Karl-Heinz Elster; R. Götz; J. Magerod

Kuhn-Tucker-Theorie für Funktionen mit Richtungsableitungen

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 1, 85--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127059

Mat. čas. 24, 1974, No 1, 85—95

KUHN-TUCKER-THEORIE FÜR FUNKTIONEN MIT RICHTUNGSABLEITUNGEN

K. H. ELSTER — R. GÖTZ — J. MAGEROD

In einer 1966 erschienenen Arbeit von J. Bram ([3]) wurde die Aussage des Satzes von Kuhn und Tucker (vgl. [8]) auf Optimierungsprobleme übertragen, bei denen die Zielfunktion nur Richtungsableitungen besitzt, während die Restriktionsfunktionen der Klasse C^1 angehören. In der vorliegenden Arbet werden diese Untersuchungen weitergeführt, wobei sich eine gegenüber Bram wesentlich verallgemeinerte Form dieses Satzes ergibt[1]). Beziehungen zu lokalen und globalen Optimalitätsbedingungen bzw. Sattelpunktbedingungen werden untersucht und notwendige Optimalitätsbedingungen formuliert.

Wir gehen von folgendem Problem aus:

P1: $\max \{f(x) \mid x \in G\}$,
$G = \{x \mid x \in R^n,\ g_j(x) \geqq 0,\ j \in J\}$
mit der Indexmenge $J = \{1, \ldots, m\}$ und den stetigen Funktionen
$f : R^n \to R,\ g_j : R^n \to R,\ j \in J$.

Wir sagen, daß eine Funktion $h(x) : R^n \to R$ im Punkte $x^0 \in R^n$ eine Richtungsableitung bezüglich der Richung $u \in R^n$ besitzt, wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial h(x^0)}{\partial u} := \lim_{\lambda \to +0} \frac{h(x^0 + \lambda u) - h(x^0)}{\lambda} \tag{1}$$

existiert und endlich ist. Den trivialen Fall $u = 0$ schließen wir zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen nicht aus. Hierbei handelt es sich jeweils nur um eine einseitige Richtungsableitung, für die im allgemeinen keine Beziehung zu der entsprechenden Ableitung bezüglich $(-u) \in R^n$ besteht.

Im folgenden verwenden wir die Abkürzung

$$D_u h(x^0) := \frac{\partial h(x^0)}{\partial u}.$$

---

[1]) Vgl. dazu auch Magerod [9], wo Aussagen ähnlich denen in der vorliegenden Arbeit für solche Funktionen getroffen werden, die Richtungsableitungen bezüglich aller Richtungen besitzen.

In Abhängigkeit vom Punkt $x^0 \in G$ definieren wir den Kegel der Richtungsableitungen einer Funktion $h(x)$ gemäß

$$C_h(x^0) := \{u \mid u \in R^n; \text{ es existiert } D_u h(x^0)\}.$$

Weiter definieren wir

$$J^0 := \{j \mid j \in J,\ g_j(x^0) = 0\}$$

und

$$C_J(x^0) := \bigcap_{j \in J} C_{g_j}(x^0); \quad C_{J^0}(x^0) := \bigcap_{j \in J^0} C_{g_j}(x^0),$$

$$C(x^0) = C_f(x^0) \cap C_{J^0}(x^0).$$

Die Menge

$$K(x^0) := \{u \mid u \in C(x^0);\ D_u g_j(x^0) \geqq 0\ \forall j \in J^0\}.$$

heißt verallgemeinerter linearisierender Kegel (vgl. [1]).

Dem Vorgehen von Berge, Ghouila-Houri [2] folgend, stellen wir dem Ausgangsproblem P1 folgende Probleme gegenüber:

P2 (Lokales Maximum-Problem):

Gesucht ist ein Punkt $x^0 \in G$, so daß zu jedem $u \in R^n$ eine Zahl $\lambda^0 > 0$ existiert mit

$$\left.\begin{array}{r} x^0 + \lambda u \in G \\ \lambda \in (0, \lambda^0] \end{array}\right\} \Rightarrow f(x^0 + \lambda u) \leqq f(x^0).$$

P3 (Richtungsproblem):

Gesucht ist ein Punkt $x^0 \in G$ mit

$$u \in K(x^0) \Rightarrow D_u f(x^0) \leqq 0.$$

P4 (Lagrange-Problem):

Gesucht ist ein Punkt $(x^0, p^0) \in G \times R_+^m$ mit

$$D_u f(x^0) + \sum_{j \in J^0} p_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \quad \forall u \in C(x^0),$$

$$p_j^0 g_j(x^0) = 0 \quad \forall j \in J.$$

P5 (Sattelpunkt-Problem):

Gesucht ist ein Punkt $(x^0, p^0) \in R^n \times R_+^m$ mit

$$\Phi(x, p^0) \leqq \Phi(x^0, p^0) \leqq \Phi(x^0, p) \quad \forall (x, p) \in R^n \times R^m.$$

Dabei ist

(2) $$\Phi(x, p) := f(x) + \sum_{j \in J} p_j g_j(x), \; (x, p) \in R^n \times R_+^m$$

die Lagrange-Funktion von $f(x)$, $g_j(x)$, $j \in J$.

Für die späteren Betrachtungen benötigen wir die folgenden zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Seien $f(x) : R^n \to R$ eine konkave Funktion und $C_f(x^0)$ eine konvexe Menge. Dann ist $D_u f(x^0)$ auf $C_f(x^0)$ eine konkave Funktion (in u).*

Beweis: Seien $u^1, u^2 \in C_f(x^0)$ sowie $\lambda \in [0, 1]$. Wir setzen für $\Theta \in (0, 1)$

$$x^1 := x^0 + \Theta u^1, \; x^2 := x^0 + \Theta u^2,$$

und erhalten

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 = x^0 + \Theta[\lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2].$$

Da $f(x)$ konkav ist, ergibt sich

$$f(x^0 + \Theta[\lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2]) \geqq \lambda f(x^0 + \Theta u^1) + (1 - \lambda) f(x^0 + \Theta u^2)$$

und weiter wegen $\Theta > 0$

$$\frac{f(x^0 + \Theta[\lambda u^1 + (1 - \lambda) u^2) - f(x^0)}{\Theta} \geqq \lambda \frac{f(x^0 + \Theta u^1) - f(x^0)}{\Theta} + \\ + (1 - \lambda) \frac{f(x^0 + \Theta u^2) - f(x^0)}{\Theta}.$$

Der Grenzübergang $\Theta \to +0$ liefert, da $C_f(x^0)$ konvex ist,

$$D_{\lambda u^1 + (1-\lambda) u^2} f(x^0) \geqq \lambda D_{u^1} f(x^0) + (1 - \lambda) D_{u^2} f(x^0).$$

Hilfssatz 2. *Wenn $x^0 \in G$ eine Lösung von* P1 *ist, so besitzt das System*

(3) $$D_u f(x^0) > 0,$$
$$D_u g_j(x^0) > 0, \quad j \in J^0,$$

keine Lösung $u \in C(x^0)$.

Beweis. Aus der Annahme, daß eine Lösung $\overline{u} \in C(x^0)$ des Systems (3) existiert, ergibt sich für $\lambda \in (0, \lambda^0]$ mit hinreichend kleinem $\lambda^0 > 0$

$$f(x^0 + \lambda \overline{u}) - f(x^0) > 0,$$

$$g_j(x^0 + \lambda \overline{u}) > 0, \; j \in J^0.$$

Außerdem gilt, sobald nur λ^0 hinreichend klein gewählt wird,

$$g_j(x^0 + \lambda \overline{u}) > 0, \; j \in J \setminus J^0, \; \lambda \in (0, \lambda^0].$$

Daraus folgt

$$f(x^0 + \lambda\bar{u}) > f(x^0),$$
$$u^0 + \lambda\bar{u} \in G,$$

und das ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von $x^0 \in G$.

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von F. John [6] auf Funktionen dar, die lediglich Richtungsableitungen besitzen.

Satz 1. *Die Menge $C(x^0)$ sei konvex; die Richtungsableitungen $D_u f(x^0)$, $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien konkav (in u) auf $C(x^0)$.*

Dann gilt:

Wenn $x^0 \in G$ Lösung von P1 *ist, so existieren Zahlen p_0^0, $p_j^0 \geqq 0$ $(j \in J^0)$, die nicht sämtlich verschwinden, mit*

$$p_0^0\, D_u f(x^0) + \sum_{j \in J^0} p_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \qquad \forall\, u \in C(x^0).$$

Beweis. Wegen Hilfssatz 2 ist der Hauptsatz in [2, S. 67] anwendbar, was sofort die Aussage von Satz 1 liefert.

Für differenzierbare Funktionen $f(x)$, $g_j(x)$, $j \in J$, ist in Satz 1 die Konkavitätsbedingung der Richtungsableitungen trivialerweise erfüllt. Satz 1 geht dann in den bekannten Satz von F. John [6] über.

Wegen Hilfssatz 1 gilt der Satz 1 auch für konkave Funktionen $f(x)$, $g_j(x)$, $j \in J$, sofern die entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind. Die in Satz 1 enthaltene Forderung nach Konkavität der Richtungsableitung dieser Funktionen ist demgegenüber weit weniger scharf, wie folgendes Beispiel zeigt.

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ x + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{für } x < 0, \end{cases} \qquad (x \in R)$$

ist selbst nicht konkav, hat aber im Punkte $x^0 = 0$ die konkave Richtungsableitung

$$D_u f(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \geqq 0, \\ u & \text{für } u < 0 \end{cases} \qquad (u \in R).$$

Ob die Forderung nach Konkavität der Richtungsableitung abgeschwächt werden kann, ist unseres Wissens noch nicht geklärt.

Einfache Beispiele zeigen jedoch, daß sie nicht einfach weggelassen werden kann.

Zur Herleitung weiterer Aussagen der Kuhn-Tucker-Theorie für Funktionen mit Richtungsableitungen formulieren wir für den zulässigen Bereich G die folgenden Regularitätsbedingungen:

B_1 (Slater [10]): Die Funktionen $g_j(x)$, $j \in J$, seien konkav. Es existiert ein $\bar{x} \in G$ mit

$$g_j(\bar{x}) > 0 \quad \forall j \in J.$$

B_2 (Karlin [7]): Die Funktionen $g_j(x)$, $j \in J$, seien konkav. Zu jedem $p \in R_+^m$, $p \neq 0$, existiert ein $\bar{x} \in R^n$ mit

$$\sum_{j \in J} p_j g_j(\bar{x}) > 0.$$

Formulieren wir diese Bedingungen für die Richtungsableitungen $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, so ergeben sich

B_3: Die Funktionen $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien konkav auf der konvexen Menge $C_{J^0}(x^0)$. Es existiert ein $\bar{u} \in C_{J^0}(x^0)$ mit

$$D_{\bar{u}} g_j(x^0) > 0 \quad \forall j \in J^0.$$

B_4: Die Funktionen $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien konkav auf der konvexen Menge $C_{J^0}(x^0)$. Zu jedem Satz nicht sämtlich verschwindender Zahlen $p_j \geqq 0$, $j \in J^0$, existiert ein $\bar{u} \in K(x^0)$ mit

$$\sum_{j \in J} p_j D_{\bar{u}} g_j(x^0) > 0.$$

Über das Verhältnis dieser Bedingungen zueinander gelten die folgenden Aussagen.

Satz 2.

1. $B_1 \Leftrightarrow B_2$.
2. $B_3 \Leftrightarrow B_4$.
3. *Die Funktionen* $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, *seien auf der konvexen Menge* $C_{J^0}(x^0)$ *erklärt; ferner sei*

$$[(x^0 + C_{J^0}(x^0)) \cap \operatorname{int} G] \neq \emptyset^{2)}.$$

2) Mit int G bezeichnen wir das Innere der Menge G.

Dann gilt:

$$B_1 \Rightarrow B_3.$$

Damit ergibt sich in diesem Fall die Implikationskette

$$B_1 \Leftrightarrow B_2 \Rightarrow B_3 \Leftrightarrow B_4.$$

Beweis. 1. Der Beweis wurde geführt in [5, S. 32—33].

2. Wendet man dieselben Überlegungen auf die Funktionen $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, an, so folgt die zweite Aussage.

3. Aus der Konkavität der $g_j(x)$ und aus der Konvexität der Menge $C_{J^0}(x^0)$ folgt nach Hilfssatz 1, daß die Funktionen $D_u g_j(x^0)$ konkav sind.
Wir nehmen $\bar{x} \in [(x^0 + C_{J^0}(x^0)) \cap \operatorname{int} G]$ und setzen $\bar{u} := \bar{x} - x^0$. Dann ist $\bar{u} \in C_{J^0}(x^0)$. Für jedes $j \in J^0$ gilt nach Voraussetzung

$$D_{\bar{u}}(x^0) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{g_j(x^0 + \lambda(\bar{x} - x^0)) - g_j(x^0)}{\lambda} \geqq$$

$$\geqq \lim_{\lambda \to +0} \frac{\lambda g_j(\bar{x}) + (1 - \lambda) g_j(x^0) - g_j(x^0)}{\lambda} =$$

$$= g_j(\bar{x}).$$

Unter Beachtung von B_1 erhalten wir damit $D_{\bar{u}}\, g_j(x^0) > 0\ \forall j \in J^0$.

Auf der Grundlage der bisherigen Ergebnisse lassen sich nun weitere Sätze der Kuhn-Tucker-Theorie für Funktionen mit Richtungsableitungen angeben.

Satz 3. *Die Funktionen $D_u f(x^0)$, $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien konkav; die Menge $C(x^0)$ sei konvex. Es sei eine der Bedingungen* B_3 *oder* B_4 *erfüllt. Wenn $x^0 \in G$ Lösung von* P1 *ist, dann existiert ein $p^0 \in R_+^m$, so daß (x^0, p^0) Lösung von* P4 *ist.*

Beweis. Nach Satz 1 existieren Zahlen $\bar{p}_0^0, \bar{p}_j^0 \geqq 0, j \in J^0$, die nicht sämtlich verschwinden, mit

$$\bar{p}_0^0 D_u f(x^0) + \sum_{j \in J^0} \bar{p}_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \qquad \forall u \in C(x^0). \tag{4}$$

Die Annahme $\bar{p}_0^0 = 0$ führt auf

$$\sum_{j \in J^0} \bar{p}_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \qquad \forall u \in C(x^0),$$

im Widerspruch zu B_4 (und damit auch zu B_3). Daher gilt $\bar{p}_0^0 > 0$ und wir setzen

$$p_j^0 := \frac{\bar{p}_j^0}{\bar{p}_0^0}, \; j \in J^0.$$

Auf diese Weise folgt aus (4)

$$D_u f(x^0) + \sum_{j \in J^0} p_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \qquad \forall\, u \in C(x^0).$$

Ferner gilt offenbar, wenn wir noch

$$p_j^0 = 0, \quad j \in J \setminus J^0$$

setzen, die Beziehung

$$p_j^0 g_j(x^0) = 0 \qquad \forall\, j \in J.$$

Daher ist (x^0, p^0) Lösung von P4.

Bemerkung. Für differenzierbare Funktionen $f(x)$, $g_j(x), j \in J$, geht Satz 3 in den bekannten Satz von Kuhn/Tucker über. Satz 3 steht in enger Beziehung zu dem eingangs erwähnten Resultat von Bram [3], das wir hier (in etwas abgeänderter Form) der Vollständigkeit wegen anführen.

Satz 4 (Bram). *Es sei $C_f(x^0) = R^n$; die Funktion $D_u f(x^0)$ sei konkav auf dem R^n; die Funktionen $g_j(x^0)$, $j \in J$, seien in x^0 differenzierbar; die Vektoren $\nabla g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien positiv linear unabhängig*[3]).

Wenn $x^0 \in G$ Lösung von P1 *ist, so existiert ein $y^0 \in R_+^m$ mit*

$$D_u f(x^0) + u' \sum_{j \in J} y_j^0 \nabla g_j(x^0) \leqq 0 \quad \forall\, u \in R^n,$$

$$y_j^0 g_j(x^0) = 0 \qquad \forall\, j \in J.$$

Beweis. Nach Satz 1 existieren Zahlen p_0^0, p_j^0 $(j \in J^0)$, die nicht sämtlich verschwinden, so daß gilt:

$$p_0^0 D_u f(x^0) + u' \sum_{j \in J^0} p_j^0 \nabla g_j(x^0) \leqq 0 \qquad \forall\, u \in R^n.$$

Die Annahme $p_0^0 = 0$ führt auf

$$\sum_{j \in J^0} p_j^0 \nabla g_j(x^0) \leqq 0,$$

was nach Voraussetzung unmöglich ist.

Es kann daher

$$y_j^0 := \begin{cases} \dfrac{p_j^0}{p_0^0} & \text{für } j \in J^0, \\ 0 & \text{für } j \in J \setminus J^0. \end{cases}$$

---

3) Die Vektoren $a^1, \ldots, a^r$ 0 R^n heißen positiv linear unabhängig, wenn gilt $\sum_{\varrho=1}^{r} p_\varrho a^\varrho = 0, p_\varrho \geqq 0\} \Rightarrow p_1 = \ldots = p_r = 0$.

gesetzt werden. Der Vektor $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)'$ genügt dann allen Forderungen.

Bemerkung. Bram benutzte bei der Herleitung seines Satzes anstelle der Forderung der positiv linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\nabla g_j(x^0)$ $(j \in J^0)$ die "constraint qualification" von Kuhn/Tucker. In [5] wurde gezeigt, daß die Annahme, die Vektoren $\nabla g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien positiv linear unabhängig, das Bestehen der constraint qualification in x^0 nach sich zieht.

Die Voraussetzung über die Konkavität von $D_u f(x^0)$ tritt bei Bram nicht explizit auf. Wie Danskin [4, S. 641] jedoch gezeigt hat, folgt aus den von Bram gemachten Voraussetzungen die Konkavität von $D_u f(x^0)$.

Satz 5. *Wenn* (x^0, p^0) *Lösung von* P5 *ist, so ist* (x^0, p^0) *auch Lösung von* P4.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) + \sum_{j \in J} p_j^0 g_j(x) \leqq f(x^0) + \sum_{j \in J} p_j^0 g_j(x^0) \leqq f(x^0) + \sum_{j \in J} p_j g_j(x^0)$$

$$\forall\, (x, p) \in R^n \times R_+^m.$$

Daraus folgt einerseits

$$g_j(x^0) \geqq 0 \quad \forall\, j \in J, \tag{5}$$

und weiter

$$\sum_{j \in J} p_j^0 g_j(x^0) = 0. \tag{6}$$

Andererseits gilt

$$\Phi(x^0 + \lambda u, p^0) \leqq \Phi(x^0, p^0) \quad \forall\, u \in C(x^0),\ \forall\, \lambda > 0,$$

und damit

$$\frac{\Phi(x^0 + \lambda u, p^0) - \Phi(x^0, p^0)}{\lambda} \leqq 0 \quad \forall\, u \in C(x^0).$$

Für $\lambda \to +0$ ergibt sich

$$D_u f(x^0) + \sum_{j \in J^0} p_j^0 D_u g_j(x^0) \leqq 0 \quad \forall\, u \in C(x^0).$$

Daraus folgt zusammen mit (5) und (6), daß (x^0, p^0) Lösung von P4 ist.

Satz 6. *Die Funktionen* $f(x)$, $g_j(x)$, $j \in J$ *seien konkav; für* $x^0 \in G$ *sei* $C_f(x^0) = C_{g_j}(x^0) = R^n\ \forall\, j \in J$. *Wenn* (x^0, p^0) *Lösung von* P4 *ist, so ist* (x^0, p^0) *auch Lösung von* P5.

Beweis. Wir setzen $u = x - x^0$. Dann folgt aus der Konkavität von $f(x)$ für beliebige $x \in R^n$ und $\lambda \in (0, 1)$

$$f(x^0 + \lambda u) - f(x^0) \geqq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x^0) - f(x^0)$$
$$= \lambda[f(x) - f(x^0)]$$

und damit

$$D_u f(x^0) \geqq f(x) - f(x^0) \quad \forall\, x \in R^n. \tag{7}$$

Entsprechend erhält man

$$D_u g_j(x^0) \geqq g_j(x) - g_j(x^0) \quad \forall\, x \in R^n,\ j \in J. \tag{8}$$

Da (x^0, p^0) eine Lösung von P4 ist, ergibt sich aus (7) und (8):

$$0 \geqq D_u f(x^0) + \sum_{j \in J} p_j^0 D_u g_j(x^0) \geqq f(x) - f(x^0) + \sum_{j \in J} p_j^0 [g_j(x) - g_j(x^0)],$$

oder

$$\Phi(x, p^0) \leqq \Phi(x^0, p^0) \quad \forall\, x \in R^n. \tag{9}$$

Die Ungleichung

$$\Phi(x^0, p^0) \leqq \Phi(x^0, p) \quad \forall\, p \in R_+^m, \tag{10}$$

folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$\sum_{j \in J} p_j^0 g_j(x^0) = 0, \quad \sum_{j \in J} p_j g_j(x^0) \geqq 0.$$

Aus (9) und (10) ergibt sich (x^0, p^0) als Lösung von P5.

Satz 7. *Wenn (x^0, p^0) Lösung von* P4 *ist, so ist x^0 Lösung von* P3.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$D_u f(x^0) \leqq -\sum_{j \in J^0} p_j^0 D_u g_j(x^0) \quad \forall\, u \in C(x^0).$$

Daraus ergibt sich sofort

$$D_u f(x^0) \leqq 0 \quad \forall\, u \in K(x^0).$$

Satz 8. *Die Funktionen $D_u f(x^0)$, $D_u g_j(x^0)$, $j \in J^0$, seien konkav; die Menge $C(x^0)$ sei konvex. Die Bedingung* B_3 *sei erfüllt. Wenn $x^0 \in G$ Lösung von* P3 *ist, dann existiert ein $p^0 \in R_+^m$, so daß (x^0, p^0) Lösung von* P4 *ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung hat das System

$$D_u g_j(x^0) \geqq 0, \quad j \in J^0,$$
$$D_u f(x^0) > 0,$$

keine Lösung $u \in C(x^0)$. Wegen B_3 ist jedoch das System

$$D_u g_j(x^0) > 0 \quad j \in J^0,$$

lösbar. Die Behauptung des Satzes folgt daher unmittelbar aus dem Satz von Farkas—Minkowski.

Satz 9. *Sei* $C(x^0) = R^n$. *Wenn* $x^0 \in G$ *Lösung von* P3 *ist, so ist* x^0 *auch Lösung von* P2.

Beweis. Für beliebig gegebenes $u \in R^n$ unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1: $u \notin K(x^0)$. Dann existiert mindestens ein Index $j^* \in J^0$ mit $D_u g_{j*}\ (x^0) < 0$.
Für hinreichend klein gewähltes λ_1^0 gilt dann

$$g_{j*}(x^0 + \lambda u) < g_{j*}(x^0) = 0 \quad \forall\, \lambda \in (0, \lambda_1^0].$$

Deshalb ist $x^0 + \lambda u \in G$ nur für $\lambda = 0$ möglich. In diesem Falle gilt trivialerweise

$$f(x^0 + \lambda u) = f(x^0).$$

Fall 2: $u \in K(x^0)$. Dann gilt

$$D_u f(x^0) \leqq 0,$$

$$D_u g_j(x^0) \geqq 0, \quad j \in J^0.$$

Für hinreichend klein gewähltes λ_2^0 folgt für $\lambda \in (0, \lambda_2^0]$

$$f(x^0 + \lambda u) \leqq f(x^0),$$

$$g_j(x^0 + \lambda u) \geqq 0, \quad j \in J^0,$$

sowie auch

$$g_j(x^0 + \lambda u) \geqq 0, \quad j \in J \setminus J^0.$$

Damit existiert zu jedem $u \in R^n$ ein $\lambda^0 > 0$, so daß gilt:

$$\left.\begin{matrix} \lambda \in (0, \lambda^0] \\ x^0 + \lambda u \in G \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x^0 + \lambda u) \leqq f(x^0).$$

x^0 ist folglich eine Lösung von P2.

Zusammenfassend gilt unter Benutzung bekannter Sätze über das Verhältnis der Probleme P1, P2 und P5 zueinander (vgl. [2, S. 80—84]) der folgende

Satz 10. *Die Funktion* $f(x)$ *sei konkav auf dem* R^n; *für* $x^0 \in G$ *sei* $C_f(x^0) = C_g(x^0) = R^n$. *Wenn außerdem eine der Bedingungen* B_1 *oder* B_2 *erfüllt ist, so sind die Probleme* P1, P2, ..., P5 *äquivalent.*

LITERATUR

[1] ABADIE, J.: On the Kuhn-Tucker-Theorem. In: Abadie, J. (ed.): Nonlinear programming. Amsterdam 1967, 20—36

[2] BERGE, C. — GHOUILA-HOURI, A.: Programme, Spiele, Transportnetze. Leipzig 1967.

[3] BRAM, J.: The Lagrange multiplier theorem for max-min with several constraints. J. SIAM appl. Math. *14*, Nr. 4, 1966, 665—667.

[4] DANSKIN, J. M.: The theory of max-min with applications. J. SIAM appl. Math. *14*, Nr. 4, 1966, 641—664.

[5] ELSTER, K. H. — GÖTZ, R.: Über die Constraint Qualification und damit verwandte Bedingungen. Wiss. Z. TH Ilmenau *15*, 1969, 27—35.

[6] JOHN, F.: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. Courant anniversary volume, New York 1948.

[7] KARLIN, S.: Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. Band I, New York 1959.

[8] KUHN, H. W. — TUCKER, A. W.: Nonlinear Programming. Aus: Neyman, J. (ed.): Proceedings of the Second Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probabil., Berkeley, Calif. 1951, 482—492.

[9] MAGEROD, J.: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Kuhn und Tucker. Wiss. Z. TH Ilmenau, *17*, 1971, 19—30.

[10] SLATER, M. L.: Lagrange multipliers revisited. Cowles Commission Discussion Paper, Math. 403, 1950.

Eingegangen am 28. 3. 1972

Technische Hochschule Ilmenau
Sektion Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik
63 Ilmenau
DDR