Kapitola 3

LOGICKÉ KOMBINACE

Zde jsou shromážděny různé úlohy, ve kterých vystupuje zpravidla několik geometrických podmínek najednou. Při řešení těchto úloh se naučíme třídit body, vyjadřovat logické souvislosti mezi podmínkami pomocí operací s množinami.

Společný bod tří přímek. V prvních úlohách se dotkneme tradičního geometrického tématu. Pomocí jednoduhých operací s množinami naší abecedy dokážeme věty o „významných bodech" trojúhelníku. Všechny úvahy se vlastně převedou na užití tranzitivnosti: je-li $a = b$ a $b = c$, pak je $a = c$.

3.1 V trojúhelníku se osy stran protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané. Dokažte.

□ Osy m_c a m_a stran AB a BC trojúhelníku ABC se samozřejmě protínají; označme jejich průsečík O. Protože bod O leží na ose m_c, je podle A 2. kap. $|OA| = |OB|$. Stejně tak je $|OB| = |OC|$, protože bod O leží také na ose m_a. Pak je však také $|OA| = |OC|$, a tudíž je bod O také bodem osy m_b strany AC. Tím jsme dokázali, že všechny tři osy stran procházejí jediným bodem. □

3.2 Výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě, který se nazývá průsečík výšek, nebo též ortocentrum trojúhelníku. Dokažte.

□ Veďme každým vrcholem trojúhelníku ABC přímku rovnoběžnou s protější stranou. Tyto přímky tvoří nový trojúhelník $A'B'C'$, v němž jsou body A, B, C středy stran a výšky trojúhelníku ABC jsou současně osami stran trojúhelníku $A'B'C'$. Procházejí tudíž podle 3.1 jediným bodem. □

Ukážeme si ještě jiný důkaz věty 3.2, podobný důkazu věty 3.1.

□ Každou výšku trojúhelníku můžeme popsat jako množinu všech bodů splňujících jistou podmínku. Využijeme k tomu bodu E. Víme, že množina $\{M : |MA|^2 - |MB|^2 = d\}$ je přímka kolmá k přímce AB. Zvolme d tak, aby tato přímka procházela bodem C, tedy $d = |CA|^2 - |CB|^2$. Je tudíž $h_c = \{M : |MA|^2 - |MB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2\}$ výška trojúhelníku vedená vrcholem C.

Zcela obdobně můžeme popsat zbývající dvě výšky:

$$h_a = \{M : |MB|^2 - |MC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2\},$$
$$h_b = \{M : |MC|^2 - |MA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2\}.$$

Nechť se přímky h_c a h_a protínají v bodě H, pak platí současně

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2,$$
$$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CB|^2.$$

Odtud však plyne, že bod H je také bodem výšky h_b. □

3.3 Osy úhlů trojúhelníku se protínají v jediném bodě (ve středu kružnice trojúhelníku vepsané). Dokažte.

□ Zvolme libovolný trojúhelník ABC a označme a, b a c přímky BC, CA a AB. Osy l_a a l_b úhlů trojúhelníku při vrcholech A a B se protínají ve vnitřním bodě O trojúhelníku ABC. Bod O splňuje podmínky $\varrho(O, b) = \varrho(O, c)$ a $\varrho(O, a) = \varrho(O, c)$. Pak je také $\varrho(O, b) = \varrho(O, a)$, tedy bod O je také bodem osy l_c úhlu při vrcholu C zvoleného trojúhelníku. □

Poznámka. Množina všech bodů M roviny, pro které je $\varrho(M, c) = \varrho(M, b)$ a současně $\varrho(M, a) = \varrho(M, c)$, se skládá ze čtyř bodů O, O_1, O_2, O_3, ve kterých se protínají osy dvojice přímek b, c s osami přímek a, c. Z tranzitivnosti opět plyne, že těmito čtyřmi body procházejí též osy přímek a, b (každá osa prochází dvěma z těchto čtyř bodů).

Odtud plyne, že šest os vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku se protíná ve čtyřech bodech, každým z nich procházejí tři osy. Jeden z těchto čtyř bodů je středem kružnice trojúhelníku vepsané, zbývající tři body jsou středem tří kružnic trojúhelníku vně vepsaných.

Poznamenejme, že pro paty výšek A, B, C ostroúhlého trojúhelníku $O_1O_2O_3$ jsou body O_1, O_2, O_3 středy kružnic, vně vepsaných trojúhelníku ABC. Jsou tedy výšky trojúhelníku $O_1O_2O_3$ osami úhlů v trojúhelníku ABC.

3.4 Těžnice trojúhelníku procházejí jediným bodem, tzv. těžištěm trojúhelníku. Dokažte.

Tuto větu můžeme dokázat mnoha způsoby. První důkaz, který si uvedeme, zároveň vysvětluje název těžiště.

☐ Umístěme ve vrcholech trojúhelníku ABC závaží Γ_A, Γ_B, Γ_C téže hmotnosti a hledejme jejich těžiště. Těžiště závaží Γ_A a Γ_B je ve středu úsečky AB, a proto těžiště Z všech tří závaží leží na odpovídající těžnici. Stejně tak musí těžiště Z ležet na zbývajících dvou těžnicích, všechny tři těžnice se tudíž protínají v jediném bodě. ☐

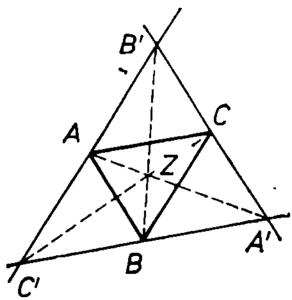
Ukážeme si ještě důkaz obdobný důkazům předcházejících tří vět.

☐ Body těžnic trojúhelníku ABC vedených vrcholy A, B, C vyhovují postupně podmínkám (viz 2.17)

$$S_{AMB} = S_{CMA}, \quad S_{AMB} = S_{BMC}, \quad S_{BMC} = S_{CMA}. \quad (1)$$

Je vidět, že z prvních dvou podmínek plyne třetí podmínka, těžnice se tudíž protínají v jediném bodě. ☐

Poznámka. Množina všech bodů, které vyhovují některé podmínce v (1), je (viz 2.17) dvojice přímek skládající se z těžnice a z další přímky. Všechny tři takovéto dvojice přímek se protínají ve čtyřech bodech Z, A', B', C'. Trojúhelník $A'B'C'$ je trojúhelník, kterého jsme použili v prvním důkaze věty 3.2 (obr. 29).



Obr. 29

3.5 a) Dokažte, že chordály tří kružnic procházejí jediným bodem nebo jsou spolu rovnoběžné (viz 2.9).

b) Mějme tři kružnice, které se po dvou protínají. Pro každou dvojici daných kružnic vezměme jejich společnou tětivu. Pak se tyto tři tětivy (nebo jejich prodloužení) protínají v jediném bodě nebo jsou rovnoběžné. ↓

3.6 Dokažte, že v ostroúhlém trojúhelníku ABC existuje bod T, ze kterého jsou všechny tři strany trojúhelníku vidět pod shodnými úhly, tj. $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CTA|$. Tento bod se nazývá *bod Torricelliho* (čti Toričeliho).

3.7 Uvažujme všechny trojúhelníky s danou stranou AB a danou velikostí φ úhlu při protějším vrcholu. Určete množinu

a) těžišť všech těchto trojúhelníků;

b) středů kružnic vepsaných těmto trojúhelníkům; ↓

c) průsečíků výšek uvažovaných trojúhelníků. ↓

3.8 a) Po dvou se protínající přímky a, b, c procházejí po řadě body A, B, C, kolem kterých se otáčejí všechny tři stejnou úhlovou rychlostí ω. Dokažte, že v jednom okamžiku procházejí všechny tři přímky jediným bodem. ↓

b) Dokažte, že kružnice, které jsou souměrně sdružené s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC podle přímek AB, BC, CA, procházejí jediným bodem, průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. ↓

3.9 Věta Cevova (čti Čevova). Na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC jsou zvoleny body C_1, A_1, B_1. Dokažte, že se úsečky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v jediném bodě právě tehdy, když platí

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\,\frac{|BA_1|}{|CA_1|}\,\frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1\,. \downarrow$$

3.10 Body C_1, A_1, B_1 ležícími po řadě na stranách AB, BC, CA daného trojúhelníku ABC jsou vedeny kolmice k těmto stranám. Dokažte, že tyto tři kolmice procházejí právě tehdy jedním bodem, když je splněna podmínka $|AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |CB_1|^2 = |AB_1|^2 + |BC_1|^2 + |CA_1|^2$. ↓

Průnik a sjednocení. Popišme podrobněji ty základní operace, kterými se stále zabýváme.

Nechť jsou dány dvě, nebo i více množin bodů. **Průnikem** těchto množin nazýváme množinu všech bodů, které patří současně všem daným množinám. **Sjednocením** těchto množin je množina všech bodů, které patří alespoň jedné z daných množin.

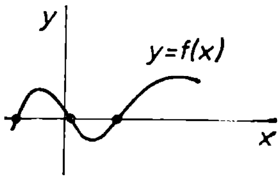
Jestliže jsme měli najít v úloze všechny body, které splňovaly současně několik podmínek, postupovali jsme takto: našli jsme množiny všech bodů, které splňovaly postupně vždy jednu z těchto podmínek, a pak jsme vzali průnik všech takto nalezených množin. S takovou situací jsme se setkali také v algebraických úlohách: množina řešení soustavy rovnic

$$f_1(x) = 0,$$
$$f_2(x) = 0$$

je průnikem množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Máme-li v úloze najít body, které vyhovují alespoň jedné z několika podmínek, musíme najít množiny bodů, které vyhovují jednotlivým podmínkám, a pak vzít jejich sjednocení. Stejně tak postupujeme při řešení rovnice $f(x) = 0$, jejíž levá strana je součinem: $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. Najdeme množiny řešení jednotlivých rovnic $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$ a vezmeme jejich sjednocení.

Ještě jeden pojem, se kterým jsme zde pracovali, vyvolává algebraické asociace — pojem rozkladu. Při řešení nerovnice $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$ pro spojitou funkci f řešíme nejdříve odpovídající rovnici $f(x) = 0$. Obdržené body rozdělují definiční obor funkce f (interval nebo celou přímku) na části, ve kterých nabývá funkce f hodnot stejného znaménka (obr. 30). Stejně tak množiny bodů roviny, které splňují nějakou nerovnici, jsou



Obr. 30

obyčejně oblasti ohraničené křivkami, na kterých je splněna odpovídající rovnice. Mnoho jednoduchých příkladů jsme viděli v kap. 2.

V následující úloze se setkáme se složitějšími rozklady a složitějšími kombinacemi množin.

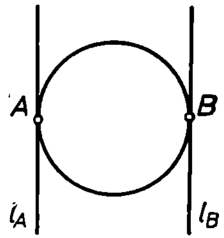
3.11 Nechť jsou dány dva různé body A, B v rovině. Najděte množinu všech bodů M, pro které je trojúhelník AMB

a) pravoúhlý,
b) ostroúhlý,
c) tupoúhlý.

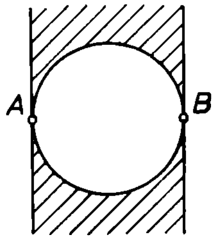
□ a) Trojúhelník AMB je pravoúhlý, jestliže je splněna jedna z podmínek: 1) $|\sphericalangle AMB| = 90°$, 2) $|\sphericalangle BAM| = 90°$, 3) $|\sphericalangle ABM| = 90°$.

Hledaná množina je proto sjednocením těchto tří množin: 1) kružnice s průměrem AB, 2) přímky l_A, procházející bodem A kolmo k přímce AB, 3) přímky l_B, procházející bodem B kolmo k přímce AB. Z tohoto sjednocení nutno ovšem vyjmout body A, B (obr. 31).

b) Trojúhelník AMB je ostroúhlý, jestliže jsou splněny zároveň podmínky: 1) $|\sphericalangle AMB| < 90°$, 2) $|\sphericalangle BAM| < 90°$, 3) $|\sphericalangle ABM| < 90°$. Hledaná množina je tudíž



Obr. 31



Obr. 32

průnikem těchto tří množin: 1) množiny vnějších bodů kruhu s průměrem AB (viz kap. 2, D), 2) poloroviny bez hraniční přímky l_A, obsahující bod B, 3) poloroviny bez hraniční přímky l_B, obsahující bod A. Jejich průnikem je pás mezi přímkami l_A, l_B bez bodů kruhu s průměrem AB (obr. 32).

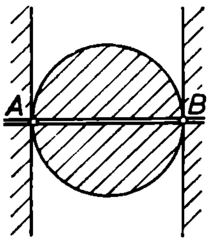
c) Všimněme si, že každý bod M roviny (s výjimkou bodů přímky AB) splňuje některou ze tří podmínek: buď je trojúhelník AMB pravoúhlý, nebo je ostroúhlý, nebo je tupoúhlý, přičemž jednotlivé případy se vzájemně vylučují. Proto se v případě c) rovná hledaná množina množině všech těch bodů, které nepatří ani do množiny bodů splňujících podmínku a), ani do množiny bodů splňujících podmínku b). Tato množina je sjednocením dvou polorovin a kruhu s vynecháním bodů přímky AB a hraničních bodů (obr. 33). □

3.12 V rovině jsou opět dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů M, pro které je

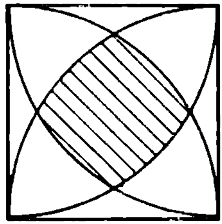
a) trojúhelník AMB rovnoramenný;

b) nejdelší stranou trojúhelníku ABM strana AB;

c) nejdelší stranou trojúhelníku ABM strana AM.



Obr. 33



Obr. 34

3.13 V rovině je dán čtverec o straně délky 1. Zvolený bod roviny nemá od žádného vrcholu čtverce vzdálenost větší než 1. Dokažte, že vzdálenost tohoto bodu od každé strany čtverce je alespoň 1/8.

□ Množina bodů M, jejichž vzdálenost od každého vrcholu čtverce je nejvýše rovna jedné, je průnikem čtyř kruhů o poloměru 1 se středy ve vrcholech čtverce (obr. 34). Je to „čtyřúhelník" ohraničený čtyřmi kruhovými oblouky; vzdálenost jeho vrcholů od nejbližší strany je $1 - \sqrt{3}/2$. Ověřme, že toto číslo je větší než 1/8:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{49}{16} > 3\,.$$

Teď je zřejmé, že všechny body naší množiny mají od každé strany čtverce vzdálenost větší než 1/8. □

3.14 Bodem O roviny jsou vedeny tři přímky, které rozdělují rovinu na šest shodných úhlů. Vzdálenost bodu M od každé z daných přímek je menší než 1. Dokažte, že vzdálenost $|OM|$ je menší než 7/6.

3.15 Je dán čtverec $ABCD$. Najděte množinu všech bodů, které jsou blíž k přímce AB než k přímkám BC, CD a DA.

3.16 Je dán trojúhelník ABC. Určete v rovině trojúhelníku množinu bodů M, pro které je obsah každého z trojúhelníků AMB, BMC, CMA menší než obsah trojúhelníku ABC.

3.17 Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že čtyři kruhy s průměry AB, BC, CD a DA pokrývají celý čtyřúhelník.

□ Předpokládejme, že uvnitř čtyřúhelníku leží bod M, který neleží v žádném z popsaných kruhů. Pak podle kap. 2, E jsou všechny úhly AMB, BMC, CMD a DMA ostré, a tedy jejich součet menší než 360°, což je spor. □

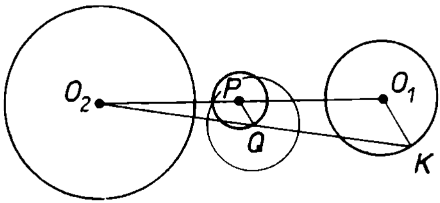
3.18 Část lesa má tvar konvexního čtyřúhelníku o obsahu S a obvodu p. Dokažte, že uvnitř lesa je bod, jehož vzdálenost od okraje lesa je větší než S/p.

3.19 Uvnitř čtverce o straně délky 1 je zvoleno n bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat dva body tak, že jejich vzdálenost je menší než $2/\sqrt{\pi n}$. ↓

V dalších úlohách bude třeba zkoumat sjednocení nekonečně mnoha množin.

3.20 a) Je dán bod O. Uvažujme systém všech kružnic o poloměru 3 cm, jejichž středy mají od bodu O vzdálenost 5 cm, a dále systém kružnic poloměru 5 cm, jejichž vzdálenost od bodu O je 3 cm. Dokažte, že sjednocení všech kružnic prvního systému splývá se sjednocením všech kružnic druhého systému.

b) Najděte množinu středů všech úseček, jejichž jeden krajní bod leží na jedné z daných kružnic a druhý na druhé.



Obr. 35

□ b) Označme poloměry daných kružnic r_1 a r_2 a jejich středy O_1 a O_2 (obr. 35). Zvolme nejdříve pevně bod K první kružnice a najděme množinu středů úseček, jejichž jeden krajní bod splývá s bodem K a druhý leží na druhé kružnici. Výsledkem je kružnice s poloměrem $r_2/2$ a středem Q, který splývá se středem úsečky KO_2. Je to kružnice, která odpovídá kružnici (O_2, r_2) ve stejnolehlosti se středem K a koeficientem $1/2$. Poznamenejme, že bod Q leží ve vzdálenosti $r_1/2$ od středu P úsečky O_1O_2.

Budeme-li pohybovat bodem K po kružnici (O_1, r_1), bude se bod Q pohybovat po kružnici o poloměru $r_1/2$ a středu P. Hledaná množina je sjednocením všech kružnic o poloměru $r_2/2$, jejichž středy leží na kružnici o poloměru $r_1/2$ a středu P. Množinou všech bodů vyhovujících podmínce úlohy je mezikruží s vnějším poloměrem $(r_1 + r_2)/2$ a vnitřním poloměrem $|r_1 - r_2|/2$. V případě $r_1 = r_2$ je touto množinou kruh. $\square$

3.21 Bod O je počátečním bodem n vektorů délky jedna, které jsou umístěny v jedné polorovině, ohraničené přímkou l, jež prochází bodem O. Dokažte, že v případě lichého n je velikost součtu daných vektorů rovna alespoň jedné. $\downarrow$

3.22 Vesnicí A, obklopenou ze všech stran loukami, prochází jediná přímá cesta. Člověk může jít po cestě rychlostí 5 km/hod a po louce rychlostí 2 km/hod. Načrtněte množinu bodů, kterých člověk může dosáhnout za jednu hodinu po vyjití z A.

3.23 Úloha o sýru. Je možno čtvercový sýr s dírkami rozřezat vždy na konvexní části tak, aby v každé části byla právě jedna dírka?

Matematicky můžeme tuto úlohu formulovat takto:

Uvnitř čtverce je několik neprotínajících se kruhů. Je možno čtverec rozdělit na konvexní mnohoúhelníky tak, aby v každém z nich byl právě jeden kruh?

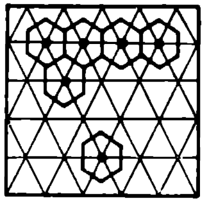
Odpověď je vždy kladná. Pro libovolný příklad s nepříliš velkým počtem kruhů můžeme lehce ukázat, jak čtverec rozřezat, aby byla splněna podmínka úlohy. Abychom však podali vyčerpávající důkaz, musíme ukázat obecný postup, který by se hodil pro libovolný počet kruhů a jejich libovolné rozmístění.

Zkoumejme nejdříve jednodušší úlohu: předpokládejme, že poloměry všech kruhů jsou stejné. Pak můžeme čtverec rozříznout způsobem, který popíšeme nejdříve velmi stručně, jednou větou. Každému kruhu přiřadíme množinu těch bodů čtverce, které mají od něho menší vzdálenost než od všech ostatních kruhů — a to budou právě hledané konvexní mnohoúhelníky ⟨?⟩.

Vysvětleme si nyní tento postup podrobněji. Středy daných kruhů označíme $C_1, C_2, \ldots, C_n$, a nechť C_i je jeden z nich. Najdeme množinu všech bodů čtverce, jejichž vzdálenost od bodu C_i není větší než vzdálenost od ostatních bodů C_j. Množina všech bodů roviny, které jsou blíže k bodu C_i než k jednomu zvolenému bodu C_j $(i \neq j)$, tvoří polorovinu ohraničenou osou úsečky C_iC_j (viz kap. 2,A). Nás zajímají body čtverce, které jsou blíž k bodu C_i než ke všem ostatním středům, tedy body, které leží ve všech takto obdržených polorovinách. Tvoří tedy množinu, která je průnikem $(n - 1)$ polorovin a daného čtverce, a tudíž konvexním mnohoúhelníkem ⟨?⟩. Protože každá z uvažovaných polorovin obsahuje bod C_i, a dokonce celý kruh se středem C_i (plyne z toho, že kruhy se středy C_i a C_j mají stejný poloměr a neprotínají se), leží tento kruh i v jejich průniku.

Každému středu C_i odpovídá tudíž mnohoúhelník $\{M : |MC_i| \leqq |MC_j|$ pro všechna $j \neq i$, M leží v daném čtverci$\}$. Je zřejmé, že tyto mnohoúhelníky pokrývají celý čtverec a žádné dva nemají společný vnitřní bod. Chceme-li určit, do kterého z těchto mnohoúhelníků patří bod N daného čtverce, musíme si zodpovědět otázku: Který ze středů C_i leží nejblíž bodu N? Je-li takových nejbližších bodů více, leží bod N na ose úsečky C_iC_j pro některou dvojici $i \neq j$, tedy na hranici mnohoúhelníku, na řezu. Tímto způsobem je čtverec rozřezán na konvexní mnohoúhelníky, z nichž každý obsahuje právě jeden kruh.

Krásný příklad dostaneme, splývají-li středy kruhů s vrcholy sítě tvořené shodnými rovnoběžníky. Náš způsob rozdělení čtverce můžeme popsat takto: ve všech rovnoběžnících sítě vedeme kratší úhlopříčky. Dostaneme tím síť tvořenou navzájem shodnými ostroúhlými trojúhelníky s týmiž vrcholy jako síť rovnoběžníková. Uvnitř každého trojúhelníku sítě vedeme osy stran. Obdržené šestiúhelníky (přesněji jejich průniky se čtvercem) tvoří naše rozdělení čtverce (obr. 36).



Obr. 36

Zatím jsme vyřešili úlohu 3.23 v případě, kdy všechny kruhy měly stejný poloměr. V obecném případě, kdy jsou poloměry kruhů různé, můžeme postupovat takto: Z každého bodu, který leží vně všech daných kruhů, vedeme ke všem kruhům tečny. Množina bodů přiřazená kruhu γ se bude skládat z kruhu γ a z těch bodů, ze kterých je tečna ke kruhu γ kratší než tečny k ostatním kruhům. Tato množina je průnikem několika polorovin obsahujících kruh γ; hraničními přímkami těchto polorovin jsou chordály kružnice γ a některé z dalších kružnic (viz úlohy 2.9 a 3.5). Tímto způsobem bude opět celý čtverec dán jako sjednocení konvexních mnohoúhelníků, které nemají společné vnitřní body, a každý z mnohoúhelníků obsahuje svůj kruh.