DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Iwona Müller-Frączek
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Spektrum multifraktalne jako miernik ryzyka rynkowego

1. Wstęp

Współcześni inwestorzy giełdowi zdają sobie sprawę z tego, że są zmuszeni do podejmowania decyzji w warunkach niepewności związanej z losową naturą zmian cen instrumentów finansowych opisywaną procesem stochastycznym. Podejmują ryzyko rozumiane jako możliwość wystąpienia efektu niezgodnego z oczekiwaniem. Problem mierzenia tego ryzyka, bądź choćby jakiegoś ilościowego jego opisu, jest bardzo ważnym i wciąż otwartym zagadnieniem.

Celem tej pracy jest prezentacja pojęcia spektrum multifraktalnego w omawianym powyżej kontekście oraz próba wykorzystania go do oceny ryzyka rynkowego.

2. Spektrum multifraktalne

Sens rozważania spektrum multifraktalnego pojawia się wtedy, gdy do opisu cen instrumentów finansowych dopuści się procesy multifraktalne, a więc takie procesy stochastyczne, które mają stacjonarne przyrosty oraz spełniają warunek

$$E(|X(t)|^q) = c(q)t^{\tau(q)+1},$$

dla wszystkich t i q należących do pewnych przedziałów prostej rzeczywistej. Występująca tu funkcja skali $\tau(q)$ opisuje tempo wzrostu momentów procesu, gdy skala czasu rośnie.

Multifraktale są procesami z czasem ciągłym, ale ich definicja narzuca empiryczne testy oparte na np. dziennych, tygodniowych czy miesięcznych danych, czyli dyskretyzacjach tego procesu.

Procesy multifraktalne są wykorzystywane do opisu procesu cenowego w modelach MMAR (Multifractal Model of Asset Returns) zdefiniowanych w pracy Mandelbrota, Fishera i Calveta (1997). Zakłada się w nich, że proces ceny aktywu finansowego $\{P(t);0 \le t \le T\}$ spełnia warunek

$$\ln P(t) - \ln P(0) = B_H[\theta(t)] = X(t),$$

gdzie proces zewnętrzny B_H jest ułamkowym ruchem Browna, a multifraktalność jest wprowadzana do modelu w postaci tzw. czasu handlowego $\theta(t)$, który jest procesem multifraktalnym, o niemalejących trajektoriach i stacjonarnych przyrostach. Ponadto zakłada się, że oba procesy są niezależne.

Udowodniono, że w tym modelu proces *X(t),* a tym samym *P(t),* też jest multifraktalem.

Koncepcja czasu handlowego nie jest nowa. Ma ona odzwieciedlać relację pomiędzy czasem zegarowym a nieobserwowalnym czasem skalą. Pomysł wprowadzenia takiej relacji nasunęło występowanie w rzeczywistych szeregach cenowych okresów większej i mniejszej zmienności związanych z aktywnością rynku w tych okresach. W pierwotnych pracach wprowadzających koncepcję czasu handlowego (np. Mandelbrot i Tylor (1967)) był on deterministyczną funkcją związaną z wolumenem. Późniejsze modele wprowadzały weń losowość, ale ich struktura, zdaniem niektórych badaczy zbyt uboga, znacznie się wzbogaciła, gdy B.B. Mandelbrot zaproponował model opisany na powyżej.

Ta bogata struktura staje się widoczna, gdy poddamy badaniu lokalne własności trajektorii procesu multifraktalnego, tzn. rząd wielkości zmian cen ΔX na przyroście czasu Δt. We wcześniejszych modelach z czasem ciągłym (np. w ułamkowych ruchach Browna) zachodziła zależność

$$\Delta X \propto \Delta t^H,$$

w której *H* nie zależało od czasu, zwykle była to jedna charakterystyczna liczba dla całej trajektorii. W modelu multifraktalnym *H* jest funkcją czasu i przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości. Duże lub małe *H(t)* wyrażają odpowiednio, że *X(t)* zmienia się wolno lub szybko w pobliżu chwili *t*.

Można wyobrażać to sobie w ten sposób, że *X(t)* zmienia się jednorodnie, bo tak jak ułamkowy ruch Browna, w swoim wewnętrznym czasie a niejednorodnie w czasie zegarowym, zaś jego trajektorie mają bardzo nieregularny wygląd, który jest pożądany w zagadnieniach związanych z rynkiem finansowym.

H(t), zwane wykładnikiem Höldera, jest miarą gładkości trajektorii. Wykładnik ten zawsze istnieje, ale bywa nieskończony. W punktach nieciągłości przyjmuje on wartość 0, a wartość 1 w punktach różniczkowalności, gdzie pochodna jest różna od zera. Dla funkcji ciągłych przyjmuje on wartości większe od zera, a im bliższy jest zeru, tym gwałtowniejsze są zmiany funkcji.

W przypadku omawianych modeli wykładnik Höldera przyjmuje prostszą postać innego wykładnika singularności

$$\alpha(t) := \lim_{k_n 2^{-n} \to t} \alpha_{k_n}^n ,$$

gdzie

$$\alpha_{k_n}^n := -\frac{1}{n} \log_2 | X((k_n + 1)2^{-n}) - X(k_n 2^{-n}) | \qquad k_n = 0,\ldots,2^n - 1.$$

W prezentowanym podejściu szereg czasowy traktuje się jako pochodzący od procesu z czasem ciągłym, dla którego tak bardzo zmieniają się wykładniki singularności, że nie da się policzyć ile chwil odpowiada danemu wykładnikowi. Z punktu widzenia ryzyka ponoszonego przez inwestora taka informacja byłaby bardzo przydatna, ponieważ właśnie z tego punktu widzenia, im rzadziej są przyjmowane małe wykładniki tym lepiej. Ponieważ zwykle zbiór

$$K_\alpha := \{t : \alpha(t) = \alpha\}$$

jest nieprzeliczalny, co więcej, dla różnych α, K_α są bardzo mocno ze sobą przeplecione, a więc stanowią skomplikowany geometryczny twór, stąd pomysł badania wymiarów takich zbiorów, który prowadzi do definicji spektrum multifraktalne jako funkcji:

$$f(\alpha) := \dim(K_\alpha)$$

Charakterystyczne dla rzeczywistych procesów spektrum multifraktalne jest funkcją ciągłą, wklęsłą i osiąga jedno maksimum równe 1 w punkcie α_0, które jest najczęściej przyjmowanym wykładnikiem singularności.

W modelach MMAR spektra procesów θ i X (oraz P) łączy prosta zależność:

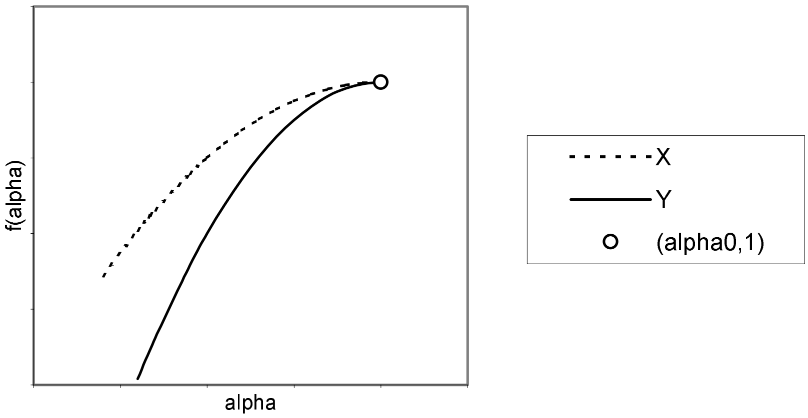
$$f_X(\alpha) = f_\theta(\alpha / H) = f_P(\alpha).$$

W tym przypadku, w pracy Fishera, Calveta i Mandelbrota (1997), podana została metoda estymacji spektrum multifraktalnego na lewo od wartości α_0, którą wykorzystano w badaniach empirycznych w punkcie 4 artykułu.

3. Ocena ryzyka

Ponieważ spektrum multifraktalne opisuje zmienność trajektorii procesu stochastycznego, naturalnym wydaje się próba wykorzystania go w zagadnieniach związanych z ryzykiem. Niestety, spektrum nie jest liczbą, nie może więc stać się miarą zmienności, ale w konkretnym przypadku, może pozwolić porównać dwa procesy z punktu widzenia ich ryzykowności.

Rys.1



Rys.1 przedstawia idealną dla naszych rozważań sytuację. Widać na nim spektra dwóch procesów. W obu przypadkach wykładniki najbardziej powszechne są równe. W każdym innym miejscu wykres spektum procesu X leży ponad wykresem spektrum procesu Y, a więc

$$\dim_X(K_\alpha) < \dim_Y(K_\alpha) \text{ dla } \alpha < \alpha_0 .$$

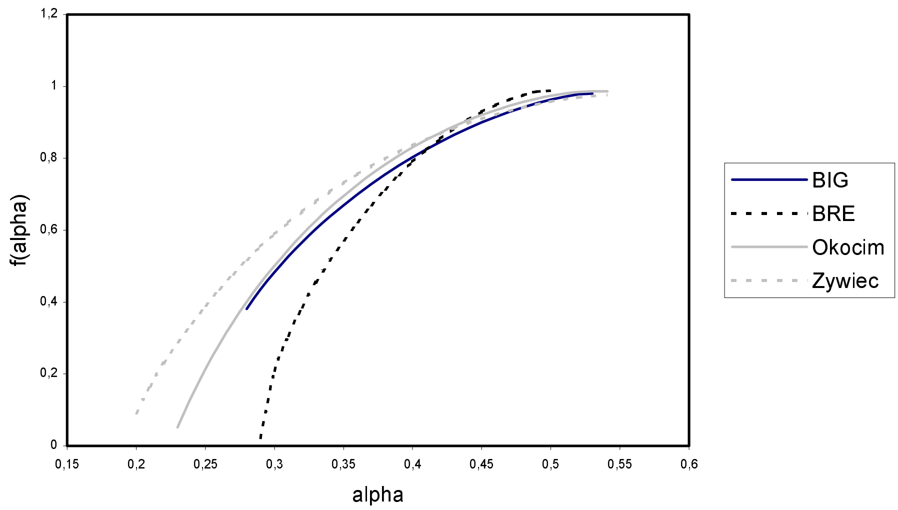
Własność ta definiuje w zbiorze wszystkich procesów multifraktalnych relację częściowego porządku, która tworzy w tym zbiorze łańcuchy procesów uporządkowane od mniej do bardziej ryzykownych.

W rzeczywistych problemach trudno o sytuacje idealne, ale często można postawić konkretną odpowiedź, co zostanie zaprezentowane w następnym punkcie artykułu.

4. Przykład empiryczny

Aby zilustrować rozważania zamieszczone w poprzednim punkcie, poddano badaniom dzienne notowania cen akcji czterech spółek z GPW w Warszawie za okres od początku stycznia 1995 roku do końca marca 2003 roku. Wyestymowano spektra multifraktalne tych szeregów, a odpowiednie wykresy zamieszczono na rys.2.

Rys.2



Trzy spośród badanych szeregów można poddać omawianej analizie, ponieważ mają one zbliżone wartości wykładnika α_0, na wykresie oznaczono je jako BIG, Okocim i Żywiec. Spektra dwóch z nich (BIG i Okocim) nieomal się pokrywają, więc z omawianego punktu widzenia, akcje tych spółek są obarczone podobnym ryzykiem rynkowym.

Najbardziej interesująca sytuacja zachodzi w przypadku par BRE i BIG oraz BRE i Okocim, ponieważ między tymi spektrami zachodzi relacja omawiana w punkcie 4. W obu przypadkach spektrum spółki BRE leży wyżej, więc te akcje należy uznać za bardziej ryzykowne.

5. Podsumowanie

Spektrum multifraktalne stosowane w ocenie ryzyka rynkowego nie ma uniwersalnego charakteru takiego jak np. miary zmienności, które pozwalają zmierzyć ryzyko związane z dowolnym instrumentem finansowym, ale w konkretnej sytuacji może pozwolić na porównanie dwóch instrumentów pod tym kątem.

Literatura

Calvet, L., Fisher, A., Mandelbror, B. B. (1997), Large Deviation and the Distribtion of Price Changes, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale University, http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html.

Fisher, A., Calvet, L., Mandelbrot, B. B. (1997), Multifractality of Deutschemark /US Dollar Ehchange Rates, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale University, http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html.

Mandelbrot, B. B. (1997), *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, Springer Verlag, New York.

Mandelbrot B. B., Fisher A., Calvet L (1997), A Multifractal Model of Asset Returns, Materiały dyskusyjne Cowles Foundation for Economics, Yale University. http://finance.commerce.ubc.ca./~fisher/thrufen.html

Mandelbrot, B. B., Tylor, H. W. (1967), On the Distribution of Stock Price Differences, *Operations Research* 15, 1057-1062.

Müller-Frączek, I. (2001), Modele MMAR na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, w: *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, s. 241-247.

Riedi, R. H. (1997), Introduction to Multifractals, preprint Rice University, http://www.ece.rice.edu/~riedi/.

Riedi, R. H. (2003), Multifractal processes, w: *Theory and applications of long-range dependence*, Birkhäuser, Boston, 625-716.