Ivo Volf

Bez grafů by bylo řešení úloh asi obtížnější. 1. část

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 4, 15–20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146216`

Bez grafů by bylo řešení úloh asi obtížnější 1. část

Ivo Volf, PedF UHK Hradec Králové

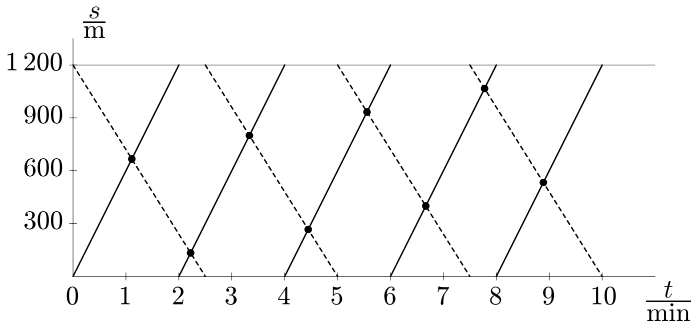
Při studiu fyzikálních problémů si řešitelé uvědomují, že je nutné nacházet stále nové přístupy, které ulehčují cestu, po které se dostáváme od zadání problému až k jeho vyřešení. Proto se stále více využívají prostředky výpočetní techniky – kalkulačky i osobní počítače. Přesto však jednu věc ulehčit nemůžeme, a to je myšlenkové zpracování zadané problematiky. Fyzikální úloha je zadána většinou textem nebo nákresem, na jehož základě je řešitel schopen porozumět obsahu zadaného problému, ale musí dále analyzovat podmínky, jež jsou vymezeny pro řešení, formulovat hypotézu o řešení, zdůvodnit ji a potom směřovat k vyřešení. Přitom mu nesmírně pomáhají matematické vztahy, kterými jsou formulovány fyzikální funkční závislosti. Funkční závislosti můžeme prezentovat slovně a to nám většinou slouží k jejich pochopení, nedají se však takto bezprostředně využít pro získání zejména číselných výsledků. Velice názorná je grafická představa, zejména při vyjádření jednoduché závislosti typu $y = f(x)$; konkrétně jde o závislosti dráhy, rychlosti či zrychlení na čase, dále velikosti síly na poloze, elektrického náboje při nabíjení kondenzátoru na napětí apod. Grafický záznam se tak stává výbornou pomůckou nejen k pochopení funkční závislosti, ale také pro získání číselných výsledků i k nalezení cesty, jíž je nutno se při řešení vydat. Uvedeme několik příkladů, v nichž bychom chtěli ukázat, že užitím grafu se proces řešení zjednodušuje.

Příklad 1. *Dva sportovci na bicyklech*
Dva sportovci na bicyklech si vymezili uzavřenou dráhu délky $s = 1200$ m, na které budou soutěžit. Karel dokáže tuto dráhu projet za dobu $t_K = 2{,}0$ min, Tereza za dobu $t_T = 2{,}5$ min. Budeme předpokládat, že po trase pojedou rovnoměrně. Nejprve vyrazí oba sportovci opačnými směry a my máme zjistit, za jak dlouho a ve kterém místě se oba sportovci setkají poprvé, podruhé, potřetí. Potom vyrazí stejným směrem a my máme zjistit, za jak dlouho a v kterém místě dohoní rychlejší sportovec pomalejšího poprvé, podruhé, potřetí.

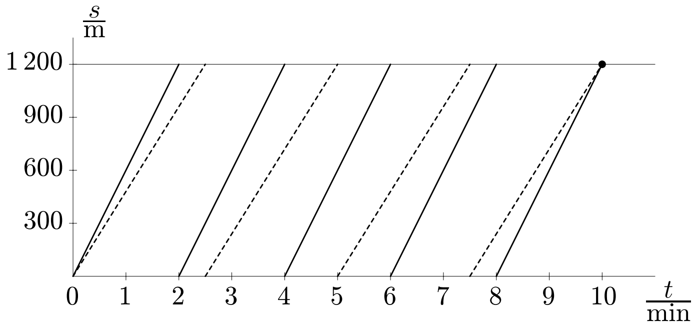
Řešení: Ze zadaných údajů $s = 1\,200$ m, $t_K = 120$ s, $t_T = 150$ s určíme rychlosti $v_K = 10$ m/s, $v_T = 8$ m/s. Při jízdě proti sobě využijeme úvahy, že $s = v_K t_1 + v_T t_1$, odkud určíme dobu pohybu $t_1 \approx 66{,}7$ s. Po dosazení do vzorce pro výpočet dráhy zjistíme, že Karel urazil dráhu $s_{K_1} \approx 667$ m a Tereza $s_{T_1} \approx 533$ m. Podruhé se sportovci setkají v případě, kdy je $2s = v_K t_2 + v_T t_2$, odkud $t_2 \approx 133{,}3$ s, $s_{K_2} \approx 1\,333$ m, $s_{T_2} \approx 1\ 067$ m. Potřetí se setkají v případě, kdy je $3s = v_K t_3 + v_T t_3$, odkud $t_3 = 200$ s, $s_{K_3} = 2\,000$ m, $s_{T_3} = 1\,600$ m.

Jestliže pojedou sportovci týmž směrem, potom platí $v_K t_4 = v_T t_4 + s$, protože rychlejší ujede o kolo víc. Odtud $t_4 = s/(v_K - v_T) = 600$ s a příslušné vzdálenosti jsou $s_{K_4} = 6\,000$ m, $s_{T_4} = 4\ 800$ m, diference je 1 200 m. Obdobně při druhém setkání je $t_5 = 1\,200$ s, $s_{K_5} = 12\,000$ m, $s_{T_5} = 9\,600$ m, diference 2 400 m atd.

Grafické znázornění je velmi jednoduché. Odtud můžeme příslušné údaje přímo přečíst z polohy průsečíků grafů $s = s(t)$ obou cyklistů. Přitom je pro žáky „velmi zajímavé“, že po ukončení okruhu se cyklista dostává opět na jeho začátek, což je v grafu vyjádřeno tak, že pro daný časový okamžik odpovídají poloze sportovce dva body 0 m a 1 200 m.



Obr. 1



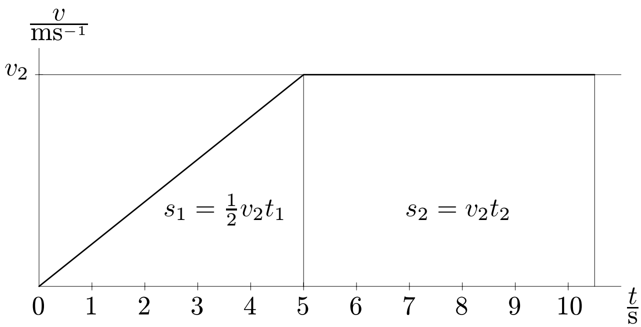
Obr. 2

Pro jízdu proti sobě jsou příslušné funkční závislosti znázorněny na obr. 1, kde plnou čarou je znázorněna dráha Karla a čárkovaně dráha Terezy. Pro jízdu za sebou jsou stejné závislosti znázorněny na obr. 2.

Příklad 2. *Sprinter na krátké trati*
Sprinter běžel po trati o délce 100 m tak, že prvních 32 m rovnoměrně zrychloval po dobu 5,0 s a potom až do cíle už běžel stálou rychlostí. Za jak dlouho uběhl danou trasu a jaké bylo zrychlení jeho pohybu na počátku?

Trenér dal sprinterovi ve snaze zlepšit jeho sportovní výsledky dvě možnosti: buď zaběhne ve stejné době 5,0 s dráhu o 1,0 m delší než doposud, nebo danou vzdálenost 32 m uběhne v kratší době 4,9 s. Jak se tyto podmínky projeví na výsledku, tj. na době běhu na 100 m?

Řešení: Úlohu budeme řešit algebraicky, ale pro získání lepší představy sestrojíme nejprve graf závislosti rychlosti pohybu sprintera na čase (obr. 3).

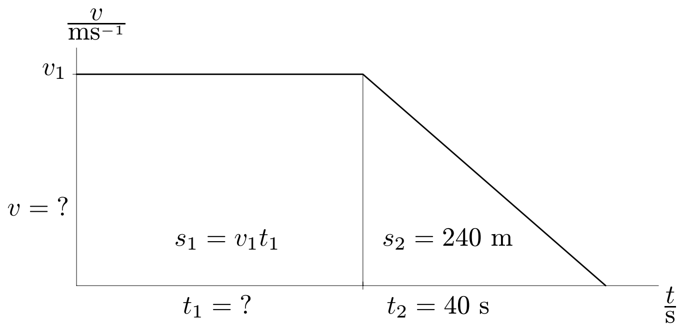


Obr. 3

Na prvním úseku trati se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený po dráze $s_1 = 32$ m za dobu $t_1 = 5{,}0$ s, kdy platí vztahy $v_2 = at_1$, $s_1 = \frac{1}{2}v_2t_1$, kde v_2 je rychlost sprintera po 5. sekundě a a je zrychlení sprintera do konce 5. sekundy. Druhý úsek trati o délce $s_2 = 68$ m je uběhnut pohybem rovnoměrným za dobu t_2, dráha je tedy $s_2 = v_2t_2$. Výsledná doba pro běh na 100 m je potom $t = t_1 + t_2$. Pro dané hodnoty je $v_2 = 2s_1/t_1 = 12{,}8$ m/s, $t_2 = s_2/v_2 \approx 5{,}31$ s, $t = t_1 + t_2 \approx 10{,}31$ s.

Uvažujme ještě, jak se výsledky změní v případě trenérových požadavků. Pro první případ vychází maximální sprinterem dosažená rychlost 13,2 m/s a doba jeho běhu na trase je asi 10,1 s. Ve druhém případě je rychlost sprintera asi 13,1 m/s a doba jeho běhu asi 10,1 s. Grafické znázornění je takřka shodné.

Příklad 3. *Cyklista s letmým startem*
Na cyklistických závodech na trase 1 000 m s letmým startem urazil mladý cyklista celou trasu za dobu t stálou rychlostí, a poté, co projel cílem, na trase 240 m rovnoměrně zastavoval po dobu 40 s. Jakou rychlostí jel mladý cyklista na závodní trase a jakého času při závodech dosáhl? Jak by se změnil výsledek, kdyby brzdil na dané vzdálenosti jenom po dobu 36 s?

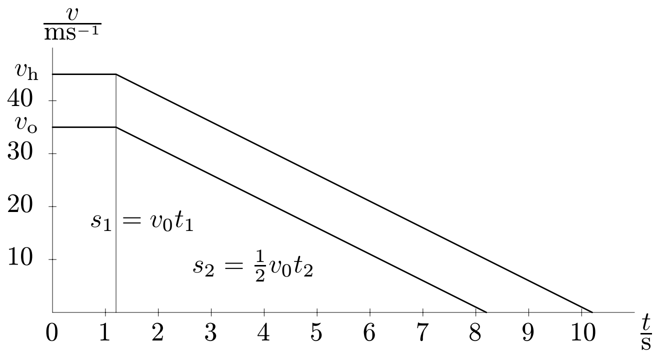


Obr. 4

Řešení: K pochopení postupu řešení si nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase (obr. 4). V grafu $v = v(t)$ znázorníme nejprve rovnoměrný pohyb cyklisty po závodní trase a jeho postupné zastavování v následujícím prostoru. Ve druhé části pohybu při rovnoměrném zastavování platí pro dráhu $s_2 = \frac{1}{2} v_1 t_2$, odkud určíme rychlost pohybu při závodě $v_1 = 2s_2/t_2 = 12$ m/s. Tato rychlost nám pomůže určit dobu pohybu při závodě (při něm je $s_1 = v_1 t_1$), je tedy $t_1 = s_1/v_1 \approx 83{,}3$ s. Kdyby cyklista brzdil jen 36 s, potom by rychlost při závodě byla přibližně 13,3 m/s a trasu by cyklista ujel přibližně za dobu 75 s.

Příklad 4. *Filmová dálniční policie COBRA 11*
V německém detektivním filmu COBRA 11 dochází často k hromadným haváriím. Řidič automobilu, jedoucího velkou rychlostí, zpozoruje v dálce hromadnou havárii. Do okamžiku, než brzdný systém automobilu začne pracovat, uplyne zpravidla 1,2 s a vozidlo se pohybuje rovnoměrně; potom začne automobil účinně brzdit tak, že každé dvě sekundy se rychlost automobilu zmenší o 10 m/s. Za jak dlouho a na jaké trase automobil zastaví? Počáteční rychlost zvolte pro opatrného řidiče 126 km/h, pro hazardéra 162 km/h.

Řešení: Závislost rychlosti na čase je na obr. 5. Pro počáteční rychlost automobilu $v_\mathrm{o} = 126$ km/h $= 35$ m/s a dobu $t_1 = 1{,}2$ s je délka prvního úseku $s_1 = v_o t_1 = 42$ m. Doba nutná pro zabrzdění automobilu je $t_2 = 7$ s, takže dráha nutná pro zabrzdění je $s_2 = \frac{1}{2} v_o t_2 = 122{,}5$ m. Celková dráha do okamžiku zastavení vozidla je $s_o = 166{,}5$ m.



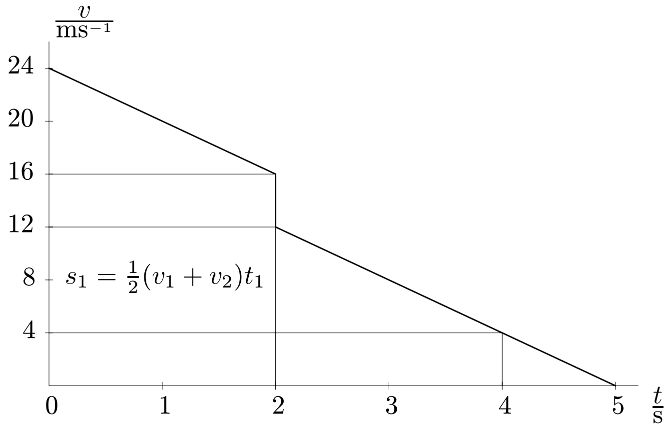
Obr. 5

Pro počáteční rychlost automobilu $v_h = 162$ km/h $= 45$ m/s a dobu $t_1 = 1{,}2$ s je délka prvního úseku $s_1 = v_h t_1 = 54$ m. Doba nutná pro zabrzdění automobilu je $t_2 = 9$ s a dráha nutná pro zabrzdění je $s_2 = \frac{1}{2} v_h t_2 = 202{,}5$ m. Celková dráha do okamžiku zastavení vozidla je $s_h = 256{,}5$ m.

Při menší rychlosti zastaví automobil na dráze 166,5 m za dobu 8,2 s. Při větší rychlosti zastaví na dráze 256,5 m za dobu 10,2 s. Doba nutná k zastavení se prodloužila přibližně o 24 %, ale dráha nutná k zastavení přibližně o 56 %.

Příklad 5. *Hokejista vyslal puk k hrazení*
Hokejista odpálil puk ze vzdálenosti 40 m od zadního hrazení počáteční rychlostí 24 m/s kolmo k zadnímu hrazení a hned se vydal za ním. Puk rovnoměrně zpomaloval, narazil na hrazení rychlostí 16 m/s a vzhledem k nedokonale pružném odrazu se odrazil zpět rychlostí 12 m/s. Zakreslete do grafu $v = v(t)$ časový průběh rychlosti puku. Za jak dlouho po odpálení se puk dotkne zadního hrazení? Jak daleko od hrazení se puk zastaví? Jakou konstantní rychlostí musí hokejista bruslit proti puku, aby ho potkal právě v okamžiku, kdy se puk zastaví?

Řešení: Úlohu budeme řešit na základě grafického záznamu $v = v(t)$ (obr. 6). Počáteční rychlost puku označíme $v_1 = 24$ m/s, koncovou rychlost $v_2 = 16$ m/s. Protože se rychlost puku při rovnoměrně zpomaleném pohybu zmenšuje lineárně, můžeme určit průměrnou rychlost puku po dobu jeho pohybu k hrazení jako $v_\mathrm{p} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = 20$ m/s. Vzdálenost $s_1 = 40$ m urazí puk za dobu $t_1 = 2$ s.



Obr. 6

Puk se odrazil rychlostí $v_3 = 12$ m/s a zastavil se za dobu $t_2 = 3$ s, neboť za každou sekundu snížil svoji rychlost o 4 m/s. Přitom urazil dráhu $s_2 = \frac{1}{2}v_3 t_2 = 18$ m.

Chce-li hokejista puk dojet právě v okamžiku jeho zastavení, musí urazit dráhu 22 m za dobu 5,0 s. Průměrná rychlost hokejisty musí být 4,4 m/s.

OPRAVA

Zadání úloh 49. ročníku Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola, kategorie B

V minulém čísle jsme zveřejnili zadání úloh domácího kola pro právě začínající 49. ročník FO.

V úloze číslo 4 kategorie B byla chybně uvedena jednotka výhřevnosti. Správně má být

$$H = 42\,000\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$$

místo chybného $H = 42\,000\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Za uvedenou chybu se omlouváme.