Uniwersytet Mikołaja Kopernika

KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ

Wykład i zadania
Skrypt dla studentów pierwszego roku

Max Urchs, Marek Nasieniewski, Skarbimir Kwiatkowski

KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ

Wykład i zadania
Skrypt dla studentów pierwszego roku

Max Urchs, Marek Nasieniewski, Skarbimir Kwiatkowski

Toruń 1997

Recenzenci
Jacek Malinowski
Mieczysław Omyła

Printed in Poland

ISBN 83-231-0858-7

Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Toruń, ul. Gagarina 11, tel. (056) 62-14-295, fax (056) 6542948
Wydanie I. Nakład 270 egz.
Ark. wyd. 6,0

Skład w systemie TEX
Max Urchs, Marek Nasieniewski
Druk: Zakład Poligrafii UMK

Spis treści

Dodatki:

Wstęp

Skrypt ten przeznaczony jest dla studentów filozofii. Może być pomocny również dla studentów innych kierunków humanistycznych pragnących poznać podstawowe zagadnienia z zakresu logiki. Obejmuje on klasyczny rachunek zdań prezentowany we współczesnej formie. Staraliśmy się o dołączenie dużej ilości zadań, by zwłaszcza studentom zaocznym ułatwić samodzielne zmaganie się z klasycznym rachunkiem zdań i dać im możliwość sprawdzenia, na ile już opanowali studiowany materiał.

Istnieje na polskim rynku kilka alternatywnych pozycji służących samodzielnej nauce logiki klasycznej. Niektóre z nich uwzględniliśmy w bibliografii. Czytelnik znajdzie tam też propozycje dla dogłębnego poznania tematów, które w skrypcie, z konieczności traktowane są wybiórczo.

Skrypt opiera się na doświadczeniach z wieloletnich wykładów pierwszego autora i ćwiczeń prowadzonych przez całą trójkę autorów. Powstał on wspólnym wysiłkiem. W szczególności Max Urchs odpowiada za rozdziały II, III, IV, za dodatek 3 i kolokwia. Materiał ten oparty jest w części na wcześniejszej pracy autora [13]. Marek Nasieniewski opracował dodatki 1, 2, 4 oraz, razem z Maxem Urchsem, część zadaniową. W rozdziale I Skarbimir Kwiatkowski pisze o tym, czym jest logika i jej związkach z filozofią, a przy okazji przekonuje, że logicy potrafią czasami pisać zrozumiale. Poza tym dbał o dobrą redakcję całej książki.

Dziękujemy tym, którzy się przyczynili do powstania tego skryptu. A są to przede wszystkim studenci pierwszego roku różnych kierunków humanistycznych Uniwersytetów Wrocławskiego i Mikołaja Kopernika w Toruniu.
Zamierzamy rozszerzyć ten materiał (rachunek predykatów, logiki nieklasyczne, podstawowe fakty z teorii relacji i liczb kardynalnych, elementy histo-

rii logiki oraz rozwiązania zadań zawartych w tej części) i wciąż go ulepszyć. Liczymy więc na dalszą pomoc naszych słuchaczy i czytelników – podzielcie się z nami swoimi uwagami, wskażcie nam błędy i usterki (których zapewne nie brakuje). Proponujemy kontakt przez e-mail:

max@mat.uni.torun.pl
mnasien@cc.uni.torun.pl

Mając nadzieję, że merytorycznych uwag będzie więcej od wykrytych błędów, życzymy naszym czytelnikom łatwego czytania tego z natury rzeczy niełatwego dla humanisty materiału.

Toruń, wiosna 1997 r.

Skarbimir Kwiatkowski
Marek Nasieniewski
Max Urchs

Rozdział I

Collegium Logicum

W *Fauście* Goethego spragniony wiedzy uczeń otrzymuje od Mefistofelesa taką oto pełną złośliwej ironii radę co do początków edukacji:

> Korzystaj z chwili, bo się wnet oddala!
> Lecz, że porządek zmnożyć czas pozwala,
> Mój przyjacielu, przeto naprzód radzę,
> «Collegium logicum» mieć na uwadze.
> Tam duch wasz wnet się wytresuje,
> W hiszpańskie buty zasznuruje
> I już roztropniej wtedy może
> Czołgać się po myśli torze (...).

Czytelnik byłby jednak w błędzie, jeśli by sądził, że zachęcając Go do nauki logiki kierujemy się tym diabelskim podszeptem. Przekonani jesteśmy, że poznanie tajników tej dyscypliny nie musi być dla umysłu filozofa jałową torturą, lecz przeciwnie, może wspomóc jego pracę dostarczając mu pożytecznych instrumentów badawczych oraz inspirujących pomysłów. Logika bowiem w ciągu minionego stulecia zmieniła się tak bardzo, takiej nabrała finezji i giętkości, że trzeba by ją porównać nie do najeżonych kolcami hiszpańskich butów, lecz raczej do wygodnego sportowego obuwia pozwalającego śmiałym krokiem stąpać po stromych i kamienistych ścieżkach nauki.

I.1. Czym jest logika?

Zanim jednak podejmiemy próbę uzasadnienia tego poglądu, warto byłoby wyjaśnić, choćby tylko z grubsza, co oznacza termin „logika". Odrobinę światła rzuca na to zagadnienie etymologia. „Logos" znaczy po grecku m.in.

rozum, rozumowanie, język, porządek. Lektura dalszych partii skryptu przekona Czytelnika, że te skojarzenia nie są przypadkowe. Pominiemy tu oczywiście potoczny sens, w jakim używa się słowa „logika", kiedy np. mówi się o logice wydarzeń historycznych albo o braku logiki w czyimś zachowaniu. Chodzi bowiem wyłącznie o dyscyplinę naukową, która nosi tę nazwę. Nie jest łatwo w kilku słowach opisać dziedzinę jej zainteresowań, ponieważ problematyka logiczna jest dość rozległa i zróżnicowana. Mówiąc najogólniej, zajmuje się ona badaniem praw, które rządzą przetwarzaniem wyrażonych w języku informacji. Jej jądrem jest dział badający niezawodne schematy wnioskowania, czyli takie, które od prawdziwych przesłanek prowadzą zawsze do prawdziwych wniosków. Prócz niego w skład logiki wchodzi semiotyka logiczna opisująca systemy znakowe pod względem składni, znaczenia i skuteczności, a także logiczna metodologia nauk, która zajmuje się metodami poznawczymi stosowanymi przez różne dyscypliny, takimi jak dowodzenie, definiowanie itp.

Logika jest nauką formalną. Już samo to określenie wskazuje, że decydujący jest dla niej aspekt formy, a nie treści informacji. Rozważmy następujące dwa przykłady.

(1) Jeżeli Jaś jest filozofem, to (Jaś) lubi logikę. Nieprawda, że Jaś lubi logikę.

Zatem nieprawda, że Jaś jest filozofem.

(2) Jeżeli Mruczek jest krokodylem, to (Mruczek) jest zielony. Nieprawda, że Mruczek jest zielony.

Zatem nieprawda, że Mruczek jest krokodylem.

Dla logiki konkretna treść zdań występujących w (1) i (2) ma znaczenie drugorzędne, nie interesuje się ona bowiem ani profesją i upodobaniami intelektualnymi Jasia, ani gatunkową przynależnością Mruczka. Istotne jest natomiast to, że (1) i (2) mają tę samą formę, o czym decydują powtarzające się w takiej samej konfiguracji wyrażenia „jeżeli..., to...", „nieprawda, że...", które mówią coś na temat stosunków pomiędzy zdaniami. Takich wyrażeń związanych z formą jest w języku więcej, np. „...lub...", „...i...", „...albo ...", „...bądź...", mogą też one czasem wyrażać stosunki pomiędzy nazwami, tak jak się to dzieje w przypadku wypowiedzi: „Każdy...

jest...", „Pewne ...są ..." itp. Formalne komponenty języka mają zasadnicze znaczenie w procesie rozumowania, stanowią one bowiem szkielet, na którym wspiera się treść informacji, pozwalający porządkować je i ustalać zachodzące między nimi związki.

Logika bada ten właśnie strukturalny aspekt języka. Posługuje się przy tym najczęściej sztucznymi językami symbolicznymi, stanowiącymi abstrakcyjne i schematyczne modele języka naturalnego. Są one użyteczne z uwagi na swą zwięzłość, umożliwiają pominięcie nieistotnej treści i wyeksponowanie formy rozumowań. W takich językach kontrolowanie poprawności wnioskowań jest łatwiejsze niż w języku naturalnym, polega ono bowiem na badaniu przekształceń ciągów symboli (napisów) pod względem zgodności ze stosownymi regułami formalnymi.

„Współczesna logistyka ma szatę nominalistyczną. Mówi nie o pojęciach i sądach, lecz o nazwach i zdaniach, a nazwy i zdania traktuje wprawdzie nie jako *flatus vocis*, bo jest nastawiona wzrokowo, ale jako napisy o pewnej formie. Zgodnie z tym założeniem logistyka stara się wszystkie wywody logiczne sformalizować, tzn. przedstawić je w taki sposób, by zgodność ich z regułami wnioskowania, czyli przekształcania napisów można skontrolować bez odwoływania się do znaczenia napisów." ([5])

Inne nauki, takie jak socjolingwistyka, leksykografia, dialektologia opisują język w sposób empiryczny, logika natomiast uwzględnia tylko to, co ma znaczenie z punktu widzenia formalnych praw dotyczących poprawności rozumowań, przy czym poprawność rozumie się tutaj jako gwarantowaną przez strukturę wnioskowania niezawodność wyprowadzania prawdziwych wniosków z prawdziwych przesłanek.

Pojęcie prawdy, z uwagi na swoją zasadniczą wagę w omawianej dyscyplinie, wymaga kilku słów objaśnienia.

Pojęcie prawdy

Zapewne najbliższe zdrowemu rozsądkowi jest pojmowanie prawdy jako zgodności tego, co się mówi (lub myśli) z rzeczywistością. Jak to ujmuje Arystoteles, jeżeli ktoś mówi o tym, co jest rozdzielone, że jest rozdzielone, a o tym, co jest połączone, że jest połączone, to mówi prawdę. Zatem

Zdanie p jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest tak, jak głosi to zdanie. (T)

Teza (T) wyraża pojęcie „prawdy" nie tylko najbardziej naturalne, ale też przyjmowane w naukach i akceptowane przez niemal wszystkich wielkich filozofów. Chociaż owa klasyczna koncepcja została dość jasno wypowiedziana już przez Platona („Sofista" 263 b), to jej autorstwo przypisuje się na ogół wspomnianemu wyżej mędrcowi ze Stagiry, co znajduje wyraz w przywoływanej często nazwie (używa się wymiennie określeń: „klasyczne" lub „Arystotelesowskie pojęcie prawdy"). Najpowszechniej znane jej sformułowanie pochodzi od św. Tomasza z Akwinu: *„Veritas est aedequatio intellectus et rei secundum quod intellectus dicit esse quod est vel nonesse quod non est"*.

Teza (T) jest też punktem wyjścia dla logicznego ujęcia prawdy. Uzupełniają ją dodatkowe założenia. Każde poprawne zdanie oznajmujące, o ile precyzyjnie wskazuje dziedzinę, do której się odnosi, jest prawdziwe bądź fałszywe. Oznacza to po pierwsze, że nigdy nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe oraz po drugie, że nie ma zdań „nijakich", tzn. ani prawdziwych, ani fałszywych.

Na tych podstawach w logice konstruuje się szczegółowe teorie prawdy. O niektórych związanych z tym trudnościach wspomnimy jeszcze nieco dalej. Zogniskowanie uwagi na kwestii prawdziwości i mechanizmach jej zachowywania w procesie wnioskowania jest konstytutywną cechą logiki. Można więc powtórzyć za sławnym filozofem i logikiem Willardem van Orman Quine'em: logika jest „wypadkową dwóch składników, prawdy i gramatyki" ([11], s. 5).

Uniwersalność praw logiki

Logika zajmuje szczególne miejsce wśród nauk z uwagi na powszechność jej zastosowań w innych dyscyplinach. Ogólne zasady rozumowań są wspólne dla wszystkich dziedzin poznania racjonalnego, oczywiste jest więc, że poszczególne dyscypliny, bez względu na swoją specyfikę, odwołują się do logiki. To ona bowiem wskazuje kryteria poprawności rozumowań, określa standardy definiowania i dowodzenia, przez co oddziałuje pod względem metodologicznym na wszystkie nauki.

Zagadnienie powszechności zasad logiki wiąże się ściśle z pytaniem o podstawy ich prawomocności.

Zwolennicy stanowiska zwanego ontologizmem źródła prawomocności logiki dopatrują się w strukturze rzeczywistości. Prawa logiki charakteryzują w sposób najbardziej ogólny własności przedmiotów oraz stosunki zachodzące pomiędzy nimi. Dlatego logika jest abstrakcyjnym opisem budowy świata, a tym samym jest w istocie ontologią.

Inne stanowisko podkreśla rolę związków języka ze światem. Pewnym wyrażeniom przysługuje prawdziwość polegająca na ich zgodności z rzeczywistością; między zdaniami istnieją zależności pozwalające z jednych prawd wyprowadzać inne. Logika jest teorią tych związków, a zatem, mówiąc najkrócej, jest teorią prawdy i stąd czerpie swoją uniwersalną ważność.

Przedstawiciele ujęć podmiotowych utożsamiają zasady logiki z zasadami rządzącymi aktywnością poznawczą podmiotu. Prawa logiki to według nich formalne schematy, na których wspiera się wszelka wiedza racjonalna, to zasady rozumu bądź, w wersji naturalistycznej, zasady pracy mózgu.

Jeszcze inni autorzy uważają logikę za ogólną teorię języka, rodzaj uniwersalnej gramatyki, dla uzasadnienia jej powszechnej prawomocności wskazując na podobieństwa pomiędzy językami naturalnymi, a mianowicie wspólne im cechy strukturalne i tożsamość formy logicznej wnioskowań w nich wypowiadanych.

Jak widać z tego pobieżnego i niewyczerpującego przeglądu, problem źródeł prawomocności praw logiki wywołuje kontrowersje. Poza sporem pozostaje jednak fakt powszechnej stosowalności logicznych zasad we wszystkich obszarach racjonalnego poznania, zarówno w zakresie metodologii badań, jak i w sferze komunikowania i krytyki wyników.

I.2. Logika a filozofia

Powiązania pomiędzy logiką a innymi dziedzinami wiedzy nie ograniczają się wszakże do jednostronnego oddziaływania tej pierwszej na metody pozostałych nauk. W niektórych przypadkach wpływy polegają na wzajemnej merytorycznej inspiracji. Nie sposób zwłaszcza przeoczyć roli, którą w ukonstytuowaniu się logiki jako samodzielnej dyscypliny naukowej odegrała matematyka. Formowała ona w dużej mierze metody i problematykę omawianej dziedziny przesądzając o jej współczesnym obliczu. Dostrzeżenie zbieżności pomiędzy zakresami zainteresowań tradycyjnej logiki i matematyki oraz zastosowanie języka matematycznego w logice legło u podstaw żywiołowego rozwoju tej dyscypliny w dwudziestym wieku. Ważnym czynnikiem było też zaangażowanie się logików w prace nad przezwyciężeniem trudności, jakie pojawiły się w matematyce na przełomie stuleci (np. paradoks Cantora 1899, paradoks Russella 1902). Proces matematyzowania logiki postąpił z czasem na tyle głęboko, że dziś posługiwanie się językiem symbolicznym, stosowanie technik matematycznych i matematyczna ścisłość dowodu stanowią w niej powszedni standard.

Niemałe znaczenie mają też zacieśniające się w ostatnich dekadach więzi z językoznawstwem, informatyką i badaniami z zakresu sztucznej inteligencji. Pomiędzy wymienionymi dyscyplinami a logiką odbywa się twórcza wymiana tematów badawczych, pomysłów i metod.

Usamodzielnienie się logiki jako odrębnej dyscypliny oraz impulsy płynące z innych nauk nie osłabiły jej tradycyjnych więzi z filozofią. Powiązania te są nadal wielostronne i głębokie, być może nawet głębsze niż kiedykolwiek wcześniej. Filozofia nie przestała być źródłem inspiracji dla logiki, logika natomiast zaczęła oddziaływać zwrotnie na filozofię, nie tylko użyczając jej swoich środków, ale też wzbogacając ją o nowe idee i rozstrzygnięcia o dużym znaczeniu filozoficznym.

Przyjrzyjmy się nieco bliżej pozycji, jaką zajmuje logika wobec filozofii.

I.2.1. Paidagogos

Logika jest dla filozofa wychowawcą (*paidagogos*). Kształtuje ona bowiem tego, kto ją poznaje, przekazując mu swój precyzyjny styl myślenia i mówienia. Rozwija w nim świadomość metodologiczną ucząc oceniać co jest potrzebne dla poprawnego wykonania takiej czy innej operacji myślowej (np. wnioskowania, klasyfikowania) i wyrabiając umiejętność rozpoznawania błędów, jakie można popełnić przy ich przeprowadzaniu.

Umie też otworzyć swojemu wychowankowi oczy na pułapki tkwiące w języku, przyzwyczaja go do definiowania pojęć, żąda, żeby mówił jasno i brał odpowiedzialność za konsekwencje swoich słów.

Jeden z najgłośniejszych filozofów naszego stulecia, K. R. Popper pisał: „prostota i klarowność to moralny obowiązek każdego intelektualisty: brak jasności jest grzechem, a pretensjonalność przestępstwem (...)."([10], s. 65). Takiego właśnie stylu filozofowania uczy logika, łatwo się o tym przekonać zaglądając do pism Łukasiewicza, Quine'a, Russella...

I.2.2. Organon

Filozofia jest dyscypliną bardzo ogólną i abstrakcyjną. Przedmioty jej rozważań, np. byt, prawda, dobro, z natury rzeczy nie poddają się badaniu eksperymentalnemu; myślenie odwołujące się do przykładów, analogii, wyczucia i zdrowego rozsądku często zawodzi. Umysł pozbawiony oparcia zaczyna grzęznąć w słowach. Przeciwdziałać temu może posłużenie się sprawdzoną i dającą pewność metodą. W filozofii jest nią właśnie logika. Od starożytności przywykło się uważać, że jest ona narzędziem (*organon*) filozofii. Jak wiadomo, nazwą *Organon* zatytułowano nawet zebrane pisma logiczne Arystotelesa. Już wtedy zdawano sobie sprawę, że logika może być pomocna w pracy filozofa i stanowić skuteczną ochronę przed błędami myślowymi. Przez długie wieki nie była ona jednak wystarczająco rozwinięta, by sprostać wszelkim wymaganiom w tym zakresie. Dopiero współcześnie stała się instrumentem na tyle doskonałym, by znaleźć w filozofii szersze i poważniejsze zastosowania. J. M. Bocheński podkreślał analogię pomiędzy wprowadzeniem do filozofii metod współczesnej logiki a przewrotem, jakiego dokonał Galileusz: „Wielkość Galileusza nie na tym przecież polega, że stworzył nową teorię fizykalną – wielu to zrobiło – lecz na tym, że sformułował ją w sztucznym języku, który pozwalał na manipulowanie bardzo abstrakcyjnymi pojęciami. W filozofii dokonała tego logika matematyczna." ([2], s. XX)

Oczywiście, kontrolowanie poprawności rozumowań nadal jest istotną funkcją logiki. Często staje się ona użyteczna, kiedy coś „nie wychodzi", kiedy myśl, zaplątana w sieci języka, zbacza niepostrzeżenie z właściwego toru lub od oczywistych z pozoru przesłanek dochodzi do niepożądanych wniosków. Zwykle w takich przypadkach pomocna okazuje się krytyczna analiza wywodów pod względem ich zgodności z prawami dedukcji, a także wyjaśnienie użytych pojęć.

Analiza logiczna wydaje również obfite owoce jako metoda rozjaśniania starych problemów oraz instrument interpretacji pojęć, argumentów i koncepcji filozoficznych. Umiejętnie odsłania nieraz potknięcia, luki, ukryte przesłanki rozumowań, wskazuje sposoby usunięcia tych usterek; ciekawe i płodne idee rekonstruuje formalnie oraz rozwija nadając im kształt, w którym mogą być poddane racjonalnej dyskusji. Przejrzystość i ścisłość nie są jedynymi zaletami rezultatów takiej działalności. Niejednokrotnie o wiele ważniejsze okazuje się sformułowanie nie wypowiedzianych wyraźnie przez autora (a może nawet nie przewidzianych) konsekwencji jego twierdzeń lub wyjaśnienie jak silnych założeń potrzeba dla udowodnienia tej czy innej tezy. Wspomnijmy też, że motywacje filozoficzne stają się niekiedy przyczyną opracowywania specjalnych narzędzi filozoficznych. I tak np. logika wielowartościowa Łukasiewicza miała pomóc w wyjaśnieniu pojęć w sporze indeterminizmu z determinizmem; impulsy płynące z filozofii przyczyniły się do powstania ontologii i mereologii Leśniewskiego. W latach siedemdziesiątych wyodrębnił się dział zwany logiką filozoficzną obejmujący rachunki logiczne służące do analizy pojęć filozoficznych. W jego ramach rozwijają się m.in. logiki epistemiczne (badające kategorie poznawcze), temporalne (zajmujące się pojęciami związanymi z czasem) i modalne, których przedmiotem są głównie pojęcia możliwości i konieczności.

I.2.3. Meros

W epoce hellenistycznej filozofowie spierali się, czy logika jest jedynie narzędziem filozofii, czy również jej częścią (*meros*). Dziś, kiedy stała się ona samodzielną nauką, kwestia ta nadal jest aktualna. Przesądzać muszą tu, rzecz jasna, nie tyle oczywiste związki natury historyczno-genetycznej, lecz istotne powiązania merytoryczne.

Można spotkać się z poglądem, że logika jest nie tylko „częścią", lecz wręcz podstawowym działem filozofii (np. Heinrich Scholz, Józef Maria Bocheński). Zgodnie z tym stanowiskiem, logika nie zajmuje się jakąś szczególną dziedziną rzeczywistości, lecz stosuje się do całego jej obszaru; jej twierdzenia mówią o wszelkich przedmiotach i ich najogólniejszych własnościach, a nie o przedmiotach i cechach jakiegoś szczególnego rodzaju. W tym sensie logika zasługuje na miano ontologii, której filozoficznego charakteru nie sposób kwestionować. Stanowisko utożsamiające logikę z ontologią z różnych powodów nie zyskało szerszej akceptacji. Nawet jednak jego przeciwnicy podkreślają, że badania prowadzone w logice bardzo często dotyczą zagadnień filozoficznych i że przyniosły już w tym zakresie wiele rezultatów o wielkiej doniosłości, dając podstawę do uznania logiki za część filozofii. Dla ilustracji przywołamy kilka wymownych przykładów.

Pierwszym z nich może być teoria typów Bertranda Russella. Powstała ona w celu przezwyciężenia logicznych antynomii i zbudowania obszernego systemu obejmującego całą matematykę. Z czasem zauważono jednak, że stanowi ona nowe sformułowanie (jak twierdzą niektórzy, nawet rozwiązanie) średniowiecznego problemu niejednoznaczności pojęcia bytu. Zbieżność ujawniła się nawet w terminologii: nazwa konstrukcji wprowadzonej dla zapobieżenia antynomiom, „systematyczna wieloznaczność", odpowiadała nazwie średniowiecznej teorii rozwiniętej w podobnym celu.

Uwagę filozofów przyciągnęło też twierdzenie Gödla o niezupełności odpowiednio bogatych teorii formalnych. Gödel wykazał, że w dostatecznie bogatych teoriach muszą istnieć prawdziwe zdania, których nie da się udowodnić na gruncie tych teorii. Pokazał też, że nie można udowodnić niesprzeczności takich teorii za pomocą środków, którymi one same dysponują. Wyniki Gödla dotyczyły matematyki i przede wszystkim właśnie w tej dziedzinie oddziałały. Zainspirowały również w filozofii szerszą dyskusję na temat granic poznania ludzkiego i natury umysłu. Mówiły bowiem bardzo wyraźnie, że nie jest możliwe zbudowanie jednej uniwersalnej teorii, wszechogarniającego systemu, o jakim marzyło wielu filozofów, o ile miałby on mieć taką postać, jak teorie, które badał Gödel. Na nieco innej płaszczyźnie twierdzenia Gödla prowadziły do wniosku, że żadna, nawet najdoskonalsza maszyna o skończonej strukturze wewnętrznej, produkująca wyłącznie zdania prawdziwe, nie może wyprodukować ich wszystkich, choćby działała bezbłędnie i nieograniczenie długo. Zawsze bowiem możliwe będzie wskazanie takiego zdania prawdziwego, którego nie potrafi ona udowodnić. Sprowokowało to ożywioną debatę na temat natury ludzkiego umysłu: czy jest on skomplikowaną maszyną wytwarzającą prawdziwe zdania (przekonania) czy też działa według innych, niemechanicznych praw? Jeżeli nie jest maszyną, to czym się od niej różni? Pytania te i związane z nimi kwestie szczegółowe nadal są przedmiotem kontrowersji.

Następny przykład omówimy nieco obszerniej. Otóż od bardzo dawna zdawano sobie sprawę z poważnych trudności, do jakich prowadzi omawiane wyżej naturalne pojęcie prawdy w przypadku pewnych zdań samozwrotnych, tj. takich, które mówią coś o samych sobie. Eubulides ze szkoły megarejskiej wskazał na ten problem w sławnej antynomii kłamcy. Formułowano ją na wiele różnych sposobów; w najbardziej zwięzłym ujęciu Savonaroli brzmi ona: *Hoc est falsum*, tzn. „To (zdanie, które właśnie wypowiadam) jest fałszem", żeby lepiej zrozumieć na czym polega kłopot, rozważmy następujące zdanie Z:

Zdanie Z jest fałszywe.

Każde zdanie oznajmujące, o ile jest poprawne i jednoznacznie wskazuje przedmiot lub sytuację, o której coś orzeka, zgodnie z naturalnym odczuciem winno być prawdziwe bądź fałszywe. Przypuśćmy tedy, że zdanie Z jest prawdziwe. Wobec tego, zgodnie z tezą (T), jest tak, jak ono głosi, zatem Z jest fałszywe, a skoro tak, to nie jest zarazem prawdziwe. Tak więc otrzymaliśmy sprzeczność: jeżeli zdanie Z jest prawdziwe, to nie jest prawdziwe. Trzeba więc zbadać drugi możliwy przypadek. Jeżeli zdanie Z jest fałszywe, to prawdziwa jest jego negacja „Nieprawda, że zdanie Z jest fałszywe". Zatem jest tak, jak mówi owa negacja, czyli Z nie jest fałszywe. Znowu więc dochodzimy do sprzeczności: jeżeli Z jest fałszywe, to Z nie jest fałszywe.

Powyższy paradoks od z górą dwóch tysięcy lat wprawiał w konfuzję najtęższe umysły filozoficzne. Starożytne przekazy mówią nawet o niejakim Philetasie z Kos, który nie umiejąc się uporać z Eubulidesową zagadką zrozpaczony rzucił się ze skalistego urwiska do morza. Na ogół jednak radzono sobie z tymi trudnościami w sposób bardziej prozaiczny, upatrując ich źródła w niedoskonałości języka i spychając na margines rozważań. Ich znaczenie gwałtownie wzrosło wraz z rozwojem teorii formalnych. Przyjmuje się w nich tzw. prawo przepełniania, zgodnie z którym ze sprzeczności można wywnioskować dowolne zdanie (*ex contradictione quodlibet fit*). Teoria „zakażona" sprzecznością staje się poznawczo jałowa; nie warto poszukiwać prawdy tam, gdzie żadne zdanie nie jest fałszywe. Łatwo teraz zrozumieć, że teoria, która mogłaby się wypowiadać na temat prawdziwości i fałszywości zdań sformułowanych w jej własnym języku prowadziłaby do paradoksu kłamcy, a tym samym zawierałaby sprzeczność i stawałaby się bezwartościowa. Trudności związanych z antynomią kłamcy nie można już było zlekceważyć. Stały się one zresztą jeszcze bardziej wyraźne po wskazaniu kolejnych antynomii semantycznyh m.in. przez Grellinga oraz Richarda[1].

Pokonanie tych trudności stało się możliwe dzięki Alfredowi Tarskiemu. Swoją teorię prawdy oparł on na idei odróżnienia stopni języka. Na najniższym poziomie znajduje się język pierwszego stopnia (przedmiotowy), nazwijmy go L. Metajęzykiem w stosunku do L jest język służący do opisu L, a zatem bogatszy od niego język zawierający nazwy wyrażeń opisywanego języka (tworzone np. za pomocą cudzysłowu), predykaty semantyczne, czyli orzeczniki opisujące stosunki pomiędzy wyrażeniami L a tym, do czego się one odnoszą, reguły znaczeniowe, składniowe i inne. Następne „piętro" to język opisujący metajęzyk, czyli meta-metajęzyk itd. Odróżnienie stopni języka skutecznie zapobiega temu, by jakieś wyrażenie stwierdzało cokolwiek o samym sobie. Tym samym żaden język z tej hierarchii nie pozwala mówić o prawdziwości i fałszywości jakichkolwiek zdań należących do niego samego. Wyrażenie „prawdziwy", jako predykat semantyczny, zawsze należy do języka o stopień wyższego w stosunku do tego, w którym wypowiada się zdania oceniane pod względem prawdziwości.

Rozwiązanie to umożliwiło Tarskiemu sformułowanie poprawnej i ogólnej definicji prawdy, odpowiadającej naturalnemu rozumieniu tego pojęcia, lecz nie narażonej na antynomie.

[1] Jako przykład podajemy antynomię Grellinga. Rozróżnijmy wyrażenia autosemantyczne (odnoszące się do samych siebie, np. „wielosylabowy" jest wielosylabowy) i heterosemantyczne (np. wyraz „jednosylabowy" jest wielosylabowy). Antynomia powstaje w przypadku orzecznika „heterosemantyczny", jeżeli zapytamy, czy jest on heterosemantyczny.

Rozważania Tarskiego dotyczyły wyłącznie teorii formalnych. Ich wyniki zyskały jednak szeroki rozgłos i zainspirowały wielu filozofów. Wpłynęły w istotny sposób na obraz filozofii w XX wieku; ożywiając przekonanie, że możliwe jest „naprawienie" klasycznej koncepcji prawdy również na terenie języka naturalnego, przyczyniły się do rehabilitacji zdroworozsądkowego pojęcia prawdy jako zgodności z faktami.

Następne lata przyniosły nowe definicje prawdy, uwzględniające te specyficzne cechy języka naturalnego, które uniemożliwiały bezpośrednie zastosowanie teorii Tarskiego w jego obszarze (brak „rozwarstwienia" języka, częste występowanie wypowiedzi samozwrotnych, trudności z ich identyfikacją jedynie na podstawie kryterium gramatycznego itd.).

Warto również wspomnieć o badaniach J. Łukasiewicza nad zasadą sprzeczności i o idei para(in)konsystentności, której dały one początek. Od czasów Arystotelesa przyznawano zasadzie sprzeczności miejsce naczelnego prawa myślenia; uważano ją za prawdziwą samą przez się, niepodważalną i najbardziej pewną wśród wszystkich zasad. W sformułowaniu ontologicznym głosi ona, że żaden przedmiot nie może tej samej cechy zarazem posiadać i nie posiadać; w wersji logicznej stwierdza, iż dwa sądy, z których jeden przypisuje przedmiotowi pewną cechę, a drugi mu jej odmawia, nie mogą być zarazem prawdziwe; wreszcie jako prawo psychologiczne zasada sprzeczności mówi, że dwa przekonania sprzeczne nie mogą występować jednocześnie w tym samym umyśle. Jan Łukasiewicz poddał krytyce stanowisko Arystotelesa kwestionując absolutny charakter zasady sprzeczności we wszystkich trzech płaszczyznach. Jako przykład zasady prostszej i bardziej oczywistej podał zasadę tożsamości: każdy przedmiot posiada tę cechę, którą posiada. Uzasadnił pogląd, że zasada sprzeczności, zarówno w wersji logicznej jak i ontologicznej, nie jest prawdziwa sama przez się i wymaga dowodu. Jest on możliwy, o ile przyjmie się definicję przedmiotu wykluczającą posiadanie przezeń cech sprzecznych; założenie takie byłoby jednak arbitralne, ponieważ nie można *a priori* stwierdzić, że wszystkie obiekty są niesprzeczne. Tak więc w ujęciu Łukasiewicza omawiana zasada nie jest już prawem podstawowym i nieusuwalnym: poprawna dedukcja jest możliwa również bez niej.

Ideę stworzenia takiego systemu podjął Stanisław Jaśkowski; opracował on pierwszy rachunek logiczny tolerujący lokalnie sprzeczność.

Badania Łukasiewicza i Jaśkowskiego podważyły jedno z fundamentalnych przeświadczeń filozoficznych, mianowicie przekonanie, że zasada sprzeczności leży u samych podstaw ludzkiego myślenia, a usunięcie tego fundamentu i dopuszczenie choćby jednej sprzeczności „psuje" całą budowlę. Wprawdzie już Heraklit podważał znaczenie zasady sprzeczności, można jednak sądzić, iż szedł zbyt daleko twierdząc, że „spór (tu: sprzeczność) jest ojcem wszystkiego". Zaletą idei parakonsystentności jest umiar; sprzeczność nie jest tu eliminowana za wszelką cenę, ale też, dzięki zrezygnowaniu z zasady przepełniania, nie staje się czymś powszechnym. Odpowiada to strukturze ludzkich przekonań: trudno byłoby chyba znaleźć człowieka o przekonaniach całkowicie spójnych, ale też, z drugiej strony, niełatwo spotkać kogoś, kto zgodziłby się, że z powodu jakiejś lokalnej, nieraz zupełnie nieważnej sprzeczności, jego wiedza o świecie jest zupełnie bezwartościowa. Ta zbieżność otwiera przed systemami logiki para(in)konsystentnej perspektywy wielorakich zastosowań.

Wyliczenie wszystkich filozoficznie istotnych osiągnięć logiki nie byłoby tutaj możliwe; powyższe przykłady stanowią tylko niewielki fragment długiej, ciągle zresztą otwartej, listy. Wystarczają one jednak dla uzasadnienia tezy o głębokim merytorycznym powiązaniu logiki i filozofii i dla zobrazowania twórczego udziału badań logicznych w rozwoju problematyki filozoficznej. Badania z zakresu szeroko rozumianej logiki filozoficznej prowadzone są również na naszym Uniwersytecie. Grupa pod kierownictwem prof. Jerzego Perzanowskiego zajmuje się tradycyjnymi i współczesnymi problemami w tej dziedzinie. Niektóre rezultaty znaleźć można w publikacjach Katedry Logiki UMK, np. w [8].

Rozdział II

Formalizacja

Świat jest. Jaki on jest, niech każdy sam ustala. Świat jest opisany (lub omówiony) tym bądź innym językiem naturalnym.

Logika dotyczy nie tego, co w świecie się dzieje, lecz mówi o strukturze języka. (Być może z tego wynika, że logika dotyczy struktury świata – to jednak zależy od dodatkowych przesłanek filozoficznych o stosunku struktury świata do struktury języka naturalnego.) W tym celu logika posługuje się własnym językiem: „tłumaczy" ona konstrukcje języka naturalnego na swój język. Inaczej mówiąc, formalizuje konstrukcje językowe. Na początku trzeba ten język logiki poznać.

Ściśle mówiąc, nie mamy tu do czynienia z jednym tylko językiem logiki, czy też z językiem jednej tylko logiki, lecz mamy do wyboru całkiem sporą ich ilość. Rzecz w tym, że im lepiej dany język formalny nadaje się do odzwierciedlenia przeróżnych niuansów języka naturalnego, tym bardziej wymagający i rozbudowany jest zwykle aparat metamatematyczny potrzebny do badania takiego formalnego języka. Na ogół jest i na odwrót: im prostszy język formalny, tym prostszej potrzebujemy logiki.

II.1. Zasady formalizacji

Na początku warto ograniczyć do minimum trudności techniczne (polegające na zawiłościach aparatu matematycznego związanego z używaną logiką). Zgodzimy się zatem na bardzo niedoskonałe „tłumaczenie" z języka naturalnego na język formalny. Taka formalizacja charakteryzuje się różnymi ograniczeniami.

Po pierwsze, bierzemy pod uwagę tylko polskie zdania oznajmujące poprawnie zbudowane. Zarówno pytania, jak i rozkazy czy sugestie, czy też zdania niezgodne z regułami gramatyki nie są rozpatrywane.

Na tym nie koniec. Założymy dalej, że każde takie zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Założenie to składa się z dwóch części: nie ma zdań zarazem prawdziwych i fałszywych oraz nie ma zdań, które nie byłyby ani prawdziwe, ani fałszywe. Co do pierwszej części, chyba dość łatwo się zgodzić, mimo iż zdania typu „alkohol pomaga w trawieniu" mogą prowadzić do pewnych wahań.

Gorzej zaś z drugą częścią. Już przeszło 2000 lat temu Arystoteles, stojąc na skalistym brzegu morza i patrząc na zachód słońca, rozmyślał nad prawdziwością zdania „jutro w zatoce tej odbędzie się bitwa morska". Nazajutrz okaże się, czy zdanie to jest prawdziwe. Jak się zaś sprawa ma tego właśnie wieczora? Raczej skłonni jesteśmy uznać, iż prawdziwość tego zdania jest jeszcze nieustalona: nie jest to zdanie ani prawdziwe, ani też fałszywe.

Można natomiast przyjąć, że już tego wieczora zdanie jest prawdziwe (bądź fałszywe) – tylko my nie wiemy, jakie ono jest. To stanowisko opiera się na następującym założeniu: każde z rozpatrywanych zdań ma dokładnie jedną z dwóch możliwych wartości logicznych, *prawdę* lub *fałsz*. Założenie to nazywamy *zasadą dwuwartościowości.*

Zdania oznajmujące, które składają się z prostszych zdań oznajmujących, nazywamy *złożonymi.* Niezłożone zdania określa się mianem *elementarnych.*

Po trzecie założymy, że wartość logiczna każdego zdania oznajmującego jest funkcją wartości logicznych składowych zdań elementarnych. Z przyjęcia takiego założenia wynika, że zamiana zdań składowych o tej samej wartości logicznej (nie bacząc na ich treść) nie wpływa na wartość zdania złożonego.

Jest to kolejne odstępstwo od normalnego użycia języka. O ile zdanie „Przestępca uciekł, a posterunkowy Michalski go zatrzymał" może służyć jako uzasadnienie wyróżnienia, które otrzyma policjant, to nie odgrywa tej roli zdanie „Michalski go zatrzymał, a przestępca uciekł" , mimo że powinniśmy je uznać za równie prawdziwe.

Postulat, w myśl którego wszystkie nieelementarne zdania są składane zgodnie z powyższym założeniem, nazywamy *zasadą ekstensjonalności.*

Każda formalizacja spełniająca trzy wskazane wyżej postulaty jest *zdaniowa* (bo nic prócz zdań oznajmujących nie bierze pod uwagę) oraz *klasyczna* (ze względu na zasadę dwuwartościowości oraz zasadę ekstensjonalności)[1]. Jaki będzie obraz, możliwie najwierniejszy, języka polskiego w ramach klasycznej formalizacji zdaniowej?

II.2. Język formalny

Zdania elementarne stanowią dla takiej formalizacji jednostki najmniejsze, coś na podobieństwo atomów. Ich formalnym odpowiednikiem będą atomy języka formalnego: *zmienne zdaniowe*, które tworzą zbiór AT. Tak jak każdy składnik języka formalnego, zmienne zdaniowe są oznaczane symbolicznie małymi literami ze środka alfabetu: $p, q, r, p_1, p_2, \ldots$

Treść zdania oznajmującego znika przy formalizacji, zachowuje się tylko wartość logiczna. Zatem zmienne zdaniowe nie są nośnikami treści, lecz wartości logicznej, symbolizowanej przez 1 (*prawda*) lub 0 (*fałsz*).

Zdania elementarne są składane w zdania o bardziej skomplikowanej strukturze za pomocą niezliczonej ilości spójników języka polskiego. Z całej tej wielości wybieramy tylko dwa – a mianowicie „i" oraz „nie" – i podamy ich logiczne odpowiedniki.

Spójnikowi „i" odpowiada w języku formalnym koniunkcja, symbolizowana przez $\wedge$. Zgodnie z zasadą ekstensjonalności wartość logiczną zdania złożonego ustala się na podstawie wartości zdań składowych. Koniunkcja determinuje wartość formalnego odpowiednika zdania złożonego za pomocą spójnika „i" na podstawie wartości formalizacji zdań składowych. Innymi słowy, koniunkcja jest po prostu funkcją (w sensie jednoznacznej zależności) wartości logicznych zdań składowych, dającą wynik równy wartości logicznej formalizacji zdania złożonego. Znaczeniem koniunkcji jest właśnie ta funkcja. Prowadzi to do określenia następującej tablicy prawdziwościowej:

[1] Nowoczesna logika wypracowała cały szereg rachunków logicznych dla formalizacji nie respektujących tych postulatów. Formalizacje te znacznie lepiej nadają się do formalnego odzwierciedlenia struktur języka naturalnego. Ceną za to jest – jak już wspominaliśmy – bardziej skomplikowany rachunek logiczny.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Podobnie obchodzimy się z drugim spójnikiem, którego formalny odpowiednik zwany jest *negacją*, a symbolem jego jest $\neg$:

p	$\neg p$
1	0
0	1

W zasadzie można by zadowolić się tymi dwoma spójnikami logicznymi: wszystkie pozostałe dwuwartościowe spójniki ekstensjonalne można zdefiniować za pomocą negacji i koniunkcji (patrz Dodatek 2 o postaciach normalnych).

Tak ubogi język logiczny komplikuje jednak jeszcze bardziej formalizację wypowiedzi w języku naturalnym.

Dlatego wprowadzimy trzy dalsze spójniki logiczne: *alternatywę* o symbolu $\vee$, *implikację* o symbolu $\rightarrow$ oraz *równoważność* o symbolu $\equiv$. Mają one odpowiadać (o tyle, o ile jest to możliwe przy niedoskonałych środkach, jakimi na razie dysponujemy) kolejno wyrażeniom języka polskiego „...lub ...”, „jeśli ..., to ...” oraz „...wtedy i tylko wtedy, gdy ...”. Przyjmujemy dla nich następujące tabelki zero-jedynkowe:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

Znamy teraz wszystkie elementy, z których składa się język formalny. Pisząc je jeden za drugim utworzymy ciągi znaków. Wśród tych ciągów wybieramy te, które są *poprawnie zbudowane*, tj. odpowiadające strukturze zdań języka naturalnego. Ciągi te nazywamy *formułami*. Ścisłe określenie tego pojęcia jest podane z nieomal typową dla nauk formalnych nieudolnością stylistyczną w następnych dwóch definicjach.

Definicja 1 Formułą *nazywamy każdy element zbioru wszystkich formuł.*

$\boxed{DEF}$

Definicja 2 Zbiorem wszystkich formuł [symb.: FOR] *nazywamy najmniejszy zbiór, który zawiera*

1^o *wszystkie zmienne zdaniowe, a nadto*

2^o *wszystkie ciągi znaków* $(\neg H)$, $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$ *oraz* $(H \equiv G)$, *o ile zarówno H jak i G są elementami tego zbioru.*

$\boxed{DEF}$

Każda formuła zdefiniowana w powyższy sposób składa się z podformuł, tzn. z takich ciągów znaków, które same stanowią formuły. Formuła $(p \rightarrow ((\neg q) \vee r))$ składa się zatem z podformuł p oraz $((\neg q) \vee r)$, przy czym druga podformuła składa się z dalszych podformuł $(\neg q)$ i r, a $(\neg q)$ zawiera podformułę q. Cała formuła – zgodnie z powyższym określeniem – jest swoją podformułą. Zatem zbiór wszystkich podformuł dla powyższej formuły równa się $\{(p \rightarrow ((\neg q) \vee r)); ((\neg q) \vee r); (\neg q); p; q; r\}$. ścisła definicja pojęcia podformuły brzmi następująco:

Definicja 3 *Formułę G nazywamy* podformułą *formuły H, jeśli zachodzi jeden z poniższych przypadków:*

1^o *dla $H \in AT$ mamy: $G = H$;*

2^o *dla $H = \neg F$ mamy: $G = H$ albo G jest podformułą formuły F;*

3^o *dla $H = (F_1 \phi_2 F_2)$ mamy: $G = H$ albo G jest podformułą formuły F_1 albo G jest podformułą formuły F_2 (gdzie ϕ_2 jest spójnikiem dwuargumentowym).*

$\boxed{DEF}$

Definicja 3 jest przykładem definicji rekurencyjnej. Wbrew pozorom takie definicje nie wyjaśniają danego pojęcia odwołując się do niego samego (co byłoby błędnym kołem), lecz stopniowo sprowadzają wszelkie możliwe przypadki do przypadków coraz to bardziej elementarnych. Najbardziej elementarny przypadek (w którym H jest zmienną zdaniową) określa się oddzielnie. Podformułą *właściwą* formuły H nazywamy każdą jej podformułę różną od H. Definicja 3 pozwala na proste określenie pojęcia *spójnika głównego* danej formuły, co za chwilę nam się przyda.

Definicja 4 *Spójnik dwuargumentowy* ϕ_2 *jest* spójnikiem głównym *formuły* H, *o ile* H *jest postaci* $F\phi_2 G$. *Spójnik jednoargumentowy* ϕ_1 *jest* spójnikiem głównym *formuły* H, *o ile* H *jest postaci* $\phi_1 F$. $\boxed{DEF}$

Kierując się definicjami 1 i 2 otrzymujemy czasami bardzo dużo nawiasów w jednej formule. Utrudnia to odczytywanie niektórych formuł. Należy się więc zastanowić, w jaki sposób można uprościć zapis. Celem nawiasów jest zapewnienie strukturalnej jednoznaczności formalnego wyrażenia. Sens wypowiedzi nierzadko zależy od czegoś więcej, niż od występujących słów i ich kolejności. Jest to zjawisko dobrze nam znane z języka potocznego. Po zadanym pytaniu: „Czy należy go oszczędzić?" odpowiedź: „Nie zabijaj!" brzmi zupełnie inaczej, niż polecenie: „Nie, zabijaj!". Mowa pisana zna dużo możliwości jednoznacznego ustalenia sensu danej wypowiedzi: przecinki, myślniki itd. nadają wewnętrzną strukturę jednoznacznie ustalającą sens tej formuły.

Zgodnie z dotychczasowymi ustaleniami jedynym środkiem służącym do tego celu w języku formalnym jest właśnie użycie nawiasów. Można natomiast stopniować siłę wiązania spójników logicznych. Umówmy się więc, że największą siłę wiązania posiada negacja. Najmocniejszym spójnikiem dwuargumentowym jest koniunkcja, a po niej następują coraz słabsze: alternatywa, implikacja oraz równoważność. Nawiasy obejmujące podformułę, której spójnik główny jest mocniejszy od spójnika łączącego ją z inną podformułą, są *zbędne*. Np. nawiasy w formule $p \to (q \wedge r)$ są zbędne, w $p \wedge (q \to r)$ zaś nie. Nawiasy są zbędne w szeregach koniunkcji i alternatyw: $p \wedge q \wedge r$ oraz $p \vee q \vee r$, ponieważ są one wyrażeniami o jednoznacznej strukturze. Spójnikiem głównym jest dowolna spośród tych koniunkcji względnie alternatyw. Nawiasy zewnętrzne formuły są zbędne, gdyż ich opuszczenie nie wprowadza dwuznaczności. Umowę upraszczającą zapis formuły, zwana *konwencją nawiasów*, można teraz zwięźle sformułować: „Należy opuszczać nawiasy zbędne."

Rachunek logiczny można rozumieć jako pewną klasę formuł prawdziwych. Poznaliśmy już klasyczny język zdaniowy, wiemy jakie, ciągi znaków są poprawnie zbudowane, tzn. jakie spośród wszystkich ciągów symboli tworzą zbiór formuł FOR. By określić system logiczny zwany Klasycznym Rachunkiem Zdań [symb.: KRZ], pozostaje nam jeszcze określić pojęcia formuły prawdziwej.

II.3. Modele

Formuły są odpowiednikami zdań oznajmujących. Zdanie oznajmujące mówi coś o świecie. Twierdzi ono, że zaistniała taka a taka sytuacja, że zachodzi w świecie taki a taki fakt. Zdanie jest prawdziwe (zgodnie z tzw. klasycznym ujęciem pojęcia prawdy), jeśli „jest tak, jak ono mówi". Innymi słowy, prawda jest to zgodność opisu i tego, co zostało opisane. Zatem zdanie prawdziwe opisuje (realny) fakt, czyli sytuację, która w świecie zachodzi, zaś fałszywe mówi o sytuacji fikcyjnej.

Początek słynnego dzieła Ludwiga Wittgensteina zatytułowanego *Tractatus logico-philosophicus* brzmi: „świat jest wszystkim, co jest faktem". Wobec tego całość zdań prawdziwych tworzy obraz świata, czyli kompletny opis, czy też model świata.

Prawdziwym zdaniom elementarnym odpowiadają zmienne zdaniowe, którym przyporządkowana została wartość 1. Każde przyporządkowanie zmiennym zdaniowym wartości logicznych 0 i 1 nazywamy *wartościowaniem*. Nieco generalizując powyższą analogię można powiedzieć, że ogół zmiennych zdaniowych, którym została przyporządkowana wartość 1 stanowi formalno-logiczny model świata. Pójdziemy jeszcze dalej i zamiast o wartościowaniach będziemy w ramach klasycznego rachunku zdań czasami mówili o *modelach*: pojęcia modelu i wartościowania są synonimami w klasycznym rachunku zdań.

Formułę nazywamy *prawdziwą dla danego wartościowania* dokładnie wtedy, gdy wartość logiczna całej formuły (policzona według tablic zero-jedynkowych na podstawie wartości występujących w formule zmiennych zdaniowych) równa się 1. Inaczej mówimy, że wartościowanie *weryfikuje* daną formułę lub, że jest *modelem dla* danej formuły. Zbiór formuł jest prawdziwy dla danego wartościowania, o ile każda należąca do niego formuła jest przy tym wartościowaniu prawdziwa. Odpowiednio, model jest modelem dla zbioru formuł, jeśli jest modelem dla każdej formuły z tego zbioru. Zbiór formuł posiada model, jeśli istnieje dla niego model.

Intuicja za tym stojąca podpowiada, że prawdziwość formuły dla danego wartościowania jest równoznaczna z jej prawdziwością w danym (poprzez to właśnie wartościowanie) modelu świata. Mówiąc nieco swobodnie, formuła prawdziwa dla pewnego wartościowania jest formułą prawdziwą w danym świecie. Na ogół nie będzie ona prawdziwa w innym świecie, czyli dla innego wartościowania zmiennych zdaniowych, tzn. w innym modelu.

Niektóre formuły są prawdziwe dla dowolnego wartościowania zmiennych.

Definicja 5 *Formułę prawdziwą dla każdego wartościowania zmiennych nazywamy* tautologią *klasycznego rachunku zdań.* $\boxed{DEF}$

Tautologie są to więc formuły prawdziwe niezależnie od wartości logicznej występujących w nich zmiennych. Dowolne wartościowanie jest modelem dla takiej formuły, czyli jest to formuła prawdziwa w dowolnym modelu. Przy okazji zaznaczmy, że formuła fałszywa dla dowolnego wartościowania zmiennych jest nazywana *kontrtautologią* lub *kontradykcją*. Formuły nie będące ani tautologiami, ani kontradykcjami nazywamy *kontyngentnymi*.

Pojęcie tautologii można przeto rozumieć następująco: reprezentuje ona takie zdanie, które jest prawdziwe w dowolnym modelu rzeczywistości. Zgodnie z poglądem Leibniza, modele, czyli niesprzeczne, lecz kompletne opisy fikcyjnych sytuacji, można traktować jako możliwe światy. Tautologia odpowiada więc zdaniom prawdziwym w każdym możliwym świecie, niezależnie od tego, „jaki ten świat jest”. Skoro tak, to żadnego świata nie wyróżnia spośród innych: fakt, że dana tautologia jest prawdziwa w jakimś modelu, nic charakterystycznego o tym modelu nie ustala. W tym sensie można powiedzieć, że tautologie nic o świecie nie mówią.

Mimo to tautologie bynajmniej nie są bezwartościowe. Stanowią one (w klasycznym rachunku zdań) fundament tzw. poprawnych form rozumowań.

Rozumowanie traktujemy jako przechodzenie od przesłanek do wniosku. Rozumowanie jest *poprawne*, jeżeli prawdziwość wniosku wynika z prawdziwości przesłanek. Formalny odpowiednik rozumowania, to reguła logiczna.

Definicja 6 *Regułę nazywamy* poprawną *(niezawodną), jeśli prawdziwość założeń gwarantuje prawdziwość konkluzji.* $\boxed{DEF}$

Innymi słowy, nie może się zdarzyć fałszywa konkluzja przy prawdziwych założeniach. Zauważmy, że poprawność reguły gwarantuje prawdziwość konkluzji tylko pod warunkiem, że prawdziwe są założenia. Nie jest zaś sprawą logiki ustalanie, czy założenia danego rozumowania są prawdziwe. Wspomniana rola tautologii wiąże się z następującą zależnością: Niech $H_1, H_2, \ldots H_n \;/\; F$ oznacza regułę o założeniach H_1, H_2, $\ldots H_n$ i o konkluzji F. Łatwo można się przekonać, że reguła ta jest poprawna dokładnie wtedy, gdy formuła $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \to F$ jest tautologią.

Pojęcie reguły poprawnej można rozszerzyć do bardziej generalnego pojęcia.

Definicja 7 *Formuła H* wynika *ze zbioru formuł X* [symb.: $X \models H$] *wtw*[2] *każdy model dla X jest modelem dla H.* $\boxed{DEF}$

Reguła jest zatem poprawna dokładnie wtedy, jeśli wniosek wynika z przesłanek reguły.

Pojęcie wynikania można rozumieć jako relację zachodzącą pomiędzy zbiorami formuł oraz pojedynczymi formułami. Relacja ta ma szereg ciekawych własności. By je łatwiej sformułować, wprowadzimy jedno dalsze oznaczenie[3]:

$$C_1(X) =_{df} \{H \in FOR;\ X \models H\}.$$

Za pomocą tego oznaczenia możemy zapisać zbiór tautologii jako $C_1(\emptyset)$, gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty. Zachodzi następujący lemat:

---

[2] „wtw" jest skrótem dla zwrotu „wtedy i tylko wtedy, gdy".

[3] Podstawowe wiadomości z teorii mnogości i wyjaśnienie odpowiednich symboli można znaleźć w dodatku czwartym.

Lemat 1
Dla dowolnych wartościowań φ oraz zbiorów formuł X, jeśli $\varphi(X) = 1$, to $\varphi(C_1(X)) = 1$.

Dowód: Niech φ będzie dowolnym wartościowaniem, X dowolnym zbiorem formuł, dla których zachodzi $\varphi(X) = 1$ oraz niech H będzie dowolną formułą, taką że $H \in C_1(X)$. Zatem z określenia zbioru $C_1(X)$ wynika, że $\varphi(H) = 1$. Skoro tak jest dla dowolnych elementów zbioru $C_1(X)$, przeto $\varphi(C_1(X)) = 1$.
$\boxed{LEM}$

Udowodnimy obecnie, że relacja $\models$ jest zwrotna, monotoniczna oraz idempotentna. Własności te są zdefiniowane w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 1
1^o *Dla dowolnych zbiorów X zachodzi: $X \subseteq C_1(X)$* *(zwrotność)*

2^o *Dla dowolnych $X \subseteq Y$ zachodzi $C_1(X) \subseteq C_1(Y)$* *(monotoniczność)*

3^o *Dla dowolnych X zachodzi $C_1(C_1(X)) = C_1(X)$* *(idempotentność)*

Dowód: *ad* 1^o Zgodnie z określeniem, $C_1(X)$ składa się ze wszystkich formuł, które są weryfikowane przez dowolne wartościowanie, będące modelem dla każdej formuły z X. Zatem dowolna formuła z X należy do $C_1(X)$.

ad 2^o Niech $H \in C_1(X)$, czyli H jest weryfikowane przez dowolny model dla X. Skoro $X \subseteq Y$, to każdy model dla Y jest tym bardziej modelem dla X. To znaczy, że H jest weryfikowane przez każdy model dla Y, czyli należy do $C_1(Y)$. Z dowolności H otrzymamy $C_1(X) \subseteq C_1(Y)$.

ad 3^o Pokażemy zawieranie w obie strony. Pierwsze z nich, $C_1(X) \subseteq C_1(C_1(X))$, wynika z 1^o i 2^o.

Wykażemy teraz, że $C_1(C_1(X)) \subseteq C_1(X)$. Niech zatem $H \in C_1(C_1(X))$, czyli dla wszystkich wartościowań φ mamy:

$$\varphi(C_1(X)) = 1 \Longrightarrow \varphi(H) = 1 .^4 \qquad (\Delta)$$

[4] Symbol $\Longrightarrow$ jest oznaczeniem metajęzykowym, które należy czytać: *jeśli ..., to...*, rozumieć zaś jak zwyczajną implikację; analogicznie dalej symbol $\Longleftrightarrow$ odnosi się do metajęzykowej równoważności.

Niech φ^* będzie dowolnym wartościowaniem, dla którego zachodzi $\varphi^*(X) = 1$. Wtedy na podstawie lematu 1 otrzymamy

$$\varphi^*(C_1(X)) = 1.$$

A zatem na mocy założenia $\varphi^*(H) = 1$ (skoro $\triangle$ zachodzi dla wszystkich wartościowań, więc w szczególności dla φ^*). Z dowolności wartościowania φ^* wynika $H \in C_1(X)$.

$\boxed{THM}$

Rozdział III

Aksjomatyzacja

Pojęcie tautologii wyodrębnia formuły logicznie prawdziwe. W historii logiki klasa tych formuł została scharakteryzowana w inny sposób, a mianowicie w ramach tzw. systemu aksjomatycznego. Przez *aksjomat* starożytni rozumieli formułę logiczną, której prawdziwość jest samo przez się zrozumiała. Wierzyli, że w naturalny sposób istnieje jakaś grupa tych aksjomatów i że jest ona dostępna przez odpowiednią kontemplację filozoficzną. Z aksjomatów wyprowadzali wnioski za pomocą ściśle określonych reguł. Reguły miały taką konstrukcję, by wnioski były nie mniej prawdziwe niż aksjomaty, z tym że być może ich prawdziwość była mniej oczywista. Dziś byśmy powiedzieli, że wynikają z aksjomatów za pomocą reguł poprawnych. Całość aksjomatów i wniosków z nich wynikających tworzy klasę formuł prawdziwych, czy też: twierdzeń, i wyznacza w ten sposób system logiczny.

III.1. Aksjomaty

Pojęcie aksjomatu i – co za tym idzie – systemu logicznego uległo znacznej transformacji w ciągu tysiącleci. Aksjomaty, traktowane dziś jako odpowiednio dobrane generatory, wraz z takimi czy innymi poprawnymi regułami generują twierdzenia. Otwiera nam to drogę do badania różnych aksjomatyk wyznaczających jeden system logiczny. I tak istnieje obecnie szeroka klasa systemów aksjomatycznych wyznaczających prawdziwe formuły klasycznego rachunku zdań. W dalszej części przedstawiamy jeden system aksjomatów pochodzący od Davida Hilberta i Wilhelma Ackermanna. Składa się z 15 schematów aksjomatów i jednej reguły. Są one uporządkowane w pięciu grupach, każda grupa dotyczy jednego spójnika. Ustalają one, jakie sposoby użycia danego spójnika w formułach uznaje się za prawidłowe. W ten niejawny sposób aksjomaty charakteryzują spójniki logiczne, podobnie, jak były one uprzednio scharakteryzowane za pomocą wartościowań (w formie tablic logicznych). Zaczynamy od implikacji:

1. $H \to (F \to H)$
2. $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$
3. $(H \to (H \to F)) \to (H \to F)$

4. $H \wedge F \to H$
5. $H \wedge F \to F$
6. $(H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to F \wedge G))$

7. $H \to H \vee F$
8. $F \to H \vee F$
9. $(H \to F) \to ((G \to F) \to (H \vee G \to F))$

10. $(H \equiv F) \to (H \to F)$
11. $(H \equiv F) \to (F \to H)$
12. $(H \to F) \to ((F \to H) \to (H \equiv F))$

13. $(H \to F) \to (\neg F \to \neg H)$
14. $H \to \neg\neg H$
15. $\neg\neg H \to H$

Ściślej mówiąc, powyższe aksjomaty są właściwie schematami aksjomatycznymi. Należy to rozumieć następująco: na miejscu H, F i G można w powyższych wyrażeniach podstawić dowolne formuły. I tak formuły $\neg\neg p \to p$, $\neg\neg\neg p \to \neg p$ oraz $\neg\neg(p \wedge q) \to (p \wedge q)$ wszystkie podpadają pod jeden i ten sam schemat o numerze 15. Każda z nich jest więc aksjomatem. Przeto powyższa lista składa się z nieskończenie wielu aksjomatów. Pamiętając o tym, będziemy zawsze wtedy, kiedy nie prowadzi to do nieporozumień, mówili o 15 aksjomatach systemu Hilberta–Ackermanna.

III.2. Reguła dowodzenia

Korzystanie ze schematów aksjomatów ma tą zaletę, że bardzo upraszcza zbiór potrzebnych reguł wnioskowania. Wystarczy jedna reguła, tzw. *reguła odrywania*, lub inaczej *modus ponens* (symbolicznie MP):

$$\frac{H \to F, H}{F}.$$

Dzięki tej regule możemy z aksjomatów wyprowadzać dalsze formuły prawdziwe. Oto przykład:

Przykład 1
Wykażemy, że $H \to H$ jest formułą prawdziwą. Rzeczywiście, wynika ona przez zastosowanie reguły odrywania z

$$H \to (H \to H)$$

oraz

$$(H \to (H \to H)) \to (H \to H).$$

Pierwsza formuła jest aksjomatem, gdyż powstaje z schematu 1 przez podstawienie H za F, co krócej piszemy jako Ax1[F/H]. Drugą formułę otrzymamy natomiast w ten sam sposób ze schematu 3. $\boxed{EX}$

III.3. Pojęcie dowodu

Następny przykład jest znacznie bardziej złożony. Wprowadzimy przy tej okazji notację informującą każdorazowo o racjach, dla których z danych formuł można skorzystać.

Przykład 2
Wykażemy, że

$$(H \to F) \to F$$

jest formułą prawdziwą, o ile H jest prawdziwa.

1. $((H \to F) \to H) \to [(H \to F) \to ((H \to F) \to F)]$
$\text{Ax2}[H/(H \to F), F/H, G/F]$
2. $H \to ((H \to F) \to H)$ $\text{Ax1}[F/H \to F]$
3. H założenie
4. $(H \to F) \to H$ MP 2, 3.
(oznacza to, że formuła powstała z formuł 2 i 3 przez odrywanie)
5. $(H \to F) \to ((H \to F) \to F)$ MP 1, 4.
6. $[(H \to F) \to ((H \to F) \to F)] \to [(H \to F) \to F]$
$\text{Ax3}[H/(H \to F)]$
7. $(H \to F) \to F$ MP 6, 5.

$\boxed{EX}$

Procedurę, którą zastosowaliśmy w powyższym przykładzie do wykazania, że istotnie formuła $(H \to F) \to F$ jest prawdziwa, o ile prawdziwa jest H, nazywamy *dowodem.* Jest to jedno z centralnych pojęć logiki, lecz również matematyki i nauk ścisłych w ogóle. Szacunek dla pojęcia dowodu jest jedną z podstaw racjonalnego myślenia – tezy zgłoszone w trakcie debaty naukowej należy uzasadnić, czyli udowodnić. Podamy obecnie jego definicję w ramach klasycznego rachunku zdań.

Definicja 8 *Formuła H posiada* dowód na podstawie zbioru formuł X [symb.: $X \vdash H$] $\Longleftrightarrow_{df}$ *istnieje skończony ciąg formuł kończący się formułą H, przy czym każda formuła tego ciągu jest bądź aksjomatem, bądź elementem zbioru X, bądź też jest wyprowadzalna z formuł wcześniejszych tego ciągu przez zastosowanie reguł dowodzenia.*

$\boxed{DEF}$

Podobnie jak w przypadku operacji wynikania $\models$ wprowadzamy i teraz oznaczenie dla zbioru wszystkich formuł, które można udowodnić na podstawie danego zbioru założeń X:

$$C_2(X) =_{df} \{H \in FOR;\ X \vdash H\}.$$

Formuły należące do zbioru $C_2(\emptyset)$, tj. te, które można udowodnić bez jakichkolwiek założeń, nazywamy *twierdzeniami.* Bezpośrednio z tej definicji dowodu otrzymujemy szereg wniosków Oczywiste uzasadnienie tych wniosków opuszczamy.

Wniosek 1

Każdy aksjomat posiada dowód na podstawie zbioru pustego. $\boxed{WN}$

Wniosek 2

Każdy element zbioru X posiada dowód na podstawie tego zbioru, czyli $X \subseteq C_2(X)$. $\boxed{WN}$

Wniosek 3

Formuła mająca dowód na podstawie zbioru X, ma też dowód na podstawie dowolnego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$
$(X \subseteq Y) \Rightarrow (C_2(X) \subseteq C_2(Y))$. $\boxed{WN}$

Wniosek 4

Jeżeli formuła ma dowód na podstawie pewnego zbioru formuł, to istnieje skończony podzbiór tego zbioru, wystarczający do udowodnienia tej formuły. $\boxed{WN}$

III.4. Operacja konsekwencji

Powyższe wnioski (2, 3) wyrażają własności zwrotności i monotoniczności relacji C_2. Odpowiednie własności posiada również C_1. Poza tym twierdzenie 1 stwierdza, że C_1 posiada też własność idempotentności. Czy jest tak również w przypadku C_2? Twierdzącą odpowiedź zawiera następujący lemat.

Lemat 2

Dla dowolnych X zachodzi $C_2(C_2(X)) \subseteq C_2(X)$.

Dowód: Niech $H \in C_2(C_2(X))$, tzn. istnieje skończony ciąg formuł $F_1, F_2, \ldots, F_n$ kończący się na H a każda formuła tego ciągu jest bądź aksjomatem, bądź elementem zbioru $C_2(X)$, bądź też wynika z formuł wcześniejszych tego ciągu przez zastosowanie reguł dowodzenia. Wybierzmy te formuły $G_1, G_2, \ldots, G_k$ spośród $F_1, F_2, \ldots, F_n$, które są założeniami, tzn. należą do $C_2(X)$. Dla każdej z tych formuł istnieje zatem dowód na podstawie X. Niech ciągi formuł $G_1^1, G_2^1, \ldots, G_s^1$, $G_1^2, G_2^2, \ldots, G_t^2$, $\ldots$, $G_1^k, G_2^k, \ldots, G_u^k$ będą dowodami odpowiednio dla G_1, $G_2, \ldots, G_k$. Rzecz jasna, wszystkie założenia występujące w tych dowodach pochodzą z X.

Powróćmy teraz do wyjściowego ciągu formuł $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Występujące w nim formuły $G_1, G_2, \ldots, G_k$ zastępujemy przez ich dowody $G_1^1, G_2^1, \ldots$, G_s^1, $G_1^2, G_2^2, \ldots, G_t^2$, $\ldots$, $G_1^k, G_2^k, \ldots, G_u^k$. Na miejsce jednej formuły podstawiamy przeto ciąg formuł, kończący się na tej właśnie formule. Tak rozszerzony ciąg formuł będzie oczywiście w dalszym ciągu dowodem dla H, tyle że teraz każde używane w nim założenie pochodzi z X. A zatem $H \in C_2(X)$, co kończy dowód.

$\boxed{LEM}$

Widzimy więc, że operacja C_2 jest również operacją zwrotną, monotoniczną i idempotentną. Skoro taki zestaw własności występuje już po raz drugi, zatem warto się nad tym chwilę zastanowić. Zarówno operacja wynikania C_1 jak i operacja dowodzenia C_2 formalnie ujmują pewne specyficzne stosunki pomiędzy zbiorem formuł i pojedynczą formułą. W stosunkach tych traktujemy mianowicie zbiór formuł jako informacje z jakichś względów zaakceptowane, a stowarzyszoną z tym zbiorem formułę jako logiczną konsekwencję z niego wynikającą. Zarówno C_1, jak i C_2 ujmują formalnie rozszerzenie zasobu informacji w sposób logicznie poprawny, tzn. tak, by z prawdziwych przesłanek nie wyciągano fałszywych wniosków. Zgodność własności tych operacji wskazuje zatem na głębsze podobieństwo zachodzące pomiędzy tymi stosunkami. Za Alfredem Tarskim wprowadzimy więc pojęcie charakteryzowane przez właśnie taki zestaw własności: zwrotność, monotoniczność, idempotecja.

Definicja 9 [Tarski]
Funkcja zwrotna, monotoniczna i idempotentna odwzorowująca zbiory formuł na zbiory formuł nazywamy operacją konsekwencji *w danym języku formalnym.*

$\boxed{DEF}$

Operacja konsekwencji jest formalnym odpowiednikiem rozumowania polegającego na wyprowadzaniu wniosków na podstawie danych przesłanek. Jest to jedno z centralnych pojęć logiki.

Poznaliśmy dotychczas dwie operacje konsekwencji w języku FOR, a mianowicie C_1 i C_2. Parę uporządkowaną $\langle$ język formalny, operacja konsekwencji $\rangle$ nazywamy *systemem logicznym*. Mamy zatem dwa takie systemy i oczywisty problem: Jaki jest ich wzajemny stosunek? Na to pytanie odpowiemy w następnym rozdziale.

Rozdział IV

Metatwierdzenia

Przez twierdzenie klasycznego rachunku zdań rozumiemy formułę, która posiada dowód na gruncie aksjomatyki KRZ. Omawiając system logiczny, badając jego własności, wypowiadamy pewne tezy, które następnie należy udowodnić. W ten sposób uzyskujemy twierdzenia, które coś mówią o danym systemie logicznym (np. to, że system posiada nieskończoną ilość formuł prawdziwych). Tego typu twierdzenia nazywamy metatwierdzeniami, jako że twierdzą coś o danym systemie, opisują m.in. własności twierdzeń tego systemu. Metatwierdzenia nie są – rzecz jasna – wyrażane w języku formalnym tego systemu, ale w precyzyjnym, lecz dowolnym języku, podobnym do języka matematyki. Nazywamy go metajęzykiem, jako że mówi o systemie, który badamy. Należy więc wyraźnie odróżnić twierdzenia KRZ (tzn. formuły posiadające dowód) od metatwierdzeń (tj. od udowodnionych faktów dotyczących KRZ). Nawet jeśli w dalszym ciągu wykładu nie zawsze przestrzegamy tego nazewnictwa, to z kontekstu będzie za każdym razem wiadomo, czy chodzi o twierdzenie KRZ, czy też o metatwierdzenie tego systemu.

IV.1. Twierdzenie o dedukcji

Pierwsze metatwierdzenie opisuje stosunek pomiędzy implikacją a operacją konsekwencji $\vdash$. Głosi mianowicie, że implikacja jest prawdziwa dokładnie wtedy, jeśli na podstawie jej poprzednika można wydedukować następnik. Innymi słowy: przesłankę pozwalającą na dedukcję pewnej formuły H można traktować jako poprzednik prawdziwej (będącej twierdzeniem rachunku) implikacji o następniku H.

Twierdzenie 2 [Twierdzenie o dedukcji]
Dla dowolnych zbiorów formuł X oraz dla dowolnych formuł H, G zachodzi: $X \vdash H \to G \iff X \cup \{H\} \vdash G$.

Dowód: ($\Rightarrow$) Zakładamy, że istnieje dowód dla $H \to G$ na podstawie X. Tym bardziej istnieje więc taki dowód na podstawie X, $\{H\}$. H ma oczywiście dowód na podstawie X, $\{H\}$. Składa się on z jednej linijki, którą można dopisać do poprzedniego dowodu. Stosując regułę dowodzenia do ostatnich dwóch linijek tego ciągu formuł, otrzymamy dowód dla G na podstawie $X, \{H\}$.

($\Leftarrow$) Zakładamy, że istnieje dowód $F_1, \ldots, F_n$ dla G na podstawie X, $\{H\}$. Naszym celem jest przerobienie go krok po kroku na dowód dla $H \to G$ na podstawie X. Stosujemy w tym celu metodę indukcji ze względu na długość dowodu. Ponieważ jest to pierwszy dowód tego typu, przeprowadzimy go szczegółowo.

Początek indukcji: Zakładamy, że dowód dla G na podstawie X, $\{H\}$ składa się z jednej tylko linijki. Wtedy G jest aksjomatem bądź założeniem, tj. równa się H lub należy do X. Rozważmy te przypadki po kolei. O ile G jest aksjomatem bądź elementem z X, to wolno go wpisać do dowodu. To samo dotyczy aksjomatu $G \to (H \to G)$. Stosując regułę odrywania do tych dwóch linijek otrzymamy $H \to G$. O ile zaś $G = H$, to skorzystamy z faktu, iż $H \to H$ (patrz strona 35) można udowodnić bez żadnych założeń, a zatem $H \to G$ można udowodnić bez żadnych założeń, a tym bardziej na podstawie X.

Założenie indukcyjne: Niech k będzie dowolną liczbą większą niż 1. Zakładamy, że potrafimy przerobić każdy dowód $F_1, \ldots, F_i$ dla G na podstawie $X \cup \{H\}$ na dowód dla $H \to G$ na podstawie X, gdzie i dowolna liczba mniejsza od k.

Krok indukcji: Niech $F_1, \ldots, F_k$ będzie dowodem dla G na podstawie $X \cup \{H\}$. Jeśli G jest aksjomatem, elementem z X bądź jest równe H, to postępujemy dokładnie tak, jak na początku indukcji. Niech więc G pojawi się w dowodzie dzięki zastosowaniu reguły odrywania. W takim razie wśród $\{F_1, \ldots, F_{k-1}\}$ istnieją formuły F_i oraz $F_i \to G$. Na mocy założenia indukcji istnieją dowody dla $H \to F_i$ oraz $H \to (F_i \to G)$ na podstawie X. Połączymy te dowody, dopisując aksjomat $(H \to (F_i \to G)) \to ((H \to F_i) \to (H \to G))$. Podwójne zastosowanie reguły odrywania prowadzi do zakończenia dowodu dla $H \to G$ na podstawie X.

A zatem każdy dowód długości k dla G na podstawie $X, \{H\}$ da się przerobić na dowód dla $H \to G$ na podstawie X. Z dowolności k wynika, że jest to prawdą dla dowodu dowolnej długości, a zatem dla wszystkich formuł G posiadających dowód na podstawie $X \cup \{H\}$. $\boxed{THM}$

Twierdzenie to będzie często wykorzystywane w dalszej części wykładu. Poza tym ma ono praktyczne zastosowanie w dowodach logicznej prawdziwości niektórych formuł:

Przykład 3

Czy $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$ jest twierdzeniem klasycznego rachunku zdań? Na podstawie twierdzenia o dedukcji wystarczy w tym celu wykazać, iż

$$H \to F, F \to G, H \vdash G$$

co jest zadaniem zupełnie prostym. $\boxed{EX}$

Technika wykorzystana w powyższym przykładzie daje podstawę do wypracowania alternatywnej syntaktycznej metody (obok aksjomatycznej) sprawdzenia prawdziwości formuł. Przeprowadzanie dowodów w tych systemach logicznych jest zbliżone do sposobów dowodzenia stosowanych zarówno w poszczególnych naukach, jak i w rozumowaniach potocznych. Z tego względu określamy je jako „dedukcję naturalną". Reguły dowodzenia w systemach dedukcji naturalnej ustalają – w sposób przybliżony do intuicji – jak na podstawie wierszy już figurujących w dowodzie można dołączyć nowe wyrażenia o określonej postaci. Metoda ta będzie bliżej omawiana w dodatku trzecim.

IV.2. Poprawność aksjomatyzacji

Łatwo pokazać, że C_2 jest niesłabsza od C_1, tzn. formuły, posiadające dowód na podstawie zbioru formuł, również z tego zbioru wynikają.

Lemat 3 [Twierdzenie o poprawności aksjomatyzacji]
Dla dowolnej formuły H zachodzi: $\vdash H \Longrightarrow \models H$.

Dowód: Jeśli $\vdash H$, to bądź H jest aksjomatem, bądź da się wyprowadzić na podstawie aksjomatów przez *modus ponens*. Niech H będzie aksjomatem. Łatwo wykazać, że H jest tautologią, czyli $\models H$. W drugim przypadku wystarczy zauważyć, że reguła *modus ponens* zachowuje własność bycia tautologią. Jest to równie oczywiste: skoro H oraz $H \to F$ są tautologiami, to F nie może być formułą fałszywą. $\boxed{LEM}$

Łatwo uogólnić ten lemat na dowolne zbiory formuł X.

Twierdzenie 3
Dla każdego zbioru formuł X oraz dla dowolnej formuły H zachodzi: $X \vdash H \Longrightarrow X \models H$.

Dowód: Załóżmy, że istnieje ciąg formuł $F_1, \ldots, F_n$ będący dowodem dla H. Wybierzmy wszystkie elementy zbioru X występujące w tym ciągu. Utworzą one skończony zbiór $\{G_1, \ldots, G_m\} \subseteq \{F_1, \ldots, F_n\}$. Wprost z określenia mamy $\{G_1, \ldots, G_m\} \vdash H$. Twierdzenie 2 daje:

$$\begin{array}{l} \{G_2, \ldots, G_m\} \vdash G_1 \to H \\ \{G_3, \ldots, G_m\} \vdash G_2 \to (G_1 \to H) \\ \vdots \\ \emptyset \vdash G_m \to (\ldots \to (G_1 \to H) \ldots) \end{array}$$

Zastosujemy teraz lemat 3 i wrócimy w odwrotną stronę:

$$\begin{array}{l} \emptyset \models G_m \to (\ldots \to (G_1 \to H) \ldots) \\ \{G_m\} \models G_{m-1} \to (\ldots \to (G_1 \to H) \ldots) \\ \vdots \\ \{G_1, \ldots, G_m\} \models H \end{array}$$

Skoro $\{G_1, \ldots, G_m\} \subseteq X$, przeto mamy ostatecznie $X \models H$, co kończy dowód. $\boxed{THM}$

IV.3. Niesprzeczność i zupełność zbiorów formuł

Ważną cechą systemu formalnego jest jego niesprzeczność. W klasycznym rachunku zdań środki dowodowe są tak silne, że ze sprzecznego zbioru formuł można wyprowadzać dosłownie każdą formułę:

$$H, \neg H \vdash G.$$

Przy tym nie musi to być sprzeczność „jawna" jak w powyższym przykładzie, lecz wystarczy, by parę sprzecznych ze sobą formuł można wyprowadzić ze zbioru przesłanek.

Pamiętając o tym, że system logiczny służy do formalnego ujęcia mechanizmów wyprowadzania wniosków z posiadanej wiedzy, sprzeczne zbiory formuł są tu bezużyteczne: skoro na podstawie takiego zbioru założeń potrafimy udowodnić wszystko, to na takiej bazie nie jesteśmy w stanie odróżnić prawdy od fałszu. Można powiedzieć, że sprzeczności powodują „eksplozje". Co prawda, nie świadczy to najlepiej o adekwatności systemu klasycznego rachunku zdań. Praktycznie każdy zbiór przekonań dowolnej osoby jest zbiorem do pewnego stopnia sprzecznym. Istnieją inne systemy logiczne, które bardziej subtelnie traktują sprzeczności występujące w zbiorach przesłanek. Powyższa własność KRZ jest zatem jeszcze jedną niedogodnością, którą trzeba zaakceptować w imieniu technicznej prostoty tego systemu.

Definicja 10 *Zbiór formuł X jest zbiorem* sprzecznym *wtw istnieje formuła H taka, że $X \vdash H$ oraz $X \vdash \neg H$.* $\boxed{DEF}$

Odpowiednio mówimy, że zbiór formuł X jest *niesprzeczny* wtw nie jest sprzeczny, tzn. dla dowolnej formuły bądź ta formuła, bądź jej negacja nie ma dowodu na podstawie X. Następujący lemat podaje alternatywną charakterystykę zbioru sprzecznego.

Lemat 4
X jest sprzeczny $\Longleftrightarrow$ dla dowolnej formuły H zachodzi: $X \vdash H$.

Dowód: ($\Leftarrow$) oczywiste

($\Rightarrow$) Niech F będzie taką formułą, że zarówno $X \vdash F$ jak i $X \vdash \neg F$. Skoro $\vdash F \to (\neg F \to H)$ a tym bardziej $X \vdash F \to (\neg F \to H)$, gdzie H jest dowolną formułą, przeto podwójne zastosowanie reguły odrywania prowadzi do $X \vdash H$.

$\boxed{\mathit{LEM}}$

Powyższy lemat ilustruje, w jaki sposób zbiór sprzeczny „eksploduje" w klasycznym rachunku zdań. Zwracamy jeszcze uwagę na prosty związek zachodzący między sprzecznością a dowodliwością:

Lemat 5
Jeśli $X \nvdash H$, *to* $X \cup \{\neg H\}$ *jest niesprzeczny.*

Dowód: Prowadzimy ten dowód przez *transpozycję*, tzn. zamiast udowodnić tezę w postaci sformułowanej powyżej, wykażemy stosunek równoważny:

Jeśli $X \cup \{\neg H\}$ jest sprzeczny, to $X \vdash H$.

Metoda dowodu przez transpozycję opiera się na pewnej tautologii, zwanej prawem transpozycji: $H \to F \;\equiv\; \neg F \to \neg H$. Przypuśćmy więc, że z $X \cup \{\neg H\}$ wynika dowolna formuła, np. $\neg(H \to H)$. Z twierdzenia o dedukcji mamy, że

$$X \vdash \neg H \to \neg(H \to H)$$

a zatem, na mocy prawa transpozycji dostaniemy po zastosowaniu reguły odrywania

$$X \vdash (H \to H) \to H.$$

Skoro $H \to H$ ma dowód na podstawie aksjomatyki, przeto ma dowód na podstawie dowolnego zbioru, a zatem również i na podstawie zbioru X. Ponowne stosowanie reguły odrywania daje więc

$$X \vdash H,$$

co kończy dowód.

$\boxed{\mathit{LEM}}$

Z podobnych powodów zachodzi

Lemat 6
Jeśli $X \cup \{H\}$ *jest sprzeczny, to* $X \vdash \neg H$.

Dowód: Niech symbol $\top$ oznacza dowolny aksjomat. Z $X \cup \{H\} \vdash \neg\top$ otrzymujemy na mocy twierdzenia o dedukcji oraz prawa transpozycji $X \vdash \top \rightarrow \neg H$, a zatem $X \vdash \neg H$.

$\boxed{LEM}$

Zbiór niesprzeczny może być zawarty w innym zbiorze niesprzecznym. Mówimy, że zbiór zawierający go jest jego rozszerzeniem. Specjalne znaczenie mają te zbiory niesprzeczne, które są „rozszerzone do granic możliwości" – każde dalsze rozszerzenie doprowadza do „eksplozji":

Definicja 11 *Zbiór formuł jest* zupełny (maksymalnie niesprzeczny) *wtw jest niesprzeczny, a dowolne jego rozszerzenie jest sprzeczne.*

$\boxed{DEF}$

Definicja 12 *Zbiór formuł X jest* teorią *wtw jest domknięty na konsekwencję, tzn. jeśli $X \vdash H$, to $H \in X$ albo równoważnie, jeśli $H \notin X$, to $X \nvdash H$.*

$\boxed{DEF}$

Uwaga $X \nvdash H$ znaczy, że H nie ma dowodu przy założeniach X.

Twierdzenie 4
Każdy zbiór zupełny jest teorią.

Dowód: Niech X będzie zbiorem zupełnym. Przypuśćmy, że formuła H do niego nie należy. Zatem $X \cup \{H\}$ jest rozszerzeniem zbioru X, czyli jest zbiorem sprzecznym. Na mocy lematu 6 zachodzi $X \vdash \neg H$. Skoro X jest niesprzeczny, zatem $X \nvdash H$. A zatem $H \notin X$ prowadzi do $X \nvdash H$, tzn. X jest teorią.

$\boxed{THM}$

Odwrotna zależność nie zachodzi: zbiór wszystkich formuł jest teorią, lecz nie jest, rzecz jasna, zupełny. Zbiory zupełne są naprawdę „duże". Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5
Niech X będzie zbiorem zupełnym. Dla dowolnych formuł H i F zachodzi:

1^o $H \in X \iff \neg H \notin X$,

2^o $H \wedge F \in X \iff H \in X$ *oraz* $F \in X$,

3^o $H \vee F \in X \iff H \in X$ *lub* $F \in X$,

4^o $H \equiv F \in X \iff H \in X$ *wtw* $F \in X$,

5^o $H \to F \in X \iff$ *jeśli* $H \in X$, *to* $F \in X$.

Dowód: *ad* 1^o ($\Leftarrow$) Niech $H \notin X$, zatem $X \cup \{H\}$ jest sprzeczny. Na mocy lematu 6 dostaniemy $X \vdash \neg H$, a skoro zbiór zupełny jest teorią, przeto $\neg H \in X$. ($\Rightarrow$) Skoro tak, to z kolei $H \notin X$, bo X jest niesprzeczny. Pierwsza równoważność została zatem wykazana.

ad 2^o ($\Rightarrow$) Niech $X \vdash H \wedge F$. Skoro $H \wedge F \to H$ jak i $H \wedge F \to F$ są aksjomatami, przeto mają dowody na podstawie X. Reguła odrywania daje odpowiednio $X \vdash H$ oraz $X \vdash F$. Ponieważ X jest teorią, zachodzi $H \in X$ oraz $F \in X$. ($\Leftarrow$) Z tego z kolei otrzymujemy natychmiast $X \vdash H$ oraz $X \vdash F$. Podwójne zastosowanie reguły odrywania do twierdzenia 7 (patrz str. 55) $H \to (F \to H \wedge F)$ daje nam $X \vdash H \wedge F$, skąd wynika, że $H \wedge F \in X$.

Przypadki 3^o i 4^o dowodzi się analogicznie.

ad 5^o ($\Rightarrow$) Niech $X \vdash H \to F$ oraz $H \in X$. Zatem $X \vdash H$, stąd $X \vdash F$ oraz $F \in X$, bo X jest teorią. ($\Leftarrow$) Niech, na odwrót, $H \notin X$ lub $F \in X$, co jak łatwo zauważyć jest równoważne prawej stronie 5^o. W pierwszym przypadku $X \cup \{H\}$ jest sprzeczny, a zatem F z niego wynika. Na mocy twierdzenia o dedukcji otrzymamy $X \vdash H \to F$. Jeśli z kolei $F \in X$, to skoro $F \to (H \to F)$ ma dowód na podstawie dowolnego zbioru, przeto reguła odrywania daje i w tym przypadku $X \vdash H \to F$. $\boxed{THM}$

Okazuje się, że każdy zbiór niesprzeczny jest zawarty w pewnym zbiorze zupełnym. Można nawet wskazać metodę, w jaki sposób go znaleźć: będziemy stopniowo rozszerzać dany zbiór formuł do maksymalnych granic.

Twierdzenie 6 [Lemat Lindenbauma]
Każdy niesprzeczny zbiór zawiera się w jakimś zbiorze zupełnym.

Dowód: Niech X będzie zbiorem niesprzecznym. Skonstruujemy zbiór zupełny, który zawiera X. Wyobraźmy sobie w tym celu, że wszystkie formuły zostały ustawione w ciąg: $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$ Wykonujemy następujący algorytm. Rozpatrujemy kolejne elementy tego ciągu pod tym względem, czy można je dołączyć do zbioru, nie powodując jego sprzeczności. A zatem dołączymy H_1 do X dokładnie wtedy, gdy zbiór $X_1 = X \cup \{H_1\}$ jest w dalszym ciągu zbiorem niesprzecznym. Jeśli więc dołączenie formuły H_1 czyniłoby X sprzecznym, to $X_1 = X$. Następnie w analogiczny sposób postępujemy z formułą H_2, uzyskając zbiór X_2 itd. Powstaje monotonicznie wzrastający ciąg zbiorów $X = X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_i \subseteq \ldots$ Przez Y oznaczamy sumę $\bigcup_{n\in\omega} X_n$. Wykażemy, że Y jest szukanym zbiorem zupełnym.

1^o **(niesprzeczność)** Przypuśćmy, że Y jest zbiorem sprzecznym. Istnieje więc formuła H taka, że $Y \vdash H$ oraz $Y \vdash \neg H$. Skoro w każdym z tych dowodów wykorzystuje się tylko skończoną ilość przesłanek $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ oraz $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, a poza tym każda z tych formuł jest jednym z elementów powyższego ciągu wszystkich formuł, przeto pośród zbiorów skonstruowanych istnieją takie zbiory X_i oraz X_j, że $X_i \vdash H$ oraz $X_j \vdash \neg H$. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $X_i \subseteq X_j$. Stąd wynika sprzeczność zbioru X_j. A zatem takiej formuły H być nie może, czyli Y jest zbiorem niesprzecznym.

2^o **(maksymalność)** Należy wykazać, że każde rozszerzenie zbioru Y jest sprzeczne. Niech więc dla pewnej formuły H zachodzi $H \notin Y$. H oczywiście występuje w zbiorze wszystkich formuł. Niech $H = H_n$. Skoro $H_n \notin Y$, przeto formuła ta nie została dołączona wtedy, kiedy o tym decydowano (w n-tym kroku konstrukcji ciągu). Dla takiej decyzji mógł istnieć tylko jeden powód: dołączenie H_n czyniłoby zbiór X_{n-1} sprzecznym! A zatem $X_{n-1} \cup \{H_n\}$ jest sprzeczny. Tym samym sprzeczny jest zawierający go zbiór $Y \cup \{H\}$. To kończy dowód.

$\boxed{THM}$

Twierdzenie Lindenbauma ma ważne konsekwencje. Wynika z niego m.in. związek pomiędzy niesprzecznością dedukcyjną (cecha syntaktyczna) a posiadaniem modelu (własność semantyczna):

Twierdzenie 7 [Twierdzenie o niesprzeczności]
Dowolny zbiór formuł jest niesprzeczny wtw posiada model.

Dowód: ($\Rightarrow$) Niech zbiór formuł X będzie niesprzecznym. Zawiera się zatem w pewnym zbiorze zupełnym Y. Ten zbiór pozwala na określenie funkcji v ze zbioru AT w $\{0,1\}$, będącej wartościowaniem, w następujący sposób:

$$v(p) = 1 \iff p \in Y.$$

Okazuje się, że to wartościowanie daje podstawę do konstrukcji modelu dla tego zbioru. W tym celu wystarczy wykazać, że dla dowolnych formuł zachodzi:

$$v(H) = 1 \iff H \in Y.$$

Można to w prosty sposób wykazać za pomocą indukcji ze względu na budowę formuł. Początek indukcji jest oczywisty, gdyż tak właśnie zostało dobrana funkcja v. Krok indukcji opiera się na definicji wartościowania oraz na odpowiednich punktach udowodnionych w twierdzeniu 5.

Otrzymamy w ten sposób potwierdzenie, że v weryfikuje wszystkie formuły z Y, a więc jest modelem tego zbioru. Tym bardziej zachodzi, że funkcja ta jest szukanym modelem dla zbioru X.

($\Leftarrow$) Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie v, będące modelem dla X. Niech pomimo to, zbiór X będzie zbiorem sprzecznym. Skoro dla dowolnej formuły H zarówno H jak i $\neg H$ posiadają dowód na podstawie X, przeto $v(H) = v(\neg H) = 1$ (korzystamy stąd, że $X \vdash H \Longrightarrow X \models H$). Z $v(H) = 1$ zaś wynika, że $v(\neg H) = 0$, czyli $1 = 0$, co jest sprzecznością. $\boxed{THM}$

Twierdzenie to można uznać za skromne, lecz precyzyjne stwierdzenie faktu, że istnieje (w postaci swojego modelu) dokładnie to, co jest niesprzeczne. Istotnie, jest to pojęcie istnienia, które przyjmuje się w dziedzinie klasycznej matematyki.

Twierdzenie to obecnie posłuży nam do konstrukcji wcześniej zapowiadanego modelu. Przypominamy, że należy jeszcze wykazać, iż formuła wynikająca ze zbioru formuł ma dowód na podstawie tego zbioru. Udowodnimy więc:

Twierdzenie 8
Dla dowolnych $X \subseteq FOR$ zachodzi: $X \models H \Longrightarrow X \vdash H$.

Dowód: Niech $X \models H$. Wtedy $X \cup \{\neg H\}$ nie posiada modelu, a więc jest to zbiór sprzeczny na mocy twierdzenia 7. Z lematu 5 wynika $X \vdash H$. $\boxed{THM}$

IV.4. Podstawowe własności KRZ

Bezpośrednio z twierdzeń 3 i 8 wynika obserwacja, która ostatecznie ustala stosunek pomiędzy operacjami konsekwencji $\vdash$ oraz $\models$.

Wniosek 5 [Twierdzenie o pełności]
Dla dowolnych $X \subseteq FOR$ *zachodzi:* $X \models H \iff X \vdash H$.

Dowód: oczywisty. $\boxed{\text{WN}}$

W szczególności oznacza to, że można udowodnić każdą tautologię: formuła wynikająca z pustego zbioru założeń ma dowód na podstawie zbioru pustego. Pojęcie tautologii jest więc – w klasycznym rachunku zdań – równoznaczne z pojęciem twierdzenia, prawda w sensie syntaktycznym i w sensie semantycznym są ze sobą identyczne.

Co więcej, aksjomatyczny system $\langle FOR, \vdash \rangle$ jest tożsamy z systemem $\langle FOR, \models \rangle$ określonym semantycznie. Można to tak ująć, że oba systemy określają jeden rachunek logiki: klasyczny rachunek zdań. Systemy aksjomatyczne i semantyczne, które są połączone twierdzeniem o pełności, traktujemy jako różne postacie jednego i tego samego rachunku logicznego. O rachunku tym da się powiedzieć, że jest on aksjomatyzowalny oraz pełny. Dla pierwszego sądu przyjmujemy określenie klasycznego rachunku zdań jako systemu semantycznego i rozumiemy twierdzenie o pełności tak, że istnieje dla niego adekwatna postać w formie systemu aksjomatycznego. W drugim przypadku patrzymy na klasyczny rachunek zdań odwrotnie, jako na aksjomatyczny system, a twierdzenie o pełności interpretujemy jako wyraz faktu, że istnieje klasa modeli, która weryfikuje dokładnie wszystkie aksjomaty i formuły z nich wyprowadzalne.

Własności aksjomatyzowalności i pełności są ważnymi cechami rachunków logicznych. Trzecią własnością, o równie dużym znaczeniu, jest „rozstrzygalność”. Rachunek jest rozstrzygalny, kiedy istnieje efektywna metoda ustalająca dla dowolnej formuły tego rachunku, czy jest ona w nim prawdziwa. Metoda jest *efektywna* dla rozwiązania danego problemu, jeżeli zadana jest wyczerpująco i jednoznacznie, a przeto prowadzi z logiczną koniecznością każdorazowo do poprawnej odpowiedzi.

Definicja 13
Zbiór formuł X nazywamy rozstrzygalnym, *jeśli istnieje efektywna metoda, która pozwala stwierdzić dla każdej formuły H, czy* $H \in X$.
System $\langle FOR, C \rangle$ *nazywamy* rozstrzygalnym, *jeśli jego zbiór twierdzeń* $C(\emptyset)$ *jest rozstrzygalny (C jest operacją konsekwencji).*
Rachunek logiczny jest rozstrzygalny *jeśli istnieje dla niego system rozstrzygalny.* $\boxed{DEF}$

Okazuje się, że KRZ jest również rachunkiem rozstrzygalnym.

Twierdzenie 9 [Twierdzenie o rozstrzygalności]
KRZ jest rozstrzygalny.

Dowód: Metoda zero-jedynkowa jest efektywną metodą sprawdzenia, czy dowolna formuła jest tautologią klasycznego rachunku zdań. $\boxed{THM}$

Dodatek 1

Przykłady dowodów

1.1. Dalsze twierdzenia

System aksjomatów podany na stronie 34 pozwala na dowodzenie dalszych twierdzeń. Podamy kilka kolejnych przykładów wraz z dowodami. Proponujemy ich prześledzenie, a następnie samodzielne powtórzenie. Dla ułatwienia podamy po każdej formule uzasadnienie, dlaczego wolno daną formułę dołączyć do dowodu.

Twierdzenie 1
$H \to H$

Dowód był podany na stronie 35. $\boxed{THM}$

Twierdzenie 2
$(H \to F) \to F$, o ile H jest tezą.

Dowód był podany na stronie 35. $\boxed{THM}$

Twierdzenie 3
$(H \to F) \to (H \to G))$, o ile $(F \to G)$ jest tezą.

Dowód: 1. $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$ aks 2

2. $((F \to G) \to (H \to G)) \to (H \to G)$ tw 1: $H/(F \to G); F/(H \to G)$

3. $[(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))] \to$
$\to \{[((F \to G) \to (H \to G)) \to (H \to G)] \to$

$\to [(H \to F) \to (H \to G)]\}$,

aks 2: $H/(H \to F); F/((F \to G) \to (H \to G)); G/(H \to G)$

4. $[((F \to G) \to (H \to G)) \to (H \to G)] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]$ MP 3, 1
5. $(H \to F) \to (H \to G)$ MP 4, 2

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 4
$H \to (\neg H \to F)$

Dowód: 1. $H \to (\neg F \to H)$ aks 1: $F/\neg F$
2. $(H \to (\neg F \to H)) \to \{[(\neg F \to H) \to (\neg H \to$
$\to \neg\neg F)] \to [H \to (\neg H \to \neg\neg F)]\}$
aks 2: $F/(\neg F \to H)$; $G/(\neg H \to \neg\neg F)$
3. $[(\neg F \to H) \to (\neg H \to \neg\neg F)] \to [H \to (\neg H \to \neg\neg F)]$ MP 2, 1
4. $(\neg F \to H) \to (\neg H \to \neg\neg F)$ aks 13: $H/\neg F; F/H$
5. $H \to (\neg H \to \neg\neg F)$ MP 3, 4
6. $(\neg H \to \neg\neg F) \to (\neg H \to F)$ tw 3: $H/\neg H; F/\neg\neg F; G/F$
$(\neg\neg F \to F)$ jest aksjomatem
7. $[H \to (\neg H \to \neg\neg F)] \to \{[(\neg H \to \neg\neg F) \to (\neg H \to F)] \to$
$\to [H \to (\neg H \to F)]\}$ aks 2: $F/(\neg H \to \neg\neg F); G/(\neg H \to F)$
8. $[(\neg H \to \neg\neg F) \to (\neg H \to F)] \to [H \to (\neg H \to F)]$ MP 7, 5
9. $H \to (\neg H \to F)$ MP 8, 6

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 5 [sylogizm Fregego]
$(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to F)]$

Dowód: 1. $[(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to G)]] \to \{[[(F \to$
$\to G) \to (H \to G)] \to (H \to (H \to G))] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to (H \to G))]\}$
aks 2: $H/(H \to F); F/((F \to G) \to (H \to G))$;
$G/(H \to (H \to G))$
2. $(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to G)]$ aks 2

3. $[[(F \to G) \to (H \to G)] \to (H \to (H \to G))] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to (H \to G))]$ MP 1, 2
4. $(H \to (F \to G)) \to$
$\to [[(F \to G) \to (H \to G)] \to (H \to (H \to G))]$
aks 2: $F/(F \to G); G/(H \to G)$
5. $[(H \to (F \to G)) \to [[(F \to G) \to (H \to G)] \to$
$\to (H \to (H \to G))]] \to \{\{[[(F \to G) \to (H \to$
$\to G)] \to (H \to (H \to G))] \to [(H \to F) \to (H \to$
$\to (H \to G))]\} \to \{(H \to (F \to G)) \to [(H \to$
$\to F) \to (H \to (H \to G))]\}\}$
aks 2: $H/(H \to (F \to G))$;
$F/[[(F \to G) \to (H \to G)] \to (H \to (H \to G))]$;
$G/[(H \to F) \to (H \to (H \to G))]$
6. $\{[[(F \to G) \to (H \to G)] \to (H \to (H \to G))] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to (H \to G))]\} \to \{(H \to$
$\to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to (H \to G))]\}$ MP 5, 4
7. $(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to (H \to G))]$ MP 6, 3
8. $[(H \to F) \to (H \to (H \to G))] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]$
tw 3: $H/(H \to F); F/(H \to (H \to G)); G/(H \to G)$;
$[(H \to (H \to G)) \to (H \to G)]$ jest aksjomatem
9. $[(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to (H \to$
$\to G))]] \to \{[[(H \to F) \to (H \to (H \to G))] \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]] \to [(H \to (F \to G)) \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]]\}$
aks 2: $H/(H \to (F \to G))$;
$F/[(H \to F) \to (H \to (H \to G))]$;
$G/[(H \to F) \to (H \to G)]$
10. $[[(H \to F) \to (H \to (H \to G))] \to [(H \to F) \to$
$\to (H \to G)]] \to [(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to$
$\to (H \to G)]$ MP 9, 7
11. $(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to G)]$ MP 11, 8

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 6

$[H \to (F \to G)] \to [F \to (H \to G)]$

Dowód: 1. $[F \to (H \to F)] \to$
$\to \{[(H \to F) \to (H \to G)] \to [F \to (H \to G)]\}$
aks 2: $H/F; F/(H \to F); G/(H \to G)$

2. $F \to (H \to F)$ aks 1: $H/F; F/H$

3. $[(H \to F) \to (H \to G)] \to (F \to (H \to G))$ MP 1, 2

4. $[(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to F)]] \to$
$\to \{[[(H \to F) \to (H \to G)] \to (F \to (H \to$
$\to G))] \to [(H \to (F \to G)) \to (F \to (H \to G))]]\}$
aks 2: $H/(H \to (F \to G)); F/[(H \to F) \to (H \to F)];$
$G/(F \to (H \to G))$

5. $(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to G)]$ tw 5

6. $[[(H \to F) \to (H \to G)] \to [F \to (H \to G)]] \to [(H \to$
$\to (F \to G)) \to (F \to (H \to G))]$ MP 4, 5

7. $(H \to (F \to G)) \to (F \to (H \to G))$ MP 6, 3

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 7

$H \to (F \to H \land F)$

Dowód: 1. $(H \to H) \to ((H \to F) \to (H \to H \land F))$ aks 6: $F/H; G/F$

2. $H \to H$ tw 1

3. $(H \to F) \to (H \to H \land F)$ MP 1, 2

4. $(F \to (H \to F)) \to \{[(H \to F) \to (H \to H \land F)] \to$
$\to [F \to (H \to H \land F)]\}$ aks 2: $H/F; F/(H \to F); G/(H \to H \land F)$

5. $F \to (H \to F)$ aks 1: $H/F; F/H$

6. $[(H \to F) \to (H \to H \land F)] \to [F \to (H \to H \land F)]$ MP 4, 5

7. $F \to (H \to H \land F)$ MP 6, 3

8. $[F \to (H \to H \land F)] \to [H \to (F \to H \land F)]$
tw 6: $H/F; F/H; G/(H \land F)$

9. $H \to (F \to H \land F)$ MP 8, 7

$\boxed{THM}$

1.2. Alternatywne aksjomatyzacje

Podany w przedstawianym tutaj wykładzie system aksjomatów nie jest jedynym możliwym. Przyjmując inny system zmienia się sposób dowodzenia twierdzeń. Dana niech teraz będzie następująca aksjomatyka KRZ:

1. $H \to (F \to H)$
2. $(H \to (F \to G)) \to ((H \to F) \to (H \to G))$
3. $H \wedge F \to H$
4. $H \wedge F \to F$
5. $H \to (F \to H \wedge F)$
6. $H \to H \vee F$
7. $F \to H \vee F$
8. $(H \to F) \to ((G \to F) \to (H \vee G \to F))$
9. $(H \equiv F) \to (H \to F)$
10. $(H \equiv F) \to (F \to H)$
11. $(H \to F) \to ((F \to H) \to (H \equiv F))$
12. $(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)$
13. $H \to (\neg H \to F)$
14. $\neg\neg H \to H$

$$\frac{H \to F, H}{F}$$

Na podstawie tej aksjomatyki można udowodnić następujące tezy:

Twierdzenie 8

a) $(F \to G) \to ((H \to F) \to (H \to G))$
b) $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$

Dowód: 1. $(H \to (F \to G)) \to ((H \to F) \to (H \to G))$ aks 2

2. $[(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to G)]] \to$
$\to \{(F \to G) \to [(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to$
$\to (H \to G)]]\}$ aks 1: $H/[(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to G)]]$;
$F/(F \to G)$

3. $(F \to G) \to [(H \to (F \to G)) \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]]$ MP 2, 1

4. $\{(F \to G) \to [(H \to (F \to G)) \to [(H \to F) \to (H \to$
$\to G)]]\} \to \{[(F \to G) \to (H \to (F \to G))] \to$
$\to [(F \to G) \to [(H \to F) \to (H \to G)]]\}$
aks 2: $H/(F \to G); F/(H \to (F \to G));$
$G/[(H \to F) \to (H \to G)]$

5. $[(F \to G) \to (H \to (F \to G))] \to [(F \to G) \to$
$\to [(H \to F) \to (H \to G)]]$ MP 4, 3

6. $(F \to G) \to (H \to (F \to G))$ aks 1: $H/(F \to G); F/H$

7. $(F \to G) \to ((H \to F) \to (H \to G))$ MP 5, 6

koniec dowodu części a)

8. $[(F \to G) \to [(H \to F) \to (H \to G)]] \to \{[(F \to$
$\to G) \to (H \to F)] \to [(F \to G) \to (H \to G)]\}$
aks 2: $H/(F \to G); F/(H \to F); G/(H \to G)$

9. $[(F \to G) \to (H \to F)] \to [(F \to G) \to (H \to G)]$ MP 8, 7

10. $[[(F \to G) \to (H \to F)] \to [(F \to G) \to (H \to$
$\to G)]] \to \{(H \to F) \to [[(F \to G) \to$
$\to (H \to F)] \to [(F \to G) \to (H \to G)]]\}$
aks 1 $H/[(F \to G) \to (H \to F)]; F/(F \to G)$

11. $(H \to F) \to [[(F \to G) \to (H \to F)] \to [(F \to G) \to$
$\to (H \to G)]]$ MP 10, 9

12. $\{(H \to F) \to [[(F \to G) \to (H \to F)] \to [(F \to$
$\to G) \to (H \to G)]]\} \to \{[(H \to F) \to$
$\to [(F \to G) \to (H \to F)]] \to [(H \to F) \to$
$\to [(F \to G) \to (H \to G)]]\}$
aks 2: $H/(H \to F); F/[(F \to G) \to (H \to F)];$
$G/[(F \to G) \to (H \to G)]$

13. $[(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to$
$\to F)]] \to [(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to G)]]$ MP 12, 11

14. $(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to F)]$ aks 1: $H/(H \to F); F/(F \to G)$

15. $[(H \to F) \to [(F \to G) \to (H \to G)]]$ MP 13, 14

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 9

$(H \to F) \to (\neg F \to \neg H)$

Dowód: 1. $(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)$ aks 12

2. $[(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)] \to$
$\to [\neg F \to [(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)]]$
aks 1: $H/(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H); F/\neg F$

3. $\neg F \to [(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)]$ MP 2, 1

4. $[\neg F \to [(H \to F) \to ((H \to \neg F) \to \neg H)]] \to$
$\to [(\neg F \to (H \to F)) \to [\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H)]]$
aks 2: $H/\neg F; F/(H \to F); G/((H \to \neg F) \to \neg H)$

5. $(\neg F \to (H \to F)) \to [\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H)]$ MP 4, 3

6. $(\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H)) \to [(\neg F \to (H \to \neg F)) \to$
$\to (\neg F \to \neg H)]$ aks 2: $H/\neg F; F/(H \to \neg F); G/\neg H$

7. $[(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H))] \to$
$\to \{[(\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H)) \to [(\neg F \to$
$\to (H \to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)]] \to [(\neg F \to (H \to$
$\to F)) \to [(\neg F \to (H \to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)]]\}$
tw 1 b: $H/\neg F \to (H \to F);$
$F/\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H);$
$G/(\neg F \to (H \to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)$

8. $[(\neg F \to ((H \to \neg F) \to \neg H)) \to [(\neg F \to (H \to$
$\to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)]] \to$
$\to [(\neg F \to (H \to F)) \to [(\neg F \to (H \to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)]]$
MP 7, 5

9. $(\neg F \to (H \to F)) \to [(\neg F \to (H \to \neg F)) \to (\neg F \to \neg H)]$ MP 8, 6

10. $\{(\neg F \to (H \to F)) \to [(\neg F \to (H \to \neg F)) \to$
$\to (\neg F \to \neg H)]\} \to \{[(\neg F \to (H \to F)) \to$
$\to (\neg F \to (H \to \neg F))] \to [(\neg F \to (H \to F)) \to$
$\to (\neg F \to \neg H)]\}$ aks 2: $H/(\neg F \to (H \to \neg F));$
$G/(\neg F \to (H \to F)); F/(\neg F \to \neg H)$

11. $[(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to (H \to \neg F))] \to$
$\to [(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)]$ MP 10, 9

12. $(\neg F \to (H \to \neg F)) \to [(\neg F \to (H \to F)) \to$
 $\to (\neg F \to (H \to \neg F))]$

 aks 1: $H/(\neg F \to (H \to \neg F)), F/(\neg F \to (H \to F))$

13. $(\neg F \to (H \to \neg F))$ aks 1: $H/\neg F; F/H$

14. $(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to (H \to \neg F))$ MP 12, 13

15. $(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)$ MP 11, 14

16. $[(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)] \to [(H \to F) \to$
 $\to [(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)]]$

 aks 1: $[H/(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)]; F/(H \to F)$

17. $(H \to F) \to [(\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H)]$ MP 16, 15

18. $[(H \to F) \to ((\neg F \to (H \to F)) \to (\neg F \to \neg H))] \to$
 $\to \{[(H \to F) \to (\neg F \to (H \to F))] \to [(H \to$
 $\to F) \to (\neg F \to \neg H)]\}$

 aks 2: $H/(H \to F); F/(\neg F \to (H \to F)); G/\neg F \to \neg H$

19. $[(H \to F) \to (\neg F \to (H \to F))] \to$
 $\to [(H \to F) \to (\neg F \to \neg H)]$ MP 18, 17

20. $(H \to F) \to (\neg F \to (H \to F))$ aks 1: $H/(H \to F); F/\neg F$

21. $(H \to F) \to (\neg F \to \neg H)$ MP 19, 20

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 10

$\neg(H \wedge F) \equiv \neg H \vee \neg F$

Dowód: 1. $H \wedge F \to H$ aks 3

2. $H \wedge F \to F$ aks 4

3. $(H \wedge F \to H) \to (\neg H \to \neg(H \wedge F))$ tw 9: $H/(H \wedge F); F/H$

4. $\neg H \to \neg(H \wedge F)$ MP 3, 1

5. $(H \wedge F \to F) \to (\neg F \to \neg(H \wedge F))$ tw 9: $H/(H \wedge F)$

6. $\neg F \to \neg(H \wedge F)$ MP 5, 2

7. $(\neg H \to \neg(H \wedge F)) \to [(\neg F \to \neg(H \wedge F)) \to$
 $\to ((\neg H \vee \neg F) \to \neg(H \wedge F))]$

 aks 8: $H/(\neg H); F/(\neg(H \wedge F)); G/(\neg F)$

8. $(\neg F \to \neg(H \wedge F)) \to ((\neg H \vee \neg F) \to \neg(H \wedge F))$ MP 7, 4

9. $(\neg H \vee \neg F) \to \neg(H \wedge F)$ MP 8, 6
10. $\neg H \to (\neg H \vee \neg F)$ aks 6: $H/(\neg H); F/(\neg F)$
11. $\neg F \to (\neg H \vee \neg F)$ aks 7: $H/(\neg H); F/(\neg F)$
12. $(\neg H \to (\neg H \vee \neg F)) \to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg H)$
    tw 9: $H/(\neg H); F/(\neg H \vee \neg F)$
13. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg H$ MP 12, 10
14. $\neg\neg H \to H$ aks 14
15. $(\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg H) \to [(\neg\neg H \to H) \to$
    $\to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to H)]$ tw 1 b: $H/(\neg(\neg H \vee \neg F)); F/(\neg\neg H); G/H$
16. $(\neg\neg H \to H) \to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to H)$ MP 15, 13
17. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to H$ MP 16, 14
18. $(\neg F \to (\neg H \vee \neg F)) \to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg F)$
    tw 2: $H/(\neg F); F/(\neg H \vee \neg F)$
19. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg F$ MP 18, 11
20. $\neg\neg F \to F$ aks 14: H/F
21. $(\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg\neg F) \to [(\neg\neg F \to F) \to$
    $\to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to F)]$ tw 8 b: $H/(\neg(\neg H \vee \neg F)), F/(\neg\neg F), G/F$
22. $(\neg\neg F \to F) \to (\neg(\neg H \vee \neg F) \to F)$ MP 21, 19
23. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to F$ MP 22, 20
24. $H \to (F \to H \wedge F)$ aks 5
25. $(H \to (F \to H \wedge F)) \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to$
    $\to (H \to (F \to H \wedge F))]$
    aks 1: $H/(H \to (F \to H \wedge F)); F/\neg(\neg H \vee \neg F)$
26. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to (H \to (F \to H \wedge F))$ MP 25, 24
27. $[\neg(\neg H \vee \neg F) \to (H \to (F \to H \wedge F))] \to$
    $\to \{[\neg(\neg H \vee \neg F) \to H] \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to (F \to$
    $\to H \wedge F)]\}$ aks 2: $H/\neg(\neg H \vee \neg F); F/H; G/(F \to H \wedge F))$
28. $[\neg(\neg H \vee \neg F) \to H] \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to (F \to H \wedge F)]$ MP 27, 26
29. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to (F \to H \wedge F)$ MP 28, 17
30. $[\neg(\neg H \vee \neg F) \to (F \to H \wedge F)] \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to$
    $\to F] \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to H \wedge F]$
    aks 2: $H/\neg(\neg H \vee \neg F); G/(H \wedge F))$
31. $[\neg(\neg H \vee \neg F) \to F] \to [\neg(\neg H \vee \neg F) \to H \wedge F]$ MP 30, 29

32. $\neg(\neg H \vee \neg F) \to H \wedge F$ MP 31, 23

33. $(\neg(\neg H \vee \neg F) \to H \wedge F) \to (\neg(H \wedge F) \to$
$\to \neg\neg(\neg H \vee \neg F))$ tw 9: $H/\neg(\neg H \vee \neg F); F/(H \wedge F)$

34. $\neg(H \wedge F) \to \neg\neg(\neg H \vee \neg F)$ MP 34, 33

35. $\neg\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg H \vee \neg F$
aks 14: $H/(\neg H \vee \neg F)$

36. $[\neg(H \wedge F) \to \neg\neg(\neg H \vee \neg F)] \to [(\neg\neg(\neg H \vee \neg F) \to$
$\to \neg H \vee \neg F) \to (\neg(H \wedge F) \to \neg H \vee \neg F)]$
tw 8 b: $H/\neg(H \wedge F); F/\neg\neg(\neg H \vee \neg F); G/(\neg H \vee \neg F)$

37. $(\neg\neg(\neg H \vee \neg F) \to \neg H \vee \neg F) \to (\neg(H \wedge F) \to$
$\to \neg H \vee \neg F)$ MP 36, 34

38. $(\neg(H \wedge F) \to \neg H \vee \neg F)$ MP 37, 35

39. $(\neg(H \wedge F) \to \neg H \vee \neg F) \to [(\neg H \vee \neg F \to \neg(H \wedge F)) \to$
$\to (\neg(H \wedge F) \equiv \neg H \vee \neg F))$
aks 11: $H/\neg(H \wedge F); F/(\neg H \vee \neg F)$

40. $(\neg H \vee \neg F \to \neg(H \wedge F)) \to (\neg(H \wedge F) \equiv \neg H \vee \neg F)$ MP 39, 38

41. $\neg(H \wedge F) \equiv \neg H \vee \neg F$ MP 40, 9

THM

Wykorzystując ideę poprzedniego dowodu (kroki 24–32) można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11

$(H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to F \wedge G))$

THM

Podamy jeszcze jedną aksjomatykę klasycznego rachunku zdań:

1. $H \to (F \to H)$
2. $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$
3. $((H \to F) \to H) \to H$

4. $H \wedge F \to H$
5. $H \wedge F \to F$
6. $(H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to F \wedge G))$

7. $H \to H \vee F$
8. $F \to H \vee F$
9. $(H \to F) \to ((G \to F) \to (H \vee G \to F))$

10. $(H \equiv F) \to (H \to F)$
11. $(H \equiv F) \to (F \to H)$
12. $(H \to F) \to ((F \to H) \to (H \equiv F))$

13. $(H \to F) \to (\neg F \to \neg H)$
14. $H \to \neg\neg H$
15. $\neg\neg H \to H$

$$\frac{H \to F, H}{F}$$

Twierdzenie 12

$H \to H$

Dowód: 1. $((H \to F) \to H) \to H$ — aks 3

2. $H \to ((H \to F) \to H)$ — aks 1: $H/(H \to F)$

3. $(H \to ((H \to F) \to H)) \to [(((H \to F) \to H) \to$
$\to H) \to (H \to H)]$ — aks 2: $F/((H \to F) \to H); G/H$

4. $(((H \to F) \to H) \to H) \to (H \to H)$ — MP 2, 3

5. $H \to H$ — MP 4, 1

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 13

$H \wedge F \to F \wedge H$

Dowód: 1. $H \wedge F \to F$ — aks 5

2. $H \wedge F \to H$ — aks 4

3. $(H \wedge F \to F) \to ((H \wedge F \to H) \to (H \wedge F \to F \wedge H))$ — aks 6: $H/(H \wedge F); G/H$

4. $(H \wedge F \to H) \to (H \wedge F \to F \wedge H)$ — MP 3, 1

5. $H \wedge F \to F \wedge H$ — MP 4, 2

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 14
$H \vee F \to F \vee H$

Dowód: 1. $H \to F \vee H$ — aks 8: $F/H; H/F$
2. $F \to F \vee H$ — aks 7: $F/H; H/F$
3. $(H \to F \vee H) \to ((F \to F \vee H) \to (H \vee F \to F \vee H))$
aks 9: $F/(F \vee H); G/F$
4. $(F \to F \vee H) \to (H \vee F \to F \vee H)$ — MP 3, 1
5. $H \vee F \to F \vee H$ — MP 4, 2
$\boxed{THM}$

Twierdzenie 15
$H \wedge (F \wedge G) \to (H \wedge F) \wedge G$

Dowód: 1. $F \wedge G \to F$ — aks 4: $H/F; F/G$
2. $F \wedge G \to G$ — aks 5: $H/F; F/G$
3. $H \wedge (F \wedge G) \to F \wedge G$ — aks 5: $F/F \wedge G$
4. $H \wedge (F \wedge G) \to H$ — aks 4: $F/F \wedge G$
5. $(H \wedge (F \wedge G) \to F \wedge G) \to ((F \wedge G \to F) \to$
$\to (H \wedge (F \wedge G) \to F))$
aks 3: $H/H \wedge (F \wedge G); F/F \wedge G; G/F$
6. $((F \wedge G \to F) \to (H \wedge (F \wedge G) \to F))$ — MP 5, 3
7. $(H \wedge (F \wedge G) \to F)$ — MP 6, 3
8. $(H \wedge (F \wedge G) \to F \wedge G) \to ((F \wedge G \to G) \to$
$\to (H \wedge (F \wedge G) \to G))$ — aks 2: $H/H \wedge (F \wedge G); F/F \wedge G$
9. $(F \wedge G \to G) \to (H \wedge (F \wedge G) \to G)$ — MP 8, 3
10. $H \wedge (F \wedge G) \to G$ — MP 9, 2
11. $(H \wedge (F \wedge G) \to H) \to ((H \wedge (F \wedge G) \to F) \to$
$\to (H \wedge (F \wedge G) \to H \wedge F))$ — aks 6: $H/H \wedge (F \wedge G); F/H, G/F$
12. $(H \wedge (F \wedge G) \to F) \to (H \wedge (F \wedge G) \to H \wedge F)$ — MP 11, 4
13. $H \wedge (F \wedge G) \to H \wedge F$ — MP 12, 7
14. $(H \wedge (F \wedge G) \to H \wedge F) \to ((H \wedge (F \wedge G) \to G) \to$
$\to (H \wedge (F \wedge G) \to (H \wedge F) \wedge G))$
aks 6: $H/H \wedge (F \wedge G); F/H \wedge F; G/F$

15. $(H \wedge (F \wedge G) \to G) \to (H \wedge (F \wedge G) \to (H \wedge F) \wedge G)$ MP 14, 13
16. $H \wedge (F \wedge G) \to (H \wedge F) \wedge G$ MP 15, 10

$\boxed{THM}$

Twierdzenie 16

$H \vee (F \vee G) \to (H \vee F) \vee G$

Dowód: 1. $H \to H \vee F$ aks 7

2. $H \vee F \to (H \vee F) \vee G$ aks 7: $H/H \vee F; F/G$
3. $F \to H \vee F$ aks 8
4. $G \to (H \vee F) \vee G$ aks 8: $F/G; H/H \vee F$
5. $(H \to H \vee F) \to ((H \vee F \to (H \vee F) \vee G) \to (H \to$
$\to (H \vee F) \vee G))$ aks 2: $F/H \vee F; G/(H \vee F) \vee G$
6. $(H \vee F \to (H \vee F) \vee G) \to (H \to (H \vee F) \vee G)$ MP 5, 1
7. $H \to (H \vee F) \vee G$ MP 6, 2
8. $(F \to H \vee F) \to ((H \vee F \to$
$\to (H \vee F) \vee G) \to (F \to (H \vee F) \vee G))$
aks 2: $H/F; F/H \vee F; G/(H \vee F) \vee G$
9. $(H \vee F \to (H \vee F) \vee G) \to (F \to (H \vee F) \vee G)$ MP 8, 3
10. $F \to (H \vee F) \vee G$ MP 9, 2
11. $(F \to (H \vee F) \vee G) \to ((G \to (H \vee F) \vee G) \to$
$\to (F \vee G \to (H \vee F) \vee G))$ aks 9: $H/F; F/(H \vee F) \vee G$
12. $(G \to (H \vee F) \vee G) \to (F \vee G \to (H \vee F) \vee G)$ MP 11, 10
13. $F \vee G \to (H \vee F) \vee G$ MP 12, 4
14. $(H \to (H \vee F) \vee G) \to ((F \vee G \to (H \vee F) \vee G) \to$
$\to (H \vee (F \vee G) \to (H \vee F) \vee G))$ aks 9: $F/(H \vee F) \vee G; G/F \vee G$
15. $(F \vee G \to (H \vee F) \vee G) \to (H \vee (F \vee G) \to (H \vee F) \vee G)$ MP 14, 7
16. $H \vee (F \vee G) \to (H \vee F) \vee G$ MP 15, 13

$\boxed{THM}$

Dodatek 2

Postacie normalne. Wzajemna definiowalność funktorów

Następna definicja określa, kiedy formuła przyjmuje tzw. alternatywną postać normalną.

Definicja 14

1. *Każda zmienna zdaniowa i negacja zmiennej zdaniowej ma* alternatywną postać normalną.
2. *Dowolna skończona koniunkcja zmiennych zdaniowych bądź ich negacji ma* alternatywną postać normalną.
3. *Jeśli H ma alternatywną postać normalną, zaś F została wymieniona w 1 lub 2, to $H \vee F$ ma* alternatywną postać normalną.
4. *Tylko formuły wymienione w 1, 2 i 3 mają* alternatywną postać normalną.

$\boxed{DEF}$

Uwaga. Dualnie definiuje się koniunkcyjną postać normalną.

Definicja 15

Niech $m \in \mathcal{N}$ oraz $\{f, f_1, \ldots, f_m\}$ będzie zbiorem dowolnych funktorów prawdziwościowych. Mówimy, że funktor f jest definiowalny przez zbiór funktorów $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *wtw formuła zbudowana z jednego egzemplarza funktora f i odpowiedniej ilości zmiennych zdaniowych (zależnie od jego argumentowości) jest logicznie równoważna pewnej formule zbudowanej z funktorów ze zbioru $\{f_1, \ldots, f_m\}$ oraz z tych samych zmiennych.*

$\boxed{DEF}$

Uwaga. W powyższej definicji nie muszą być wszystkie wykorzystane zmienne zdaniowe jak również wszystkie funktory.

Przykład 4
Wszystkie funktory jedno- i dwuargumentowe definiowalne są przez $\{\vee, \neg\}$.

p	q	f_1	$\vee$	f_3	f_4	$\to$	f_6	$\equiv$	$\wedge$	$/$	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	$\downarrow$	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$$pf_1q \equiv p \vee \neg p$$

$$pf_3q \equiv p \vee \neg q$$

$$pf_4q \equiv p$$

$$p \to q \equiv \neg p \vee p$$

$$pf_6q \equiv q$$

$$(p \equiv q) \equiv \neg[(\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q)]$$

itd.

$\boxed{EX}$

W powyższym przykładzie przydatne jest następujące twierdzenie:

Lemat 7
Zastępowanie w formule jej podformuły przez formułę równoważną logicznie, zachowuje wartość logiczną całości, w szczególności opisana operacja prowadzi od tautologii do tautologii.

$\boxed{LEM}$

Twierdzenie 17
Dowolny prawdziwościowy funktor skończenie argumentowy jest definiowalny przez zbiór $\{\vee, \neg\}$.

Dowód (szkic): Niech f będzie funktorem n–argumentowym. Rozpatrzmy formułę $f(p_1, \ldots, p_n)$ (oczywiście musimy rozszerzyć definicję formuły rachunku zdań na tego rodzaju napisy). Przypuśćmy, że istnieje wartościowanie, dla którego jest ona prawdziwa (jeśli takowego nie ma, to szukana formuła ma postać np. $\neg(p_1 \vee \neg p_1)$).

Dla każdego wartościowania w, dla którego $w(f(p_1, \ldots, p_n)) = 1$ konstruujemy koniunkcję $\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_i := p_i$ o ile $w(p_i) = 1$, zaś $\varepsilon_i := \neg p_i$ w przeciwnym przypadku. Szukana formuła, to alternatywa powyższych koniunkcji dla wszystkich wartościowań weryfikujących formułę $f(p_1, \ldots, p_n)$. Aby wyeliminować z niej koniunkcje wystarczy zastosować następującą wersję prawa de Morgana:

$$(H_1 \wedge \ldots \wedge H_n) \equiv \neg(\neg H_1 \vee \ldots \vee \neg H_n)$$

$\boxed{THM}$

Posługując się sposobem użytym w twierdzeniu 17 łatwo pokazać:

Twierdzenie 18

Dla każdej formuły klasycznego rachunku zdań istnieje równoważna logicznie formuła o alternatywnej postaci normalnej.

$\boxed{THM}$

Określamy dwa dalsze funktory, a mianowicie funktor Sheffera (/) i Łukasiewicza ($\downarrow$):

p	q	p/q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

łatwo wykazać, że za ich pomocą można definiować następujące funktory: $\wedge, \vee, \neg$. Z tej obserwacji oraz z twierdzeń 17 i 18 natychmiast wynika następujący wniosek.

Wniosek 6

1. *Każdy funktor skończenie argumentowy definiowalny jest przez funktor /, jak również przez funktor ↓.*

2. *Każda formuła klasycznego rachunku zdań jest równoważna logicznie pewnej formule zbudowanej z / (podobnie dla ↓).*

$\boxed{WN}$

Dodatek 3

System dedukcji naturalnej

Pod koniec lat dwudziestych zaczęły się prace nad syntaktycznym ujęciem klasycznego rachunku zdań, w którym dowody twierdzeń lepiej niż w systemie aksjomatycznym odpowiadałyby „naturalnemu sposobowi" uzasadniania tez. Odpowiednie systemy formalne, tzw. systemy dedukcji naturalnej, zostały wypracowane niezależnie przez Stanisława Jaśkowskiego i Gerharda Gentzena.

Dla każdego spójnika występującego w języku określa się za pomocą dwóch reguł, jak można ten spójnik wprowadzać do dowodu (tzn. dołączyć formułę o tym spójniku jako spójnik główny), względnie go eliminować (tzn. „rozbić" formuły o danym spójniku).

(WK) $\dfrac{H\,,\;\; F}{H \wedge F}$ **(OK)** $\dfrac{H \wedge F}{H}$

$$\dfrac{H \wedge F}{F}$$

(WA) $\dfrac{H}{H \vee F}$ **(OA)** $\dfrac{H \vee F\,,\;\; \neg H}{F}$

$$\dfrac{F}{H \vee F} \qquad \dfrac{H \vee F\,,\;\; \neg F}{H}$$

(WI) $\dfrac{F}{H \to F}$ (OI) $\dfrac{H \to F\,,\ H}{F}$

(WR) $\dfrac{H \to F\,,\ F \to H}{H \equiv F}$ (OR) $\dfrac{H \equiv F}{H \to F}$ $\dfrac{H \equiv F}{F \to H}$

(WN) $\dfrac{H \to F\,,\ H \to \neg F}{\neg H}$ (ON) $\dfrac{\neg\neg H}{H}$

Powyższe reguły należy tak rozumieć, że formuły stojące w liczniku muszą się znaleźć w dowodzie, by móc dopisać formułę stojącą w mianowniku jako nową linijkę. Reguły (WK), (OA), (OI), (WR) oraz (WN) żądają zatem dwie formuły, które muszą się znaleźć w dowodzie, by móc dopisać formułę figurującą w mianowniku. Reguły (OK) i (OR) zaś pozwolą dołączyć dwie różne formuły do dowodu, o ile w dowodzie znajdują się formuły z licznika odpowiednich reguł.

Podstawowa idea dowodów przeprowadzonych w systemach dedukcji naturalnej (tzw. dowodów założeniowych) jest następująca: Opierając się na pewnych przesłankach należy przeprowadzać konstrukcję formuły, którą zamierza się dowieść. Posunięcia dozwolone w tej konstrukcji określa metareguła systemu dedukcji naturalnej.

Metareguła

1. Każda formuła figurująca w dowodzie posiada numer.

2. Pierwszymi formułami dowodu (tzn. założeniami dowodu wprost) są wszystkie kolejne poprzedniki implikacji formuły, którą zamierza się dowieść (o ile istnieją, tzn. o ile teza dowodu jest postaci implikacji). Dodatkowym założeniem dowodu nie wprost jest negacja ostatecznego następnika.

3. (a) Można wydedukować nowe formuły stosując reguły wprowadzenia i eliminacji spójników.

   (b) Można wprowadzać dowolne formuły jako hipotezy. Numery takich formuł należy odpowiednio oznaczać. Oznakowanie to przenosi się na numer każdej formuły, która jest wyprowadzana za pomocą formuły o numerze oznakowanym. Oznakowanie znika, budując implikację o poprzedniku będącym hipotezą i o następniku będącym dowolnym wnioskiem z tejże hipotezy (znaczy to, że wniosek posiada numer tak samo oznaczony co numer hipotezy).

4. Dowód wprost kończy się nieoznakowaną formułą będącą ostatecznym następnikiem tezy. (Z takiej formuły można bezpośrednio zrekonstruować całą tezę, korzystając z reguły (WI).) Dowód nie wprost kończy się nieoznakowanymi formułami sprzecznymi. (Lub koniunkcją formuł sprzecznych – jest to równoważnie na bazie reguł (WK, OK).)

Każdą formułę już udowodnioną można w dowolnym miejscu dołączyć do dowodu. Podobnie można skorzystać z każdej reguły wtórnej, tzn. z każdej reguły o wykazanej przez dowód założeniowy niezawodności. Poprawność reguł wykazuje się standardowym sposobem: zakładając, że zachodzą przesłanki, należy udowodnić wniosek.

Przykład 5 Wykazać poprawność reguły Modus Tollens:

$$\frac{H \to F\ ,\ \neg F}{\neg H}$$

1.	$H \to F$	zał.
2.	$\neg F$	zał.
3.	$H \to \neg F$	WI 2
4.	$\neg H$	WN 1, 3

$\boxed{EX}$

Przykład 6 Wykazać prawdziwość formuły:

$$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$$

1. $p \to q$ zał.
2. $\neg p \to q$ zał.
3. $\neg q$ zał. dowodu nie wprost
4. $\neg p$ modus tollens 1, 3
5. $\neg\neg p$ modus tollens 2, 3
6. $\neg p \land \neg\neg p$ WK 4, 5

$\boxed{EX}$

Przykład 7 Wykazać poprawność następującej reguły:

$$\frac{H \to F\ ,\ \ G \to F_1}{H \lor G \to F \lor F_1}$$

1. $H \to F$ zał.
2. $G \to F_1$ zał.
3. $H \lor G$ zał.

$*$ 4. G hipoteza 1

$*$ 5. F_1 OI 2, 3

$*$ 6. $F \lor F_1$ WA 5

7. $G \to F \lor F_1$ O$*$ 4, 6

$\star$ 8. $\neg G$ hipoteza 2

$\star$ 9. H OA 3, 8

$\star$ 10. F OI 1, 9

$\star$ 11. $F \lor F_1$ WA 10

12. $\neg G \to F \lor F_1$ O$\star$ 8, 11

13. $(G \to F \lor F_1) \to ((\neg G \to F \lor F_1) \to F \lor F_1)$ patrz przykład 2

14. $(\neg G \rightarrow F \vee F_1) \rightarrow F \vee F_1)$ OI 7, 13

15. $F \vee F_1$ OI 12, 14

$\boxed{EX}$

Definicja 16 *Formuła H da się* wydedukować *ze zbioru formuł X [symb.: $H \in C_3(X)$] wtw istnieje dowód założeniowy (wprost czy też nie wprost) dla H na podstawie założeń ze zbioru X.* $\boxed{\text{DEF}}$

Twierdzenie 19
C_3 jest operacją konsekwencji.

Dowód:
standardowy, ćwiczenie! $\boxed{THM}$

Twierdzenie 20
Dla wszystkich $X \subseteq FOR$ zachodzi:

$$C_2(X) \subseteq C_3(X) \subseteq C_1(X)$$

Dowód: Pierwsza inkluzja wynika z tego, że wszystkie aksjomaty klasycznego rachunku zdań posiadają dowód założeniowy [ćwiczenie!], a jedyna reguła wnioskowania Modus Ponens odpowiada regule (OI). Druga inkluzja jest prawdziwa, gdyż wszystkie reguły systemu dedukcji naturalnej są regułami poprawnymi [ćwiczenie!]. $\boxed{THM}$

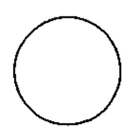
Otrzymaliśmy zatem trzecie, obok semantycznego i syntaktycznego, przedstawienie klasycznego rachunku zdań: $\langle FOR, C_3\rangle$.

Dodatek 4

Podstawowe pojęcia teorii mnogości

Twórcą teoria mnogości jest Georg Cantor [1845-1918]. Podstawowe jej pojęcia *zbiór* i *należenie elementu do zbioru* są pierwotne - nie definiujemy ich. Charakteryzowane są przez aksjomaty, wyrażające związki między nimi. Intuicyjnie zbiory, to mnogości obiektów, o których mówimy, że należą do danego zbioru lub że są jego elementami. Z punktu widzenia teorii zbiorów nie ważna jest istota owych obiektów. Abstrahujemy od tego, czym one są.

Dla przejrzystości zapisu używamy tradycyjnych skrótów: zbiory oznaczamy dużymi literami A, B, C itd., należenie oznaczamy przez $\in$. Zbiory można obrazować za pomocą okręgów - diagramów Venne'a:



Zwykle wprowadza się zbiór *pusty* (ozn. $\emptyset$), który można scharakteryzować jako zbiór nie posiadający elementów. Na zbiorach można zdefiniować działania i rozpatrywać rozmaite zależności.

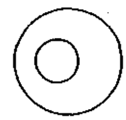
Jeśli zbiór ma skończoną ilość elementów, to wypisujemy je w klamrowych nawiasach np. {2, -3, 8, 2}.

Dla każdego zbioru A istnieje jego podzbiór B, złożony z elementów spełniających dany warunek ϕ: $B = \{x \in A; \phi(x)\}$

Zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B (inaczej: A jest podzbiorem B lub B jest nadzbiorem A; ozn. $A \subseteq B$) wtw każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Przykład: zbiór wszystkich Polaków jest zawarty w zbiorze wszystkich ludzi.

Graficznie taką sytuację można przedstawić następująco:



$A \subseteq B$

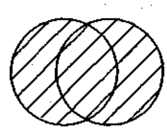
Zbiory są *identyczne* (*równe*) ($A = B$) wtw mają te same elementy (jest to tzw. zasada ekstensjonalności). Posługując się prawami logiki i wypowiedzianymi powyżej definicjami można pokazać, że istnieje dokładnie jeden zbiór pusty. Łatwo zauważyć, że jeśli dwa zbiory są identyczne, to się w sobie zawierają. Stąd wynika, że jeśli wypisujemy elementy dwóch zbiorów równych, to nie ważna jest kolejność ich wymieniania, ani ilość powtórzeń, istotne jest natomiast, żeby każdy element, który pojawił się w jednym zbiorze, występował także w drugim i na odwrót.

Odnotujmy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Podstawowe operacje na zbiorach:

Suma zbiorów A i B (ozn. $A \cup B$) jest to zbiór, którego elementami są wszystkie elementy należące do zbioru A lub B.

Przykład: sumą zbioru liczb parzystych i nieparzystych jest zbiór liczb naturalnych.

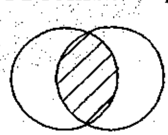


$A \cup B$

Sumą dowolnej rodziny zbiorów (jeśli elementami zbioru są zbiory, to mówimy o nim „rodzina zbiorów") $\{A_i\}_{i \in I}$ (skrótowy zapis zbioru indeksowego, którego elementami są zbiory A_i dla każdego indeksu $i \in I$) jest zbiór tych elementów, które należą do jakiegoś zbioru A_i (ozn. $\bigcup_{i \in I} A_i$) czyli $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff$ dla pewnego $i \in I, x \in A_i$.

Przekrój (inaczej iloczyn lub część wspólna) zbiorów A i B (ozn. $A \cap B$) jest to zbiór tych elementów, które należą zarówno do zbioru A jak i B.

Przykład: przekrojem zbioru rombów i prostokątów jest zbiór kwadratów.

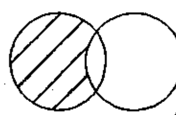


$A \cap B$

Podobnie jak z w przypadku sumy, także iloczyn zbiorów można uogólnić. Przekrojem dowolnej rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i \in I}$ (ozn. $\bigcap_{i \in I} A_i$) jest zbiór elementów, które należą do każdego zbioru A_i.

Różnica zbiorów A i B (ozn. $A - B$) jest to zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i jednocześnie nie należą do zbioru B.

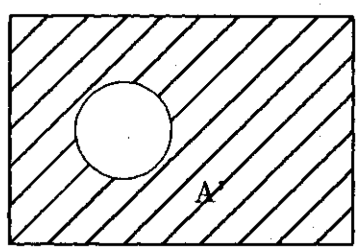
Przykład: Różnicą zbioru wszystkich ludzi i zbioru wszystkich kobiet jest zbiór wszystkich mężczyzn.



$A - B$

Dopełnienie zbioru A względem ustalonego uniwersum Ω (ozn. A') jest to zbiór tych elementów, które należą do zbioru Ω i jednocześnie nie należą do zbioru A ($A' := \Omega - A$).

Przykład: dopełnienie zbioru drzew iglastych względem uniwersum wszystkich drzew to zbiór drzew liściastych.



Posługując się powyższymi definicjami i prawami logicznymi można pokazać, że dla dowolnych zbiorów zachodzą następujące równości:

$(A \cap B) = (B \cap A)$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$A - (A - B) = (A \cap B)$

Wykazując ich prawdziwość można posłużyć się podanymi powyżej ilustracjami graficznymi.

Często używanym pojęciem jest *para uporządkowana*. Ważna jest w niej kolejność wyrazów (w odróżnieniu do zbioru dwuelementowego, w którym porządek wypisywania elementów nie ma znaczenia). Powyższy warunek spełnia następująca konstrukcja pary o wyrazach a i b: definicja: $\langle a,b\rangle := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Korzystając z wprowadzonej definicji określimy iloczyn kartezjański (inaczej produkt) skończonej ilości zbiorów:

Dla dowolnych zbiorów A i B przez ich *iloczyn kartezjański* rozumiemy zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle a,b\rangle$, gdzie $a \in A$ oraz $b \in B$

Relacją dwuargumentową R określoną na zbiorze A o wartościach w B nazywamy każdy podzbiór produktu $A \times B$. Analogicznie można zdefiniować relację *$n-$argumentową*, przy czym wówczas należy się posłużyć pojęciem produktu rodziny zbiorów $A_1,\ldots,A_n$. Wystarczy w tym celu rozpatrywać n-ki uporządkowane, które można zdefiniować za pomocą poznanej już pary uporządkowanej:

$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle := \langle\langle a_1,\ldots a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$, dla $a_i \in A_i$.

Gdy $\langle a,b\rangle \in R$, to mówimy, że *a jest w relacji R do b.*

Jeśli $R \subseteq A \times B$, to podzbiór zbioru A złożony z elementów, które są w relacji R do pewnego elementu należącego do B, nazywamy *dziedziną R.* Podzbiór zbioru B złożony z tych elementów b, dla których istnieje element a zbioru A, będący w relacji R do b, nazywamy *zbiorem wartości relacji R.*

Przez *$n-$tą potęgę zbioru A* (ozn. A^n) rozumiemy, zbiór n-tek uporządkowanych, których każdy wyraz należy do A.

Relację dwuargumentową f określoną na zbiorze A o wartościach w B nazywamy *funkcją* jeśli dziedziną f jest A i każdy z elementów tego zbioru jest w relacji f do dokładnie jednego elementu zbioru B (ozn. $f : A \longrightarrow B$). Zbiór B nazywamy przeciwdziedziną f. Jeśli zbiór wartości równa się przeciwdziedzinie, to mówimy, że funkcja jest „na” (inaczej *suriekcja*). Jeśli każdy z elementów zbioru wartości jest wartością tylko jednego argumentu, to funkcja jest *różnowartościowa* (*injekcja*). Funkcja różnowartościowa i „na” zwana jest *bijekcją.*

Dodatek 5

Zadania do klasycznego rachunku zdań

1. Które z poniższych zdań są zdaniami w sensie logicznym:

   (a) Toruń leży nad Wisłą. (T)

   (b) W. Iksiński wyskoczył przez okno. (T)

   (c) J. Nowakówna jest piękna(T), a K. Kowalski uważa ją za brzydką (T). (całość T)

   (d) Chciałbym pilotować odrzutowiec. (N)

   (e) Przyjdę do Ciebie dziś wieczorem. (N)

   (f) Należy przestrzegać zasad etyki. (N)

   (g) Czy głupotę można mierzyć w calach? (N)

2. Określić spójnik zdaniotwórczy (na podstawie tablicy zero-jedynkowej), który odpowiada wyrażeniu „...tylko wtedy, gdy...". Spójnik taki nazywa się *replikacją.*

3. Jakie tabelki prawdziwościowe odpowiadają następującym spójnikom?

   (a) ...a...

   (b) ...albo...

   (c) ani...ani...

   (d) ...bądź...

   (e) ...i...

   (f) jeśli..., to...

(g) ...lub...

(h) ..., o ile...

(i) ...oraz...

(j) ...chyba, że nie...

(k) ...wtedy gdy...

(l) ...zawsze gdy...

4. Sformalizować następujące zdania:

   (a) Żelazo i miedź przewodzą prąd elektryczny.

   (b) Kto podrabia lub fałszuje banknoty i wprowadza je w obieg lub celowo stara się o podrobione lub sfałszowane a następnie wprowadza je w obieg, będzie ukarany.

   (c) Jeśli Jan uważa Olka za dziwaka, o ile ten go omija, gdyż przy okazji każdego spotkania próbuje pożyczyć od Olka pieniądze, to Olek uważa Jana za dziwaka.

5. Podaj przykłady zdań, których schematami są następujące formuły KRZ:

   (a) $p \land q \to p$

   (b) $p \lor q \to r$

   (c) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

   (d) $(p \land q) \lor r$

   (e) $\neg p \land q$

   Zwróć uwagę na jednoznaczność interpretacji Twoich zdań (np. poprzez użycie nawiasów).

6. Wybierz spośród niżej wymienionych napisów formuły klasycznego rachunku zdań:

   (a) $(p \to q) \land r$ (T)

   (b) $p \to q \land r$ (T, zgodnie z konwencją nawiasów)

(c) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg)$ (T)

(d) $(p) \vee (r)$ (T)

(e) $(r) \leftarrow \neg(q)$ (N)

(f) $p \vee r \vee s$ (T, jako alternatywa wieloskładnikowa)

(g) $p \to r \to s$ (N)

Czy i kiedy można opuszczać nawiasy?

7. Uprościć zgodnie z konwencją nawiasów:

- $(((p \wedge q) \to (q \vee r)) \wedge (\neg p))$
- $((p_1 \to ((p_2 \wedge p_3) \wedge p_4)) \to p_5)$

8. Pamiętając o umowie dotyczącej mocy funktorów uzupełnij opuszczone nawiasy:

- $q \wedge r \vee \neg p \to r \equiv \neg s \to p \vee r$

9. Jeśli H jest tautologią, F kontrtautologią, zaś G funkcją kontyngentną, to co można powiedzieć o następujących formułach:

(a) $H \vee G$

(b) $H \wedge G$

(c) $G \to F$

(d) $\neg G$

(e) $\neg H \to F$

10. Które z poniższych zdań pozwalają na ustalenie wartości logicznej H?

(a) H tworzy z dowolnymi innymi zdaniami prawdziwe alternatywy.

(b) Z niektórymi zdaniami H tworzy fałszywe koniunkcje.

(c) Implikacje o następniku H zawsze są prawdziwe.

(d) Negacja H czasami jest fałszywa.

(e) Z niektórymi innymi zdaniami H tworzy prawdziwe równoważności.

11. Sprawdzić tautologiczność następujących formuł metodą zero-jedynkową, nie wprost i skrótową :

- $p \rightarrow p$
- $p \equiv p$
- $p \rightarrow \neg\neg p$
- $\neg\neg p \rightarrow p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q)]$
- $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge p \rightarrow r \wedge q)$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
- $(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow (p \wedge r \equiv q \wedge s)$
- $(p \equiv q) \wedge (r \equiv s) \rightarrow (p \vee r \equiv q \vee s)$

- $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
- $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
- $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$
- $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
- $((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$
- $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to \neg q \vee r)$
- $((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$
- $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$
- $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
- $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$
- $(\neg p \vee q) \to (p \to q)$
- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
- $\neg(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv q)$
- $\neg(p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$

12. Sprawdzić czy następujące reguły zachowują prawdziwość

(a) $\dfrac{H \to G, H}{G}$

(b) $\dfrac{H \vee G, \neg H}{G}$

(c) $\dfrac{H}{H \vee G}$

(d) $\dfrac{G}{H \vee G}$

(e) $\dfrac{H \vee G, H}{G}$

(f) $\dfrac{H \wedge G}{H}$

(g) $\dfrac{H \wedge G}{G}$

(h) $\dfrac{H \to G}{\neg H \to \neg G}$

13. Które z następujących reguł zachowują tautologiczność

(a) $\dfrac{H, G}{H \to G, H}$

(b) $\dfrac{H, H \to F}{F}$

(c) $\dfrac{H \vee G, \neg H}{G}$

(d) $\dfrac{H}{H \wedge G}$

(e) $\dfrac{G}{H \vee G}$

(f) $\dfrac{H \vee G, H}{G}$

(g) $\dfrac{H \to G}{\neg H \to \neg G}$

14. „Jeśli Franek nie zdąży na autobus, to spóźni się na wykład". Czy z tego wynika, że zdążywszy na autobus nie spóźni się?

15. Sprawdzić, czy też kolejne wnioskowania są poprawne:

(a) Jeśli Jan Kowalski ma długi i nie jest odporny psychicznie, to strzeli sobie w głowę. A zatem jeśli Jan Kowalski ma długi i nie strzeli sobie w głowę, to jest odporny psychicznie.

(b) Jeśli nie jest prawdą, że równocześnie jesteśmy młodzi i jesteśmy mądrzy, to nie jesteśmy młodzi lub nie jesteśmy mądrzy.

(c) Jeżeli Maciek jest niedoświadczony, to postąpi zgodnie z własnymi przekonaniami. Jeżeli Maciek jest uczciwy, to jest niedoświadczony. Jeżeli Maciek nie jest uczciwy, to nie przyznaje się do własnych błędów. Lecz Maciek przyznaje się do własnych błędów; zatem postąpi zgodnie z własnymi przekonaniami.

(d) Jeśli nikotyna jest szkodliwa, to palenie tytoniu jest niezdrowe, więc jeśli palenie tytoniu nie jest niezdrowe, to nikotyna nie jest szkodliwa.

16. Ktoś tłumaczy zalety uczenia się logiki na przykładzie. „Jeśli ktoś ma w domu papugę, to interesuje się zwierzętami. A zatem nie są mu

obojętne sprawy przyrody. Dlatego dba on o zachowanie naturalnego środowiska, tzn. że nie wywozi swych odpadów do lasu." Wywód ten robi duże wrażenie na słuchaczu, który od razu postanawia wykorzystać świeżo nabytą wiedzę. Pyta się znajomego, czy ma papugę, a ten zaprzecza. „Aha, to Ty swoje śmieci wywozisz do lasu." Ten oburza się nie bez podstaw. Jaki błąd logiczny popełnił nasz adept?

17. Czterolatek dowiaduje się, że jutro pójdzie do kina i zastanawia się: „Pamiętam jak mama mówiła, że jutro będzie u nas babcia. A babcia właśnie przyszła. Czyli dziś jest jutro i zaraz idziemy do kina!" W czym tkwi błąd?

18. Sprowadzić do koniunkcyjnej i alternatywnej postaci normalnej:

    (a) $(p \to r) \to (\neg p \land q)$
    (b) $(p \equiv q)$
    (c) $(p \lor r) \to (p \to q \land \neg r)$
    (d) $\neg(p \lor q) \to \neg p \land \neg q$
    (e) $p \land q \to (p \lor r \to q \lor r)$

19. Pokazać w oparciu o system aksjomatów, że

    (a) $\{p \equiv q, q \equiv r\} \vdash p \equiv r$
    (b) $\{p \equiv q\} \vdash \neg p \equiv \neg q$
    (c) $\{p \to q, r \to s\} \vdash p \land r \to q \land s$
    (d) $\{p \to q, r \to s\} \vdash p \lor r \to q \lor s$
    (e) $\{p \equiv q, r \equiv s\} \vdash p \land r \equiv q \land s$
    (f) $\{p \equiv q, r \equiv s\} \vdash p \lor r \equiv q \lor s$

20. Sprawdzić, czy następujące wynikania logiczne zachodzą:

    (a) $\{p \to q, s \lor \neg q, r \to p\} \models \neg(r \land \neg s)$
    (b) $\{p \lor q, \neg r \to \neg p, \neg s \to \neg q\} \models \neg s \to r$

21. Stosując dowód założeniowy wprost udowodnić następujące twierdzenia:

    (a) $(H \to F) \to ((H \to G) \to (H \to F \wedge G))$

    (b) $(H \to F) \to ((F \to G) \to (H \to G))$

    (c) $(H \to (F \to G)) \to [(F \to H) \to (F \to G)]$

22. Stosując dowód założeniowy nie wprost udowodnić następujące twierdzenia:

    (a) $\neg H \to (H \to F)$

    (b) $(H \to F) \equiv (\neg H \vee F)$

23. Interpretacją formuł klasycznego rachunku zdań nazywamy dowolną funkcję $\overline{v} : FOR \longrightarrow \{0,1\}$, która dla dowolnych formuł F, H spełnia poniższe warunki:

    $\overline{v}(\neg F) = 1 \iff \overline{v}(F) = 0,$

    $\overline{v}(F \vee H) = 1 \iff \overline{v}(F) = 1$ lub $\overline{v}(H) = 1,$

    $\overline{v}(F \wedge H) = 1 \iff \overline{v}(F) = 1$ i $\overline{v}(H) = 1,$

    $\overline{v}(F \to H) = 1 \iff \overline{v}(F) = 0$ lub $\overline{v}(H) = 1,$

    $\overline{v}(F \equiv H) = 1 \iff \overline{v}(F) = \overline{v}(H).$

    Udowodnij, że każde wartościowanie zmiennych $v : AT \longrightarrow \{0,1\}$ wyznacza dokładnie jedną interpretację formuł $\overline{v} : FOR \longrightarrow \{0,1\}$, i na odwrót.

24. Pokazać, że własność bycia tautologią zachowana jest przez podstawianie formuł za zmienne.

    Wskazówka:

    Niech H będzie dowolną tautologią;
    $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zmiennymi zdaniowymi (niekoniecznie występującymi w formule H), zaś
    $H_1, H_2, \ldots, H_n$ dowolnymi formułami. Rozpatrzmy podstawienie
    $e : FOR \longrightarrow FOR$, takie że

$\forall_{p\in AT}((\forall_{1\leq i\leq n} p \neq p_i) \Longrightarrow e(p) = p)$ oraz

$\forall_{1\leq i\leq n} e(p_i) = H_i$.

Niech w - dowolne wartościowanie zmiennych. Rozpatrzmy wartościowanie w', takie że $w'(p_i) := w(H_i)$, zaś dla pozostałych zmiennych niech $w'(p) := w(p)$. Pokażemy, iż $w'(F) := w(e(F))$ dla dowolnej formuły F poprzez indukcję ze względu na złożoność formuły:

Jeśli H jest zmienną zdaniową, to tezę otrzymujemy wprost z definicji w' itd.

Ponieważ H była tautologią, zatem $1 = w'(H) = w(e(H))$.

25. Czy przy danej interpretacji podstawianie do formuł prawdziwych zachowuje prawdziwość.

26. Pokazać, że zastępowanie podformuły formułą równoważną nie zmienia wartości logicznej całości.

27. Pokazać, że następujące definicje formuły są równoważne:

A) Formułą jest każdy element najmniejszego zbioru spośród zbiorów X spełniającego warunki

   a) każda zmienna należy do X;

   b) jeśli H, F, należą do X, to również
      $\neg(H)$ należy do X,
      $(F) \vee (H)$ należy do X,
      $(F) \wedge (H)$ należy do X,
      $(F) \rightarrow (H)$ należy do X,
      $(F) \equiv (H)$ należy do X.

B) a) Formułą jest każda zmienna;

   b) jeśli H, F są formułami, to
      $\neg(H)$, $(F) \vee (H)$, $(F) \wedge (H)$, $(F) \rightarrow (H)$, $(F) \equiv (H)$ również;

   c) tylko wyrażenia wymienione w a), a także te, które uzyska się przy pomocy b) są formułami.

28. Przybysz z dalekiego kraju zna implikację logiczną. Należy mu wytłumaczyć znaczenie alternatywy. (Zdefiniować alternatywę przez implikację.)

29. Czy można mu wyjaśnić koniunkcję na podstawie implikacji i równoważności?

30. Ktoś mówi o spójniku, który jest prawdziwy dokładnie wtedy, gdy tylko jedno z dwóch wiązanych zdań jest fałszywe. Należy ten spójnik wyrazić w języku, w którym mamy do dyspozycji negację, koniunkcję oraz alternatywę. Jak taki spójnik brzmiałby w języku polskim?

31. Ile jest dwuargumentowych spójników klasycznych (tj. dwuwartościowych i ekstensjonalnych), a ile n–argumentowych?

32. Zdefiniuj za pomocą funktorów Sheffera (/) i Łukasiewicza ($\downarrow$) następujące funktory: $\wedge, \vee, \neg$.

p	q	p/q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

33. Pokazać, że funktory Sheffera i Łukasiewicza są jedynymi funktorami dwuargumentowymi definiującymi wszystkie pozostałe funktory prawdziwościowe.

34. Zdefiniować za pomocą par funktorów $\{\wedge, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$ wszystkie ekstensjonalne funktory dwuargumentowe.

Dodatek 6

Kolokwia

Niniejsze zestawy zadań powinno się rozwiązać bez żadnych dodatkowych pomocy naukowych. Czas trwania testu: 60 minut.

6.1. Kolokwium I

Zadanie 1:

Omówić zasadę ekstensjonalności!

(Ograniczenia względem naturalnego użycia języka, implikujące uproszczenia na poziomie formalnym.)

Zadanie 2:

Wykazać, że to rozumowanie jest logicznie poprawne!

- Jeśli studenci socjologii są dobrze wykształceni lub znajdą zatrudnienie w bankowości, to są zadowoleni.
- Tylko wtedy, jeśli są dobrze wykształceni, mogą solidnie pracować.
- Jeśli nie znajdą zatrudnienia w bankowości, to również mogą solidnie pracować.

  Wniosek

- Zatem są zadowoleni.

Zadanie 3:

Które z następujących formuł są tautologiami?

1. $(p \to \neg p) \to \neg p$
2. $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$
3. $((p \to q) \to p) \to p$
4. $(\neg p \to \neg(q \to q)) \to p$
5. $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$

Zadanie 4:

Udowodnić poprawność następujących reguł!

1. $\dfrac{\neg(H \to F)}{H}$
2. $\dfrac{H \to F\ ,\ \neg H \to \neg F}{H \equiv F}$
3. $\dfrac{\neg(H \vee F)}{\neg H \wedge \neg F}$

6.2. Kolokwium II

Zadanie 1:

Jaki jest stosunek pomiędzy poprawnością reguł a prawdziwością formuł?

Zadanie 2:

Wykazać, że poniższe rozumowanie jest logicznie poprawne. Jak się ma jej wniosek do doświadczeń fizycznych?

- Jeśli lód zostanie ogrzany powyżej 0°C, to się roztopi.
- Jeśli zawczasu się go uchroni przed działaniem słońca lub należycie ochłodzi, to się nie roztopi.
- A jeśli zawczasu się go nie uchroni przed działaniem słońca, to zostanie ogrzany powyżej 0°C.

  Wniosek

- Lód dokładnie wtedy się roztopi, gdy ogrzeje się go ponad 0°C.

Zadanie 3:

Które z następujących formuł są tautologiami?

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$
2. $p \to q \vee r \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$
3. $p \to q \equiv (p \equiv q)$
4. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Zadanie 4:

Udowodnić poprawność następujących reguł!

1. $$\frac{\neg(H \to F)}{\neg F}$$
2. $$\frac{H \vee \neg F\ ,\ \neg H \vee F}{H \equiv F}$$
3. $$\frac{\neg(H \equiv F)}{\neg(H \to F) \vee \neg(F \to H)}$$

Bibliografia

[1] Tadeusz Batóg: *Podstawy logiki*, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 1994.

[2] Józef M. Bocheński: *Logika i filozofia*, PWN, Warszawa 1993.

[3] Ludwik Borkowski: *Logika formalna*, PWN, Warszawa 1970.

[4] Andrzej Grzegorczyk: *Zarys logiki matematycznej*, PWN, Warszawa 1961.

[5] Jan Łukasiewicz: „Logistyka a filozofia", w: *Z zagadnień logiki i filozofii*, PWN, Warszawa 1961.

[6] Mieczysław Omyła: *Zarys logiki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

[7] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, : *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa 1972.

[8] *Filozofia/Logika: Filozofia Logiczna 1994*, Jerzy Perzanowski, Andrzej Pietruszczak, Cezary Gorzka (red.), Wydawnictwo UMK, Toruń 1995.

[9] *Byt, Logos, Matematyka. Filozofia/Logika: Filozofia Logiczna 1995*, Jerzy Perzanowski i Andrzej Pietruszczak (red.), Wydawnictwo UMK, Toruń 1997.

[10] Karl R. Popper: *Wiedza obiektywna*, PWN, Warszawa 1992.

[11] Willard Van Orman Quine: *Filozofia Logiki*, PWN, Warszawa 1977.

[12] Barbara Stanosz: *Ćwiczenia z logiki*, PWN, Warszawa 1977.

[13] Max Urchs: *Klassische Logik*, Akademie Verlag, Berlin 1993.

ISBN 83-231-0858-7