdynamischen Standardabweichungen (*GARCH*) bereinigten Residuen verwendet wird, werden auf Basis eines echten Maximum Likelihood Schätzers angepasst, wobei der Gradient der Likelihoodfunktion numerisch bestimmt wird. Die Parameter  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\gamma}$  und  $\nu$  der multivariaten schiefen t-Copula werden über den Expectation Maximization (EM) Algorithmus

	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
<i>DCC</i>		0,97373	0,01893
$z$	0,01087	0,90521	0,08389
$f_1$	0,00781	0,93868	0,05435
$f_2$	0,04578	0,93242	0,05037
$f_3$	0,01360	0,91151	0,07874
$f_4$	0,00692	0,94597	0,04552
$f_5$	0,00281	0,96293	0,03373
$f_6$	0,01774	0,92423	0,05633
$f_7$	0,01338	0,91537	0,06233
$f_8$	0,01026	0,93536	0,04998
$f_9$	0,01223	0,90441	0,06836
$f_{10}$	0,00744	0,88934	0,09432
$f_{11}$	0,02412	0,84243	0,09048
$f_{12}$	0,00473	0,87741	0,10540

Tabelle 6.3: GARCH und DCC Parameter

von [Hu / Kercheval, 2008] geschätzt. Die gleichzeitige Schätzung aller Parameter durch den EM-Algorithmus kann als etwas exakter als das Schätzverfahren aus [Sun et al., 2008] angesehen werden - dort muss der Parameter  $\nu$ , d. h. die Anzahl der Freiheitsgrade, fixiert werden, um die Parameter  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\gamma}$  und  $\Sigma$  zu schätzen, wobei nur für  $\vec{\mu}$  und  $\vec{\gamma}$  ein Maximum Likelihood Schätzer verwendet wird, während  $\Sigma$  auf Basis der Stichprobenkovarianzmatrix geschätzt wird. Der EM Algorithmus besitzt für den k-ten Iterationsschritt die folgende Gestalt, wobei die Hilfsvariablen



$\rho_t^{[k]}$ ,  $\theta_t^{[k]}$ ,  $\eta_t^{[k]}$  und  $\xi_t^{[k]}$  folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned}\rho_t^{[k]} &= (\vec{y}_t - \vec{\mu}^{[k]})' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} (\vec{y}_t - \vec{\mu}^{[k]}) \\ \theta_t^{[k]} &= \left( \frac{\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}}{\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]}} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{K_{\frac{\nu+d+2}{2}} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)}{K_{\frac{\nu+d}{2}} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)} \\ \eta_t^{[k]} &= \left( \frac{\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}}{\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{\frac{\nu+d-2}{2}} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)}{K_{\frac{\nu+d}{2}} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)} \\ \xi_t^{[k]} &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}}{\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]}} \right) + \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} K_{-\frac{\nu+d}{2} + \alpha} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)}{K_{\frac{\nu+d}{2}} \left( \sqrt{(\rho_t^{[k]} + \nu^{[k]}) (\vec{\gamma}^{[k]}' (\Sigma_t^{[k]})^{-1} \vec{\gamma}^{[k]})} \right)} \Big|_{\alpha=0}\end{aligned}$$

1. Setze  $k = 1$  und bestimme Startwerte für  $\vec{\mu}^{[1]}$ ,  $\vec{\gamma}^{[1]}$  und  $\nu^{[1]}$ .
2. Berechne  $\rho_t^{[k]}$  und dann  $\theta_t^{[k]}$ ,  $\eta_t^{[k]}$  und  $\xi_t^{[k]}$  sowie deren Durchschnittswerte  $\bar{\theta}^{[k]}$ ,  $\bar{\eta}^{[k]}$  und  $\bar{\xi}^{[k]}$ .
3. Passe  $\vec{\mu}$  und  $\vec{\gamma}$  an gemäß

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^{[k+1]} &= \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T \theta_t^{[k]} (\vec{y} - \vec{y}_t)}{\bar{\theta}^{[k]} \bar{\eta}^{[k]} - 1} \\ \vec{\mu}^{[k+1]} &= \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^T \theta_t^{[k]} \vec{y}_t - \vec{\gamma}^{[k+1]}}{\bar{\theta}^{[k]}}\end{aligned}$$

4. Ermittle  $\nu^{[k+1]}$  durch Lösen der Gleichung

$$-\psi \left( \frac{\nu}{2} \right) + \ln \left( \frac{\nu}{2} \right) + 1 - \bar{\xi}^{[k]} - \bar{\theta}^{[k]} = 0$$

wobei  $\psi$  die Digamma-Funktion

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

ist.

5. Berechne die  $\Sigma_t^{[k+1]}$  mit

$$\Sigma_t^{[k+1]} = \left( R_t - \frac{2\nu^2}{(\nu-2)^2(\nu-4)} \bar{\gamma}^{[k+1]} \bar{\gamma}^{[k+1]'} \right) \frac{\nu-2}{2}$$

6. Setze  $k := k + 1$  und gehe zurück zu Schritt 2 bis die Veränderung der logarithmierten Likelihoodfunktion im k-ten Schritt klein genug ist. In diesem Fall kann der Iterationsprozess abgebrochen werden.

Die geschätzten Parameterwerte der schiefen t-Copula zeigen, dass Schiefe bzw. eine unterschiedliche Abhängigkeit am unteren und oberen Verteilungsende abgesehen von der exogenen Stressvariable eine vergleichsweise geringe Rolle spielen, was teilweise durch die Verwendung des *DCC*-Modells erklärt werden kann.

	$\mu$	$\gamma$
$z$	0,21775	-0,17714
$f_1$	-0,00836	0,00516
$f_2$	0,01445	-0,01574
$f_3$	0,15200	-0,11806
$f_4$	0,12479	-0,10697
$f_5$	0,40099	-0,27733
$f_6$	-0,37176	0,29320
$f_7$	-0,02903	0,01842
$f_8$	-0,01134	0,01462
$f_9$	0,03932	-0,02308
$f_{10}$	0,05982	-0,04496
$f_{11}$	-0,01963	0,00859
$f_{12}$	0,14076	-0,10576
	$\nu$	
	10,816	

Tabelle 6.4: Parameter der schiefen t-Copula

## 6.3 Monte Carlo Simulation

### 6.3.1 Einbeziehung von Stressereignissen

Für die Monte Carlo Simulation der schiefen t-Copula wird die stochastische Darstellung der schiefen t-Verteilung benötigt.

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{\mu} + \vec{\gamma}w + \sqrt{w}\vec{x} \\ \vec{x} &\sim N(0, \Sigma) \\ w &\sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)\end{aligned}$$

Die bedingte Copula der  $f_{i,t}$  in Abhängigkeit der Stressvariablen  $z_t$ , die im Fall des Eintretens eines Stressereignisses mit einem deterministischen Wert belegt ist, kann mit dieser Darstellung gemäß dem folgenden Prozess simuliert werden.

1. Falls zum Zeitpunkt  $t$  ein Stressereignis auftritt, wird das deterministische Stressereignis  $z_t^*$  an Hand seiner Verteilung (GED) in einen Wahrscheinlichkeitswert  $u_{z,t}^*$  übersetzt.
2. An Hand der eindimensionalen schiefen t-Verteilung mit  $\mu_\tau$ ,  $\gamma_\tau$ ,  $\sigma_{\tau,t}$  und  $\nu$  wird das zu  $u_{z,t}^*$  korrespondierende Quantil  $\tilde{\tau}_t^*$  der univariaten schiefen t-Verteilung bestimmt.
3. Basierend auf der stochastischen Darstellung der multivariaten schiefen t-Verteilung und dem simulierten Wert der invers-gammaverteilten Zufallsvariable  $w$  wird

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_t \\ \tilde{\epsilon}_t \end{pmatrix} = \vec{\mu} + \vec{\gamma}w_t + \sqrt{w_t}\vec{x}_t = \vec{\mu} + \vec{\gamma}w_t + \sqrt{w_t}\Sigma_t^{1/2}\Phi_t$$

durch Einsetzen von  $\tilde{\tau}_t^*$  in die erste Zeile des Gleichungssystems nach  $\phi_{z,t}^*$  aufgelöst.

4. Die erste und mit dem Residuum der Stressvariable korrespondierende standardnormalverteilte Zufallsvariable  $\phi_{z,t}$  aus  $\Phi_t$  wird mit  $\phi_{z,t}^*$  überschrieben.
5.  $\tilde{\epsilon}_t^*$  wird durch Einsetzen der angepassten Simulation der Standardnormalverteilung  $\Phi_t^*$ , bei der die Simulation der ersten Variable mit  $\phi_{z,t}^*$  überschrieben

wurde, in die stochastische Darstellung der multivariaten schiefen t-Verteilung ermittelt.

### 6.3.2 Stressszenarien und Ergebnisse

Im Hinblick auf die Stressszenarien, die innerhalb des vorliegenden Stresstests Berücksichtigung finden, werden die folgenden Szenarien betrachtet.

1. Ein Kurseinbruch der weltweiten Aktienmärkte um 35%, verteilt auf fünf Shocks gleicher Verlusthöhe. Als Stressvariable wird der MSCI World Total Return Index verwendet.
2. Eine Erhöhung der dreimonatigen LIBOR-Raten in Schweizer Franken, Euro und US Dollar um 100 bis 150 Basispunkte verbunden mit einer Aufhebung der für den Schweizer Franken derzeit vorliegenden Währungsobergrenze von 1,2 CHF/EUR, einhergehend mit einem Anstieg des Schweizer Frankens auf einen Wert von 1 EUR.

#### 6.3.2.1 Szenario: Einbruch der weltweiten Aktienmärkte

Neben hohen zu erwartenden Verlusten hat das Eintreten des ersten Szenarios auch einen beträchtlichen Anstieg der Volatilität innerhalb der Aktienanlageklassen zur Folge, da ein externer Shock von rund -8% in der Stressvariablen wegen der multivariaten *GARCH* Struktur bei allen Zeitreihen, die überwiegend durch den MSCI World Index erklärt werden, mit einer deutlichen Erhöhung der Volatilität während der folgenden Simulationsschritte einhergeht. Bei der Monte Carlo Simulation von 1.000 Jahren à 261 Handelstage sind innerhalb des ersten Szenarios erwartungsgemäß vor allem Aktienanlagen mit durchschnittlichen Verlusten zwischen 25,3% und 34,9% betroffen (vgl. Tabelle 6.5).<sup>1</sup> Etwas niedrigere Verluste von 22,0% und 17,0% treten bei Rohstoffen und Wandelanleihen auf. Weitaus geringere Verluste zwischen 5,4% und 8,2% haben Immobilien, USD notierte Anleihen und Hedge Fonds zu verzeichnen, während die in EUR und CHF notierten Anleihen sogar leicht von einem Wertverlust der weltweiten Aktienmärkte profitieren.

---

<sup>1</sup>In der Tabelle ist die mittlere simulierte jährliche Wertentwicklung im Falle eines Stressereignisses abzüglich der mittleren simulierten Wertentwicklung ohne Stressereignis aufgeführt, d. h. die Renditedifferenz, die tatsächlich auf das Stressereignis zurückzuführen ist.

Index	ØVerlust	$\sigma$ (Basis)	$\sigma$ (Stress)	F-Test (P-Wert)
NDDUSZ Index	-26,40%	18,36%	34,99%	0,00%
NDDUE15 Index	-33,10%	25,01%	46,36%	0,00%
NDDUUS Index	-28,29%	18,63%	38,51%	0,00%
NDDUJN Index	-25,33%	24,39%	34,33%	0,00%
NDUEEGF Index	-34,88%	28,04%	50,42%	0,00%
W1SGITRD Index	-30,61%	19,68%	41,68%	0,00%
SZGATR Index	3,95%	4,59%	5,92%	0,00%
JGAGGUSD Index	-5,37%	12,03%	12,45%	27,85%
QW5A Index	0,94%	4,04%	3,95%	46,70%
QW7A Index	1,93%	4,40%	4,55%	30,28%
EECIECI Index	-16,97%	13,08%	20,23%	0,00%
SIMA SW Equity	-2,63%	10,70%	10,57%	69,39%
DEKAIMM GR Equity	-8,24%	9,50%	11,02%	0,00%
DESPAEU GR Equity	-8,20%	9,41%	11,01%	0,00%
LPX50TR Index	-35,75%	26,07%	52,54%	0,00%
MCGIGIDT Index	-26,07%	16,00%	33,90%	0,00%
ALTERAQI Index	-7,46%	5,61%	9,76%	0,00%
RICIGLTR Index	-22,00%	27,63%	31,37%	0,01%
SRCATTRR Index	-2,27%	17,10%	16,41%	19,72%
QX2M Index	2,01%	3,73%	3,95%	7,06%
DBDCHFON Index	0,02%	0,12%	0,12%	72,86%

Tabelle 6.5: Durchschnittliche Auswirkungen des untersuchten Aktienmarktszenarios auf die verschiedenen Anlageklassen

Abbildung 6.1 zeigt die Differenzen zwischen den simulierten Wertentwicklungen verschiedener Anlageklassen bei Auftreten des Stressereignis und bei Ausbleiben des Stressereignisses für ein einzelnes Jahr - die Verwerfungen, die dabei innerhalb der untersuchten Anlageklassen auftreten, sind mit den Verlusten, die in Tabelle 6.5 für 1.000 Simulationen à 261 Tage im Durchschnitt resultieren, vergleichbar. Abbildung 6.2 zeigt die Auswirkungen der für den MSCI World eingesetzten exogenen Shocks auf die bedingte Simulation des MSCI Europe Index. Der Darstellung kann entnommen werden, dass im Anschluss an das Auftreten eines Shocks, die Bestandteil des Stressereignisses sind, eine Erhöhung der Volatilität stattfindet, was wie bereits erwähnt durch die *GARCH* Struktur des eingesetzten Modells verursacht wird.

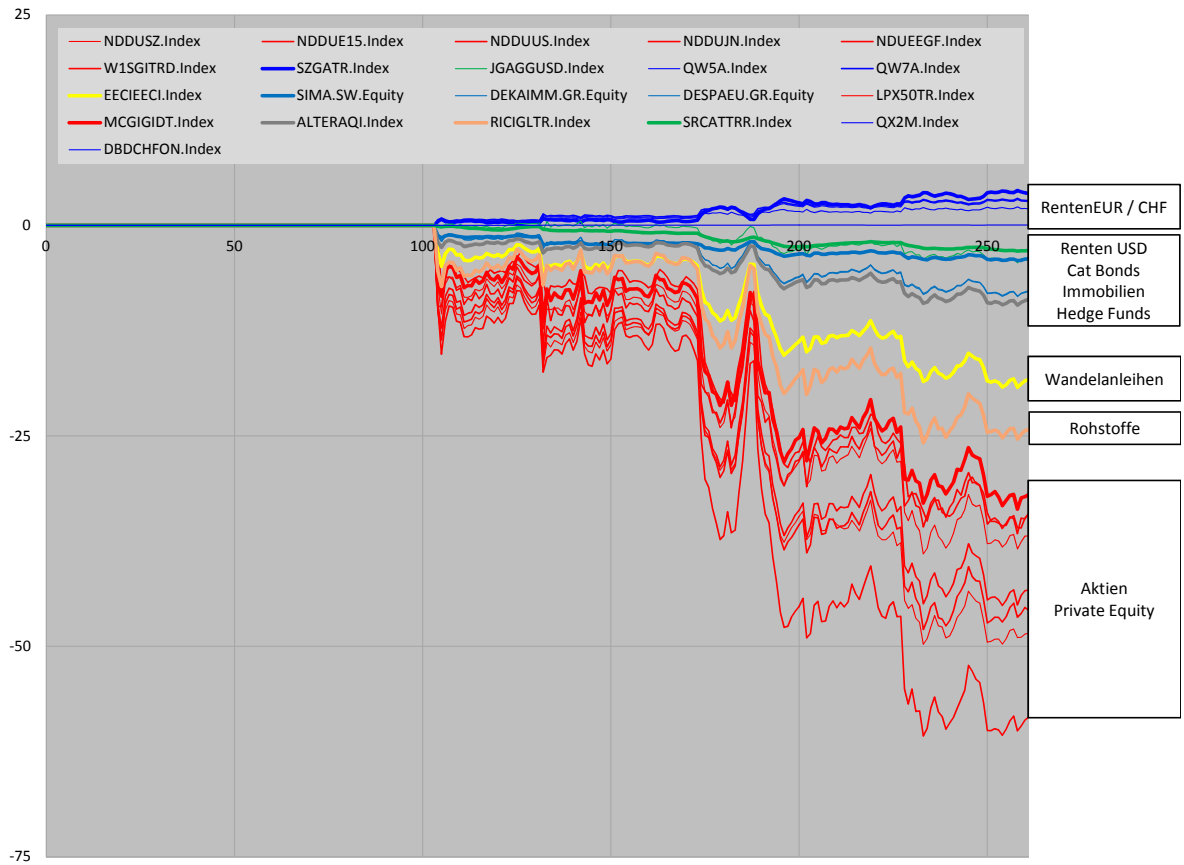


Abbildung 6.1: Simulation der Auswirkung einer Aktienmarktkrise für verschiedene Anlageklassen

Im Hinblick auf die simulierte Volatilität ist im Falle des Stressereignisses bei allen Indizes ein signifikanter Anstieg der Varianz zu beobachten, wobei sich die Volatilität im Sinne der Standardabweichung der simulierten Jahresrenditen bei den Aktienanlagen und Wandelanleihen etwa verdoppelt, während der Volatilitätsanstieg bei Rohstoffen und den konservativeren Anlageklassen etwa bei 50% und darunter liegt (vgl. Tabelle 6.5).<sup>2</sup>

Auch ein deutlicher Anstieg der Korrelation ist weiterhin in Verbindung mit dem Eintreten des untersuchten Stressszenarios zu beobachten. In den Original-

<sup>2</sup>Es wurden für jeden Index jeweils 1.000 Jahresrenditen je einmal mit und einmal ohne Stressereignis simuliert und mit Hilfe eines zweiseitigen F-Tests auf Varianzgleichheit der beiden simulierten Stichproben gegeneinander getestet.

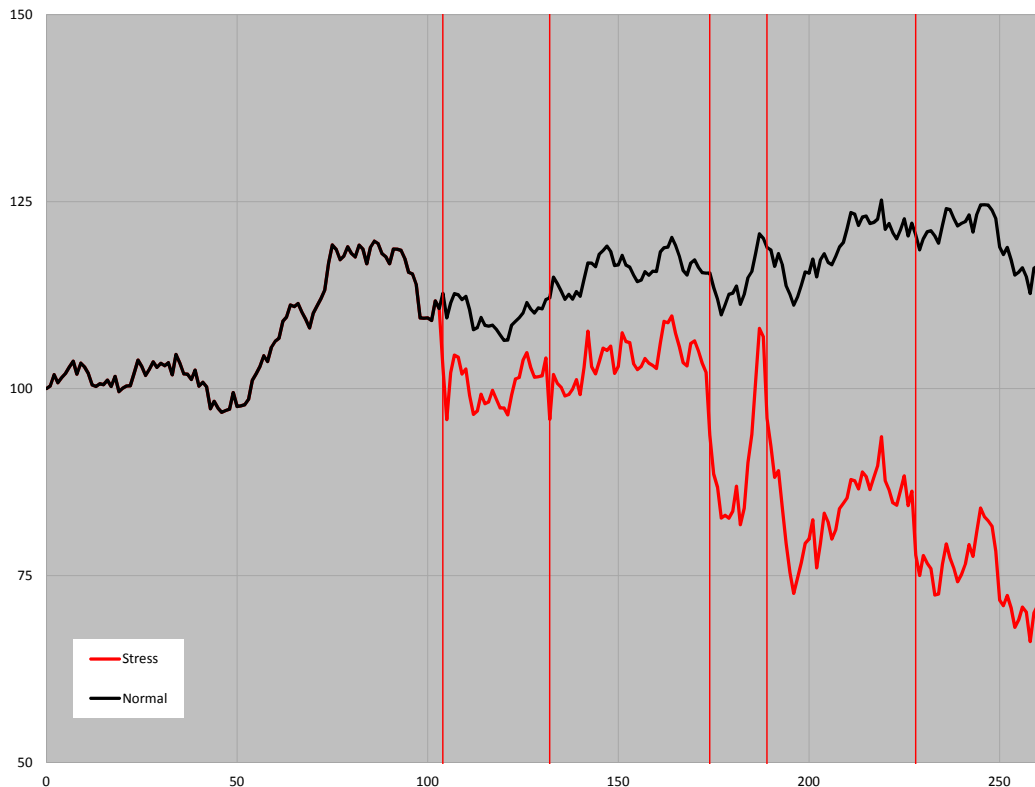


Abbildung 6.2: Auswirkungen der simulierten Shocks im MSCI World auf den MSCI Europe Index

daten beträgt die Korrelation zwischen den stetigen Tagesrenditen des MSCI Europe Index und des MSCI USA Index 0,615.<sup>3</sup> In den simulierten Daten liegt die Korrelation bei Ausbleiben des Stressereignis mit 0,51 etwas niedriger. Bezieht man das Stressereignis in die Simulation ein, erhöht sich die Korrelation zwischen dem MSCI Europe und dem MSCI USA auf 0,883. Die empirische Erfahrung, dass der Diversifikationseffekt zwischen positiv korrelierenden Wertpapieren im Falle eines Stressereignisses abnimmt bzw. dass deren Korrelation ansteigt, kann somit auch innerhalb der Simulation des Stressszenarios beobachtet werden. Abbildung 6.3 zeigt, dass der Anstieg der Korrelation erstens mit dem Beginn des Stressereignisses, d. h. dem ersten Shock, einhergeht und zweitens wegen des *DCC*-Modells eine gewisse Persistenz besitzt.

<sup>3</sup>Es ist zu berücksichtigen, dass die zu Grunde liegenden Zeitreihen der betrachteten Indizes in CHF notiert sind.

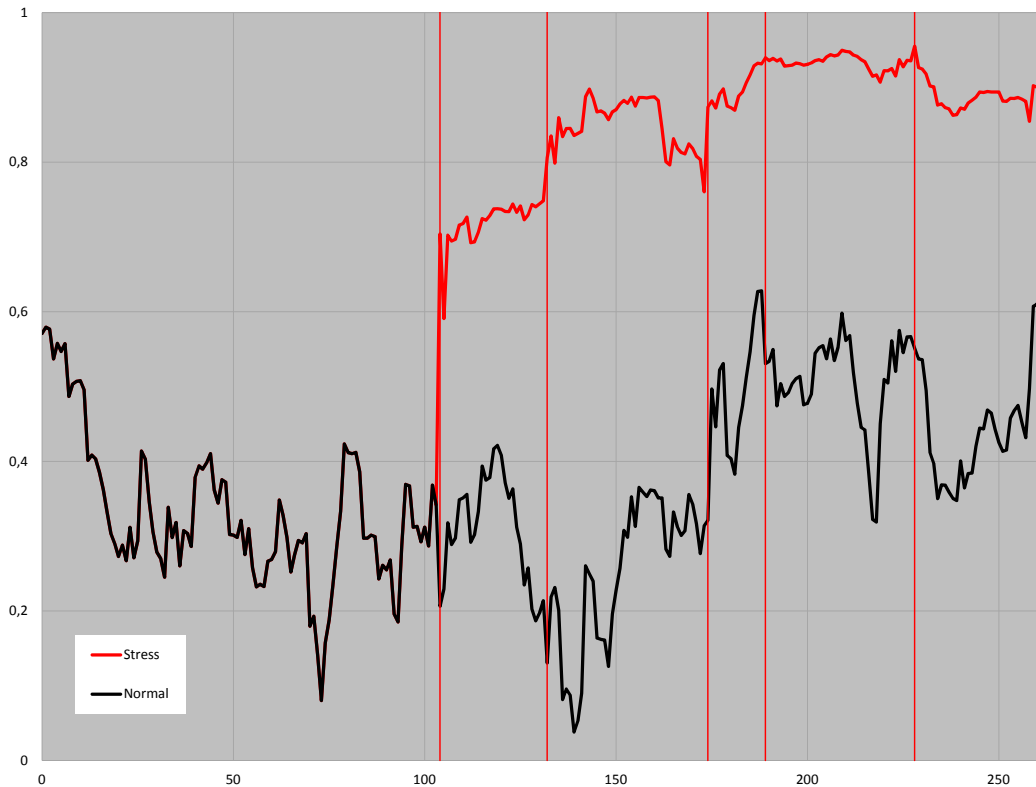


Abbildung 6.3: Auswirkungen der simulierten Shocks im MSCI World auf die Korrelation (30 Tage) zwischen dem MSCI Europe und dem MSCI USA

### 6.3.2.2 Aufhebung der Währungsuntergrenze des Schweizer Franken in Relation zum Euro

Innerhalb des zweiten Szenarios wird eine Beendigung der expansiven Geldpolitik in Europa und den USA sowie eine Aufhebung der für den Schweizer Franken gültigen Währungsobergrenze in Relation zum Euro angenommen. Das Szenario beinhaltet im Gegensatz zum ersten Stressereignis vier Stressvariablen:

- Für den dreimonatigen LIBOR-Satz in CHF wird ein Anstieg von 0,012% (Ende 2012) auf 1,00% simuliert.
- Für den dreimonatigen LIBOR-Satz in EUR wird ein Anstieg von 0,129% (Ende 2012) auf 1,50% simuliert.
- Für den dreimonatigen LIBOR-Satz in USD wird ein Anstieg von 0,306%



(Ende 2012) auf 1,50% simuliert.

- Für den Schweizer Franken wird ein Anstieg von 0,828 (Ende 2012) EUR auf 1,00 EUR bzw. für den Euro ein Rückgang von 1,207 (Ende 2012) auf 1,00 CHF simuliert.

Für die Simulation der Zinssätze wird dabei das in 4.3 dargestellte Modell von Cox, Ingersoll und Ross verwendet, welches im Besonderen die Berücksichtigung einer Konvergenz des Zinssatzes gegen einen längerfristigen Zielwert erlaubt (vgl. Abbildung 6.4).

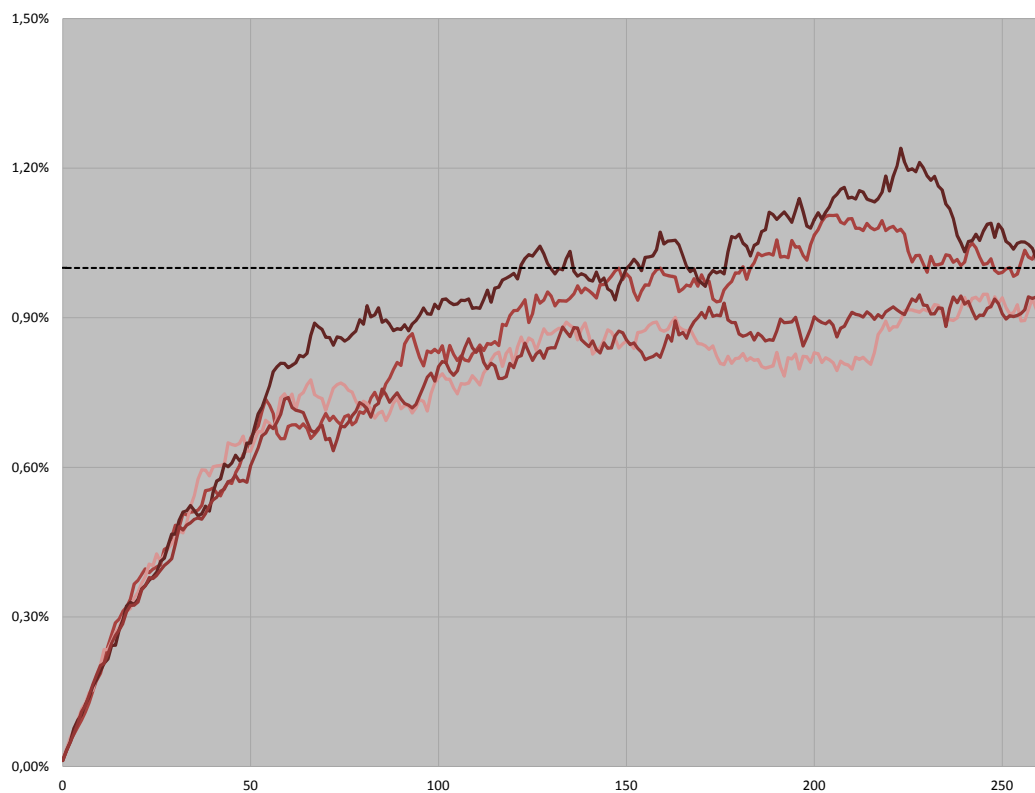


Abbildung 6.4: Simulation des dreimonatigen LIBOR Zinssatzes in CHF über ein *CIR*-Modell mit  $a = 0,02$  und  $b = 1,00\%$

Die Auswirkungen der veränderten Zinssätze auf die innerhalb des Portfolios investierten Anleihen wird über die Duration modelliert, d. h. die aus dem Zinsanstieg resultierenden Verluste werden wegen des Fehlens des Konvexitätsparameters etwas überschätzt. Die Durationen der eingesetzten Portfoliobausteine können den

Produktfactsheets der Zürich Anlagestiftung entnommen werden.<sup>4</sup> Zum 31.12.2012 liegt die mittlere Duration je nach Anleihsensegment jeweils zwischen vier und sieben Jahren.

Portfoliobaustein	Duration
Obligationen Schweiz	6,89
Obligationen CHF Ausland	4,46
Obligationen Credit 100	4,23
Obligationen EUR	6,41

Tabelle 6.6: Durchschnittliche Durationen innerhalb der eingesetzten Portfoliobausteine im Rentensegment

Index	ØVerlust	$\sigma$ (Basis)	$\sigma$ (Stress)	F-Test (P-Wert)
NDDUSZ Index	-20,38%	21,26%	14,09%	0,00%
NDDUE15 Index	-33,70%	26,76%	14,48%	0,00%
NDDUUS Index	-27,14%	24,09%	13,37%	0,00%
NDDUJN Index	-21,94%	27,60%	17,43%	0,00%
NDUEEGF Index	-35,49%	32,78%	17,15%	0,00%
W1SGITRD Index	-30,20%	24,28%	12,89%	0,00%
SZGATR Index	-10,23%	4,37%	0,54%	0,00%
JGAGGUSD Index	-5,50%	11,10%	0,43%	0,00%
QW5A Index	-28,20%	3,55%	1,38%	0,00%
QW7A Index	-30,07%	3,86%	1,36%	0,00%
EECIEECI Index	-22,34%	10,12%	5,80%	0,00%
SIMA SW Equity	-1,88%	9,65%	9,27%	20,54%
DEKAIMM GR Equity	-17,42%	5,12%	2,61%	0,00%
DESPAEU GR Equity	-17,37%	5,12%	2,51%	0,00%
LPX50TR Index	-36,56%	31,84%	16,52%	0,00%
MCGIGIDT Index	-26,44%	19,10%	11,10%	0,00%
ALTERAQI Index	-3,97%	5,92%	4,96%	0,00%
RICIGLTR Index	-22,56%	22,82%	15,98%	0,00%
SRCATTRR Index	-5,01%	15,96%	13,15%	0,00%
QX2M Index	-29,76%	3,27%	1,36%	0,00%
DBDCHFON Index	0,00%	0,10%	0,10%	20,91%

Tabelle 6.7: Durchschnittliche Auswirkungen des untersuchten Währungs- und Zinsszenarios auf die verschiedenen Anlageklassen

<sup>4</sup>vgl. <http://www.zurich.ch/SITE/DE/COM/AS/GRP/>

Im Hinblick auf die Ergebnisse kann festgestellt werden, dass neben den Aktien vor allem auch die euronotierten Anleihen erwartungsgemäß Verluste von bis zu 30% zu verzeichnen haben, die sowohl auf den simulierten Anstieg der Zinssätze als auch den Wertverlust des Euro in Relation zum Schweizer Franken zurückzuführen sind (vgl. Tabelle 6.7). Als relativ robust erweisen sich dagegen Schweizer Immobilien, Festgeld, Hedge Fonds sowie internationale Anleihen einschließlich Cat Bonds. Bezüglich der Standardabweichungen der simulierten Jahresrenditen fällt auf, dass diese innerhalb des Stressszenarios deutlich geringer ausfallen als innerhalb der Simulation ohne Stressereignis. Dies gilt ausschließlich für die Standardabweichung der simulierten Einjahresrenditen. Wird die Volatilität auf Basis simulierter Tagesrenditen berechnet, liegt diese innerhalb der simulierten Stichprobe mit Stressereignis deutlich höher. Die Begründung für die geringeren Schwankungen der simulierten Einjahreshistorien innerhalb des Stressszenarios liegt in der erzwungenen Konvergenz der erklärenden Variablen gegen die weiter oben festgelegten Zielwerte.

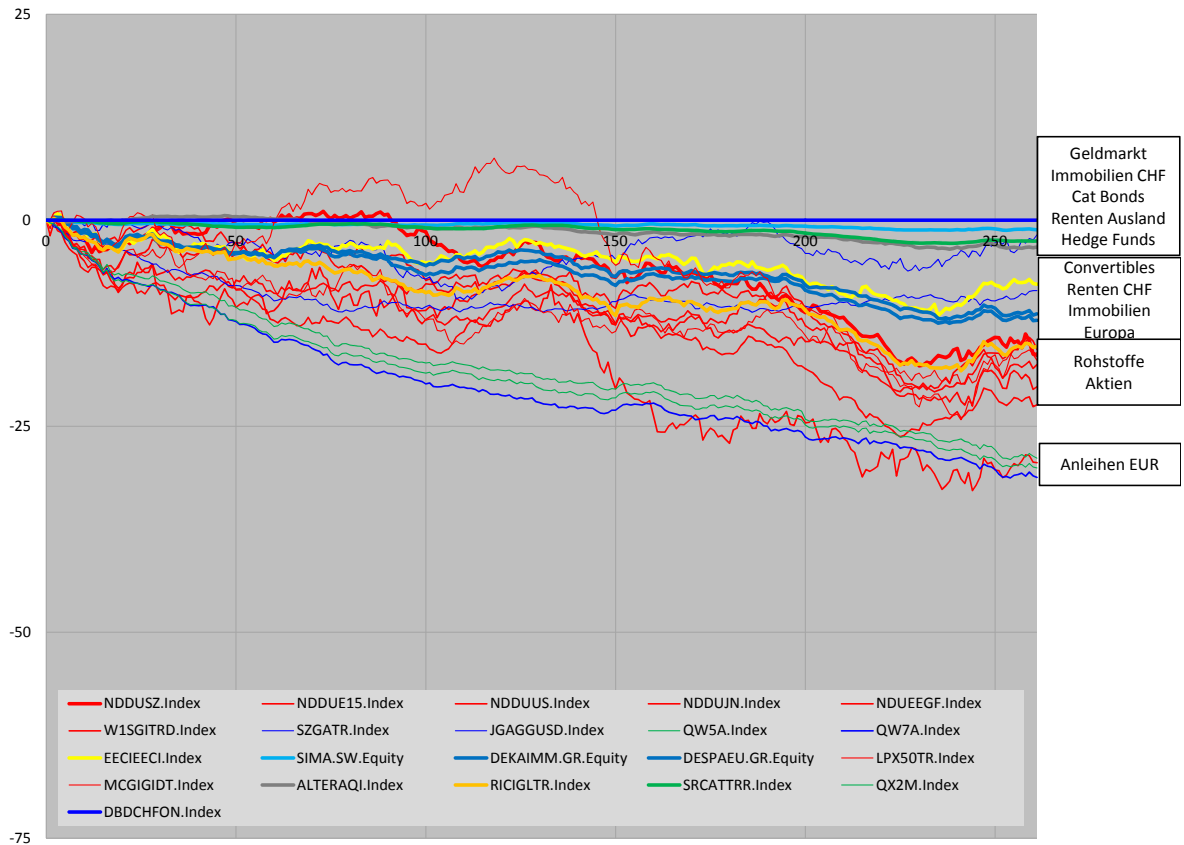


Abbildung 6.5: Simulation der Auswirkung einer Wertsteigerung des Schweizer Franken in Relation zum Euro für verschiedene Anlageklassen

### 6.3.3 Ergebnisse auf Portfolioebene

Im letzten Abschnitt der vorliegenden Studie werden die Auswirkungen der beiden modellierten Ereignisse auf Portfolioebene betrachtet und entsprechend des Ansatzes von [Berkowitz, 2000] in ein quantitatives Risikomaß eingebettet. Entsprechend der Allokation des in Tabelle 2.2 dargestellten Portfolios der Vita Pensionskasse ergeben sich bei Eintritt der zuvor berechneten Stressereignisse die in Tabelle 6.8 dargestellten Verluste. Dass die Volatilität innerhalb des zweiten Szenarios geringer ausfällt als bei Ausbleiben eines Stressereignisses, liegt wie bereits erwähnt an der Art der Berechnung, d. h. als Standardabweichung der simulierten Jahresrenditen, sowie der erzwungenen Konvergenz der erklärenden Stressvariablen.

	Ohne Stressereignis	Szenario 1	Szenario 2
<b>Simulierte <math>\bar{\sigma}</math>Wertentwicklung</b>	6,06%	-3,08%	-11,98%
<b>Volatilität</b>	5,67%	12,04%	3,95%

Tabelle 6.8: Volatilität und mittlere Wertentwicklung auf Portfolioebene

Während im Rahmen des reinen Aktienmarktszenarios wegen der nicht sehr hohen Aktienquote im Mittel lediglich überschaubare Verluste von etwa 3% absolut oder 9% in Relation zur durchschnittlichen simulierten Wertentwicklung ohne Stressereignis auftreten, beträgt die geschätzte Verlusterwartung innerhalb des zweiten Szenarios bereits 12%, d. h. rund 18% unterhalb des Basisszenarios. Die Ursache für die höhere Empfindlichkeit des Portfolios gegenüber dem zweiten Szenario liegt natürlich darin begründet, dass quasi alle Anlageklassen außer CHF notierten Geldmarkt- und Immobilieninvestitionen gegenüber den untersuchten Zinsrisiken und Währungsrisiken exponiert sind.

Um die Auswirkungen der modellierten Stressereignisse auf ein quantitatives Risikomaß zu simulieren, müssen beide Szenarien mit Wahrscheinlichkeiten unterlegt werden. Innerhalb der vorliegenden Arbeit werden die resultierenden Auswirkungen jeweils für Eintrittswahrscheinlichkeiten von 1%, 2,5% und 5% je Ereignis untersucht. Die beiden Risikomaße Value at Risk (VaR) und Conditional Value at Risk (CVaR) aus Kapitel 5 werden dabei jeweils für ein Zeitintervall von einem Jahr und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% berechnet.

	Ohne Stressereignis	$p = 1\%$	$p = 2,5\%$	$p = 5\%$
<b>VaR(95%,1J)</b>	-2,12%	-3,91%	-5,95%	-11,23%
<b>CVaR(95%,1J)</b>	-5,03%	-8,59%	-11,20%	-14,48%

Tabelle 6.9: Veränderung des Portfoliorisikos bei Einbeziehung von Stressereignissen

## 6.4 Validierung des verwendeten Modells

### 6.4.1 Methoden und Tests

Im Rahmen der Validierung des vorgeschlagenen Modells wird analog zu [Kuester et al., 2006] der Value at Risk für den jeweils gerade betrachteten Tag rollierend auf Basis der letzten 1.000 Handelstage simuliert, d. h. ein rollierendes Intervall mit einer Länge von 1.000 Tagen, welches stets am Handelstag vor dem Datum des simulierten VaR endet, wird jeweils für die Parameterschätzung zu Grunde gelegt. Bei einer Stichprobenlänge von insgesamt 2.609 Tagesrenditen und einem rollierenden Zeitintervall von 1.000 Handelstagen kann somit für die letzten 1.609 Kurstage jeweils die out-of-sample VaR-Prognose mit der tatsächlich eingetretenen Tagesrendite verglichen werden. Auf diese Weise lässt sich die Prognosegüte des Modells auf Basis verschiedener *out-of-sample* Tests bewerten, wobei einerseits untersucht wird, ob Überschreitungen der durch den VaR vorgegebenen Schranke durch die tatsächlichen Tagesverluste des Referenzportfolios einerseits signifikant häufiger auftreten als die gewählte Sicherheitswahrscheinlichkeit vorgibt, und andererseits festgestellt werden kann, inwieweit zwischen den einzelnen Überschreitungen des VaR zeitliche Abhängigkeiten vorliegen. Die verschiedenen Teststatistiken, die dabei zum Einsatz können, werden im Folgenden kurz erläutert. Nach [Christoffersen, 1998] sollte für die VaR-Überschreitungen  $H_t = I(r_t < -VaR_{\gamma,t})$  idealerweise

$$\begin{aligned} E(H_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= (1 - \gamma) \text{ bzw. genauer} \\ H_t | \mathcal{F}_{t-1} &\sim Ber(1 - \gamma) \end{aligned} \tag{6.1}$$

gelten, wobei  $Ber(1 - \gamma)$  die Bernoulli-Verteilung bezeichnet, d. h. die erwartete Häufigkeit einer VaR-Überschreitung sollte unabhängig von allen Ereignissen der Vergangenheit  $\mathcal{F}_{t-1}$  allein durch die gewählte Sicherheitswahrscheinlichkeit  $\gamma$

bestimmt sein. Im ersten Schritt wird lediglich getestet, ob die Häufigkeiten der VaR-Überschreitungen signifikant vom Komplement der Sicherheitswahrscheinlichkeit  $(1 - \gamma)$  abweichen, wobei zeitliche Abhängigkeiten noch keine Rolle spielen.

#### 6.4.1.1 Basel-Verfahren zum Backtest von Value at Risk Modellen

Das Basel-Komitee schlägt zur Überprüfung von Value at Risk Modellen einen Prozess vor, der die resultierenden VaR-Überschreitungen mit festgelegten Grenzwerten vergleicht, die auf Basis einer Binomialverteilung ermittelt werden, und die Häufigkeit der Überschreitungen schließlich in drei Klassen der Form „grün - akzeptabel“, „gelb - fragwürdig“ und „rot - fehlerhaft“ einordnet (vgl. [Basel, 1996]). Dementsprechend wird ein Modell als angemessen angesehen, wenn die Anzahl der VaR-Überschreitungen im Backtest das 95% Quantil einer Binomialverteilung mit  $p = 1 - \gamma$  nicht überschreitet. Wird das 95% Quantil überschritten, jedoch nicht das 99,99% Quantil, wird das Value at Risk Modell als fragwürdig angesehen. Wird auch das letztere Quantil überschritten, ist das Modell als fehlerhaft anzusehen. Für die Stichprobenlänge des Backtests von 1.609 Kurstagen resultieren im vorliegenden Fall somit die folgenden Grenzwerte:

VaR-Kennzahl	Obergrenze „grün“	Obergrenze „gelb“
VaR(95%,1d)	94	114
VaR(97,5%,1d)	50	64
VaR(99%,1d)	22	32

Tabelle 6.10: Obergrenzen für die Anzahl der VaR-Überschreitungen im Backtest

#### 6.4.1.2 Likelihood Ratio Test für die Häufigkeit von VaR-Überschreitungen

Ohne die Berücksichtigung zeitlicher Abhängigkeiten sollte die relative Häufigkeit von VaR-Überschreitungen bzw. deren Erwartungswert unter der Nullhypothese mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \gamma$  übereinstimmen.

$$H_0 : \mathbb{E}(H_t) = (1 - \gamma) \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mathbb{E}(H_t) \neq (1 - \gamma)$$

Bei Gültigkeit der Nullhypothese führt Gleichung 6.1 zu der folgenden Teststatistik:

$$LR_{uc} = 2 [\mathcal{L}(1 - \hat{\gamma}; H_1, \dots, H_T) - \mathcal{L}(1 - \gamma; H_1, \dots, H_T)] \stackrel{\text{asy}}{\approx} \chi_1^2$$

$\mathcal{L}()$  bezeichnet dabei die Log-Likelihood-Funktion der Binomialverteilung, und  $1 - \hat{\gamma}$  entspricht der relativen Häufigkeit der beobachteten VaR-Überschreitungen beim Vergleich der out-of-sample VaR-Prognose mit den tatsächlich eingetretenen Tagesrenditen.

#### 6.4.1.3 Likelihood Ratio Test für die zeitliche Unabhängigkeit der VaR-Überschreitungen

Die zeitliche Abhängigkeit der VaR-Überschreitungen wird in [Christoffersen, 1998] in Gestalt einer Markov-Kette erster Ordnung mit folgender Übergangsmatrix untersucht

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \pi_{ij} = P(H_t = j | H_{t-1} = i)$$

wobei die gemeinsame Likelihoodfunktion in Abhängigkeit der ersten Beobachtung näherungsweise

$$L(\Pi; H_2, H_3, \dots, H_T | H_1) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}$$

$$\text{mit } n_{ij} = \sum_{t=2}^T I(H_t = j | H_{t-1} = i)$$

entspricht. Die Maximum-Likelihood-Schätzer der Übergangswahrscheinlichkeiten sind dementsprechend:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

Falls die Nullhypothese der seriellen Unabhängigkeit erfüllt ist, gilt  $\pi_{01} = \pi_{11} \equiv \pi_0$  und die gemeinsame Likelihoodfunktion reduziert sich zu

$$L(\pi_0; H_2, \dots, H_T | H_1) = (1 - \pi_0)^{n_{00} + n_{10}} \pi_0^{n_{01} + n_{11}}$$



wobei die Maximum-Likelihood-Schätzung  $\hat{\pi}_0$  wiederum der relativen Häufigkeit der VaR-Überschreitungen

$$\hat{\pi}_0 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

entspricht.

Der Likelihood-Ratio Test auf serielle Unabhängigkeit besitzt dementsprechend die folgende Gestalt:

$$LR_{ind} = 2 \left[ \mathcal{L}(\hat{\Pi}; H_2, \dots, H_T | H_1) - \mathcal{L}(\hat{\pi}_0; H_2, \dots, H_T | H_1) \right] \stackrel{\text{asy}}{\sim} \chi_1^2$$

#### 6.4.1.4 Likelihood Ratio Test für die Häufigkeit und zeitliche Unabhängigkeit von VaR-Überschreitungen

Da  $\hat{\pi}_0$  die festgelegte Sicherheitswahrscheinlichkeit  $\gamma$  nicht berücksichtigt, gibt der obenstehende Test keinen Aufschluss darüber, ob die Häufigkeit der VaR-Überschreitungen korrekt ist. Vor diesem Hintergrund schlägt [Christoffersen, 1998] zur direkten Überprüfung von Gleichung 6.1 die folgende Teststatistik vor:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} = 2 \left[ \mathcal{L}(\hat{\Pi}; H_2, \dots, H_T | H_1) - \mathcal{L}(1 - \gamma; H_2, \dots, H_T | H_1) \right] \stackrel{\text{asy}}{\sim} \chi_2^2$$

#### 6.4.1.5 Dynamischer Quantilstest

Tatsächlich geht die in Gleichung 6.1 postulierte Anforderung über die korrekte Häufigkeit und zeitliche Unabhängigkeit der VaR-Überschreitungen hinaus - genau genommen soll das Eintreten einer VaR-Überschreitung zum Zeitpunkt  $t$  nicht nur von einer eventuellen VaR-Überschreitung in  $t - 1$ , sondern auch von allen anderen in  $\mathcal{F}_{t-1}$  enthaltenen Daten unabhängig sein. Dementsprechend weisen [Engle / Manganelli, 2004] darauf hin, dass vor allem ein Zusammenhang zwischen dem aktuellen geschätzten VaR-Wert und der aktuellen Wahrscheinlichkeit einer VaR-Überschreitung von besonderem Interesse wäre. Um diesen Aspekt zu verdeutlichen, sei  $VaR_{\gamma,t}$  eine Reihe von unabhängig und identisch voneinander verteilter Zufallsvariablen mit:

$$VaR_{\gamma,t} = \begin{cases} K & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \gamma \\ -K & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \gamma \end{cases}$$

Falls  $K$  sehr groß ist, weist die resultierende Sequenz der VaR-Überschreitungen zwar serielle Unabhängigkeit und auch die korrekte Häufigkeit der VaR-Überschreitungen auf, die Wahrscheinlichkeit einer VaR-Überschreitung liegt jedoch abhängig von  $VaR_{\gamma,t}$  entweder sehr nah bei 0 oder bei 1, wobei keiner der obenstehenden Tests im Hinblick auf diese Problematik trennscharf ist. Um die zu Beginn dieses Abschnitts postulierte Anforderung 6.1 zu operationalisieren, kann ähnlich zu [Christoffersen, 1998] und [Engle / Manganelli, 2004] auf ein Regressionsmodell, bei dem  $H_t$  in Abhängigkeit einer sorgfältig zusammengestellten Variablenauswahl aus  $\mathcal{F}_{t-1}$  modelliert wird, wie z. B.

$$H_t = (1 - \gamma_0) + \sum_{i=1}^p \beta_i H_{t-i} + \beta_{p+1} \widehat{VaR}_{\gamma,t} + \varepsilon_t$$

zurückgegriffen werden. Bei Gültigkeit der Nullhypothese müssen dementsprechend  $\gamma_0 = \gamma$  und  $\beta_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, p + 1$  gelten. In Vektordarstellung lässt sich das Regressionsmodell in der untenstehenden Form

$$H - (1 - \gamma)\mathbf{1} = X\beta + \vec{\varepsilon}, \quad \varepsilon_t \stackrel{H_0}{=} \begin{cases} -(1 - \gamma) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \gamma \\ \gamma & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \gamma \end{cases}$$

mit  $\beta_0 = \gamma - \gamma_0$  darstellen. Falls die Anforderung 6.1 gültig ist, sollten die unabhängigen Variablen des Modells keinen signifikanten Einfluss auf die abhängige Variable ausüben, d. h.  $H_0 : \beta = 0$ . Der KQ-Schätzer für  $\beta$  ist asymptotisch normalverteilt und besitzt die folgende Gestalt:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(H - (1 - \gamma)\mathbf{1}) \stackrel{\text{asy}}{\approx} N(0, (X'X)^{-1}\gamma(1 - \gamma))$$

Auf dieser Basis lässt sich nach [Engle / Manganelli, 2004] der Dynamische Quantilstest

$$DQ = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{\gamma(1 - \gamma)} \stackrel{\text{asy}}{\approx} \chi_{p+2}^2$$

herleiten. Bei der innerhalb des folgenden Abschnitts vorgenommenen Validierung des Modells werden jeweils zwei Varianten des Dynamischen Quantilstests angegeben - Im ersten Fall ( $DQ_{Hit}$ ) enthält die Matrix der abhängigen Variablen lediglich eine Konstante und die vier letzten Ausprägungen von  $H_t$ , d. h.  $H_{t-1}, \dots, H_{t-4}$ , während

im zweiten Fall ( $DQ_{VaR}$ ) zusätzlich der aktuelle Value at Risk Berücksichtigung findet.

### 6.4.2 Ergebnisse

Im folgenden werden die Ergebnisse wiedergegeben, die das vorgeschlagene Modell im Hinblick auf die oben dargestellten Teststatistiken erzielt, wobei analog zu [Kuester et al., 2006] der Value at Risk jeweils zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten in Höhe von 95%, 97,5% und 99% betrachtet wird.

VaR-Kennzahl	% Überschreit.	$LR_{uc}$	$LR_{ind}$	$LR_{cc}$	$DQ_{Hit}$	$DQ_{VaR}$
<b>VaR(95%,1d)</b>	5,41%	0,919	0,119	0,258	0,010	0,018
<b>VaR(97,5%,1d)</b>	2,98%	0,456	0,471	0,478	0,007	0,008
<b>VaR(99%,1d)</b>	1,37%	0,322	0,611	0,443	0,000	0,000

Tabelle 6.11: VaR-Prognosequalität des Stresstestmodells - p-Wert je Teststatistik

Im Hinblick auf die Testergebnisse kann das Modell auf Portfolioebene ähnlich gute Ergebnisse erzielen wie diejenigen Modelle, die in [Kuester et al., 2006] bei der auf Basis des NASDAQ durchgeführten univariaten Value at Risk Simulation vielversprechend erscheinen, wobei die Ergebnisse wegen der verschiedenen Betrachtungszeiträume und Indexzeitreihen nur eingeschränkt vergleichbar sind. Das bedeutet, dass das Modell Value at Risk Prognosen generiert, die zwar lediglich mit plausibler Häufigkeit überschritten werden und deren Überschreitungen auch im Sinne einer Markov-Kette erster Ordnung unabhängig sind, wobei die VaR-Überschreitungen jedoch bei Einbeziehung weiterer Lags in Form eines Regressionsmodells gewisse zeitliche Häufungen erkennen lassen.

Bei Betrachtung der einzelnen Anlageklassen treten VaR-Überschreitungen innerhalb des Aktienblocks vorwiegend in plausiblen Umfang auf, mit Ausnahme des auf Basis von Nachhaltigkeitskriterien zusammengestellten DJ Sustainability World Index, des MSCI Switzerland Index und des MSCI Europe Index. Beim MSCI Europe Index treten bei der mittleren Sicherheitswahrscheinlichkeit von 97,5% sogar ausreichend viele Überschreitungen auf, um die Simulation entsprechend der Basel-Klassifizierung als ungenügend („rot“) zu bezeichnen, was angesichts der sehr guten Ergebnisse bei den anderen Aktienindizes bemerkenswert ist. Bei Wandelanleihen,

Index	VaR(95%,1d)	VaR(97,5%,1d)	VaR(99%,1d)
NDDUSZ Index	79	51	23
NDDUE15 Index	107	66	23
NDDUUS Index	95	46	22
NDDUJN Index	54	22	10
NDUEEGF Index	60	31	13
W1SGITRD Index	102	52	20
SZGATR Index	88	46	16
JGAGGUSD Index	84	46	17
QW5A Index	83	46	23
QW7A Index	84	47	19
EECIEECI Index	102	56	20
SIMA SW Equity	78	47	22
DEKAIMM GR Equity	94	54	26
DESPAEU GR Equity	93	54	28
LPX50TR Index	90	51	30
MCGIGIDT Index	83	48	25
ALTERAQI Index	80	44	21
RICIGLTR Index	81	48	20
SRCATTRR Index	62	42	27
QX2M Index	82	43	17
DBDCHFON Index	10	2	1

Tabelle 6.12: Häufigkeit der VaR-Überschreitungen je Anlageklasse und Einordnung nach der Basel-Klassifizierung

Immobilien, Private Equity und Cat Bonds treten VaR-Überschreitungen vor allem bei den höheren Sicherheitswahrscheinlichkeiten von 97,5% und 99% mit auffälliger Häufigkeit auf, jedoch nur so häufig, dass die Simulation entsprechend der Basel-Klassifizierung in der „gelben“ Zone verortet werden muss.

## 7 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein hybrider Stresstest konstruiert, der die Modellierung der Abhängigkeiten zwischen Risikofaktoren und Wertpapieren mit Hilfe historischer Daten ermöglicht und auf dieser Basis die Auswirkungen zukünftiger Stressszenarien abschätzt. Dabei wurde besonderer Wert auf die angemessene Einbeziehung spezifischer Eigenschaften der Zeitreihen von Risikofaktoren und Wertpapierrenditen gelegt. Diese sind bei einem Stresstest von großer Bedeutung, da die modellierten Stressszenarien in der Regel dem unteren Verteilungsende zuzuordnen sind, wo sich die nichtnormalverteilten Eigenschaften von Finanzmarktdaten am empfindlichsten auswirken. Die folgenden Eigenschaften sind charakteristisch für Finanzmarktdaten:

- Kurtosis - Risikofaktoren sind häufig leptokurtisch verteilt.
- Verteilungsschiefe - Wertpapierrenditen sind häufig linkssteil verteilt, da die maximale Verlusthöhe durch einen Totalverlust beschränkt ist, während Gewinne theoretisch in unbegrenzter Höhe auftreten können.
- Heteroskedastizität bzw. Volatility Cluster, die zumindest teilweise als Ursache für die im ersten Punkt genannten Fat Tails zu nennen sind.
- Die stochastische Abhängigkeit zwischen verschiedenen Risikofaktoren oder Wertpapierrenditen ist zeitlich nicht konstant.
- Die stochastische Abhängigkeit zwischen verschiedenen Risikofaktoren oder Wertpapierrenditen ist nicht linear bzw. kann am unteren Verteilungsende zunehmen.

Die ersten drei Anforderungen wurden innerhalb des dargestellten Anwendungsbeispiels durch die Annahme eines relativ flexiblen Verteilungstyps mit Schiefe- und Wölbungsparameter in Gestalt der schiefen GED in Verbindung mit einem

*GARCH*-Modell gelöst, das die Modellierung zeitdynamischer Varianzen erlaubt. Die beiden letzten Anforderungen, die sich bei Betrachtung multivariater Daten ergeben, wurden durch die Verwendung eines *DCC*-Modells gelöst, dessen zeitabhängige Korrelationsmatrizen in eine schiefe *t*-Copula eingebettet wurden, welche die Modellierung unterschiedlich starker Abhängigkeiten am unteren und oberen Verteilungsende erlaubt. Weiterhin ist für die Untersuchung von Wertpapierportfolios die Anwendbarkeit des Modells auf eine große Variablenanzahl erforderlich.

Hier kann dementsprechend je nach Notwendigkeit durch die Betrachtung einer kleineren Auswahl erklärender Risikofaktoren - im dargestellten Fallbeispiel wurde auf die Hauptkomponentenanalyse zurückgegriffen - Abhilfe geschaffen werden. Eine besondere Anforderung, die sich durch die Simulation von Stressereignissen ergibt, besteht in der Notwendigkeit, bedingte Simulationen für alle verbleibenden Variablen durchzuführen, wenn einer oder mehrere Risikofaktoren festgehalten bzw. im Rahmen eines untersuchten Stressszenarios fixiert werden. Diese Möglichkeit ist innerhalb der schiefen *t*-Copula gegeben, wenn innerhalb der Simulation auf deren stochastische Darstellung, die sich aus einer inversen Gammaverteilung und einer multivariaten Normalverteilung zusammensetzt, zurückgegriffen wird.

Insgesamt gelingt es mit dem Abhängigkeitsmodell, welches im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet wurde, in Ergänzung zu dem linearen Einfluss einer Stressvariable auf eine Auswahl von Risikofaktoren oder Wertpapieren, der im Wesentlichen über ein Vektorautoregressionsmodell abgebildet wird, auch die eventuell gegebenen und nichtlinearen Abhängigkeiten zwischen den Residuen über die bedingte Simulation einer Copula zu berücksichtigen. Auch innerhalb einer zur Validierung durchgeführten Simulationsstudie erzielt das vorgeschlagene Modell auf Portfolioebene dahingehend gute Ergebnisse, dass Überschreitungen der out-of-sample VaR-Prognose einerseits nicht mit auffälliger Häufigkeit und andererseits nicht mit sequentieller Abhängigkeit im Sinne einer Markov-Kette erster Ordnung auftreten. Lediglich bei Hinzunahme weiterer Lags in Form eines Regressionsmodells kann beobachtet werden, dass die Wahrscheinlichkeit einer VaR-Überschreitung ansteigt, falls vor kurzem, d. h. innerhalb der letzten vier vergangenen Realisationen, bereits eine VaR-Überschreitung stattgefunden hat.

Potential für zukünftige Verbesserungen des Modells kann einerseits im Hinblick auf die Parameterschätzung der Copula und andererseits in Bezug auf die Auswahl einer Randverteilung für die Residuen festgestellt werden. Für die Schätzung der Copula Parameter wäre ein Prozess wünschenswert, der ausschließlich auf den zwischen 0 und 1 stetig gleichverteilten Wahrscheinlichkeitswerten der zu Grunde liegenden Daten aufbaut. Bezüglich der Randverteilung der Residuen könnte beispielsweise auf die Extremwertverteilungen, die in der out-of-sample Studie von [Kuester et al., 2006] recht gute Ergebnisse erzielen oder auf die sehr flexible Klasse der Alpha-stabilen Verteilungen zurückgegriffen werden (vgl. z. B. [Sun et al., 2008]), die im Vergleich zur GED auch in ihrer leptokurtischen Form glockenförmig bleibt und darüber hinaus einen Schiefeparameter besitzt, welcher bei der GED durch die unterschiedliche Streckung der linken und rechten Verteilungshälfte nachträglich hinzugefügt werden muss.

Darüber hinaus wäre die Möglichkeit wünschenswert, verschiedene Klassen stochastischer Prozesse für die Modellierung verschiedener Anlageklassen zu verwenden. Dementsprechend könnte für den Erwartungswert-Prozess einer Anlageklasse aus dem Anleiensegment beispielsweise auch eines der in Abschnitt 4.4.2 vorgestellten Modelle für Anleihenrenditen verwendet werden. Auch die Verwendung verschiedener Prozesse für die Varianz je Anlageklasse ist möglich, da die Modellierung der gemeinsamen Verteilung erst in einem späteren Schritt durch die Anpassung einer gemeinsamen Korrelationsmatrix (DCC-Modell) sowie einer schiefen t-Copula vorgenommen wird.





## Literaturverzeichnis

- [Ahn / Reinsel, 1988] Ahn, Sung K. / Reinsel, Gregory C.: *Nested Reduced-Rank Autoregressive Models for Multiple Time Series*, Journal of the American Statistical Association, 1988, Vol. 83, No. 403, S. 849 – 856.
- [Ahn / Reinsel, 1990] Ahn, Sung K. / Reinsel, Gregory C.: *Estimation for Partially Nonstationary Multivariate Autoregressive Models*, Journal of the American Statistical Association, 1990, Vol. 85, No. 411, S. 813 – 823.
- [Alexander, 2002] Alexander, Carol: *Principal Component Models for Generating Large GARCH Covariance Matrices*, Economic Notes, 2002, Vol. 31, No. 2, S. 337 – 359.
- [Artzner et al., 1997] Artzner, Philippe / Delbaen, Freddy / Eber, Jean-Marc / Heath, David: *Thinking Coherently*, RISK, 1997, Vol. 10, No. 11, S. 68 – 71.
- [Artzner et al., 1999] Artzner, Philippe / Delbaen, Freddy / Eber, Jean-Marc / Heath, David: *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, 1999, Vol. 9, No. 3, S. 203 – 228.
- [Azzalini / Capitano, 2003] Azzalini, Adelchi / Capitano, Antonella: *Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$ -distribution*, Journal of the Royal Statistical Society B, 2003, Vol. 65, No. 2, S. 367 – 389.
- [BaFin, 2004] BaFin: *Rundschreiben 1/2004 (VA)*, Rundschreiben, Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2004.
- [Bai / Ng, 2002] Bai, Jushan / Ng, Serena: *Determining the Number of Factors in Approximate Factor Models*, Econometrica, 2002, Vol. 70, No. 1, S. 191 – 221.

- [Basel, 1996] Basel: *Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*, Technischer Bericht, Basel Committee on Banking Supervision, 1996.
- [Basel-II, 2006] Basel-II: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Comprehensive version, Basel Committee on Banking Supervision, 2006.
- [Basel-III, 2011] Basel-III: *A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Revised version, Basel Committee on Banking Supervision, 2011.
- [Berkowitz, 2000] Berkowitz, Jeremy: *A coherent framework for stress-testing*, Journal of Risk, 2000, Vol. 2, No. 2, S. 1 – 11.
- [Black / Scholes, 1973] Black, Fischer S. / Scholes, Myron S.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, 1973, Vol. 81, No. 3, S. 637 – 654.
- [Bollerslev, 1986] Bollerslev, Tim: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 1986, Vol. 31, S. 307 – 327.
- [Bollerslev, 1990] Bollerslev, Tim: *Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model*, The Review of Economics and Statistics, 1990, Vol. 72, No. 3, S. 498 – 505.
- [Bollerslev et al., 1988] Bollerslev, Tim / Engle, Robert F. / Woolridge, Jeffrey M.: *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances*, The Journal of Political Economy, 1988, Vol. 96, No. 1, S. 116 – 131.
- [Brace et al., 1997] Brace, Alan / Gatarek, Dariusz / Musiela, Marek: *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Mathematical Finance, 1997, Vol. 7, No. 2, S. 127 – 147.
- [Breitung et al., 2004] Breitung, Jörg / Brüggemann, Ralf / Lütkepohl, Helmut: *Structural Vector Autoregressive Modeling and Impulse Responses*, Lütkepohl, Helmut / Kräitzig, Markus (Herausgeber), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, S. 159 – 196.

- [Brillinger, 1981] Brillinger, David R.: *Time Series: Data Analysis and Theory - Expanded Edition*, Holden-Day, Boston, 1981.
- [Burns / Mitchell, 1946] Burns, Arthur F. / Mitchell, Wesley C.: *Measuring Business Cycles*, Working paper, National Bureau of Economic Research, New York, 1946.
- [CGFS, 2005] CGFS: *Stress testing at major financial institutions: survey results and practice*, Report, Committee on the Global Financial System, 2005.
- [Christoffersen, 1998] Christoffersen, Peter F.: *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, 1998, Vol. 39, No. 4, S. 841 – 862.
- [Compte / Lieberman, 2003] Compte, Fabienne / Lieberman, Offer: *Asymptotic Theory for multivariate GARCH Processes*, Journal of Multivariate Analysis, 2003, Vol. 84, No. 1, S. 61 – 84.
- [Cox et al., 1985] Cox, John C. / Ingersoll, Jonathan E. / Ross, Stephen A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, 1985, Vol. 53, No. 2, S. 385 – 407.
- [Demarta / McNeil, 2005] Demarta, Stefano / McNeil, Alexander J.: *The t Copula and Related Copulas*, International Statistical Review, 2005, Vol. 73, No. 1, S. 111 – 129.
- [Ding et al., 1993] Ding, Zhuanxin / Granger, Clive W. J. / Enge, Robert F.: *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance, 1993, Vol. 1, S. 83 – 106.
- [Duesenberry, 1965] Duesenberry, James S.: *The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States*, Rand McNally, Chicago, 1965.
- [Embrechts et al., 2003] Embrechts, Paul / Lindskog, Filip / McNeil, Alexander J.: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Rachev, Svetlozar T. (Herausgeber), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier, North-Holland, 2003, S. 329 – 384.
- [Embrechts et al., 1999] Embrechts, Paul / McNeil, Alexander / Straumann, Daniel: *Correlation: Pitfalls and alternatives*, RISK, 1999, Vol. Mai, S. 69 – 71.

- [Engle, 1982] Engle, Robert F.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, *Econometrica*, 1982, Vol. 50, No. 4, S. 987 – 1008.
- [Engle, 2002] Engle, Robert F.: *Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 2002, Vol. 20, No. 3, S. 339 – 350.
- [Engle / Granger, 1987] Engle, Robert F. / Granger, Clive W. J.: *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing*, *Econometrica*, 1987, Vol. 55, No. 2, S. 251 – 276.
- [Engle / Kroner, 1995] Engle, Robert F. / Kroner, Kenneth F.: *Multivariate Simultaneous Generalized Arch*, *Econometric Theory*, 1995, Vol. 11, No. 1, S. 122 – 150.
- [Engle / Manganelli, 2004] Engle, Robert F. / Manganelli, Simone: *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 2004, Vol. 22, No. 4, S. 367 – 381.
- [Engle / Mezrich, 1996] Engle, Robert F. / Mezrich, Joseph: *GARCH for Groups, Risk*, 1996, Vol. 9, No. 8, S. 36 – 40.
- [Fernandez / Steel, 1998] Fernandez, Carmen / Steel, Mark F. J.: *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, *Journal of the American Statistical Association*, 1998, Vol. 93, No. 441, S. 359 – 371.
- [Forni et al., 2000] Forni, Mario / Hallin, Marc / Lippi, Marco / Reichlin, Lucrezia: *The Generalized Dynamic Factor Model: Identification and Estimation*, *The Review of Economics and Statistics*, 2000, Vol. 82, No. 4, S. 540 – 554.
- [Forni et al., 2005] Forni, Mario / Hallin, Marc / Lippi, Marco / Reichlin, Lucrezia: *The Generalized Dynamic Factor Model: One-Sided Estimation and Forecasting*, *Journal of the American Statistical Association*, 2005, Vol. 100, No. 471, S. 830 – 840.
- [Forni / Lippi, 2001] Forni, Mario / Lippi, Marco: *The Generalized Dynamic Factor Model: Representation Theory*, *Econometric Theory*, 2001, Vol. 17, No. 6, S. 1113 – 1141.

- [Forni / Reichlin, 1998] Forni, Mario / Reichlin, Lucrezia: *Let's Get Real: A Factor Analytical Approach to Disaggregated Business Cycle Dynamics*, The Review of Economic Studies, 1998, Vol. 65, No. 3, S. 453 – 473.
- [Granger, 1981] Granger, Clive W.J.: *Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification*, Journal of Econometrics, 1981, Vol. 16, S. 121 – 130.
- [Granger / Weiss, 1983] Granger, Clive W.J. / Weiss, Andrew A.: *Time Series Analysis of Error-Correcting Models*, Karlin, Samuel / Amemiya, Takeshi / Goodman, Leo A. (Herausgeber), *Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics*, Academic Press, New York, 1983, S. 255 – 278.
- [Griliches, 1968] Griliches, Zvi: *The Brookings Model Volume: A Review Article*, The Review of Economics and Statistics, 1968, Vol. 50, No. 2, S. 215 – 234.
- [Hafner / Herwartz, 2008] Hafner, Christian M. / Herwartz, Helmut: *Analytical quasi maximum likelihood inference in multivariate volatility models*, Metrika, 2008, Vol. 67, No. 2, S. 219 – 239.
- [Hamilton, 1994] Hamilton, James D.: *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [Heath et al., 1990] Heath, David / Jarrow, Robert A. / Morton, Andrew: *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1990, Vol. 25, No. 4, S. 419 – 440.
- [Heath et al., 1991] Heath, David / Jarrow, Robert A. / Morton, Andrew: *Contingent Claims Valuation with a Random Evolution of Interest Rates*, The Review of Futures Markets, 1991, Vol. 9, No. 1, S. 54 – 76.
- [Heath et al., 1992] Heath, David / Jarrow, Robert A. / Morton, Andrew: *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*, Econometrica, 1992, Vol. 60, No. 1, S. 77 – 105.
- [Heston, 1993] Heston, Steven L.: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies, 1993, Vol. 6, No. 2, S. 327 – 343.

- [Ho / Lee, 1986] Ho, Thomas S. Y. / Lee, Sang-Bin: *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*, The Journal of Finance, 1986, Vol. 41, No. 5, S. 1011 – 1029.
- [Hu / Kercheval, 2008] Hu, Wenbo / Kercheval, Alec N.: *The Skewed  $t$  Distribution for Portfolio Credit Risk*, Advances in Econometrics, 2008, Vol. 22, S. 55 – 83.
- [Hull, 2006] Hull, John C.: *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [Hull / White, 1990] Hull, John C. / White, Alan: *Pricing interest-rate derivative securities*, The Review of Financial Studies, 1990, Vol. 3, No. 4, S. 573 – 592.
- [Johansen, 1988] Johansen, Soren: *Statistical Analysis of Cointegration Vectors*, Journal of Economic Dynamics and Control, 1988, Vol. 12, No. 2 – 3, S. 231 – 254.
- [Johansen, 1991] Johansen, Soren: *Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models*, Econometrica, 1991, Vol. 59, No. 6, S. 1551 – 1580.
- [Johansen, 1995] Johansen, Soren: *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [Jorion, 2011] Jorion, Philippe: *Financial Risk Manager Handbook - Sixth Edition*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.
- [Ku et al., 1995] Ku, Wenfu / Storer, Robert H. / Georgakis, Christos: *Disturbance detection and isolation by dynamic principal component analysis*, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1995, Vol. 30, S. 179 – 196.
- [Kuester et al., 2006] Kuester, Keith / Mittnik, Stefan / Paolella, Marc S.: *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, Journal of Financial Econometrics, 2006, Vol. 4, No. 1, S. 53 – 89.
- [Lütkepohl, 2004a] Lütkepohl, Helmut: *Univariate Time Series Analysis*, Lütkepohl, Helmut / Krätzig, Markus (Herausgeber), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004a, S. 8 – 85.

- [Lütkepohl, 2004b] Lütkepohl, Helmut: *Vector Autoregressive and Vector Error Correction Models*, Lütkepohl, Helmut / Krätzig, Markus (Herausgeber), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004b, S. 86 – 158.
- [Nadarajah, 2005] Nadarajah, Saralees: *A generalized normal distribution*, *Journal of Applied Statistics*, 2005, Vol. 32, No. 7, S. 685 – 694.
- [Patton, 2006] Patton, Andrew J.: *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence*, *International Economic Review*, 2006, Vol. 47, No. 2, S. 527 – 556.
- [Pearson, 1901] Pearson, Karl: *On lines and planes of closest fit to a system of points in space*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1901, Vol. 6, No. 2, S. 559 – 572.
- [Rachev / Mittnik, 2000] Rachev, Svetlozar / Mittnik, Stefan: *Stable Paretian Models in Finance*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [Sargent / Sims, 1977] Sargent, Thomas J. / Sims, Christopher A.: *Business Cycle Modeling without Pretending to Have Too Much a Priori Economic Theory*, Working Paper 55, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minneapolis, 1977.
- [Schroder, 1989] Schroder, Mark: *Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula*, *The Journal of Finance*, 1989, Vol. 44, No. 1, S. 211 – 219.
- [Schwert, 1990] Schwert, G. William: *Stock volatility and the crash of '87*, *Review of Financial Studies*, 1990, Vol. 3, No. 1, S. 77 – 102.
- [Sims, 1980] Sims, Christopher A.: *Macroeconomics and Reality*, *Econometrica*, 1980, Vol. 48, No. 1, S. 1 – 48.
- [Sklar, 1959] Sklar, Abe: *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1959, Vol. 8, S. 229 – 231.
- [S&P, 2011] S&P: *Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, Report, Standard & Poor's, 2011.

- [Specht / Gohout, 2003] Specht, Katja / Gohout, Wolfgang: *Portfolio Selection Using The Principal Components GARCH Model*, Financial Markets and Portfolio Management, 2003, Vol. 17, No. 4, S. 450 – 458.
- [Stock / Watson, 1998] Stock, James H. / Watson, Mark W.: *Diffusion Indexes*, NBER Working Paper 6702, National Bureau of Economic Research, 1998.
- [Stock / Watson, 2002] Stock, James H. / Watson, Mark W.: *Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes*, Journal of Business & Economic Statistics, 2002, Vol. 20, No. 2, S. 147 – 162.
- [Sun et al., 2008] Sun, Wei / Rachev, Svetlozar / Stoyanov, Stoyan V. / Fabozzi, Frank J.: *Multivariate Skewed Student's t Copula in the Analysis of Nonlinear and Asymmetric Dependence in the German Equity Market*, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 2008, Vol. 12, No. 2, Article 3.
- [Szegö, 2002] Szegö, Giorgio: *Measures of Risk*, Journal of Banking and Finance, 2002, Vol. 26, No. 7, S. 1253 – 1272.
- [Taylor, 1986] Taylor, Steven: *Modelling financial time series*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [Tsay, 2005] Tsay, Ruey S.: *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
- [Varanasi / Aazhang, 1989] Varanasi, Mahesh K. / Aazhang, Behnaam: *Parametric generalized Gaussian density estimation*, Journal of the Acoustical Society of America, 1989, Vol. 86, No. 4, S. 1404 – 1415.
- [Vasicek, 1977] Vasicek, Oldrich: *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, 1977, Vol. 5, No. 2, S. 177 – 188.
- [Velu et al., 1986] Velu, Raja P. / Reinsel, Gregory C. / Wichern, Dean W.: *Reduced Rank Models for Multiple Time Series*, Biometrika, 1986, Vol. 73, No. 1, S. 105 – 118.
- [Weiß, 2009] Weiß, Gregor N. F.: *Copula parameter estimation by Maximum-Likelihood and Minimum-Distance estimators - A simulation study*, Working



paper, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Finanzierung und Kreditwirtschaft, 2009.

[Zakoian, 1994] Zakoian, Jean-Michel: *Threshold heteroskedastic models*, Journal of Economic Dynamics and Control, 1994, Vol. 18, No. 5, S. 931 – 955.



# Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit:

## **Entwicklung eines hybriden Stresstests für Wertpapierportfolios**

selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt und keine anderen, als die von mir angegebenen Schriften und Hilfsmittel benutzt wurden. Die den benutzten Werken wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen sind kenntlich gemacht.

Die Dissertation hat in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Fakultät oder Fachkommission vorgelegen.

München, den 30.06.2016

Andreas Ritter