

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu  
Wydział Matematyki i Informatyki

**Grzegorz Marczak**

Rozprawa doktorska  
pt. „**Konstrukcje algorytmiczne nieujemnych grafów  
krawędziowo-dwudzielnych oraz kongruencji macierzy Grama**”

Promotor: prof. dr hab. Daniel Simson  
Zakład Kombinatoryki i Obliczeń Symbolicznych

Oświadczenie autora rozprawy:  
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

.....  
*data* *autor*

Oświadczenie promotora rozprawy:  
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów: .....

**Toruń, maj 2016 roku**



## Spis treści

1. Wstęp . . . . .	5
2. Podstawowe informacje o funkcjonalach kwadratowych . . . . .	9
2.1. Jednorodne funkcjonały kwadratowe i ich macierze . . . . .	9
2.2. Kryterium Sylwestera . . . . .	11
2.3. Algorytm Sylwestera i jego uogólnienie . . . . .	12
2.4. Postaci kanoniczne Lagrange'a . . . . .	12
2.5. Pierwiastki funkcjonałów całkowitych . . . . .	17
2.6. Całkowite funkcjonały nieujemne. Opisy jądra . . . . .	19
2.7. Całkowite funkcjonały nieujemne ustalonej korangi. Funkcjonały główne . . . . .	21
3. Całkowite funkcjonały $P$ -krytyczne . . . . .	26
3.1. Podstawowe twierdzenie redukcyjne . . . . .	27
3.2. Dowód twierdzenia 3.5 . . . . .	31
4. Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli . . . . .	35
4.1. Podstawowe informacje o grafach krawędziowo-dwudzielnych bez pętli . . . . .	35
4.2. Algorytm inflacyjny dla grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli . . . . .	42
4.3. Krawędziowo-dwudzielne grafy $P$ -krytyczne bez pętli . . . . .	44
5. Konstrukcja krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych . . . . .	47
5.1. Podstawowa konstrukcja . . . . .	49
5.2. Obliczenia algorytmiczne bigrafów głównych o małej liczbie wierzchołków . . . . .	56
5.3. Konstrukcja algorytmiczna bigrafów dodatnich . . . . .	58
6. Algorytmiczna konstrukcja oczkowych kołczanów pierwiastków oraz $\mathbb{Z}$ -kongruencji bigrafów . . . . .	63
6.1. Graficzne przedstawianie $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków . . . . .	63
6.2. Idea algorytmu konstruującego kołczan $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków . . . . .	65
6.3. Konstrukcja algorytmu oraz przykłady jego zastosowań . . . . .	69
7. Dodatek . . . . .	74
7.1. Kryterium Sylwestera . . . . .	74
7.2. Uogólnione kryterium Sylwestera . . . . .	74
7.3. Algorytm Lagrange'a . . . . .	75
7.4. Algorytm ograniczonego zliczania . . . . .	76
7.5. Algorytm obliczający zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera . . . . .	77
7.6. Algorytm inflacyjny . . . . .	77
7.7. Algorytm „dodatnie” . . . . .	79
7.8. Algorytm „główne” . . . . .	80



# 1. Wstęp

Rozprawa jest poświęcona wybranym problemom algorytmicznym i obliczeniowym występujących w klasyfikacji Grama dodatnio określonych oraz dodatnio półokreślonych głównych (zobacz Definicja 2.27 w rozdziale 2) całkowitych jednorodnych funkcyj kwadratowych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ , a także klasyfikacji Coxetera-Grama dodatnich oraz głównych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli (zdefiniowanych w pracy [41] oraz rozdziale 4.1) o skończonym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$  oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru  $\{+, -\}$ .

Jednym z głównych celów tej pracy jest zbudowanie narzędzi algorytmicznych do rozwiązywania wybranych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli sformułowanych na seminariach doktoranckich prowadzonych przez promotora w latach 2010-2015, a także w jego publikacjach [38], [39] oraz [41]-[44]. W rozprawie przedstawiamy m.in. konstrukcje klasy algorytmów kombinatorycznych i numerycznych pozwalających rozwiązywać sformułowane w pracach [38, 39, 41] główne problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli.

Główną inspiracją badania niezmienników spektralnych klasy grafów krawędziowo-dwudzielnych (omówioną szeroko w artykułach [38], [39], [41]) były problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera algebr skończonego wymiaru nad ciałem  $K$  i ich związków z tzw. pochodną równoważnością algebr badaną w ostatnim czasie m.in. w pracach Lenzing-Peña [25] oraz Mróz-Peña [30].

Przypomnijmy, że  $K$ -algebry  $R$  i  $S$  są pochodnie równoważne, gdy kategorie pochodne  $\mathcal{D}^b(\text{mod } R)$  oraz  $\mathcal{D}^b(\text{mod } S)$  ich kategorii prawych modułów  $\text{mod } R$  oraz  $\text{mod } S$  są trójkątnie równoważne, zobacz [25] oraz [46, Chapter XX].

Inną ważną inspiracją były problemy bliskie X Problemowi Hilberta budowania prostych algorytmów (najlepiej graficznych) opisujących geometrycznie zbiór wszystkich rozwiązań całkowitych  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  równań diofantycznych  $q(x_1, \dots, x_n) = d$ , gdzie  $d \in \mathbb{Z}$  jest liczbą całkowitą oraz  $q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  jest jednorodną całkowitą formą kwadratową, zobacz [38, 39] oraz monografia [7, Chapter II]. Problemy te są intensywnie badane przez wielu autorów, zobacz m.in. monografie [1], [10] oraz [45, 46], a także artykuły [4, 5, 8], [9, 14, 15], [19, 21, 22, 24], [30, 32, 47].

W całej rozprawie symbolami  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  oznaczamy zbiory: liczb naturalnych, liczb całkowitych, liczb wymiernych oraz liczb rzeczywistych. Produkt kartezjański  $\mathbb{Z}^n$ , gdzie  $n \geq 1$ , rozważamy jako grupę przemienną, zaś  $\mathbb{Q}^n$  oraz  $\mathbb{R}^n$  rozważamy jako przestrzenie liniowe, odpowiednio nad ciałem  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{R}$ . Dla ustalonej liczby naturalnej  $m \geq 1$ , symbolami  $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  oznaczamy algebry macierzy kwadratowych  $A = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$  wymiaru  $m \times m$  o współczynnikach, odpowiednio, w  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{R}$ . Dla danej macierzy  $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  oznaczamy przez  $A^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  macierz transponowaną do  $A$ .

Jeśli  $b_1, \dots, b_n$  są skalarami z ciała  $\mathbb{R}$ , to symbolem

$$\text{diag}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$$

oznaczamy macierz diagonalną  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ , w której współczynnikami na głównej przekątnej są liczby  $b_{11} = b_1, b_{22} = b_2, \dots, b_{nn} = b_n$ , natomiast pozostałe współczynniki są zerami, tzn.  $b_{ij} = 0$ , jeśli  $i \neq j$ .

Przypomnijmy z rozdziału 4, że grafem krawędziowo-dwudzielnym (w skrócie: bigrafem) nazywamy czwórkę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem, natomiast  $\Delta_1^-, \Delta_1^+$  są rozłącznymi podzbiórmi zbioru krawędzi  $\Delta_1$  takimi, że  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$  oraz  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$  lub  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$ , dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ . Taki graf krawędziowo-dwudzielny będziemy traktować jako graf oznakowany w sensie [48] następująco:

- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^-(a, b)$  będą oznakowane znakiem „-” i realizowane geometrycznie jako krawędzie ciągłe  $a \text{---} b$ ,
- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^+(a, b)$  będą oznakowane znakiem „+” i realizowane geometrycznie jako krawędzie przerywane  $a - - - b$ .

Dowolny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  będziemy traktować jako krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  przyjmując, że  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$  oraz  $\Delta_1^+(a, b)$  jest zbiorem pustym, dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ , tzn. każda krawędź w  $\Delta$  jest ciągła.

Graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  z ustaloną numeracją wierzchołków  $a_1, \dots, a_n$ ,  $n \geq 1$ , jest jednoznacznie zdefiniowany przez jego niesymetryczną macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  (zobacz definicja 4.2). Jeśli  $\Delta$  nie ma pętli, to stowarzysza się z nim macierz Coxetera  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ , jej wielomian charakterystyczny  $\text{cox}_\Delta(t) := \det(tE - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$ , (zwany wielomianem Coxetera bigrafu  $\Delta$ ) oraz spektrum Coxetera  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  składające się ze wszystkich zespolonych  $n$  wartości własnych macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$ ; równoważnie zbiór wszystkich zespolonych  $n$  pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  bigrafu  $\Delta$ .

Grafy krawędziowo-dwudzielne  $\Delta$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach bada się z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  zdefiniowanej w [41] następująco:

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow \check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ takiej, że } \det B = \pm 1.$$

W pracach [40], [41] dowodzi się, że jeśli  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to  $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$  oraz  $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$ . Jednymi z głównych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych są następujące dwa problemy sformułowane w [40], [41].

**Problem 1.1.** *Znaleźć szeroką klasę bigrafów bez pętli dla których równość spektrów Coxetera  $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$  implikuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .*

**Problem 1.2.** *Zbudować algorytmy pozwalające, dla danej pary bigrafów  $\Delta, \Delta'$  bez pętli spełniających relację  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , obliczyć pewną macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  definiującą tę silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tzn. taką, że  $\det B = \pm 1$  oraz  $\check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}$ .*

Częściowe rozwiązanie tych problemów można znaleźć w publikacjach [9], [12], [13], [14], [15], [19], [21], [22], [23], [24], [28], [32], [41], [42], [47].

Zasadnicza część naszej rozprawy poświęcona jest badaniu problemów 1.1-1.2 dla bigrafów dodatnich oraz bigrafów głównych bez pętli w sensie pracy [41]; tzn. takich  $\Delta$  bez pętli, że symetryczna wymierna macierz Grama  $G_\Delta := \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}]$  jest dodatnio półokreślona oraz podgrupa

$$\text{Ker } q_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\}$$

grupy abelowej  $\mathbb{Z}^n$  jest cykliczna nieskończona.

Głównymi wynikami tej rozprawy są następujące twierdzenia i ich konsekwencje.

1° Wyniki rozdziału 4.3 zawierające pełną charakteryzację  $P$ -krytycznych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta$  bez pętli; w szczególności twierdzenie 4.30 opisujące m.in. ograniczenia współrzędnych wektora generującego grupę  $\text{Ker } q_\Delta$ .

2° Pełna charakteryzacja  $P$ -krytycznych funkcjonałów całkowitych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  podana w rozdziale 3, lemat 3.7, a także ich ważne konsekwencje podane w twierdzeniu 3.9 oraz we wnioskach 3.8, 3.10 i 3.11; część z nich uogólnia znane wyniki Ovsienki [26]. Pewna część z tych wyników została już opublikowana w pracy [27].

3° Twierdzenie 5.2 opisujące strukturę dowolnego głównego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta$  bez pętli oraz konstrukcja 5.4 pozwalająca w prosty sposób skonstruować dowolny główny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  bez pętli o  $n + 1 \geq 3$  wierzchołkach z pewnego spójnego

bigrafu dodatniego  $\Delta'$  o  $n$  wierzchołkach oraz jego pierwiastka (tzn. wektora  $v \in \mathbb{Z}^n$  takiego, że  $v \cdot G_{\Delta} \cdot v^{tr} = 1$ ).

4° Efektywność konstrukcji omówionej w 3° i zbudowanego na jej podstawie algorytmu symboliczno-graficznego 5.12 pozwalającego dość łatwo opisać wszystkie bigrafy główne o najwyżej pięciu wierzchołkach zilustrowana w paragrafie 5.2.

5° Dowód twierdzenia 5.9, z którego wynika wniosek 5.11 orzekający, że dowolny bigraf główny o  $n + 1 \geq 3$  wierzchołkach otrzymuje się przy pomocy konstrukcji zrealizowanej w algorytmie 5.12.

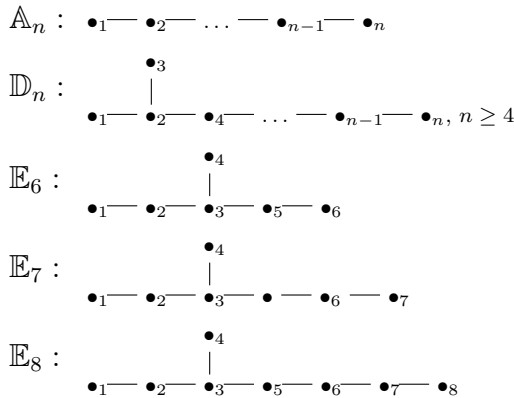
6° Lemat 5.1 o strukturze jądra  $\text{Ker } q_{\Delta}$  bigrafu głównego  $\Delta$  o co najmniej trzech wierzchołkach, a także wniosek 5.12 o ograniczeniach współrzędnych pierwiastków  $v \in \mathbb{Z}^n$  bigrafów dodatnich bez pętli (analogiczny do wyniku Ovsienki [26], ale udowodniony inaczej niż w pracy [26]).

7° Opisane w rozdziale 6 algorytmiczne rozwiązania Problemu 1.2 dla dość szerokiej klasy dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli.

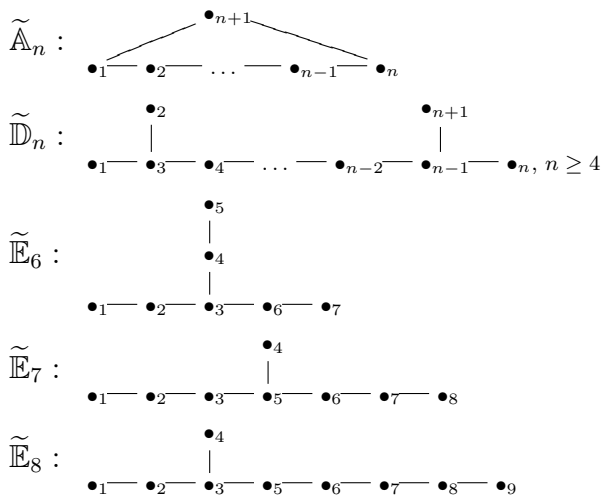
8° Uzupełniony algorytm Lagrange'a oparty na wniosku 2.29 (omówiony w uwagach 2.30-2.31) oraz jego implementacja pozwalająca w prosty macierzowy sposób opisać  $\mathbb{Z}$ -bazę jądra  $\text{Ker } q_{\Delta}$  dla nieujemnego bigrafu  $\Delta$ .

W omawianej tu spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych ważną rolę będą odgrywały następujące dwie klasy grafów: diagramy Dynkina oraz diagramy Euklidesa (zwane też rozszerzonymi diagramami Dynkina) przedstawione w następujących dwóch tabelach.

**Tabela 1.1. Diagramy Dynkina**



**Tabela 1.2. Diagramy Euklidesa**



Zauważmy, że  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  jest grafem Kroneckera .

Przypomnijmy z rozdziału VII monografii [1], że jeśli  $D = (D_0, D_1)$  jest jednym z diagramów Dynkina lub jednym z diagramów Euklidesa o  $n = |D_0|$  wierzchołkach, to funkcjonal kwadratowy  $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$  grafu  $D = (D_0, D_1)$  jest zdefiniowany wzorem

$$(1.3) \quad q_D(x) = \sum_{a_i \in D_0} x_i^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^D x_i x_j,$$

gdzie  $x = (x_j)_{a_j \in D_0} \in \mathbb{Z}^{D_0} \equiv \mathbb{Z}^{|D_0|}$ ,  $d_{ij}^D = -|D_1(a_i, a_j)|$ , oraz  $|D_1(a_i, a_j)|$  jest liczbą krawędzi łączących wierzchołek  $a_i \in D_0$  z wierzchołkiem  $a_j \in D_0$ .

Jeśli  $D$  jest jednym z diagramów Dynkina, to funkcjonal  $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio określony, tzn. przyjmuje wartość dodatnią  $q_D(v)$  na dowolnym niezerowym wektorze  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

Jeśli zaś  $D$  jest jednym z diagramów Euklidesa, to funkcjonal  $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$  nie jest dodatnio określony, ale jest dodatnio półokreślony, tzn. przyjmuje wartość nieujemną  $q_D(v)$  na dowolnym wektorze  $v \in \mathbb{Z}^n$ , zobacz twierdzenie 2.20 w rozdziale 2.



## 2. Podstawowe informacje o funkcjonalach kwadratowych

Ponieważ jednym z głównych celów pierwszej części tej rozprawy jest podanie w rozdziale 3 pełnej charakteryzacji  $P$ -krytycznych jednorodnych funkcjonalów kwadratowych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , więc rozprawę rozpoczynamy od wprowadzenia podstawowych pojęć i oznaczeń wykorzystywanych w całej rozprawie. Przypominamy także fakty znane z wykładu monograficznego promotora [35] oraz z literatury naukowej przedmiotu (zobacz [37]-[44]).

Aby ułatwić czytanie rozprawy niektóre z twierdzeń przedstawimy wraz z dowodami lub szkicami dowodów. Przedstawimy też implementacje kilku algorytmów symbolicznych i ich implementacji stosowanych w dalszej części rozprawy.

### 2.1. Jednorodne funkcjonały kwadratowe i ich macierze

W tym paragrafie przypominamy z wykładu algebry liniowej potrzebne w dalszej części tej pracy definicje i fakty dotyczące funkcjonalów kwadratowych i form kwadratowych.

**Definicja 2.1.** Niech  $n \geq 1$  będzie liczbą naturalną.

(a) **Jednorodnym funkcjonałem kwadratowym** (rzeczywistym) nazywamy funkcję  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  określoną wzorem

$$(2.2) \quad q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j,$$

gdzie  $q_{ij}$  są liczbami rzeczywistymi. **Polaryzacją** funkcjonału  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy funkcjonał  $\mathbb{R}$ -dwuliniowy symetryczny  $b_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowany wzorem

$$(2.3) \quad b_q(u, w) = \frac{1}{2}[q(u + w) - q(u) - q(w)],$$

dla dowolnych wektorów  $u, w \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Jeśli  $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ , dla dowolnych  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , to funkcjonał  $q$  nazywamy **całkowitym** i piszemy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . W tym wypadku, zbiór

$$(2.4) \quad \text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\}$$

nazywamy **jądrem** funkcjonału całkowitego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

(c) Jeśli  $q_{11} = \dots = q_{nn} = 1$ , to  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywamy **funkcjonałem kwadratowym jednolitym** (w terminologii angielsko-języcznej: unit form).

(d) Zbiór wszystkich jednolitych całkowitych funkcjonalów kwadratowych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będziemy oznaczać symbolem  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ .

**Umowa.** W tej rozprawie badamy tylko jednorodne funkcjonały jednolite. W związku z tym nazwa **całkowity funkcjonał kwadratowy**  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie oznaczać całkowity funkcjonał kwadratowy, który jest jednorodny i jednolity.

**Definicja 2.5.** (a) Funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy

(a1)  **dodatnio określonym**, jeśli  $q(v) > 0$ , dla dowolnego niezerowego wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

(a2)  **dodatnio półokreślonym**, jeśli  $q(v) \geq 0$ , dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

(a3)  **nieokreślonym**, jeśli  $q(v) < 0$ , dla pewnego wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Całkowity funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywamy

(b1)  **dodatnim**, jeśli  $q(v) > 0$ , dla dowolnego niezerowego wektora  $v \in \mathbb{Z}^n$ ,

(b2)  **słabo dodatnim**, jeśli  $q(v) > 0$ , dla dowolnego niezerowego wektora  $v \in \mathbb{N}^n$ ,

(b3)  **nieujemnym**, jeśli  $q(v) \geq 0$ , dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{Z}^n$ ,

(b4)  **słabo nieujemnym**, jeśli  $q(v) \geq 0$ , dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{N}^n$ .

W badaniu funkcjonałów nieujemnych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  często wykorzystuje się następujący prosty lemat (zobacz [33], str. 2 oraz rozdział 1 skryptu [35]).

**Lemat 2.6.** (a) Polaryzacja  $b_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (2.3) dowolnego funkcjonału jednorodnego kwadratowego  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcjonałem symetrycznym, tzn.  $b_q(u, w) = b_q(w, u)$ , dla dowolnych  $u, w \in \mathbb{R}^n$ . Ponadto  $q(u) = b_q(u, u)$ , dla dowolnego  $u \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Jeśli  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest całkowitym nieujemnym funkcjonałem jednorodnym kwadratowym, to jądro  $\text{Ker } q$  jest podgrupą grupy  $\mathbb{Z}^n$ .

(c) Jeśli  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio określony, to  $\text{Ker } q = 0$ .

**Dowód.** (a) Własność (a) jest znana z wykładu algebry liniowej.

(b) Załóżmy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemnym oraz  $u, v \in \text{Ker } q$ . Zatem  $q(u) = 0$ ,  $q(v) = 0$  i na podstawie definicji polaryzacji  $b_q : \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  (2.3) otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} q(u+v) &= q(u) + q(v) + 2b_q(u, v) = 2b_q(u, v), \\ q(u-v) &= q(u) + q(-v) + 2b_q(u, -v) = q(u) + q(v) - 2b_q(u, v) = -2b_q(u, v) \end{aligned}$$

tzn.

$$\begin{cases} q(u+v) = 2b_q(u, v) \\ q(u-v) = -2b_q(u, v). \end{cases}$$

Dodając powyższe równości stronami otrzymujemy równość  $q(u+v) + q(u-v) = 0$ . Ponieważ  $q$  jest nieujemny, więc  $q(u+v) \geq 0$  oraz  $q(u-v) \geq 0$ , gdyż  $u+v, u-v \in \mathbb{Z}^n$ . Zatem z równości  $q(u+v) + q(u-v) = 0$  wynikają równości  $q(u+v) = 0$  oraz  $q(u-v) = 0$ . Wykazaliśmy więc, że  $u+v, u-v \in \text{Ker } q$ , o ile  $u, v \in \text{Ker } q$ , co kończy dowód (b). Ponieważ własność (c) oczywista, więc dowód lematu jest zakończony.  $\square$

**Przykład 2.7.** (a) Jednorodny funkcjonal kwadratowy  $q_{\mathbb{A}_3} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) diagramu Dynkina  $\mathbb{A}_3 : a_1 \text{---} a_2 \text{---} a_3$  jest dodatnio określony, gdyż

$$q_{\mathbb{A}_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2].$$

(b) Jednorodny funkcjonal kwadratowy  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) grafu Kroneckera  $a_1 \text{====} a_2$  jest dodatnio półokreślony, gdyż  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$ . Zauważmy również, że  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$ , tzn.  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}$  jest podgrupą cykliczną grupy  $\mathbb{Z}^2$  generowaną przez wektor  $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$ .

(c) Funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$  w sposób oczywisty jest słabo dodatni, natomiast nie jest on nieujemny, gdyż  $q(1, -1) = -2$ ,

W badaniu jednorodnych funkcjonałów kwadratowych używa się często ich macierzy Grama w następującym sensie.

**Definicja 2.8.** (a) **Symetryczną macierzą Grama** funkcjonału  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (2.2) nazywamy macierz kwadratową

$$(2.9) \quad G_q = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \cdots & \hat{q}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{q}_{n1} & \cdots & \hat{q}_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}),$$

gdzie  $\hat{q}_{ii} = q_{ii}$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , oraz  $\hat{q}_{ij} = \hat{q}_{ji} = \frac{1}{2}q_{ij}$ , o ile  $i < j$ .

(b) **Niesymetryczną macierzą Grama** jednorodnego funkcjonału całkowitego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywamy macierz kwadratową

$$(2.10) \quad \check{G}_q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

Często będziemy wykorzystywali następujący prosty lemat udowodniony w rozdziale 1 skryptu [35].

**Lemat 2.11.** (a) *Jeśli  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcjonalem jednorodnym kwadratowym zdefiniowanym wzorem (2.2), to  $q(u) = u \cdot G_q \cdot u^{tr} = u \cdot \check{G}_q \cdot u^{tr}$ , dla dowolnego wektora  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\text{gdzie } u^{tr} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

(b) *Dla dowolnej macierzy  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  funkcja  $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana wzorem*

$$q_A(v) = v \cdot A \cdot v^{tr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

*jest jednorodnym funkcjonalem kwadratowym. Symetryczną macierzą Grama tego funkcjonału  $q_A$  jest macierz  $G_{q_A} = \frac{1}{2}(A + A^{tr})$ . Jeśli  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ , to tak zdefiniowany funkcjonal jest całkowity, tzn.  $q_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .*

**Dowód.** Stwierdzenia (a) oraz (b) otrzymuje się przez nietrudne przeliczenie, zobacz rozdział 1 skryptu [35].  $\square$

## 2.2. Kryterium Sylwestera

W algorytmicznym badaniu funkcjonałów kwadratowych z użyciem komputera często stosuje się następujące dwa kryteria znane z wykładu algebry liniowej. Pozwalają one stwierdzić czy dany funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio określony lub dodatnio półokreślony.

**Twierdzenie 2.12** (kryterium Sylwestera). *Niech  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcjonalem kwadratowym jednorodnym, natomiast  $G_q = [q_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  będzie jego symetryczną macierzą Grama. Funkcjonal  $q$  jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Sylwestera*

$$\det \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & \cdots & q_{ss} \end{bmatrix} > 0$$

dla dowolnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ .

**Dowód.** Zobacz [29] oraz rozdział 1.1 w skrypcie [35].  $\square$

**Twierdzenie 2.13** (uogólnione kryterium Sylwestera). *Niech  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcjonalem kwadratowym jednorodnym, natomiast  $G_q = [q_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  będzie jego symetryczną macierzą Grama. Funkcjonal  $q$  jest dodatnio półokreślony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący uogólniony warunek Sylwestera*

$$\det \begin{bmatrix} q_{j_1 j_1} & \cdots & q_{j_1 j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{j_s j_1} & \cdots & q_{j_s j_s} \end{bmatrix} \geq 0$$

dla dowolnego ciągu  $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ .

**Dowód.** Zobacz [17], Theorem 7.2.5.  $\square$

### 2.3. Algorytm Sylwestera i jego uogólnienie

Twierdzenia 2.12 oraz 2.13 mogą być bezpośrednio zastosowane do konstrukcji odpowiednich algorytmów symbolicznych. Poniżej zamieszczone zostały pseudokody tych algorytmów. Pełne implementacje znajdują się Dodatku (7.1 i 7.2) oraz na załączonej do pracy płycie pod nazwami Algorytm Sylwestera oraz Uogólniony algorytm Sylwestera.

**Wejście:** Macierz Grama funkcjonału kwadratowego  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

**Wyjście:** Komunikat informujący, czy funkcjonał  $q$  jest dodatnio określony.

```

1. AlgorytmSylwestera:=proc(m)
2.   n:=liczba kolumn macierzy m
3.   dodatni:=true
4.   for i from 1 to n do
5.     minor:=i-ty wiodący minor główny macierzy m
6.     if minor <= 0 then
7.       dodatni:=false
8.     end if
9.   end do
10.  if dodatni = true then
11.    print "Funkcjonał jest dodatnio określony"
12.  else
13.    print "Funkcjonał nie jest dodatnio określony"
14.  end if
15. end proc

```

**Wejście:** Macierz Grama funkcjonału kwadratowego  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

**Wyjście:** Komunikat informujący, czy funkcjonał  $q$  jest dodatnio określony, dodatnio półokreślony czy nieokreślony.

```

1. UogolnionyAlgorytmSylwestera:=proc(m)
2.   n:=liczba kolumn macierzy m
3.   dodatni:=true
4.   dodatniopolokreslony:=true
5.   for i from 1 to n-1 do
6.     minory:=zbiór wszystkich minorów wymiaru n-i macierzy m
7.     for minor from minory do
8.       if minor <= 0 then
9.         dodatni:=false
10.      end if
11.      if minor < 0 then
12.        dodatniopolokreslony:=false
13.      end if
14.    end do
15.  end do
16.  if dodatni = true then
17.    print "Funkcjonał jest dodatnio określony"
18.  else if dodatniopolokreslony = true then
19.    print "Funkcjonał jest dodatnio polokreślony"
20.  else
21.    print "Funkcjonał jest nieokreślony"
22.  end if
23. end proc

```

### 2.4. Postaci kanoniczne Lagrange'a

Przypomnimy teraz konstrukcję równoważności dowolnego jednorodnego funkcjonału kwadratowego  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  z funkcjonałem zdefiniowanym formą kwadratową o postaci kanonicznej. Redukcja ta jest znana jako redukcja Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów. Będzie ona często wykorzystywana w dalszej części tej rozprawy w dowodach dodatniej określoności funkcjonałów, w opisie pierwiastków jednorodnych funkcjonałów kwadratowych oraz w opisie jądra funkcjonałów dodatnio półokreślonych.

W rozdziale 7 o nazwie Dodatek opiszemy algorytm redukcyjny Lagrange'a oparty na następującej wersji twierdzenia Lagrange'a oraz na konstrukcjach zastosowanych w jego dowodzie.

**Twierdzenie 2.14** (Lagrange'a). *Założmy, że  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest niezerowym jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem  $q(v) = \sum_{i=1}^n q_{ii}v_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}v_iv_j$ , gdzie  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $q_{ij} \in \mathbb{R}$  oraz co najmniej jedna z liczb  $q_{ij}$  jest różna od zera.*

(a) *Istnieją liczby rzeczywiste  $q'_i, s_{ij} \in \mathbb{R}$ , gdzie  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , o następujących własnościach:*

(a1) *Co najmniej jedna z liczb  $q'_1, \dots, q'_n$  jest różna od zera;*

(a2) *Macierz  $S = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  jest nieosobliwa;*

(a3) *Forma kwadratowa  $q(x) := \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j$  ma postać*

$$q(x) = q'_1 \cdot (s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n)^2 + q'_2 \cdot (s_{21}x_1 + \dots + s_{2n}x_n)^2 + \dots + q'_n \cdot (s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n)^2 = \\ = q'_1 \cdot z_1^2 + q'_2 \cdot z_2^2 + \dots + q'_n \cdot z_n^2,$$

gdzie  $[z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr}$ , tzn.

$$z_1 = s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n,$$

$$z_2 = s_{21}x_1 + \dots + s_{2n}x_n,$$

.....

.....

$$z_n = s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n;$$

(a4) *Jeśli każda z liczb  $q_{ij}$  jest wymierna, to również każda z liczb  $s_{ij}$  oraz  $q'_1, \dots, q'_n$  jest wymierna.*

(b) *Przekształcenie  $\mathbb{R}$ -liniowe  $f_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  określone wzorem  $f_S(v) = v \cdot S^{tr}$ , dla  $v \in \mathbb{R}^n$ , jest izomorfizmem  $\mathbb{R}$ -przestrzeni liniowych definiującym  $\mathbb{R}$ -równoważność funkcjonala  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  z funkcjonalem  $q' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o postaci kanonicznej zdefiniowanej wzorem*

$$q'(v) = q'_1v_1^2 + q'_2v_2^2 + \dots + q'_nv_n^2,$$

dla dowolnego wektora  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Innymi słowy przemienny jest diagram

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ f_S \downarrow \cong & \nearrow & q' \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Ponadto,  $S$  jest macierzą przekształcenia  $f_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  oraz zachodzi równość  $G_q = S^{tr} \cdot G_{q'} \cdot S$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadza się metodą indukcji względem liczby  $n \geq 1$  wykorzystując dowód twierdzenia 3 w paragrafie XII.3 książki Mostowskiego i Starka [29]. Szczegóły można znaleźć w rozdziale 1 skryptu [35]. Dla funkcjonaliów dodatnio określonych dowód można znaleźć w artykule [13, Theorem 5.3].  $\square$

**Wniosek 2.16.** (a) *W oznaczeniach twierdzenia 2.14, rzeczywisty funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio określony (odp. dodatnio półokreślony) wtedy i tylko wtedy, gdy  $q'_1 > 0, q'_2 > 0, \dots, q'_n > 0$  (odp. gdy  $q'_1 \geq 0, q'_2 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$ ).*

(b) Jeśli rzeczywisty funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowity, to funkcjonal  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny (odp. dodatni) wtedy i tylko wtedy, gdy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcjonalem dodatnio półokreślonym (odp. dodatnio określonym).

(c) Jeśli  $n = 2$  oraz  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$ , gdzie  $q_{12} \in \mathbb{Z}$ , to  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy  $-2 \leq q_{12} \leq 2$ .

(d) Jeśli  $n \geq 2$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemnym jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem  $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_ix_j$ , gdzie  $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ , to  $-2 \leq q_{ij} \leq 2$ , dla dowolnych  $i < j \leq n$ .

**Dowód.** (a) Zastosować twierdzenie 2.14, a w szczególności nieosobliwość macierzy  $S$ .

(b) Implikacja „ $\Leftarrow$ ” jest oczywista. Aby udowodnić implikację „ $\Rightarrow$ ” założmy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny (odp. dodatni). Stąd łatwo wynika, że funkcjonal wymierny  $q : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  jest nieujemny (odp. dodatni). Jeśli  $q(x) = q'_1z_1^2 + q'_2z_2^2 + \dots + q'_nz_n^2$  jest postacią kanoniczną taką jak w twierdzeniu 2.14, to liczby  $q'_1, \dots, q'_n$  są wymierne, na podstawie twierdzenia 2.14 (a4). Stosując (a) do funkcjonala wymiernego  $q : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  otrzymujemy  $q'_1 \geq 0, q'_2 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$  (odp.  $q'_1 > 0, \dots, q'_n > 0$ ). Na podstawie (a) zastosowanego do funkcjonala rzeczywistego  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , funkcjonal ten jest dodatnio półokreślony (odp. dodatnio określony).

(c) Na podstawie (b),  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio półokreślony. Ponieważ

$$q(x_1, x_2) = (x_1 + \frac{1}{2}q_{12}x_2)^2 + (1 - \frac{1}{4}q_{12}^2)x_2^2,$$

więc  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy  $(1 - \frac{1}{4}q_{12}^2) \geq 0$ , co kończy dowód równoważności (c).

(d) Załóżmy, że  $n \geq 2$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny. Aby udowodnić, że  $-2 \leq q_{ij} \leq 2$ , dla dowolnych  $i < j \leq n$ , ustalmy parę indeksów  $i, j \leq n$  takich, że  $1 \leq i < j$ . Dla prostoty zapisu załóżmy, że  $i = 1$  oraz  $j = 2$ . Udowodnimy najpierw, że funkcjonal ograniczony  $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q_{[1,2]}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$  jest nieujemny. W tym celu weźmy dowolny wektor  $(u_1, u_2)$  i rozważmy wektor  $\hat{u} := (u_1, u_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ . Ponieważ  $q(\hat{u}) = q_{[1,2]}(u_1, u_2)$  oraz  $q$  jest nieujemny, więc  $q(\hat{u}) \geq 0$  i otrzymujemy nierówność  $q_{[1,2]}(u_1, u_2) \geq 0$ , tzn. funkcjonal  $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny. Stąd wynikają nierówności  $-2 \leq q_{ij} \leq 2$ , na podstawie (c), co kończy dowód.  $\square$

**Przykład 2.17.** Pokażemy, że funkcjonal kwadratowy  $q_C : \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q_A(v) = v \cdot C \cdot v^{tr}$ , gdzie  $C$  jest macierzą

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_8(\mathbb{Z}),$$

nie jest nieujemny. Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (a dokładniej implementację 7.3 algorytmu Lagrange'a) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
q_C(x) &= x \cdot C \cdot x^{tr} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 \\
&\quad - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 - x_3x_4 - x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 - x_4x_5 \\
&\quad - x_4x_6 + x_4x_7 + x_4x_8 - x_5x_6 - x_5x_7 + x_5x_8 - x_6x_8 - x_7x_8 \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7)^2 \\
&\quad + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 + x_7)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - 2x_5 + 2x_7 + x_8)^2 - \frac{3}{2}(x_5 - \frac{4}{3}x_7 - x_8)^2 \\
&\quad - \frac{3}{2}(x_6 - \frac{7}{6}x_8)^2 + \frac{2}{3}(-\frac{3}{2}x_6 + x_7 + \frac{3}{4}x_8)^2 + \frac{5}{3}x_8^2.
\end{aligned}$$

Na podstawie wniosku 2.16, funkcjonal  $q_C : \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  nie jest dodatnio półokreślony.

### 2.4.1. Algorytm Lagrange'a

W tym paragrafie zamieszczamy schemat algorytmu Lagrange'a podanego w skrypcie [35] i obliczającego postać kanoniczną Lagrange'a dowolnego rzeczywistego funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , zobacz również [39, Remark 3.8] oraz [13, Algorithm 5.5].

**Algorytm Lagrange'a. Wejście:** Liczba naturalna  $n \geq 1$ , liczby rzeczywiste  $q_{ij} \in \mathbb{R}$ , gdzie  $1 \leq i \leq j \leq n$ , oraz niezerowy jednorodny funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowany przez formę kwadratową wzorem  $q(x) = \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j$ .

**Wyjście:** Liczby rzeczywiste  $q'_1, \dots, q'_n \in \mathbb{R}$ , gdzie  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , oraz macierz nieosobliwa  $S = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  o następujących własnościach:

(a1) co najmniej jedna z liczb  $q'_1, \dots, q'_n$  jest różna od zera;

(a2) forma kwadratowa  $q(x)$  ma postać  $q(x) = q'_1 \cdot z_1^2 + q'_2 \cdot z_2^2 + \dots + q'_n \cdot z_n^2$ , gdzie  $[z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr}$ .

Kod źródłowy algorytmu oraz implementacja w Maple 17 znajdują się na płycie, zobacz Dodatek 7.3. Poszczególne etapy algorytmu realizują poszczególne kroki dowodu twierdzenia Lagrange'a podanego w książce [29] oraz w skrypcie [35].  $\square$

Stosując twierdzenie Lagrange'a, przedstawiony powyżej algorytm Lagrange'a (wraz z implementacją podaną w Dodatku 7.3 na płycie) oraz wniosek 2.16 udowodnimy teraz następujące dwa ważne twierdzenia.

**Twierdzenie 2.19.** *Jeśli  $D$  jest jednym z grafów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1 oraz  $n = |D_0|$  jest liczbą wierzchołków grafu  $D$ , to jego funkcjonal kwadratowy  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) jest dodatnio określony.*

**Dowód.** Stosując metodę Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów łatwo pokazuje się, że formy kwadratowe  $q_D(x)$  grafów Dynkina  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  oraz  $\mathbb{E}_8$  można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{A}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n = \\
&= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2. \\
q_{\mathbb{D}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - \dots - x_{n-1}x_n = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + (x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 + \dots + \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2. \\
q_{\mathbb{E}_6}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}x_6^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{E}_7}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}x_7^2. \\
q_{\mathbb{E}_8}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{3}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}x_8^2.
\end{aligned}$$

Stąd łatwo wynika teza twierdzenia.  $\square$

**Twierdzenie 2.20.** *Jeśli  $D$  jest jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w Tabeli 1.2 oraz  $n+1 = |D_0|$  jest liczbą wierzchołków grafu  $D$ , to jego funkcjonal kwadratowy  $q_D : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) jest dodatnio półokreślony oraz  $\text{Ker } q_D = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_D$ , gdzie*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{11} \overset{1}{\cdot} \dots {}_{11}, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{A}}_n, \quad n \geq 1, \\
(ii) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{2} \dots {}_{22} \overset{1}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{D}}_n, \quad n \geq 4, \\
(iii) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{3} \overset{2}{3} 2 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_6, \\
(iv) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{3} \overset{2}{4} \overset{3}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_7, \\
(v) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{24} \overset{3}{6} \overset{5}{4} \overset{3}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_8.
\end{aligned}$$

**Dowód.** Dla grafu  $D = \widetilde{\mathbb{A}}_n$ , funkcjonal kwadratowy  $q_D : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest zdefiniowany wzorem

$$\begin{aligned}
q_{\widetilde{\mathbb{A}}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_1 \\
&= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_n - x_{n+1})^2 + (x_1 - x_{n+1})^2].
\end{aligned}$$

Analogicznie, stosując metodę Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów łatwo pokazuje się, że formy kwadratowe  $q_D(x)$  grafów Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{D}}_n$ , gdzie  $n \geq 4$ ,  $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\widetilde{\mathbb{E}}_8$  można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
4q_{\widetilde{\mathbb{D}}_n}(x) &= 4\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_4x_5 - \dots - x_{n-1}x_n - x_{n-1}x_{n+1}\right) = \\
&= (2x_1 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_{n-1} - 2x_n)^2 + (x_{n-1} - 2x_{n+1})^2 + \\
&\quad + 2\sum_{i=3}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_6}(x) &= \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_3x_6 - x_6x_7 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{1}{2}x_6)^2 + \frac{1}{4}(x_6 - 2x_7)^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_7}(x) &= \sum_{i=1}^8 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_4x_6 - x_6x_7 - x_7x_8 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{2}{3}x_6)^2 + \frac{1}{3}(x_6 - \frac{3}{2}x_7)^2 + \frac{1}{4}(x_7 - 2x_8)^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_8}(x) &= \sum_{i=1}^9 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_5x_6 - x_6x_7 - x_7x_8 - x_8x_9 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{3}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}(x_8 - 2x_9)^2.
\end{aligned}$$

Stąd łatwo wynika teza twierdzenia.  $\square$



### 2.5. Pierwiastki funkcjonałów całkowitych

Druga część rozprawy (rozdziały 4 oraz 5) poświęcona będzie klasyfikacji szerokiej klasy grafów oznakowanych w sensie Zaslavskiego [48], a w szczególności opisowi struktury oraz spektralnej klasyfikacji Coxetera głównych grafów krawędziowo-dwudzielnych w sensie [41]. W badaniu tej klasy grafów ważnymi narzędziami są całkowite funkcjonały kwadratowe  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  oraz ich pierwiastki w sensie następującej definicji podanej przez Ovsienkę w pracy [26].

**Definicja 2.21.** (a) Wektor  $v \in \mathbb{Z}^n$  nazywamy **pierwiastkiem** (z jedyńki) funkcjonału całkowitego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , jeśli  $q(v) = 1$ . Pierwiastek  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  nazywamy  **dodatnim**, jeśli  $v \neq 0$  oraz każda z jego współrzędnych  $v_1, \dots, v_n$  jest nieujemna.

(b) Symbolami  $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \supset \mathcal{R}_q^+ = \{v \in \mathbb{N}^n; q(v) = 1\}$  oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich pierwiastków oraz zbiór wszystkich pierwiastków dodatnich funkcjonału  $q$ , zobacz [1, Section VII.3].

(c) Wektor  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  nazywamy **wiernym**, jeśli  $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$ . Mówimy, że  $v$  jest **dodatni**, gdy  $v \neq 0$  oraz  $v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0$ .

#### 2.5.1. Skończoność zbioru pierwiastków

W artykułach [39] oraz [41] dotyczących zastosowań funkcjonałów kwadratowych w teorii reprezentacji algebr sformułowano następujący problem.

**PROBLEM.** *Dla danego dodatnio określonego funkcjonału całkowitego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , zbudować algorytmy numeryczne i symboliczne opisujące wszystkie wektory zbioru  $\mathcal{R}_q$  jego pierwiastków.*

Następujące twierdzenie (zwane w pracy [38] twierdzeniem ograniczonego zliczania) zawiera w miarę satysfakcjonujące rozwiązanie tego problemu. Stwierdza ono, że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\}$  jest skończony, gdy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatni. Ponadto, w dowodzie podaje się algorytmiczną metodę opisu zbioru  $\mathcal{R}_q$  dla dodatnich funkcjonałów  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Twierdzenie 2.22.** *Niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie funkcjonałem kwadratowym jednorodnym określonym wzorem (2.2). Jeśli  $q$  jest dodatni, to*

(a) *zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(x) = 1\}$  jest skończony,*

(b) *jeśli  $v \in \mathcal{R}_q(d)$ , to bezwzględna wartość  $|v_j|$  każdej współrzędnej  $v_j$  wektora  $v$  jest ograniczona przez część całkowitą liczby rzeczywistej  $\widehat{M}_q = \frac{\sqrt{d}}{M_q}$ , gdzie  $M_q = \sqrt{\inf q(\mathcal{S}^{n-1})} > 0$  oraz  $\mathcal{S}^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n; \|w\| = 1\}$  jest sferą jednostkową w przestrzeni Euklidesa  $\mathbb{R}^n$ .*

**Dowód.** Szkic dowodu można znaleźć w [33, str. 3]. Pełny dowód podany jest na stronie 19 artykułu [38]. W dowodach tych stosuje się metodę Drozda [8] zmodyfikowaną w dowodzie twierdzenia 11.94 książki [34].  $\square$

W następnym podrozdziale zamieszczamy implementację algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru  $\mathcal{R}_q$  pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Wykorzystując ten algorytm oraz kanoniczne postaci form kwadratowych opisujących funkcjonały diagramów Dynkina otrzymuje się następujący ważny wniosek.

**Wniosek 2.23.** *Niech  $D$  będzie jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1 oraz niech  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jego funkcjonałem kwadratowym jednorodnym określonym wzorem (1.3).*

(a) *Zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{q_D}$  jest skończony.*

(b) Liczby pierwiastków funkcjonału  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , dla poszczególnych diagramów  $D$ , zamieszczone są w następującej tabeli:

$D$	$A_n$	$D_n, n \geq 4$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$ \mathcal{R}_{q_D} $	$n(n+1)$	$2n(n-1)$	72	126	240
$ \mathcal{R}_{q_D}^+ $	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120

**Dowód.** (a) Na podstawie twierdzenia 2.19, funkcjonał  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio określony. Zatem (a) jest konsekwencją twierdzenia 2.22.

(b) Dla grafów  $E_6, E_7$  oraz  $E_8$ , liczby pierwiastków wskazane w tabeli otrzymuje się przez zastosowanie algorytmu ograniczonego zliczania. Dla grafów  $A_n$  oraz  $D_n$ , liczby te oblicza się standardowym rachunkiem wykorzystując postaci kanoniczne form kwadratowych podane w dowodzie twierdzenia 2.19. Szczegóły dowodu można znaleźć w rozdziale 2 skryptu [35].  $\square$

### 2.5.2. Algorytm ograniczonego zliczania

W tym podrozdziale zamieszczamy pseudokod algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru  $\mathcal{R}_q$  pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . W algorytmie wykorzystano algorytm Lagrange'a do wyznaczania ograniczeń poszczególnych współrzędnych pierwiastków z  $d$ . Pełna implementacja tego algorytmu w programie Maple znajduje się na dołączonej do pracy płycie oraz w Dodatku 7.4.

**Wejście:** (a) Macierz Grama  $m$  dodatnio określonego funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

(b) Liczba naturalna  $d \geq 0$ , z której będą liczone pierwiastki.

**Wyjście:** Lista wszystkich pierwiastków z  $d$ .

```

1.   ograniczoneZliczanie := proc (m, d)
2.       n := liczba kolumn macierzy m
3.       q := x*m*transpose(x)
4.       dziedzina := []
5.       wynik := []
6.       for i to n do
7.           max := 0
8.           postac_kanoniczna := postać kanoniczna q z zamienionymi x[i] i x[n]
9.           lista := rozwiązania całkowite równania postać_kanoniczna(x) <= d
10.          max := największa wartość z listy
11.          dziedzina[i] := [-max,..,max]
12.       end do
13.       T := produkt kartezjański elementów dziedziny
14.       for (każdy wektor z T) do
15.           if (wektor jest rozwiązaniem q(wektor)=d) then
16.               wynik := [wynik, wektor]
17.           end if
18.       end do
19.       return wynik
20.   end proc

```



dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^n$ , gdzie  $e_1, \dots, e_n$  jest standardową  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy wolnej  $\mathbb{Z}^n$ . Stąd łatwo wynikają równości

$$\text{Ker } \frac{\partial}{\partial x_j} q = \text{Ker } 2b_q(e_j, -) = \text{Ker } b_q(e_j, -),$$

dla  $j = 1, \dots, n$ . Dla ustalonego wektora  $w \in \mathbb{Z}^n$ , równości  $b_q(e_1, w) = 0, \dots, b_q(e_n, w) = 0$  implikują równość  $b_q(u, w) = 0$ , dla dowolnego wektora  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ , gdyż  $b_q(u, w) = b_q(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, w) = u_1 b_q(e_1, w) + \dots + u_n b_q(e_n, w) = 0$ . Stąd wynikają równości

$$\text{rad } q = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} \text{Ker } b_q(u, -) = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } b_q(e_j, -),$$

które implikują lewą równość żadaną w stwierdzeniu (a). Ponieważ równość  $\text{Ker } Dq = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } (\frac{\partial}{\partial x_j} q)$  wynika wprost z definicji homomorfizmu  $Dq : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , więc dowód stwierdzenia (a) został zakończony.

(b) Ponieważ funkcjonal  $b_q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$  jest  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowy, więc  $b_q(e_j, -) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$  jest homomorfizmem grup oraz zachodzi równość  $(**_q)$ . Zatem  $\text{Ker } \frac{\partial}{\partial x_j} q = \text{Ker } b_q(e_j, -)$  jest podgrupą grupy  $\mathbb{Z}^n$  i na podstawie części (a) naszego twierdzenia,  $\text{rad } q = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } b_q(e_j, -)$  jest również podgrupą grupy  $\mathbb{Z}^n$ .

Aby uzasadnić inkluzję  $\text{rad } q \subseteq \text{Ker } q$ , weźmy dowolny wektor  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \text{rad}(q)$ . Zatem równość  $(**_q)$  implikuje ciąg równości  $b_q(e_1, w) = 0, \dots, b_q(e_n, w) = 0$ . Stąd otrzymujemy równość

$$q(w) = b_q(w, w) = b_q(w_1 e_1 + \dots + w_n e_n, w) = w_1 b_q(e_1, w) + \dots + w_n b_q(e_n, w) = 0,$$

tzn.  $w \in \text{Ker } q$ , co kończy dowód pierwszej części stwierdzenia (b).

Aby udowodnić drugą część (b) wystarczy udowodnić inkluzję  $\text{rad } q \supseteq \text{Ker } q$ . Załóżmy, że całkowity funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny. Na podstawie Wniosku 2.16 (b), funkcjonal kwadratowy rzeczywisty  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio półokreślony.

Niech  $w \in \text{Ker } q$  będzie dowolnym wektorem, tzn.  $w \in \mathbb{Z}^n$  oraz  $q(w) = 0$ . Ponieważ funkcja rzeczywista  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest gładka oraz  $q(v) \geq 0$ , dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ , więc punkt  $w \in \mathbb{R}^n$  jest minimum lokalnym funkcji  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Na podstawie znanej z wykładu analizy matematycznej własności funkcji gładkich gradient (traktowany jako endomorfizm przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\mathbb{R}^n$ )

$$\text{Grad}(q) = \left( \frac{\partial q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

rzeczywistej funkcji  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  przyjmuje wartość zero w punkcie  $w$ . Ponieważ  $w \in \mathbb{Z}^n$ , więc  $0 = \text{Grad}(q)(w) = (Dq)(w)$ , tzn.  $w \in \text{Ker } Dq = \text{rad } q$  (na podstawie równości (a)), co kończy dowód stwierdzenia (b) (patrz również dowód lematu 3.3 w książce [1] na stronie 261).

(c)-(d) Ponieważ funkcjonal  $q$  jest kwadratowy jednorodny, więc  $\frac{\partial}{\partial x_j} q(x_1, \dots, x_n)$  jest wielomianem liniowym oraz  $\frac{\partial}{\partial x_j} q(x_1, \dots, x_n) = 0$  jest równaniem liniowym zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  o współczynnikach całkowitych, dla  $j = 1, 2, \dots, n$ . Zatem  $(*_q)$  jest układem równań liniowych o współczynnikach w  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  identycznym z układem  $2G_q \cdot x^{tr} = 0$ , gdyż zachodzi równość  $(\frac{\partial}{\partial x_j} q)(y) = e_j \cdot (2G_q) \cdot y^{tr}$ , dla  $j = 1, \dots, n$ , na podstawie  $(**_q)$ . Stąd wynika (d).

Stosując równość (a), otrzymujemy równość  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*) = \text{rad } q$ , co kończy dowód stwierdzeń (c) oraz (d).

(e) Rozważmy zbiór  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$  wszystkich rozwiązań wymiernych  $v \in \mathbb{Q}^n$  układu równań liniowych  $2G_q \cdot x^{tr} = 0$  o współczynnikach w  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ . Oczywiście  $\mathbb{Q}$ -podprzestrzeń liniowa

$\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$  zawiera grupę  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$ . Wiadomo, że wymiar przestrzeni  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$  jest równy liczbie  $\hat{r} := n - r$ , gdzie  $r$  jest rzędem macierzy Grama  $G_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  o współczynnikach w ciele  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych.

Założmy, że wektory  $w^{(1)}, \dots, w^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$  tworzą  $\mathbb{Q}$ -bazę przestrzeni liniowej  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$  wymiaru  $r$ . Ponieważ współrzędne wektorów  $w^{(1)}, \dots, w^{(r)}$  są liczbami wymiernymi, więc istnieje niezerowa liczba całkowita  $\lambda \in \mathbb{Z}$  (największy wspólny dzielnik mianowników tych współrzędnych) taka, że współczynniki każdego z wektorów

$$\bar{w}^{(1)} := \lambda \cdot w^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} := \lambda \cdot w^{(r)}.$$

są liczbami całkowitymi. Ponieważ  $w^{(1)}, \dots, w^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ , więc  $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Łatwo sprawdzić, że wektory  $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$  są  $\mathbb{Z}$ -liniowo niezależne, a także  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne. Stąd wynika, że ranga  $r'$  grupy  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$  nie jest większa od  $r$ , tzn.  $r' \leq r$ . Aby zakończyć dowód stwierdzenia (e) należy udowodnić, że  $r' = r$ .

Przypuśćmy „przez sprzeczność”, że  $r' \leq r - 1$ . Założmy, że wektory  $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathbb{Z}^n$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$  rangi  $r' \leq r - 1$ . Zatem

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) = \mathbb{Z} \cdot u^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot u^{(r')};$$

w szczególności wektory  $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne.

Rozważmy  $\mathbb{Q}$ -podprzestrzeń liniową  $U := \mathbb{Q} \cdot u^{(1)} + \dots + \mathbb{Q} \cdot u^{(r')}$  przestrzeni  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$  generowaną przez  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne wektory  $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ . Ponieważ wektory  $u^{(1)}, \dots, u^{(r')}$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne, więc  $\dim_{\mathbb{Q}} U = r'$ . Ponadto, ponieważ wektory  $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$  należą do  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) = \mathbb{Z} \cdot u^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot u^{(r')} \subseteq U$ , więc  $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} \in U$ . Z faktu, że wektory  $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne wynikają nierówności  $r \leq \dim_{\mathbb{Q}} U = r' \leq r - 1$ . Otrzymaliśmy więc sprzeczność  $r < r - 1$  z założeniem  $r' \leq r - 1$ . Stąd wynika, że prawdziwa jest równość  $r' = r$ , co kończy dowód stwierdzenia (e) oraz dowód twierdzenia.  $\square$

## 2.7. Całkowite funkcjonały nieujemne ustalonej korangi. Funkcjonały główne

Wyniki poprzedniego paragrafu były inspiracją do wprowadzenia w [38, 39] oraz artykułach [14, 15], [28], [47] następujących definicji korangi oraz funkcjonału głównego.

**Definicja 2.27.** Niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny.

(a) **Korangą** funkcjonału  $q$  nazywamy rangę  $\hat{r} \leq n$  przemiennej podgrupy wolnej  $\text{Ker } q$  grupy  $\mathbb{Z}^n$ , tzn. liczbę  $\hat{r} \geq 0$  wektorów stanowiących  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q$ . Przyjmujemy  $s = 0$ , gdy  $\text{Ker } q = 0$ .

(b)  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywamy **funkcjonałem głównym**, jeśli jest nieujemny korangi 1, lub równoważnie,  $q$  jest nieujemny oraz istnieje niezerowy wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , tzn. grupa  $\text{Ker } q$  jest cykliczna nieskończona.

W drugiej części rozprawy będziemy zajmować się opisem struktury krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych (bez pętli) zdefiniowanych w [41]. W opisie ich struktury wykorzystuje się podstawowe własności funkcjonałów głównych, które są jednym z narzędzi kombinatorycznej analizy krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych.

Funkcjonały nieujemne  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  skończonej korangi bada się m.in. w artykułach [38, 39], gdzie tworzy się metody algorytmiczno-graficznego opisu zbioru wszystkich rozwiązań całkowitych diofantycznego równania  $q(x_1, \dots, x_n) = d$ , dla dowolnej liczby całkowitej  $d \geq 0$ .

Jednym z etapów rozwiązywania tego problemu jest redukcja do algorytmicznej konstrukcji specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q$ . Baza ta służy m.in. do stowarzyszenia (w pracy [14]) z dowolnym funkcjonałem nieujemnym  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  skończonej korangi jednego z grafów Dynkina, zwanego typem Dynkina funkcjonału  $q$ . Jest on niezmiennikiem  $\mathbb{Z}$ -równoważności funkcjonałów kwadratowych.

W budowaniu algorytmów konstruujących specjalne  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q$  używa się następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.28.** *Niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny. Niech  $\hat{r}$  będzie korangą funkcjonału  $q$ .*

(a)  $0 \leq \hat{r} \leq n - 1$ .

(b)  $\hat{r} = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatni, lub równoważnie, gdy funkcjonał rzeczywisty  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio określony.

(c) Załóżmy, że  $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_n z_n^2$  jest postacią kanoniczną formy  $q(x)$  oraz  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  jest macierzą nieosobliwą taką jak w twierdzeniu 2.14, tzn. spełnia warunek  $[x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr} = [z_1, \dots, z_n]$ .

(c1) Koranga  $\hat{r} \geq 0$  jest liczbą tych wszystkich współczynników spośród  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ , które są zerami.

(c2) Z dokładnością do permutacji zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , istnieje postać kanoniczna  $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$  formy  $q(x)$ , w której  $q'_{\ell+1} = \dots = q'_n = 0$ , każdy ze współczynników  $q'_1, q'_2, \dots, q'_\ell$  jest różny od zera, oraz istnieje górnotrójkątna nieosobliwa macierz  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  o własnościach sformułowanych w twierdzeniu 2.14.

(c3) W wypadku opisanym w (c2), jądro  $\text{Ker } q$  jest identyczne ze zbiorem (grupą)  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$  wszystkich całkowitych rozwiązań  $v \in \mathbb{Z}^n$  górnotrójkątnego układu  $\ell \geq 1$  równań liniowych

$$\begin{array}{rcl}
 s_{11}x_1 + & s_{12}x_1 + \dots + & s_{1\ell}x_\ell + \dots + s_{1n}x_n = 0 \\
 & s_{22}x_1 + \dots + & s_{2\ell}x_\ell + \dots + s_{2n}x_n = 0 \\
 (*_S) & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\
 & & s_{\ell\ell}x_\ell + \dots + s_{\ell n}x_n = 0
 \end{array}$$

o współczynnikach wymiernych, gdzie  $s_{11} \neq 0, \dots, s_{\ell\ell} \neq 0$ .

(d) Funkcjonał  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jeden współczynnik spośród  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$  jest zerowy. Ponadto, w wypadku opisanym w (c2) dla funkcjonału głównego  $q$  mamy:  $\ell = 1$ , układ  $(*_S)$  zawiera  $n - 1$  równań oraz  $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$  jest grupą cykliczną nieskończoną generowaną przez wektor  $\mathbf{h} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ . W szczególności  $\mathbf{h}$  jest niezerowym całkowitym rozwiązaniem układu  $(*_S)$ , którego norma  $\|\mathbf{h}\|$  jest minimalna.

**Dowód.** (a) Ponieważ funkcjonał  $q$  jest jednolity, więc  $q(e_1) = \dots = q(e_n) = 1$ , z czego wynika nierówność  $\text{Ker } q \neq \mathbb{Z}^n$ . Zatem  $\ell < n$ , gdyż w przeciwnym wypadku  $\text{Ker } q = \mathbb{Z}^n$ , ponieważ  $\text{Ker } q = \text{Ker } (Dq : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n)$  (na podstawie twierdzenia 2.26 (a)-(b)), a stąd wynika, że  $\text{Ker } q$  jest składnikiem prostym grupy  $\mathbb{Z}^n$ .

(b) Ponieważ  $q$  jest nieujemny, więc jest dodatnio półokreślony, na podstawie wniosku 2.16 (b). Zatem  $\hat{r} = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{Ker } q = 0$ , co implikuje dodatnią określoność funkcjonału  $q$  i kończy dowód (b).

(c) Ponieważ  $q$  jest nieujemny, więc  $q'_1 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$ , na podstawie wniosku 2.16(a).

Udowodnimy najpierw (c2). W tym celu zauważmy, że jeśli  $q' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dowolnym niezerowym jednorodnym funkcjonałem nieujemnym zadany wzorem (2.2), to jeden z jego współczynników  $q'_{jj}$  jest dodatni. Istotnie; gdyby  $q'_{jj} < 0$ , to  $q(e_j) = q'_{jj} < 0$  i otrzymujemy

sprzeczność. Zatem  $q'_{11} \geq 0, \dots, q'_{nn} \geq 0$ . Gdyby  $q_{11} = 0, \dots, q'_{nn} = 0$ , to  $q(e_i \pm e_j) = \pm q_{ij}$ , dla dowolnych  $i < j$ . Stąd otrzymujemy sprzeczność z nieujemnością funkcjonału  $q$ .

Stosując tę uwagę otrzymamy tezę (c2) przez prostą modyfikację dowodu twierdzenia Lagrange'a w wersji podanej w artykule [13, Theorem 5.3].

(c3) Niech  $\ell \geq 1$  oraz  $S$  będą takie jak w (c2). Jeśli  $v \in \mathbb{Z}^n$ , to z równości  $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$  wynika, że  $v \in \text{Ker } q$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v$  jest rozwiązaniem układu  $(*_S)$ , gdyż  $q'_1 > 0, q'_2 > 0, \dots, q'_\ell > 0$ . Innymi słowy, zachodzi równość  $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ . Oczywiście grupa  $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$  jest podgrupą  $\mathbb{Q}$ -przestrzeni liniowej  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$  wszystkich wymiernych rozwiązań  $w \in \mathbb{Z}^n$  górnotrójkątnego układu równań liniowych  $(*_S)$ . Ponieważ rząd macierzy układu  $(*_S)$  jest równy  $n - \ell$ , więc  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = n - \ell$  i stosując argumenty używane w dowodzie części (e) twierdzenia 2.26 udowodnimy, że ranga grupy  $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$  jest równa  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = n - \ell$ . Z drugiej strony, koranga  $\hat{r}$  funkcjonału  $q$  jest równa randze grupy  $\text{Ker } q$ . Zatem  $\hat{r} = n - \ell$ , co kończy dowód stwierdzeń (c3) oraz (c1), gdyż (c1) wynika z (c2) oraz (c3).  $\square$

**Wniosek 2.29.** Niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny. Niech  $\hat{r}$  będzie korangą funkcjonału  $q$  oraz niech  $\ell \geq 1$  i  $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  będą takie jak w twierdzeniu 2.28 (c2).

(a)  $\hat{r} = n - \ell$  oraz wektory  $\hat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}, \dots, \hat{e}_n = e_n \cdot S^{-tr}$  przestrzeni liniowej  $\mathbb{Q}^n$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne oraz spełniają równości

$$q(\hat{e}_{\ell+1}) = 0, \dots, q(\hat{e}_n) = 0.$$

(b) Istnieją liczby  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$  takie, że wektory  $e'_{\ell+1} := \lambda_{\ell+1} \hat{e}_{\ell+1}, \dots, e'_n := \lambda_n \hat{e}_n$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q$ .

**Dowód.** Ponieważ  $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_n z_n^2$  jest postacią kanoniczną formy  $q(x)$  oraz  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  jest macierzą nieosobliwą taką jak w twierdzeniu 2.14, tzn. spełniającą warunek  $[x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr} = [z_1, \dots, z_n]$ , to  $[x_1, \dots, x_n] = [z_1, \dots, z_n] \cdot S^{-tr}$ . Stąd łatwo wynika, że wektory  $\hat{e}_{\ell+1}, \dots, \hat{e}_n$  tworzą  $\mathbb{Q}$ -bazę przestrzeni liniowej  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$  nad ciałem  $\mathbb{Q}$ . Ponieważ  $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$ , więc  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = \{w \in \mathbb{Q}^n; q(w) = 0\}$ . Zatem grupa  $\text{Ker } q$  rangi  $\hat{r} = n - \ell$  jest podgrupą  $\mathbb{Q}$ -przestrzeni liniowej  $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$  wymiaru  $\hat{r} = n - \ell$  o  $\mathbb{Q}$ -bazie  $\hat{e}_{\ell+1}, \dots, \hat{e}_n$  (na podstawie twierdzenia 2.28), co kończy dowód stwierdzenia (a).

Stwierdzenie (b) udowodnimy stosując argumenty używane w dowodzie części (e) twierdzenia 2.26.  $\square$

**Uwaga 2.30.** Wykorzystując algorytm Lagrange'a, wniosek 2.16, twierdzenie 2.28, wniosek 2.29 oraz ich dowody łatwo zbudować algorytm symboliczny stwierdzający, czy dany jednolity funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny (lub dodatni) oraz obliczający jego korangę oraz pewną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q$  w wypadku, gdy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny.

Jego prostota wynika z faktu, że wektory  $\hat{e}_{\ell+1}^{tr}, \dots, \hat{e}_n^{tr}$  są kolumnami macierzy  $S^{-1}$  o numerach  $\ell + 1, \dots, n$ . W wypadku, gdy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest główny, mamy  $\ell = n - 1$  i generator grupy cyklicznej  $\text{Ker } q$  „otrzymuje się” z ostatniej kolumny  $w^{(n)} := S^{-1} \cdot e_n^{tr} \in \mathbb{Q}^n$  macierzy  $S^{-1}$  mnożąc wektor  $w^{(n)}$  przez najmniejszy wspólny mianownik jego współrzędnych (które są liczbami wymiernymi).

Kod źródłowy takiego algorytmu podany jest w załączonej płycie.

**Uwaga 2.31.** Można zmodyfikować macierz  $S$  w algorytmie Lagrange'a dla nieujemnych funkcjonałów  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  tak, by wektory  $\hat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}, \dots, \hat{e}_n = e_n \cdot S^{-tr}$  należały do jądra  $\text{Ker } q$  i tworzyły jego  $\mathbb{Z}$ -bazę. Wtedy wektory tej bazy uzyska się jako kolumny macierzy





Wektory  $\mathbf{h} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{h}' = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{10}$  są wektorami  $\widehat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}$ ,  $\widehat{e}_{10} = e_{10} \cdot S^{-tr}$  zdefiniowanymi we wniosku 2.29 (dla  $n = 10$ ) i są dwiema ostatnimi kolumnami macierzy  $S^{-1}$ , zobacz uwaga 2.31. Ponadto wektory  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h}'$  należą do grupy  $\text{Ker } q$  oraz tworzą jej  $\mathbb{Z}$ -bazę, zgodnie z uwagą 2.31.

### 3. Całkowite funkcjonały $P$ -krytyczne

Załóżmy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ , jest jednolitym jednorodnym funkcjonałem kwadratowym całkowitym (2.2) zdefiniowanym wzorem

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}, \text{ dla } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Dla ustalonej liczby  $j \in \{1, \dots, n\}$ , rozważamy funkcjonał  $q^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ , zwany  $j$ -tym ograniczeniem  $q$ , zdefiniowanym wzorem

$$(3.1) \quad q^{(j)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = q(x)|_{x_j=0} = q(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Przypomnijmy z artykułu Ovsienki [26], że całkowity funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywa się **krytycznym**, jeśli  $q$  nie jest słabo dodatni, natomiast każde z jego ograniczeń  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcjonałem słabo dodatnim. Funkcjonały takie bada się szczególnie i stosuje w teorii reprezentacji algebr, zobacz [45, Section XIV.1].

Wykorzystując pewne idee Bondarenki oraz Polishchuka z artykułu [3], w artykułach [39, Definition 2.2] oraz [27] wprowadza się następującą definicję funkcjonału  $P$ -krytycznego (ang.  $P$ -critical unit form).

**Definicja 3.2.** Całkowity funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ , (2.2) nazywamy **funkcjonałem  $P$ -krytycznym**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- $q$  nie jest dodatni,
- każde z jego ograniczeń  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  do  $\mathbb{Z}^{n-1}$  jest funkcjonałem dodatnim.

Z twierdzenia 3.5 oraz wniosku 3.10 udowodnionych w paragrafie 3.3 wynika, że każdy funkcjonał krytyczny  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny. Punkt (b) przykładu 3.3 pokazuje, że dla  $n = 2$  implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.

**Przykład 3.3.** (a) Jednorodny funkcjonał kwadratowy  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) grafu Kroneckera  $a_1 \equiv a_2$  jest  $P$ -krytyczny, gdyż  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$ ,  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$ , oraz  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(1)}(x_1) = x_1^2$ ,  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(2)}(x_2) = x_2^2$ .

(b) Funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$  nie jest krytyczny, gdyż  $q^{(1)}(x_1) = x_1^2$ ,  $q^{(2)}(x_2) = x_2^2$  oraz w sposób oczywisty  $q$  jest słabo dodatni. Funkcjonał  $q$  jest  $P$ -krytyczny, gdyż  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2$ . Zatem  $q$  jest nieujemny i nie jest dodatni, gdyż  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$ , gdzie  $\mathbf{h}' = (1, -1) \in \mathbb{Z}^2$ .

(c) Jednorodny funkcjonał kwadratowy  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3) grafu Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_2$  jest  $P$ -krytyczny, gdyż

- $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2]$ ,
- $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_2} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h} = (1, 1, 1)$ ,
- ograniczenia  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(1)}, q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(2)}, q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(3)} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.1) są funkcjonałami dodatnimi, zobacz przykład 2.7 (a).

Głównym celem tego rozdziału jest przedstawienie (wraz z dowodem) podanej w naszym artykule [27] pełnej charakteryzacji funkcjonałów  $P$ -krytycznych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Dla  $n = 2$ , funkcjonały  $P$ -krytyczne  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  opisane są w następującym lemacie.

**Lemat 3.4.** Niech  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednorodnym funkcjonałem kwadratowym zdefinio-

wanym wzorem  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$ , gdzie  $q_{12} \in \mathbb{Z}$ . Funkcjonał  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $|q_{12}| \geq 2$ .

**Dowód.** „ $\Leftarrow$ ” Załóżmy, że  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny. Oczywiście  $q_{12} \neq 0$ , gdyż w przeciwnym wypadku  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  i  $q$  byłby dodatnio określony. Zauważmy również, że  $q_{12} \neq \pm 1$ . Istotnie; gdyby  $q_{12} = \pm 1$ , to funkcyjonał  $q$  byłby również dodatnio określony, gdyż  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \pm x_1x_2 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (x_1 \pm x_2)^2 + x_2^2]$ . Stąd wynika, że  $|q_{12}| \geq 2$ .

„ $\Rightarrow$ ” Załóżmy, że  $|q_{12}| \geq 2$ . Ponieważ  $q^{(1)}(x_1) = x_1^2$  oraz  $q^{(2)}(x_2) = x_2^2$ , więc wystarczy udowodnić, że  $q$  nie jest dodatni. W tym celu zauważmy, że  $q(1, 1) = 2 + q_{12} \leq -2$ , gdy  $q_{12} < 0$ , oraz  $q(1, -1) = 2 - q_{12} \leq 0$ , gdy  $q_{12} > 2$ .  $\square$

Dla  $n \geq 3$ , charakteryzacja funkcyjonałów  $P$ -krytycznych  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  przedstawiona jest w następującym twierdzeniu udowodnionym w pracy współautorskiej [27]. Jest ono jednym z głównych osiągnięć tej rozprawy.

**Twierdzenie 3.5.** Niech  $n \geq 3$  oraz niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednorodnym funkcyjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem  $q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_ix_j$ , gdzie

$q_{ij} \in \mathbb{Z}$ , dla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Następujące warunki są równoważne

(a)  $q$  jest  $P$ -krytyczny.

(b)  $q$  jest dodatnio półokreślony główny oraz podgrupa  $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n, q(v) = 0\}$  grupy  $\mathbb{Z}^n$  jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny.

(c)  $q$  jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  taki, że

(c1)  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$

(c2)  $1 \leq |h_j| \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

(c3)  $|h_s| = 1$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ .

(d) Zbiór  $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków funkcyjonału  $q$  jest nieskończony, natomiast każdy z funkcyjonałów ograniczonych  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  ma tylko skończenie wiele pierwiastków.

Twierdzenie 3.5 zostało w sposób istotny wykorzystane w pracy [32], gdzie podano pełną klasyfikację jednopikowych posetów  $TP$ -krytycznych, a także prawie  $TP$ -krytycznych.

W dowodzie tego twierdzenia przedstawionego w paragrafie 3.3 wykorzystujemy idee Ovsienko z pracy [26] oraz idee von Höhne z pracy [16] stosowane w badaniu funkcyjonałów krytycznych i ich zastosowań w teorii reprezentacji algebr, zobacz również monografia [45, Section XIV.1]. Dowód twierdzenia poprzedzimy dowodami pewnych faktów pomocniczych.

### 3.1. Podstawowe twierdzenie redukcyjne

Głównym etapem dowodu twierdzenia 3.5 będzie udowodnienie następującego twierdzenia redukcyjnego, które jest przeredagowaniem lematu 2.2 z naszej pracy [27] zawierającej dowód pewnej wersji twierdzenia 3.5.

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednorodnym jednolitym funkcyjonałem kwadratowym. Ponadto niech  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  będzie niezerowym wektorem spełniającym następujące dwa warunki:

(i)  $q(\mathbf{h}) \leq 0$ ,

(ii) norma  $\|\mathbf{h}\| := |h_1| + \dots + |h_n|$  jest minimalna.

(a) Jeśli  $q$  jest  $P$ -krytyczny lub  $q$  jest krytyczny i wektor  $\mathbf{h}$  jest dodatni, to  $q$  jest nieujemny,  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$  oraz wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny.

(b) Jeśli  $q$  jest  $P$ -krytyczny, to  $q$  jest nieujemny oraz istnieje wierny wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

(c) Jeśli  $q$  jest krytyczny, to  $q$  jest nieujemny oraz istnieje dodatni wierny wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

(d) Jeśli  $q$  jest  $P$ -krytyczny, to następujące trzy warunki są równoważne:

(d1) funkcjonał  $q$  jest słabo dodatni;

(d2) żaden z wiernych wektorów  $\mathbf{h}$  oraz  $-\mathbf{h}$  nie jest dodatni;

(d3) funkcjonał  $q$  nie jest krytyczny.

**Dowód.** W dowodzie wykorzystamy pewne idee Ovsienki [26] (zobacz także [33, str. 30] oraz [45, Theorem 1.3]) stosowane w dowodzie analogicznego twierdzenia charakteryzującego funkcjonały krytyczne.

Założmy, że  $n \geq 3$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednorodnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym oraz niech  $b_q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$  będzie  $\mathbb{Z}$ -dwuliniową polaryzacją funkcjonału  $q$  zdefiniowaną wzorem (2.3).

Jeśli  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  jest dowolnym wektorem, to dla dowolnej liczby  $j \in \{1, \dots, n\}$ , oznaczamy symbolem  $v^{(j)}$  wektor

$$v^{(j)} := (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

(a) Niech  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  będzie niezerowym wektorem takim, że  $q(\mathbf{h}) \leq 0$  oraz norma  $\|\mathbf{h}\|$  jest minimalna. Ponieważ  $q$  jest funkcjonałem kwadratowym, więc  $q(\mathbf{h}) = q(-\mathbf{h})$ . Dla uproszczenia zapisu założmy, że istnieje  $s \in \{1, \dots, n\}$  takie, że  $h_1 \geq 0, \dots, h_s \geq 0, h_{s+1} \leq 0, \dots, h_n \leq 0$ . Ustalmy taką liczbę  $s \geq 1$ .

1° Pokażemy najpierw, że wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny, tzn.  $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$ . Założmy przez sprzeczność, że  $h_j = 0$  dla pewnego  $j \leq n$ .

Jeśli  $q$  jest  $P$ -krytyczny, to jego ograniczenia  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n-1 \geq 2$ , są funkcjonałami dodatnimi oraz  $0 < q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q(\mathbf{h}) \leq 0$ , dla dowolnego  $j \geq 1$ . Otrzymujemy więc sprzeczność.

W wypadku, gdy  $q$  jest krytyczny i wektor  $\mathbf{h}$  jest dodatni, ograniczenia  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$  są funkcjonałami słabo dodatnimi,  $s = n$  oraz  $0 < q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q(\mathbf{h}) \leq 0$ , dla dowolnego  $j \geq 1$ , i otrzymujemy również sprzeczność.

Udowodniliśmy więc, że wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny oraz

$$h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1, \|\mathbf{h}\| = h_1 + \dots + h_s - (h_{s+1} + \dots + h_n).$$

Ponadto, jeśli wektor  $\mathbf{h}$  jest dodatni, to  $s = n$ .

2° Udowodnimy teraz, że  $q(\mathbf{h} - e_i) \geq 1$  i  $q(\mathbf{h} + e_j) \geq 1$  dla dowolnego  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $j \in \{s+1, \dots, n\}$ .

Założmy, że  $q$  jest  $P$ -krytyczny. Jeśli  $h_i = 1$  lub  $h_j = -1$ , to  $\mathbf{h} - e_i \neq 0, \mathbf{h} + e_j \neq 0$ ,  $q(\mathbf{h} - e_i) = q^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$  oraz  $q(\mathbf{h} + e_j) = q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) > 0$ , gdyż  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$  są dodatnie.

Jeśli  $h_i > 1$  lub  $h_j < -1$ , to  $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|, \|\mathbf{h} + e_j\| < \|\mathbf{h}\|$  i  $q(\mathbf{h} - e_i) > 0, q(\mathbf{h} + e_j) > 0$ , gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem o minimalności normy  $\|\mathbf{h}\|$ .

Założmy teraz, że  $q$  jest krytyczny oraz wektor  $\mathbf{h}$  jest dodatni. Wtedy  $s = n$  i jeśli  $h_i = 1$ , to  $q(\mathbf{h} - e_i) = q^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$ , gdyż wektor  $\mathbf{h}^{(i)}$  jest dodatni. Ponadto  $q^{(i)}$  jest słabo dodatni. Jeśli  $h_i > 1$ , to  $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|$  i  $q(\mathbf{h} - e_i) > 0$ , gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem o minimalności normy  $\|\mathbf{h}\|$ .

3° Korzystając z części 2° dowodu pokażemy, że  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$ . Na podstawie 2° prawdziwe są następujące nierówności:

$$1 \leq q(\mathbf{h} - e_j) = q(\mathbf{h}) + q(e_j) - 2b_q(\mathbf{h}, e_j) \text{ dla dowolnego } j \in \{1, \dots, s\},$$

$$1 \leq q(\mathbf{h} + e_j) = q(\mathbf{h}) + q(e_j) + 2b_q(\mathbf{h}, e_j) \text{ dla dowolnego } j \in \{s+1, \dots, n\}.$$

Ponieważ funkcjonał kwadratowy  $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednolity, więc wektory  $e_1, \dots, e_n$  standardowej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\mathbb{Z}^n$  są pierwiastkami funkcjonału  $q$  (tzn.  $q(e_1) = 1, \dots, q(e_n) = 1$ ) oraz liczby  $2b_q(\mathbf{h}, e_1), \dots, 2b_q(\mathbf{h}, e_n), q(\mathbf{h})$  są całkowite. Otrzymujemy więc następujące nierówności:

$2b_q(\mathbf{h}, e_i) < q(\mathbf{h}) + 1$ , dla  $i \leq s$ , oraz  $-2b_q(\mathbf{h}, e_j) < q(\mathbf{h}) + 1$ , dla  $j \geq s+1$ ,  
które implikują nierówności:

$$(*) \quad 2b_q(\mathbf{h}, e_i) \leq q(\mathbf{h}) \leq 0, \text{ jeśli } h_i \geq 1 \text{ oraz } -2b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq q(\mathbf{h}) \leq 0, \text{ jeśli } h_j \leq -1.$$

Nierówności  $h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1$  oraz nierówności:  $(*)$  implikują

$$(**) \quad 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq h_j \cdot q(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j > 0, \text{ oraz } 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq -h_j \cdot q(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j < 0.$$

Uwzględniając  $(**)$  otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{h}) &= 2b_q(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2b_q(\mathbf{h}, \sum_{j=1}^n h_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq \\ &\leq h_1 \cdot q(\mathbf{h}) + \dots + h_s \cdot q(\mathbf{h}) - h_{s+1} \cdot q(\mathbf{h}) - \dots - h_n \cdot q(\mathbf{h}) = \\ &= (h_1 + \dots + h_s - h_{s+1} - \dots - h_n) \cdot q(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

tzn. otrzymujemy nierówność  $2q(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h})$ . Ponadto, na podstawie założenia, zachodzi nierówność  $q(\mathbf{h}) \leq 0$ .

Pokażemy teraz, że  $q(\mathbf{h}) = 0$ . Załóżmy przez sprzeczność, że  $q(\mathbf{h}) < 0$ . Dzieląc obie strony nierówności  $2q(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h})$  przez liczbę  $q(\mathbf{h}) < 0$  otrzymujemy  $2 \geq \|\mathbf{h}\| \geq n \geq 3$ , tzn. otrzymujemy sprzeczność  $2 \geq 3$  będącą konsekwencją założenia  $q(\mathbf{h}) < 0$ . Zatem  $q(\mathbf{h}) = 0$ , tzn. wektor  $\mathbf{h}$  należy do jądra  $\text{Ker } q$ , co kończy dowód stwierdzenia 3°.

4° Pokażemy teraz, że  $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$ . Przypomnijmy, że  $q(\mathbf{h}) = 0$ , na podstawie stwierdzenia 3°. Uwzględniając nierówności:  $(*)$  otrzymujemy

$$(***) \quad 0 = q(\mathbf{h}) = b_q(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = h_1 \cdot b_q(\mathbf{h}, e_1) + \dots + h_n \cdot b_q(\mathbf{h}, e_n) \leq 0,$$

co po zastosowaniu nierówności:  $(**)$  oraz równości:  $q(\mathbf{h}) = 0$  implikuje następującą nierówność:

$$h_r \cdot b_q(\mathbf{h}, e_r) \leq 0, \text{ dla dowolnej liczby } r \in \{1, \dots, n\},$$

Zatem  $(***)$  implikuje ciąg równości  $h_1 \cdot b_q(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, h_n \cdot b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$ . Stąd wynikają równości  $b_q(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$ , gdyż wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny (na podstawie 1°), tzn.  $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$ .

Jeśli teraz  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$  jest dowolnym wektorem, to  $w = w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$  oraz stosując  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowość funkcjonału polaryzacji  $b_q$  otrzymujemy  $b_q(\mathbf{h}, w) = w_1 b_q(\mathbf{h}, e_1) + \dots + w_n b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$ , tzn.  $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$ , co kończy dowód stwierdzenia 4°.

5° Udowodnimy w końcu, że funkcjonał  $q$  jest nieujemny oraz  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h}$  jest wiernym wektorem (na podstawie 1°).

Niech  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$  będzie dowolnym wektorem takim, że  $q(w) \leq 0$ . Pokażemy, że wektor  $w$  należy do jądra  $\text{Ker } q$ , tzn.  $q(w) = 0$ .

Rozważmy najpierw sytuację kiedy  $q$  jest  $P$ -krytyczny. Stąd wynika, że funkcjonał ograniczony  $q^{(1)}$  jest dodatni. Rozważmy wektor

$$v := h_1 w - w_1 \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n,$$

którego pierwsza współrzędna jest zerowa, tzn.  $v_1 = 0$ . Dodatniość funkcjonału  $q^{(1)}$ , wybór wektora  $w$ , stwierdzenie 4° oraz definicja (2.3) polaryzacji  $b_q$  implikują następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 0 &\leq q^{(1)}(v^{(1)}) = q(v) = q(h_1 \cdot w - w_1 \cdot \mathbf{h}) = \\ &= q(h_1 \cdot w) + q(w_1 \cdot \mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_q(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q(w) + w_1^2 \cdot q(\mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_q(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q(w) \leq 0 \end{aligned}$$

Ponieważ wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny (na podstawie 1°), więc  $h_1^2 \geq 1$  i w rezultacie otrzymujemy równości  $q(w) = 0$  oraz  $q^{(1)}(v^{(1)}) = 0$ , dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^n$  takiego, że  $q(w) \leq 0$ . Stąd wynika, że funkcjonał  $q$  jest nieujemny.

Udowodnimy teraz, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Ponieważ  $q(\mathbf{h}) = 0$ , na podstawie stwierdzenia 3°, więc  $\text{Ker } q \supseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Aby udowodnić inkluzję przeciwną zauważmy, że ponieważ  $q^{(1)}$  jest dodatni oraz  $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$  (na podstawie punktu 4°), więc otrzymujemy  $v^{(1)} = 0$  oraz  $v = 0$ , gdyż  $v_1 = 0$ . Stąd wynika, że wektor  $w$  ma postać:

$$(+) \quad w = \frac{w_1}{h_1} \cdot \mathbf{h}.$$

Aby udowodnić inkluzję  $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , wystarczy uzasadnić, że ułamek  $\frac{w_1}{h_1}$  jest liczbą całkowitą. W tym celu przedstawmy ten ułamek  $\frac{w_1}{h_1}$  w nieskracalnej postaci, tzn.  $\frac{w_1}{h_1} = \frac{p}{m}$ , gdzie liczby  $p, m \in \mathbb{Z}$  są względnie pierwsze oraz  $m \geq 1$ . Równość (+) implikuje równość  $w \cdot m = p \cdot \mathbf{h}$ . Ponieważ liczby  $p$  oraz  $m$  są względnie pierwsze, więc wszystkie współrzędne wektora  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  są podzielne przez  $m$ . Zatem istnieje wektor  $h' \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\mathbf{h} = m \cdot h'$ . Wówczas zachodzą następujące równości:  $0 = q(\mathbf{h}) = q(m \cdot h') = m^2 \cdot q(h')$  oraz  $\|\mathbf{h}\| = m \cdot \|h'\|$ . Stąd wynika, że  $m = 1$ , gdyż w przeciwnym wypadku  $\|\mathbf{h}\| > \|h'\|$ , co przeczy minimalności wyboru wektora  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$ .

W przypadku, gdy  $q$  jest krytyczny oraz  $\mathbf{h}$  jest dodatni, dowód punktu 5° jest analogiczny do dowodu w poprzednim przypadku. Dowód części (a) twierdzenia został więc zakończony.

(b) Załóżmy, że  $q$  jest  $P$ -krytyczny. Wprost z definicji wynika, że istnieje niezerowy wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  spełniający warunki (i) oraz (ii). Zatem (b) jest konsekwencją (a).

(c) Załóżmy, że  $q$  jest krytyczny. Wprost z definicji funkcjonału krytycznego wynika, że istnieje niezerowy wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  spełniający warunki (i)-(ii) oraz dodatni, tzn.  $h_i \geq 0$ , dla dowolnego  $1 \leq i \leq n$ . Zatem (c) jest konsekwencją (a).

(d) Udowodnimy najpierw implikację (d3)  $\Rightarrow$  (d2). Ponieważ zakładamy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny, to na podstawie (b),  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

Z założenia, że  $q$  nie jest krytyczny wynika, że każdy z wektorów  $\mathbf{h}$  oraz  $-\mathbf{h}$  jest wierny, ale nie jest dodatni. Aby to uzasadnić załóżmy, że wierny wektor  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  jest dodatni. Pokażemy, że funkcjonały  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  są słabo dodatnie. W tym celu ustalmy  $j \leq n$  i weźmy niezerowy wektor  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$  taki, że  $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ . Wtedy  $0 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$  (tzn.  $\hat{v} \in \text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ ), gdzie  $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$  jest wektorem różnym od zera. Stąd wynika, że  $\hat{v} = 0$  oraz  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ , gdyż wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny. Sprzeczność ta kończy dowód słabej dodatniości funkcjonałów  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$ . Stąd wynika, że  $q$  jest krytyczny (gdyż  $q(\mathbf{h}) = 0$  i w konsekwencji  $q$  nie jest słabo dodatni), co jest sprzeczne z założeniem w (d3), co kończy dowód implikacji (d3)  $\Rightarrow$  (d2).

(d2)  $\Rightarrow$  (d1) Ponieważ  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny, więc na podstawie punktu (b) funkcjonał  $q$  jest nieujemny oraz  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  jest pewnym wektorem wiernym. Jeśli ponadto

wektory  $\mathbf{h}$ ,  $-\mathbf{h}$  nie są dodatnie, to tak jak w dowodzie implikacji (d3) $\Rightarrow$ (d2) pokazuje się, że  $q$  nie jest krytyczny.

Ponieważ implikacja (d1) $\Rightarrow$ (d3) jest oczywista (wynika z definicji krytyczności  $q$ ), więc dowód warunku (d) i całego twierdzenia został zakończony.  $\square$

### 3.2. Dowód twierdzenia 3.5

Założmy, że  $n \geq 3$ . Udowodnimy najpierw równoważność (a) $\Leftrightarrow$ (b). Ponieważ implikacja (a) $\Rightarrow$ (b) jest konsekwencją twierdzenia 3.6(b). Aby udowodnić implikację przeciwną (b) $\Rightarrow$ (a) założmy, że  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Stąd wynika, że  $q$  nie jest dodatni, gdyż  $q(\mathbf{h}) = 0$  oraz  $\mathbf{h} \neq 0$ . Aby udowodnić, że  $q$  jest  $P$ -krytyczny należy wykazać dodatniość funkcjonałów  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

W tym celu ustalmy  $j \leq n$  i weźmy niezerowy wektor  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$  taki, że  $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ . Wtedy  $0 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$ , gdzie  $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  jest niezerowy, tzn.  $\hat{v} \in \text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Stąd wynika, że  $\hat{v} = 0$  oraz  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$ , gdyż wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny. Sprzeczność ta kończy dowód słabej nieujemności funkcjonałów  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$  oraz równoważności (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Oznaczmy symbolem  $\Delta(q)$  bigraf funkcjonału  $q$  zdefiniowany w [26, 39] następująco:

- wierzchołkami bigrafu  $\Delta(q)$  są liczby  $1, \dots, n$ ,
- dwa wierzchołki  $i \neq j$  są połączone  $-q_{ij}$  ciągłych krawędzi postaci  $\bullet_i \text{---} \bullet_j$ , jeśli  $q_{ij} < 0$ , oraz są połączone  $q_{ij}$  przerywanych krawędzi postaci  $\bullet_i - - \bullet_j$ , jeśli  $q_{ij} > 0$ .
- nie ma krawędzi pomiędzy  $i$  oraz  $j$ , gdy  $q_{ij} = 0$  lub  $i = j$ .

Łatwo widać, że bigraf  $\Delta(q)$  jest spójny, gdy funkcjonał  $q$  jest  $P$ -krytyczny. Ponieważ zakładamy (b), więc do bigrafu  $\Delta(q)$  oraz funkcjonału  $q_{\Delta(q)} = q$  możemy stosować Proposition 6.7(a) z artykułu [23] oraz twierdzenie 4.30 udowodnione w następnym rozdziale, z których to twierdzeń wynikają własności (c2) oraz (c3). Ponieważ (c1) wynika z (b), a implikacja (c) $\Rightarrow$ (b) jest oczywista, więc dowód równoważności (b) $\Leftrightarrow$ (c) został zakończony.

(b) $\Rightarrow$ (d) Założmy, że  $n \geq 3$ ,  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Na podstawie twierdzenia 2.26, funkcjonał  $\mathbb{Z}$ -liniowy  $b_q(\mathbf{h}, -)$  jest zerowy. Zatem, dla dowolnej liczby  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , mamy

$$\begin{aligned} q(e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}) &= b_q(e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}, e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}) \\ &= b_q(e_1, e_1) + 2\lambda \cdot b_q(e_1, \mathbf{h}_q) + \lambda^2 \cdot b_q(\mathbf{h}_q, \mathbf{h}_q) \\ &= b_q(e_1, e_1) = q(e_1) = 1. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że zbiór  $\mathcal{R}_q$  pierwiastków funkcjonału  $q$  jest nieskończony. Ponieważ udowodniliśmy już równoważność (b) $\Leftrightarrow$ (a), więc (b) implikuje, że funkcjonały ograniczone  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  są dodatnie. Zatem, na podstawie twierdzenia 2.22, każdy z nich ma tylko skończenie wiele pierwiastków, co kończy dowód implikacji (b) $\Rightarrow$ (d).

(d) $\Rightarrow$ (a) Założmy, że  $n \geq 3$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcjonałem jednolitym takim, że zbiór  $\mathcal{R}_q$  jego pierwiastków jest nieskończony, natomiast zbiory  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$  pierwiastków funkcjonałów ograniczonych  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  są skończone.

1° Na podstawie twierdzenia 2.22, funkcjonał  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  nie jest dodatni, gdyż zbiór  $\mathcal{R}_q$  jego pierwiastków jest nieskończony.

2° Udowodnimy teraz że  $-1 \leq q_{ij} \leq 1$ , o ile  $i \leq j$ . Założmy, przez sprzeczność, że  $|q_{ij}| \geq 2$ , dla pewnej pary  $i, j$  takiej, że  $i < j$ . Dla prostoty zapisu założmy, że  $i = 1$  oraz  $j = 2$ , tzn.  $|q_{12}| \geq 2$ . Zauważmy, że funkcjonał ograniczony  $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q_{[1,2]}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$  ma tylko skończenie wiele pierwiastków. Istotnie, ponieważ

$n \geq 3$ , to dla dowolnego pierwiastka  $(u_1, u_2)$  funkcjonału  $q_{[1,2]}$ , wektor  $\hat{u} := (u_1, u_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$  należy do skończonego zbioru  $\mathcal{R}_{q^{(n)}}$ , gdyż  $q^{(n)}(\hat{u}) = q_{[1,2]}(u_1, u_2) = 1$ .

Z drugiej strony, założenie  $|q_{12}| \geq 2$  implikuje, że funkcjonał ograniczony  $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  ma nieskończenie wiele pierwiastków  $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}, \dots$  zdefiniowanych następująco:

$$w^{(m)} = \begin{cases} (1, 0), & \text{dla } m = 0, \\ (q_{12}, -1), & \text{dla } m = 1, \\ q_{12} \cdot w^{(m-1)} - w^{(m-2)}, & \text{dla } m \geq 2. \end{cases}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdza się bowiem, że  $q_{[1,2]}(w^{(0)}) = q_{[1,2]}(1, 0) = 1$ ,  $q_{[1,2]}(w^{(1)}) = q_{[1,2]}(q_{12}, -1) = 1$  oraz  $q_{[1,2]}(w^{(2)}) = 1$ , gdzie  $w^{(2)} = (q_{12}^2 - 1, -q_{12})$ . Równość  $q_{[1,2]}(w^{(m)}) = 1$ , dla  $m \geq 3$ , udowodnimy łatwo przez indukcję.

Ponieważ wektory  $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}, \dots$  są parami różne, zbiór  $\mathcal{R}_{q_{[1,2]}}$  jest nieskończony. Otrzymaliśmy więc sprzeczność z założeniem  $|q_{12}| \geq 2$  i w konsekwencji udowodniliśmy, że  $-1 \leq q_{ij} \leq 1$ , dla  $i = 1$  oraz  $j = 2$ . Dowód tych nierówności dla dowolnych  $i < j$  jest analogiczny, co kończy dowód części 1°.

3° Na podstawie 1°, aby zakończyć dowód implikacji (d) $\Rightarrow$ (a), wystarczy udowodnić, że każdy z funkcjonałów ograniczonych  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatni, gdy zbiory pierwiastków  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$  są skończone. Implikacja ta jest konsekwencją następującego lematu, który jest analogiczny do [1, Proposition VII.3.4].

**Lemat 3.7.** *Jeśli  $n \geq 2$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dowolnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym takim, że zbiór jego pierwiastków  $\mathcal{R}_q$  jest skończony, to  $q$  jest dodatni.*

**Dowód.** Jeśli  $n = 2$ , to  $q_{12} \in \{-1, 0, 1\}$ , na podstawie części 2° dowodu implikacji (d) $\Rightarrow$ (a) (przedstawionego przed lematem 3.7). Jeśli  $q_{12} = 0$ , funkcjonał  $q$  jest dodatni. Jeśli  $q_{12} = \pm 1$ , to  $q(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[(x_1^2 + (x_1 \pm x_2)^2 + x_2^2)]$ . Stąd wynika, że  $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest również dodatni, co kończy dowód w wypadku  $n = 2$ .

Załóżmy, że  $n \geq 3$ ,  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest taki, że zbiór  $\mathcal{R}_q$  jest skończony oraz lemat jest prawdziwy dla dowolnych funkcjonałów kwadratowych  $\mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Pokażemy, że zbiory  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$  są również skończone. W tym celu ustalmy  $j \leq n$  i weźmy niezerowy wektor  $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \in \mathcal{R}_{q^{(j)}}$ , tzn.  $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 1$ . Wtedy  $1 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$ , gdzie  $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ , tzn.  $\hat{v} \in \mathcal{R}_q$ . Stąd wynika, że zbiór  $\mathcal{R}_{q^{(j)}}$  jest skończony, gdyż zbiór  $\mathcal{R}_q$  jest skończony.

Na podstawie założenia indukcyjnego, funkcjonały  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$  są dodatnie. Stąd wynika, że  $q$  jest dodatni, gdyż w przeciwnym wypadku  $q$  jest  $P$ -krytyczny i w konsekwencji zbiór  $\mathcal{R}_q$  jest nieskończony, na podstawie implikacji (a) $\Rightarrow$ (d) twierdzenia 3.5 (udowodnionej wcześniej bez użycia lematu 3.7). Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu, a tym samym dowód twierdzenia 3.5.  $\square$

**Wniosek 3.8.** *Jeśli  $n \geq 3$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytycznym jednolitym funkcjonałem kwadratowym, to  $-1 \leq q_{ij} \leq 1$ , dla dowolnej pary indeksów  $i, j$  takich, że  $1 \leq i < j \leq n$ .*

**Dowód.** Ponieważ  $n \geq 3$  oraz  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny, to na podstawie twierdzenia 3.5, zbiór  $\mathcal{R}_q$  jest nieskończony, natomiast zbiory  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$  są skończone. Na podstawie



części 2° dowodu implikacji (d) $\Rightarrow$ (a) (przedstawionego przed lematem 3.7) zachodzi nierówność  $-1 \leq q_{ij} \leq 1$ , dla dowolnej pary indeksów  $i, j$  takich, że  $i < j$ .  $\square$

Używając metod zastosowanych w dowodzie twierdzenia 3.5 udowodniliśmy w pracy [27] następujące twierdzenie, które jest ogólniejsze od twierdzenia 3.5, zobacz [27, Theorem 2.3].

**Twierdzenie 3.9.** *Niech  $n \geq 3$  oraz niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednolitym funkcjonalem kwadratowym (2.2). Następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Funkcjonał  $q$  jest  $P$ -krytyczny.*
  - (b) *Funkcjonał  $q$  jest albo krytyczny, albo jest  $P$ -krytyczny oraz słabo dodatni.*
  - (c) *Istnieje wektor  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  o współrzędnych  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$  taki, że funkcjonał  $q * \varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  określony wzorem  $(q * \varepsilon)(v_1, \dots, v_n) = q(\varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_n v_n)$ , jest krytyczny.*
  - (d) *Zachodzi jeden z następujących dwóch wykluczających się warunków:*
    - (d1)  *$q$  nie jest słabo dodatni, zbiór  $\mathcal{R}_q^+$  jego dodatnich pierwiastków jest nieskończony, natomiast zbiory  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}^+, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}^+$  są skończone,*
    - (d2)  *$q$  jest słabo dodatni, zbiór  $\mathcal{R}_q$  jest nieskończony, natomiast zbiory  $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$  są skończone.*
  - (e) *Funkcjonał  $q$  jest nieujemny oraz grupa  $\text{Ker } q$  jest cykliczna nieskończona generowana przez pewien wektor wierny.*
  - (e') *Funkcjonał  $q$  jest główny oraz istnieją wektor wierny  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  i liczba  $s \in \{1, \dots, n\}$  takie, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ ,  $h_s \in \{-1, 1\}$  oraz  $-6 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ .*
  - (e'') *Funkcjonał  $q$  jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ ,  $h_1 \geq 1$ , oraz*
    - *$q$  nie jest słabo dodatni (t.j.  $q$  jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\mathbf{h}$  jest dodatni, lub*
    - *$q$  słabo dodatni (t.j.  $q$  nie jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\mathbf{h}$  nie jest dodatni.*
  - (f) *Istnieje diagram Euklidesa  $D \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$  oraz izomorfizm grup  $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  taki, że funkcjonał  $q \circ T$  jest identyczny z funkcjonalem  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  (1.3), gdzie  $n = |D_0|$ , grafu  $D$  oraz  $T$  przeprowadza wierny wektor  $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q$  na wektor wierny  $T(\mathbf{h}) \in \text{Ker } q_D$ .*
- Jeśli  $q$  jest nieujemny oraz  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  jest takim wektorem wiernym, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , to  $1 \leq |h_j| \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ , oraz  $h_s \in \{-1, 1\}$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ .*

Wnioskiem z twierdzenia 3.9 jest następujące rozszerzenie twierdzenia Ovsienki [26, Teorema] przedstawione w [27] jako Corollary 2.7.

**Wniosek 3.10.** *Niech  $n \geq 2$  oraz niech  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednolitym funkcjonalem kwadratowym (2.2).*

1° *Jeśli  $n = 2$ , to  $q$  jest krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $q_{12} \leq -2$ , lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $\mathcal{R}_q^+$  jego pierwiastków dodatnich jest nieskończony.*

2° *Jeśli  $n \geq 3$ , to następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Funkcjonał  $q$  jest krytyczny.*
  - (a') *Funkcjonał  $q$  nie jest słabo dodatni oraz funkcjonały  $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  są dodatnie.*
- (b) *Funkcjonał  $q$  nie jest nieujemny oraz istnieje dodatni wektor wierny  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .*
- (c) *Funkcjonał  $q$  jest główny oraz istnieją wektor wierny  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$  i indeks  $s \in \{1, \dots, n\}$  takie, że  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ ,  $h_s = 1$  oraz  $1 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ .*

(d) Zbiór  $\mathcal{R}_q^+$  jest nieskończony oraz zbiory  $\mathcal{R}_{q(1)}^+, \dots, \mathcal{R}_{q(n)}^+$  są skończone.  $\square$

**Wniosek 3.11.** Jeśli  $n \geq 2$ ,  $D \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$  jest jednym z diagramów Euklidesa oraz  $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jego funkcjonałem kwadratowym (1.3), to  $q_D$  jest  $P$ -krytyczny oraz jest krytyczny.

**Dowód.** Jeśli  $n = 2$ , to  $q_{12} = -2$  i teza jest konsekwencją lematu 3.4 oraz wniosku 3.10. Jeśli  $n \geq 3$ , to  $q_D$  jest główny oraz  $\text{Ker } q_D$  jest nieskończoną grupą cykliczną generowaną przez dodatni wektor wierny  $\mathbf{h}_D$  zdefiniowany w twierdzeniu 2.20. Zatem teza jest konsekwencją twierdzenia 3.5.  $\square$

**Przykład 3.12.** Pokażemy, że funkcjonał kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 - x_1x_2 - x_1x_6 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 + 2x_6x_7$  jest główny, ale nie jest  $P$ -krytyczny (a tym samym nie jest krytyczny).

Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (a dokładniej implementację algorytmu Lagrange'a, którą znajduje się na załączonej płycie) otrzymujemy postać kanoniczną

$q(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_7)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_7)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 - \frac{1}{5}x_7)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{6}x_7)^2 + \frac{7}{12}(x_6 + x_7)^2$  oraz macierz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd łatwo wynika, że funkcjonał  $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny korangi 1, tzn.  $q$  jest główny. Ponieważ macierz odwrotna do  $S$  ma postać

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i jej ostatnia kolumna jest wektorem  $\mathbf{h} = [0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]$  spełniającym równość  $q(\mathbf{h}) = 0$ , więc  $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Na podstawie twierdzenia 3.5, funkcjonał  $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  nie jest  $P$ -krytyczny, gdyż wektor  $\mathbf{h}$  nie jest wierny.

## 4. Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli

Ten rozdział oraz cała druga część rozprawy poświęcone będą badaniu nieujemnych krawędziowo-dwudzielnych grafów  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  (zdefiniowanych w pracy [41]) o skończonym zbiorze  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  ponumerowanych wierzchołków oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$  oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru  $\{+, -\}$ . Głównym obiektem badań będą główne (a także dodatnie) grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli, a w szczególności ich klasyfikacja Grama, klasyfikacja spektralna Coxetera, a także algorytmiczne opisy ich struktury.

### 4.1. Podstawowe informacje o grafach krawędziowo-dwudzielnych bez pętli

W dalszym ciągu będziemy stosować terminologię i oznaczenia wprowadzone na wykładzie monograficznym [35] oraz w artykułach [41],[39],[42].

Przez graf będziemy rozumieli skończony multigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  o skończonym niepustym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0$  oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$ . Dla pary wierzchołków  $a, b \in \Delta_0$ , symbolem  $\Delta_1(a, b)$  oznaczamy zbiór wszystkich krawędzi grafu  $\Delta$  incydentnych z wierzchołkami  $a$  oraz  $b$ . Jeśli  $a = b$ , to krawędzie należące do zbioru  $\Delta_1(a, a)$  nazywamy pętlami incydentnymi z  $a$ .

Mówimy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest grafem **bez pętli**, jeśli  $\Delta_1(a, a)$  jest zbiorem pustym, dla dowolnego wierzchołka  $a \in \Delta_0$ .

Graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy **prostym**, gdy nie ma pętli oraz zbiór  $\Delta_1(a, b)$  zawiera co najwyżej jedną krawędź, dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ .

Przypomnijmy, że **grafem oznakowanym** nazywamy parę  $(\Delta, \text{sgn})$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem natomiast  $\text{sgn} : \Delta_1 \rightarrow \{+1, -1\}$  jest funkcją przyporządkowującą dowolnej krawędzi  $\beta \in \Delta_1(a, b)$  jej znak  $\text{sgn}(\beta) \in \{+1, -1\}$ .

W artykule [41] definiuje się i bada ważną klasę grafów oznakowanych zwanych grafami krawędziowo-dwudzielnymi w sensie następującej definicji.

**Definicja 4.1.(a) Grafem krawędziowo-dwudzielnym** (w skrócie: **bigrafem**), nazywamy czwórkę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem, natomiast  $\Delta_1^-, \Delta_1^+$  są rozłącznymi podzbiorami zbioru krawędzi  $\Delta_1$  takimi, że  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$  oraz  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$  lub  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$ , dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ .

(b) Dla ustalonej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , symbolem  $\mathcal{Bigr}_n$  będziemy oznaczać zbiór wszystkich grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  o zbiorze  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$   $n$  wierzchołków  $a_1, \dots, a_n$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ .

(c) Symbolem  $\mathcal{UBigr}_n$  będziemy oznaczać podzbiór zbioru  $\mathcal{Bigr}_n$  składający się z wszystkich bigrafów  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$  bez pętli.

**Umowa.**(i) Dowolny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  będziemy traktować jako graf oznakowany następująco:

- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^-(a, b)$  będą oznakowane znakiem "−" i realizowane geometrycznie jako krawędzie ciągłe  $a \text{---} b$ ,

- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^+(a, b)$  będą oznakowane znakiem "+" i realizowane geometrycznie jako krawędzie przerywane  $a \text{- - -} b$ .

Dla prostoty zapisu graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  będziemy oznaczać symbolem  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ , o ile nie będzie prowadziło to do nieporozumienia.

(ii) Dowolny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  będziemy traktować jako krawędziowo-dwudzielny  $\Delta =$

$(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  przyjmując, że  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$  oraz  $\Delta_1^+(a, b)$  jest zbiorem pustym, dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ , tzn. każda krawędź w  $\Delta$  jest ciągła.

Przypomnijmy z artykułu [41] następujące definicje.

**Definicja 4.2.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym oraz  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ , gdzie  $n \geq 1$ .

(a) **Niesymetryczną macierzą sąsiedztwa**  $\check{D}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  oraz **niesymetryczną macierzą Grama**  $\check{G}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  nazywamy macierze zdefiniowane odpowiednio

$$\check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} d_{11}^\Delta & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & d_{22}^\Delta & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^\Delta \end{bmatrix} \text{ oraz } \check{G}_\Delta = E + \check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 + d_{11}^\Delta & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 + d_{22}^\Delta & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + d_{nn}^\Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

gdzie

$$d_{ij}^\Delta = \begin{cases} -|\Delta_1^-(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź ciągła } a_i \text{---} a_j, \\ |\Delta_1^+(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź przerywana } a_i \text{- - -} a_j. \end{cases}$$

Ponadto przyjmujemy  $d_{ij}^\Delta = 0$ , jeśli  $\Delta_1(a_i, a_j)$  jest zbiorem pustym lub  $i > j$ .

(b) Macierz symetryczną  $G_\Delta = \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  nazywamy **symetryczną macierzą Grama** bigrafu  $\Delta$ .

Zauważmy, że  $d_{11}^\Delta = \dots = d_{nn}^\Delta = 1$ , gdy  $\Delta$  nie ma pętli. Ponieważ każda z macierzy Grama  $G_\Delta$  oraz  $\check{G}_\Delta$  jednoznacznie wyznacza bigraf  $\Delta$  (z ponumerowanymi wierzchołkami), więc często krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$  będziemy definiować przez podanie jego macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ .

Zauważmy też, że macierze Grama  $G_\Delta$  oraz  $\check{G}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  zależą od numeracji jego wierzchołków. Dla przykładu rozważmy następujące dwa bigrafy:

$$\Delta : a_1 \text{---} a_2 \text{- - -} a_3 \quad \text{oraz} \quad \Delta' : a'_3 \text{---} a'_1 \text{- - -} a'_2,$$

z których drugi otrzymuje się z pierwszego przez permutację wierzchołków. Oczywiście

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_{\Delta'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Definicja 4.3.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie bigrafem bez pętli, gdzie  $n \geq 1$ , oraz niech  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  będzie zbiorem wierzchołków bigrafu  $\Delta$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ .

(a) Funkcjonałem Grama bigrafu  $\Delta$  nazywamy funkcjonal całkowity  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany wzorem

$$(4.4) \quad \begin{aligned} q_\Delta(x) = q_\Delta(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^\Delta x_i x_j \\ &= x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr} = x \cdot G_\Delta \cdot x^{tr}, \end{aligned}$$

gdzie  $G_\Delta$  oraz  $\check{G}_\Delta$  są macierzami Grama bigrafu  $\Delta$ .

(b) Dla danej liczby  $d \in \mathbb{Z}$ , zbiór  $\mathcal{R}_\Delta(d) = \mathcal{R}_{q_\Delta}(d) = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = d\}$  nazywamy zbiorem  $q_\Delta$ -pierwiastków z liczby  $d$ . Zbiór

$$(4.5) \quad \mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_{q_\Delta} = \mathcal{R}_\Delta(d=1)$$

nazywamy **zbiorem pierwiastków bigrafu**  $\Delta$  (lub funkcjonału  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ).

(c) Bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy  **dodatnim** (odp. **nieujemnym**), jeśli funkcjonal całkowity  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatni (odp. nieujemny), lub równoważnie, jeśli symetryczna macierz

Gramy  $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$  bigrafu  $\Delta$  spełnia warunki Sylwestera (odp. uogólnione warunki Sylwestera), zobacz twierdzenia 2.12 i 2.13.

(d) Bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy **głównym**, jeśli funkcjonal całkowity  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest główny, tzn.  $q_\Delta$  jest nieujemny oraz grupa  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest cykliczna nieskończona.

**Lemat 4.6.** *Definicje bigrafu dodatniego, nieujemnego oraz głównego są poprawne, tzn. są niezależne od numeracji wierzchołków bigrafu.*

**Dowód.** Załóżmy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest bigrafem bez pętli, gdzie  $n \geq 1$ , oraz  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jest jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ .  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie bigrafem otrzymanym z  $\Delta$  przez permutację  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , tzn.  $\Delta_0 = \{a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}\}$ . Oznaczmy przez  $M_\sigma = [e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  macierz permutacji  $\sigma$  otrzymaną z macierzy jednostkowej  $E = [e_1, \dots, e_n] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  przez  $\sigma$ -permutację jej wierszy  $e_1, \dots, e_n$ . Pokazuje się, że zachodzi równość  $G_{\Delta'} = M_\sigma^{-1} \cdot G_\Delta \cdot M_\sigma$ . Stąd wynikają równości

$$q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) = x \cdot G_{\Delta'} \cdot x^{tr} = x \cdot M_\sigma^{-1} \cdot G_\Delta \cdot M_\sigma \cdot x^{tr} = q_\Delta(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Zatem formę kwadratową  $q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n)$  bigrafu  $\Delta'$  otrzymuje się z formy kwadratowej  $q_\Delta(x_1, \dots, x_n)$  bigrafu  $\Delta$  przez  $\sigma^{-1}$ -permutację zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ .

Stąd łatwo wynika, że funkcjonal  $q_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta'$  jest dodatni (odp. nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal  $q_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  jest dodatni (odp. nieujemny).

Łatwo również pokazać, że jeśli  $q_\Delta$  nieujemny, to endomorfizm

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

definiuje izomorfizm grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  z grupą  $\text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Stąd łatwo wynika, że funkcjonal  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest główny, co kończy dowód lematu.  $\square$

Następujące twierdzenie odgrywa ważną rolę w klasyfikacji Grama bigrafów dodatnich oraz bigrafów nieujemnych.

**Twierdzenie 4.7.** *Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ ,  $n \geq 1$ , będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli, w którym nie ma krawędzi przerywanych, tzn. zbiór  $\Delta_1^+$  jest pusty, lub równoważnie,  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest multigrafem spójnym.*

(a) *Jeśli  $\Delta$  jest dodatni, to jest on jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$ ,  $\mathbb{E}_8$  przedstawionych w Tabeli 1.1.*

(b) *Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest nieujemny oraz  $n \geq 1$ , to jest on jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionych w Tabeli 1.2.*

**Dowód.** Ponieważ zakładamy, że w krawędziowo-dwudzielnym grafie  $\Delta$  nie ma krawędzi przerywanych, więc  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest multigrafem spójnym oraz jego funkcjonal kwadratowy Grama  $q_\Delta$  jest zdefiniowany formą kwadratową (1.3) grafu  $\Delta$ .

(a) Jeśli bigraf  $\Delta$  jest dodatni, to rzeczywisty funkcjonal kwadratowy Grama  $q_\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowany formą kwadratową (1.3) jest dodatnio określony, na podstawie wniosku 2.16(a). Stąd wynika, że graf  $\Delta$  jest jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$ ,  $\mathbb{E}_8$ , zobacz [1, Proposition VII.4.5]. Kombinatoryczny dowód tego faktu można znaleźć w [35, Rozdział 2].

(b) Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest nieujemny oraz  $n \geq 1$ , to rzeczywisty funkcjonal kwadratowy Grama  $q_\Delta : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowany formą kwadratową (1.3) jest dodatnio półokreślony, na podstawie wniosku 2.16(b). Stąd wynika, że  $\Delta$  jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ,

$n \geq 4$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ , zobacz [1, Proposition VII.4.5]. Kombinatoryczny dowód tego faktu można również znaleźć również w [35, Rozdział 2].  $\square$

Następujące definicje wprowadzone w artykule [41] są podstawowymi narzędziami używanymi w klasyfikacji Grama oraz w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych.

**Definicja 4.8.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli,  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ , gdzie  $n \geq 1$ , oraz niech

$$(4.9) \quad \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

będzie niesymetryczną macierzą Grama bigrafu  $\Delta$ , zobacz definicja 4.2.

(a) **Macierzą Coxetera bigrafu**  $\Delta$  nazywamy macierz  $\mathbb{Z}$ -odwracalną

$$\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

(b) **Wielomianem Coxetera bigrafu**  $\Delta$  nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_\Delta(t) := \det(tE - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$ .

(c) **Spektrum Coxetera** bigrafu  $\Delta$  nazywamy zbiór  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  wszystkich zespolonych  $n$  wartości własnych macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$ ; równoważnie zbiór wszystkich zespolonych  $n$  pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  bigrafu  $\Delta$ .

(d) **Liczbą Coxetera**  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  nazywamy minimalną liczbę naturalną  $r \geq 1$  taką, że  $\text{Cox}_\Delta^r = E$ . Jeśli taka liczba nie istnieje, to przyjmujemy  $\mathbf{c}_\Delta = \infty$ .

**Przykład 4.10.** (a) Jeśli  $\Delta$  jest krawędziowo-dwudzielnym grafem liniowym

$$\mathbb{A}'_n : \bullet_1 - - \bullet_2 - \bullet_3 - \cdots - \bullet_{n-1} - - \bullet_n$$

typu Dynkina  $\mathbb{A}_n$ , to

$$\check{G}_{\mathbb{A}'_n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Cox}_{\mathbb{A}'_n} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

jednorodny funkcjonal kwadratowy Grama  $q_{\mathbb{A}'_n} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  (4.4) bigrafu  $\mathbb{A}'_n$  jest zdefiniowany formą kwadratową

$$q_{\mathbb{A}'_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + \cdots - x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_n.$$

Łatwo sprawdzić, że bigraf  $\mathbb{A}'_n$  jest dodatni oraz jego wielomian Coxetera ma postać:  $\text{cox}_{\mathbb{A}'_n}(t) = t^n + t^{n-1} + \cdots + t^2 + t + 1 = \frac{t^{n+1}}{t-1} \in \mathbb{Z}[t]$ . Stąd wynika, że spektrum Coxetera  $\text{specc}_{\mathbb{A}'_n}$  bigrafu  $\mathbb{A}'_n$  leży na okręgu jednostkowym płaszczyzny zespolonej oraz składa się z wszystkich zespolonych pierwiastków stopnia  $n+1$  z liczby 1, które są różne od 1.

(b) Niech  $\Delta$  będzie bigrafem

$$\mathbb{D}_{13} : \begin{array}{c} \bullet_2 \\ | \\ \bullet_1 - - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 - \bullet_6 - \bullet_7 - \bullet_8 - \bullet_9 - \bullet_{10} - \bullet_{11} - \bullet_{12} - - \bullet_{13} \end{array}$$

typu Dynkina  $\mathbb{D}_{13}$ . Niesymetryczna macierz Grama oraz macierz Coxetera tego bigrafu mają postaci:

$$\check{G}_{\mathbb{D}'_{13}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

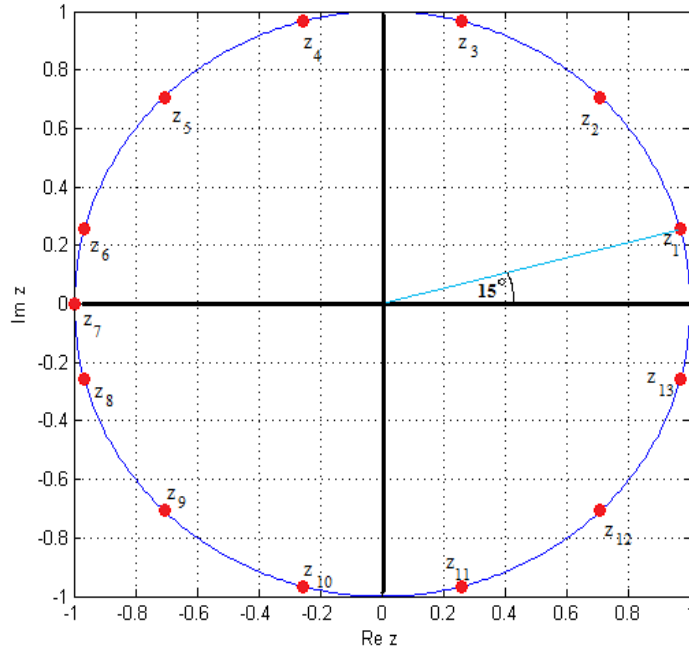
$$\text{Cox}_{\mathbb{D}'_{13}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

Jednorodny funkcjonal kwadratowy Grama  $q_{\mathbb{D}'_{13}} : \mathbb{Z}^{13} \rightarrow \mathbb{Z}$  (4.4) bigrafu  $\mathbb{D}'_{13}$  jest zdefiniowany formą kwadratową

$q_{\mathbb{D}'_{13}}(x_1, x_2, \dots, x_{13}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{13}^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + \dots - x_{10}x_{11} + x_{11}x_{12} + x_{12}x_{13}$ . Łatwo sprawdzić, że bigraf  $\mathbb{D}'_{13}$  jest dodatni oraz jego wielomian Coxetera ma postać:  $\text{cox}_{\mathbb{D}'_{13}}(t) = t^{13} + t^{12} + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ . Stąd wynika, że liczba Coxetera  $\mathbf{c}_{\mathbb{D}'_{13}}$  jest równa 24, spektrum Coxetera  $\text{specc}_{\mathbb{D}'_{13}}$  bigrafu  $\mathbb{D}'_{13}$  leży na okręgu jednostkowym płaszczyzny zespolonej oraz składa się z następujących zespolonych pierwiastków stopnia  $\mathbf{c}_{\mathbb{D}'_{13}} = 24$  z liczby 1, które są różne od 1.

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ z_3 &= \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_4 &= \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right), \\ z_5 &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right), \\ z_6 &= \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right), \\ z_7 &= -1, \\ z_8 &= \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right), \\ z_9 &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right), \\ z_{10} &= \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right), \\ z_{11} &= \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right), \\ z_{12} &= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right), \\ z_{13} &= \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Rozmieszczenie pierwiastków  $z_1, \dots, z_{13}$  na sferze jednostkowej przedstawione zostało na poniższym rysunku.



W zbiorze  $\mathcal{UBigr}_n$  krawędziowo-dwudzielnych grafów  $\Delta$  definiuje się w pracy [41] dwie  $\mathbb{Z}$ -kongruencje Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  następująco.

**Definicja 4.11.** (a) Krawędziowo-dwudzielne grafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  nazywa się **silnie (lub dwuliniowo)  $\mathbb{Z}$ -kongruentnymi** (i oznacza  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ), jeśli istnieje macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  taka, że  $\check{G}_{\Delta'} = B \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B^{tr}$ , gdzie

$$(4.12) \quad \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) := \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \det B = \pm 1\}$$

jest pełną grupą  $\mathbb{Z}$ -liniową.

(b) Bigrafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  nazywa się **słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnymi** (i oznacza  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ), jeśli istnieje macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  taka, że  $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$ . W tym wypadku mówimy, że  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  jest słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencją Grama zdefiniowaną przez macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ .

W artykule [41] oraz na wykładzie monograficznym [35] udowodniono następujący lemat oraz następujące dwa twierdzenia.

**Lemat 4.13.** (a) Jeśli bigrafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  są  $\mathbb{Z}$ -kongruentne oraz macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  jest taka, że  $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$ , to przemienny jest diagram

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_{\Delta'}} & \mathbb{Z} \\ h_B \downarrow \cong & \nearrow q_{\Delta} & \\ \mathbb{Z}^n & & \end{array}$$

gdzie  $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem  $h_B(v) = v \cdot B$ , dla  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

(b) Odwrotnie, jeśli macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  jest taka, że przemienny jest diagram (4.14), to  $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$  oraz  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .

**Dowód.** Zobacz [37, (2.7)] oraz [35]. □

**Twierdzenie 4.15.** (a) Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest nieujemny, to jego spektrum Coxetera  $\text{specc}_{\Delta}$  jest podzbiorem okręgu jednostkowego  $\mathcal{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Ponadto,  $\Delta$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 \notin \text{specc}_{\Delta}$ .



(b) Jeśli bigrafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne, to macierze  $\text{Cox}_\Delta$  i  $\text{Cox}_{\Delta'}$  są sprzężone,  $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$ ,  $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$  oraz  $\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{c}_{\Delta'}$ . Implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.

(c) Wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$ , spektrum Coxetera  $\text{specc}_\Delta$  oraz liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  zależą od numeracji  $a_1, \dots, a_n$  wierzchołków bigrafu  $\Delta$ .

(d) Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest drzewem, to  $\text{cox}_\Delta(t)$ ,  $\text{specc}_\Delta$  oraz liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  nie zależą od numeracji  $a_1, \dots, a_n$  wierzchołków bigrafu  $\Delta$ . W szczególności, jeśli  $\Delta$  jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1, to jego wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  oraz liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  są następujące:

$$(4.16) \quad \text{cox}_\Delta(t) := \begin{cases} t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = n + 1, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{A}_n, n \geq 1, \\ t^n + t^{n-1} + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 2(n - 1), & \text{gdy } \Delta = \mathbb{D}_n, n \geq 4, \\ t^6 + t^5 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 12, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_6, \\ t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 18, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_7, \\ t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 30, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

**Dowód.** Stwierdzenia (a)-(d) zostały udowodnione w [41, Proposition 2.2-2.3], zobacz również [41, Example 2.1].

Formuły zawarte w (4.16) są znane i zostały udowodnione na wykładzie monograficznym [35]. Idea dowodu indukcyjnego została również podana w [9, Lemma 2.5, Remark 2.6].  $\square$

**Twierdzenie 4.17.** (a) Jeśli  $\Delta$  jest jednym z diagramów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionych w Tabeli 1.2 (posiada  $n + 1$  wierzchołków), to jego wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  ma postać:

$$(4.18) \quad \text{cox}_\Delta(t) := \begin{cases} t^{n+1} + t^n - t^{n-1} - t^{n-2} - t^3 - t^2 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \\ t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_6, \\ t^8 + t^7 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_7, \\ t^9 + t^8 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_4}(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1$  oraz  $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t) := t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1$ .

(b) Jeśli  $n \geq 1$  oraz  $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_n$ , to wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  zależy od numeracji  $a_1, \dots, a_n$  wierzchołków bigrafu  $\Delta$  oraz jest on jednym z wielomianów

$$(4.19) \quad F_\Delta^{(1)}(t), F_\Delta^{(2)}(t), \dots, F_\Delta^{(m_n)}(t), \text{ gdzie } m_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{gdy } n + 1 \text{ jest liczbą nieparzystą,} \end{cases}$$

$$F_\Delta^{(j)}(t) = t^{n+1} - t^{n-j+1} - t^j + 1, \text{ dla } j = 1, \dots, m_n$$

zobacz [25], [37] oraz [41].

W szczególności, gdy  $n + 1$  jest liczbą nieparzystą oraz  $j = m_n = \frac{n+1}{2}$ , to  $t^{n-j+1} = t^j$  oraz  $F_\Delta^{(j)}(t)$  ma postać  $F_\Delta^{(m_n)}(t) = F_\Delta^{(\frac{n+1}{2})}(t) = t^{n+1} - 2t^{\frac{n+1}{2}} + 1$ . Jeśli  $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_1 : \bullet \text{---} \bullet$  jest grafem Kroneckera, to  $n = 1$ ,  $m_n = 2$  oraz  $F_\Delta(t) = F_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(2)}(t) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$ .

(c) Dla  $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_n$  oraz  $s \in \{2, \dots, n - 2\}$ , wielomian  $F_\Delta^{(s)}(t)$  jest wielomianem Coxetera następującego grafu rozważanego jako bigraf, zobacz [41],

$$(4.20) \quad \tilde{\mathbb{A}}_n[s] : \begin{array}{ccccccc} \bullet_1 & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet_{s-1} & \text{---} & \bullet_s \\ | & & & & | & & | \\ \bullet_{s+1} & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet_n & \text{---} & \bullet_{n+1} \end{array}$$

**Dowód.** Zobacz [41, Proposition 2.2-2.3] oraz [25]. Twierdzenie zostało również udowodnione na wykładzie monograficznym [35].  $\square$

#### 4.2. Algorytm inflacyjny dla grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli

W badaniu klas równoważności grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  bardzo ważną rolę odgrywa algorytm inflacyjny definiowany rekurencyjnie przy użyciu dwóch rodzajów inflacji bigrafów zdefiniowanych w pracach [24] oraz [41] następująco.

**Definicja 4.21** Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że  $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  jest zbiorem wierzchołków bigrafu  $\Delta$ .

(a) Dla dowolnego wierzchołka  $a \in \Delta_0$  definiujemy nowy bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  otrzymany z  $\Delta$  przez zamianę znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a$ . Innymi słowy,  $\Delta'$  jest taki, że forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca jego funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  powstaje z formy  $q_{\Delta}(x)$  (4.4) przez podstawienie  $x_a \mapsto -x_a$ .

Przyporządkowanie  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  nazywa się **inflacją  $\Delta$  w punkcie  $a \in \Delta_0$** , lub zamianą znaków krawędzi bigrafu  $\Delta$  w wierzchołku  $a$ .

(b) Dla dowolnej pary wierzchołków  $a, b \in \Delta_0$  połączonych przynajmniej jedną przerywaną krawędzią  $a - - b$  (tzn.  $d_{ab}^{\Delta} > 0$ ) definiujemy nowy bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  tak, że forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca jego funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  powstaje z formy  $q_{\Delta}(x)$  (4.4) przez podstawienie  $x_a \mapsto x_a - d_{ab}^{\Delta} x_b$ , przy czym przyjmuje się tu  $d_{ab}^{\Delta} = d_{ba}^{\Delta}$ , dla dowolnych  $a, b \in \Delta_0$ .

Przyporządkowanie  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$  nazywa się **inflacją bigrafu  $\Delta$  względem pary punktów  $a, b \in \Delta_0$** .

Główne własności operacji inflacji zawarte są w następującym twierdzeniu udowodnionym w pracach [41, Section 3] oraz [23, Section 6].

**Twierdzenie 4.22.** *Założmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz niech  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  oznacza bigraf otrzymany przez jednym z operatorów inflacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  lub  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ .*

(a) *Bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$  nie ma pętli. Ponadto,  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy bigraf  $\Delta$  jest spójny.*

(b)  *$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz istnieje przemienny diagram*

$$(4.23) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_{\Delta}} & \mathbb{Z}, \\ h \downarrow \cong & \nearrow q_{\Delta'} & \\ \mathbb{Z}^n & & \end{array}$$

gdzie  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest izomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu wektorowi  $v \in \mathbb{Z}^n$  wektor  $h(v) \in \mathbb{Z}^n$  otrzymany z  $v$  przez podstawienie

$$v_a \mapsto \begin{cases} -v_a, & \text{gdy } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_a^-, \\ v_a + d_{ab}^{\Delta} v_b, & \text{gdy } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-. \end{cases}$$

(c) *Jeśli  $v_b > 0$  oraz  $\mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-$ , to zachodzi nierówność  $v < h(v)$  (definiowana „po współrzędnych”).*

(d) *Izomorfizm  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  przeprowadza zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta}$  bigrafu  $\Delta$  na zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta'$ .*

(e) *Jeśli  $\Delta$  jest nieujemny, to  $\Delta'$  jest nieujemny oraz ograniczenie  $\check{h}$  izomorfizmu  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  do podgrupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$  jest izomorfizmem grup  $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta} \xrightarrow{\cong} \text{Ker } q_{\Delta'}$ . Jeśli ponadto*

bigraf  $\Delta$  jest główny, to  $\Delta'$  jest główny oraz wektor  $\mathbf{h}$  generuje grupę  $\text{Ker } q_\Delta$  wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\mathbf{h}' := \check{h}(\mathbf{h}) = h(\mathbf{h})$  generuje grupę  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ .

**Dowód.** (a) Dowód tego stwierdzenia można znaleźć w artykułach [41, Section 3] oraz [23, Section 6], [24].

(b) Wykorzystując definicję funkcji  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  podaną w (b) bezpośrednim rachunkiem sprawdza się, że  $h$  jest homomorfizmem grup, jest funkcją różnowartościową oraz jest surjekcją. Wprost z definicji operatorów inflacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  oraz  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$  wynika, że diagram (4.23) jest przemienny.

Jeśli  $B = M_h$  jest macierzą homomorfizmu  $h$  w standardowej  $\mathbb{Z}$ -bazie  $e_1, \dots, e_n$  wolnej grupy  $\mathbb{Z}^n$ , to wprost z definicji homomorfizmu  $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  (4.14) wynika, że  $h = h_B$ . Ponieważ  $h$  jest izomorfizmem, więc  $B = M_h \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  i na podstawie lematu 4.13 przemiennosc diagramu (4.23) implikuje równość  $G_{\Delta'} = B \cdot G_\Delta \cdot B^{tr}$ . Zatem  $\mathbb{Z}$ -odwracalna macierz  $B = M_h$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , co kończy dowód stwierdzenia (b).

Dowody stwierdzeń (c)-(e) otrzymuje się łatwo przez zastosowanie definicji oraz przemiennosci diagramu (4.23).

Dla przykładu uzasadnijmy prawdziwość ostatniego stwierdzenia w (e). W tym celu założmy, że bigraf  $\Delta$  jest główny. Zatem  $\Delta$  jest dodatnio półokreślony (zobacz wniosek 2.16(b)),  $\text{Ker } q_\Delta$  jest podgrupą grupy  $\mathbb{Z}^n$  (zobacz lemat 2.6 (b)) oraz istnieje niezerowy wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$  generujący grupę  $\text{Ker } q_\Delta$ , tzn.  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Ponieważ  $h$  jest izomorfizmem i przemienny jest diagram (4.23), więc funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny i na podstawie wniosku 2.16(b) funkcjonal rzeczywisty  $q_{\Delta'} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest dodatnio półokreślony. Ponadto, ponieważ  $h$  jest izomorfizmem i przemienny jest diagram (4.23), więc  $h$  indukuje homomorfizm grup  $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta'} \rightarrow \text{Ker } q_\Delta$  zdefiniowany wzorem  $\check{h}(v) = h(v)$ , dla dowolnego wektora  $v \in \text{Ker } q_{\Delta'}$ . W tym celu zauważmy, że dla dowolnego wektora  $v \in \text{Ker } q_{\Delta'}$ , przemiennosc diagramu (4.23) implikuje równość  $0 = q_{\Delta'}(v) = q_\Delta(h(v)) = q_\Delta(\check{h}(v))$ , tzn.  $\check{h}(v) \in \text{Ker } q_\Delta$ . Ponieważ  $h$  jest izomorfizmem grup, więc  $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta'} \rightarrow \text{Ker } q_\Delta$  jest monomorfizmem, a z przemiennosci diagramu (4.23) łatwo wynika, że  $\check{h}$  jest surjekcją, tzn.  $\check{h}$  jest izomorfizmem grup. Stąd łatwo wynika, że wektor  $\mathbf{h}' := \check{h}^{-1}(\mathbf{h})$  należy do grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  oraz zachodzi równość  $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$ .  $\square$

W pracach [24] oraz [41, Section 3] (zobacz także [23, Section 6]) udowodniono następujące ważne twierdzenie.

**Twierdzenie 4.24.** *Założmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli.*

(a) *Bigraf  $\Delta$  jest dodatni wtedy tylko wtedy, gdy istnieje złożenie  $\mathbf{t}^-$  skończonej liczby operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i a_j}^-$  takich, bigraf  $D\Delta := \mathbf{t}^- \Delta$  jest jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$ ,  $\mathbb{E}_8$  przedstawionych w Tabeli 1.1.*

(b) *Bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi 1 (tzn.  $\Delta$  jest główny) wtedy tylko wtedy, gdy  $n \geq 2$  oraz istnieje złożenie  $\mathbf{t}^-$  skończonej liczby operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i a_j}^-$  takich, że bigraf  $D\Delta := \mathbf{t}^- \Delta$  jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$ ,  $n \geq 5$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionych w Tabeli 1.2.*

**Dowód.** Dowód tego twierdzenia można znaleźć w artykułach [24, Theorems 4.2 i 5.2], [41, Theorems 3.1-3.2], a także w pracy [23, Proposition 6.7(a)].  $\square$

W artykułach [24] oraz [41] można znaleźć **algorytm inflacyjny** realizujący efekt opisany w twierdzeniu 4.24. Implementacja w programie Maple tego algorytmu znajduje się na płycie.

### 4.3. Krawędziowo-dwudzielne grafy $P$ -krytyczne bez pętli

Głównym celem tego rozdziału jest przedstawienie efektywnej charakteryzacji klasy krawędziowo-dwudzielnych grafów  $P$ -krytycznych bez pętli zdefiniowanych w artykule [41] (zobacz również [39, Definition 2.2]) następująco.

**Definicja 4.25.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , oraz niech  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  będzie zbiorem wierzchołków bigrafu  $\Delta$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ . Bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy  **$P$ -krytycznym**, jeśli funkcjonal całkowity  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  (4.3) jest  $P$ -krytyczny, tzn.  $q_\Delta$  nie jest dodatni oraz każde z jego ograniczeń  $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  do  $\mathbb{Z}^{n-1}$  jest funkcjonałem dodatnim.

**Oznaczenie 4.26.** Jeśli  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$  jest bigrafem bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , oraz  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jest zbiorem wierzchołków bigrafu  $\Delta$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ , to dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$  oznaczymy symbolem  $\Delta^{(j)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$  podbigraf bigrafu  $\Delta$  otrzymany z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołka  $a_j$  oraz incydentnych z nim krawędzi.

**Lemat 4.27.** (a) *Jeśli  $n \geq 2$ , to bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest  $P$ -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta$  nie jest dodatni oraz każdy z bigrafów  $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$  jest dodatni.*

(b) *Definicja bigrafu  $P$ -krytycznego nie zależy od numeracji jego wierzchołków.*

**Dowód.** (a) Łatwo widać, że funkcjonal Grama  $q_{\Delta^{(j)}} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta^{(j)}$  jest równy funkcjonałowi ograniczonemu  $q_\Delta^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  funkcjonału  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  do  $\mathbb{Z}^{n-1}$ . Ponadto, bigraf  $\Delta$  nie ma pętli wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednolity. Stąd wynika, że lemat jest prostym wnioskiem z definicji bigrafu  $P$ -krytycznego i funkcjonału  $P$ -krytycznego.

(b) Ponieważ definicja bigrafu  $P$ -krytycznego  $\Delta$  jest wyrażona przez własności jego funkcjonału  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , więc (b) jest prostą konsekwencją lematu 4.6.  $\square$

**Twierdzenie 4.28.** *Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie spójnym bigrafem bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , oraz niech  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  będzie zbiorem wierzchołków bigrafu  $\Delta$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ .*

(a) *Jeśli  $n = 2$ , to  $\Delta$  jest  $P$ -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta$  posiada co najmniej dwie krawędzie.*

(b) *Jeśli  $n \geq 3$ , to następujące trzy warunki są równoważne:*

(b1) *bigraf  $\Delta$  jest  $P$ -krytyczny;*

(b2) *bigraf  $\Delta$  jest nieujemny, nie jest dodatni oraz każdy z bigrafów  $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$  jest dodatni.*

(b3) *bigraf  $\Delta$  jest główny oraz istnieje wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$  taki, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$  oraz  $\mathbf{h}$  jest wierny, tzn. grupa  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny  $\mathbf{h}$ .*

**Dowód.** (a) Przypomnijmy, że bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli jest  $P$ -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego jednolity funkcjonal Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest  $P$ -krytyczny. Zatem (a) jest prostym wnioskiem z lematu 3.4.

(b) Załóżmy, że  $n \geq 3$ . Równoważność (b1) $\Leftrightarrow$ (b3) jest wersją równoważności (a) $\Leftrightarrow$ (b) w twierdzeniu 3.5. Ponieważ (b1) implikuje (b3), to każdy  $P$ -krytyczny bigraf  $\Delta$  jest nieujemny. Stąd wynika, że (b1) implikuje (b2). Ponieważ implikacja przeciwna (b2) $\Rightarrow$ (b1) jest oczywista, więc dowód twierdzenia jest zakończony.  $\square$

**Wniosek 4.29.** *Jeśli  $n \geq 3$ , to każdy  $P$ -krytyczny bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli*

jest prosty, tzn. jeśli pomiędzy jego wierzchołkami  $a_i, a_j \in \Delta_0$  istnieje krawędź, to istnieje tylko jedna. Innymi słowy;  $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$ , dla dowolnych wierzchołków  $a_i, a_j \in \Delta_0$ .

**Dowód.** Jeśli  $n \geq 3$  oraz bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli jest  $P$ -krytyczny, to jego całkowity funkcjonal Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednolity i  $P$ -krytyczny. Zatem  $\Delta$  jest grafem prostym, gdyż  $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$ , dla dowolnych wierzchołków  $a_i, a_j \in \Delta_0$  (na podstawie wniosku 3.8), co kończy dowód.  $\square$

Wykorzystując redukcję inflacyjną oraz idee dowodu Proposition 6.7 w pracy [23] udowodnimy teraz bardzo ważną własność  $P$ -krytycznych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli, którą będziemy wykorzystywać w algorytmie konstruującym rekurencyjnie bigrafy  $P$ -krytyczne z bigrafów dodatnich posiadających wierny pierwiastek.

**Twierdzenie 4.30.** Niech  $n \geq 3$  oraz niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie  $P$ -krytycznym spójnym bigrafem bez pętli ze zbiorem  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jego wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n$ .

(a) Bigraf  $\Delta$  jest nieujemny oraz grupa  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny.

(b) Jeśli  $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta$  są dodatnimi wektorami wiernymi takimi, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$ , to  $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$ .

(c) Jeśli  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \text{Ker } q_\Delta$  jest wektorem wiernym takim, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , to

(c1)  $-6 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

(c2)  $h_s \in \{-1, 1\}$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ .

**Dowód.** Stwierdzenie (a) wynika z twierdzenia 4.28.

(b) Załóżmy, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$ . Zatem istnieją liczby  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}$  takie, że  $\mathbf{h} = \lambda \cdot \mathbf{h}'$  oraz  $\mathbf{h}' = \lambda' \cdot \mathbf{h}$ . Ponieważ wektory  $\mathbf{h}, \mathbf{h}'$  są wierne dodatnie, więc  $\lambda > 0$  oraz  $\lambda' > 0$ . Z równości  $\mathbf{h} = \lambda \cdot \mathbf{h}' = \lambda\lambda' \cdot \mathbf{h}$  wynika, że  $\lambda\lambda' = 1$  i w rezultacie otrzymujemy  $\lambda = \lambda' = 1$ , gdyż  $\lambda > 0$  oraz  $\lambda' > 0$ .

(c) Ustalmy liczbę  $n \geq 3$ . Dowód stwierdzenia (c) rozpoczniemy od następujących obserwacji.

1° Zbiór wszystkich  $P$ -krytycznych spójnych bigrafów  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli jest skończony, gdyż liczba ich niesymetrycznych macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  (4.9) jest skończona. Istotnie, na podstawie wniosku 4.29, współczynniki  $d_{ij}^\Delta$  tych macierzy są liczbami całkowitymi i spełniają nierówność  $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$ .

2° Jeśli bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest  $P$ -krytyczny oraz  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , gdzie  $\mathbf{h}$  jest dodatnim wektorem wiernym, to taki wektor jest jedyny. Jeśli ponadto istnieje krawędź przerywana  $a_i - - - a_j$  w  $\Delta$ , to

- inflacja  $\Delta' := \mathbf{t}_{a_i a_j}^- \Delta$  bigrafu  $\Delta$  jest bigrafem  $P$ -krytycznym posiadającym mniej krawędzi przerywanych niż bigraf  $\Delta$ ,

- wektor  $\mathbf{h}' := h^{-1}(\mathbf{h})$  zdefiniowany w twierdzeniu 4.22(e) jest jedynym dodatnim generatorem grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  i spełnia nierówności  $0 < \mathbf{h} < \mathbf{h}'$ .

Stwierdzenie 2° wynika wprost z (b) oraz z twierdzeń 4.22 i 4.28.

Udowodnimy teraz (c). W tym celu załóżmy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest bigrafem  $P$ -krytycznym, spójnym i nie zawiera pętli. Na podstawie twierdzenia 4.28,  $\Delta$  jest główny oraz istnieje wektor wierny  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$  taki że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Rozważmy następujące dwa przypadki.

**Przypadek 1.** Załóżmy, że wektor  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  jest dodatni. Jeśli  $\Delta$  nie zawiera żadnej krawędzi przerywanej  $a_i - - - a_j$ , to wszystkie jego krawędzie są ciągłe i na podstawie wniosku 4.29 bigraf  $\Delta$  jest grafem prostym. Zatem, na podstawie twierdzenia 4.7,  $\Delta$  jest jednym z

grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ ,  $n \geq 3$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$ ,  $n \geq 5$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  oraz dodatni wierny wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^n$  jest jednym z wektorów (i)-(v) przedstawionych w twierdzeniu 2.20. Stąd wynika, że  $1 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ , oraz  $h_s = 1$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ .

Załóżmy teraz, że  $\Delta$  zawiera krawędź przerywaną  $a_i - \dots - a_j$ . Pokażemy najpierw, że istnieje skończony ciąg operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{ab}^-$  takich, że ich złożenie  $\mathbf{t}^-$  przeprowadza bigraf  $\Delta$  w bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$ , który nie ma przerywanych krawędzi. Innymi słowy: iterowanie operatorów inflacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$  tego ciągu prowadzi po skończonej liczbie kroków do bigrafu  $\Delta'$  bez przerywanych krawędzi.

Przypuśćmy, przez sprzeczność, że nie ma takiego skończonego ciągu operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{ab}^-$ , ale istnieje taki nieskończony ciąg inflacji. Ponieważ każdy z operatorów inflacji przeprowadza bigraf  $P$ -krytyczny zbioru  $\mathcal{UBigr}_n$  na bigraf  $P$ -krytyczny zbioru  $\mathcal{UBigr}_n$  (na podstawie 2°) oraz zbiór  $\mathcal{UBigr}_n$  zawiera tylko skończoną liczbę bigrafów  $P$ -krytycznych (na podstawie 1°), to istnieje bigraf  $P$ -krytyczny  $\tilde{\Delta}$  należący do zbioru  $\mathcal{UBigr}_n$  oraz złożony operator inflacji  $\mathbf{t}^-$  taki, że bigrafy  $\tilde{\Delta}$  oraz  $\tilde{\Delta}' := \mathbf{t}^- \tilde{\Delta}$  są równe.

Na podstawie 2°, każda z grup  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$  oraz  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}'}$  jest generowana przez dodatni wektor wierny, odpowiednio przez  $\tilde{\mathbf{h}}$  oraz  $\tilde{\mathbf{h}}'$ . Ponadto zachodzą nierówności  $0 < \tilde{\mathbf{h}} < \tilde{\mathbf{h}}'$ . Z drugiej strony, równość  $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}' = \mathbf{t}^- \tilde{\Delta}$  implikuje równości  $\mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}} = \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}} = \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}}'$ , z których wynika równość  $\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{h}}'$ , na podstawie (b), co przeczy nierówności  $\tilde{\mathbf{h}} < \tilde{\mathbf{h}}'$ .

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że istnieje skończony ciąg operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{ab}^-$  takich, że ich złożenie  $\mathbf{t}^-$  przeprowadza bigraf  $\Delta$  w bigraf główny  $P$ -krytyczny  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$ , który nie ma przerywanych krawędzi. Na podstawie 2°, wektor  $\mathbf{h}'$ : generujący grupę  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  jest dodatni i wierny, gdyż spełnia nierówności  $0 < \mathbf{h} < \mathbf{h}'$ . Na podstawie twierdzenia 4.7,  $\Delta'$  jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ ,  $n \geq 3$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$ ,  $n \geq 5$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  oraz dodatni wierny wektor  $\mathbf{h}' \in \mathbb{N}^n$  jest jednym z wektorów (i)-(v) przedstawionych w twierdzeniu 2.20. Stąd wynika, że  $1 \leq h_j \leq h'_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ , oraz  $1 \leq h_s \leq h'_s = 1$  (tzn.  $h_s = h'_s = 1$ ), dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Dowód stwierdzenia (c) w przypadku 1 został więc zakończony.

Przypadek 2. Załóżmy, że wektor  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  nie jest dodatni. Rozważmy bigraf  $\Delta'$  otrzymany z  $\Delta$  przez iterowany ciąg inflacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_i}^- \Delta$ , dla dowolnego wierzchołka  $a_i$  takiego, że współrzędna  $h_i$  jest ujemna. Na podstawie twierdzenia 4.22, bigraf  $\Delta'$  jest główny,  $P$ -krytyczny oraz grupa cykliczna  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  jest generowana przez dodatni wierny wektor  $\mathbf{h}' = (h'_1, \dots, h'_n)$ , w którym  $h'_j = -h_j$ , gdy  $h_j < 0$ , oraz  $h'_j = h_j$ , gdy  $h_j > 0$ . Z dowodu w przypadku 1 wynika, że  $1 \leq h'_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ , oraz  $h'_s = 1$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Stąd oraz z definicji wektora  $\mathbf{h}'$  wynikają nierówności (c1) i (c2) dla wektora  $\mathbf{h}$ , co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

## 5. Konstrukcja krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych

W tym rozdziale będziemy zajmowali się nieujemnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ , gdzie  $n \geq 2$  oraz  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$  jest zbiorem jego  $n+1$  wierzchołków  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, n, n+1$ .

Jeśli  $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  jest dowolnym wektorem, to dla dowolnej liczby  $j \in \{1, \dots, n, n+1\}$ , oznaczamy symbolem  $v^{(j)}$  wektor

$$v^{(j)} := (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Przypomnijmy też, że symbolem  $\Delta^{(j)} = (\Delta_0^{(j)}, \Delta_1^{(j)}) \in \mathcal{UBigr}_n$  oznaczamy podbigrf bigrafu  $\Delta$  otrzymany z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołka  $a_j$  oraz incydujących z nim krawędzi.

Jednym z głównych celów tego rozdziału jest uogólnienie naszkicowanej w pracy [41, Section 4] konstrukcji  $(\Delta', w) \mapsto \Delta := \Delta'[w]$  bigrafu głównego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  otrzymanego z danego bigrafu dodatniego  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  oraz jego pierwiastka  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ . Idea tej konstrukcji naśladuje konstrukcje podane w artykule [16] i rozwijane w naszej pracy [27, Sections 3-4].

Przypomnijmy, że krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli nazywamy **głównym**, jeśli jego funkcjonal całkowity Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  (4.4) jest nieujemny oraz grupa  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  jest cykliczna nieskończona, tzn. istnieje wektor  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$  różny od zera taki, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

Rozpocznijmy od następującej ważnej uwagi analogicznej do wniosku 4.29.

**Lemat 5.1.** *Założmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest nieujemnym bigrafem bez pętli.*

(a) *Jeśli pomiędzy wierzchołkami  $a_i, a_j \in \Delta_0$  istnieje krawędź, to istnieją co najwyżej dwie krawędzie. Innymi słowy:  $-2 \leq d_{ij}^\Delta \leq 2$ , dla dowolnych wierzchołków  $a_i, a_j \in \Delta_0$ .*

(b) *Jeśli  $\Delta$  jest główny oraz  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$  jest generatorem cyklicznej nieskończonej grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ , to*

- (b1) *przynajmniej dwie współrzędne wektora  $\mathbf{h}$  są różne od zera,*
- (b2)  *$-6 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n+1\}$ ,*
- (b3)  *$h_s \in \{-1, 1\}$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n+1\}$ .*

**Dowód.** (a) Założmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest nieujemnym bigrafem bez pętli. Zatem jego funkcjonal Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednolity i nieujemny. Zatem  $\Delta$  jest grafem prostym, gdyż  $-2 \leq d_{ij}^\Delta \leq 2$ , dla dowolnych wierzchołków  $a_i, a_j \in \Delta_0$  (na podstawie wniosku 2.16 (d)), co kończy dowód tego punktu.

(b) Aby udowodnić (b1), założmy przez sprzeczność, że jedna i tylko jedna współrzędna wektora  $\mathbf{h}$  jest różna od zera; powiedzmy  $h_1 \neq 0$  oraz  $h_2 = 0, \dots, h_{n+1} = 0$ . Ponieważ  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$ , więc  $0 = q_\Delta(\mathbf{h}) = h_1^2 \neq 0$  i otrzymujemy sprzeczność.

Aby udowodnić (b2) oraz (b3), udowodnimy najpierw, że jeśli  $h_s = 0$ , to bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest główny oraz wektor  $\mathbf{h}^{(s)}$  jest niezerowym generatorem grupy  $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ .

W tym celu zauważmy, że  $q_{\Delta^{(s)}} = q_\Delta^{(s)}$  oraz  $q_{\Delta^{(s)}}(\mathbf{h}^{(s)}) = q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$ , tzn.  $\mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(s)} \subseteq \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ . Aby udowodnić inkluzję przeciwną, weźmy dowolny wektor  $w \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$  i rozważmy wektor  $\hat{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{s-1}, 0, w_{s+1}, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Zatem  $q_\Delta(\hat{w}) = q_\Delta^{(s)}(\hat{w}^{(s)}) = q_\Delta^{(s)}(w) = 0$ , tzn.  $\hat{w} \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Innymi słowy  $\hat{w} = \lambda \cdot \mathbf{h}$ , dla pewnej liczby  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , a stąd  $w = \hat{w}^{(s)} = \lambda \cdot \mathbf{h}^{(s)}$ , tzn.  $w \in \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(s)} \subseteq \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ .

Iterując tę redukcję dla wszystkich  $s \in \{1, \dots, n+1\}$  takich, że  $h_s = 0$  otrzymamy z  $\Delta$  bigraf  $\tilde{\Delta}$  o co najmniej dwóch wierzchołkach (na podstawie (b1)), który jest główny oraz grupa  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$  jest generowana przez wektor  $\tilde{\mathbf{h}}$  otrzymany z  $\mathbf{h}$  przez opuszczenie wszystkich jego zerowych współrzędnych  $h_s$ . Ponieważ wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny, więc na podstawie twierdzenia

4.29, bigraf  $\check{\Delta}$  jest  $P$ -krytyczny, co najmniej jedna współrzędna wektora  $\check{\mathbf{h}}$  jest równa  $\pm 1$  a pozostałe spełniają nierówność (b3). Z konstrukcji wektora  $\check{\mathbf{h}}$  wynika, że warunki (b2) oraz (b3) są spełnione dla wektora  $\mathbf{h}$ , co kończy dowód lematu.  $\square$

Zapowiedziana wcześniej konstrukcja  $(\Delta', w) \mapsto \Delta := \Delta'[w]$  opiera się na następującym twierdzeniu o strukturze bigrafów głównych (porównaj z [27, (3.11)]).

**Twierdzenie 5.2.** *Załóżmy, że  $n \geq 2$  oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest krawędziowo-dwudzielny grafem bez pętli. Jeśli  $\Delta$  jest główny, spójny oraz istnieją wektor*

$$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta \text{ oraz liczba } s \in \{1, \dots, n, n+1\}$$

*takie, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$  oraz  $h_s \in \{-1, 1\}$  (zobacz lemat 5.1), to*

(a) *bigraf  $\Delta^{(s)} = (\Delta_0^{(s)}, \Delta_1^{(s)}) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest dodatni i spójny;*

(b) *wektor  $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta^{(s)}$ , tzn.  $w := \mathbf{h}^{(s)} \in \mathcal{R}_{\Delta^{(s)}}$ ;*

(c) *jeśli  $\Delta$  jest  $P$ -krytyczny, to wektor  $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$  jest wiernym pierwiastkiem bigrafu  $\Delta^{(s)}$ ;*

(d) *zachodzi równość:  $q_\Delta(x) = q_{\Delta^{(s)}}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q_{\Delta^{(s)}}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s$ .*

(e) *jeśli  $s = n+1$  oraz  $h_{n+1} = \varepsilon \in \{-1, 1\}$  (zobacz lemat 5.1 (c2)), to niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\Delta$  ma postać*

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \hat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

gdzie  $\Delta' := \Delta^{(n+1)}$ ,  $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$  oraz  $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama  $G_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta' := \Delta^{(n+1)} \in \mathcal{UBigr}_n$ . W tym wypadku bigraf główny  $\Delta$  posiada następującą strukturę:

$$(5.3) \quad \Delta : \quad \begin{array}{c} \text{-----} \\ \Delta' \quad a_s \text{---} \hat{w}_s \text{---} a_{n+1} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{l} \nearrow a_j \quad \hat{w}_j \\ \searrow a_i \quad \hat{w}_i \end{array}$$

gdzie symbolem  $a_i \xrightarrow{\hat{w}_i} a_{n+1}$  oznaczamy zbiór  $\Delta^+(a_i, a_{n+1})$  mocy  $\hat{w}_i$  wszystkich krawędzi przerywanych pomiędzy  $a_i$  oraz  $a_{n+1}$ , o ile  $\hat{w}_i > 0$ , oraz oznaczamy zbiór  $\Delta^-(a_i, a_{n+1})$  mocy  $-\hat{w}_i$  wszystkich ciągłych krawędzi pomiędzy  $a_i$  oraz  $a_{n+1}$ , o ile  $\hat{w}_i < 0$ .

**Dowód.** (a) Pokażemy najpierw, że bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest nieujemny. Istotnie, dla dowolnego wektora  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n$  rozważmy wektor

$$\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, 0, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Na podstawie dowodu lematu 5.1, mamy  $q_{\Delta^{(s)}}(u) = q_\Delta(\hat{u}) \geq 0$ . Aby udowodnić, że bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest dodatni, wystarczy pokazać, że  $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} = 0$ .

W tym celu weźmy  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ . Zatem  $q_\Delta(\hat{u}) = q_{\Delta^{(s)}}(\hat{u}^{(s)}) = q_{\Delta^{(s)}}(u) = 0$ , tzn.  $\hat{u} \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ . Stąd wynika, że  $u = 0$ , gdyż  $\hat{u}_s = 0$  oraz  $h_s \neq 0$ .

Dowód faktu, że bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest spójny jest dość złożony i trudny. Można go uzyskać przez modyfikację argumentów używanych na stronach 132-133 w pracy [14] oraz w dowodzie Theorem 3.1 w pracy [15].

(b) Rozważmy wektor  $\check{\mathbf{h}} = -\text{sgn}(\varepsilon)e_s + \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{s-1}, 0, h_{s+1}, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Zauważmy, że  $\check{\mathbf{h}}$  jest pierwiastkiem grafu  $\Delta$ , gdyż



$$\begin{aligned}
q_{\Delta}(\check{\mathbf{h}}) &= b_{q_{\Delta}}(\check{\mathbf{h}}, \check{\mathbf{h}}) = \\
&= b_{q_{\Delta}}(-\text{sgn}(\varepsilon)e_s, -\text{sgn}(\varepsilon)e_s) - 2b_{q_{\Delta}}(-\text{sgn}(\varepsilon)e_s, \mathbf{h}) + b_{q_{\Delta}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \\
&= b_{q_{\Delta}}(e_s, e_s) = q_{\Delta}(e_s) = 1,
\end{aligned}$$

gdyż  $b_{q_{\Delta}}(e_s, \mathbf{h}) = 0$  (na podstawie twierdzenia 2.26 (b)) oraz  $b_{q_{\Delta}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = q_{\Delta}(\mathbf{h}) = 0$ . Stąd wynika, że wektor  $\mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$  jest pierwiastkiem grafu  $\Delta^{(s)}$ , gdyż  $q_{\Delta^{(s)}}(\mathbf{h}^{(s)}) = q_{\Delta}(\check{\mathbf{h}}) = 1$ .

(c) Jeśli  $\Delta$  jest  $P$ -krytyczny, to wektor  $\mathbf{h}$  jest wierny (na podstawie twierdzenia 4.28 oraz założenia  $n \geq 2$ ) co implikuje wierność pierwiastka  $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$  bigrafu  $\Delta^{(s)}$ .

(d) Dla prostoty zapisu przyjmijmy oznaczenie  $q := q_{\Delta}$ . Przypomnijmy, że  $h_s \in \{-1, 1\}$  oraz  $q^{(s)} := q_{\Delta^{(s)}}$ . Ponieważ  $\Delta$  jest nieujemny, więc  $b_q(-, \mathbf{h}) = 0$ , na podstawie twierdzenia 2.26 (b). Zatem dla  $j \neq s$  mamy  $0 = b_q(e_j, \mathbf{h}) = b_q(e_j, \mathbf{h} - h_s e_s + h_s e_s) = b_q(e_j, \mathbf{h}^{(s)}) + h_s \cdot b_q(e_j, e_s)$ , tzn,

$$b_q(e_j, e_s) = -h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)}),$$

gdyż  $h_s^{-1} = h_s$ . Stąd wynikają równości

$$\begin{aligned}
q(x) &= q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_{n+1}) + x_s e_s) \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + 2 \cdot b_q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_{n+1}), x_s e_s) \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + \sum_{j \neq s} 2 \cdot b_q(e_j, e_s) \cdot x_j \cdot x_s \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - \sum_{j \neq s} 2 \cdot h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot x_j \cdot x_s \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s
\end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia (d), porównaj z dowodem Proposition 3.7 (a)-(b) w naszej pracy [27].

(e) Ponieważ  $h_{n+1} = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ , więc  $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ . Zatem druga część stwierdzenia (e) wynika wprost z pierwszej i dowód twierdzenia jest zakończony.  $\square$

### 5.1. Podstawowa konstrukcja

Wykorzystując opisaną w twierdzeniu 5.2 strukturę krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych  $\Delta$  podamy teraz zapowiadaną wcześniej konstrukcję dowolnego bigrafu głównego. Wzorumy się tu na konstrukcji naszkicowanej w pracy [41, Section 4] oraz konstrukcji  $P$ -krytycznych funkcjonałów kwadratowych podanej w naszej pracy [27, Section 3 and 4].

**Konstrukcja 5.4.** Załóżmy, że  $n \geq 2$ , dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  o zbiorze wierzchołków  $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ , liczba  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  oraz wektor  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

1° Definiujemy nowy wektor  $\widehat{w} \in \mathbb{Z}^n$  wzorem

$$\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$$

gdzie  $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama  $G_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta'$ .

2° Następnie konstruujemy krawędziowo-dwudzielny graf

$$(5.5) \quad \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$$

kształtu (5.3) jako jednopunktowe  $\widehat{w}$ -rozszerzenie bigrafu  $\Delta'$  o jeden wierzchołek  $a_{n+1}$ , tzn.

- $\widehat{\Delta}'_0 := \Delta'_0 \cup \{a_{n+1}\} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$

- zbiór  $\widehat{\Delta}'_1$  krawędzi bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  otrzymuje się przez dodanie do zbioru krawędzi  $\Delta'_1$  bigrafu

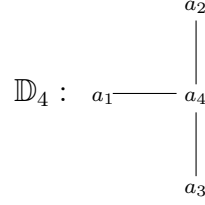
$\Delta'$  nowej (multi)krawędzi postaci  $a_j \xrightarrow{\widehat{w}_j} a_{n+1}$ , dla dowolnego wierzchołka  $a_j$  bigrafu  $\Delta'$  takiego, że liczba całkowita  $\widehat{w}_j$  jest różna od zera,

- niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  ma postać

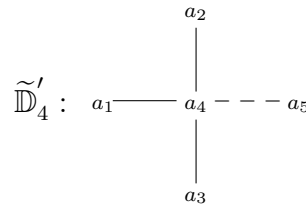
$$(5.6) \quad \check{G}_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

gdzie  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu  $\Delta'$ .

**Przykład 5.7.** (a) Niech  $n = 4$ ,  $\varepsilon = -1$ ,  $w = (1, 1, 1, 2) \in \mathbb{Z}^4$  oraz niech  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_4$  będzie diagramem Dynkina

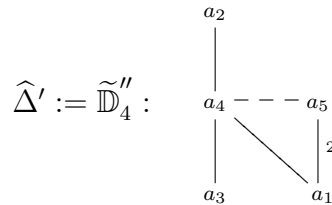


rozważanym jako graf krawędziowo-dwudzielny bez przerywanych krawędzi. Łatwo obliczyć, że  $\hat{w} = (0, 0, 0, 1)$ . Zatem  $\hat{w}_4 = 1$  i konstrukcja  $(\Delta', w, \varepsilon = -1) \mapsto \hat{\Delta}'$  daje bigraf



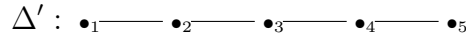
typu Euklidesa  $\tilde{\mathbb{D}}_4$ .

(b) Niech  $n = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $w = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4$  oraz niech  $\Delta'$  będzie grafem Dynkina tak jak w (a). Łatwo obliczyć, że  $\hat{w} = (-2, 0, 0, 1)$ . Zatem  $\hat{w}_1 = -2$ ,  $\hat{w}_4 = 1$  i konstrukcja  $(\Delta', w, \varepsilon = 1) \mapsto \hat{\Delta}'$  daje bigraf



Jest to bigraf główny, wektor  $\mathbf{h} = (1, 0, 0, 0, 1)$  generuje grupę  $\text{Ker } q_{\hat{\Delta}'}$ , oraz  $\text{cox}_{\hat{\Delta}'}(t) = t^5 - t^4 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$  jest jego wielomianem Coxetera.

**Przykład 5.8.** Niech  $n = 5$ ,  $\varepsilon = -1$  oraz niech  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie krawędziowo-dwudzielnym grafem



o niesymetrycznej macierzy Grama

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$$

Wykorzystując program Maple łatwo pokazać, że konstrukcja  $(\Delta', w, \varepsilon = -1) \mapsto \hat{\Delta}'$ , gdzie  $w$  jest pierwiastkiem  $\Delta'$ , pozwala uzyskać następujące bigrafy (pogrupowane według wielomianu Coxetera)

$\widehat{\Delta}'$	$w$	$\widehat{w}$	$\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t)$
	$(-1, -1, -1, -1, -1)$	$(-1, 0, 0, 0, -1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, -1, 0, 0, 0)$	$(1, -2, 1, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, -1, 0, 0)$	$(0, 1, -2, 1, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, -1, 0)$	$(0, 0, 1, -2, 1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 0, -1)$	$(0, 0, 0, 1, -2)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, -1, 2)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, -1, 2, -1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 1, 0, 0)$	$(0, -1, 2, -1, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 1, 0, 0, 0)$	$(-1, 2, -1, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(1, 0, 0, 0, 0)$	$(2, -1, 0, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(1, 1, 1, 1, 1)$	$(1, 0, 0, 0, 1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(-1, -1, -1, -1, 0)$	$(-1, 0, 0, -1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(-1, -1, 0, 0, 0)$	$(-1, -1, 1, 0, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$

$\hat{\Delta}'$	$w$	$\hat{w}$	$\text{cox}_{\hat{\Delta}'}(t)$
	$(0, -1, -1, -1, -1)$	$(1, -1, 0, 0, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, -1, -1, 0, 0)$	$(1, -1, -1, 1, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, -1, -1, 0)$	$(0, 1, -1, -1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 0, -1, -1)$	$(0, 0, 1, -1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 0, 1, 1)$	$(0, 0, -1, 1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 1, 1, 0)$	$(0, -1, 1, 1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 1, 1, 0, 0)$	$(-1, 1, 1, -1, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 1, 1, 1, 1)$	$(-1, 1, 0, 0, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(1, 1, 0, 0, 0)$	$(1, 1, -1, 0, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(1, 1, 1, 1, 0)$	$(1, 0, 0, 1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(-1, -1, -1, 0, 0)$	$(-1, 0, -1, 1, 0)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, -1, -1, -1, 0)$	$(1, -1, 0, -1, 1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, 0, -1, -1, -1)$	$(0, 1, -1, 0, -1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$

$\widehat{\Delta}'$	$w$	$\widehat{w}$	$\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t)$
	$(0, 0, 1, 1, 1)$	$(0, -1, 1, 0, 1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, 1, 1, 1, 0)$	$(-1, 1, 0, 1, -1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(1, 1, 1, 0, 0)$	$(1, 0, 1, -1, 0)$	$t^6 - 2t^3 + 1$

**Twierdzenie 5.9.** Załóżmy, że  $n \geq 2$ , dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  o zbiorze wierzchołków  $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ , liczba  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  oraz wektor  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Niech  $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ , gdzie  $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama bigrafu  $\Delta'$ .

Krawędziowo-dwudzielny graf  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  (5.5) posiada następujące własności.

(a) Jeśli  $w \neq 0$ , to  $\widehat{\Delta}'$  jest spójny.

(b)  $\Delta'[-w, \varepsilon] = \Delta'[w, -\varepsilon]$ .

(c) Jeśli wektor  $w = (w_1, \dots, w_n)$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ , to

(c1) funkcjonal kwadratowy Grama  $q_{\widehat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  jest zdefiniowany wzorem

$$(5.10) \quad \begin{aligned} q_{\widehat{\Delta}'}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) \cdot x_{n+1} = \\ &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 + (x_1 \widehat{w}_1 + \dots + x_n \widehat{w}_n) x_{n+1}. \end{aligned}$$

(c2) bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest główny oraz  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$ , gdzie  $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ .

(d) Jeśli wektor  $w = (w_1, \dots, w_n)$  jest wiernym pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ , to bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest  $P$ -krytyczny.

**Dowód.** (a) Jeśli wektor  $w \neq 0$ , to również wektor  $\widehat{w} \neq 0$ , gdyż w przeciwnym wypadku  $0 = \widehat{w} = -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'}$  implikuje równość  $w \cdot G_{\Delta'} = 0$ , która z kolei implikuje równości  $0 = w \cdot G_{\Delta'} \cdot w^{tr} = q_{\Delta'}(w)$ . Ponieważ zakładamy, że  $\Delta'$  jest dodatni, więc funkcjonal  $q_{\Delta'}$  jest dodatnio określony (na podstawie wniosku 2.16(b)). Stąd wynika nierówność  $q_{\Delta'}(w) > 0$ , gdyż  $w \neq 0$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wektor  $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n)$  jest różny od zera. Załóżmy, że współrzędna  $\widehat{w}_s$  wektora  $\widehat{w}$  jest różna od zera. Stąd wynika, że istnieje multikrawędź  $a_s \xrightarrow{\widehat{w}_s} a_{n+1}$  bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  łącząca wierzchołek  $a_s$  spójnego bigrafu  $\Delta'$  z wierzchołkiem  $a_{n+1}$ ; zatem  $\widehat{\Delta}'$  jest spójny.

(b) Niech  $w \in \mathbb{Z}^n$  oraz  $\widehat{w} := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ . Jeśli  $w' = -w \in \mathbb{Z}^n$ , to  $\widehat{w}' := -\varepsilon w' \cdot 2G_{\Delta'} = -\varepsilon(-w) \cdot 2G_{\Delta'} = \varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} = -\widehat{w}$ . Stąd wynika, że bigrafy  $\Delta'[w', \varepsilon] = \Delta'[-w, \varepsilon]$  oraz  $\Delta'[w, -\varepsilon]$  są identyczne.

(c) Równość (c1) wynika wprost z definicji bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  oraz jego funkcjonału Grama  $q_{\widehat{\Delta}'}$ , gdyż

$$\begin{aligned} -2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) &= -2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((w_1, \dots, w_n), (x_1, \dots, x_n)) = \\ &= (w_1, \dots, w_n) \cdot (-2 \cdot \varepsilon \cdot G_{\Delta'} \cdot (x_1, \dots, x_n)^{tr}) = \\ &= (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)^{tr} = \\ &= x_1 \widehat{w}_1 + \dots + x_n \widehat{w}_n. \end{aligned}$$

Stąd również łatwo wynika, że niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  ma kształt (5.6).

(c2) Załóżmy, że wektor  $w = (w_1, \dots, w_n)$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ , tzn.  $q_{\Delta'}(w) = 1$ . Zauważmy najpierw, że wektor  $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  należy do  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ , gdyż równości (5.10) implikują

$$\begin{aligned} q_{\widehat{\Delta}'}(\widehat{\mathbf{h}}) &= q_{\Delta'}(w) + \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}(w, w) \cdot \varepsilon = \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}(w, w) \cdot \varepsilon = \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot q_{\Delta'}(w) = 0. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest główny oraz  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$ . Ponieważ niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  ma kształt (5.6), więc podwojenie symetrycznej macierzy Grama bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  ma postać

$$2G_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ \widehat{w} & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

Ponieważ  $\Delta'$  jest dodatni, więc  $\det G_{\Delta'} > 0$ , na podstawie kryterium Sylwestera. Zauważmy również, że  $\det G_{\widehat{\Delta}'} = (1 - w \cdot G_{\Delta'} w^{tr}) \cdot \det G_{\Delta'} = 0$ , gdyż  $w \cdot G_{\Delta'} w^{tr} = q_{\Delta'}(w) = 1$ , na podstawie założenia, zobacz Step 1.1° na stronie 253 pracy [31]. Stąd wynika, że rząd macierzy wymiernej  $G_{\widehat{\Delta}'} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$  nad ciałem  $\mathbb{Q}$  równy  $n$ , gdyż z wykładu algebry liniowej wiemy, że wiersze macierzy  $G_{\widehat{\Delta}'}$  o numerach  $1, \dots, n$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne. Na podstawie twierdzenia 2.26, grupa  $\text{rad } q_{\widehat{\Delta}'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  jest wolna rangi  $1 = n+1 - n$ . Stąd wynika, że jej podgrupa  $\mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}} \subseteq \text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$  jest wolna rangi 1. Ponieważ  $\widehat{h}_{n+1} = \varepsilon = \pm 1$ , więc zachodzi równość  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$ .

Aby zakończyć dowód (c2) należy udowodnić, że bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest nieujemny. Fakt ten można udowodnić modyfikując dowód kryterium Sylwestera podany na pierwszym roku studiów na wykładzie z algebry liniowej. Inny dowód można też znaleźć na stronach 253-254 (Step 1.2° – 1.3°) w artykule [31].

(d) Ponieważ  $n \geq 2$  oraz zakładamy, że  $w$  jest wierny, więc wektor  $\mathbf{h} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  jest wierny. Zatem bigraf  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest  $P$ -krytyczny, na podstawie (b) oraz twierdzenie 4.30 (a). Dowód twierdzenia został więc zakończony.  $\square$

Następujący wniosek pokazuje, że konstrukcja (5.4)  $(\Delta', w, \varepsilon = 1) \mapsto \Delta'[w, \varepsilon = 1]$  definiuje prosty algorytm obliczający wszystkie główne bigrafy  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ , z bigrafów dodatnich  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ ,  $n \geq 2$ , oraz pierwiastków  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ .

**Wniosek 5.11.** (a) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny graf główny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , ma postać  $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ , gdzie  $\Delta'$  jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu  $\Delta$ ,  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$  oraz  $\varepsilon = 1$ }.  
(b) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny graf  $P$ -krytyczny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , ma postać  $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ , gdzie  $\Delta'$  jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu  $\Delta$ ,  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  jest wiernym pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$  oraz  $\varepsilon = 1$ .**

**Dowód.** Weźmy  $n \geq 2$  oraz dowolny bigraf główny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli. Na podstawie lematu 5.1, istnieje wektor  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta}$  taki, że  $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  oraz  $h_s \in \{-1, 1\}$ , dla pewnego  $s \in \{1, \dots, n+1\}$ . Transpozycja  $\tau = (s, n+1)$  prowadzi do bigrafu głównego  $\Delta^\tau$  dla którego grupa  $\text{Ker } q_{\Delta^\tau}$  jest generowana przez wektor  $\mathbf{h}^\tau = (h_1, \dots, h_{s-1}, h_{n+1}, h_{s+1}, \dots, h_n, h_s)$ , gdzie  $h_s \in \{-1, 1\}$ . Zatem z dokładnością do transpozycji  $\tau = (s, n+1)$  możemy założyć, że  $s = n+1$ , tzn. ostatnia współrzędna wektora  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta}$  jest równa  $-1$  lub  $1$ .

Niech  $\Delta' = \Delta^{(n+1)}$  oraz  $w = \mathbf{h}^{(n+1)} \in \mathbb{Z}^n$  będą takie, jak w twierdzeniu 5.2(e). Wtedy  $\Delta'$  jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu  $\Delta$ ,  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ . Z twierdzenia 5.2(d)-(e), konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.9 wynika, że  $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon]$ . Zauważmy, że można przyjąć  $\varepsilon = 1$ , gdyż w wypadku  $\varepsilon = -1$  mamy  $\Delta = \Delta'[w, \varepsilon] = \Delta'[-w, -\varepsilon] = \Delta'[-w, 1]$ , na podstawie twierdzenia 5.9(b). Korzystamy tu z faktu, że jeśli wektor  $w \in \mathbb{Z}^n$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ , to również wektor  $-w \in \mathbb{Z}^n$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ .

Ponadto, jeśli  $\Delta$  jest  $P$ -krytyczny, to  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  jest wiernym pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ .  $\square$

Stosując twierdzenie 5.9 oraz wniosek 5.11 otrzymujemy następujący ważny fakt analogiczny do znanego twierdzenia Ovsienki [26].

**Wniosek 5.12.** *Jeśli  $\Delta' \in \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym bigrafem dodatnim bez pętli oraz  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$  jest jego pierwiastkiem, to  $-6 \leq w_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Dowód.** Zastosujemy metodę użytą w dowodzie Proposition 6.7 pracy [23]. Załóżmy, że  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  spójnym bigrafem dodatnim bez pętli. Ustalmy jego pierwiastek  $w \in \mathbb{Z}^n$  i skonstruujmy bigraf  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon = 1] \in \Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  postaci (5.3). Na podstawie twierdzenia 5.9, bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest główny oraz wektor  $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  generuje grupę  $\text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ . Stosując lemat 5.1 (b) do bigrafu głównego  $\widehat{\Delta}' \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  i wektora  $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, 1) \in \text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  otrzymujemy nierówności  $-6 \leq w_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Następujący algorytm numeryczno-symboliczny jest bezpośrednim wnioskiem z konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.9.

**Algorytm 5.12 ("główne"). Wejście:** Liczba naturalna  $n \geq 2$ , dodatni spójny bigraf  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o  $n$  wierzchołkach.

**Wyjście:** Lista  $\mathcal{UBigr}_{n+1}$  wszystkich bigrafów głównych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli o  $n+1$  wierzchołkach.

Etap 1° Obliczamy skończony zbiór  $\mathcal{R}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$  wszystkich pierwiastków  $w$  bigrafu  $\Delta'$ . Używamy algorytmu ograniczonego zliczania 2.5.2.

Etap 2° Dla każdego wektora  $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  oraz  $\varepsilon = 1$  konstruujemy bigraf główny  $\widehat{\Delta}' := \Delta'[w, \varepsilon = 1] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  oraz jego wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ .

Etap 3° Dla dowolnego bigrafu  $\Delta'$  skonstruowanego w etapie 2° oraz dla dowolnej transpozycji  $\tau = (s, n+1)$  konstruujemy bigraf główny  $\Delta^\tau \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  otrzymany z  $\Delta$  przez przez transpozycję jego wierzchołków  $a_s$  oraz  $a_{n+1}$ . Ponadto obliczamy wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\Delta^\tau}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  bigrafu  $\Delta^\tau$ .

Etap 4° Tworzymy listę wszystkich par  $(\Delta^\tau, \text{cox}_{\Delta^\tau}(t))$ .

**Uwaga 5.13.** (i) Na podstawie wniosku 5.11, dowolny spójny krawędziowo-dwudzielny graf główny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , jest jednym z bigrafów obliczonych w etapie 4°, dla pewnego spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ . Aby znaleźć pełną listę bigrafów głównych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli należy zastosować algorytm 5.12 do dowolnego dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o  $n$  wierzchołkach.

(ii) Zauważmy, że liczba takich bigrafów jest skończona, gdyż każdy taki bigraf jest prostym grafem oznakowanym.

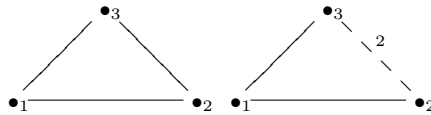
Istotnie, gdyby dodatni spójny bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  nie był prosty, to zawiera multikrawędź  $a_i \overset{d}{\text{---}} a_j$ , gdzie liczba  $d := d_{ij}^{\Delta'}$  jest większa od 1 lub mniejsza od  $-1$ . Ponieważ  $\Delta'$  jest

dotadni, więc zbiór  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  jego pierwiastków jest skończony (na podstawie twierdzenia 2.22). Zatem, na podstawie dowodu lematu 3.7, zbiór pierwiastków bigrafu  $\Delta''$  indukowanego z  $\Delta'$  przez wierzchołki  $a_i$  oraz  $a_j$  jest również skończony. Z drugiej strony, na podstawie części 2° dowodu twierdzenia 3.5 (w rozdziale 3.2), zbiór pierwiastków bigrafu  $\Delta''$  jest nieskończony, gdyż  $|d| \geq 2$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zachodzi nierówność  $-1 \leq d_{ij}^{\Delta'} \leq 1$ , dla dowolnych  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

## 5.2. Obliczenia algorytmiczne bigrafów głównych o małej liczbie wierzchołków

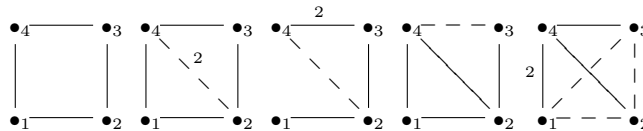
Stosując algorytm 5.12 skonstruujemy w tym podrozdziale wszystkie bigrafy główne o trzech, czterech i pięciu wierzchołkach.

**Wniosek 5.14.** *Jeśli  $n = 2$ , to każdy bigraf główny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$  bez pętli o trzech wierzchołkach jest jednym z bigrafów*



**Dowód.** Na podstawie uwagi 5.13 (ii), każdy spójny bigraf dodatni  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_2$  bez pętli o dwóch wierzchołkach jest jednym z bigrafów  $\mathbb{A}_2 : a_1 \text{---} a_2$  oraz  $\mathbb{A}'_2 : a_1 \text{--} a_2$ . Stosując algorytm 5.12 do każdego z tych dwóch bigrafów otrzymamy podaną we wniosku listę bigrafów głównych o trzech wierzchołkach (z dokładnością do permutacji wierzchołków oraz operacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  zamiany znaków). Obliczenia można znaleźć na płycie.  $\square$

**Wniosek 5.15.** *Jeśli  $n = 3$ , to każdy bigraf główny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$  bez pętli o czterech wierzchołkach jest jednym z bigrafów*



**Dowód.** Łatwo pokazać przez proste obliczenia w Maple, że każdy spójny bigraf dodatni  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$  bez pętli o trzech wierzchołkach jest (z dokładnością do permutacji wierzchołków) jednym z trzech bigrafów liniowych

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_3 &: a_1 \text{---} a_2 \text{---} a_3 \\ \mathbb{A}'_3 &: a_1 \text{--} a_2 \text{---} a_3 \\ \mathbb{A}''_3 &: a_1 \text{--} a_2 \text{--} a_3 \end{aligned}$$

lub jest bigrafem trójkątnym  $\Delta'$ , którego wszystkie trzy krawędzie są przerywane oraz niesymetryczna macierz Grama ma postać

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wielomian  $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^3 + t^2 + t + 1$  jest wielomianem Coxetera bigrafu  $\Delta'$ .





### 5.3. Konstrukcja algorytmiczna bigrafów dodatnich

Wykorzystując konstrukcję  $\Delta' \mapsto \Delta'[w, \varepsilon]$  opisaną w paragrafie 5.1 podamy teraz algorytm konstruujący rekurencyjnie dodatnie bigrafy  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  z dodatnich bigrafów  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  oraz pewnego zbioru  $\mathcal{W}_{\Delta'}^+ \subseteq \mathbb{Z}^n$  wektorów  $w \in \mathbb{Z}^n$  o współrzędnych  $w_j \in \{-1, 0, 1\}$ . Wykorzystamy tu konstrukcję dodatnich funkcjonałów kwadratowych podaną w naszej pracy [27, Section 4].

Przy ograniczeniu w twierdzeniu 5.9 wektorów  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$  do „specjalnych wektorów” zbioru  $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$ , otrzymamy następującą „dodatnią” wersję tego twierdzenia.

**Twierdzenie 5.17.** *Załóżmy, że  $n \geq 2$ , dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  o zbiorze wierzchołków  $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ , liczba  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  oraz wektor  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Niech  $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ , gdzie  $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama bigrafu  $\Delta'$ . Krawędziowo-dwudzielny graf  $\hat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\hat{\Delta}'_0, \hat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  (5.5) posiada następujące własności.*

- (a) *Jeśli  $w \neq 0$ , to  $\hat{\Delta}'$  jest spójny.*
- (b)  *$\Delta'[-w, \varepsilon] = \Delta'[w, -\varepsilon]$ .*
- (c) *Jeśli wektor  $w = (w_1, \dots, w_n)$  należy do następującego zbioru*

$$(5.18) \quad \mathcal{W}_{\Delta'}^+ = \left\{ w \in \mathbb{Z}^n, w_1, \dots, w_n \in \{-1, 0, 1\}, w \neq 0 \det \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & w^{tr} \\ w & 2 \end{bmatrix} > 0 \right\} \subseteq \mathbb{Z}^n,$$

mocy  $|\mathcal{W}_{\Delta'}^+| = 3^n - 1$ , to

- (c1) *funkcjonał kwadratowy Grama  $q_{\hat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\hat{\Delta}'$  jest zdefiniowany wzorem*

$$(5.19) \quad \begin{aligned} q_{\hat{\Delta}'}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) \cdot x_{n+1} = \\ &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 + (x_1 \hat{w}_1 + \dots + x_n \hat{w}_n) x_{n+1}. \end{aligned}$$

- (c2) *bigraf  $\hat{\Delta}'$  jest dodatni oraz niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\hat{\Delta}'$  ma postać*

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \hat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}),$$

gdzie  $\Delta' := \Delta^{(n+1)}$ .

(d) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny spójny graf dodatni  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , ma postać  $\Delta = \hat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ , gdzie  $\Delta'$  jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu  $\Delta$ ,  $w \in \mathcal{W}_{\Delta'}^+$  jest pewnym wektorem skończonego zbioru  $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$  oraz  $\varepsilon = 1$ .*

**Dowód.** Stwierdzenia (a), (b) oraz (c1) wynikają z twierdzenia 5.9 (a)-(b)-(c1).

(c) Z równości (5.19) wynika, że niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\hat{\Delta}'$  oraz podwojenie symetrycznej macierzy Grama bigrafu  $\hat{\Delta}'$  mają postaci

$$\check{G}_{\hat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \hat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad 2G_{\hat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & \hat{w}^{tr} \\ \hat{w} & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}),$$

Ponieważ  $\Delta'$  jest dodatni, więc  $\det G_{\Delta'} > 0$  (na podstawie kryterium Sylwestera). Na podstawie założenia, wektor  $w$  jest różny od zera i należy do zbioru  $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$ . Stąd wynika, że  $\det \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & w^{tr} \\ w & 2 \end{bmatrix} > 0$ . Zatem macierz symetryczna  $2G_{\hat{\Delta}'}$  spełnia warunki Sylwestera i na podstawie kryterium Sylwestera funkcjonał Grama  $q_{\hat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio określony. Stąd wynika, że bigraf  $\hat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon]$  jest dodatni, co kończy dowód stwierdzenia (c).

Łatwo widać, że dowód (d) jest analogiczny do dowodu wniosku 5.11(a), co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Następujący algorytm jest bezpośrednim wnioskiem z konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.17.

**Algorytm 5.20 ("dodatnie"). Wejście:** Liczba naturalna  $n \geq 2$ , dodatni spójny bigraf  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o  $n$  wierzchołkach.

**Wyjście:** Lista  $\mathcal{UBigr}_{n+1}^+$  bigrafów dodatnich  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli o  $n+1$  wierzchołkach, powstałych przez rozszerzenie bigrafu  $\Delta'$  o 1 wierzchołek.

Etap 1° Obliczamy skończony zbiór  $\mathcal{W}_{\Delta'}^+ \subseteq \mathbb{Z}^n$ .

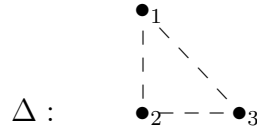
Etap 2° Dla dowolnego wektora  $w \in \mathcal{W}_{\Delta'}^+$ , konstruujemy bigraf dodatni  $\widehat{\Delta}' := \Delta'[w] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  oraz jego wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ .

Etap 3° Dla dowolnego bigrafu  $\Delta'$  skonstruowanego w etapie 2° oraz dla dowolnej transpozycji  $\tau = (s, n+1)$  konstruujemy bigraf główny  $\Delta^\tau \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  otrzymany z  $\Delta$  przez transpozycję jego wierzchołków  $a_s$  oraz  $a_{n+1}$ . Ponadto obliczamy wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\Delta^\tau}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  bigrafu  $\Delta^\tau$ .

Etap 4° Tworzymy listę wszystkich par  $(\Delta^\tau, \text{cox}_{\Delta^\tau}(t))$ .

**Uwaga 5.21.** Na podstawie twierdzenia 5.17, dowolny spójny krawędziowo-dwudzielny graf dodatni  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli, gdzie  $n \geq 2$ , jest jednym z bigrafów obliczonych w etapie 4°, dla pewnego spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ . Aby znaleźć pełną listę bigrafów dodatnich  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bez pętli należy zastosować algorytm 5.20 do dowolnego dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o  $n$  wierzchołkach (liczba takich bigrafów jest skończona, gdyż każdy taki bigraf jest prostym grafem oznakowanym, zobacz uwaga 5.13(ii)).

**Przykład 5.22.** Zastosujmy Algorytm 5.20 do dodatnio określonego bigrafu  $\Delta$



którego macierz Grama jest równa

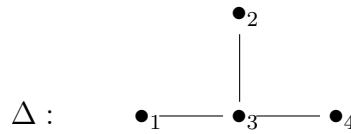
$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}).$$

W poniższej tabeli zamieszczone zostały wartości wektorów  $\mu$  oraz odpowiadające im bigrafy dodatnie  $\Delta'$  o 4 wierzchołkach wraz z ich macierzami Grama  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$  oraz wielomianami Coxetera.

$\mu$	$\check{G}_{\Delta'}$	$\Delta'$	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[1, 1, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[1, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[1, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + 2t^2 + 1$

$\mu$	$\check{G}_{\Delta'}$	$\Delta'$	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 1, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[0, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 0, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, -1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, -1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[-1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[-1, 0, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + 2t^2 + 1$
$[-1, -1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[-1, -1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$

**Przykład 5.23.** Analogicznie jak w Przykładzie 5.22 zastosujemy Algorytm 5.20 do dodatnio określonego bigrafu  $\Delta$



którego macierz Grama ma postać

$$\check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

Wykonując identyczne obliczenia otrzymujemy wektory  $\mu$  oraz odpowiadające im bigrafy dodatnio  $\Delta'$  o 5 wierzchołkach wraz z ich macierzami Grama  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$  oraz wielomianami Coxetera.



$\mu$	$\check{G}_{\Delta'}$	$\Delta'$	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[-1, 1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^3 + t^2 + 1$
$[-1, 0, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, 0, 1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^3 + t^2 + 1$
$[-1, 0, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, 0, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, -1, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$

## 6. Algorytmiczna konstrukcja oczkowych kołczanów pierwiastków oraz $\mathbb{Z}$ -kongruencji bigrafów

W artykułach [40]- [42] pokazano, że rozwiązanie problemów 1.1 oraz 1.2 sformułowanych we wstępie rozprawy można zredukować do analizy izomorfizmów kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych stowarzyszonych z bigrafami  $\Delta$  i zdefiniowanych w artykule [38]. Definicję tę oraz podstawowe fakty o geometriach  $\Phi_\Delta$ -oczkowych pierwiastków bigrafów przypomnimy w paragrafie 6.1.

W dalszym ciągu  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Transformacją Coxetera bigrafu  $\Delta$  nazywamy grupowy automorfizm

$$(6.1) \quad \Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n; \quad v \mapsto \Phi_\Delta(v) := v \cdot \text{Cox}_\Delta,$$

gdzie  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest macierzą Coxetera bigrafu  $\Delta$ . Przypomnijmy z artykułów [38, 40, 41], że dla dowolnej liczby  $d \in \mathbb{Z}$  zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  z liczby  $d$  jest  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczy, tzn.  $\Phi_\Delta(v) \in \mathcal{R}_\Delta$ , dla dowolnego wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta$ .

Głównym celem tego rozdziału jest podanie algorytmicznej konstrukcji  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  zbudowanego z  $\Phi_\Delta$ -orbit zbioru  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczego

$$\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\}$$

pierwiastków bigrafu  $\Delta$ , dla pewnej klasy bigrafów spełniających warunek zdefiniowany przez specjalne „dziwne” cykle. Pokażemy jak przyporządkowanie  $\Delta \mapsto \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  można wykorzystać w rozwiązywaniu problemu 1.2, tzn. konstruowaniu, dla danej pary bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli spełniających relację  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , pewnej macierzy  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  definiującej tę silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tzn. taką, że  $\det B = \pm 1$  oraz  $\check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}$ .

### 6.1. Graficzne przedstawianie $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków

Przypomnijmy teraz podstawowe fakty o  $\Phi_\Delta$ -oczkowych kołczanach pierwiastków bigrafów zdefiniowanych w artykułach [38]-[41].

Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  oraz niech  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  będzie jego transformacją Coxetera.

(a) Jeśli  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest niepustym podzbiorem  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczym grupy  $\mathbb{Z}^n$  oraz  $v \in \mathcal{R}$ , to  $\Phi_\Delta$ -orbitą wektora  $v$  nazywamy podzbiór  $\Phi_\Delta\text{-Orb}(v) = \{\Phi_\Delta^j(v)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  zbioru  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$ .

Orbitę  $\Phi_\Delta\text{-Orb}(v)$  wektora  $v$  będziemy przedstawiać graficznie w postaci nieskończonego grafu

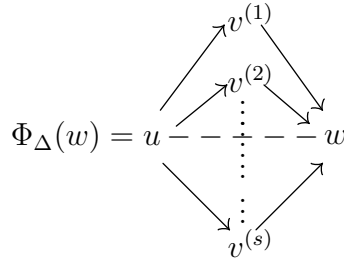
$\mathcal{O}(v) : \dots \text{---} \Phi_\Delta^3(v) \text{---} \Phi_\Delta^2(v) \text{---} \Phi_\Delta(v) \text{---} v \text{---} \Phi_\Delta^{-1}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-2}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-3}(v) \text{---} \dots$   
wektorów  $\Phi_\Delta^j(v) \in \mathcal{R}$  realizowanych jako punkty płaszczyzny Euklidesa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , połączone przerywanymi krawędziami.

**Definicja 6.2.** (a) Wektory  $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}, w \in \mathbb{Z}^n$  tworzą  $\Phi_\Delta$ -oczko szerokości  $s \geq 1$  (w przestrzeni Euklidesa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ), jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

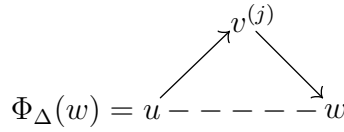
- (i)  $u = \Phi_\Delta(w)$ ;
- (ii)  $u + w = v^{(1)} + \dots + v^{(s)}$ ;
- (iii) wektory  $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$  są parami różne oraz żaden z nich nie należy do  $\Phi_\Delta$ -orbity wektora  $u$ .

Wektory  $u$  oraz  $w$  nazywamy odpowiednio początkiem i końcem  $\Phi_\Delta$ -oczka.

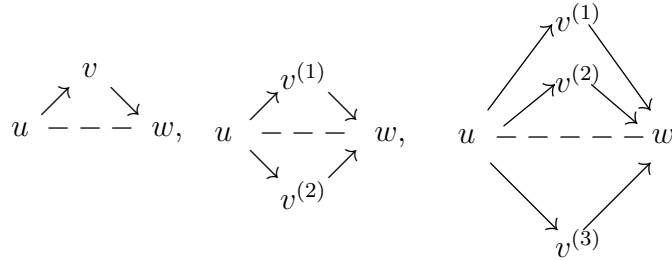
(b)  $\Phi_\Delta$ -oczko wyznaczone przez wektory  $u, w, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$  będziemy realizować w postaci następującego kołczanu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego w  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ :



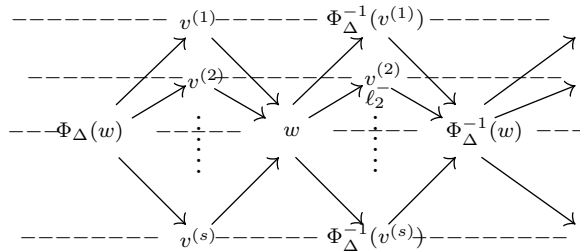
w przestrzeni Euklidesa  $\mathbb{R}^2$ . Składa się on z trójkątów postaci



W szczególności  $\Phi_\Delta$ -oczka szerokości jeden, dwa oraz trzy mają kształt



Jednym z problemów występujących w spektralnej analizie Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych jest problem konstrukcji (z orbit pierwiastków danego bigrafu  $\Delta$ ) kołczanu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  składającego się z  $\Phi_\Delta$ -oczek następującej postaci (zobacz [38, (3.4)])



Poprzednie definicje zilustrujemy teraz dwoma prostymi przykładami.

**Przykład 6.3.** Niech  $n = 3$  oraz niech  $\Delta$  będzie pełnym bigrafem trójkątnym o trzech wierzchołkach  $a_1, a_2, a_3$  połączonych trzema krawędziami przerywanymi. Niesymetryczna macierz Grama, macierz Coxetera oraz jej odwrotność mają postaci

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

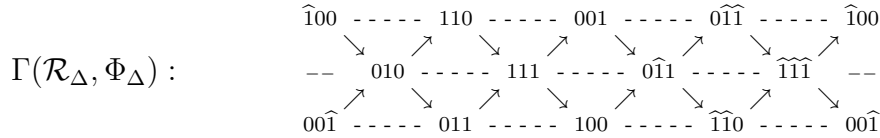
Łatwo obliczyć, że wielomianem Coxetera bigrafu  $\Delta$  jest  $\text{cox}_\Delta(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ , zaś  $\mathbf{c}_\Delta = 4$  jest jego liczbą Coxetera. Funkcjonał Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  jest zdefiniowany przez formę kwadratową



$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$  forma kanoniczna.

Stąd wynika, że  $\Delta$  jest dodatni, zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^3$  jego pierwiastków składa się z 12-tu wektorów, z których można utworzyć 3 równoliczne czteroelementowe  $\Phi_\Delta$ -orbity.

Za pomocą prostych manipulacji kombinatorycznych z tych  $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków bigrafu  $\Delta$  można zbudować następujący kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy:



gdzie  $\widehat{1} = -1$ . Dokonując w kołczanie  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  oczywistej identyfikacji modulo 4 (w każdej z orbit) otrzymamy kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy  $\overline{\Gamma}(\mathcal{R}_{q_\Delta}, \Phi_\Delta)$  o kształcie dwunastoelementowego cylindra szerokości 3.

**Przykład 6.4.** Skonstruujemy teraz kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$ , który jest diagramem Dynkina  $\mathbb{D}_5$ . Jego niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_{\mathbb{D}_5}$ , macierz Coxetera  $\text{Cox}_{\mathbb{D}_5}$  oraz jej odwrotność mają postaci

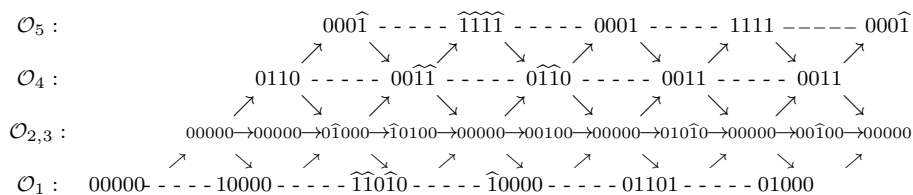
$$\check{G}_{\mathbb{D}_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\mathbb{D}_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\mathbb{D}_5}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomianem Coxetera bigrafu  $\Delta = \mathbb{D}_5$  jest  $\text{cox}_{\mathbb{D}_5}(t) = t^5 + t^4 + t + 1$ , zaś  $\mathbf{c}_{\mathbb{D}_5} = 8$  jest jego liczbą Coxetera.

Obliczamy pierwiastki formy kwadratowej  $q_{\mathbb{D}_5}(x) = x_1^2 + \dots + x_5^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5$  przy użyciu algorytmu ograniczonego zliczania. Uzyskujemy 40 pierwiastków, które można przedstawić w postaci rozłącznej sumy pięciu równolicznych  $\Phi_{\mathbb{D}_5}$ -orbit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 : & 10000 \dots 01100 \dots 10110 \dots 01111 \dots 0\widehat{1}000 \dots \widehat{1}0\widehat{1}00 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}0 \dots \widehat{1}0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_2 : & 01000 \dots 10100 \dots 01110 \dots 10111 \dots \widehat{1}0000 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}00 \dots \widehat{1}0\widehat{1}\widehat{1}0 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_3 : & 00100 \dots 00010 \dots 00001 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \dots 00\widehat{1}00 \dots 000\widehat{1}0 \dots 0000\widehat{1} \dots 11111 \\ \mathcal{O}_4 : & 11100 \dots 11210 \dots 11221 \dots 00111 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}00 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}210 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}2\widehat{1} \dots 00\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_5 : & 11110 \dots 11211 \dots 00110 \dots 00011 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}0 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \dots 00\widehat{1}\widehat{1}0 \dots 000\widehat{1}\widehat{1} \end{aligned}$$

Za pomocą prostych manipulacji kombinatorycznych z orbit tych konstruujemy następujący  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków bigrafu  $\Delta = \mathbb{D}_5$ :



gdzie (dla uproszczenia rysunku) w drugim wierszu od dołu umieściliśmy dwie orbity  $\mathcal{O}_2$  oraz  $\mathcal{O}_3$  (oznaczyliśmy je symbolem  $\mathcal{O}_{2,3}$  :), których wektory łącznie z wektorami orbit  $\mathcal{O}_1$  oraz  $\mathcal{O}_4$  tworzą oczka szerokości 3.

### 6.2. Idea algorytmu konstruującego kołczan $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków

W artykułach [40]-[41] oraz [12]-[15] buduje się algorytmy kombinatoryczne pozwalające konstruować  $\Phi_\Delta$ -oczkowe kołczany  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków, dla klas bigrafów  $\Delta$  bez pętli spełniających pewne dodatkowe warunki. Jednym z nich jest tzw. „mesh toroidal algorithm” zdefiniowany w pracach [39]-[40].

W naszym artykule [19] definiujemy algorytm (przestawiony w tej rozprawie jako algorytm 6.11) konstruujący kanonicznie pewien kołczan  $\Phi_A$ -oczkowy  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_A) \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków, dla klasy dodatnich bigrafów  $\Delta$  bez pętli, w którym automorfizm Coxetera  $\Phi_\Delta : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$  zastąpiono przez automorfizm Coxetera  $\Phi_A : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$  zdefiniowany dla danej quasi-trójkątnej morsyfikacji macierzowej  $A \in \mathbf{Mor}_\Delta$  w sensie [40] bigrafu  $\Delta$ , tzn. macierzy  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  o wyznaczniku 1 spełniającej warunek  $A + A^{tr} = 2G_\Delta$ .

Przykładem takiej morsyfikacji jest macierz  $A = \check{G}_\Delta$ , dla której automorfizm Coxetera  $\Phi_A : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$  jest identyczny z automorfizmem Coxetera  $\Phi_\Delta : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$ .

Celem tego rozdziału jest przypomnienie konstrukcji wspomnianego wyżej algorytmu podanego w artykule [19]. Aby uniknąć w tym przedstawieniu dość żmudnych przygotowań technicznych i kombinatorycznych używanych w [19], przedstawimy ideę tego algorytmu w wypadku, gdy  $A = \check{G}_\Delta$  oraz  $\Delta$  spełnia pewne dodatkowe warunki.

W całym rozdziale zakładamy, że  $n \geq 2$ ,  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  oraz  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest jego transformacją Coxetera. Będziemy też zakładać, że  $\Delta$  jest dodatni, co implikuje, że  $\Delta$  jest bigrafem prostym, tzn. zachodzi nierówność  $-1 \leq d_{ij}^{\Delta'} \leq 1$ , dla dowolnych  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , zobacz uwaga 5.13.

Zgodnie z terminologią stosowaną w naszej pracy [19] wprowadzamy następującą definicję.

**Definicja 6.5.** Niech  $n \geq 2$ ,  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ ,  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  i  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  będą takie, jak ustalono w przedmowie do tej definicji.

(a) Cykl długości  $\geq 3$  krawędzi w  $\Delta$  nazywamy cyklem prostym, jeśli nie zawiera właściwego podcyklu długości  $\geq 3$ .

(b) Niech  $\vec{\Delta}$  będzie (bi)kołczanem otrzymanym z bigrafu  $\Delta$  przez zdefiniowanie orientacji krawędzi bigrafu  $\Delta$  następująco:

- jeśli istnieje krawędź ciągła  $a_i \text{---} a_j$ , to zastępujemy ją strzałką  $a_i \rightarrow a_j$ , gdy  $i < j$ ;
- jeśli istnieje krawędź przerywana  $a_r \text{---} a_s$ , to zastępujemy ją strzałką przerywaną  $a_r \text{---} \rightarrow a_s$ , gdy  $r < s$ , zobacz [41, Remark 2.2].

(c) Mówimy, że  $\Delta$  nie posiada dziwnych cykli prostych, jeśli w  $\Delta$  nie ma krawędzi przerywanych lub każdy cykl prosty (długości  $\geq 3$ ) w kołczanie  $\vec{\Delta}$  ma postać

$$\begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ \\ \downarrow & & \uparrow \\ \circ & \rightarrow \circ \rightarrow \dots \rightarrow \circ & \rightarrow \circ \end{array}$$

**Przykład 6.6.** Rozważmy następującą parę bigrafów

$$\Delta : \begin{array}{cc} \bullet 2 & \text{---} & \bullet 3 \\ | & & | \\ \bullet 1 & \text{---} & \bullet 4 \end{array} \quad \text{oraz} \quad \Delta' : \begin{array}{cc} \bullet 1 & \text{---} & \bullet 3 \\ | & & | \\ \bullet 2 & \text{---} & \bullet 4 \end{array}$$

Zauważmy, że  $\Delta'$  otrzymaliśmy z  $\Delta$  przez permutację  $\sigma = (1, 2)$  jego wierzchołków oraz

$$\bullet \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

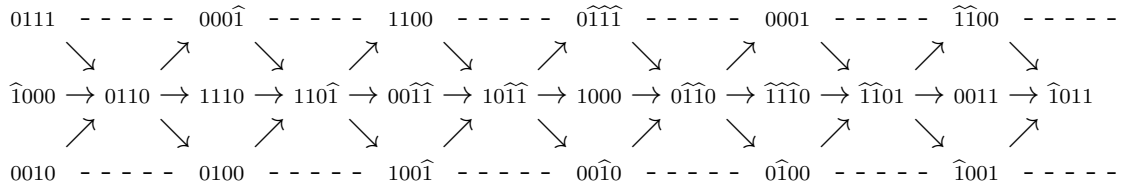
$$\bullet \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

- $\text{cox}_\Delta(t) = t^4 + t^3 + t + 1 = \text{cox}_{\mathbb{D}_4}(t)$ ,  $\text{specc}_\Delta = \{-1, -1, \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ ,  $\mathbf{c}_\Delta = 6 = \mathbf{c}_{\mathbb{D}_4}$ ,
- $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^4 + 2t^2 + 1$ ,  $\text{specc}_{\Delta'} = \{-\mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}\}$ ,  $\mathbf{c}_{\Delta'} = 4$ ,
- $q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_4$

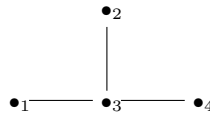
- $q_{\Delta'}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_4 - x_3x_4$ ,
- funkcjonały kwadratowe  $q_{\Delta}, q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  są dodatnie oraz bigrafy  $\Delta, \Delta'$  są dodatnie,
- bigraf  $\Delta$  nie posiada dziwnych cykli prostych, natomiast  $\Delta'$  posiada dziwny cykl prosty, gdyż bikołczany  $\vec{\Delta}$  oraz  $\vec{\Delta}'$  mają postaci:



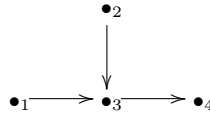
- każdy ze zbiorów pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_{\Delta}(v) = 1\}$  oraz  $\mathcal{R}_{\Delta'} = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_{\Delta'}(v) = 1\} = \mathcal{R}_{\Delta} \cdot \hat{\sigma}^{tr}$  składa się z 24 wektorów.
- można pokazać, że  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  jest rozłączną sumą sześciu  $\Phi_{\Delta}$ -orbit, każda długości  $\mathbf{c}_{\Delta'} = 4$ , zobacz [41, Example 2.2],
- $\mathcal{R}_{\Delta}$  jest rozłączną sumą czterech  $\Phi_{\Delta}$ -orbit, każda długości  $\mathbf{c}_{\Delta} = 6$ , z których można zbudować używając zapowiadanego algorytmu następujący kołczan  $\Phi_{\Delta}$ -oczkowy  $\Gamma(\mathcal{R}_{\Delta}, \Phi_{\Delta})$  leżący na cylindrze:



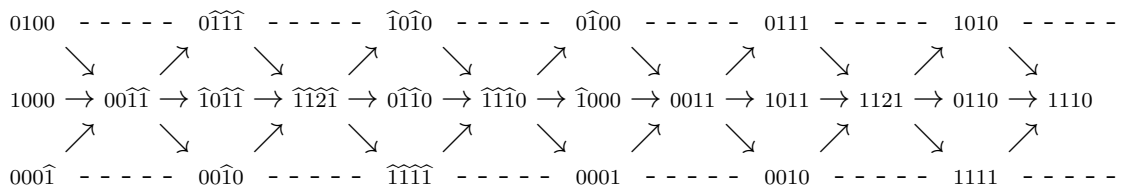
Niech  $\Delta$  będzie grafem Dynkina



Bikołczan kołczanu  $\Delta$  ma postać



Pokazuje się (np. używając zapowiadanego algorytmu), że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_4}$  jest sumą czterech  $\Phi_D$ -orbit długości 6 z których można zbudować kołczan  $\Phi_D$ -oczkowy  $\Gamma(\mathcal{R}_D, \Phi_D)$  postaci



Używając zapowiadanego algorytmu można również obliczyć macierz  $B \in \text{Gl}(4, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \mathbb{D}_4$ , tzn.  $B \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B^{tr} = \check{G}_{\mathbb{D}_4}$ . Macierz ta ma postać

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Idea zapowiadanego algorytmu podobna jest do algorytmicznej konstrukcji postprojektywnej składowej  $\mathcal{P}_R$  kołczanu Auslandera-Reiten  $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$  podanej w [1, Chapter IX.3] dla dowolnej  $K$ -algebry dróg  $R = KQ$  kołczanu Dynkina  $Q$  lub kołczanu Euklidesa  $Q$ , gdzie  $K$  jest ciałem algebraicznie domkniętym. Idea ta wykorzystana została w artykule [39] w dowodzie następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 6.7.** *Załóżmy, że  $n \geq 2$ ,  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest jednym z grafów Dynkina  $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  przedstawionych w Tabeli 1.1,  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  jest zbiorze wierzchołków  $\Delta$ ,  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest transformacją Coxetera oraz  $\mathbf{c}_\Delta$  jest liczbą Coxetera bigrafu  $\Delta$  podaną w zestawieniu (4.16).*

(a) *Zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  bigrafu  $\Delta$  jest skończony i jest rozłączną sumą  $n$  równolicznych  $\Phi_\Delta$ -orbit, każda długości  $\mathbf{c}_\Delta$ .*

(b) *Ze zbioru wszystkich  $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków bigrafu  $\Delta$  konstruuje się kanonicznie  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan pierwiastków  $\Gamma_{kan}(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  rozszerzający kołczan Auslandera-Reiten  $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$   $K$ -algebry  $R = K\bar{\Delta}$  dróg kołczanu Dynkina  $\bar{\Delta}$  w sensie definicji 6.5(b).*

**Dowód.** Niech  $\bar{\Delta}$  będzie kołczanem Dynkina grafu Dynkina  $\Delta$  (w sensie definicji 6.5(b)) oraz niech  $R = K\bar{\Delta}$  będzie  $K$ -algebrą dróg kołczanu  $\bar{\Delta}$ . Na podstawie wyników podanych w [1, Chapter IX.3], kołczan Auslandera-Reiten  $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$  jest skończony i jest równy swojej składowej postprojektywnej  $\mathcal{P}_R$ , której konstrukcja podana jest również w [1, Chapter IX.3]. Wektory wymiaru modułów nierozkładalnych w  $\text{mod } R$  pokrywają się z dodatnimi pierwiastkami kołczanu  $\bar{\Delta}$ ; równoważnie z dodatnimi pierwiastkami grafu Dynkina  $\Delta$ , na podstawie twierdzenia Gabriela udowodnionego w [1, Chapter VII]. Ponieważ  $\Phi_R = \Phi_D$ , więc teza twierdzenia wynika wprost z Theorem 4.7 artykułu [38].  $\square$

Zapowiadany wcześniej algorytm poprzedzimy następującym twierdzeniem opisującym m.in. efekt końcowy działania tego algorytmu, zobacz [19, Theorem 1.10].

**Twierdzenie 6.8.** *Załóżmy, że  $n \geq 2$ ,  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  oraz  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest jego transformacją Coxetera. Załóżmy ponadto, że  $\Delta$  jest dodatni, nie posiada dziwnych cykli prostych oraz graf Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  jest typem Dynkina bigrafu  $\Delta$ , tzn.  $D$  jest jednym z grafów Tabeli 1.1 oraz  $D = D\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$  jest grafem Dynkina otrzymanym ze spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  w wyniku algorytmu inflacyjnego, zobacz uwaga po twierdzeniu 4.24.*

(a)  *$\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ,  $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_D$  oraz wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  bigrafu  $\Delta$  jest wielomianem  $\text{cox}_D(t)$  w zestawieniu (4.16).*

(b) *Zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  jest równoliczny ze zbiorem pierwiastków  $\mathcal{R}_D$  grafu  $D$  oraz liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  jest równa liczbie Coxetera  $\mathbf{c}_D$  grafu  $D$ .*

(c) *Istnieje  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  oraz istnieje macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  o wyznaczniku  $\det B = \pm 1$  takie, że*

(c1) *macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$ , tzn.  $\check{G}_D = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{\text{tr}}$ ,*

(c2) *przemienny jest diagram*

$$(6.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & \mathbb{Z}^n, \\ h_B \downarrow \cong & & \cong \downarrow h_B \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_D} & \mathbb{Z}^n, \end{array}$$

gdzie  $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem  $h_B(v) = v \cdot B$ , dla  $v \in \mathbb{Z}^n$ .

(c3) ograniczenie izomorfizmu  $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  do kołczanu pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  definiuje izomorfizm kołczanów oczkowych

$$(6.10) \quad h_B : \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \xrightarrow{\cong} \Gamma_{kan}(\mathcal{R}_D, \Phi_D),$$

gdzie  $\Gamma_{kan}(\mathcal{R}_D, \Phi_D) \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest kanonicznym  $\Phi_D$ -oczkowym kołczanem pierwiastków opisanym w twierdzeniu 6.7.

(d)  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  oraz macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  spełniające warunki stwierdzenia (b) otrzymuje się w wyniku działania algorytmu 6.11 przedstawionego w następnym paragrafie i zastosowanego do bigrafu  $\Delta$ .

Dowód tego twierdzenia jest długi i złożony. Jego szczegóły można znaleźć w rozdziale 4.4 naszej publikacji [19].  $\square$

### 6.3. Konstrukcja algorytmu oraz przykłady jego zastosowań

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, konstrukcję zapowiadanego algorytmu podano w naszym artykule [19, Algorithm 3.1] w sytuacji nieco ogólniejszej niż zapowiadamy w twierdzeniu 6.8. Przedstawimy teraz zmodyfikowaną wersję algorytmu [19, Algorithm 3.1] i dostosowaną do założeń przyjętych w twierdzeniu 6.8. Wersję tego algorytmu dla zbiorów częściowo uporządkowanych można znaleźć w artykule [20].

**Algorytm 6.11. Wejście:** (a) Liczba naturalna  $n \geq 2$ .

(b) Spójny krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

(c) Zakładamy tak jak w twierdzeniu 6.8, że  $\Delta$  jest dodatni oraz nie posiada dziwnych cykli prostych.

(d) Bikołczan  $Q := \vec{\Delta}$  stowarzyszony z bigrafem  $\Delta$  w definicji 6.5.

(e) Macierz  $A := \check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ , tzn. niesymetryczna macierz Grama bigrafu  $\Delta$ .

(f) Transformacja Coxetera  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  bigrafu  $\Delta$ .

**Wyjście:** (a) Typ Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  bigrafu  $\Delta$ , tzn.  $D$  jest jednym z grafów Tabeli 1.1 oraz  $D = D\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$  jest grafem Dynkina otrzymanym ze spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  w wyniku algorytmu inflacyjnego, zobacz uwaga po twierdzeniu 4.24.

(b)  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  oraz macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  o wyznaczniku  $\det B = \pm 1$  o własnościach (b1)-(b3) zawartych w twierdzeniu 6.8.

**Etap 1°** Używając algorytmu 7.2, sprawdzamy, czy  $\Delta$  jest dodatni i spójny.

**Etap 2°** Używając algorytmów 7.4 oraz 7.5 obliczamy skończony zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$ , jego wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$  oraz liczbę Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$ .

**Etap 3°** Stosując algorytm inflacyjny 7.6 realizujący efekt opisany w twierdzeniu 4.24(a) obliczamy typ Dynkina  $D := D\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  bigrafu  $\Delta$ .

**Etap 4°** Sprawdzamy, czy  $\Delta$  nie posiada dziwnych cykli prostych.

**Etap 5°** Dla bikołczanu  $Q := \vec{\Delta}$ , obliczamy jego wektory projektywne oraz  $p_1, \dots, p_n$  oraz jego wektory radykałowe  $r_1, \dots, r_n$  bikołczanu  $Q = \vec{\Delta}$ , zdefiniowane następująco (zobacz [19, Section 2.2]).

Jeśli  $d = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  jest pewną zorientowaną drogą w  $Q$  (zawierającą strzałki obu typów), to definiujemy wektor  $v_d \in \mathbb{Z}^n$  wzorami

$$v_d(x_i) = (-1)^{i-1} d_{x_1, x_1}^Q \cdot d_{x_1, x_2}^Q \cdot d_{x_2, x_3}^Q \cdot \dots \cdot d_{x_{i-1}, x_i}^Q;$$

$$v_d(j) = 0, \text{ jeśli } j \notin \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Dla dowolnego  $a_i \in Q_0$ , definiujemy **wektor projektywny**

$$p_i = (p_i(1), \dots, p_i(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

bikołczanu  $Q$  wzorem  $p_i(j) = \sum_d v_d(j)$ , gdzie sumujemy po wszystkich drogach  $d$  z wierzchołka  $a_i$  do  $a_j$ . Dla dowolnego  $a_i \in Q_0$ , definiujemy **wektor radykałowy**

$$r_i = (r_i(1), \dots, r_i(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

bikołczanu  $Q$  wzorem  $r_i = p_i - e_i$ , gdzie  $p_i$  jest wektorem projektywnym.

**Etap 6°** Stosując procedurę 6.12 „Signs of vertices” obliczamy wektor  $c$ .

**Etap 7°** Indukcyjnie konstruujemy:

- listę uporządkowaną  $L[i]$ , dla  $i = 1, \dots, n$ ;
- kołczan  $G^i = (G_0^i, G_1^i)$ , dla  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- kołczan  $\Gamma^i = (\Gamma_0^i, \Gamma_1^i)$ , dla  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- łańcuch zbiorów  $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_k \subseteq c\mathcal{P} =: \{c_1 p_1, \dots, c_n p_n\}$ .

**Etap 7.1°** Przyjmujemy  $L[i] := [c_i p_i]$ , dla  $i = 1, \dots, n$ .

**Etap 7.2°** Przyjmujemy

$$\mathcal{P}_0 = G_0^0 = \{c_i p_i \in \mathcal{P} ; r_i = 0\} \quad \text{oraz} \quad \Gamma_0^0 = \Gamma_1^0 = G_1^0 = \emptyset.$$

**Etap 7.3°** Przyjmujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= \{c_i p_i ; r_i \neq 0 \text{ oraz } c_i r_i^j \in G_0^0, \text{ dla } j = 1, \dots, k_i\}, \\ \mathcal{P}_1 &:= G_0^1 := G_0^0 \cup \mathcal{C}_1, \\ \Gamma_0^1 &= \Gamma_1^1 = \emptyset \\ G_1^1 &:= \{c_i r_i^j \rightarrow c_i p_i ; \text{ dla dowolnego } c_i p_i \in \mathcal{C}_1 \text{ oraz } j = 1, \dots, k_i\}. \end{aligned}$$

**Etap 7.4°** Załóżmy, że  $G^i, \Gamma^i, \mathcal{P}_i$  są zdefiniowane dla  $i = 0, \dots, m-1, m \geq 2$ . Definiujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_m &= \{c_i p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{m-1} ; r_i \neq 0 \text{ oraz } c_i r_i^j \in G_0^{m-1} \text{ dla } j = 1, \dots, k_i\} \\ \mathcal{P}_m &= \mathcal{P}'_m \cup \mathcal{P}_{m-1}, \\ \mathcal{C}_m &= \mathcal{P}'_m \cup \left\{ z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y ; y \in \mathcal{C}_{m-1} \right\}, \\ G_0^m &= G_0^{m-1} \cup \mathcal{C}_m \\ G_1^m &= \left\{ r_i^j \rightarrow p_i ; \text{ dla dowolnego } p_i \in \mathcal{C}_m \text{ oraz } j = 1, \dots, k_i \right\} \\ &\quad \cup \left\{ y \rightarrow z ; \text{ dla dowolnego } y \text{ takiego, że } z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y \right\}. \end{aligned}$$

Ponadto, jeśli  $\mathcal{P}_m \neq c\mathcal{P}$ ,  $z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y$  oraz  $x \in L[i]$ , to dodajemy wektor  $z$  na końcu listy  $L[i]$  oraz opuszczamy początkowy wektor listy  $L[i]$ .

Jeśli  $\mathcal{P}_m \neq c\mathcal{P}$ , to przyjmujemy  $\Gamma_0^m = \Gamma_1^m = \emptyset$ ; w przeciwnym wypadku przyjmujemy

$$\Gamma_0^m = \Gamma_0^{m-1} \cup \mathcal{C}_m$$

oraz przyjmujemy

$$\Gamma_1^m = \Gamma_1^{m-1} \cup \{y \rightarrow z ; \text{ dla dowolnego } y \rightarrow z \in G_1^{m-1} \text{ takiego, że } y, z \in \Gamma_0^{m-1} \cup \Gamma_0^m\}.$$

W wypadku, gdy  $\mathcal{P}_m = c\mathcal{P}$ ,  $z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y$  oraz  $x \in L[i]$ , dodajemy wektor  $z$  na końcu listy  $L[i]$ .

**Etap 8°** Jeśli  $m \geq 2$  jest taką liczbą, że  $\Gamma_0^m = \mathcal{R}_\Delta$ , to algorytm kończy pracę i na wyjściu otrzymujemy

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) := \Gamma^m \subseteq \mathbb{Z}^n.$$

**Uwaga.** Na podstawie wyników pracy [19], algorytm osiąga stan  $\Gamma_0^m = \mathcal{R}_\Delta$ , dla pewnej liczby  $m \geq 2$ . Ponadto konstruuje macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  o wyznaczniku  $\det B = \pm 1$  taką, że

$\check{G}_D = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , tzn. definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $D \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$  bigrafu  $\Delta$  z grafem Dynkina  $D := D\Delta$ .  $\square$

W Etapie 6° algorytmu 6.11 wykorzystujemy następującą procedurę pomocniczą, zobacz [19, Section 2.4].

**Procedura 6.12** („Signs of vertices”).

**Wejście:** (a) Liczba naturalna  $n \geq 2$ .

(b) Spójny krawędziowo-dwudzielny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

(c) Zakładamy tak jak w twierdzeniu 6.8, że  $\Delta$  jest dodatni oraz nie posiada dziwnych cykli prostych.

(d) Bikołczan  $Q := \vec{\Delta}$  stowarzyszony z bigrafem  $\Delta$  w definicji 6.5.

**Wyjście:** Wektor  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$  o współrzędnych  $c_j = c[j] \in \{-1, 1\}$ .

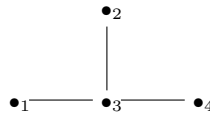
```

1.  c[n]:=1
2.  for i:=1 to n-1 do
3.    c[i]:=0
4.  end do
5.  J:=[n]; I:={}
6.  while I<>{1,...,n} do
7.    i:=Dequeue(J)
8.    I:=I union {i}
9.    for (j takie, że istnieje ciągła krawędź między i oraz j) do
10.     if c[j]=0 then
11.       Enqueue(J,j)
12.       c[j]:=c[i]
13.     end if
14.   end do
15.   for i from {1,2,...,n}\I do
16.     if J={} then
17.       if (istnieje przerywana krawędź między wierzchołkami i oraz j dla pewnego j należącego do I) then
18.         Enqueue(J,i)
19.         c[i]:=-c[j]
20.       end if
21.     end if
22.   end do
23. end do

```

Teraz zilustrujemy działanie algorytmu 6.11 na kilku przykładach grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ . Rozważmy najpierw bigrafy występujące w przykładzie 6.6.

**Przykład 6.13.** Niech  $n = 4$  oraz niech  $\Delta = D$  będzie grafem Dynkina



którego niesymetryczna macierz Grama, macierz Coxetera oraz bikołczan  $\vec{\Delta}$  mają postaci:

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta} : \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \downarrow \\ \bullet_1 \longrightarrow \bullet_3 \longrightarrow \bullet_4 \end{array}$$

Jest to bigraf dodatni, nie posiada dziwnych cykli prostych,  $\text{cox}_\Delta(t) = t^4 + t^3 + t + 1$ ,  $\mathbf{c}_\Delta = 6$ , zbiór jego pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_\Delta(v) = 1\}$  składa się z 24 wektorów, jest rozłączną sumą czterech  $\Phi_\Delta$ -orbit, każda długości  $\mathbf{c}_\Delta = 6$ .

$\mathcal{R}_\Delta$  zawiera cztery wektory projektywne:  $p_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $p_2 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $p_3 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $p_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,







## 7. Dodatek

W rozdziale tym zamieszczone zostały implementacje algorytmów omówionych we wcześniejszych rozdziałach, zrealizowane w programie Maple. Implementacje te można również znaleźć na załączonej do pracy płycie.

### 7.1. Kryterium Sylwestera

**Algorytm 7.1 (kryterium Sylwestera).**

**Opis:** Implementacja kryterium Sylwestera.

**Wejście:** Macierz kwadratowa  $m$ .

**Wyjście:** Liczba całkowita:  $-1$ , jeśli macierz  $m$  nie jest dodatnio określona;  $1$ , jeśli macierz  $m$  jest dodatnio określona.

```

1.   kryteriumSylwestera := proc (m)
2.     local minorM, n, i, dodatnia;
3.     n := coldim(m);
4.     minorM := evalm(scalarmul(m+transpose(m), 1/2))
5.     dodatnia := true;
6.     if det(minorM) <= 0 then
7.       dodatnia := false
8.     end if;
9.     for i from 0 to n-2 do
10.      minorM := minor(minorM, n-i, n-i);
11.      if det(minorM) <= 0 then
12.        dodatnia := false
13.      end if;
14.    end do;
15.    if dodatnia = true then
16.      print("Macierz jest dodatnio okreslona");
17.      return 1;
18.    else
19.      print("Macierz nie jest dodatnio okreslona");
20.      return -1;
21.    end if;
22.    return 0;
23.  end proc;

```

### 7.2. Uogólnione kryterium Sylwestera

**Algorytm 7.2 (uogólnione kryterium Sylwestera).**

**Opis:** Implementacja uogólnionego kryterium Sylwestera.

**Wejście:** Macierz kwadratowa  $m$ .

**Wyjście:** Liczba całkowita:  $-1$ , jeśli macierz  $m$  jest nieokreślona;  $1$ , jeśli macierz  $m$  jest dodatnio półokreślona;  $2$ , jeśli macierz  $m$  jest dodatnio określona;  $0$  w pozostałych przypadkach.

```

1.   uogolnioneKryteriumSylwestera := proc (m)
2.     local minory, minorM, newM, n, i, j, k, dodatnia, dodatnioPolokreslona;
3.     n := coldim(m);
4.     newM := evalm(scalarmul(m+transpose(m), 1/2))
5.     dodatnia := true;
6.     dodatnioPolokreslona := true;
7.     for i from 0 to n-1 do
8.       minory := choose(n, i);
9.       for j to nops(minory) do
10.        minorM := evalm(newM);
11.        for k from nops(minory[j]) by -1 to 1 do
12.          minorM := minor(minorM, minory[j][k], minory[j][k]);
13.        end do;
14.        if det(minorM) <= 0 then
15.          dodatnia := false;
16.        end if;
17.        if det(minorM) < 0 then
18.          dodatnioPolokreslona := false;
19.        end if;

```

```

20.         end do;
21.     end do;
22.     if dodatnia = true then
23.         print("Macierz jest dodatnio okreslona");
24.         return 2;
25.     elif dodatnioPolokreslona = true then
26.         print("Macierz jest dodatnio polokreslona");
27.         return 1;
28.     else
29.         print("Macierz jest nieokreslona");
30.         return -1;
31.     end if;
32.     return 0;
33. end proc:

```

### 7.3. Algorytm Lagrange'a

#### Algorytm 7.3 (algorytm Lagrange'a).

**Opis:** Implementacja algorytmu Lagrange'a, wyznaczającego postać kanoniczną funkcjonału kwadratowego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Wejście:** (a) Macierz Grama  $m$  funkcjonału kwadratowego  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  lub funkcjonal kwadratowy  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

(b) Liczba całkowita *stopien*: 0, jeśli w punkcie (a) podano macierz Grama; stopień funkcjonału, jeśli w punkcie (a) podano funkcjonal kwadratowy.

**Wyjście:** Postać kanoniczna funkcjonału  $q$ .

```

1.   Lagrange := proc (m, stopien)
2.       local wiel, X, i, j, A, w1, w2, zmienne, zmienna, zm_pom, reszta, tmp, wynik_konc,
3.           tmp_wynik, wspolczynnik, konc, ilosc, zm, Z;
4.       if stopien = 0 then
5.           ilosc := rowdim(m);
6.           X := evalm(Matrix(1, ilosc, [seq(x[i], i = 1 .. ilosc)]));
7.           wiel := sort(simplify(evalm('&*&'('&*&'(X, m), transpose(X))))[1, 1]);
8.       else
9.           wiel := sort(simplify(m));
10.          ilosc := stopien;
11.      end if;
12.      zmienne := array(1 .. ilosc, [seq(x[i], i = 1 .. ilosc)]);
13.      zm_pom := evalm(zmienne);
14.      A := array(1 .. ilosc, [seq(0, i = 1 .. ilosc)]);
15.      tmp_wynik := 0;
16.      for i to ilosc-1 do
17.          zmienna := zmienne[i];
18.          if remove(has, wiel, zmienna) <> wiel then
19.              wiel := sort(expand(wiel));
20.              if select(has, wiel, zmienna^2) = 0 or degree(select(has, wiel-Z, zmienna)) < 2 then
21.                  for j from i+1 to ilosc do
22.                      if 0 < degree(select(has, wiel-Z, zmienne[j]^2)) then
23.                          A[i] := -j;
24.                          break;
25.                      end if;
26.                  end do;
27.                  if A[i] < 0 then
28.                      wiel := subs({zmienne[-A[i]] = zm_pom[i], zmienne[i] = zm_pom[-A[i]]}, wiel);
29.                      tmp_wynik := subs({zmienne[-A[i]] = zm_pom[i], zmienne[i] = zm_pom[-A[i]]}, tmp_wynik);
30.                  else
31.                      for j from i+1 to ilosc do
32.                          if 0 < degree(select(has, wiel-Z, zmienne[i]*zmienne[j])) then
33.                              A[i] := j;
34.                              break;
35.                          end if;
36.                      end do;
37.                      if 0 < A[i] then
38.                          wiel := subs({zmienne[A[i]] = zm_pom[i]-zm_pom[A[i]],
39.                              zmienne[i] = zm_pom[i]+zm_pom[A[i]]}, wiel);
40.                          tmp_wynik := subs({zmienne[A[i]] = zm_pom[i]-zm_pom[A[i]],
41.                              zmienne[i] = zm_pom[i]+zm_pom[A[i]]}, tmp_wynik);

```

```

39.         else
40.             return;
41.         end if;
42.     end if;
43. end if;
44. wiel := expand(wiel);
45. zm := select(has, wiel-Z, zmienna);
46. reszta := remove(has, wiel-Z, zmienna)+Z;
47. wspolczynnik := coeff(zm, zmienna^2);
48. if wspolczynnik = 0 then break end if;
49. w1 := expand(zm/(zmienna*wspolczynnik));
50. if zm = wspolczynnik*zmienna^2 then
51.     tmp := wspolczynnik*zmienna^2;
52. elif
53.     w1 = zmienna then print("stop", m, w1);
54.     break;
55. else
56.     w2 := expand((1/2)*remove(has, w1-Z, zmienna)+(1/2)*Z);
57.     tmp := wspolczynnik*(zmienna+w2)^2;
58. end if;
59. tmp_wynik := tmp_wynik+tmp;
60. konc := reszta-remove(has, expand(tmp)+Z, zmienna)+Z;
61. wynik_konc := tmp_wynik+konc;
62. wiel := konc;
63. end if;
64. end do;
65. for j from ilosc-1 by -1 to 1 do
66.     if 0 < A[j] then
67.         wynik_konc := subs({zm_pom[A[j]] = (1/2)*zmienne[j]-(1/2)*zmienne[A[j]],
68.             zm_pom[j] = (1/2)*zmienne[j]+(1/2)*zmienne[A[j]]}, wynik_konc);
69.     elif A[j] < 0 then
70.         wynik_konc := subs({zm_pom[-A[j]] = zmienne[j], zm_pom[j] = zmienne[-A[j]]}, wynik_konc);
71.     end if;
72. end do;
73. return wynik_konc;
end proc:

```

#### 7.4. Algorytm ograniczonego zliczania

##### Algorytm 7.4 (algorytm ograniczonego zliczania).

**Opis:** Implementacja algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru  $\mathcal{R}_q$  pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału  $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Wejście:** (a) Macierz Grama  $m$  dodatnio określonego funkcjonału  $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

(b) Liczba naturalna  $d \geq 0$ , z której będą liczone pierwiastki.

**Wyjście:** Lista wszystkich pierwiastków z  $d$ .

```

1. ograniczoneZliczanie := proc (m, d)
2.     local i, j, n, X, q, dziedzina, max, postac_kanoniczna, rozwiazanie, lista, T,
3.     wektor, wynik;
4.     n := coldim(m);
5.     X := evalm(Matrix(1, n, [seq(x[i], i = 1 .. n)]));
6.     q := sort(simplify(evalm('&*&'('&*&'(X, m), transpose(X))))[1, 1]);
7.     dziedzina := [seq([], i = 1 .. n)];
8.     wynik := [];
9.     for i to n do
10.         max := 0;
11.         postac_kanoniczna := Lagrange(subs({x[i] = x[n], x[n] = x[i]}, q), n);
12.         rozwiazanie := isolve(VectorCalculus:-'*'(coeffs(op(nops(postac_kanoniczna),
13.         postac_kanoniczna)), x^2) <= d);
14.         lista := map(proc (x) solve(x[1]) end proc, [rozwiazanie]);
15.         for j to nops(lista) do
16.             if max < lista[j] then
17.                 max := lista[j];
18.             end if;
19.         end do;
20.         printf("|x%d|<=%d\n", i, max);
21.         dziedzina[i] := [seq(j, j = VectorCalculus:-'*'(max, -1) .. max)];

```

```

20.     end do;
21.     T := cartprod(dziedzina);
22.     while not T['finished'] do
23.         wektor := evalm(convert(evalm(T['nextvalue']()), vector));
24.         if subs([seq(x[i] = wektor[i], i = 1 .. n)], evalm(q)) = d then
25.             wynik := [op(wynik), evalm(wektor)];
26.         end if;
27.     end do;
28.     return wynik;
29. end proc:

```

## 7.5. Algorytm obliczający zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera

### Algorytm 7.5.

**Opis:** Implementacja algorytmu obliczającego zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Wejście:** Macierz Grama  $m$  funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Wyjście:** Zredukowana liczba Coxetera oraz liczba Coxetera funkcjonału  $q$  (o ile jest skończona).

```

1.     zredukowanaLiczbaCoxetera:=proc(m)
2.         local cox, n, zliczba, tmpcox, tmpm, i, j, k, l, E, Z, v;
3.         n:= coldim(m);
4.         cox:=evalm(-(m&*transpose(inverse(m))));
5.         tmpcox:=evalm(cox);
6.         zliczba:=1;
7.         E:=matrix(n,n, [seq(0,i=1..n^(2))]);
8.         Z:=evalm(E);
9.         for i from 1 to n do E[i,i]:=1; end do;
10.        tmpm:=evalm(tmpcox-E);
11.        while (true) do
12.            k:=0;
13.            for i from 1 to n do
14.                v:=matrix(1,n, [seq(0, j=1..n)]);
15.                for j from 1 to n do
16.                    v[1,j]:=tmpm[i,j];
17.                end do;
18.                if evalm(v&*m&*transpose(v))[1,1]=0 then
19.                    k:=k+1;
20.                end if;
21.            end do;
22.            if k=n then
23.                print("Zredukowana liczba Coxetera: ", zliczba);
24.                if equal(tmpm, Z) = true then
25.                    print("Liczba Coxetera: ", zliczba);
26.                end if;
27.                return zliczba;
28.            end if;
29.            tmpcox:=evalm((evalm(tmpcox)&*cox));
30.            tmpm:=evalm(tmpcox-E);
31.            zliczba:=zliczba+1;
32.        end do;
33.        return zliczba;
34.    end proc:

```

## 7.6. Algorytm inflacyjny

### Algorytm 7.6 (algorytm inflacyjny).

**Opis:** Implementacja algorytmu inflacyjnego, którego opis można znaleźć w artykułach [24] oraz [41].

**Wejście:** (a) Macierz Grama bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ ,  
(b) pierwiastek.

**Wyjście:** Macierz inflacji.

```

1.  algorytm_inflacyjny:=proc(macierz,pierwiastek)
2.      local n, T, i, j, zerowe, niezerowe, t, mt, num, znaleziono, k, m, h, a, b, aa, bb;
3.      n:=coldim(evalm(macierz));
4.      m:=utrojkatnienie(evalm(macierz), n);
5.      h:=evalm(pierwiastek);
6.      T:=evalm(Matrix(n,n,shape=identity));
7.      for i from 1 to n do
8.          if h[1,i] < 0 then
9.              mt:=jed_podstaw(n,i,i,1);
10.             T:=evalm(T) &* mt;
11.             m:=transpose(mt) &* evalm(m) &* mt;
12.             h:=evalm(h &* mt);
13.         end if;
14.     end do;
15.     m:=utrojkatnienie(evalm(m),n);
16.     zerowe=[];
17.     niezerowe=[];
18.     for i from 1 to n do
19.         if h[1,i]=0 then
20.             zerowe:=[op(zerowe),i];
21.         else
22.             niezerowe:=[op(niezerowe),i];
23.         end if;
24.     end do;
25.     while nops(zerowe) > 0 do
26.         znaleziono:=0;
27.         for i in zerowe do
28.             for j in niezerowe do
29.                 if i < j then
30.                     aa:=i;
31.                     bb:=j;
32.                 else
33.                     aa:=j;
34.                     bb:=i;
35.                 end if;
36.                 if m[aa, bb] > 0 then
37.                     a:=i;
38.                     b:=j;
39.                     znaleziono:=1;
40.                     break;
41.                 elif m[aa, bb] < 0 then
42.                     a:=i;
43.                     b:=j;
44.                 end if;
45.             end do;
46.             if znaleziono=1 then
47.                 break;
48.             end if;
49.         end do;
50.         if znaleziono=0 then
51.             mt:=jed_podstaw(n,a,a,1);
52.             T:=evalm(T) &* mt;
53.             m:=transpose(mt) &* evalm(m) &* mt;
54.             h:=evalm(h &* mt);
55.         end if;
56.         if a < b then
57.             t:=m[a,b];
58.         else
59.             t:=m[b,a];
60.         end if;
61.         mt:=jed_podstaw(n,a,b,t);
62.         T:=evalm(T) &* mt;
63.         m:=transpose(mt) &* m &* mt;
64.         h[1,a]:=t*h[1,b];
65.         m:=utrojkatnienie(evalm(m), n);
66.         for k from nops(zerowe) by -1 to 1 do
67.             if zerowe[k]=a then
68.                 zerowe:=subsop(k=NULL,zerowe);
69.             end if;
70.         end do;
71.         niezerowe:=[op(niezerowe),a];
72.     end do;

```

```

73.     num:=0;
74.     znaleziono:=1;
75.     while znaleziono=1 do
76.         znaleziono:=0;
77.         for i from 1 to n do
78.             for j from i+1 to n do
79.                 if m[i,j] > 0 then
80.                     znaleziono:=1;
81.                     num:=num+1;
82.                     t:=m[i,j];
83.                     mt:=jed_podstaw(n,i,j,t);
84.                     T:=evalm(T) &* mt;
85.                     m:=transpose(mt) &* m &* mt;
86.                     m:=utrojkatnienie(evalm(m),n);
87.                     break;
88.                 end if;
89.             end do;
90.             if znaleziono=1 then
91.                 break;
92.             end if;
93.         end do;
94.     end do;
95.     return evalm(T);
96. end proc:

```

Procedury pomocnicze, wykorzystywane przez implementację algorytmu inflacyjnego:

```

1.  jed_podstaw:=proc(n,i,j,x)
2.      local mt;
3.      mt:=evalm(Matrix(n,n,shape=identity));
4.      mt[i,j]:=-x;
5.      return mt;
6.  end proc:

1.  utrojkatnienie:=proc(macierz, n)
2.      local i, j, wynik;
3.      wynik:=evalm(macierz);
4.      for i from 1 to n do
5.          for j from i+1 to n do
6.              wynik[i,j]:=macierz[i,j]+macierz[j,i];
7.              wynik[j,i]:=0;
8.          end do;
9.      end do;
10.     return wynik;
11. end proc:

```

## 7.7. Algorytm „dodatnie”

**Algorytm 7.7 (algorytm „dodatnie”).**

**Opis:** Implementacja algorytmu rozszerzającego dodatnio określone bigrafy o  $n$  wierzchołkach do dodatnio określonych bigrafów o  $n + 1$  wierzchołkach.

**Wejście:** Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o  $n$  wierzchołkach.

**Wyjście:** Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o  $n + 1$  wierzchołkach.

```

1.  dodatnie:=proc(lista)
2.      local W, tmp, n, G, i, j, k, Mtmp, M, ii, wynik;
3.      n:=coldim(lista[1]);
4.      wynik:=[];
5.      for ii from 1 to nops(lista) do
6.          W:=[];
7.          tmp:=cartprod([seq([1,0,-1], x=1..n)]);
8.          while not tmp[finished] do
9.              W:=[op(W),tmp[nextvalue] ()];
10.         end do;
11.         G:=evalm(lista[ii]+transpose(lista[ii]));
12.         for i from 1 to nops(W) do
13.             Mtmp:=evalm(Matrix(n+1,n+1,shape=identity));
14.             M:=evalm(Matrix(n+1,n+1,shape=identity));
15.             for j from 1 to n do

```

```

16.         for k from 1 to n do
17.             Mtmp[j,k]:=G[j,k];
18.             M[j,k]:=lista[ii][j,k];
19.         end do;
20.         Mtmp[n+1,j]:=W[i][j];
21.         M[j,n+1]:=W[i][j];
22.         Mtmp[j,n+1]:=W[i][j];
23.     end do;
24.     Mtmp[n+1,n+1]:=2;
25.     if det(Mtmp)>0 and HasNonZero(convert(W[i], Vector)) = true then
26.         wynik:=[op(wynik),evalm(M)];
27.     end fi;
28. end do;
29. end do;
30. return wynik;
31. end proc:

```

### 7.8. Algorytm „główne”

**Algorytm 7.8 (algorytm „główne”).**

**Opis:** Implementacja algorytmu rozszerzającego dodatkowo określone bigrafy o  $n$  wierzchołkach do bigrafów głównych o  $n + 1$  wierzchołkach.

**Wejście:** (a) Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o  $n$  wierzchołkach,  
(b) Liczba całkowita  $\epsilon$  (patrz opis algorytmu).

**Wyjście:** Lista macierzy Grama bigrafów głównych o  $n + 1$  wierzchołkach.

```

1.     glowne := proc (lista, epsilon)
2.         local w, m, i, j, k, l, n, wynik, pierwiastki;
3.         wynik := [];
4.         n := coldim(lista[1]);
5.         for i to nops(lista) do
6.             pierwiastki := ograniczoneZliczanie(lista[i], 1);
7.             for j to nops(pierwiastki) do
8.                 w := evalm(-'&*' (epsilon*pierwiastki[j], lista[i]+transpose(lista[i])));
9.                 m := matrix(n+1, n+1, []);
10.                for k to n do
11.                    for l to n do
12.                        m[k, l] := evalm(lista[i][k, l]);
13.                    end do;
14.                    m[k, n+1] := w[k];
15.                    m[n+1, k] := 0;
16.                end do;
17.                m[n+1, n+1] := 1;
18.                wynik := [op(wynik), evalm(m)];
19.            end do;
20.        end do;
21.        return wynik;
22.    end proc:

```



# Bibliografia

- [1] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1. Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2006.
- [2] M. Barot and J.A. de la Peña, The Dynkin type of a non-negative unit form, *Expo. Math.* 17(1999), 339–348
- [3] V. M. Bondarenko and A. M. Polishchuck, On finiteness of critical Tits forms of posets, *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine* 50(2004), 1061–1063.
- [4] V. M. Bondarenko and M. V. Styopochkina, On posets of width two with positive Tits form, *Algebra and Discrete Math.* 2(2005), 20–35.
- [5] V. M. Bondarenko and M. V. Styopochkina, (Min, max)-equivalency of partially ordered sets and Tits quadratic forms, *In: Analysis and Algebra Problems*, Inst. Mat. NAS Ukraine 2(3), 2005, pp. 3–46.
- [6] K. Bongartz, Algebras and quadratic forms, *J. London Math. Soc.*, 28(1983), 461–469.
- [7] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Izd. Nauka, Moscow, 1964.
- [8] J. A. Drozd, Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, *Funkc. Anal. i Priložen.* 8(1974), 34–42 ( w języku rosyjskim).
- [9] M. Felisiak and D. Simson, Applications of matrix morsifications to Coxeter spectral study of loop-free edge-bipartite graphs, *Discrete Appl. Math.* 192(2015), 49–64, doi: 10.1016//dam.2014.05.002.
- [10] P. Gabriel and A. V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras*, Algebra VIII, Encyclopaedia of Math. Sc., Vol. 73, Springer–Verlag, 1992.
- [11] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol.1, Chelsea Publishing Company, New York, 1984.
- [12] M. Gąsiorek and D. Simson, One-peak posets with positive Tits quadratic form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python, *Linear Algebra Appl.* 436(2012), 2240–2272, doi: 10.1016//j.laa. 2011.10.045.
- [13] M. Gąsiorek and D. Simson, A computation of positive one-peak posets that are Tits sincere, *Colloq. Math.* 127(2012), 83–103.
- [14] M. Gąsiorek D. Simson and K. Zając, On Coxeter type study of non-negative posets using matrix morsifications and isotropy groups of Dynkin and Euclidean diagrams, *Europ. J. Comb.* 48(2015), 127–142, doi: 10.1016//j.ejc.2015.02.15.
- [15] M. Gąsiorek, D. Simson and K. Zając, Structure and a Coxeter-Dynkin type classification of corank two non-negative posets, *Linear Alg. Appl.* 469(2015), 76–113
- [16] H. J. von Höhne, On weakly positive unit forms, *Comment Math. Helvetici*, 63(1988), 312–336.
- [17] R.A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013.
- [18] R.A. Horn and V. V. Sergeichuk, Congruences of a square matrix and its transpose, *Linear Algebra Appl.* 389(2004), 347–353.
- [19] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki and G. Marczak, A horizontal mesh algorithm for a class of edge-bipartite graphs and their matrix morsifications, *Fund. Inform.* 136(2015), 345–379.
- [20] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki and G. Marczak, A horizontal mesh algorithm for posets with positive Tits form, *Algebra and Discrete Math.* Vol 21, No 2, 2016, 111–132.
- [21] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, I. Mesh root systems, *Fund. Inform.* 139(2015), 153–184, doi: 10.3233//FI-2015-1230.
- [22] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, II. Application to Coxeter spectral analysis, *Fund. Inform.* 139(2015), 185–209, doi: 10.3233//FI-2015-1231.
- [23] S. Kasjan and D. Simson, Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs, *Fund. Inform.* 129 (2015), 249–254, doi: 10.3233//FI-2015-1234.
- [24] J. Kosakowska, Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms, *Fund. Inform.* 119(2012), 149–162, doi: 10.3233//FI-2012-731.
- [25] H. Lenzing and J.A de la Peña, Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities, In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, ICRA XII, (ed. A. Skowroński), Series of Congress Reports, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2008, pp. 541–588.
- [26] S. A. Ovsienko, Integral weakly positive forms, *in Schur Matrix Problems and Quadratic Forms*, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, Preprint 78.25 (1978), pp. 3–17 (in Russian).
- [27] G. Marczak, A. Polak, D. Simson,  $P$ -critical integral quadratic forms and positive unit forms: an algorithmic approach, *Linear Algebra Appl.* 433 (2010) 1873–1888, doi:10.1016//j.laa.2010.06.052.
- [28] G. Marczak, D. Simson and K. Zając, On computing non-negative loop-free edge-bipartite graphs, 15th Intern. Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC13, Timisoara, September 2013, IEEE Computer Society, IEEE CPS, Tokyo, 2013.
- [29] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej.*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.
- [30] A. Mróz and J. A. de la Peña, Tubes in derived categories and cyclotomic factors of Coxeter polynomials of an algebra, *J. Algebra*, 420(2014), 242–260.
- [31] A. Polak and D. Simson, Algorithms computing  $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of  $P$ -critical edge-bipartite graphs and  $P$ -critical unit forms using Maple and C#, *Algebra and Discrete Mathematics*, 16(2013), No. 2, 1–41

- [32] A. Polak and D. Simson, Coxeter spectral classification of almost  $TP$ -critical one-peak posets using symbolic and numeric computations, *Linear Algebra Appl.* 445 (2014) 223–255, doi: 10.1016/j.laa.2013.12.018. .
- [33] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Math., Vol. 1099, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1984.
- [34] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications, Vol. 4, Gordon & Breach Science Publishers, 1992.
- [35] D. Simson, *Pierwiastki funkcjonalów kwadratowych, diagramy Dynkina i zbiory częściowo uporządkowane*, Wykłady monograficzne - skrypt, Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń, wrzesień 2004-kwiecień 2009.
- [36] D. Simson, Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories, *Colloq. Math.*, 115(2009), 259–295.
- [37] D. Simson, Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets, *Linear Algebra Appl.* 433(2010), 699–717; doi: 10.1016/j.laa.2010.03.04.
- [38] D. Simson, Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms, *J. Pure Appl. Algebra*, 215(2011), 13–34, doi: 10.1016/j.jpaa.2010.02.029.
- [39] D. Simson, Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots, *Fund. Inform.* 109(2011), 425–462, doi: 3233/FI-2011-603.
- [40] D. Simson, Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams, *Fund. Inform.* 123(2013), 447–490.
- [41] D. Simson, A Coxeter-Gram classification of positive simplylaced bipartite graphs and unit forms, *SIAM J. Discr. Math.* 27(2013), 827–854.
- [42] D. Simson, A framework for Coxeter spectral analysis of edge-bipartite graphs, their rational morsifications and mesh geometries of root orbits, *Fund. Inform.* 124(2013), 309–338, doi: 10.3233/FI-2013-836.
- [43] D. Simson, Symbolic Algorithms Computing Gram Congruences in the Coxeter Spectral Classification of Edge-bipartite Graphs, I. A Gram Classification, *Fund. Inform.* 145(2016), 19–48, doi: 10.3233/FI-2016-1345.
- [44] D. Simson, Symbolic Algorithms Computing Gram Congruences in the Coxeter Spectral Classification of Edge-bipartite Graphs, II. Isotropy Mini-groups, *Fund. Inform.* 145(2016), 49–80, doi: 10.3233/FI-2016-1346.
- [45] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Math. Soc. Student Texts 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [46] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 3. Representation-Infinite Tilted Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 72, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [47] D. Simson, K. Zając, A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2013 (2013) Article ID 743734, 22 pages, doi:10.1155/2013/743734.
- [48] T. Zaslavsky, Signed graphs, *Discrete Appl. Math.* 4(1982), 47–74.