Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

II. Průsek tělesa s rovinou

In: F. Hradecký (author); Milan Koman (author); Jan Vyšín (author): Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 33–59.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403427

Část II

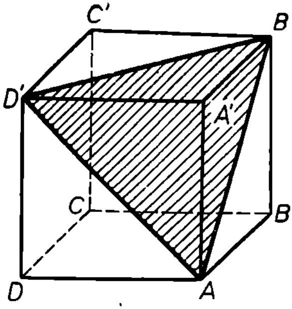
PRŮSEK TĚLESA S ROVINOU

●

V první části tohoto textu jsme se setkali s čarami (např. s lomenými čarami ležícími na povrchu tělesa), ale nezajímali jsme se přitom, zda taková čára leží v rovině či nikoli. Zvláště důležité jsou takové čáry na povrchu tělesa, které jsou rovinné. Jsou důležité nejen pro geometrii na povrchu tělesa, ale můžeme pomocí nich odvodit vlastnosti, které se týkají vnitřku tělesa.

Čáry, které máme na mysli, jsou vlastně průnikem nějaké roviny s povrchem tělesa. Slovo „průnik" vám snad není zcela neznámé; *průnikem dvou geometrických útvarů* rozumíme množinu všech bodů společných těmto geometrickým útvarům. Slovo „průnik", které pochází z teorie množin, nahrazujeme v geometrii různými jinými názvy. Tak užíváme např. slov „průsečík", „průsek" nebo „řez", říkáme průsečík přímky s rovinou, rovinný průsek nebo řez s tělesem nebo plochou apod.

Průnik roviny s tělesem může být třeba jen bod nebo úsečka. Jistě si dovedete představit rovinu, která má s krychlí společný jen jediný vrchol nebo jedinou hranu. Máte-li k dispozici model krychle, můžete si přiložením rovné desky k vrcholu nebo hraně polohu takové roviny snadno vymodelovat. Nás však budou zajímat hlavně takové případy, kdy průnikem bude rovinný obrazec, např. trojúhelník, čtverec apod. Tento obrazec budeme nazývat *průsekem či řezem roviny* s tělesem; průsekem roviny *s povrchem* tělesa je pak obvod příslušného obrazce. Na obr. 17 je vy-



Obr. 17

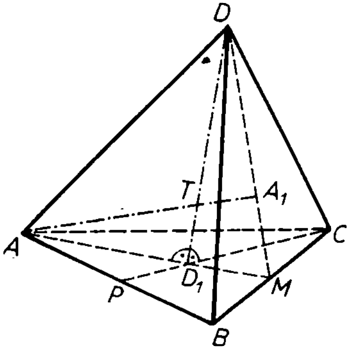
značen šrafami průsek roviny s krychlí; je to trojúhelník $AB'D'$. Průsekem s povrchem krychle jsou úsečky AB', $B'D'$, $D'A$, které tvoří obvod řezu. Všechny tyto úsečky jsou shodné, neboť jsou stěnovými úhlopříčkami krychle; proto je řezem rovnostranný trojúhelník.

Jak jsme už naznačili, můžeme pomocí průseku roviny s tělesem odvodit jisté vlastnosti týkající se vnitřku tělesa. To si ukážeme v následující úloze, v níž půjde o odvození vlastnosti těžnic a těžiště čtyřstěnu.

Pojmy těžnice a těžiště trojúhelníka jsou vám jistě známy. U čtyřstěnu půjde o jistou analogii. Jestliže zavěsíte ve vrcholu na nit trojúhelník, který je zhotoven ze stejnorodého materiálu (např. tvrdého papíru — lepenky), ustálí se nit v takové poloze, že v prodloužení prochází těžištěm trojúhelníka. Zavěsíte-li čtyřstěn, který je zhotoven ze stejnorodého materiálu, ve vrcholu, ustálí se nit v takové poloze, že její prodloužení prochází těžištěm protější stěny. Proto definujeme *těžnici čtyřstěnu* takto: *Těžnice čtyřstěnu je úsečka, která spojuje těžiště stěny s protějším vrcholem.*

Úloha 9. *Máme dokázat, že těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem a že každá z nich je tímto bodem rozdělena v poměru* 3 : 1.

Řešení. Myšlenkový postup důkazu je následující (obr. 18). Nejprve budeme uvažovat o vzájemné poloze těžnic $t_D \equiv DD_1$, $t_A \equiv AA_1$, kde D_1 a A_1 jsou těžnice stěn ABC a BCD. Dokážeme, že se protínají v bodě T, který dělí obě těžnice v poměru 3 : 1. Pak vrchol A nahradíme postupně vrcholy B a C, tj. těžnici t_A nahradíme postupně těžnicemi $t_B \equiv BB_1$, $t_C \equiv CC_1$, kde B_1 a C_1 jsou těžiště stěn ACD a ABD. Zjistíme, že všechny těžnice procházejí bodem T, pro který platí $DT = 3.D_1T$. Odtud pak plyne tvrzení věty.



Obr. 18

Bod D_1 je průsečíkem těžnic AM a CP trojúhelníka ABC; body M a P jsou po řadě středy hran BC a AB. Těžiště A_1 leží na těžnici DM trojúhelníka BCD. Obě těžnice AA_1 a DD_1 daného čtyřstěnu *leží tedy v rovině* AMD. Protože body A_1, D_1 leží uvnitř stran DM a AM trojúhelníka AMD, protínají se úsečky AA_1 a DD_1 ve vnitřním bodě T.

Podle známé vlastnosti těžiště trojúhelníka platí

$$DA_1 = 2.MA_1, \quad AD_1 = 2.MD_1 \quad . \tag{1}$$

Stejnolehlost v rovině ADM se středem v bodě M a koeficientem $\frac{1}{3}$ převádí podle (1) body A, D po řadě v body D_1 a A_1. Je tedy

$$A_1D_1 \parallel AD, \quad A_1D_1 = \frac{1}{3} AD \, . \tag{2}$$

Stejnolehlost v téže rovině, která má střed v bodě T a převádí A v A_1, převádí podle (2) také D v D_1, a tudíž úsečku AD v úsečku A_1D_1. Má tedy podle (2) koeficient

$-\frac{1}{3}$. Odtud vyplývá, že platí

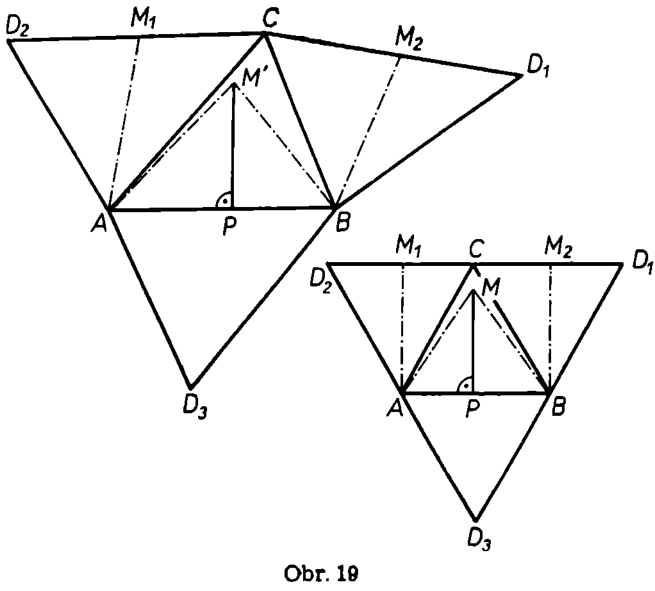
$$AT = 3 . A_1T, \quad DT = 3 . D_1T. \tag{3}$$

Nahradíme-li vrchol A postupně vrcholy B a C, shledáme, že podobným působem každá z těžnic t_B a t_C protíná těžnici t_D v bodě T, pro který podle (3) platí $DT = 3 . D_1T$; je to v obou případech týž bod. Pro tento bod T platí mimo (3) ještě vztahy

$$BT = 3 . B_1T, \quad CT = 3 . C_1T.$$

Tím je daná úloha řešena.

Užitím rovinných průseků můžeme řešit planimetricky



Obr. 19

i úlohy, které by jinak vyžadovaly znalostí zvláštních stereometrických vět. V následující úloze určíme tímto způsobem vzdálenost bodu od přímky.

Úloha 10. *Je dán čtyřstěn ABCD svou sítí; M je střed jeho hrany CD. Máme určit konstruktivně vzdálenost bodu M od přímky AB (v prostoru). Pro pravidelný čtyřstěn máme vyjádřit tuto vzdálenost jako funkci délky hrany čtyřstěnu.*

Řešení. Síť daného čtyřstěnu je dána obrazcem složeným ze čtyř trojúhelníků (obr. 19a). Vzdálenost MP zjistíme jako výšku trojúhelníka ABM, který sestrojíme ve skutečné velikosti ABM'. K tomu potřebujeme určit pomocí sítě skutečné délky úseček AM a BM. Bod M má v síti obrazy M_1, M_2; délky úseček AM_2, BM_1 jsou skutečné velikosti úseček AM, BM, takže z nich můžeme sestrojit trojúhelník ABM' a v něm hledanou úsečku $M'P = MP$.

Pro pravidelný čtyřstěn je úloha řešena v obr. 19b. Je-li a délka hrany tohoto čtyřstěnu, je $AM_2 = BM_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Trojúhelník ABM' je rovnoramenný se základnou $AB = a$. Je tedy $AP = \frac{a}{2}$, $AM' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ a podle Pythagorovy věty je

$$PM^2 = AM^2 - AP^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2};$$

tedy

$$PM = PM' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Následující úlohy se opírají o pojem kolmosti přímky a roviny; proto si napřed připomeneme jeho definici a na příkladech si ukážeme některé vlastnosti týkající se tohoto vztahu.*)

Definice: Přímka p je kolmá k rovině ϱ, je-li kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, které procházejí průsečíkem $p.\varrho$.

Z vět týkajících se vztahu kolmosti uvedeme jen ty, které budeme dále potřebovat:

1. *Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ϱ, které procházejí průsečíkem $p.\varrho$, je přímka p kolmá k rovině ϱ* (kriterium kolmosti přímky p a roviny ϱ).

Důsledek: Každá hrana kvádru je kolmá ke dvěma hranám, které mají s ní společný vrchol kvádru. Proto jsou hrany kvádru kolmé ke stěnám, které jsou s těmito hranami různoběžné.

2. *Přímky kolmé k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.*

Důsledek: Poněvadž pobočné hrany kolmého hranolu jsou kolmé na rovinu jeho podstavy, jsou navzájem rovnoběžné.

Z předcházejících vět je zřejmé, že průsek roviny určené stěnovou úhlopříčkou a hranou kvádru, která je s ní různoběžná, je obdélník; nazýváme jej *úhlopříčný řez kvádru.* Každý úhlopříčný řez kvádru je obdélník, jehož úhlopříčkami jsou tělesové úhlopříčky kvádru.

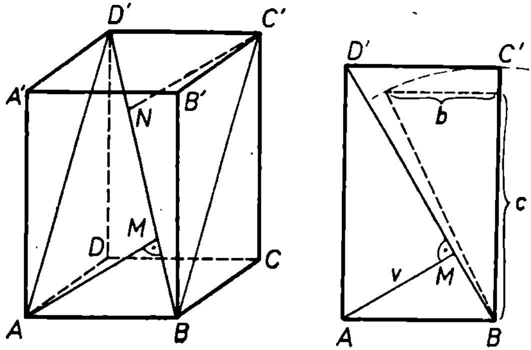
Užitím úhlopříčného řezu lze řešit celou řadu úloh o kvádru.

Úloha 11. *Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Máme určit a) konstruktivně b) výpočtem vzdálenost vrcholu A od tělesové úhlopříčky BD'; je dáno např. $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$.*

Řešení. a) Abychom sestrojili úsečku, jejíž velikost udává

*) Důkazy zde uvedených stereometrických vět najde čtenář v učebnici deskr. geometrie pro 10. tř., str. 35 a další.

vzdálenost bodu A od úhlopříčky BD', zobrazíme úhlopříčný řez $ABC'D'$ ve skutečné velikosti; je to obdélník, jehož strany mají velikosti a, $\sqrt{b^2 + c^2}$ (obr. 20a, b). Sestrojíme-li v něm $AM \perp BD'$, je velikost úsečky AM hledanou vzdáleností.



Obr. 20ab

b) Úhlopříčka BD' má velikost $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; vzdálenost vrcholu A od přímky BD' je výškou $AM =$ $= v$ v pravoúhlém trojúhelníku ABD'. Pro obsah trojúhelníka ABD' platí

$$\frac{1}{2} a \cdot \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{1}{2} u \cdot v$$

a odtud

$$v = \frac{a \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ;$$

pro daná čísla dostaneme $v \doteq 3{,}5$.

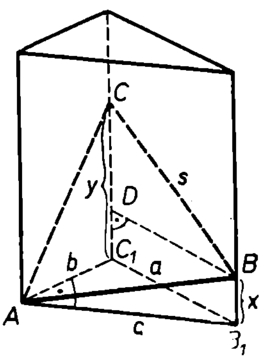
Poznámka. Vzdálenost BM paty M kolmice sestrojené z bodu A na přímku BD' od bodu B podle Eukleidovy věty pro odvěsnu je

$$BM = \frac{a^2}{u} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Určete sami podobným způsobem vzdálenosti vrcholů C a B' od úhlopříčky BD'. Uvažujte pak o případu, když $a = b$. Co plyne odtud pro paty kolmic sestrojených z vrcholů A a C na přímku BD'? Co plyne z nalezených výsledků pro případ, že kvádr je krychlí? Jakou vzájemnou polohu mají paty kolmic spuštěných z vrcholů A, C, B' a přímka BD'?

Úloha 12. *Podstavou kolmého trojbokého hranolu (o dostatečně velké výšce) je pravoúhlý trojúhelník AB_1C_1 s přeponou B_1C_1. Máme protnout hranol rovinou procházející vrcholem A v rovnostranném trojúhelníku ABC.*

Řešení. Nejprve se musíme zamyslet nad tím, co je třeba určit, abychom na modelu hranolu mohli nakreslit řez žádaných vlastností. Nejvýhodnější bude, budeme-li znát délky úseček BB_1 a CC_1. Proto se pokusíme určit tyto délky, a to nejprve výpočtem a pak konstruktivně.



Obr. 21

Označme velikosti úseček (obr. 21): $B_1B = x$, $C_1C = y$, $AB_1 = c$, $AC_1 = b$, $B_1C_1 = a$, $AB = BC = AC = s$; pak je $DC = y - x$, přitom D je pata kolmice sestrojené z bodu B na CC_1.

Trojúhelníky AB_1B, AC_1C, BDC a AB_1C_1 jsou pravoúhlé; to snadno odůvodníte. Z nich plyne podle věty Pythagorovy

$$c^2 + x^2 = s^2,\ b^2 + y^2 = s^2\,, \tag{4}$$
$$a^2 + (y - x)^2 = s^2, \tag{5}$$
$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{6}$$

Dosazením (6) do (5) a užitím (4) vypočteme

$$2xy = s^2\,. \tag{5'}$$

Soustava rovnic (4), (5) je ekvivalentní se soustavou (4), (5′). Z (5′) dostaneme po umocnění dvěma

$$4x^2y^2 = s^4, \tag{5''}$$

která za předpokladu, že $x \geq 0$, $y \geq 0$, má totéž řešení jako (5′). Dosadíme-li do (5″) za x^2 a y^2 z (4), dostaneme po jednoduché úpravě

$$3s^4 - 4s^2(b^2 + c^2) + 4b^2c^2 = 0\,.$$

Řešíme-li tuto rovnici podle s^2, dostaneme

$$s^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2 \pm \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2}).$$

Vzhledem k tomu, že musí být $s^2 > 0$, vyhovuje jedině kořen

$$s^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2) + \sqrt{(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2}\,. \tag{7}$$

Výraz pod odmocnítkem je vždy kladný vzhledem k tomu, že je $b > 0, c > 0$, neboť $b^4 - b^2c^2 + c^4 = \left(b^2 - \frac{c^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0.$

Poněvadž v pravoúhlém trojúhelníku AB_1C_1 platí vztah (6) i vztah

$$bc = av, \tag{8}$$

kde v je velikost výšky sestrojené z vrcholu A na přeponu B_1C_1, dostaneme ze (7)

$$s^2 = \frac{2}{3}(a^2 + \sqrt{a^4 - 3a^2v^2}) = \frac{2}{3}a(a + \sqrt{a^2 - 3v^2}). \quad (7')$$

Jestliže známe s^2, určíme velikosti x, y hledaných úseček BB_1, CC_1 ze vztahů (4)

$$x = \sqrt{s^2 - c^2}\,,\ y = \sqrt{s^2 - b^2}\ . \quad (9)$$

Přesvědčte se sami, že vypočtená čísla vyhovují podmínkám (4), (5′), resp. (4), (5″).

Máme-li určit graficky velikosti úseček BB_1, CC_1, sestrojíme nejprve stranu s na základě vztahu (7′) a pak na základě vztahu (9) hledané úsečky.

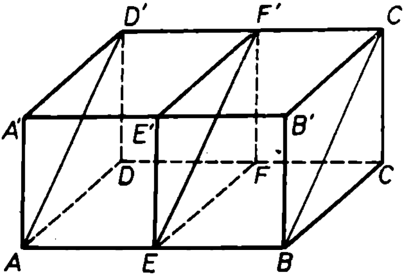
Konstrukci strany rovnostranného trojúhelníka nebudeme zde provádět, předpokládáme však, že si ji provedete sami. Naznačíme jen postup konstrukce:

a) Sestrojíme úsečku délky $v\sqrt{3}$ (jako výšku rovnostranného trojúhelníku o straně délky $2v$)
b) Podle obrácení Pythagorovy věty sestrojíme úsečku délky $\sqrt{a^2 - 3v^2}$.
c) Sestrojíme úsečku délky $a + \sqrt{a^2 - 3v^2}$.
d) Sestrojíme obdélník o stranách $\frac{2}{3}a$, $a + \sqrt{a^2 - 3v^2}$.
e) Sestrojený obdélník „proměníme“ na čtverec o straně délky s.

Známe-li velikosti úseček BB_1, CC_1, je tím poloha hledané roviny určena.

Je-li $b = c$, je celá konstrukce podstatně jednodušší; proveďte toto řešení sami.

Poznámka. Předcházející úlohu je možno řešit přímo bez výpočtu. Řešení však vyžaduje hlubší znalosti týkající se pravoúhlého promítání, což je mimo rámec této publikace.



Obr. 22

Než přistoupíme k řešení dalších úloh, připomeňme si větu: *Tři různé roviny mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*

1. Každé dvě z těchto rovin jsou navzájem rovnoběžné.

2. Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je s každou z nich různoběžná. Roviny rovnoběžné protínají rovinu, která je s nimi různoběžná, v přímkách rovnoběžných.

3. Tři roviny nemají žádný společný bod a protínají se po dvou ve třech přímkách, které jsou navzájem rovnoběžné.

4. Tři roviny procházejí touž přímkou.

5. Tři roviny mají společný jediný bod, kterým prochází průsečnice každých dvou z nich.

V případech 1, 2, 3 nemají tři roviny žádný společný bod, v případě 5 mají společný jediný bod a v případě 4 mají společnou přímku.

Na obr. 22 je zobrazen kvádr $ABCDA'B'C'D'$ s úhlopříčným řezem $ABC'D'$ a s řezem $EFF'E'$, jehož vrcholy jsou středy čtyř rovnoběžných hran kvádru. Na obraze můžeme vyhledat příklady všech pěti možných vzájemných poloh tří rovin; proveďte to. Najděte dále sami ve svém okolí modely na vzájemnou polohu tří rovin, o níž jedná uvedená věta (příklady: přihrádky ve skříni, stěny v místnosti, střechy domů atd.). Vymodelujte vzájemné polohy rovin užitím papírových desek.

Jestliže rovina protíná jen čtyři pobočné stěny kvádru, vznikne čtyřúhelník, jehož dvě a dvě protější strany jsou rovnoběžné, tj. rovnoběžník; to vyplývá z případu 2 z předchozí věty.

★

Snad jste někdy pozorovali vodní hladinu v kádince, která měla tvar kvádru. Pozorovali jste, jak se tvar hladiny měnil, když jste ji nakláněli. Zasahuje-li hladina jen tři stěny, má tvar trojúhelníku, jestliže obsahuje celou hranu kádinky, má tvar obdélníka; zasahuje-li hladina všechny pobočné hrany kádinky, má tvar rovnoběžníku atd. Máte-li k dispozici kádinku tvaru kvádru, např. akvárium, naplňte ji do poloviny vodou, odhadněte na základě pokusu, pro kterou polohu se objeví některý vrchol podstavy (nebo podstavná hrana) právě na hladině, pro kterou polohu bude mít asi hladina největší a nejmenší velikost a pak se pokuste svou domněnku zdůvodnit matematicky. Příkladem vám může být následující úloha:

Úloha 13. *Akvárium má tvar krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky* 1 *se dnem $ABCD$ a do poloviny naplněné vodou. Je nakloněno tak, že vodní hladina sahá až k bodu B' a hrana AA' je pod hladinou až do vzdálenosti $AX = x$.*

a) *Máme načrtnout v obrázku obvod vodní hladiny a sestrojit její skutečnou velikost.*

b) *Máme vyjádřit velikost hladiny jako funkci proměnné x.*

Řešení. Provedete-li si sami pokus, zjistíte, že celé dno zůstane pod hladinou a že hladina prochází bodem D. To vás vede k domněnce, že hladina je rovnoběžník $B'XDZ$, který má jednu svou úhlopříčku v tělesové úhlopříčce krychle DB' (obr. 23a).

Střed S rovnoběžníka $B'XDZ$ je středem úsečky DB'

a zároveň úsečky XZ. Označme S_1 střed čtverce $ABCD$; v rovině BDB' vymezuje rovina $\varrho \equiv B'DX$ trojúhelník DBB' a podle věty o střední příčce je

$$SS_1 = \frac{1}{2} BB' = \frac{1}{2} \quad . \tag{10}$$

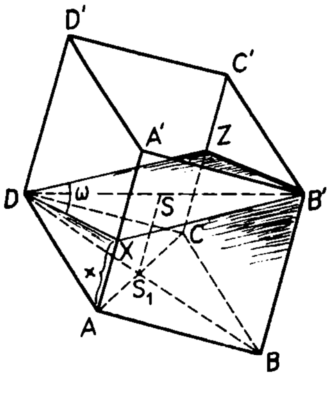
V rovině ACC' vymezuje rovina ϱ lichoběžník $AXZC$ a podle věty o střední příčce je

$$SS_1 = \frac{1}{2} (AX + CZ) = \frac{1}{2} (x + CZ) \,. \tag{11}$$

Spojením vztahů (10), (11) dostaneme

$$CZ = 1 - x \,. \tag{12}$$

Je tedy $A'X = CZ = 1 - x$, $AX = C'Z = x$. Rovina ϱ hladiny vodní rozdělí krychli ve dvě shodné části: část spodní splyne s částí horní, splynou-li dvojice bodů $A, C' - B, D' - C, A' - D, B' - X, Z$.

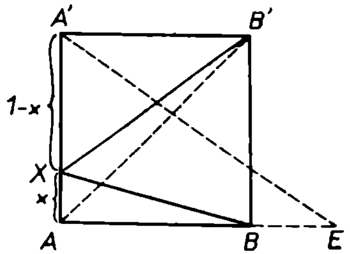


Obr. 23a

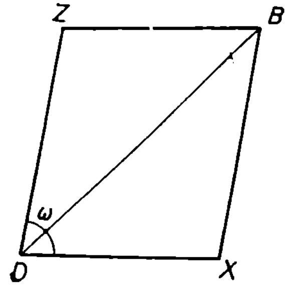
Je-li tedy akvárium naplněno do poloviny vodou, zaplní voda při naklonění akvária skutečně spodní část omezenou rovinou ϱ.

Nyní rozřešíme obě úlohy a) a b).

Abychom mohli sestrojit skutečnou velikost rovnoběžníka $B'XDZ$, musíme znát tři jeho určovací prvky. V daném případě můžeme snadno určit skutečné velikosti jeho stran DX, $B'X$ a skutečnou



Obr. 23b



Obr. 23c

velikost jeho úhlopříčky DB', která je tělesovou úhlopříčkou krychle.

Nejprve sestrojíme úsečky DX a $B'X$ jako přepony pravoúhlých trojúhelníků ADX a $A'B'X$ o odvěsnách 1, x, resp. 1, $1 - x$. Pak sestrojíme skutečnou velikost úhlopříčky $B'D = A'E = \sqrt{3}$ (obr. 23a). Z těchto prvků pak sestrojíme rovnoběžník $DXB'Z$ (obr. 23 bc).

b) Abychom určili funkční závislost velikosti P hladiny na velikosti x ponoru hrany AA', vyjádříme velikost hladiny pomocí stran rovnoběžníku DX, DZ a jimi sevřeného úhlu ω; $\omega = \sphericalangle XDZ$. Platí

$$P = DX . DZ . \sin \omega,$$

tj.

$$P^2 = DX^2 . DZ^2 . \sin^2 \omega . \tag{13}$$

Pro velikosti stran DX, DZ dostaneme podle věty Pythagorovy vztahy

$$\begin{aligned} DX^2 &= 1 + x^2 , \\ DZ^2 &= 1 + (1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2. \end{aligned} \tag{14}$$

Abychom v (13) vyjádřili také $\sin^2 \omega$ pomocí x, použijeme pro trojúhelník DXZ kosinové věty

$$XZ^2 = DX^2 + DZ^2 - 2DX.DZ.\cos\omega\,,$$

z níž pak vypočteme $\cos\omega$ a dosadíme do (13). Za tím účelem vypočteme napřed ještě z lichoběžníku $ACZX$ délku jeho ramene jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách $\sqrt{2}$, $(1 - x) - x = 1 - 2x$.

$$XZ^2 = (1 - 2x)^2 + (\sqrt{2})^2 = 4x^2 - 4x + 3\,. \qquad (15)$$

Z kosinové věty plyne

$$2.DX.DZ.\cos\omega = DX^2 + DZ^2 - XZ^2.$$

Dosadíme-li sem z (14) a (15), máme

$$2.DX.DZ.\cos\omega = 2x(1 - x)\,. \qquad (16)$$

Rovnost (16) umocníme dvěma a dosadíme do (13); vyjde $P^2 = DX^2.DZ^2 - DX^2.DZ^2.\cos^2\omega = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) - x^2(1 - x)^2 = 2(x^2 - x + 1)$, takže

$$P = \sqrt{2(x^2 - x + 1)}\,. \qquad (17)$$

Tím je daná úloha rozřešena.

Rozborem vztahu (17), který lze psát ve tvaru $P = \sqrt{2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}$, rozhodněte, pro která x nabývá funkce P své nejmenší a největší hodnoty, když je $0 \leqq x \leqq 1$.

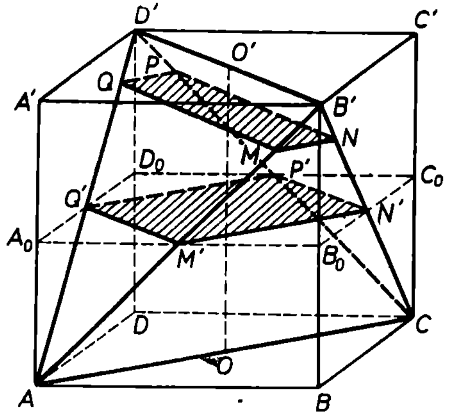
Uvažujte sami o součtech obsahů ponořených částí stěn, když se bude akvárium otáčet kolem osy DB'.

*

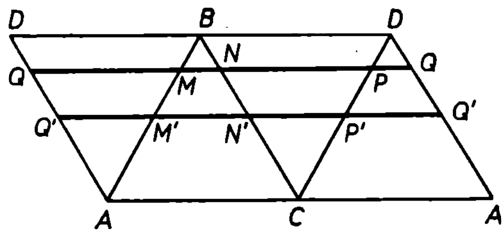
Než přistoupíme k další úloze, uveďme napřed pomocné věty, jichž v úloze užijeme:

1. Platí-li pro tři přímky v prostoru $a \parallel b$, $b \parallel c$, je $a \parallel c$.

2. Jsou-li a, b kolmé různoběžky a vedeme-li bodem P přímky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, jsou také a', b' kolmé různoběžky.



Obr. 24a



Obr. 24b

Úloha 14. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Máme dokázat tato tvrzení: a) Vrcholy A, C, B', D' jsou vrcholy pravidelného čtyřstěnu* **T**. *b) Roviny rovnoběžné se stěnami $ABCD$, $A'B'C'D'$ a protínající krychli, protínají čtyřstěn* **T** *v obdélnících. Máme vyjádřit jeden rozměr průsečného obdél-*

níka jako funkci druhého rozměru a stanovit obvod a obsah těchto obdélníků.

Řešení. a) Obrazce ACB', $CB'D'$, ACD', $AB'D'$ (obr. 24 a) jsou rovnostranné trojúhelníky; jejich strany jsou stěnovými úhlopříčkami krychle. Těleso jimi omezené je proto pravidelný čtyřstěn.

b) Rovina procházející středem krychle a rovnoběžná s rovinou $ABCD$ protíná krychli ve čtverci $A_0B_0C_0D_0$ a pravidelný čtyřstěn **T** ve čtverci $M'N'P'Q'$, jehož vrcholy jsou středy stran čtverce $A_0B_0C_0D_0$, což dovedete sami odůvodnit.

Uvažujme nyní o čtyřúhelníku $MNPQ$, v němž protíná čtyřstěn **T** jiná rovina rovnoběžná s rovinou $ABCD$. Podle věty 2 na str. 43 platí $MN \parallel M'N'$, $NP \parallel N'P'$, atd. Podle věty 1 na str. 47 je $MN \parallel M'N' \parallel P'Q' \parallel PQ$ a $NP \parallel \parallel N'P' \parallel Q'M' \parallel QM$. Je tedy řezem rovnoběžník. Poněvadž však $M'N' \perp M'Q'$ a $MN \parallel M'N'$ a $MQ \parallel M'Q'$, je podle věty 2 str. 47 $MN \perp MQ$; je tudíž řezem *obdélník*.

Poněvadž úsečka $M'N'$ je střední příčkou v trojúhelníku ACB', je $M'N' \parallel AC$ a proto je také $MN \parallel AC$; obdobně je $Q'M' \parallel B'D'$ a také $QM \parallel B'D'$. Toho užijeme při zobrazení obvodů řezů v síti (obr. 24b). Poněvadž je $MN \parallel AC$, $B'D' \parallel AC$ a $QM \parallel B'D'$, leží body Q, M, N, P, Q_1 v přímce. Zobrazí se tudíž obvod řezu $MNPQ$ jako úsečka $QQ_1 \parallel AA_1$.

Výpočet: Označíme-li délku úsečky $MN = PQ = x$, délku úsečky $NP = QM = y$, a délku hrany čtyřstěnu a, dostaneme z rovnosti $MN + NP = AC = a$ vztah

$$x + y = a,$$

tj.

$$y = a - x.$$

Rozměr y je *lineární funkcí* rozměru x. Obvod obdélníku $MNPQ$ je tedy

$$o = 2(x + y) = 2a\,.$$

Všechny uvažované řezy pravidelného čtyřstěnu mají *konstantní obvod.*

Obsah obdélníku $MNPQ$ je

$$P = x(a - x)\,,$$

čili

$$P = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Proveďte sami rozbor tohoto výsledku a zjistěte, který z obdélníků má největší obsah.

Poznámka. Je otázka, zdali lze každý pravidelný čtyřstěn vytvořit uvedeným způsobem z krychle. Na tuto otázku můžeme odpovědět kladně. Odůvodnění proveďte sami.

Z uvedeného „vytvoření" pravidelného čtyřstěnu plynou pro tento čtyřstěn některé vlastnosti, které si můžete sami snadno dokázat:

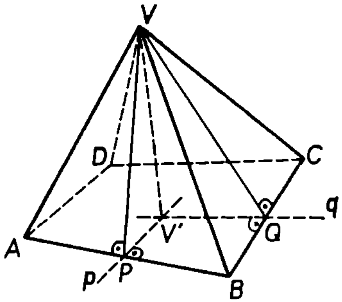
1. Přímky spojující středy protějších hran pravidelného čtyřstěnu se protínají v jednom bodě.

2. Je-li a délka hrany pravidelného čtyřstěnu, je vzdálenost středů protějších hran $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

3. Každá hrana pravidelného čtyřstěnu je kolmá na rovinu určenou středem této hrany a přímkou, na níž leží protější hrana.

*

Jistě je vám známo, že daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.

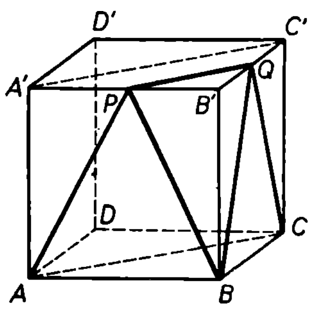


Obr. 25

Představme si, že je dán jehlan o podstavě $ABCD$ a vrcholu V a že tento jehlan je plný (např. dřevěný model), takže příslušné konstrukce můžeme provádět jen na jeho povrchu. Konstrukci paty kolmice sestrojené z vrcholu na rovinu podstavy provedeme takto (obr. 25):

Nejprve sestrojíme pobočné výšky VP, VQ ve stěnách ABV a BCV. Paty těchto výšek jsou P, Q. Pak narýsujeme na podstavě jehlanu kolmici p v bodě P ke hraně AB a kolmici q v bodě Q ke hraně BC. Průsečík V'_1 těchto kolmic je pata kolmice spuštěné z bodu V na rovinu $ABCD$. Uvedeného postupu užijeme v úloze 15.

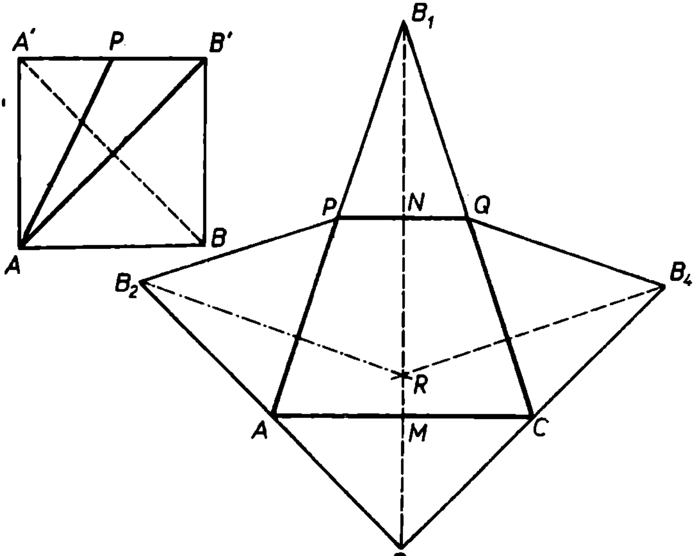
Úloha 15. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; střed hrany $A'B'$ je bod P. Máme určit konstruktivně vzdálenost bodu B od roviny ACP* (obr. 26a).



Obr. 26a

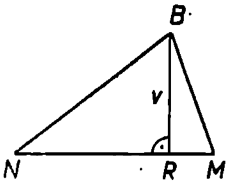
Řešení. Všechny konstrukce budeme provádět jen na povrchu krychle. Abychom mohli užít předcházejícího postupu k určení vzdálenosti bodu B od roviny ACP, sestrojíme pomocný jehlan, jehož podstava leží v rovině ACP a jehož vrchol je B. Proto sestrojíme nejprve průsek roviny ACP s krychlí. Tímto průsekem je rovnoramenný lichoběžník $ACQP$, kde Q je střed hrany $B'C'$ a PQ střední příčka trojúhelníka $A'B'C'$ (odůvodněte sami!). Za podstavu pomocného jehlanu zvolíme lichoběžník $ACQP$. Velikost výšky BR jehlanu udává hledanou vzdálenost. Určíme tedy patu R kolmice vedené z bodu B na rovinu ACP.

Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník $ACQP$ z jeho známých stran (obr. 26b). K němu připojíme trojúhelníky PQB_1, PAB_2, ACB_3, CQB_4 tak, abychom dostali síť jehlanu $BACQP$; přitom užijeme vztahů $PQ = QB = AP = CQ$; $AB = BC$. Podle známé věty o patě kolmice spuštěné z bodu na rovinu leží bod R jednak na přímce B_1B_3, jednak na kolmicích spuštěných po řadě z bodů B_2, B_4



Obr. 26b

na přímky AP, CQ. Úsečka $BR = v$ se jeví jako výška v trojúhelníku MNB, spuštěná z bodu B na stranu MN; přitom M, N značí středy základen AC, PQ lichoběžníka $ACQP$. Sestrojíme tedy trojúhelník MNB, v němž platí $MB = MB_3$, $NB = NB_1$ a jehož třetí strana je MN, a určíme jeho výšku BR (obr. 26c).



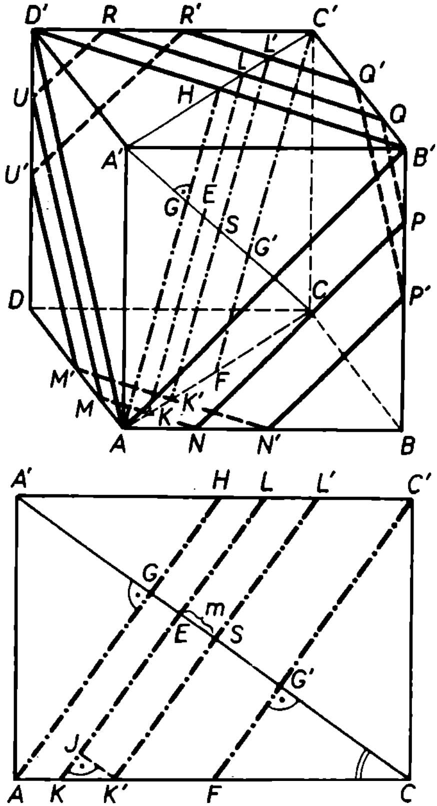
Obr. 26c

Početní řešení zde nebudeme provádět. Doporučujeme vám, abyste si je provedli sami. Sledujte provedené konstruktivní řešení a jednotlivé kroky postupu nahraďte odpovídajícími výpočty. Pro kontrolu uvádíme výsledek: $v = \frac{2}{3}a$, kde a je velikost hrany krychle.

Úloha 16. *Krychli $ABCDA'B'C'D'$ máme protnout rovinou rovnoběžnou s rovinou $AB'D'$, aby měla od středu krychle vzdálenost m. Máme zvolit vzdálenost m tak, aby průsekem byl šestiúhelník a máme určit závislost obvodu průseku na proměnné m.*

Řešení. Rovina $AB'D'$ protíná rovinu úhlopříčného řezu ACC' v přímce AH, která spojuje vrchol A se středem H stěnové úhlopříčky $A'C'$ (obr. 27a, b). Označme $AA' = a$, pak je $A'C' = a\sqrt{2}$, $A'H = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; proto platí $\Delta\, AA'H \sim \Delta\, CAA'$. Odtud plyne, že $\sphericalangle A'AH = \sphericalangle ACA'$; proto je $AH \perp CA'$. Poněvadž je přímka HB' kolmá k rovině ACC', je rovina $AB'D'$ kolmá k tělesové úhlopříčce CA'. Přímka AH protíná tuto úhlopříčku v bodě G, pro který platí $A'G = \frac{1}{3}A'C$, což snadno sami dokážete. Je-li přímka CA' kolmá k rovině $AB'D'$, je kolmá i ke všem rovinám, které jsou s touto rovinou rovnoběžné.

Každá rovina procházející bodem M, který leží uvnitř hrany AD a která je rovnoběžná s rovinou $AB'D'$ (je proto



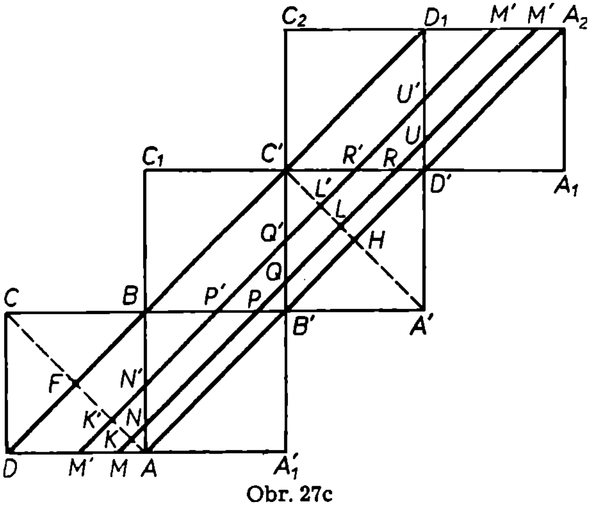
Obr. 27ab

rovnoběžná s úsečkou BD), protíná krychli v šestiúhelníku $MNPQRU$. Rovinu ACC' protíná v přímce $KL \parallel AH$ a vzdálenost středu S krychle od přímky KL je rovna m. Tyto roviny šestiúhelníkových řezů mohou protínat úsečku AC' jedině ve vnitřních bodech úsečky GG', kde bod G' je souměrně sdružený s bodem G podle středu S.

Poněvadž je $A'G = \frac{u}{3}$, kde u značí délku úhlopříčky AC', je $SG = \frac{1}{2}GG' = \frac{1}{2}GA' = \frac{u}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Je tedy číslo m udávající vzdálenost roviny řezu vázáno vztahem

$$0 \leqq m < \frac{a\sqrt{3}}{6}. \tag{18}$$

Ve zvláštním případě rovina procházející středem krychle



Obr. 27c

S a kolmá na tělesovou úhlopříčku $A'C$ prochází středy těch šesti hran krychle, které neprocházejí vrcholy A' a C. Všechny strany tohoto šestiúhelníku mají délku $\frac{a}{\sqrt{2}}$, což je také vzdálenost jeho vrcholů od středu S. Je tudíž průsekem této roviny s krychlí *pravidelný šestiúhelník*, a to $M'N'P'Q'R'U'$.

Vyjádříme velikost obvodu šestiúhelníku $MNPQRU$. K určení této velikosti můžeme výhodně užít sítě krychle sestrojené na obr. 27c. Obvod trojúhelníka $AB'D'$ se v této síti zobrazí jako úsečka $AB'D'A_2$. Poněvadž strany šestiúhelníka $MNPQRU$ jsou se stranami trojúhelníka $AB'D'$ rovnoběžné, bude obrazem tohoto šestiúhelníku úsečka $MNPQRUM'$ sítě, rovnoběžná a shodná s úsečkou $AB'D'A_2$ Z toho plyne: *Všechny řezy, v nichž protínají krychli roviny rovnoběžné s rovinou $AB'D'$ a splňující podmínku* (18), *mají konstantní obvod*

$$o = 3a\sqrt{2}\,.$$

Je tedy velikost obvodu řezu na čísle m nezávislá.

Vypočtěte sami obsah šestiúhelníku $MNPQRU$. Nejprve určete (obr. 27a) užitím podobných trojúhelníků ACA', $KK'J$ ($KJ \perp KL$) velikost úsečky KK' a užitím stejnolehlých trojúhelníků AMN, $AM'N'$ velikost úsečky MN. Poněvadž platí $MN + NP = a \cdot \sqrt{2}$ (viz obr. 27c), snadno se určí i velikost úsečky NP. Pak obsah P šestiúhelníku $MNPQRU$ můžete určit tak, že napřed vypočtete obsah rovnostranného trojúhelníku o straně $PN + 2\,MN$.

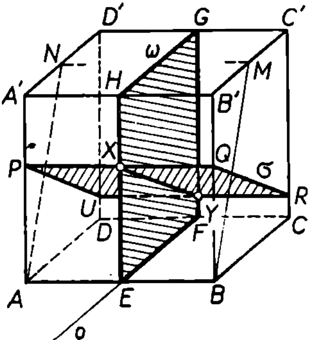
Výsledek: $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}(a^2 - 4m^2)$. Který z těchto šestiúhelníků je největší?

★

Jako v rovině můžeme i v prostoru vyšetřovat množiny všech bodů dané vlastnosti (geometrická místa bodů). Některé množiny bodů dostaneme jistým rozšířením z útvarů planimetrických; např.: množinou všech bodů v rovině π, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost, je osa o úsečky A, B. Jestliže se osa o otáčí kolem přímky AB, vytvoří rovinu ω, jejíž každý bod má od bodů A, B touž vzdálenost. Rovina ω prochází středem O úsečky AB a je na ni kolmá. Nazývá se *rovinou souměrnosti úsečky* AB.

Při konstruktivních úlohách jde zpravidla o průniky množin bodů dané vlastnosti (hledáme-li body, které mají mít dvě nebo více vlastností). Jednoduchý příklad uvádíme v následující úloze:

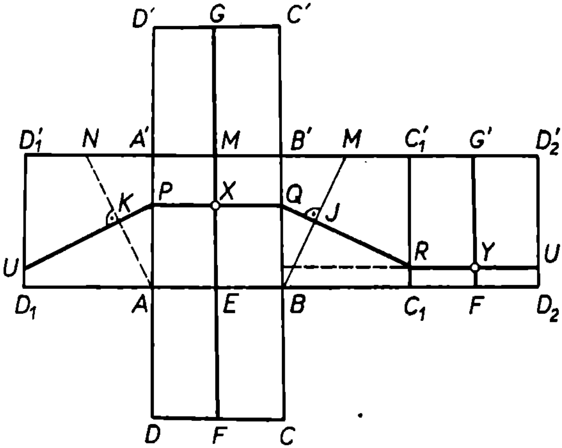
Úloha 17. *Na povrchu krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a určete všechny body, které mají stejné vzdálenosti od vrcholů A, B a od bodu M, který je středem hrany $B'C'$.*



Obr. 28a

Řešení. Množinou všech bodů majících stejnou vzdálenost od bodů A, B je rovina souměrnosti úsečky AB. Tato rovina ω protíná povrch krychle v obvodu čtverce $EFGH$ který je množinou všech bodů na povrchu krychle, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost. Množinou všech bodů, které mají od bodů B, M stejnou vzdálenost, je rovina souměrnosti úsečky BM. Tato rovina ϱ protíná povrch krychle v obdélníku $PQRU$. Snadno se dokáže, že body Q, R, resp. P, U jsou vnitřními body hran BB', CC', resp. AA', DD'.

Společné body obou nalezených množin jsou hledané body. Poněvadž platí $\varrho \perp BM$ a $BM \parallel \omega$, jsou roviny ϱ a ω různoběžné. Jejich průsečnice protíná povrch krychle v bodech X, Y.



Obr. 28b

Obě množiny můžeme výhodně zobrazit v síti, což umožní určit konstruktivně i početně polohu bodů X, Y. Obvod obdélníku $EFGH$ se zobrazí v síti do úseček $FEHG$ a FG obvod obdélníku $PQRU$ v lomenou čáru $UPQRU$. Společné body obou těchto čar jsou body X, Y (obr. 28a).

Určíme ještě početně vzdálenost bodu X od hrany AB a vzdálenost bodu Y od hrany CD. Z podobnosti trojúhelníků $\Delta\, BB'M \sim \Delta\, BJQ$ (obr. 28b) plyne

$$BQ = \frac{BM}{BB'} \cdot BJ\,.$$

Poněvadž je $BM = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, $BJ = \frac{a}{4}\sqrt{5}$, $BB' = a$, je

$$BQ = \frac{5a}{8}\,.$$

Je tedy $XE = \frac{5a}{8}$. Poněvadž $\Delta\,BB'M \cong \Delta\,RLQ$ (s u s), je $LQ = B'M = \frac{a}{2}$; proto je

$$CR = BQ - LQ = \frac{5a}{8} - \frac{a}{2} = \frac{a}{8}\,.$$

Bod X leží na střední příčce EH stěny $ABB'B$ ve vzdálenosti $\frac{5}{8}a$ od hrany AB a bod Y na střední příčce FG čtverce $CDD'C'$ ve vzdálenosti $\frac{a}{8}$ od hrany CD.