O dělitelnosti čísel celých

5. kapitola. Největší společný dělitel

In: František Veselý (author): O dělitelnosti čísel celých. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 61–72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403568

5. kapitola

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

D$_{10}$ *Společný dělitel celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, kde $k \geqq 2$, se nazývá každé takové celé číslo b, že platí $b \mid a_1, b \mid a_2, b \mid a_3, \ldots, b \mid a_k$.*

D$_{11}$ *Největší společný dělitel celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme takové přirozené číslo, které je největší ze všech společných dělitelů čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, a označujeme ho zpravidla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.*

Pojmy vymezované v definicích **D$_{10}$** a **D$_{11}$** objasníme ihned na číselném příkladě. Učiníme tak přesto, že různé metody k snadnému vyhledání všech dělitelů, společných dělitelů i největšího společného dělitele daných čísel budou vyloženy teprve v dalším textu této a následující kapitoly.

Příklad 23. Jsou dána čísla $a_1 = 84$, $a_2 = 24$, $a_3 = -132$, $a_4 = 0$. Vyhledejte: a) množiny všech přirozených dělitelů daných čísel, b) množinu všech společných dělitelů daných čísel, c) (a_1, a_2), (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_3, a_4).

a) Pro každé přirozené číslo m, které je dělitelem čísla $a_1 = 84$, musí zřejmě platit $1 \leqq m \leqq 84$. Můžeme tedy konečným počtem zkoušek zjistit, která přirozená čísla vyhovují podmínkám $m \mid 84$, $1 \leqq m \leqq 84$. Označíme-li A_1 množinu všech přirozených dělitelů čísla a_1 a obdobně A_2, A_3, A_4 množiny všech přirozených dělitelů čísel a_2, a_3, a_4, dostaneme:

$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$, $A_2 = \{1, 2,$

3, 4, 6, 8, 12, 24}, $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132\}$, $A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.
Zatímco množiny A_1, A_2, A_3 mají konečný počet prvků, je množina A_4 nekonečná, neboť každé přirozené číslo je dělitelem čísla $a_4 = 0$. Kdybychom měli vyhledat všechny dělitele daných čísel, bylo by nutné ve všech případech uvést i čísla opačná k nalezeným přirozeným dělitelům (podle věty $\mathbf{T}_6$) a v případě posledním (pro číslo $a_4 = 0$) též číslo 0; děliteli čísla 0 jsou všechna čísla celá.

b) Máme-li vyhledat množinu S všech společných přirozených dělitelů daných čísel, musíme určit průnik množin A_1, A_2, A_3, A_4, tj. najít všechna přirozená čísla, která jsou zároveň prvky všech těchto množin, a shrnout je do množiny S. Nejsnáze tuto úlohu vyřešíme, vyjdeme-li od množiny A_2, která má nejmenší počet prvků, a zjistíme, které z jejích prvků jsou obsaženy ve všech ostatních množinách A_1, A_3, A_4; přitom nám práci usnadní znalost toho, že množina A_4 obsahuje každé přirozené číslo. Tak najdeme $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Označíme-li S' množinu všech dělitelů čísel a_1, a_2, a_3, a_4, je zřejmě $S' = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

c) V množině S existuje největší přirozené číslo 12 (ve shodě s větou $\mathbf{T}_3$) a proto $(a_1, a_2, a_3, a_4) = 12$. K nalezení (a_1, a_2) je třeba najít průnik množin A_1, A_2 a v něm největší přirozené číslo; tak najdeme $(a_1, a_2) = 12$. Zjistíme-li, že (a_1, a_2) je dělitelem čísla a_3, plyne odtud $(a_1, a_2, a_3) = 12$. Je samozřejmé, že $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3, a_4) = 12$, když 12 patří do množiny A_4, která je množinou všech přirozených čísel.

Při hledání $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ vyloučíme z našich úvah případ $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$, neboť v tomto případě množina všech společných přirozených dělitelů čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je množina všech přirozených čísel, v níž neexistuje největší číslo. Podle definice $\mathbf{D}_{11}$ nemá symbol $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ smysl, pokud aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ není různé od nuly. Je-li aspoň jedno z nich různé od nuly, pak ze snadné úvahy i ze zkušenosti, získané při řešení předcházejícího příkladu 23, plyne, že hledání $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ lze převést na hledání největšího společného dělitele přirozených čísel, kterého dostaneme, když ze souboru čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ vynecháme nulové prvky a záporná čísla nahradíme čísly opačnými. Tak např. určení $(84, 24, -132, 0)$ můžeme nahradit určením $(84, 24, 132)$.

Při hledání $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$, když aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ je různé od nuly, můžeme použít následujících zřejmých a snadno dokazatelných vztahů, které označíme jako poučku $\mathbf{T}_{26}$.

$\mathbf{T}_{26}$
1. $(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_2)$;
2. $(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$;
3. $(a_1, a_2) = a_1$, když $a_2 = 0$ nebo $a_2 = a_1$;
4. $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k)$.

Opakovaným užíváním těchto vztahů, z nichž první je důsledkem věty $\mathbf{T}_{10}$, můžeme výpočet (a_1, a_2) uspořádat tak, jak to bude zřejmé z následujících symbolických zápisů, jimiž bude vyznačen i důkaz správnosti našeho postupu. Jsou-li $a_1 > a_2 > 0$ dvě přirozená čísla, pak

$$(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_2) = (a_1 - 2a_2, a_2) = \ldots =$$
$$= (a_1 - q_1 a_2, a_2) = (r_1, a_2) = (a_2, r_1).$$

Přechod od prvního členu (a_1, a_2) tohoto řetězce rovností až k jeho předposlednímu členu (r_1, a_2), kde $r_1 = a_1 - q_1 a_2 < a_2$, nemusíme uskutečnit postupným odčítáním čísla a_2; dělením čísla a_1 číslem a_2 můžeme najít (neúplný) podíl q_1 a zbytek r_1. Je-li $r_1 \neq 0$, pak můžeme opět najít další řetězec rovností

$$(a_2, r_1) = (a_2 - r_1, r_1) = (a_2 - 2r_1, r_1) = \ldots =$$
$$= (a_2 - q_2 r_1, r_1) = (r_2, r_1) = (r_1, r_2).$$

Číslo r_2 nemusíme hledat postupným odčítáním čísla r_1, nýbrž dělením čísla a_2 číslem r_1, při němž dostaneme celý nezáporný zbytek $r_2 < r_1$. Není-li $r_2 = 0$, pokračujeme v postupném odčítání nebo dělení naznačeným způsobem tak dlouho, až dospějeme k výrazu (r_n, r_{n+1}), kde $r_n \neq 0$, je poslední nenulový dělitel dělení, při němž zbytek $r_{n+1} = 0$. Zřejmě platí

$$(a_1, a_2) = (a_2, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \ldots =$$
$$= (r_{n-1}, r_n) = (r_n, r_{n+1}) = r_n.$$

Tento postup výpočtu $(a_1, a_2) = r_n$ metodou postupného dělení, jež někdy nahrazujeme opakovaným odčítáním, se nazývá též algoritmus Euklidův. Jeho užití vám ukážeme na několika příkladech, ale předtím uvedeme ještě dvě definice významu názvů, jichž budeme často užívat.

D$_{12}$ *Celá čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme nesoudělná, jestliže platí $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$.*

D$_{13}$ *Celá čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ se nazývají po dvou nesoudělná, platí-li $(a_i, a_j) = 1$ pro každou dvojici čísel vybranou z daných čísel.*

K tomu, aby celá čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ (pro k ≥ 2) byla nesoudělná, stačí splnění slabší podmínky, než je ta, která musí být splněna, mají-li být tato čísla po dvou nesoudělná. Je zřejmé, že čísla po dvou nesoudělná (podle **D**$_{13}$) jsou vždy nesoudělná (podle **D**$_{12}$), avšak čísla nesoudělná nemusí být po dvou nesoudělná. Význam obou termínů splývá pro $k = 2$, tj. tedy pro dvojici celých čísel a_1, a_2.

Příklad 24. Vypočtěte a) (84,24); b) (84, 24, 54); c) (84, 24, 54, 37).

a) $84 = 3.24 + 12$ a proto $(84, 24) = (24, 12)$. Poněvadž $24 = 2.12 + 0$, platí $(84, 24) = (24, 12) = (12, 0) = 12$.

b) Při hledání (84, 24, 54) najdeme nejprve $(84, 24) = 12$, a pak hledáme (12, 54). Poněvadž $54 = 4.12 + 6$, $12 = 2.6 + 0$, platí $(84, 24, 54) = (12, 54) = (12, 6) = (6, 0) = 6$.

c) Při hledání (84, 24, 54, 37) vyhledáme nejprve $(84, 24, 54) = 6$ a pak hledáme (6, 37). Poněvadž $37 = 6.6 + 1$, $6 = 6.1 + 0$, platí $(6, 37) = 1$ a proto také $(84, 24, 54, 37) = 1$. Čísla 84, 24, 54, 37 jsou nesoudělná, ale nejsou po dvou nesoudělná, když např. $(84, 24) = 12 > 1$.

Příklad 25. Posloupnost čísel 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... je určena počátečními členy $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ a předpisem, že každý z dalších členů posloupnosti se rovná součtu dvou předcházejících členů. Čísla, která jsou členy této posloupnosti, se nazývají čísla Fibonacciova. Dokažte, že každá dvě po sobě jdoucí čísla Fibonacciova jsou nesoudělná.

Pro danou posloupnost platí rekurentní vzorec $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ a z něho plyne $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$. Dále platí $(u_{n+1}, u_n) = (u_{n+1} - u_n, u_n) = (u_{n-1}, u_n) = (u_n, u_{n-1})$. Z toho plyne platnost vztahu $(u_{n+1}, u_n) = (u_n, u_{n-1})$ a jeho opakovaným použitím $(u_n, u_{n-1}) = (u_{n-1}, u_{n-2}) = \ldots = (u_3, u_2) = (u_2, u_1) = (u_1, u_0) = (1, 0) = 1$. Tento výsledek znamená však podle $\mathbf{D}_{12}$, že kterákoli dvě po sobě jdoucí Fibonacciova čísla jsou nesoudělná.

Příklad 26. Určete největší společný dělitel dvou po sobě jdoucích čísel a) sudých, b) lichých.

Označíme-li menší číslo x, pak je druhé $x + 2$. Avšak

$(x, x + 2) = (x, 2)$. a) Je-li x sudé číslo, pak $2 \mid x$ a proto největší společný dělitel dvou po sobě jdoucích čísel sudých je 2. b) Je-li x liché číslo, pak $2 \nmid x$ a proto $(x, 2) < 2$, tj. $(x, 2) = 1$, neboť jiné možnosti není. Proto 2 po sobě jdoucí lichá čísla jsou nesoudělná.

Příklad 27. Dokažte, že pro žádné číslo x nedostaneme v čitateli a jmenovateli zlomku $\frac{21x + 4}{14x + 3}$ taková čísla, abychom mohli zlomek krátit.

Daný zlomek má smysl pro každé celé číslo x, neboť $14x + 3 = 0$ jen pro $x = -\frac{3}{14}$. Hledejme nyní opakovaným užitím dovolených úprav největší společný dělitel čitatele i jmenovatele daného zlomku. Dostaneme postupně:

$$(21x + 4, 14x + 3) = (7x + 1, 14x + 3) = (14x + 3, 7x + 1) = (7x + 2, 7x + 1) = (1, 7x + 1) = 1.$$

Tím jsme dokázali nesoudělnost čitatele i jmenovatele pro každé celé číslo x a tím i nemožnost daný zlomek zkrátit.

Příklad 28. Je-li $d = (a_1, a_2)$ největší společný dělitel přirozených čísel a_1, a_2, pak $a_1 = dq_1$, $a_2 = dq_2$, kde $(q_1, q_2) = 1$, tj. čísla q_1, q_2 jsou nesoudělná. Dokažte.

Předpokládejme, že čísla q_1, q_2 jsou soudělná, tj. $(q_1, q_2) = d' > 1$. V tom případě platí $q_1 = d' q_1'$, $q_2 = d' q_2'$, odtud po dosazení do rovností uvedených v úloze dostaneme

$$a_1 = dq_1 = dd' q_1', a_2 = dq_2 = dd' q_2'.$$

Odtud však plyne, že součin dd' je společným dělitelem čísel a_1, a_2. Avšak z předpokladu $d' > 1$ plyne $d'd > d$, což je v rozporu s předpokladem, že d je největší společný dělitel čísel a_1, a_2. Neplatí tedy $d' > 1$, nýbrž $d' = 1$.

V definici $\mathbf{D}_{11}$ jsme uvedli takový charakteristický souhrn znaků definovaného pojmu, aby co nejpřístupněji objasnil význam názvu největší společný dělitel. Ten však můžeme vymezit i jiným způsobem, který je pro některé důkazy užitečnější, i když při něm nejsou výslovně uvedeny vlastnosti naznačené v názvu největší společný dělitel. Ukážeme si, že z jiné definice $\mathbf{D}_{14}$ odvodíme nejen vlastnosti největšího společného dělitele, uvedené v $\mathbf{D}_{11}$, ale i jiné jeho vlastnosti, které bychom s obtížemi odvozovali z definice $\mathbf{D}_{11}$.

$\mathbf{D}_{14}$ *Největší společný dělitel d celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, je nejmenší přirozené číslo z množiny M všech celých čísel m, která lze napsat ve tvaru*

$$m = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \ldots + c_k a_k$$

kde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ jsou libovolná celá čísla.

Výklad i odvození vlastností největšího společného dělitele, které vyplývají z $\mathbf{D}_{14}$, provedeme za předpokladu, že jsou dána jen 4 čísla a_1, a_2, a_3, a_4, z nichž aspoň jedno je různé od nuly. Zobecnění následujících úvah, kdy je dán libovolný počet čísel, je snadné a neuvádíme je jen proto, aby výklad i důkazy byly stručnější a přehlednější.

Množina M se skládá ze všech celých čísel m, která je možno napsat ve tvaru

$$m = c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4, \tag{5,1}$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 jsou libovolná celá čísla. Do této množiny M patří jistě čísla a_1, a_2, a_3, a_4 i čísla k nim opačná. Zvolíme-li např. $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ a k tomu jednou $c_1 = 1$, podruhé $c_1 = -1$, plyne odtud, že $a_1 \in M$, $-a_1 \in M$. Obdobně to platí i o číslech a_2, a_3, a_4. Poněvadž aspoň jedno z daných čísel je různé od nuly, existuje v množině M aspoň jedno celé číslo kladné a aspoň jedno záporné; je jich tam ovšem nekonečně mnoho, neboť do množiny M náleží zřejmě i všechny násobky čísel a_1, a_2, a_3, a_4.

Označme P množinu všech přirozených čísel z množiny M; je tedy P částí množiny M, tj. $P \subset M$. Poněvadž jsme již dokázali, že v množině M existuje aspoň jedno přirozené číslo, je P neprázdná množina a podle věty $\mathbf{T}_2$ v ní existuje číslo nejmenší. Označme d toto nejmenší přirozené číslo množiny M, které je podle $\mathbf{D}_{14}$ největším společným dělitelem daných čísel, takže platí $d = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Z toho ovšem plyne, že existují též taková celá čísla x_1, x_2, x_3, x_4, že

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4. \qquad (5,2)$$

Nyní ukážeme, že číslo d je společným dělitelem všech čísel množiny M a tedy i společným dělitelem čísel a_1, a_2, a_3, a_4, které jsou prvky množiny M. Důkaz provedeme nepřímo.

Předpokládejme, že neplatí vztah $d \mid m$, tj. že platí

$$m = dq + r,\ 0 < r < d, \qquad (5,3)$$

čili že $r = m - dq$, kde q je číslo celé, r kladný zbytek při dělení čísla m číslem d. Dosadíme-li do této rovnosti za m, d čísla ze vztahů (5,1) a (5,2), dostaneme:

$$r = m - dq = (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4) - (a_1x_1 + \\ + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)q = a_1(x_1 - c_1q) + a_2(x_2 - \\ - c_2q) + a_3(x_3 - c_3q) + a_4(x_4 - c_4q) = a_1x_1' + \\ + a_2x_2' + a_3x_3' + a_4x_4',$$

když jsme užili označení $x_1' = x_1 - c_1q$, $x_2' = x_2 - c_2q$, $x_3' = x_3 - c_3q$, $x_4' = x_4 - c_4q$. Z předpokladu (5,3) jsme odvodili, že přirozené číslo $r < d$ lze vyjádřit ve tvaru, který svědčí o tom, že r je prvkem množiny P, avšak $r < d$ je ve sporu s předpokladem, že d je nejmenší přirozené číslo množiny M. Není tedy možné, aby platily vztahy (5,3), a musí tedy platit $r = 0$, $d \mid m$.

Každé číslo b, které je společným dělitelem čísel a_1, a_2, a_3, a_4, je též dělitelem čísla d. Z předpokladu $b \mid a_1$, $b \mid a_2$, $b \mid a_3$, $b \mid a_4$ plyne $a_1 = bq_1$, $a_2 = bq_2$, $a_3 = bq_3$, $a_4 = bq_4$ a po dosazení do vztahu (5,2) dostaneme:
$d = bq_1x_1 + bq_2x_2 + bq_3x_3 + bq_4x_4 =$
$= b(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4)$, což však znamená $b \mid d$. Přitom není možné, aby $b > d$, neboť pak by nemohlo platit $b \mid d$. Platí tedy vždy $b \leqq d$, takže největší společný dělitel ve smyslu definice $\mathbf{D}_{14}$ má vlastnost uvedenou v $\mathbf{D}_{11}$. Tím jsme dospěli k výsledku, který po snadném zobecnění vyjadřuje následující věta:

$\mathbf{T}_{27}$ *Největší společný dělitel celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je dělitelný každým společným dělitelem čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.*

Z důkazu vztahu $d \mid m$ pro každé $m \in M$ plyne, že množina M je množinou všech násobků čísla d. V důsledku toho, že množina $M = \{\ldots -3d -2d, -d, 0, d, 2d, 3d, \ldots\}$, platí následující věta:

$\mathbf{T}_{28}$ *Všechny prvky množiny M, která je množinou všech možných součtů kterýchkoli násobků daných celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, jsou násobky čísla $d = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.*

Jestliže ve vztahu (5,2) je číslo $d = 1$, pak odtud snadnou úvahou dostaneme následující zobecněnou větu.

$\mathbf{T}_{29}$ *K celým číslům $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je možno vyhledat celá čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, aby platil vztah*

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_kx_k = 1$, *když a jen když čísla* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ *jsou nesoudělná.*

Zvláštním případem věty T_{29} je následující věta, jejíž znalost se předpokládá při řešení některých úloh matematických olympiád:

Ke dvěma celým číslům a, b je možno právě tehdy najít celá čísla x, y, aby platilo $ax + by = 1$, když čísla a, b jsou nesoudělná. Jinak řečeno: Jsou-li celá čísla a, b nesoudělná, pak existují taková celá čísla x, y, že platí $ax + by = 1$, a obráceně, existují-li k daným celým číslům a, b celá čísla x, y, že platí $ax + by = 1$, pak čísla a, b jsou nesoudělná.

Předcházejících poznatků můžeme využít též při hledání největšího společného dělitele daných čísel, což ukážeme nejprve na číselném příkladě.

Příklad 29. Vyhledejte $d = (198, 288, 300, 384)$

a) $(198, 288, 300, 384) = (198, 288-198, 300-198, 384-198) = (198, 90, 102, 186) = (198-2.90, 90, 102-90, 186-2.90) = (18, 90, 12, 6) = (18-3.6, 90-15.6, 12-2.6, 6) = (0, 0, 0, 6) = 6$.

V daném souboru čísel zvolili jsme číslo 198, které jsme odečetli od všech tří čísel zbývajících; pak jsme si vybrali opět nejmenší číslo souboru, tj. 90, a jeho násobky jsme odčítali od ostatních tří čísel tak, že jsme místo těchto tří čísel dostali zbytky při jejich dělení číslem 90. Další postup je již zřejmý. Číslo 6 se objevilo v poslední čtveřici čísel jako hledané číslo d, které je vlastně číslem tvaru (5,2). Výsledek nezáleží ovšem na tom, užijeme-li pro odčítání násobků nejmenšího čísla čtveřice, jak je to zřejmé z druhého řešení této úlohy.

b) $(198, 288, 300, 384) = (198-0.288, 288, 300-1.288, 384-1.288) = (198, 288, 12, 96) = (198-16.12, 288-24.12, 12, 96-8.12) = (6, 0, 12, 0) = (6, 0, 12-2.6, 0) = (6, 0, 0, 0) = 6$.

Příklad 30. Rozhodněte, zda rovnice $4453x + 5767y + 6497z = 1$ má řešení v oboru čísel celých.

Určíme $d = (4453, 5767, 6497) = (4453, 5767-4453, 6497-4453) = (4453, 1314, 2044) = (4453-3.1314, 1314, 2044-1314) = (511, 1314, 730) = (511, 1314 - 2.511, 730 - 511) = (511, 292, 219) = (511 - 2.219, 292 - 219, 219) = (73, 73, 219) = (73, 73 - 1.73, 219 - 3.73) = (73, 0, 0) = 73$.

Poněvadž $d = 73$, nejsou daná čísla nesoudělná a daná rovnice nemá řešení v oboru celých čísel (podle věty $\mathbf{T}_{29}$). Kdybychom však danou rovnici pozměnili tak, že by na pravé straně místo čísla 1 byl kterýkoli násobek čísla 73, měla by takto pozměněná rovnice řešení (podle věty $\mathbf{T}_{28}$) v oboru celých čísel.

Hledání největšího společného dělitele daných celých čísel můžeme usnadnit a zkrátit při znalosti některých poznatků, jež jsme tu neuvedli. Snad některé z nich sami najdete a dokážete. Mimoto v kapitole 7 poznáme ještě jiný způsob výpočtu největšího společného dělitele.

Cvičení

5,1. Dané zlomky převeďte na základní tvar:

$$\frac{534}{1335}; \quad \frac{9\,167}{11\,639}; \quad \frac{9\,797}{10\,379}; \quad \frac{610}{1597}; \quad \frac{987}{1595}.$$

5,2. Je dán zlomek $\dfrac{5x + 6}{8x + 7}$. Najděte množinu všech celých čísel x, která po dosazení do daného zlomku dávají takové zlomky, jež lze krácením převést na základní tvar.

5,3. Pro které celočíselné hodnoty x lze zlomek $\dfrac{6x^2 + 1}{12x^2 + 7}$ krácením převést na základní tvar?

5,4. Rozhodněte, ve kterých případech mají dané rovnice řešení v oboru čísel celých:
a) $37x + 61y = 1$; b) $4x + 5y + 6z = 1$; c) $49x + 84y = 1$; d) $49x + 84y = 7$; e) $49x + 84y = 14$.

5,5. Jestliže zlomek $\frac{p}{q}$ je pravý zlomek v základním tvaru, pak také zlomek $\frac{q-p}{q}$, který doplňuje zlomek $\frac{p}{q}$ do 1, je rovněž v základním tvaru. Dokažte.

5.6. Jaké podmínky musí splňovat čísla a, b, aby platilo $(a, b) = (a + b, a - b)$?

5,7. Dokažte, že platí $(ac, bc) = c\,(a, b)$.