Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Ewolucja stochastyczna obserwowanych układów kwantowych

Anita Dąbrowska

Rozprawa doktorska
przygotowana pod kierunkiem
Dr hab. Przemysława Staszewskiego, prof. UMK

Toruń, 2008

Spis treści

Podziękowania

Serdeczne podziękowania za opiekę naukową, dyskusje oraz wiele cennych uwag składam Panu Profesorowi Przemysławowi Staszewskiemu.

I would also like to express my gratitude to Professor V. P. Belavkin for his kind hospitality during my stay in UK in 2006 and for offering illuminating discussions on quantum filtering theory.

I have also benefited from the correspondence with Professor A. Barchielli and my colleague, M. Guţă.

Rozdział 1

Wstęp

Mechanika kwantowa, przez ponad pół wieku swego istnienia, traktowana była jak teoria statystyczna, pozwalająca uzyskać przewidywania probabilistyczne za pomocą określonej dla zespołu układów kwantowych macierzy gęstości. Pogląd ten uległ zmianie dopiero w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku wraz z opracowywaniem pierwszych technik eksperymentalnych, które pozwoliły fizykom otrzymać wgląd w ewolucję czasową pojedynczych układów kwantowych. Metody teoretycznego opisu dynamiki czasowej układu kwantowego, warunkowanej wynikami prowadzonego w sposób ciągły pomiaru, wypracowane zostały w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku.

Ewolucji czasowej układu kwantowego poddanego obserwacji nie można opisać za pomocą równania Schrödingera. Ciągła i deterministyczna zmiana stanu układu kwantowego, generowana przez hamiltonian układu, odpowiada sytuacji, w której układ jest izolowany. Pomiar w mechanice kwantowej zaburza ewolucję swobodną systemu. Zgodnie z postulatem rzutowym von Neumanna, przeprowadzony w chwili t pomiar idealny obserwabli dyskretnej A powoduje nagłą i niedeterministyczną zmianę funkcji falowej układu kwantowego z $\psi(t)$ do jednej z funkcji własnych $\psi_n^A(t)$ rozważanej obserwabli [109]. Aktualizacja stanu zachodzi z prawdopodobieństwem *a priori* znalezienia stanu $\psi_n^A(t)$ w stanie $\psi(t)$. Ewolucja układu obserwowanego jest zatem stochastyczna i nieodwracalna. Zastosowanie postulatu rzutowego do opisu ciągłego w czasie pomiaru obserwabli układu kwantowego prowadzi jednak do zatrzymania ewolucji swobodnej układu.

Uogólnioną postać postulatu rzutowego, która pozwala opisać redukcję stanu kwantowego dla pomiarów nieidealnych obserwabli ciągłych, podali Davies i Lewis [39, 40]. Zdefiniowana przez nich postać odwzorowania, nazywanego *instrumentem*, określającego transformację stanu kwantowego, oparta jest na pojęciu miary półspektralnej. Rozważoną w [39, 40] zmianę stanu można otrzymać z unitarnej ewolucji układu złożonego z układu obserwowanego oraz przyrządu pomiarowego. Pojęcie instrumentu wykorzystał Ozawa rozwijając w [89, 90] koncepcję wprowadzonych w [88] *warunkowych wartości oczekiwanych* i stanu *a posteriori* zależnego od wyniku pomiaru obserwabli ciagłej. Podejście Ozawy umożliwia (przez wprowadzenie instrumentu zależnego od czasu) nietrywialne rozwiązanie problemu ciągłego w czasie pomiaru kwantowego.

Stochastyczne równanie różniczkowe dla stanu *a posteriori* dla dwóch typów obserwacji *zliczającej* i *dyfuzyjnej* wyznaczył, korzystając z modelu stochastycznej unitarnej ewolucji układu złożonego, Belavkin [15, 17, 25]. W rozwiniętej przez Belavkina *kwantowej teorii filtracji*, opartej na *kwantowym rachunku stochastycznym Ito* [71, 91], modelowane za pomocą symetrycznej przestrzeni Focka, pole bozonowe pełni rolę przyrządu pomiarowego.

Redukcję stanu w *kwantowym równaniu filtracji Belavkina* otrzymanym wewnątrz przybliżenia Markowa można traktować jako metodę statystycznego oszacowania rezultatów przyszłego pomiaru warunkowanego poprzez wyniki obserwacji z przeszłości. Uśrednienie rozwiązań równania filtracji po wszystkich trajektoriach obserwowanego procesu stochastycznego wyznacza ewolucję układu otwartego opisaną przez równanie master.

Rozważany przez Belavkina, pomiar obserwabli $\mathcal{Q}(t)$ jest *nieniszczący* w tym sensie, że operator $\mathcal{Q}(t)$ komutuje z dowolnym, zapisanym w obrazie Heisenberga operatorem $Z_{t'}$ układu obserwowanego, dla wszystkich $t' \geq t$. Proces stochastyczny $\mathcal{Q}(t)$ jest ponadto *procesem samonieniszczącym* tzn. $[\mathcal{Q}(t), \mathcal{Q}(t')] = 0$ dla wszystkich $t, t' \geq 0$, a zatem może być traktowany jak klasyczny. Idea ciągłych nieniszczących obserwacji zdefiniowana przez Belavkina różni się zatem od tej, którą zaproponowali Braginsky, Vorontsov i Khalili [29, 34].

Dyskusję fizycznych podstaw i zastosowań kwantowej teorii filtracji można znaleźć na przykład w pracach Belavkina, Staszewskiego i ich współpracowników [22, 24, 25, 35, 100], Holevo [66], Barchielliego i jego współpracowników [2, 4, 6, 9], a także w wielu pracach fizyków teoretycznych i doświadczalnych [49, 50, 54, 58, 82, 104, 107].

Nieliniowe stochastyczne równania różniczkowe opisujące dynamikę redukcji funkcji falowej układu otwartego postulowali Pearle [92] i Gisin [55, 56]. Ewolucja czasowa stanu zależnego od trajektorii kwantowych w optyce kwantowej była rozważana między innymi w pracach [33, 58, 113]. Analizę procesu dyfuzji czystego stanu kwantowego bez dyskusji statystyki pomiaru można znaleźć w pracach Gisina i Percivala [57, 93]. Stochastyczne równanie różniczkowe dla cząstki z obserwowanym położeniem zapostulował, niezależnie od Belavkina, Diósi [43, 44].

Opis stochastycznygo procesu liczącącego dla otwartego markowskiego układu kwantowego bez dyskusji dynamiki *a posteriori* podany został przez Daviesa [38, 39].

W niniejszej pracy omówiono szczegółowo dwa przykłady zastosowania kwantowego rachunku stochastycznego Ito i kwantowej teorii filtracji w optyce kwantowej. Praca składa się z Wstępu, czterech rozdziałów (2-5), Dodatku oraz Podsumowania.

Rozdział drugi zawiera prezentację podstawowych definicji, notacji i twierdzeń używanych w teorii pomiaru kwantowego.

W trzecim rozdziale omówiono reguły kwantowego rachunku stochastycznego Ito oraz oparty na nim model ciągłego nieniszczącego pomiaru obserwabli rezerwuaru osobliwego wraz z krótką dyskusją fizycznych przybliżeń modelu.

W rozdziale czwartym przedstawiono opis ciągłej obserwacji fotonów fluorescencji emitowanych przez pojedynczy atom o schemacie poziomów energetycznych typu Λ w eksperymencie Dehmelta [42]. Warunki wzbudzenia układu w doświadczeniu Dehmelta pozwalają monitorować okresy, w których atom przebywa w stanie metatrwałym. Ewolucję *a posteriori* atomu oraz statystykę fotonów fluorescencji wyznaczono korzystając z metody funkcjonału generującego [15]. W rozdziale otrzymano równania filtracji dla dwóch rodzajów obserwacji zliczającej: niemieszającej i mieszającej. Praca zawiera również oryginalne formuły na długość okresów jasności i ciemności dla układu Λ w przypadku nierezonansowym i wyniki dla rezonansu, które są zgodne z rezultatami prac [98] oraz [5].

Rozdział piąty poświęcony jest analizie ewolucji *a posteriori* jednomodowego pola elektromagnetycznego znajdującego się wewnętrz optycznej wnęki rezonansowej z częściowo przepuszczalnym jednym oraz dwoma lustrami. W rozdziale wyprowadzono kwantowe równanie filtracji dla heterodynowego i różnicowego heterodynowego pomiaru promieniowania opuszczającego wnękę. W pierwszym przypadku równanie *a posteriori* otrzymano jako graniczny przypadek równania filtracji dla obserwacji zliczającej, drugie wyprowadzenie oparto na podanym w [16] unitarnym modelu obserwacji dyfuzyjnej. W drugiej części rozdziału przedstawiono przykłady rozwiązań analitycznych kwantowego równania filtracji dla rozważanej obserwacji dyfuzyjnej. Między innymi udowodniono, że ściśnięty stan koherentny układu jest zachowany podczas ewolucji stochastycznej.

Dodatek zawiera nowe wyprowadzenie kwantowych reguł Ito dla iloczynów przyrostów procesów postawowych (anihilacji, kreacji i liczby cząstek) w reprezentacji Focka.

Rozdział 2

Opis pomiaru w mechanice kwantowej

2.1 Operatory statystyczne i obserwable w standardowym sformułowaniu mechaniki kwantowej. Pomiar idealny

Niech $\mathcal{H}$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$ będzie zespoloną ośrodkową przestrzenią Hilberta związaną z układem kwantowym $\mathcal{S}$. Niech $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oznacza zbiór operatorów liniowych ograniczonych określonych na przestrzeni $\mathcal{H}$. Można wykazać, że $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ z normą $\|A\| := \sup\{\|A\varphi\|, \varphi \in \mathcal{H}, \ \|\varphi\| = 1\}$ jest przestrzenią Banacha, a także C^*-algebrą z jednością [30, 106].

Stany układu kwantowego można zdefiniować wprowadzając zbiór operatorów klasy śladowej

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) \ := \ \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{Tr}\big(T^\dagger T\big)^{1/2} < \infty\}\,, \tag{2.1}$$

gdzie Tr jest śladem w przestrzeni $\mathcal{H}$. $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|T\|_1 := \mathrm{Tr}\big(T^\dagger T\big)^{1/2}$. *Operatory statystyczne*, inaczej *stany układu*, reprezentowane są przez dodatnio określone operatory klasy śladowej o śladzie równym jedności. Zbiór stanów

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) \ := \ \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, \ \mathrm{Tr}\rho = 1\} \tag{2.2}$$

jest zbiorem wypukłym. W mechanice kwantowej ważną rolę odgrywają elementy ekstremalne zbioru $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, nazywane *stanami czystymi.* Można wykazać, że ρ jest stanem czystym wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho^2 = \rho$. Stany czyste układu są dane przez jednowymiarowe projektory $\mathrm{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, gdzie $\varphi \in \mathcal{H}$ i $\|\varphi\| = 1$. Dowolny stan $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ może być wyrażony jako kombinacja wypukła stanów czystych $\mathrm{P}_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$; $\rho = \sum\limits_i w_i \mathrm{P}_i$, gdzie $0 \leq w_i \leq 1$ oraz $\sum\limits_i w_i = 1$, a szereg operatorowy jest silnie zbieżny.

Aby rozpocząć dyskusję o wielkościach mierzonych w mechanice kwantowej zdefiniujmy kilka wybranych klas operatorów liniowych w przestrzeni $\mathcal{H}$.
Operator A jest *operatorem symetrycznym* (*hermitowskim*) jeżeli jego dziedzina $D(A)$ jest gęsta w $\mathcal{H}$ i dla dowolnych φ, $\psi \in D(A)$ spełniony jest warunek

$$\langle A\psi|\varphi\rangle \;=\; \langle \psi|A\varphi\rangle\,.$$

Operatorem samosprzężonym nazywamy operator symetryczny, dla którego $D(A) = D(A^{\dagger})$. Operator symetryczny A nazywamy *istotnie samosprzężonym*, jeśli jego domknięcie $\overline{A}$ jest samosprzężone. Jeżeli operator symetryczny nie posiada rozszerzenia samosprzężonego nazywany jest *maksymalnym*.

Standardowe sformułowanie mechaniki kwantowej zakłada, że każdej wielkości mierzonej, nazywanej *obserwablą*, odpowiada operator samosprzężony, działający w przestrzeni Hilberta związanej z rozważanym układem kwantowym.

Niech A będzie operatorem samosprzężonym w $\mathcal{H}$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie widmem operatora A. Przez $\mathfrak{B}(\Omega)$ oznaczmy σ-algebrę podzbiów borelowskich zbioru Ω.
Miarą spektralną (ang. *projection valued measure* – PVM) nazywamy odwzorowanie $E : \mathfrak{B}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o następujących własnościach [94, 106]:

(i) $E(\Omega) = I\,, \quad E(\emptyset) = 0\,,$

(ii) $E(\Delta) = E(\Delta)^2$ dla wszystkich $\Delta \in \mathfrak{B}(\Omega)\,,$

(iii) $E(\cup_i \Delta_i) = \sum\limits_i E(\Delta_i)$, gdy $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, a szereg jest zbieżny w słabym sensie.

Miara spektralna nazywana jest także *miarą rzutową* lub *ortogonalnym rozkładem jedności.* Przed podaniem probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej przypomnijmy treść *twierdzenia spektralnego* [86, 94, 106].

Twierdzenie 2.1. *Niech A będzie samosprzężonym operatorem z dziedziną $D(A) \subset \mathcal{H}$. Istnieje wówczas jedyna miara spektralna $E : \mathfrak{B}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ taka, że*

$$D(A) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \int_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}\langle\varphi|E(x)\varphi\rangle < \infty \right\} \tag{2.3}$$

i dla każdego $\varphi \in D(A)$,

$$\langle\varphi|A\varphi\rangle \;=\; \int_{\Omega} x \, \mathrm{d}\langle\varphi|E(x)\varphi\rangle\,, \tag{2.4}$$

gdzie Ω jest widmem operatora A.

Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między obserwablą układu kwantowego reprezentowaną przez operator samosprzężony A i miarą spektralną E, ustanowiona przez twierdzenie spektralne, sprawia że miarę spektralną można traktować jako obserwablę w mechanice kwantowej. Zgodnie z probabilistyczną interpretacją Borna przyjmujemy, że rozkład prawdopodobieństwa obserwabli $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ w stanie $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ dany jest jako

$$\mu_\rho^A(\varDelta) \;:=\; \mathrm{Tr}[\rho E(\varDelta)], \quad \varDelta \in \mathfrak{B}(\varOmega)\,. \tag{2.5}$$

Z własności miary spektralnej E wynika, że μ_ρ^A jest miarą probabilistyczną na $\mathfrak{B}(\varOmega)$; własność (ii) zapewnia nieujemność miary μ_ρ^A, a (i) jej unormowanie do jedności. Wyrażenie

$$\langle A\rangle_\rho \;:=\; \mathrm{Tr}[\rho A] \tag{2.6}$$

dzięki (2.4) określa wartość średnią obserwabli A dla rozkładu prawdopodobieństwa (2.5). Gdy układ kwantowy znajduje się w stanie czystym $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, mamy

$$\langle A\rangle_\psi \;=\; \langle\psi|A\psi\rangle\,. \tag{2.7}$$

Odwracalna ewolucja *zamkniętego* układu kwantowego, który w chwili początkowej t_0 znajduje się w stanie $\rho(t_0) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, opisana jest równaniem

$$\rho(t) \;=\; U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)\,, \tag{2.8}$$

gdzie

$$U(t,t_0) \;=\; \overleftarrow{\mathrm{T}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\mathrm{d}t'\right\} \tag{2.9}$$

jest operatorem ewolucji układu. We wzorze (2.8) przez $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ oznaczono operator chronologiczny, a $H(t)$ jest operatorem energii układu (*hamiltonianem*). Jeżeli układ kwantowy jest *izolowany* (nie oddziałuje z zewnętrznym polem), wówczas operator H nie zależy od czasu.

Zgodnie z podejściem zapoczątkowanym przez Birkhoffa i von Neumanna postuluje się, że pomiar dowolnej wielkości fizycznej musi być zredukowany do eksperymentu, którego wynik decyduje o prawdziwości lub fałszu pewnego stwierdzenia. Odpowiada to założeniu, że *zdarzenia* w mechanice kwantowej reprezentowane są przez projektory działające w przestrzeni $\mathcal{H}$. Przypomnijmy, że projektory są idempotentnymi operatorami: $P^2 = P$, ortogonalnymi do uzupełnienia $P^\perp = I - P$: $PP^\perp = 0$. Dla każdego projektora istnieje podprzestrzeń domknięta $\mathcal{M}_P \subset \mathcal{H}$, taka, że P jest operatorem rzutowania na tę podprzestrzeń. Zbiór wszystkich zdarzeń kwantowych nazywamy *logiką* *kwantową* [72]. Porządek logiczny w tym zbiorze $P \leq R$ wynika z relacji algebraicznej $PR = P$, która jest równoważna stwierdzeniu $\mathcal{M}_P \subseteq \mathcal{M}_R$. Koniunkcja zdarzeń $P \wedge R$ oznacza, że $\mathcal{M}_{P \wedge R} = \mathcal{M}_P \cap \mathcal{M}_R$. Odpowiednio, alternatywę $P \vee R$ definiujemy zadając $\mathcal{M}_{P \vee R}$ jako powłokę liniową określoną na $\mathcal{M}_P \cup \mathcal{M}_R$. Mówimy, że dwa zdarzenia P, R są *komplementarne*, gdy $P \vee R = I$, *ortokomplementarne*, gdy $P + R = I$, *niekompatybilne*, gdy $P \wedge R = 0$ i *ortogonalne*, gdy $PR = 0$ [21]. Można wykazać, że zdarzenia ortogonalne są niekompatybilne, ale niekompatybilność zdarzeń w mechanice kwantowej nie oznacza ich ortogonalności. W logice kwantowej istnieją komplementarne niekompatybilne zdarzenia, które nie są ortogonalne [21]. Klasyczny model logiki wyklucza taką możliwość.

Kompatybilność zdarzeń P i R, czyli fakt, że mogą one zajść łącznie, oznacza, iż

$$[P, R] \;:=\; PR - RP = 0\,. \tag{2.10}$$

W podręcznikach mówi się często o równoczesności zdarzeń P i R. Równoczesność zdarzeń rozumiana jest tutaj w taki sposób, że odnoszą się one do tego samego stanu układu kwantowego, nie muszą one zachodzić w tym samym czasie. Zauważmy, że dla zdarzeń kompatybilnych $P \wedge R := PR$ oraz $P \vee R := P + R + PR$.

Opiszmy teraz zapostulowaną przez von Neumanna nieciągłą i nagłą zmianę stanu układu kwantowego wywołaną przez akt pomiaru. Niech $A = \sum_i x_i E_i$ będzie rozkładem spektralnym obserwabli A, x_i są wartościami własnymi operatora A, natomiast E_i są projektorami na podprzestrzenie własne A. Przyjmujemy, że *pomiar idealny* obserwabli A, w którym otrzymano wartość x_i, powoduje zmianę stanu układu [109]

$$\rho \to \rho^{'} \;=\; \frac{E_i \rho E_i}{\mathrm{Tr}[\rho E_i]}\,, \tag{2.11}$$

gdzie operator ρ jest stanem układu bezpośrednio przed pomiarem. Transformacja stanu układu kwantowego (2.11), nazywana *postulatem rzutowym* von Neumanna, jest powtarzalna w tym sensie, że jeżeli pomiar obserwabli A zostanie powtórzony dostatecznie szybko, tak, aby ewolucja czasowa nie zmieniła stanu (2.11), znowu otrzymujemy wartość x_i. Wynika to z tego, że

$$p^A_{\rho^{'}}(x_i) = \mathrm{Tr}[\rho^{'} E_i] = \frac{\mathrm{Tr}[E_i \rho E_i^2]}{\mathrm{Tr}[\rho E_i]} = 1\,. \tag{2.12}$$

Gdy dokonano pomiaru obserwabli, ale wynik pomiaru nie został odczytany, otrzymujemy zachowującą ślad transformację operatora statystycznego postaci

$$\rho \to \sum_i E_i \rho E_i\,. \tag{2.13}$$

Zwykle $\rho \neq \sum_i E_i \rho E_i$, a zatem pomiar w mechanice kwantowej może powodować zmianę stanu układu nawet wówczas, gdy nie zwiększa on naszej wiedzy o układzie. Podanego schematu nie można bezpośrednio zastosować do przypadku obserwabli z widmem ciągłym, ponieważ prawdopodobieństwo otrzymania w pomiarze określonej wartości x jest wówczas równe zero dla dowolnego $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Pomiar powtarzalny, jak udowodnił von Neumann, istnieje tylko dla obserwabli dyskretnych [109].

2.2 Współmierzalność obserwabli. Pomiar niedokładny. Obserwable uogólnione

Omówimy teraz zagadnienie współmierzalności (kompatybilności) wielkości fizycznych w języku miar probabilistycznych.

Niech A_1 i A_2 będą obserwablami o miarach spektralnych odpowiednio E_1 i E_2 oraz widmach Ω_1 i Ω_2. Obserwable A_1 i A_2 nazywamy *współmierzalnymi*, gdy istnieje obserwabla A określona na $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ taka, że

$$A(\Delta_1 \times \Omega_2) \;=\; A_1(\Delta_1)\,, \tag{2.14}$$

$$A(\Omega_1 \times \Delta_2) \;=\; A_2(\Delta_2)\,, \tag{2.15}$$

dla wszystkich $\Delta_1 \in \Omega_1$, $\Delta_2 \in \Omega_2$ [106]. Operatory (2.14), (2.15) nazywamy *obserwablami brzegowymi*. Z powyższej definicji wynika, że dla współmierzalnych obserwabli A_1 i A_2 istnieje łączny rozkład prawdopodobieństwa p_ρ^A, taki, że dla dowolnego stanu ρ,

$$p_\rho^A(\Delta_1 \times \Delta_2) \;=\; \mathrm{Tr}[\rho E_1(\Delta_1) E_2(\Delta_2)]\,, \tag{2.16}$$

$$p_\rho^A(\Delta_1 \times \Omega_2) \;=\; p_\rho^{A_1}(\Delta_1)\,, \tag{2.17}$$

$$p_\rho^A(\Omega_1 \times \Delta_2) \;=\; p_\rho^{A_2}(\Delta_2)\,. \tag{2.18}$$

Wyrażenia (2.17) i (2.18) nazywamy *rozkładami brzegowymi*, natomiast $p_\rho^A(\Delta_1 \times \Delta_2)$ interpretujemy jako prawdopodobieństwo tego, że wynik łącznego pomiaru obserwabli A_1 oraz A_2 w stanie ρ znajdzie się w zbiorze $\Delta_1 \times \Delta_2$. Równoważność współmierzalności obserwabli i przemienności odpowiadających im miar spektralnych wykazał von Neumann [109]. Zgodnie z podanym przez niego twierdzeniem, dwa operatory samosprzężone A_1 i A_2 są przemienne (komutują) wtedy i tylko wtedy, gdy można je wyrazić jako funkcje borelowskie pewnego innego operatora samosprzężonego A. Powyższe stwierdzenia można bezpośrednio rozszerzyć do dowolnego skończonego zbioru obserwabli.

W standardowym sformułowaniu mechaniki kwantowej nie można opisać łącznego pomiaru obserwabli nieprzemiennych. Problem prześledźmy na przykładzie obserwabli położenia i pędu. Twierdzenie Stone'a [94] mówi, że z każdym operatorem samosprzężonym A możemy związać jedyną silnie ciągłą grupę operatorów unitarnych $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Mając zatem operator samosprzężony pędu P i położenia X możemy określić dwie grupy operatorów unitarnych

$$U(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xP/\hbar}\,, \quad V(p) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}pX/\hbar}\,, \tag{2.19}$$

gdzie $x, p \in \mathbb{R}$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie [94, 106].

Twierdzenie 2.2. *Niech $U(x)$ i $V(p)$ będą ciągłymi jednoparametrowymi grupami operatorów unitarnych spełniających relację*

$$V(p)U(x) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp/\hbar}U(x)V(p), \quad \forall\, p, x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.20}$$

Niech P będzie generatorem grupy $U(x)$, a X generatorem grupy $V(p)$. Istnieje wówczas gęsty zbiór $D \subset \mathcal{H}$ taki, że P i X są operatorami istotnie samosprzężonymi na D oraz

$$XP\varphi - PX\varphi \;=\; \mathrm{i}\hbar\varphi, \quad \forall \varphi \in D\,. \tag{2.21}$$

Operator położenia i operator pędu tworzą parę obserwabli kanonicznie sprzężonych. Równość (2.20) nazywana *reprezentacją Weyla kanonicznych relacji komutacji* może być dla tej pary zapisana w równoważnej postaci

$$U^{\dagger}(x)E(\varDelta + x)U(x) \;=\; E(\varDelta)\,, \quad \varDelta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,, \tag{2.22}$$

gdzie E jest miarą spektralną operatora X i $\varDelta + x = \{s + x;\ s \in \varDelta\}$. Z (2.22) wynika, że operator pędu jest generatorem przesunięcia wzdłuż osi położeń układu. Pełne zdefiniowanie reguł komutacji operatorów wymaga od nas zawsze ustalenia dziedziny komutatora. Położenie i pęd układu kwantowego opisane są, podobnie jak większość wielkości mierzalnych, przez nieograniczone operatory samosprzężone. Takie operatory, zgodnie z twierdzeniem Hellingera-Toepliza [94], nie mogą być zdefiniowane na całej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a jedynie na jej gęstych podzbiorach. Używając reprezentacji Weyla możemy uniknąć trudności związanych z ustalaniem dziedziny komutatora. Ponieważ obserwable położenia i pędu nie są przemienne, standardowy formalizm mechaniki kwantowej wyklucza równoczesny pomiar odpowiadających im wielkości. Jednak w praktyce laboratoryjnej mamy często do czynienia z łącznym pomiarem położenia i pędu dla układów kwantowych. Na przykład, mierząc położenie cząstki naładowanej w komorze Wilsona uzyskujemy równocześnie informację o jej pędzie z pomiaru krzywizny toru cząstki. Należy jednak podkreślić, że zawsze są to pomiary przybliżone wykonywane z określoną dokładnością.

Potrzeba stworzenia ścisłego matematycznego opisu łącznego pomiaru położenia i pędu układu kwantowego była jednym z powodów rozszerzenia przez fizyków pojęcia obserwabli. Pojęcie obserwabli uogólnionej wprowadzili niezależnie od siebie Lewis i Davies [40], Holevo [67] i Ludwig [80, 81].

Niech $\varUpsilon$ będzie zbiorem wyników pomiaru dla określonej wielkości fizycznej, przez $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ oznaczmy σ-algebrę zbiorów borelowskich na $\varUpsilon$. *Miarą półspektralną* (ang. *positive operator valued measure* – POVM) nazywamy odwzorowanie $E : \mathfrak{B}(\varUpsilon) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spełniające następujące własności [32]:

(i) $E(\varDelta) \geq 0$ dla wszystkich $\varDelta \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$,

(ii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\varUpsilon) = I$,

(iii) $E(\cup_i \varDelta_i) = \sum\limits_i E(\varDelta_i)$ dla każdego przeliczalnego zbioru parami rozłącznych elementów $\varDelta_i \subset \varUpsilon$, a szereg jest zbieżny w słabym sensie.

Miara półspektralna nazywana jest także *obserwablą uogólnioną*, *obserwablą rozmytą* lub *nieostrą*, *nieortogonalnym rozkładem jedności* i *efektem.* Rozkład nieortogonalny definiuje na $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ miarę probabilistyczną postaci

$$\mu_\rho^E(\varDelta) \ := \ \mathrm{Tr}[\rho E(\varDelta)] \, . \tag{2.23}$$

Rozszerzony formalizm mechaniki kwantowej zakłada, że wielkością matematyczną, której przypisujemy sens wielkości mierzonej jest miara półspektralna. W standardowym sformułowaniu teorii kwantowej sens fizyczny posiadają wybrane operatory samosprzężone i związane z nimi w sposób jednoznaczny miary spektralne. Wprowadzone uogólnienie sprawia, że obserwable takie jak energia, pęd, położenie czy spin układu stają się niejednoznaczne. Niejednoznaczność w definiowaniu obserwabli uogólnionych wynika stąd, że z danym operatorem samosprzężonym możemy związać nieskończenie wiele miar półspektralnych. Oczywiście nie każdy z tych rozkładów nieortogonalnych posiada sens wielkości mierzonej. Jednoznaczną definicję obserwabli układu otrzymujemy dopiero wówczas, gdy rozpatrujemy konkretną procedurę pomiarową.

Prześledźmy teraz w jaki sposób nieortogonalne rozkłady jedności pojawiają się w pomiarach obarczonych błędem. Niech E będzie miarą spektralną odpowiadającą pewnemu operatorowi samosprzężonemu o widmie $\varOmega$. Przez $\varUpsilon$ oznaczmy zbiór wartości jakie możemy otrzymać dokonując pomiaru. Niedokładność aparatury pomiarowej wprowadza randomizację miary prawdopodobieństwa związanej z miarą spektralną zgodnie z formułą [32]

$$F(\mathit{\Delta}) \ := \ \int_{\mathit{\Omega}} p(\mathit{\Delta}, x)\, \mathrm{d}E(x)\,, \tag{2.24}$$

gdzie $\mathit{\Delta} \in \mathfrak{B}(\mathit{\Upsilon})$, $p(\cdot\,, x)$ jest miarą probabilistyczną na $\mathfrak{B}(\mathit{\Upsilon})$, natomiast $p(\mathit{\Delta}, \cdot\,)$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $\mathit{\Omega}$. Nieidempotentny operator (2.24) wyznacza miarę półspektralną na $\mathfrak{B}(\mathit{\Upsilon})$. W praktyce każdy pomiar obarczony jest błędem i prawdopodobieństwo (2.5) definiowane przez miarę spektralną E ulega rozmyciu przez niedokładność aparatury.

Współmierzalność obserwabli uogólnionych nie oznacza przemienności odpowiadających im miar półspektralnych. Warunek przemienności musi być spełniony w sytuacji, gdy któraś z wielkości mierzonych reprezentowana jest przez miarę spektralną [74–76]. Formalizm obserwabli uogólnionych pozwala opisać łączny pomiar położenia i pędu układu kwantowego, ale w takim eksperymencie niedokładność pomiaru obu wielkości jest nieusuwalna [39, 69]. W mocy pozostaje stwierdzenie, że równocześnie z dowolną dokładnością można mierzyć tylko obserwable przemienne.

Twórcy podstaw mechaniki kwantowej już w latach dwudziestych ubiegłego wieku zdali sobie sprawę z faktu, że z niektórymi wielkościami fizycznymi nie można związać operatorów samosprzężonych nawet wówczas, gdy rozpatrujemy dokładne pomiary tych wielkości. Problem ten omówimy na przykładzie obserwabli czasu.

Czas jest wielkością wyróżnioną w mechanice kwantowej, występuje on bowiem jako parametr w równaniu ruchu. Podane poniżej uzasadnienie stwierdzenia, że operator czasu nie może być reprezentowany przez miarę spektralną, pochodzi od Pauliego [106]. Niech H będzie hamiltonianem układu. Załóżmy, że T jest operatorem samosprzężonym. Niech generowana przez operator T grupa operatorów unitarnych $V(\varepsilon) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon T/\hbar}$, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{R}$ oraz grupa $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$ z parametrem $t \in \mathbb{R}$, spełniają relację Weyla

$$U(t)V(\varepsilon) \ = \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t/\hbar} V(\varepsilon)U(t)\,. \tag{2.25}$$

Z relacji (2.25) wynika równość

$$V^{\dagger}(\varepsilon)E(\mathit{\Delta})V(\varepsilon) \ = \ E(\mathit{\Delta} + \varepsilon)\,, \tag{2.26}$$

gdzie E jest miarą spektralną hamiltonianu. W nierelatywistycznej mechanice kwantowej widmo hamiltonianu jest zawsze ograniczone z dołu. Z tego właśnie powodu równość (2.26) nie jest prawdziwa dla wszystkich wartości $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy zatem sprzeczność, z której wynika, że nie istnieje samosprzężony operator T.

W pracy [68] Holevo udowodnił, że obserwabla czasu może być reprezentowana przez maksymalny operator symetryczny, co oznacza, że z operatorem czasu możemy związać miarę półspektralną. Podobnie operator fazy dla oscylatora harmonicznego i operator momentu pędu można poprawnie zdefiniować tylko za pomocą miar półspektralnych [32, 69].

2.3 Pomiar pośredni, instrument i stan *a posteriori*

Rozważmy układ kwantowy $\mathcal{S}$, któremu odpowiada przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_\mathcal{S}$. Zakładamy, że informacje o układzie kwantowym $\mathcal{S}$ otrzymywane są w sposób pośredni, dzięki pomiarowi wielkości fizycznych układu $\mathcal{M}$, który oddziałuje z $\mathcal{S}$. Za von Neumannem przyjmiemy, że układ, który pełni rolę aparatury mierzącej, jest obiektem kwantowym, z którym związać możemy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_\mathcal{M}$. Wspólna dynamika układów zdefiniowana jest na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{M}$. Zakładamy, że w chwili początkowej układy są niezależne i stan układu złożonego opisuje macierz gęstości $\rho \otimes \sigma$, gdzie ρ jest stanem układu obserwowanego $\mathcal{S}$, a σ przygotowanym przez eksperymentatora stanem początkowym przyrządu pomiarowego. Układy oddziałują ze sobą przez pewien czas, a ciągła i odwracalna dynamika generowana przez hamiltonian układu złożonego opisana jest transformacją unitarną $U\,(\rho \otimes \sigma)\,U^\dagger$.

Niech $A_\mathcal{M}$ będzie obserwablą z miarą spektralną E i widmem $\varOmega$, działającą w $\mathcal{H}_\mathcal{M}$. Przez $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{M}}$ oznaczmy ślad w przestrzeni $\mathcal{H}_\mathcal{M}$. Postulujemy, że pomiar obserwabli $A_\mathcal{M}$, którego wynik leży w zbiorze mierzalnym $\varDelta \subset \varOmega$, prowadzi do nieliniowej zmiany stanu układu $\mathcal{S}$ postaci

$$\rho(\varDelta) \;:=\; \frac{\mathcal{I}_\varDelta(\rho)}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_\varDelta(\rho)]}\,, \tag{2.27}$$

gdzie

$$\mathcal{I}_\varDelta(\rho) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{M}}[U\,(\rho\otimes\sigma)\,U^\dagger\,(I\otimes E(\varDelta))]\,, \tag{2.28}$$

a $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_\varDelta(\rho)]$ jest prawdopodobieństwem otrzymania wyniku w zbiorze $\varDelta \subset \varOmega$. Jeżeli pomiar został wykonany, ale nie znamy jego wyniku, mówimy że układ znajduje się w stanie,

$$\rho(\varOmega) \;=\; \mathcal{I}_\varOmega(\rho) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{M}}[U\,(\rho\otimes\sigma)\,U^\dagger]\,. \tag{2.29}$$

Odwzorowanie $\mathcal{I}_\varDelta : \mathcal{P}(\mathcal{H}_\mathcal{S}) \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$, gdzie $\varDelta \in \mathfrak{B}(\varOmega)$, dane wzorem (2.28) może być rozszerzone jednoznacznie do odwzorowania liniowego $\mathcal{I} : \mathfrak{B}(\varOmega) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{T}(\mathcal{H}_\mathcal{S})\big)$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $\mathcal{I}$ posiada następujące własności:

(i) $\forall \varDelta \in \mathfrak{B}(\varOmega)$ $\mathcal{I}_\varDelta$ jest kompletnie dodatnie [103],

(ii) $\mathcal{I}_{\cup_i \varDelta_i}(\rho) = \sum_i \mathcal{I}_{\varDelta_i}(\rho)$, $\forall \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$, gdy $\varDelta_i \cap \varDelta_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,

(iii) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_\Omega(\rho)] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}\,\rho$, $\forall\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$.

Z powyższych własności wynika, że $\mathcal{I}$ określa na zbiorze $\mathfrak{B}(\Omega)$ miarę półspektralną F w taki sposób, że

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\rho F(\Delta)] \;:=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_\Delta(\rho)] \tag{2.30}$$

dla $\Delta \in \mathfrak{B}(\Omega)$ i $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$. Notację $\mathcal{I}$ wprowadzili Davies i Lewis [39, 40], od nich także pochodzi nazwa instrumentu. *Instrumentem* nazywamy każde odwzorowanie z $\mathfrak{B}(\Omega)$ w $\mathcal{L}\big(\mathcal{T}(\mathcal{H}_\mathcal{S})\big)$ spełniające warunki (i)-(iii).

Dla każdego instrumentu można zdefiniować w sposób jednoznaczny odwzorowanie dualne $\mathcal{J} \equiv \mathcal{I}^*$ w taki sposób, że dla każdego $\Delta \in \mathfrak{B}(\Omega)$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_\Delta(\rho)A] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\rho\mathcal{J}_\Delta(A)]\,, \quad \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_\mathcal{S})\,, \;\; A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{S})\,. \tag{2.31}$$

$\mathcal{J} : \mathfrak{B}(\Omega) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{S})\big)$ jest odwzorowaniem kompletnie dodatnim i $\mathcal{J}_\Omega(I) = I$.

Ozawa udowodnił [90], że dla dowolnego instrumentu oraz stanu ρ istnieje rodzina *stanów a posteriori* $\{\rho_x : x \in \Omega\}$ taka, że

(i) $\forall x \in \Omega$, ρ_x jest macierzą gęstości w $\mathcal{H}_\mathcal{S}$,

(ii) funkcja $x \to \rho_x$ jest silnie borelowsko mierzalna,

(iii) $\forall\Delta \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mamy

$$\int_\Delta \rho_x \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}[\mathcal{I}_{\mathrm{d}x}(\rho)] = \mathcal{I}_\Delta(\rho)\,. \tag{2.32}$$

W pracy [109] von Neumann wykazał, że redukcja funkcji falowej układu kwantowego (2.11), towarzysząca idealnemu pomiarowi obserwabli dyskretnej, może być wyprowadzona ze schematu pomiaru pośredniego. Przedstawmy tutaj przykład oparty na pomyśle von Neumanna. Niech $\{\varphi_{jk}\}$ będzie zupełnym ortonormalnym zbiorem wektorów własnych pewnej obserwabli A,

$$A\varphi_{jk} = x_j\varphi_{jk}, \quad P_j = \sum_k |\varphi_{jk}\rangle\langle\varphi_{jk}|,$$
$$A = \sum_j x_j P_j. \tag{2.33}$$

Zbiór $\{\varphi_{jk}\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathcal{H}_\mathcal{S}$. Niech $\{\psi_i\}$ będzie bazą w przestrzeni $\mathcal{H}_\mathcal{M}$, a ψ wektorem jednostkowym z $\mathcal{H}_\mathcal{M}$. Zdefiniujmy na przestrzeni $\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{M}$ operator unitarny U w następujący sposób:

$$U(\varphi_{jk} \otimes \psi) \;:=\; \varphi_{jk} \otimes \psi_j. \tag{2.34}$$

Operator U opisuje oddziaływanie, które wprowadza korelacje między stanami układów. Pomiar obserwabli $Z = \sum_j z_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ układu $\mathcal{M}$, opisać można na przestrzeni $\mathcal{H}_\mathcal{S}\otimes\mathcal{H}_\mathcal{M}$ za pomocą miary spektralnej

$$U^\dagger\left(I\otimes\sum_{j\in\Delta}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)U, \tag{2.35}$$

która wyznacza instrument postaci

$$\mathcal{I}_\Delta(\rho) = \sum_{j\in\Delta}\langle\psi_j|U\psi\rangle\rho\langle\psi U^\dagger|\psi_j\rangle = \sum_{j\in\Delta}P_j\rho P_j, \quad \forall\rho\in\mathcal{H}_\mathcal{S}. \tag{2.36}$$

Wyrażenie jest zgodne z (2.11). Gdy sumujemy po całym zbiorze Ω otrzymujemy pomiar nieselektywny i stan *a priori* (2.13). Liniowa transformacja stanu układu kwantowego postaci (2.36) została podana przez Lüdersa [79].

2.4 Kwantowy paradoks Zenona

Opiszmy teraz efekt zatrzymania ewolucji swobodnej układu kwantowego wywołany ciągłym w czasie pomiarem idealnym obserwabli układu kwantowego opisanym postulatem rzutowym von Neumanna. W tym celu rozważmy układ kwantowy, dla którego w chwilach tk/n, $k = 0, 1, \ldots, n$, należących do przedziału czasu $[0, t]$, przeprowadzono serię $n + 1$ pomiarów idealnych obserwabli dyskretnej $A = \sum\limits_i x_iE_i$, gdzie E_i są projektorami na podprzestrzenie własne operatora A. Generowana przez hamiltonian H układu kwantowego unitarna transformacja stanu układu (2.8), która ma charakter deterministyczny i przyczynowy, w chwilach pomiaru przerywana jest przez nieciągłą i losową zmianę stanu układu (2.11), zatem ewolucja układu jest stochastyczna i nieodwracalna.
Korzystając z tego, że $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar n} - I - \mathrm{i}Ht/\hbar n\| = o(1/n^2)$ oraz $E_k = E_k^2$ można wykazać dla $H\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{S})$, że [70]

$$\lim_{n\to\infty}(E_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar n}E_k)^n \;=\; E_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_kHE_kt/\hbar}. \tag{2.37}$$

Stąd, prawdopodobieństwo tego, że we wszystkich $n+1$ pomiarach otrzymamy wynik x_k,

$$p_{n+1}(E_k) \;=\; \mathrm{Tr}\big[(E_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar n}E_k)^n\rho(0)(E_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar n}E_k)^n\big], \tag{2.38}$$

przy $n\to\infty$ jest równe

$$p(E_k) \;=\; \mathrm{Tr}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_kHE_kt/\hbar}E_k\rho(0)E_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_kHE_kt/\hbar}\big] \;=\; \mathrm{Tr}[\rho(0)E_k]. \tag{2.39}$$

Z (2.39) wynika, że ciągła obserwacja układu opisana postulatem rzutowym niszczy ewolucję swobodną i układ zostaje uwięziony w stanie początkowym. Dzieje się tak dlatego, że każdy z pomiarów idealnych przeprowadza układ do stanu odpowiadającego pojedynczej wartości własnej mierzonej obserwabli, a zmiana stanu układu związana z hamiltonowską ewolucją w przedziale t/n dla $n \to \infty$ staje się zaniedbywalnie mała.

Uogólnienie wzoru (2.37) na przypadek nieograniczonego operatora H i obserwabli z ciągłym widmem jest trudnym zadaniem. Efekt zatrzymania ewolucji swobodnej układu, nazywany *kwantowym efektem Zenona*, dla przypadku, gdy $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ przedstawił Friedman [45]. Autor wykazał, że jeżeli obserwujemy w sposób ciągły cząstkę swobodną po to, aby ustalić czy znajduje się ona w pewnym obszarze $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, wówczas prawdopodobieństwo tego zdarzenia nie zależy od czasu i jest równe prawdopodobieństwu tego, że w chwili początkowej cząstka znajduje się w obszarze $\mathcal{D}$.
Fizyczne konsekwencje formuły (2.37) przedstawili Misra i Sudarshan [85]. W pracy [85] po raz pierwszy użyto określenia kwantowy paradoks Zenona.
Nietrywialną granicę ciągłej obserwacji otrzymali, rozpatrując ciąg pomiarów nieidealnych, których dokładność zmniejsza się wraz ze wzrostem częstości pomiarów, Barchielli, Lanz i Prosperi [7, 8].

Rozdział 3

Model ciągłej nieniszczącej obserwacji

3.1 Kwantowy rachunek stochastyczny Ito w przestrzeni Focka

Niech $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ będzie *symetryczną przestrzeń Focka* [31] nad jednocząstkową przestrzenią Hilberta $\mathcal{K} := \mathbb{C}^n \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, całkowalnych z kwadratem funkcji ze zbioru $\mathbb{R}_+$ w zbiór $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) \ := \ \mathbb{C} \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}^{\otimes_s k} \right) . \tag{3.1}$$

Dla uproszczenia zapisu zastąpmy $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ przez $\mathcal{F}$. Dla każdego $f \in \mathcal{K}$ można zdefiniować *wektor wykładniczy* $e(f) \in \mathcal{F}$,

$$e(f) \ := \ \Big(1, f, (2!)^{-1/2} f \otimes f, (3!)^{-1/2} f \otimes f \otimes f, \ldots \Big) . \tag{3.2}$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów wykładniczych w przestrzeni $\mathcal{F}$ ma postać

$$\langle e(g)|e(f)\rangle_{\mathcal{F}} \ = \ \exp\langle g|f\rangle_{\mathcal{K}} \equiv \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \overline{g_j(t)} f_j(t) \mathrm{d}t \right] . \tag{3.3}$$

Unormowany wektor wykładniczy

$$\iota(f) \ := \ \exp\left(-\frac{1}{2} ||f||_{\mathcal{K}}^2 \right) e(f) , \tag{3.4}$$

nazywamy *wektorem koherentnym.* W szczególności $\iota(0) = (1, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{F}$ jest *wektorem próżni.*

Niech $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta. Można udowodnić [63, 91], że dla symetrycznej przestrzeni Focka

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \cong \mathcal{F}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}_2) . \tag{3.5}$$

Izomorfizm (3.5) jest unitarny: istnieje operator unitarny $U : \mathcal{F}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \to \mathcal{F}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}_2)$ który, dla dowolnych elementów $f_1 \in \mathcal{H}_1$ oraz $f_2 \in \mathcal{H}_1$, odwzorowuje wektor $e(f_1 \oplus f_2)$

w iloczyn tensorowy wektorów $e(f_1) \otimes e(f_2)$. Stąd, oraz dzięki temu, że $L^2(\mathbb{R}_+)$ można zapisać w postaci sumy prostej $L^2([0,t)) \oplus L^2([t,\infty))$, przestrzeń $\mathcal{F}$ ma strukturę ciągłego iloczynu tensorowego

$$\mathcal{F} \;=\; \mathcal{F}_{[0,t)} \otimes \mathcal{F}_{[t,\infty)} \,. \tag{3.6}$$

$\mathcal{F}_{[0,t)}$ oraz $\mathcal{F}_{[t,\infty)}$ są symetrycznymi przestrzeniami Focka odpowiednio nad $\mathbb{C}^n \otimes L^2([0,t))$ i $\mathbb{C}^n \otimes L^2([t,\infty))$.

Zależną od czasu rodzinę operatorów $\{F(t),\, t \geq 0\}$ (ograniczonych lub nie), działających w przestrzeni $\mathcal{F}$, nazywamy *kwantowym procesem nieantycypującym*, gdy $F(t)$ działa na przestrzeni $\mathcal{F}_{[t,\infty)}$ jako operator jednostkowy i może działać w sposób nietrywialny na przestrzeni $\mathcal{F}_{[0,t)}$ (por. [71]).

Niech $\mathcal{D}$ będzie powłoką liniową zbioru wektorów wykładniczych w $\mathcal{F}$. Zdefiniujmy, na gęstej w $\mathcal{F}$ dziedzinie $\mathcal{D}$, operatory: anihilacji $A_j(t)$, kreacji $A_j^\dagger(t)$ oraz liczb cząstek $\Lambda_{ij}(t)$ [11, 71]:

$$A_j(t)e(f) \;:=\; \int_0^t f_j(s)\mathrm{d}s\; e(f)\,, \tag{3.7}$$

$$A_j^\dagger(t)e(f) \;:=\; \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} e\big(f + \varepsilon\chi_{[0,t)}\big)\Big|_{\varepsilon=0}\,, \tag{3.8}$$

$$\Lambda_{ij}(t)e(f) \;:=\; -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} e\big(\exp(\mathrm{i}\lambda P_{ij}\chi_{[0,t)})f\big)\Big|_{\lambda=0}\,, \tag{3.9}$$

gdzie $\chi_{[0,t)}$ jest funkcję charakterystyczną zbioru $[0,t)$, $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $(P_{ij}f)_k := \delta_{ik}f_j$. Korzystając z (3.3) otrzymujemy

$$\langle e(g)|A_j^\dagger(t)e(f)\rangle_{\mathcal{F}} \;=\; \int_0^t \overline{g_j(s)}\,\mathrm{d}s\; \exp\langle g|f\rangle_{\mathcal{K}}\,, \tag{3.10}$$

$$\langle e(g)|\Lambda_{ij}(t)e(f)\rangle_{\mathcal{F}} \;=\; \int_0^t \overline{g_i(s)}f_j(s)\,\mathrm{d}s\; \exp\langle g|f\rangle_{\mathcal{K}}\,. \tag{3.11}$$

Operatory $A_j(t)$, $A_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$ spełniają kanoniczne relacje komutacji postaci

$$\begin{gathered}[A_j(t),A_i(t')] \;=\; [A_j^\dagger(t),A_i^\dagger(t')] \;=\; 0\,,\;\; [\Lambda_{ij}(t),\Lambda_{kl}(t')] \;=\; \delta_{jk}\Lambda_{il}(t\wedge t') - \delta_{il}\Lambda_{kj}(t\wedge t')\,,\\ [A_i(t),A_j^\dagger(t')] \;=\; \delta_{ij}t\wedge t'\,,\; [A_j(t),\Lambda_{kl}(t')] \;=\; \delta_{jk}A_l(t\wedge t')\,,\;\; [\Lambda_{kl}(t),A_j^\dagger(t')] \;=\; \delta_{lj}A_k^\dagger(t\wedge t')\,,\end{gathered} \tag{3.12}$$

gdzie $t\wedge t' := \min(t,t')$. Definicje (3.7)–(3.9) pozwalają formalnie zapisać

$$A_j(t) \;=\; \int_0^t a_j(s)\mathrm{d}s, \quad A_j^\dagger(t) = \int_0^t a_j^\dagger(s)\mathrm{d}s, \quad \Lambda_{ij}(t) = \int_0^t a_i^\dagger(s)a_j(s)\mathrm{d}s, \tag{3.13}$$

gdzie $a_j(t)$, $a_j^\dagger(t)$ są operatorami spełniającymi kanoniczne relacje komutacji postaci

$$[a_j(t),a_i(t')] \;=\; 0, \quad [a_j(t),a_i^\dagger(t')] = \delta_{ji}\delta(t-t'). \tag{3.14}$$

Niech $M(t)$ będzie jednym z *procesów postawowych*: $A_j(t)$, $A_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$. Korzystając z własności faktoryzacji (3.6) możemy zapisać [91]

$$\big(M(t)-M(s)\big)e(f) \;=\; e(f_{[0,s)})\otimes\big\{\big(M(t)-M(s)\big)e(f_{[s,t)})\big\}\otimes e(f_{[t,\infty)})\,, \tag{3.15}$$

gdzie $\big(M(t)-M(s)\big)e(f_{[s,t)})\in\mathcal{F}(\mathbb{C}^n\otimes L^2([s,t))$.

Definicja 3.1. *Niech $\{L_s\}_{0\le s\le t}$ będzie procesem nieantycypującym ($L_s\in\mathcal{B}(\mathcal{F}_{[0,s)})$ dla $0\le s\le t$). Mówimy, że L jest procesem prostym względem podziału $s_0=0<s_1<\ldots<s_n=t$ jeżeli $L_s=L_{s_j}$, gdy $s_j\le s<s_{j+1}$. Całkę stochastyczną z L względem M na $\mathcal{F}$ definiujemy przez [71, 91]*

$$\int_0^t L(s)\mathrm{d}M(s)e(f):=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\big(L(s_i)e(f_{[0,s_i)})\big)\otimes\big(M(s_{i+1})-M(s_i)\big)e(f_{[s_i,s_{i+1})})\otimes e(f_{[s_{i+1},\infty)}). \tag{3.16}$$

Z powyższej definicji oraz z definicji (3.7)–(3.9) wynika, że przyrosty $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}A_j(t)$, $\mathrm{d}A_j^\dagger(t)$, $\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)$ rozpatrujemy jako operatory działające w przestrzeni $\mathcal{F}_{[t,t+\mathrm{d}t)}$, dla których

$$\mathrm{d}A_j(t)e(f) \;=\; \mathrm{d}tf_j(t)e(f)\,,\quad \langle e(f)|\mathrm{d}A_j^\dagger(t) \;=\; \overline{f_j(t)}\mathrm{d}t\langle e(f)|\,,$$
$$\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)e(f) \;=\; \mathrm{d}A_i^\dagger(t)f_j(t)e(f)\,. \tag{3.17}$$

W dalszej części pracy wielokrotnie korzystać będziemy z tego, że $\mathrm{d}A_j(t)$, $\mathrm{d}A_j^\dagger(t)$, $\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)$ komutują z dowolnym procesem nieantycypującym $F(t)$.

Twierdzenie 3.1. *(Kwantowe reguły Ito [71, 91]). Niech $M_1(t)$ i $M_2(t)$ będą jednymi z procesów $A_j(t)$, $A_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$. Wówczas $M_1(t)M_2(t)$ jest procesem nieantycypującym spełniającym relację:*

$$\mathrm{d}\big(M_1(t)M_2(t)\big)=\mathrm{d}M_1(t)M_2(t)+M_1(t)\mathrm{d}M_2(t)+\mathrm{d}M_1(t)\mathrm{d}M_2(t)\,, \tag{3.18}$$

gdzie iloczyn $\mathrm{d}M_1(t)\,\mathrm{d}M_2(t)$ określony jest przez kwantową tablicę przyrostów Ito:

$$\mathrm{d}A_i(t)\,\mathrm{d}A_j^\dagger(t) \;=\; \delta_{ij}\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}A_i(t)\,\mathrm{d}\Lambda_{kj}(t) \;=\; \delta_{ik}\mathrm{d}A_j(t)\,,$$
$$\mathrm{d}\Lambda_{kj}(t)\,\mathrm{d}A_i^\dagger(t) \;=\; \delta_{ji}(t)\mathrm{d}A_k^\dagger(t)\,,\quad \mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)\,\mathrm{d}\Lambda_{kl}(t) \;=\; \delta_{jk}\mathrm{d}\Lambda_{il}(t)\,, \tag{3.19}$$

a pozostałe iloczyny, w tym wszystkie iloczyny zawierające $\mathrm{d}t$, są równe zero.

3.2 Kwantowa ewolucja stochastyczna i kwantowe równanie Langevina

Rozważmy układ kwantowy $\mathcal{S}$, który oddziałuje z rezerwuarem modelowanym w przestrzeni Focka $\mathcal{F}$. Niech $\mathcal{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta związaną z układem $\mathcal{S}$.

Przestrzeń $\mathcal{H}$ bywa nazywana także *przestrzenią początkową* [17, 91]. Aby opisać oddziaływanie między układem $\mathcal{S}$ i polem bozonowym, a także ewolucję układu złożonego, należy rozszerzyć wprowadzony w poprzednim podrozdziale kwantowy rachunek stochastyczny do przestrzeni $\mathfrak{h} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ [71, 91]. Kwantowy rachunek stochastyczny w $\mathfrak{h}$ rozwinięty przez Hudsona i Parthasarathy'ego, określa znaczenie równań postaci

$$\mathrm{d}M(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} D_{ji}(t)\mathrm{d}\Lambda_{ji}(t) + E_j(t)\mathrm{d}A_j(t) + F_j(t)\mathrm{d}A_j^{\dagger}(t) \right) + G(t)\mathrm{d}t\,, \tag{3.20}$$

gdzie $M(t)$, $D_{ji}(t)$, $E_j(t)$, $F_j(t)$, $G(t)$ są nieantycypującymi procesami w $\mathfrak{h}$, a przyrosty procesów podstawowych należy identyfikować z ich wzmocnieniami, czyli operatorami postaci $I_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{d}A_j(t)$, itd. Znaczenie równaniu nadaje podana przez autorów definicja kwantowej całki stochastycznej dla procesów nieantycypujących w $\mathfrak{h}$. W szczególności teoria nadaje sens *kwantowemu równaniu stochastycznemu* postaci [71, 91]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U(t) \;=\; \Bigg\{ &\sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{d}A_j^{\dagger}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (S_{ij} - \delta_{ij})\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_j^{\dagger} S_{ji} \mathrm{d}A_i(t) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} R_j^{\dagger}R_j \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{\hbar} H \mathrm{d}t \Bigg\} U(t)\,, \quad U(0) \;=\; I\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdzie $R_j,\ S_{ij},\ H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ H^{\dagger} = H,\ \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} \otimes |h_i\rangle\langle h_j| =: S$ jest operatorem unitarnym w $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ i $\{h_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$ jest ortonormalną bazą w $\mathbb{C}^n$. Aby uprościć zapis utożsamiliśmy operatory występujace w równaniu z ich wzmocnieniami, operator R_j należy identyfikować z $R_j \otimes I_{\mathcal{F}}$, natomiast $A_k(t)$ z $I_{\mathcal{H}} \otimes A_k(t)$, itd. Rozwiązanie równania (3.21) istnieje i jest jednoznaczne [2, 71, 91], jest nim jest rodzina $\{U(t)\,,\ t \geq 0\}$ nieantycypujących operatorów unitarnych w $\mathfrak{h}$; dla $S = I$ otrzymujemy [2]

$$U(t) \;=\; \overleftarrow{\mathrm{T}}\exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \left[H\mathrm{d}t' + \mathrm{i}\,\hbar \sum_{j=1}^{n} \Big(R_j \mathrm{d}A_j^{\dagger}(t') - R_j^{\dagger}\mathrm{d}A_i(t') \Big) \right] \right\}, \tag{3.22}$$

gdzie $\overleftarrow{\mathrm{T}}$ jest operatorem chronologicznym. Aby sprawdzić, że (3.22) jest rozwiązaniem równania (3.21) dla $S = I$ wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U(t) \;&\equiv\; U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \big(R_j\mathrm{d}A_j^{\dagger}(t) - R_j^{\dagger}A_j(t) \big) \right) - I \right] U(t) \\ &=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \big(R_j\mathrm{d}A_j^{\dagger}(t) - R_j^{\dagger}\mathrm{d}A_j(t) \big) \right)^m U(t)\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Z kwantowych reguł mnożenia Ito wynika, że wszystkie wyrazy rzędu $m > 2$ znikają. Wyrażenie $-\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}R_j^{\dagger}R_j\mathrm{d}t$ w równaniu (3.21) pochodzi się z wyrazu drugiego rzędu i nazywane jest *poprawką Ito*. Podanie rozwiązania równania (3.21) dla $S \neq I$ wymaga użycia metody iteracji Picarda [84]. Z fizycznego punktu widzenia operator $U(t)$ spełniający równanie (3.21) opisuje odwracalną ewolucję układu złożonego w obrazie interakcji eliminującym swobodną ewolucję rezerwuaru, H jest hamiltonianem układu $\mathcal{S}$, a operatory R_j oraz S_{ij} kontrolują sprzężenie układów, w szczególności wyrażenie $\big(S_{ij} - \delta_{ij}\big)\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)$ opisuje proces bezpośredniego rozpraszania fotonów na $\mathcal{S}$ między kanałem i oraz j [10].

Niech $\{V(t), t \in \mathbb{R}\}$ będzie silnie ciągłą grupę operatorów unitarnych na przestrzeni $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}\big(\mathbb{C}^n \otimes L^2(\mathbb{R})\big)$ takich, że

$$V(t)e(f(s)) \;:=\; e(f(s+t))\,. \tag{3.24}$$

Można wykazać, że operatory U i V spełniają relację postaci [5, 46]

$$U(t+s) \;=\; V^\dagger(s)U(t)V(s)U(r)\,, \quad \forall\; s,t \geq 0\,. \tag{3.25}$$

Z relacji (3.25) wynika, że V możemy interpetować jako operator opisujący swobodną ewolucję pola. Korzystając z (3.24) oraz (3.13) otrzymujemy

$$V^\dagger(s)A_j(t)V(s) \;=\; \int\limits_s^{t+s} a_j(t')\,\mathrm{d}t' \;=\; A_j(t+s) - A_j(s) \tag{3.26}$$

lub inaczej

$$V^\dagger(s)a_j(t)V(s) \;=\; a_j(t+s)\,, \tag{3.27}$$

zgodnie z tym, że operatory $A_j(t)$, a także $A_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$, zapisane są w obrazie interakcji. W dalszej części pracy będziemy korzystać z tego, że dla dwuparametrowej rodziny operatorów unitarnych $U(t,r) := V^\dagger(r)U(t-r)V(r)$, $r \leq t$, zachodzi własność [46]

$$U(t,s)U(s,r) \;=\; U(t,r)\,, \quad r \leq s \leq t\,. \tag{3.28}$$

Zdefiniujmy teraz grupę operatorów unitarnych $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ kładąc

$$\mathcal{U}(t) \;:=\; \begin{cases} V(t)U(t)\,, & t \geq 0 \\ U^\dagger(-t)V(t)\,, & t < 0 \end{cases}. \tag{3.29}$$

Generatorem grupy $\mathcal{U}$ jest hamitonian układu złożonego [62]. Grupa $\mathcal{U}$ określa rodzinę $\theta(t)$ automorfizmów $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{F}})$ postaci

$$\theta(t)\big(Z \otimes W\big) \;=\; \mathcal{U}^\dagger(t)\big(Z \otimes W\big)\mathcal{U}(t)\,, \tag{3.30}$$

gdzie $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $W \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{F}})$. Jeżeli $\widetilde{\eta} \in \mathcal{P}(\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{F}})$ jest stanem układu złożonego w chwili $t = 0$, wówczas wyrażenie

$$\langle B \rangle^t \ = \ \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}\otimes\widetilde{\mathcal{F}}}\{\mathcal{U}^\dagger(t) B\, \mathcal{U}(t)\, \widetilde{\eta}\} \tag{3.31}$$

określa wartość średnią operatora $B \in \mathcal{B}\big(\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{F}}\big)$ w chwili t. W obrazie interakcji otrzymujemy

$$\langle B \rangle^t \ = \ \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}\otimes\widetilde{\mathcal{F}}}\{B(t) U(t) \widetilde{\eta} U^\dagger(t)\}\,, \tag{3.32}$$

gdzie $B(t) = V^\dagger(t) B V(t)$.

W dalszej części pracy rozważać będziemy operatory układu złożonego na przestrzeni $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$.

Niech $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie obserwablą układu kwantowego $\mathcal{S}$. Operator Z w obrazie Heisenberga wyraża się jako

$$Z_t \ = \ \mathcal{U}^\dagger(t)\big(Z \otimes I_{\mathcal{F}}\big)\mathcal{U}(t)\,. \tag{3.33}$$

Korzystając z definicji operatora $\mathcal{U}(t)$ dla $t \geq 0$ oraz z tego, że $V(t)$ komutuje z $Z \otimes I_{\mathcal{F}}$ otrzymujemy

$$Z_t \ = \ U^\dagger(t)\big(Z \otimes I_{\mathcal{F}}\big)U(t)\,. \tag{3.34}$$

Stosując reguły różniczkowania Ito (3.18) oraz (3.19) do równości (3.34) otrzymujemy równanie ewolucji Heisenberga nazywane *kwantowym równaniem Langevina*:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t \ &\equiv \ \big(\mathrm{d}U^\dagger(t)\big) Z U(t) + U^\dagger(t) Z \big(\mathrm{d}U(t)\big) + \big(\mathrm{d}U^\dagger(t)\big) Z \big(\mathrm{d}U(t)\big) \\
&= \ \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_t, Z_t]\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(R_{j,t}^\dagger[R_{j,t}, Z_t] + [Z_t, R_{j,t}^\dagger]R_{j,t}\Big)\,\mathrm{d}t + \sum_{j,i=1}^{n} S_{ij,t}^\dagger[Z_t, R_{i,t}]\mathrm{d}A_j^\dagger(t) \\
&\quad - \sum_{j,i=1}^{n}[Z_t, R_{i,t}^\dagger] S_{ij,t}\mathrm{d}A_j(t) + \sum_{j,i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{ki,t}^\dagger Z_t S_{kj,t} - \delta_{ij} Z_t\right)\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)\,.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Równanie (3.35) wyznaczamy korzystając z równania (3.21) oraz równania do niego sprzężonego, a także faktu, że proces nieantycypujący $U(t)$ komutuje z przyrostami $\mathrm{d}A_j(t)$, $\mathrm{d}A_j^\dagger(t)$ i $\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)$.

Załóżmy, że w chwili początkowej układy są niezależne, a zatem stan układu złożonego można zapisać w postaci

$$\eta \ = \ \rho_0 \otimes \sigma_0\,, \tag{3.36}$$

gdzie $\rho_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $\sigma_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Zredukowany operator statystyczny układu $\mathcal{S}$ w chwili t definiujemy jako

$$\rho(t) \ = \ \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}\{U(t)\eta U^\dagger(t)\}\,, \tag{3.37}$$

lub w sposób równoważny za pomocą równości

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{Z\rho(t)\} \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}}\{Z_t\eta\}\,, \quad \forall\, Z\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\,. \tag{3.38}$$

Rozważmy sytuację, gdy pole bozonowe w chwili rozpoczęcia oddziaływania z układem $\mathcal{S}$ znajduje się w stanie koherentnym [4, 10],

$$\sigma_0 \;=\; |\iota(f)\rangle\langle\iota(f)|\,. \tag{3.39}$$

Korzystając z tego, że wartości średnie operatorów $\mathrm{d}A_j(t)$, $\mathrm{d}A_j^\dagger(t)$, $\mathrm{d}\Lambda_{ij}(t)$ w stanie koherentnym (3.39) wynoszą odpowiednio $f_j(t)\mathrm{d}t$, $\overline{f_j(t)}\mathrm{d}t$ oraz $\overline{f_i(t)}f_j(t)\mathrm{d}t$, z (3.35) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{Z\rho(t)\} \;&\equiv\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}}\big\{Z_t\rho_0\otimes|\iota(f)\rangle\langle\iota(f)|\big\}\\
&=\; \mathrm{T}r_{\mathcal{H}}\Bigg\{\Bigg[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,Z]+\sum_{j,i=1}^{n}\Bigg(\frac{1}{2}R_j^\dagger[Z,R_j]+\frac{1}{2}[R_j^\dagger,Z]R_j+f_j(t)[R_i^\dagger,Z]S_{ij}\\
&\quad+\overline{f_j(t)}S_{ij}^\dagger[Z,R_i]+\overline{f_i(t)}f_j(t)\Bigg(\sum_{k=1}^{n}S_{ki}^\dagger ZS_{kj}-\delta_{ij}Z\Bigg)\Bigg)\Bigg]\rho(t)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Równanie (3.40) spełnione jest dla dowolnego operatora $Z\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i jest ono równoważne kwantowemu *równaniu master* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) \;=\; \mathcal{L}_{t,f}[\rho(t)]\,, \tag{3.41}$$

gdzie $\mathcal{L}_{t,f}$ jest ograniczonym operatorem na $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ postaci

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t,f}[\rho(t)] \;:=\; &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\rho(t)]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big([R_j,\rho(t)R_j^\dagger]+[R_j\rho(t),R_j^\dagger]\Big)\\
&+\sum_{j,i=1}^{n}\Bigg[f_j(t)\Big(S_{ij}\rho(t)R_i^\dagger-R_i^\dagger S_{ij}\rho(t)\Big)+\overline{f_j(t)}\Big(R_i\rho(t)S_{ij}^\dagger-\rho(t)S_{ij}^\dagger R_i\Big)\\
&+\overline{f_i(t)}f_j(t)\sum_{k=1}^{n}S_{kj}\rho(t)S_{ki}^\dagger-\|f(t)\|^2\rho(t)\Bigg]\,.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Równanie (3.41) opisuje nieodwracalną (nieunitarną) dynamikę układu $\mathcal{S}$, który oddziałuje z rezerwuarem, rozwiązanie równania możemy zapisać jako [1]

$$\rho(t) \;=\; \Theta(t,s)\rho(s)\,, \tag{3.43}$$

gdzie

$$\Theta(t,s) \;:=\; \overleftarrow{\mathrm{T}}\Bigg\{\exp\int_s^t \mathrm{d}t'\,\mathcal{L}_{t',f}\Bigg\}\,. \tag{3.44}$$

Łatwo sprawdzić, że dla operatora (3.44) spełniona jest własność półgrupy

$$\Theta(t,s)\Theta(s,r) \;=\; \Theta(t,r)\,, \qquad r \le s \le t\,, \tag{3.45}$$

zatem operator $\mathcal{L}_{t,f}$ jest dla każdego $t \ge 0$ generatorem kwantowej półgrupy dynamicznej. Dla rezerwuaru w stanie próżni ($f = 0$) zredukowana dynamika układu $\mathcal{S}$ jest jednorodna w czasie [1, 60, 71, 77, 95]. Gdy układ $\mathcal{S}$ nie oddziałuje z rezerwuarem (tzn. $S_{ij} = \delta_{ij}$, $R_j = 0$), równanie (3.41) przyjmuje postać równania von Neumanna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) \;=\; -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[H,\rho(t)]\,. \tag{3.46}$$

Hudson i Parthasarathy rozpatrywali sytuację, gdy rezerwuar w chwili początkowej znajdował się w stanie próżni [71, 91]. Przypadek rezerwuaru będącego mieszaniną stanów koherentnych opisano w [12], natomiast wyniki dla rezerwuaru w stanie ściśniętym można znaleźć na przykład w [27, 64].

3.3 Fizyczne podstawy modelu: przybliżenie Markowa, rezerwuar osobliwy

Opierając się na pracy [49] Gardinera i Colleta przedstawimy dyskusję przybliżeń stosowanych w optyce kwantowej, które dla $S = I$ prowadzą do równania Langevina typu (3.35).

Niech pole elektromagnetyczne, którego operatory $a_j(\omega)$ oraz $a_j^\dagger(\omega)$ spełniają kanoniczne relacje komutacji

$$[a_i(\omega), a_j(\omega')] \;=\; 0\,, \quad [a_i(\omega), a_j^\dagger(\omega')] \;=\; \delta_{ij}\delta\big(\omega-\omega'\big)\,, \tag{3.47}$$

oddziałuje z układem $\mathcal{S}$. W (3.47) zmienna ω jest częstością pola, a indeks dyskretny reprezentuje polaryzację.

Przyjmijmy, że hamiltonian oddziaływania układów jest liniową funkcją operatorów pola. W *przybliżeniu wirującej fali* (ang. *rotating wave approximation* – RWA) hamitonian oddziaływania można zapisać jako

$$H_I \;=\; \mathrm{i}\hbar\,(2\pi)^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta_j-\theta_j}^{\Theta_j+\theta_j}\kappa_j(\omega)\left[R_j a_j^\dagger(\omega) - R_j^\dagger a_j(\omega)\right]\mathrm{d}\omega\,, \tag{3.48}$$

gdzie R_j są operatorami układu $\mathcal{S}$, a $\kappa_j(\omega)$ są funkcjami rzeczywistymi charakteryzującymi sprzężenie układów. W obrazie oddziaływania eliminującym ewolucję swobodną pola, dla sprzężeń niezależnych od częstości – *przybliżenie płaskiego kontinuum* – otrzymujemy

$$\widetilde{H}_I(t) \;=\; \mathrm{i}\hbar\sum_{j=1}^{n}\left[R_j\tilde{a}_j^\dagger(t) - R_j^\dagger\tilde{a}_j(t)\right]\,, \tag{3.49}$$

gdzie

$$\tilde{a}_j(t) \ := \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Theta_j-\theta_j}^{\Theta_j+\theta_j} a_j(\omega)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \,. \tag{3.50}$$

Operator ewolucji $\widetilde{U}(t)$ zapisany w obrazie interakcji spełnia zatem równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{U}(t) \ = \ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big(H + H_I(t)\big)\widetilde{U}(t)\,, \tag{3.51}$$

gdzie H jest hamiltonianem układu $\mathcal{S}$. We wzorze (3.49) stałą sprzężenia κ_j położono 1, co nie ogranicza ogólności rozważań.

Przybliżenie Markowa otrzymuje się przez przejście graniczne $\theta_j \to \infty$ we wzorze (3.50). W ten sposób otrzymujemy operatory $a_j(t) = \lim_{\theta_j\to\infty} \tilde{a}_j(t)$ oraz $a_j^\dagger(t) = \lim_{\theta_j\to\infty} \tilde{a}_j^\dagger(t)$ spełniające kanoniczne relacje komutacji (3.14), ponadto

$$\int_0^t \tilde{a}_j(t')\,\mathrm{d}t' \ \underset{\theta_j\to\infty}{\longrightarrow} \ A_j(t)\,, \tag{3.52}$$

$$H_I(t)\mathrm{d}t \ \underset{\theta_j\to\infty}{\longrightarrow} \ \mathrm{i}\hbar\sum_{j=1}^{n}\Big[R_j\mathrm{d}A_j^\dagger(t) - R_j^\dagger\mathrm{d}A_j(t)\Big]\,, \tag{3.53}$$

$$\widetilde{U}(t) \ \underset{\theta_j\to\infty}{\longrightarrow} \ U(t)\,. \tag{3.54}$$

Rozszerzenie obszaru całkowania w wyrażeniu (3.50) do przedziału $(-\infty, \infty)$ oznacza, że rezerwuar staje się *osobliwy* [1, 61, 65], w reprezentacji Focka otrzymujemy bowiem

$$\langle\iota(f)|a_i^\dagger(t)a_j(t')\iota(f)\rangle \ = \ \overline{f_i(t)}f_j(t')\,, \tag{3.55}$$

$$\langle\iota(f)|a_i(t)a_j^\dagger(t')\iota(f)\rangle \ = \ \delta_{ij}\delta(t-t') + \overline{f_i(t)}f_j(t')\,, \tag{3.56}$$

a zatem dla rezerwuaru w stanie próżni czas zaniku dwupunktowych czasowych funkcji korelacji pola wynosi zero, $\tau_R = 0$. Różnica między hamiltonianem oddziaływania dla rezerwuaru o dodatnich częstościach i dla rezerwuaru osobliwego jest niewielka wewnątrz przybliżenia RWA [47].

Szczegóły założeń kwantowego modelu propagacji światła, które pozwalają określić zakres stosowania rozważonego przez Hudsona i Parhasarathego równania stochastycznego (3.21), można znaleźć na przykład w [114].

3.4 Teoria detekcji: procesy samonieniszczące i pomiar nieniszczący

Operatory $A_j(t)$, $A_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$ opisują swobodne pole bozonowe. Zgodnie z interpretacją podaną przez Gardinera i Colleta [49] mówimy, że odpowiadają one polu przed oddziaływaniem z układem $\mathcal{S}$ i nazywamy je *polem wejściowym.* Operatory w obrazie Heisenbera

$$A_j^{\mathrm{out}}(t) \ = \ U^\dagger(t)A_j(t)U(t)\,, \quad \Lambda_{ij}^{\mathrm{out}}(t) \ = \ U^\dagger(t)\Lambda_{ij}(t)U(t)\,, \tag{3.57}$$

określają natomiast *pole wyjściowe*, czyli pole po oddziaływaniu z układem $\mathcal{S}$. Stosując reguły kwantowego rachunku różniczkowego Ito można wykazać, że

$$A_j^{\mathrm{out}}(t) \ = \ \int\limits_0^t \left\{ \sum_{i=1}^n U^\dagger(t')S_{ji}U(t')\mathrm{d}A_j(t') + U^\dagger(t')R_jU(t')\mathrm{d}t' \right\}, \tag{3.58}$$

$$A_j^{\mathrm{out}\dagger}(t) \ = \ \int\limits_0^t \left\{ \sum_{i=1}^n U^\dagger(t')S_{ji}^\dagger U(t')\mathrm{d}A_j^\dagger(t') + U^\dagger(t')R_j^\dagger U(t')\mathrm{d}t' \right\}, \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij}^{\mathrm{out}}(t) \ = \ \int\limits_0^t \Bigg\{ &\sum_{k,m=1}^n U^\dagger(t')S_{ik}^\dagger S_{jm}U(t')\mathrm{d}\Lambda_{km}(t') + \sum_{m=1}^n U^\dagger(t')S_{im}^\dagger R_jU(t')\mathrm{d}A_m^\dagger(t') \\ &+ \sum_{m=1}^n U^\dagger(t')R_i^\dagger S_{jm}U(t')\mathrm{d}A_m(t') + U^\dagger(t')R_i^\dagger R_jU(t')\mathrm{d}t' \Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Rozważany przez nas model zakłada, że obserwabli układu $\mathcal{S}$ nie mierzymy bezpośrednio. Z równań (3.58)–(3.60) widać, że pomiar obserwabli pola wyjściowego dostarcza informacji o układzie $\mathcal{S}$ i w tym sensie pole bozonowe pełni rolę aparatury pomiarowej. W bezpośrednim pomiarze pola wyjściowego dla fotodetektora zliczającego fotony typu j mierzony sygnał można wyrazić za pomocą obserwabli

$$\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t) \ := \ \Lambda_{jj}^{\mathrm{out}}(t)\,, \tag{3.61}$$

która określa liczbę fotonów typu j unoszonych przez pole wyjściowe do chwili t. W pomiarze pośrednim pola wyjściowego można natomiast wyznaczyć wartości obserwabli

$$\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t) \ := \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}A_j^{\mathrm{out}\dagger}(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}A_j^{\mathrm{out}}(t)\,, \tag{3.62}$$

gdzie $\phi \in [0, 2\pi)$. Z wzorów (3.58)–(3.60) dla $S = I$, otrzymujemy

$$\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t) \ = \ \int\limits_0^t \mathrm{d}\Lambda_{jj}(t') + R_{j,t'}\mathrm{d}A_j^\dagger(t') + R_{j,t'}^\dagger \mathrm{d}A_j(t') + R_{j,t'}^\dagger R_{j,t'}\mathrm{d}t'\,, \tag{3.63}$$

$$\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t) \ = \ \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}A_j^\dagger(t') + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}A_j(t') + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}R_{j,t'}^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}R_{j,t'}\right)\mathrm{d}t'\,. \tag{3.64}$$

Zdefiniowane powyżej stochastyczne procesy wyjściowe $\{\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t), t \geq 0\}$, $\{\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t), t \geq 0\}$ są *samonieniszczące* [13, 14]:

$$[\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t), \mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t')] \ = \ [\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t), \mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t')] = 0, \quad \forall t,\, t' \geq 0\,. \tag{3.65}$$

Własność (3.65) oznacza, że dla każdej z rozpatrywanych rodzin obserwabli istnieje wspólna miara spektralna. Z tego powodu każdy z procesów można traktować jak proces klasyczny, który może być obserwowany bez żadnych ograniczeń. Mówimy, że pomiary obserwabli w różnych chwilach czasu nie interferują, zatem pomiar obserwabli, który możemy prowadzić z dowolną precyzją, nie wpływa na wynik pomiaru w następnych chwilach. Ponieważ $\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t)$ oraz $\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t)$ nie komutują ze sobą, w pojedynczym doświadczeniu można realizować pomiar tylko jednego z tych procesów.

Aby udowodnić własność (3.65) należy zauważyć, że dla rodziny operatorów pola $\{Y(t), t \geq 0\}$, spełniających warunki

$$[Y(t), Y(t')] \;=\; 0\,, \quad Y^\dagger(t) \;=\; Y(t)\,, \quad Y(t)\mathcal{F} \;=\; \big(Y(t)\mathcal{F}_{[0,t)}\big) \otimes \mathcal{F}_{[t,\infty)}\,, \tag{3.66}$$

której przykładem jest

$$\{\mathcal{N}_j(t) := \Lambda_{jj}(t),\ t \geq 0\} \tag{3.67}$$

oraz

$$\{\mathcal{Q}_j(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} A_j^\dagger(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} A_j(t),\ t \geq 0\} \tag{3.68}$$

z $\phi \in [0, 2\pi)$, zachodzi

$$[U(T,t), Y(t')] \;=\; 0\,, \qquad \forall\, t' \leq t\,. \tag{3.69}$$

(3.69) wynika z tego, że $U(T,t)$ działa w sposób nietrywialny tylko na przestrzeni $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{[t,T)}$. Z własności (3.28) otrzymujemy

$$U(T) \;=\; U(T,t)U(t)\,, \quad \forall\, T \geq t\,, \tag{3.70}$$

a zatem

$$U^\dagger(t)Y(t)U(t) \;=\; U^\dagger(t)U^\dagger(T,t)Y(t)U(T,t)U(t) \;=\; U^\dagger(T)Y(t)U(T)\,, \quad \forall\, T \geq t. \tag{3.71}$$

Stąd ostatecznie

$$\begin{aligned} [Y^{\mathrm{out}}(t), Y^{\mathrm{out}}(t')] &\equiv [U^\dagger(t)Y(t)U(t), U^\dagger(t')Y(t')U(t')] \\ &= [U^\dagger(T)Y(t)U(T), U^\dagger(T)Y(t')U(T)] \;=\; U^\dagger(T)[Y(t), Y(t')]U(T) \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Z (3.72) wynika także, że pole wyjściowe spełnia takie same relacje komutacji jak pole wejściowe, co oznacza, że pole wyjściowe pozostaje swobodnym polem bozonowym [5].

Procesy wyjściowe $\{\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t), t \geq 0\}$, $\{\mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t), t \geq 0\}$ są *procesami nieniszczącymi* [13, 14] w tym znaczeniu, że

$$[Z_t, \mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t')] \;=\; [Z_t, \mathcal{Q}_j^{\mathrm{out}}(t')] \;=\; 0\,, \quad \forall\, 0 \leq t' \leq t\,, \tag{3.73}$$

gdzie Z_t jest dowolną obserwablą układu $\mathcal{S}$ w obrazie Heisenberga.

Pomiar obserwabli spełniających warunek (3.73) nie zaburza obecnego i przyszłego stanu układu $\mathcal{S}$. Możemy powiedzieć, że pomiar pola wyjściowego zmienia naszą wiedzę o układzie, ale nie zmienia stanu układu. Własność (3.73) można wykazać korzystając z (3.71). Łatwo sprawdzić, że dla rodziny operatorów pola $\{Y(t), t \geq 0\}$ spełniających warunki (3.66), z (3.71) wynika, że

$$[Z_t, Y^{\text{out}}(t')] \;=\; U^{\dagger}(t)\,[Z, Y(t')]\,U(t)\,, \quad \forall\; 0 \leq t' \leq t\,. \tag{3.74}$$

Korzystając z tego, że komutator operatorów Z oraz $Y(t')$ jest równy zero otrzymujemy (3.73).

Zauważmy, że dla rezerwuaru, który w chwili początkowej znajdował się w stanie próżni funkcja operatorowa $t \to \mathcal{Q}_j(t)$ określona przez (3.68) jest statystycznie równoważna *klasycznemu standardowemu procesowi dyfuzji Wienera* [18, 19]. Z własności komutacji (3.65) oraz stąd, że $\mathrm{e}^{A_j(t)}\iota(0) = \iota(0)$ wynika, że średnia operatora

$$\exp\{\mathrm{i}\,\mathcal{Q}_j(t)\} \;=\; \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}A_j^{\dagger}(t)\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}A_j(t)\right\}\exp\left\{-1/2\,t\right\}\,, \tag{3.75}$$

daje tę samą wartość co zapisana dla klasycznego standardowego procesu Wienera w_t z miarą $P(\mathrm{d}\omega)$ całka

$$\int \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}w_{t'}\right\}P(\mathrm{d}\omega)\,. \tag{3.76}$$

Wielkość $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a_j^{\dagger}(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}a_j(t)$ dla każdego $\phi \in [0, 2\pi)$, zgodnie z tym, że

$$\langle\iota(0)|a_j(t)\iota(0)\rangle = \langle\iota(0)|a_j^{\dagger}(t)\iota(0)\rangle = \langle\iota(0)|a_j^{\dagger}(t)a_j(t')\iota(0)\rangle = 0\,, \tag{3.77}$$

$$\langle\iota(0)|a_j(t)a_j^{\dagger}(t')\iota(0)\rangle = \delta(t - t')\,, \tag{3.78}$$

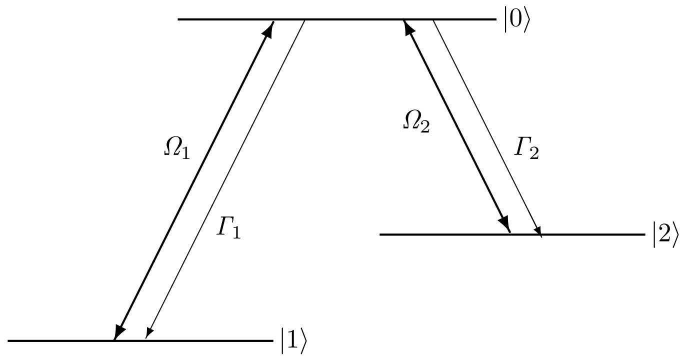
ma dla rezerwuru w stanie próżni statystyczne własności *klasycznego białego szumu.*

Rozdział 4

Skoki kwantowe i efekt odkładania elektronu na półkę dla atomu o schemacie poziomów typu Λ

Opracowane pod koniec ubiegłego wieku metody pomiaru światła fluorescencji emitowanego przez pojedyncze jony i atomy otworzyły drogę do obserwacji efektów kwantowych, które były ukryte w przypadku detekcji promieniowania pochodzącego od wielu obiektów. Spektroskopia pojedynczych jonów i atomów pozwoliła między innymi na zaobserwowanie *skoków kwantowych* i efektu *odkładania elektronu na półkę* [26, 87, 96]. Eksperyment, w którym można ustalić kiedy układ przebywa w stanie metastabilnym (elektron jest odkładany na półkę) został zaproponowany przez Dehmelta [42] i zrealizowało go wiele zespołów badawczych [96, 108]. W doświadczeniu Dehmelta, które polega na sprzężeniu intensywnego dozwolonego przejścia ze słabym przejściem wzbronionym przez jeden wspólny poziom, w świetle fluorescencji pojawiają charakterystyczne *okresy ciemności i jasności*. Pierwszy okres odpowiada fazie, w której fluorescencja jest równa zeru (fluorescencja wyłączona), okres jasności wyznacza natomiast seria wielu emitowanych w krótkich odstępach czasu fotonów (fluorescencja włączona). Skokowe zmiany natężenia w obserwowanym promieniowaniu odpowiadają skokowym zmianom stanu atomu. Zgodnie z terminologią wprowadzoną przez Cooka i Kimblea [37, 73] mówimy, że fluorescencja w doświadczeniu Dehmelta ustaje, gdy elektron wykonuje *skok kwantowy* do stanu metastabilnego.

Na fakt, że teoria ciągłego pomiaru kwantowego, oparta na kwantowym rachunku stochastycznym Ito, jest wygodnym narzędziem matematycznym do opisu i analizy statystyki



Rysunek 4.1: Schemat poziomów energetycznych dla konfiguracji Λ.

fotonów emitowanych przez układ w doświadczeniu Dehmelta jako pierwszy zwrócił uwagę Barchielli, który wyznaczył, korzystając z metody funkcjonału charakterystycznego, statystykę fotonów fluorescencji emitowanych przez trójpoziomowy atom o schemacie poziomów energetycznych typu V [3]. Barchielli rozwinął podaną przez Cohena–Tannoudjiego i Dalibarda [36] metodę wyznaczania średniej długości okresów jasności i ciemności. W [3] oraz w przeglądowej pracy [5], gdzie autor podał pewne wyniki dla układu Λ, zależna od wyników pomiarów fotonów flurescencji, ewolucja *a posteriori* atomu i wartości oczekiwane *a posteriori* procesu wyjściowego nie były jednak rozpatrywane.

W rozdziale, korzystając z metody funkcjonału generującego [15, 101], otrzymamy statystykę fotonów fluorescencji dla trójpoziomowego układu typu Λ. Wyznaczymy i opiszemy zależną od wyników pomiaru ewolucję *a posteriori* atomu dla obserwacji mieszającej i niemieszającej oraz wyznaczymy średni czas oczekiwania na zliczenie fotonu.*

4.1 Opis eksperymentu Dehmelta w języku kwantowego rachunku stochastycznego

Rozważmy trójpoziomowy atom z dwoma przejściami spontanicznymi: jednym bardzo intensywnym $|0\rangle \to |1\rangle$ i drugim bardzo słabym $|0\rangle \to |2\rangle$ (Rysunek 4.1), który oddziałuje z polami dwóch laserów o częstościach niewiele różniących się od częstości przejść atomowych. Nawiązując do pracy [36] Cohena-Tannoudjiego i Dalibarda silne przejście

*Wyniki rozdziału zostały opublikowane w artykule [41], część materiału była prezentowana w formie plakatu na 39. Sympozjum Fizyki Matematycznej w Toruniu.

nazwiemy *przejściem niebieskim*, natomiast słabe przejście będziemy nazywać *przejściem czerwonym*. Podwójne strzałki na rysunku oznaczają absorpcję i emisję wymuszoną, pojedyncze reprezentują emisję spontaniczną. Zakładamy, że przejście $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ jest zabronione.

Hamiltonian swobodnego atomu o przyjętej konfiguracji poziomów energetycznych możemy zapisać jako

$$H \;=\; -\hbar \sum_{k=1}^{2} \omega_k |k\rangle\langle k|, \quad \omega_k > 0\,. \tag{4.1}$$

Stany atomu $|0\rangle$, $|k\rangle, k = 1,2$ są wektorami z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$.

Opiszemy teraz, odwołując się do kilku standardowych przybliżeń używanych w optyce kwantowej, oddziaływanie między atomem i polem elektromagnetycznym [3, 4, 49, 97, 114]. Pierwsze uproszenie polega na założeniu, że oddziaływanie między układami jest liniową funkcją operatorów pola. W przybliżeniu dipolowym i w obrazie oddziaływania eliminującym swobodną ewolucję pola, oddziaływanie między układami ma postać

$$-\,e\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{4.2}$$

gdzie e jest ładunkiem elektronu, $\boldsymbol{r}$ oznacza wektor wodzący elektronu, natomiast $\boldsymbol{E}$ jest wektorem natężenia pola elektrycznego. Niech $\psi_0(\boldsymbol{r})$, $\psi_k(\boldsymbol{r})$, $(k = 1,\, 2)$ będą funkcjami falowymi stanów atomu w reprezentacji położeniowej. Przez $a_j(\omega)$, $a_j^\dagger(\omega)$ oznaczmy odpowiednio operator anihilacji i operator kreacji spełniające kanoniczne relacje komutacji $[a_j(\omega), a_i^\dagger(\omega')] = \delta_{ji}\delta(\omega - \omega')$, gdzie $\omega \geq 0$ jest ciągłym indeksem reprezentującym częstość pola, a indeks j opisuje kierunek propagacji i polaryzację fotonów [3, 12].

W przybliżeniu RWA hamiltonian oddziaływania można przedstawić jako

$$H_{\mathrm{int}}(t) \;=\; -e \sum_{k=1}^{2} |0\rangle\langle k| \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \overline{\psi_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r}, t)\psi_k(\boldsymbol{r}) \;+\; \mathrm{hc}\,, \tag{4.3}$$

gdzie

$$\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r}, t) \;=\; \sum_j (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r}; \omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, a_j(\omega)\;. \tag{4.4}$$

Linia nad symbolem funkcji falowej w wyrażeniu (4.3) oznacza sprzężenie zespolone, natomiast hc jest sprzężeniem hermitowskim. Jawna postać współczynników $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r}; \omega)$ nie jest istotna w naszej dyskusji. Po wprowadzeniu stałej

$$F_j^{0k}(\omega) \;=\; -e \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \overline{\psi_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{r}; \omega)\psi_k(\boldsymbol{r})\,, \tag{4.5}$$

otrzymujemy

$$H_{\mathrm{int}}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{2} |0\rangle\langle k| \sum_j (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, F_j^{0k}(\omega)\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} a_j(\omega) \;+\; \mathrm{hc}\,. \tag{4.6}$$

Kolejne przybliżenie polega na przyjęciu, że współczynnik opisujący sprzężenie układów F_j^{0k} jest stały w otoczeniu częstości atomowych ω_1 oraz ω_2 i równy zero poza tym obszarem, dzięki temu

$$H_{\rm int}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{2} |0\rangle\langle k| \sum_j (2\pi)^{-1/2} F_j^{0k}(\omega_k)\tilde{a}_j^k(t) \;+\; \mathrm{hc}\,, \tag{4.7}$$

gdzie

$$\tilde{a}_j^k(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_k-\theta_k}^{\omega_k+\theta_k} a_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\,. \tag{4.8}$$

Jeżeli częstości ω_1 oraz ω_2 różnią się znacząco (przedziały całkowania nie nakładają się na siebie), wówczas

$$[\tilde{a}_j^k(t), \tilde{a}_{j'}^{k'}(t')] \;=\; 0 \quad \mathrm{dla} \quad k \neq k'\,. \tag{4.9}$$

Jeżeli przesuniemy granice całkowania w wyrażeniu (4.8) do nieskończoności, otrzymamy

$$a_j(t) \;:=\; \lim_{\theta_k\to\infty} \tilde{a}_j^k(t)\,, \tag{4.10}$$

takie, że

$$[a_i(t), a_j(t')] \;=\; \delta_{ij}\delta(t-t')\,, \tag{4.11}$$

a dla operatorów $A_j(t)$, $A_j^\dagger(t)$ danych wzorami (3.13) spełnione są reguły komutacji (3.12). Zatem otrzymana postać oddziaływania spełnia założenia opisanego w poprzednim rozdziale modelu kwantowego rachunku stochastycznego.

Z założenia, że lasery dostrojone są do dwóch znacznie różniących się częstości przejść atomowych wynika, że mody pola elektromagnetycznego możemy rozdzielić na dwa rozłączne zbiory niezależnych pól: I_1 oraz I_2, gdzie I_1 reprezentuje fotony niebieskie, natomiast I_2 składa się z fotonów czerwonych. Hamiltonian oddziaływania wygodnie jest przedstawić za pomocą operatorów postaci

$$R_j \;=\; \begin{cases} z_j S_1 \;=\; z_j\,|1\rangle\langle 0|\,, & \mathrm{gdy} \quad j \in I_1\,, \\ z_j S_2 \;=\; z_j\,|2\rangle\langle 0|\,, & \mathrm{gdy} \quad j \in I_2\,, \end{cases} \tag{4.12}$$

gdzie z_j są zespolonymi stałymi charakteryzującymi siłę sprzężenia układów dla fotonu typu j. Operator ewolucji układu złożonego (w obrazie oddziaływania eliminującym swobodną ewolucję pola) można zapisać (por. (3.22)) jako

$$U(t) \;=\; \overleftarrow{\mathrm{T}}\exp\left\{ \int_0^t \left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\mathrm{d}t' + \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n} \Big(R_j\mathrm{d}A_j^\dagger(t') - R_j^\dagger\mathrm{d}A_j(t') \Big) \right] \right\}. \tag{4.13}$$

Korzystając z kwantowych reguł różniczkowania Ito łatwo sprawdzić, że operator $U(t)$ spełnia kwantowe równanie stochastyczne postaci

$$\mathrm{d}U(t) \;=\; -KU(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n} \Big(R_j\mathrm{d}A_j^\dagger(t) - R_j^\dagger\mathrm{d}A_j(t) \Big)\, U(t)\,, \qquad U(0) \;=\; I\,, \tag{4.14}$$

gdzie

$$K \;=\; \frac{\mathrm{i}}{\hbar}H + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n} R_j^\dagger R_j\,. \tag{4.15}$$

Zgodnie z (4.12),

$$K \;=\; \frac{\mathrm{i}}{\hbar}H + \frac{1}{2}\,\Gamma\,|0\rangle\langle 0|\,, \tag{4.16}$$

gdzie

$$\Gamma \;=\; \sum_{n=1}^{2}\Gamma_n\,, \qquad \Gamma_n \;=\; \sum_{j\in I_n}|z_j|^2\,. \tag{4.17}$$

Załóżmy, że stan początkowy układu złożonego jest postaci $\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)$, gdzie $\psi\in\mathcal{H}$, $||\psi|| = 1$ i $\iota(f^n)$ są stanami koherentnym przestrzeni Focka: $a_j(t)\iota(f^n) = f_j^n(t)\iota(f^n)$ dla $j\in I_n$. Aby opisać bliskie fali monochromatycznej światło lasera przyjmiemy, że $f_j^n(t) \simeq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_n t}\lambda_j^n$, gdzie ν_n niewiele różni się od ω_n i λ_j^n jest różne od zera tylko dla kierunku propagacji światła lasera. Korzystając z wyników podanych w poprzednim rozdziale łatwo sprawdzić, że zredukowana macierz gęstości atomu

$$\rho(t) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}\left\{U(t)\left(|\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)\rangle\langle\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)|\right)U^\dagger(t)\right\}\,, \tag{4.18}$$

gdzie $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}$ jest śladem względem przestrzeni Focka, spełnia równanie master (por. z (3.41))

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\rho(t)] &+ \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_n t}\overline{\lambda_j^n}R_j - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_n t}\lambda_j^n R_j^\dagger\right),\rho(t)\right]\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n}\left([R_j,\rho(t)R_j^\dagger] + [R_j\rho(t),R_j^\dagger]\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Aby lepiej zrozumieć znaczenie stałych opisujących sprzężenie atomu z polem elektromagnetycznym wyznaczmy rozwiązanie równania master dla przypadku, gdy pole w chwili rozpoczęcia oddziaływania znajduje się w stanie próżni ($f^1 = f^2 \equiv 0$). Dla atomu, który w chwili początkowej był w stanie $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$, rozwiązanie równania master jest wówczas postaci

$$\rho(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\Gamma t}|0\rangle\langle 0| + \frac{\Gamma_1\left(1-\mathrm{e}^{-\Gamma t}\right)}{\Gamma}|1\rangle\langle 1| + \frac{\Gamma_2\left(1-\mathrm{e}^{-\Gamma t}\right)}{\Gamma}|2\rangle\langle 2|\,. \tag{4.20}$$

Jeżeli w chwili rozpoczęcia oddziaływania atom był w jednym ze stanów $\rho(0) = |n\rangle\langle n|$, $n = 1,2$, otrzymujemy $\rho(t) = |n\rangle\langle n|$. Wielkość Γ^{-1} jest zatem *czasem życia stanu wzbudzonego* $|0\rangle$ *ze względu na emisję spontaniczną*.

Aby usunąć zależność od czasu w wyrażeniach opisujących sprzężenie atomu z polami laserów w równaniu (4.19), przejdziemy do *układu wirującej fali* [98], czyli wyznaczymy zredukowaną ewolucję atomu dla operatora ewolucji

$$U_\nu(t) \;=\; \exp\left\{-\,\mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\nu_n|n\rangle\langle n|\,t\right\}U(t)\,. \tag{4.21}$$

Stochastyczne równanie różniczkowe dla unitarnego operatora $U_\nu(t)$ ma postać

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_\nu(t) \;=\; &-\; KU_\nu(t)\mathrm{d}t - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\nu_n|n\rangle\langle n|U_\nu(t)\mathrm{d}t \\ &+\; \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_n t}R_j\mathrm{d}A_j^\dagger(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_n t}R_j^\dagger\mathrm{d}A_j(t)\right)U_\nu(t)\,, \end{aligned} \tag{4.22}$$

a nowy stan zredukowany

$$\tilde{\rho}(t) \;=\; \exp\left\{-\,\mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\nu_n|n\rangle\langle n|t\right\}\rho(t)\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\nu_n|n\rangle\langle n|t\right\} \tag{4.23}$$

spełnia równanie

$$\tilde{\rho}(t) = -L\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(t)L^\dagger + \sum_{n=1}^{2}\Gamma_n|n\rangle\langle 0|\tilde{\rho}(t)|0\rangle\langle n|, \tag{4.24}$$

gdzie

$$L \;=\; \mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\Delta_n|n\rangle\langle n| + \frac{1}{2}\Gamma|0\rangle\langle 0| + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{2}\frac{\Omega_n}{2}\left(|0\rangle\langle n| + |n\rangle\langle 0|\right), \tag{4.25}$$

$$\Delta_n \;:=\; \nu_n - \omega_n, \quad \Omega_n \;:=\; -2\,\mathrm{i}\sum_{j\in I_n}\overline{z}_j\lambda_j^n. \tag{4.26}$$

Wielkości Δ_n w (4.26) opisują odstrojenia laserów od rezonansu, natomiast Ω_n są *częstościami Rabiego* [97]. Dla uproszczenia przyjęliśmy, że $\sum_{j\in I_n}\mathrm{i}\,\overline{z}_j\lambda_j^n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2$. Aby otrzymać silne przejście niebieskie i słabe przejście czerwone należy założyć, że

$$\Omega_1 \gg \Omega_2 > 0, \quad \Gamma_1 \gg \Omega_2, \quad \Omega_1^2 \gg \Gamma_1\Gamma_2\,, \quad \Gamma_1 \gg \Gamma_2 > 0\,. \tag{4.27}$$

Taką samą dynamikę zredukowaną atomu uzyskamy w modelu półklasycznym, w którym pole elektromagnetyczne laserów opisane jest klasycznie, a możliwość zajścia emisji spontanicznej wprowadza się używając skwantowanego pola, definiowanego za pomocą operatorów $a_j(t)$ spełniających relacje komutacji (4.11), które w chwili rozpoczęcia oddziaływania z atomem jest w stanie próżni. Taki właśnie opis można znaleźć w [3].

4.2 Statystyka procesu liczącego i ewolucja *a posteriori* dla obserwacji niemieszającej i mieszającej

Rozważmy doświadczenie, w którym fotodetektor rejestruje emitowane przez atom fotony fluorescencji. Załóżmy że przyrząd zlicza fotony poruszające się we wszystkich kierunkach, poza kierunkami wzdłuż których rozchodzi się światło laserów. Pomijając, dla uproszczenia, przesunięcie w czasie między aktem emisji i detekcji fotonów, przyjmijmy, że detektor mierzy wartość obserwabli

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}^{\mathrm{out}}(t) = \big(\boldsymbol{\mathcal{N}}_1^{\mathrm{out}}(t)\,,\boldsymbol{\mathcal{N}}_2^{\mathrm{out}}(t)\big) \tag{4.28}$$

o składowych

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_n^{\mathrm{out}}(t) \;:=\; \sum_{j\in I_n^d} \mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t)\,, \quad \mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t) \;:=\; \int_0^t a_j^{\mathrm{out}\dagger}(t')a_j^{\mathrm{out}}(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{4.29}$$

W powyższej definicji

$$a_j^{\mathrm{out}}(t) = U^\dagger(t)\,a_j(t)\,U(t) \equiv U_\nu^\dagger(t)\,a_j(t)\,U_\nu(t)\,, \tag{4.30}$$

$$a_j^{\mathrm{out}\dagger}(t) = U^\dagger(t)\,a_j^\dagger(t)\,U(t) \equiv U_\nu^\dagger(t)\,a_j^\dagger(t)\,U_\nu(t)\,, \tag{4.31}$$

są operatorami anihilacji i kreacji pola wyjściowego, czyli opisują pole po oddziaływaniu z atomem w przedziale czasu $[0,\,t)$ [2, 49]. Załóżmy, że detektor rejestruje w sposób natychmiastowy wszystkie docierające do niego fotony. Zbiór I^d jest zbiorem fotonów o kierunku propagacji pozwalającym dotrzeć do detektora. Z równości

$$[\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t),\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t')] \;=\; 0\,, \qquad \forall t,\,t' \geq 0\,, \tag{4.32}$$

wynika, że dwuwymiarowy proces wyjściowy $\boldsymbol{\mathcal{N}}^{\mathrm{out}}(t)$ może być traktowany jak klasyczny proces stochastyczny. Łatwo także sprawdzić, że

$$[\mathcal{N}_j^{\mathrm{out}}(t'),U_\nu^\dagger(t)\,Z\,U_\nu(t)] = U_\nu^\dagger(t)\,[\mathcal{N}_j(t'),Z]\,U_\nu(t) = 0, \quad 0 \leq t' \leq t\,, \tag{4.33}$$

a zatem rozważany pomiar jest nieniszczący.

Statystykę procesu liczącego (4.28) wyznaczymy korzystając z metody funkcjonału generującego [15, 101]. Ponieważ w pracach [15, 101] podano rozwiązania dla pola bozonowego, które w chwili rozpoczęcia obserwacji jest w stanie próżni, postępowanie dla pola w stanie koherentnym przedstawimy szczegółowo. Rozważmy najpierw *obserwację niemieszająca* tzn. załóżmy, że detektor osobno zlicza fotony niebieskie i czerwone. Korzystając z kwantowych reguł różniczkowania Ito można sprawdzić, że *operator generujący* [15, 25, 99, 101]

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{k},t) \;:=\; \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d} \exp\left\{\int_0^t \ln k_n(t')\mathrm{d}\mathcal{N}_j(t')\right\}, \tag{4.34}$$

gdzie $k_n(t)$ są zespolonymi stałymi takimi, że $0 < |k_n(t)| < 1$, spełnia kwantowe stochastyczne równanie różniczkowe postaci

$$\mathrm{dG}(\boldsymbol{k},t) \;=\; \Big(\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}\big(k_n(t)-1\big)\mathrm{d}\mathcal{N}_j(t)\Big)\mathrm{G}(\boldsymbol{k},t)\,. \tag{4.35}$$

Operator $\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k},t) := U_\nu^\dagger(t)\mathrm{G}(\boldsymbol{k},t)U_\nu(t)$ nazywamy *wyjściowym procesem generującym.* Wartość średnia wyjściowego procesu generującego

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{k},t) \;:=\; \langle\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)|\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k},t)\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)\rangle\,, \tag{4.36}$$

określa *funkcjonał generujący* procesu liczącego (4.28) dla obserwacji niemieszającej.

Niech $\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)$ będzie odwzorowaniem liniowym określonym na algebrze operatorów atomu za pomocą wzoru

$$\langle\psi|\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[Z]\psi\rangle \;:=\; \langle\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)|\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k},t)Z_t\psi\otimes\iota(f^1)\otimes\iota(f^2)\rangle\,, \tag{4.37}$$

gdzie $Z_t = U_\nu^\dagger(t)ZU_\nu(t)$ jest operatorem atomu w obrazie Heisenberga w układzie wirującej fali. Zauważmy, że $\langle\psi|\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[I]\psi\rangle = \mathcal{G}(\boldsymbol{k},t)$. Aby otrzymać równanie różniczkowe dla $\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)$ wyznaczymy stochastyczne równanie różniczkowe dla iloczynu $\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k},t)Z_t := \pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)$. Używając kwantowych reguł różniczkowania Ito otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z) \;=\;& \sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n}\big(R_{j,t}^\dagger\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)-\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)R_{j,t}^\dagger\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_n t}\mathrm{d}A_j(t)\\
&+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n}\big(\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)R_{j,t}-R_{j,t}\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_n t}\mathrm{d}A_j^\dagger(t)+\sum_{j\in I}R_{j,t}^\dagger\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)R_{j,t}\mathrm{d}t\\
&+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}\big(k_n(t)-1\big)R_{j,t}^\dagger\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)R_{j,t}\mathrm{d}t-\big(K_t^\dagger\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)+\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)K_t\big)\mathrm{d}t\\
&+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}\big(k_n(t)-1\big)\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)\mathrm{d}\mathcal{N}_j(t)+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}\big(k_n(t)-1\big)R_{j,t}^\dagger\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_n t}\mathrm{d}A_j(t)\\
&+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}\big(k_n(t)-1\big)\pi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(t,Z)R_{j,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_n t}\mathrm{d}A_j^\dagger(t).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Wyznaczenie wartości średniej z (4.38), zgodnie z definicją (4.37), prowadzi do równania postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[Z] \;=\; \mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)\big[-L^\dagger Z-ZL+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j\in I_n^d}(k_n(t)-1)R_j^\dagger ZR_j+\sum_{j\in I}R_j^\dagger ZR_j\,\big]\,, \tag{4.39}$$

gdzie L dane jest wzorem (4.25). Korzystając z tego, że wiązki laserów są bardzo wąskie możemy przyjąć, że detektor zlicza wszystkie emitowane przez atom fotony fluorescencji.

Otrzymujemy w ten sposób uproszczone równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[Z] \;=\; \mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)\big[-L^{\dagger}Z - ZL + \sum_{n=1}^{2} k_n(t)\mathit{\Gamma}_n S_n^{\dagger} Z S_n\,\big]\,. \tag{4.40}$$

Rozwiązanie równania (4.40) można zapisać w postaci szeregu Dysona [15, 39, 101]

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[Z] \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l_1,\ldots,l_n=1}^{2}\mathit{\Gamma}_{l_1}\ldots\mathit{\Gamma}_{l_n}\int_0^t \mathrm{d}t_n\int_0^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\ldots\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\,\times \\ &\times k_{l_1}(t_1)\ldots k_{l_n}(t_n)S_{l_1}^{\dagger}(t_1)\ldots S_{l_n}^{\dagger}(t_n)Z(t)S_{l_n}(t_n)\ldots S_{l_1}(t_1)\,,\end{aligned} \tag{4.41}$$

gdzie

$$Z(t) \;=\; \mathrm{e}^{-L^{\dagger}t}Z\mathrm{e}^{-Lt}\,, \tag{4.42}$$

$$S_l(t) \;=\; \mathrm{e}^{Lt}S_l\mathrm{e}^{-Lt}\,, \tag{4.43}$$

S_l jest operatorem zdefiniowanym w (4.12).

Proces liczący (4.28) jest *regularny*, znaczy to, że tylko jeden foton może zostać zaobserwowany w danej chwili. Trajektorię regularnego procesu liczącego (4.28) do chwili t można przedstawić w postaci

$$\tau \;=\; \big((l_1,t_1),\,(l_2,t_2),\,\ldots\,,\,(l_n,t_n)\big)\,, \tag{4.44}$$

gdzie $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < t$ są chwilami, w których nastąpiło zliczenie fotonu danego typu. Niech Σ^t będzie zbiorem wszystkich trajektorii liczących do chwili t o skończonej długości $|\tau| := n \in \{1, 2, ...\}$ i niech $\Sigma^{\infty} = \bigcup_{t\geq 0}\Sigma^t$. Szereg (4.41) można przedstawić w postaci wartości oczekiwanej

$$\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[Z] \;=\; \int_{\tau\in\Sigma^t} k(\tau)\;V^{\dagger}(\tau|\,t)ZV(\tau|\,t)\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.45}$$

iloczynu wyrażenia

$$k(\tau) \;=\; \prod_{i=1}^{n}k_{l_i}(t_i) \tag{4.46}$$

oraz zależnego od trajektorii procesu liczącego operatora stochastycznego

$$V^{\dagger}(\tau|\,t)ZV(\tau|\,t), \tag{4.47}$$

gdzie

$$V(\tau|\,t) \;=\; \mathrm{e}^{-Lt}\sqrt{\mathit{\Gamma}_{l_n}}\,S_{l_n}(t_n)\ldots\sqrt{\mathit{\Gamma}_{l_1}}\,S_{l_1}(t_1)\,, \tag{4.48}$$

dla miary probabilistycznej zdefiniowanej na zbiorze Σ^t

$$\mathrm{d}\tau \;=\; \prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}t_i\,. \tag{4.49}$$

Obserwowany do chwili t proces liczący (4.28) możemy w pełni scharakteryzować posługując się gęstością prawdopodobieństwa

$$p(\tau|\ t) \ = \ \delta^n \langle\psi|\mathrm{g}(\boldsymbol{k},t)[I]\psi\rangle/\delta k_{l_1}(t_1)\dots\delta k_{l_n}(t_n)|_{k_{l_1}(t_1)=\dots=k_{l_n}(t_n)=0}\,, \tag{4.50}$$

gdzie symbol $\delta/\delta k$ oznacza pochodną funkcjonalną wyrażenia względem k. Funkcjonał generujący (4.36) można zapisać jako

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\boldsymbol{k},t) \ &= \ P_0^t(0\ |\psi) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l_1,\dots,l_n=1}^{2}\int\limits_0^t \mathrm{d}t_n \int\limits_0^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\dots\int\limits_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\ \times \\ &\times k_{l_1}(t_1)\dots k_{l_n}(t_n)\ p_0^t(l_1,t_1;\ l_2,t_2;\ \dots\ ;l_n,t_n|\psi)\,,\end{aligned} \tag{4.51}$$

gdzie

$$P_0^t(0\,|\,\psi) = \|\mathrm{e}^{-Lt}\psi\|^2 \tag{4.52}$$

jest prawdopodobieństwem braku zliczenia fotonu w przedziale czasu $[0,t)$, natomiast

$$p_0^t(l_1,t_1;\ l_2,t_2;\ \dots\ ;l_n,t_n|\psi) \ = \ \|\mathrm{e}^{-Lt}S_{l_n}(t_n)\dots S_{l_1}(t_1)\psi\|^2\varGamma_{l_n}\dots\varGamma_{l_1} \tag{4.53}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zliczenia fotonu typu l_1 w chwili t_1, fotonu typu l_2 w chwili t_2, ..., fotonu typu l_n w chwili t_n, gdzie $0 \le t_1 < t_2 \dots t_n < t$ i żadnych innych fotonów w przedziale czasu $[0,\ t)$.

Wyznaczmy teraz stochastyczne równanie różniczkowe dla wektora falowego $\widehat{\psi}(t) = \widehat{V}(t)\psi$, gdzie $\widehat{V}(t)$ jest propagatorem stochastycznym takim, że $\widehat{V}(t)(\tau) = V(\tau|\ t)$ dla $\tau \in \Sigma^t$. Propagator stochastyczny $\widehat{V}(t)$ można zapisać w postaci chronologicznej całki Ito [15, 99]

$$\begin{aligned}\widehat{V}(t) \ &= \ \mathrm{e}^{-Lt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l_1,\dots,l_n=1}^{2}\ \times \\ &\times \int\limits_0^t \mathrm{d}t_n \int\limits_0^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\dots\int\limits_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\ S'_{l_n}(t_n)\dots S'_{l_1}(t_1)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}N_{l_i}(t_i)\,,\end{aligned} \tag{4.54}$$

gdzie $S'_{l_i}(t) = \mathrm{e}^{Lt}S'_{l_i}\mathrm{e}^{-Lt}$, $S'_{l_i} = \sqrt{\varGamma_{l_i}}S_{l_i} - I$ i $N_{l_i}(t)$, $(l_i = 1,2)$, jest procesem liczącym takim, że

$$N_{l_i}(t)(\tau^\infty) \ = \ |\tau|\,. \tag{4.55}$$

Dla różniczki procesu $\mathrm{d}N_l(t) = N_l(t+\mathrm{d}t) - N_l(t)$ mamy: $\mathrm{d}N_l(t)(\tau^\infty) = 1$, gdy $(l,t) \in \tau^\infty$ i $\mathrm{d}N_l(t)(\tau^\infty) = 0$ w przeciwnym przypadku, stąd otrzymujemy klasyczne reguły mnożenia Ito postaci

$$\mathrm{d}N_l(t)\mathrm{d}N_m(t) = \delta_{lm}\mathrm{d}N_l(t), \quad \mathrm{d}N_l(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{4.56}$$

Reguły (4.56) pozwalają dla propagatora stochastycznego wyznaczyć równanie

$$\mathrm{d}\widehat{V}(t) \;=\; -L\widehat{V}(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{2}\big(\sqrt{\Gamma_n}S_n - I\big)\widehat{V}(t)\mathrm{d}N_n(t)\,, \quad \widehat{V}(0)=I\,. \tag{4.57}$$

Zatem funkcja falowa *a posteriori* $\widehat{\psi}(t)=\widehat{V}(t)\psi$ spełnia *liniowe równanie filtracji Belavkina* postaci

$$\mathrm{d}\widehat{\psi}(t) \;=\; -L\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{2}\big(\sqrt{\Gamma_n}S_n - I\big)\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}N_n(t)\,, \quad \widehat{\psi}(0)=\psi\,. \tag{4.58}$$

Równanie (4.58) opisuje warunkową ewolucję czasową czystego stanu kwantowego atomu dla ciągłej niemieszającej obserwacji liczącej. Nieliniowe równanie filtracji Belavkina zachowujące normalizację funkcji falowej *a posteriori* można otrzymać z równania liniowego (4.58) wyznaczając różniczkę wyrażenia $\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\widehat{\psi}(t)$. Stosując reguły rachunku stochastycznego Ito sprawdzić można, że

$$\mathrm{d}[\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle] \;=\; \sum_{n=1}^{2}\Big(\langle\widehat{\psi}(t)|\big(\Gamma_n S_n^\dagger S_n - I\big)\widehat{\psi}(t)\rangle\mathrm{d}N_n(t) - \Gamma_n\langle\widehat{\psi}(t)|S_n^\dagger S_n\widehat{\psi}(t)\rangle\mathrm{d}t\Big)\,. \tag{4.59}$$

Podstawiając (4.59) do rozwinięcia w szereg Taylora wyrażenia $\mathrm{d}[\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}]$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}] \;=\; \langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\sum_{n=1}^{2}\Big[&\langle\widehat{\varphi}(t)|S_n^\dagger S_n\widehat{\varphi}(t)\rangle\frac{\Gamma_n}{2}\mathrm{d}t\\ &+\big(\langle\widehat{\varphi}(t)|\Gamma_n S_n^\dagger S_n\widehat{\varphi}(t)\rangle^{-1/2}-1\big)\mathrm{d}N_n(t)\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.60}$$

gdzie $\widehat{\varphi}(t)=\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\widehat{\psi}(t)$. Ostatecznie, (4.59) oraz (4.60) pozwalają wyznaczyć kwantowe stochastyczne równanie różniczkowe dla unormowanej funkcji falowej *a posteriori* $\widehat{\varphi}(t)$ postaci

$$\mathrm{d}\widehat{\varphi}(t) \;=\; \left(-L+\sum_{n=1}^{2}\frac{\Gamma_n}{2}\langle S_n^\dagger S_n\rangle_t\right)\widehat{\varphi}(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{S_n}{\sqrt{\langle S_n^\dagger S_n\rangle_t}} - I\right)\widehat{\varphi}(t)\mathrm{d}N_n(t)\,, \tag{4.61}$$

gdzie $\langle\ .\ \rangle_t = \langle\widehat{\varphi}(t)|(.)\widehat{\varphi}(t)\rangle$. Powyższe równanie, podobnie jak (4.58), jest stochastycznym równaniem rekurencyjnym. Do wyznaczenia postaci funkcji falowej w chwili $t+\mathrm{d}t$ potrzebna jest znajomość funkcji falowej w chwili t oraz informacja o wynikach obserwacji w przedziale czasu $[t,t+\mathrm{d}t)$. Jeżeli $t\in\tau^\infty$, czyli w chwili t nastąpiło zliczenie fotonu jedno z wyrażeń $\mathrm{d}N_n(t)(\tau^\infty)$ odpowiadające fotonowi niebieskiemu lub czerwonemu jest równe jeden; wyrażenia w równaniu (4.61) zawierające $\mathrm{d}t$ są wówczas zaniedbywalnie małe w stosunku do ostatniego elementu i wektor falowy zmienia się z dokładnością do fazy według wzoru

$$\widehat{\varphi}(t+\mathrm{d}t) = \frac{S_n\widehat{\varphi}(t)}{\|S_n\widehat{\varphi}(t)\|} = |n\rangle\,, \quad n=1,2\,. \tag{4.62}$$

Jeżeli w chwili t detektor nie wykrył fotonu, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(-L + \sum_{n=1}^{2} \frac{\Gamma_n}{2} \langle S_n^\dagger S_n \rangle_t \right) \widehat{\varphi}(t)\,. \tag{4.63}$$

Aby rozważyć sytuację, gdy selektywny detektor rejestruje tylko część fotonów fluorescencji musimy przejść do równania stochastycznego dla macierzy gęstości $\widehat{\rho}(t) = |\widehat{\varphi}(t)\rangle\langle\widehat{\varphi}(t)|$. Z (4.61) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\rho}(t) &= \Big(- L\widehat{\rho}(t) - \widehat{\rho}(t)L^\dagger + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_n S_n \widehat{\rho}(t) S_n^\dagger \Big)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{S_n \widehat{\rho}(t) S_n^\dagger}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_n^\dagger S_n \widehat{\rho}(t)]} - \widehat{\rho}(t) \right) \big(\mathrm{d}N_n(t) - \Gamma_n \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_n^\dagger S_n \widehat{\rho}(t)]\mathrm{d}t\big)\,. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Oznaczmy przez $\langle \mathrm{d}N_l(t)\rangle(\tau)$ średnią liczbą zliczeń fotonów typu l w przedziale $[t, t + \mathrm{d}t)$ zależną od trajektorii procesu liczącego τ do chwili t. Ponieważ przyjmujemy, że prawdopodobieństwo zliczenia więcej niż jednego fotonu w podanym przedziale jest zaniedbywalnie małe, otrzymujemy [6]

$$\langle \mathrm{d}N_l(t)\rangle(\tau) \simeq p_t^{t+\mathrm{d}t}(l, t|\widehat{\rho}(t))\mathrm{d}t \simeq \Gamma_l \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_l^\dagger S_l \widehat{\rho}(t)]\mathrm{d}t\,. \tag{4.65}$$

Wielkość (4.65) jest wartością średnią *a posteriori* procesu $\mathrm{d}N_l(t)$. Korzystając z (4.65) oraz (4.58) można dowieść, że $\|\widehat{\psi}(t)\|^2$ jest martyngałem, czyli wartość oczekiwana tej wielkości w chwili $t + \mathrm{d}t$ zależna od trajektorii procesu liczącego τ do chwili t jest równa wartości tej wielkości w chwili t.

Niech s będzie dowolną funkcją trajektorii do chwili t rozważanego procesu liczącego. Przez $\langle s\rangle_{\mathrm{st}}$ oznaczmy uśrednioną po wszystkich realizacjach procesu liczącego z miarą wyznaczoną przez (4.52) oraz (4.53) wartość funkcji s. Jeżeli nie uwzględniamy informacji jakich dostarcza pomiar fotonów fluorescencji, stan atomu w chwili t jest postaci

$$\tilde{\rho}(t) = \langle \widehat{\rho}(t)\rangle_{\mathrm{st}}\,. \tag{4.66}$$

$\tilde{\rho}(t)$ jest stanem *a priori* atomu spełniającym równanie (4.24). Wyobraźmy sobie teraz sytuację, w której detektor rejestruje tylko fotony wybranego rodzaju, na przykład fotony niebieskie. W tym przypadku znamy jedynie wartość średnią *a posteriori* przyrostu $\mathrm{d}N_2(t)$ w równaniu (4.64). Zatem, zgodnie z (4.65), stan *a posteriori* atomu, zależny od wyników pomiaru fotonów niebieskich, spełnia równanie

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\rho}(t) &= \Big(- L\widehat{\rho}(t) - \widehat{\rho}(t)L^\dagger + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_n S_n \widehat{\rho}(t) S_n^\dagger \Big)\mathrm{d}t \\ &+ \left(\frac{S_1 \widehat{\rho}(t) S_1^\dagger}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_1^\dagger S_1 \widehat{\rho}(t)]} - \widehat{\rho}(t) \right) \big(\mathrm{d}N_1(t) - \Gamma_1 \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_1^\dagger S_1 \widehat{\rho}(t)]\mathrm{d}t\big)\,. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Łatwo sprawdzić, że dla selektywnego detektora, który rejestruje tylko część fotonów czerwonych i niebieskich emitowanych przez atom, otrzymujemy równanie filtracji postaci

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\rho}(t) &= \Big(-L\widehat{\rho}(t) - \widehat{\rho}(t)L^\dagger + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_n S_n \widehat{\rho}(t) S_n^\dagger\Big)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{S_n\widehat{\rho}(t)S_n^\dagger}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_n^\dagger S_n \widehat{\rho}(t)]} - \widehat{\rho}(t)\right)\big(\mathrm{d}N_n^d(t) - \Gamma_n^d\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[S_n^\dagger S_n\widehat{\rho}(t)]\mathrm{d}t\big)\,. \quad (4.68) \end{aligned}$$

Dla równań (4.67) oraz (4.68) z tego, że $\widehat{\rho}^2(t) = \widehat{\rho}(t)$ nie wynika, że $\widehat{\rho}^2(t+\mathrm{d}t) = \widehat{\rho}(t+\mathrm{d}t)$, a zatem w przypadku braku pełnej informacji o fotonach emitowanych przez atom stan czysty układu nie jest zachowany.

Opiszmy teraz *obserwację mieszającą*, czyli załóżmy, że detektor nie rozróżnia fotonów niebieskich i czerwonych. Jeżeli detektor nie zlicza wszystkich fotonów fluorescencji otrzymujemy wówczas

$$\mathrm{G}(k,t) = \sum_{j\in I^d} \exp\Big\{\int_0^t \ln k(t')\mathrm{d}\mathcal{N}_j(t')\Big\}\,. \quad (4.69)$$

Odwzorowanie $\mathrm{g}(k,t)$, odpowiadające operatorowi generującemu (4.69), spełnia równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{g}(k,t)[Z] = \mathrm{g}(k,t)\big[-L^\dagger Z - ZL + (k(t)-1)\sum_{n=1}^{2}\Gamma_n^d\, S_n^\dagger Z S_n + \sum_{n=1}^{2}\Gamma_n S_n^\dagger Z S_n\big]\,. \quad (4.70)$$

Rozwiązanie równania (4.70) możemy przedstawić jako szereg

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(k,t)[Z] &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \mathrm{d}t_n \int_0^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\ldots\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\, k(t_1)\ldots k(t_n)\,\times \quad (4.71) \\ &\times \mathrm{e}^{\mathscr{S}t_1}\mathscr{J}\mathrm{e}^{\mathscr{S}(t_2-t_1)}\ldots\mathscr{J}\mathrm{e}^{\mathscr{S}(t_n-t_{n-1})}\mathscr{J}\mathrm{e}^{\mathscr{S}(t-t_n)}[Z]\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathscr{S}[Z] = -L^\dagger Z - ZL + \sum_{n=1}^{2}\big(\Gamma_n - \Gamma_n^d\big)S_n^\dagger Z S_n\,, \quad (4.72)$$

$$\mathscr{J}[Z] = \sum_{n=1}^{2}\Gamma_n^d\, S_n^\dagger Z S_n \quad (4.73)$$

są odwzorowaniami zdefiniowanymi na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Oznaczmy przez $\upsilon = \big(t_1, t_2, \ldots, t_n\big)$, gdzie $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < t$ są chwilami, w których nastąpiła detekcja fotonu, trajektorię procesu liczącego dla obserwacji mieszającej. Niech Υ^t reprezentuje zbiór wszystkich trajektorii o skończonej długości $|\upsilon| := n \in \{1,2,...\}$ i niech $\mathrm{d}\upsilon = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}t_i$ będzie miarą na Υ^t. Szereg (4.71) można zapisać w postaci

$$\mathrm{g}(k,t)[Z] = \int_{\upsilon\in\Upsilon^t} k(\upsilon)\ \mathscr{V}(\upsilon|\ t)[Z]\mathrm{d}\upsilon\,, \quad (4.74)$$

gdzie

$$k(\upsilon) = \prod_{i=1}^{n} k(t_i), \tag{4.75}$$

$$\mathscr{V}(\upsilon|\, t) = \mathrm{e}^{\mathscr{S} t_1} \mathscr{J} \mathrm{e}^{\mathscr{S}(t_2-t_1)} \ldots \mathscr{J} \mathrm{e}^{\mathscr{S}(t_n-t_{n-1})} \mathscr{J} \mathrm{e}^{\mathscr{S}(t-t_n)} \tag{4.76}$$

jest stochastycznym odwzorowaniem na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zatem gęstość prawdopodobieństwa trajektorii $\upsilon = \big(t_1\,, t_2\,, \ldots\,, t_n\big) \in \Upsilon^t$

$$p(\upsilon|\, t) = \delta^n \langle\psi|\mathrm{g}(k,t)[I]\psi\rangle/\delta k(t_1)\ldots\delta k(t_n)|_{k(t_1)=\ldots=k(t_n)=0}\,. \tag{4.77}$$

Dla każdego superoperatora $\mathscr{A}$ działającego w zbiorze $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ istnieje superoperator dualny $\mathscr{A}'$ określony w $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ w taki sposób, że

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\rho\mathscr{A}[Z]\} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{Z\mathscr{A}'[\rho]\}\,, \quad \forall\, \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})\,, \ \forall\, Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,. \tag{4.78}$$

Korzystając z formuły (4.77) możemy wyznaczyć dla stanu początkowego $\widehat{\rho}(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ prawdopodobieństwo braku zliczeń fotonów do chwili t

$$P_0^t(0\,|\,\widehat{\rho}(0)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\mathrm{e}^{\mathscr{S}' t}[\widehat{\rho}(0)]\}\,, \tag{4.79}$$

oraz gęstości prawdopodobieństw

$$\begin{aligned} p_0^t(t_1\,, t_2\,, \ldots\,, t_n|\widehat{\rho}(0)) &= \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t-t_n)} \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t_n-t_{n-1})} \mathscr{J}' \ldots \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t_2-t_1)} \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}' t_1}[\widehat{\rho}(0)]\}\,, \end{aligned} \tag{4.80}$$

gdzie $\mathscr{S}'$, $\mathscr{J}'$ są operatorami dualnymi odpowiednio do $\mathscr{S}$ i $\mathscr{J}$ zdefiniowanych przez wzory (4.72) oraz (4.73). Prawdopodobieństwo warunkowe $P(0\,, [t, t+\bar{t})|\,\upsilon\,; \widehat{\rho}(0))$ braku zliczeń fotonów w przedziale czasu $[t, t+\bar{t})$ dla zaobserwowanej trajektorii υ do chwili t, dane jest przez [6]

$$P(0\,, [t, t+\bar{t})|\upsilon\,; \widehat{\rho}(0)) = \frac{p_0^{t+\bar{t}}(t_1\,, t_2\,, \ldots\,, t_n|\widehat{\rho}(0))}{p_0^t(t_1\,, t_2\,, \ldots\,, t_n|\widehat{\rho}(0))}\,. \tag{4.81}$$

Z (4.79) oraz (4.80) otrzymujemy

$$P(0\,, [t, t+\bar{t})|\upsilon\,; \widehat{\rho}(0)) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\mathrm{e}^{\mathscr{S}'\bar{t}}[\widehat{\rho}(t)]\}\,, \tag{4.82}$$

$$\widehat{\rho}(t) = \frac{1}{q(t)}\, \mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t-t_n)} \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t_n-t_{n-1})} \mathscr{J}' \ldots \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}'(t_2-t_1)} \mathscr{J}' \mathrm{e}^{\mathscr{S}' t_1}[\widehat{\rho}(0)]\,, \tag{4.83}$$

gdzie $q(t)$ jest współczynnikiem normalizacyjnym określonym przez $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\widehat{\rho}(t) = 1$. Macierz gęstości (4.83) jest stanem atomu w chwili t zależnym od trajektorii procesu liczącego υ do chwili t. Zgodnie z formułą (4.83), jeżeli w chwili t_0 nastąpiło zliczenie fotonu, wówczas

$$\widehat{\rho}(t_0 + \mathrm{d}t) = \frac{\mathscr{J}'[\widehat{\rho}(t_0)]}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\mathscr{J}'[\widehat{\rho}(t_0)]\}}\,. \tag{4.84}$$

Zatem po zliczeniu fotonu atom jest w stanie

$$\widehat{\rho}_{\mathrm{jump}} \; = \; \sum_{n=1}^{2} \frac{\Gamma_n^d}{\Gamma^d} \, |n\rangle\langle n| \, . \tag{4.85}$$

Z (4.83) wynika, że unormowany stan układu, między dwoma zliczeniami, dany jest przez

$$\widehat{\rho}(t) \; = \; \frac{\mathrm{e}^{\mathscr{L}'(t-t_0)}[\widehat{\rho}_{\mathrm{jump}}]}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\{\mathrm{e}^{\mathscr{L}'(t-t_0)}[\widehat{\rho}_{\mathrm{jump}}]\}} \, , \tag{4.86}$$

gdzie t_0 jest chwilą ostatniego zliczenia. Korzystając z (4.85) oraz (4.86) możemy wyznaczyć nieliniowe równanie filtracji Belavkina dla obserwacji mieszającej:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\rho}(t) \; &= \; \Big(- L\widehat{\rho}(t) - \widehat{\rho}(t)L^\dagger + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_n S_n \widehat{\rho}(t) S_n^\dagger \Big) \mathrm{d}t \\ &+ \; \left(\sum_{n=1}^{2} \frac{\Gamma_n^d}{\Gamma^d} \, |n\rangle\langle n| - \widehat{\rho}(t) \right) \big(\mathrm{d}N^d(t) - \Gamma^d \, \langle 0|\widehat{\rho}(t)|0\rangle \mathrm{d}t \big) \, . \end{aligned} \tag{4.87}$$

Średnia wartość wyrażenia $\mathrm{d}N^d(t) = \mathrm{d}N_1^d(t) + \mathrm{d}N_2^d(t)$ zależna od trajektorii υ do chwili t dana jest jako

$$\langle \mathrm{d}N(t) \rangle(\upsilon) \simeq p_t^{t+\mathrm{d}t}(t|\widehat{\rho}(t))\mathrm{d}t \simeq \Gamma^d \, \langle 0|\widehat{\rho}(t)|0\rangle \mathrm{d}t \, . \tag{4.88}$$

4.3 Okresy jasności i ciemności

Wykażemy teraz obecność okresów jasności i ciemności w świetle fluorescencji emitowanym przez układ Λ. W tym celu wyznaczymy średni czas oczekiwania na emisję fotonu dla obserwacji niemieszającej, gdy zliczane są wszystkie fotony fluorescencji. Czas oczekiwania na zliczenie jest wówczas równy czasowi oczekiwania na emisję fotonu. Jeżeli detektor nie rejestruje wszystkich fotonów fluorescencji, nadal możemy obserwować okresy jasności i ciemności pod warunkiem, że średni czas oczekiwania na zliczenie fotonu będzie znacznie krótszy od średniej długości okresu ciemności [36].

Cohen-Tannoudji i Dalibard zauważyli, że charakterystyka okresów jasności i ciemności jest w kontrolowana przez prawdopodobieństwo $P_{t_0}^{t_0+t}(0\,|\,|l\rangle)$ braku emisji fotonów między chwilami t_0 i t_0+t, gdzie t_0 jest momentem, którym nastąpiła emisja fotonu typu l [36]. Prawdopodobieństwo warunkowe $P_{t_0}^{t_0+t}(0\,|\,|l\rangle)$ możemy wyznaczyć korzystając z (4.52) oraz (4.53). Można wykazać, że (4.53) ma strukturę postaci

$$\begin{aligned} p_0^t(l_1,t_1;\, l_2,t_2;\, \ldots\, ; l_n,t_n|\psi) = P_{t_n}^t(0\,|\,|l_n\rangle) \prod_{i=2}^{n} W_{l_i}(t_i - t_{i-1}|\,|l_{i-1}\rangle) \times \\ \times \Gamma_{l_1} |\langle 0|e^{-Lt_1}|\psi\rangle|^2 \, , \end{aligned} \tag{4.89}$$

gdzie

$$P_{t_n}^t(0\,|\,|l_n\rangle) \; = \; \|\mathrm{e}^{-L(t-t_n)}|l_n\rangle\|^2 \tag{4.90}$$

jest prawdopodobieństwem braku fotonów w przedziale czasu od t_n do t, pod warunkiem, że w chwili t_n nastąpiła emisja fotonu typu l_n, odpowiednio

$$W_{l_i}(t_i - t_{i-1}|\,|l_{i-1}\rangle) \;=\; \Gamma_{l_i}\;|\langle 0|\mathrm{e}^{-L(t_i-t_{i-1})}|l_{i-1}\rangle|^2 \tag{4.91}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa emisji fotonu typu l_i w chwili t_i i żadnego innego fotonu w przedziale czasu od t_{i-1} do t_i, pod warunkiem, że w chwili t_{i-1} nastąpiła emisja fotonu typu l_{i-1}. Zauważmy, że wyrażenie (4.91) zmierza do zera dla różnicy $t_i - t_{i-1} \to 0$. Własność ta wynika z tego, że atom po emisji fotonu przechodzi do stanu, z którego nie może wyemitować kwantu promieniowania. Ponowne wzbudzenie układu do stanu, z którego może zajść emisja spontaniczna zajmuje pewien czas, co prowadzi do charakterystycznego dla promieniowania emitowanego przez pojedyncze atomy i jony *efektu antygrupowania fotonów* (ang. *anti-bunching effect*).

Wyznaczmy teraz gęstość prawdopodobieństwa $W_l(t|\,|n\rangle)$ emisji fotonu typu l w chwili t_0+t pod warunkiem, że w chwili t_0 nastąpiła emisja fotonu typu n. W tym celu połóżmy

$$\mathrm{e}^{-Lt}|n\rangle \;=\; \sum_{j=0}^{2} a_j(t|\,|n\rangle)|j\rangle\,, \quad n = 1,\, 2, \tag{4.92}$$

zgodnie z (4.91), mamy

$$W_l(t|\,|n\rangle) \;=\; \Gamma_l|a_0(t|\,|n\rangle)|^2\,, \quad n = 1, 2 \quad l = 1,\, 2\,. \tag{4.93}$$

Korzystając z definicji (4.25) operatora L, można sprawdzić, że współczynniki $a_j(t|\,|n\rangle)$ spełniają równania różniczkowe postaci:

$$\begin{aligned}
\dot a_1(t|\,|n\rangle) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_1 a_0(t|\,|n\rangle) - \mathrm{i}\Delta_1 a_1(t|\,|n\rangle)\,,\\
\dot a_0(t|\,|n\rangle) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_1 a_1(t|\,|n\rangle) - \frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_2 a_2(t|\,|n\rangle) - \frac{1}{2}\Gamma a_0(t|\,|n\rangle)\,,\\
\dot a_2(t|\,|n\rangle) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_2 a_0(t|\,|n\rangle) - \mathrm{i}\Delta_2 a_2(t|\,|n\rangle),
\end{aligned} \tag{4.94}$$

z warunkiem początkowym:

$$a_j(0|\,|n\rangle) \;=\; \delta_{jn}\,, \qquad n = 1,\, 2\,, \qquad j = 0,\, 1,\, 2. \tag{4.95}$$

Rozwiązanie układu (4.94) można otrzymać korzystając z metody transformaty Laplace'a. Do wyznaczenia (4.93) wystarczy znajomość formuł

$$a_0(t|\,|1\rangle) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_1\left(\frac{r_1+\mathrm{i}\Delta_2}{(r_2-r_1)(r_3-r_1)}\,\mathrm{e}^{r_1t}+\frac{r_2+\mathrm{i}\Delta_2}{(r_1-r_2)(r_3-r_2)}\,\mathrm{e}^{r_2t}+\frac{r_3+\mathrm{i}\Delta_2}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)}\,\mathrm{e}^{r_3t}\right),$$
$$a_0(t|\,|2\rangle) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_2\left(\frac{r_1+\mathrm{i}\Delta_1}{(r_2-r_1)(r_3-r_1)}\,\mathrm{e}^{r_1t}+\frac{r_2+\mathrm{i}\Delta_1}{(r_1-r_2)(r_3-r_2)}\,\mathrm{e}^{r_2t}+\frac{r_3+\mathrm{i}\Delta_1}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)}\,\mathrm{e}^{r_3t}\right),$$

gdzie r_j, ($j = 1,\, 2,\, 3$) są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$r^3 - \mathrm{i}\, r^2\bigg(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \frac{\mathrm{i}\varGamma}{2}\bigg) + \mathrm{i}\, r\bigg(\mathrm{i}\varDelta_1\varDelta_2 - \frac{\varGamma}{2}(\varDelta_1 + \varDelta_2) - \frac{\mathrm{i}\varOmega_1^2}{4} - \frac{\mathrm{i}\varOmega_2^2}{4}\bigg) - \frac{\varGamma}{2}\varDelta_1\varDelta_2 - \mathrm{i}\varDelta_1\frac{\varOmega_2^2}{4} - \mathrm{i}\varDelta_2\frac{\varOmega_1^2}{4} \;=\; 0\,. \tag{4.96}$$

Przybliżoną postać pierwiastków równania (4.96) możemy wyznaczyć metodą Newtona. Dla założenia (4.27) otrzymujemy:

$$r_1 \;=\; -\mathrm{i}\varDelta_2 + \zeta\,, \tag{4.97}$$

$$r_2 \;\simeq\; -\frac{1}{4}\varGamma - \frac{1}{2}\mathrm{i}\varDelta_1 + \frac{1}{4}(\varGamma^2 - 4\varOmega_1^2 - 4\varDelta_1^2 - 4\mathrm{i}\varGamma\varDelta_1)^{1/2}\,, \tag{4.98}$$

$$r_3 \;\simeq\; -\frac{1}{4}\varGamma - \frac{1}{2}\mathrm{i}\varDelta_1 - \frac{1}{4}(\varGamma^2 - 4\varOmega_1^2 - 4\varDelta_1^2 - 4\mathrm{i}\varGamma\varDelta_1)^{1/2}\,, \tag{4.99}$$

$$\zeta \;\simeq\; \varOmega_2^2(\varDelta_2 - \varDelta_1)\frac{\mathrm{i}(\varOmega_1^2 - 4\varDelta_2^2 + 4\varDelta_1\varDelta_2) - 2\varGamma_1(\varDelta_2 - \varDelta_1)}{(\varOmega_1^2 - 4\varDelta_2^2 + 4\varDelta_1\varDelta_2)^2 + 4\varGamma_1^2(\varDelta_2 - \varDelta_1)^2}\,. \tag{4.100}$$

Można sprawdzić, że

$$|\mathrm{Re}\, r_1| \;\ll\; |\mathrm{Re}\, r_{2,\,3}|\,. \tag{4.101}$$

Wykażemy teraz, że dla $\varDelta_1 \neq \varDelta_2$ zachodzi

$$\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{0}^{+\infty} W_l(t|\,|n\rangle)\, dt \;=\; 1\,, \qquad n = 1,\, 2\,, \tag{4.102}$$

czyli prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden foton fluorescencji zostanie wyemitowany przez atom w przedziale czasu $[0, +\infty)$ jest równe jedności. Aby dowieść, że równość (4.102) zachodzi zauważmy, że

$$\sum_{l=1}^{2} W_l(t||n\rangle) \;=\; \mathrm{Tr}\big[(L + L^\dagger)\mathrm{e}^{-Lt}|n\rangle\langle n|\mathrm{e}^{-L^\dagger t}\big] \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\big[\mathrm{e}^{-Lt}|n\rangle\langle n|\mathrm{e}^{-L^\dagger t}\big]\,, \tag{4.103}$$

$$\sum_{l=1}^{2}\int_{0}^{+\infty} W_l(t||n\rangle)\,\mathrm{d}t \;=\; 1 \;-\; \lim_{t\to+\infty}\mathrm{Tr}\big[\mathrm{e}^{-Lt}|n\rangle\langle n|\mathrm{e}^{-L^\dagger t}\big]\,. \tag{4.104}$$

Z tego, że dla $\varDelta_1 \neq \varDelta_2$ część rzeczywista pierwiastków r_j jest mniejsza od zera wynika, że granica z prawej strony wyrażenia (4.104) znika, a zatem równość (4.102) jest spełniona. Zgodnie z (4.91) możemy uprościć notację zastępując $P_{t_0}^{t+t_0}(0\,|\,|n\rangle)$ przez $P(t\,|\,|n\rangle)$. Z (4.27), (4.90) oraz (4.91), otrzymujemy

$$P(0|\,|n\rangle) \;=\; 1\,, \tag{4.105}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t|\,|n\rangle) \;=\; -\sum_{l=1}^{2} W_l(t|\,|n\rangle)\,. \tag{4.106}$$

Stąd

$$P(t|\,|n\rangle) \;=\; 1 \;-\; \sum_{l=1}^{2}\int\limits_{0}^{t} W_l(t'|\,|n\rangle)\,\mathrm{d}t'\,. \tag{4.107}$$

Z (4.102) wynika, że

$$P(t|\,|n\rangle) \;=\; \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{t}^{+\infty} W_l(t'|\,|n\rangle)\,\mathrm{d}t'\,. \tag{4.108}$$

Wyrażenie $1 - P(t||n\rangle)$ określa prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden foton zostanie wyemitowany do chwili t, a zatem

$$p(t|\,|n\rangle) \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[1 - P(t|\,|n\rangle)] \;=\; F_{\mathrm{short}}(t|\,|n\rangle) + F_{\mathrm{long}}(t|\,|n\rangle) \tag{4.109}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa tego, że czas oczekiwania na emisję dowolnego fotonu fluorescencji po emisji fotonu typu n w chwili $t_0 = 0$ wynosi t. Struktura wyrażenia (4.109), w którym $F_{\mathrm{short}}(t|\,|n\rangle)$ oraz $F_{\mathrm{long}}(t|\,|n\rangle)$ związane są z dwiema różnymi skalami zmienności w czasie, jest dowodem istnienia okresów jasności i ciemności w emitowanym sygnale [3, 36]. Przyjmując dla uproszczenia, że $\Delta_1 = 0$ otrzymujemy

$$F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle) \;=\; \frac{\Omega_1^2 \Gamma\, |r_1 + \mathrm{i}\Delta_2|^2 \exp(2\mathrm{Re}\,(r_1)t)}{4|(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)|^2}. \tag{4.110}$$

Połóżmy teraz

$$\Pi \;:=\; \int\limits_{0}^{+\infty} F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.111}$$

Z (4.108) oraz (4.109), mamy

$$\int_0^{+\infty} F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \;=\; 1 - \Pi\,. \tag{4.112}$$

Znajomość formuł (4.97) – (4.100) pozwala zapisać

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle) &\simeq \frac{\Omega_1^2 \Gamma}{|\Gamma^2 - 4\Omega_1^2|}|\mathrm{e}^{r_2 t} - \mathrm{e}^{r_3 t}|^2\,, && (4.113)\\
F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle) &= \Pi\,|2\mathrm{Re}\,(r_1)|\exp[2\mathrm{Re}\,(r_1)t]\,, && (4.114)\\
\Pi &\simeq \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{(\Omega_1^2 - 4\Delta_2^2)^2 + 4\Gamma^2\Delta_2^2}\,. && (4.115)
\end{aligned}$$

Z (4.27) wynika, że $\Pi \ll 1$.

Wprowadźmy teraz *czas opóźnienia* θ, który spełnia relację [36],

$$|2\mathrm{Re}\,(r_{2,3}\,)|^{-1} \ll \theta \ll |2\mathrm{Re}(r_1)|^{-1}\,. \tag{4.116}$$

Przedział czasu Δt między dwoma kolejnymi emisjami uznajemy jako krótki, gdy $\Delta t < \theta$ i jako długi, gdy $\Delta t > \theta$. Prawdopodobieństwo wystąpienia krótkiego czasu oczekiwania na foton po emisji fotonu niebieskiego jest postaci

$$P(\Delta t < \theta \| 1\rangle) \;=\; \int_0^{\theta} p(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \;\simeq\; \int\limits_{0}^{\theta} F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \;\simeq\; \int\limits_{0}^{+\infty} F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \;=\; 1 - \Pi\,. \tag{4.117}$$

Wyrażenie

$$P(\Delta t > \theta \| 1\rangle) \simeq \int_0^{+\infty} F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t = \Pi \tag{4.118}$$

definiuje prawdopodobieństwo długiego czasu oczekiwania na foton po emisji fotonu niebieskiego. Krótki czas oczekiwania jest rozłożony z gęstością prawdopodobieństwa $(1-\Pi)^{-1} F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle)$, natomiast długi czas oczekiwania z gęstością prawdopodobieństwa $\Pi^{-1} F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle)$. A zatem średnia wartość T_{short} krótkiego przedziału oczekiwania na foton po emisji fotonu niebieskiego dana jest formułą

$$T_{\mathrm{short}} = \frac{1}{1-\Pi} \int_0^{+\infty} t\, F_{\mathrm{short}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \simeq \Gamma \Omega_1^{-2} + 2\Gamma^{-1}, \tag{4.119}$$

natomiast

$$T_{\mathrm{long}} = \frac{1}{\Pi} \int_0^{+\infty} t\, F_{\mathrm{long}}(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t = |2\mathrm{Re}\, r_1|^{-1} \tag{4.120}$$

wyznacza średnią wartość długiego okresu oczekiwania na foton po emisji fotonu niebieskiego. Z postaci wyrażenia

$$F_{\mathrm{long}}(t|\,|2\rangle) = \frac{\Omega_2^2 \Gamma |r_1|^2}{4|(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)|^2} \exp[2\mathrm{Re}\,(r_1)t], \tag{4.121}$$

wynika, że dla (4.27) oraz różnych odstrojeń, mamy

$$\int_0^{+\infty} F_{\mathrm{long}}(t|\,|2\rangle)\mathrm{d}t \approx \frac{\Gamma[(\Omega_1^2 - 4\Delta_2^2)^2 + 4\Gamma_1^2 \Delta_2^2]}{\Gamma_1[(\Omega_1^2 - 4\Delta_2^2)^2 + 4\Gamma^2 \Delta_2^2]}. \tag{4.122}$$

Przy tych założeniach

$$F_{\mathrm{short}}(t|\,|2\rangle) \simeq \frac{\Omega_2^2 \Gamma}{4} \left| \frac{r_2}{(r_1 - r_2)(r_3 - r_2)} \mathrm{e}^{r_2 t} + \frac{r_3}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)} \mathrm{e}^{r_3 t} \right|^2. \tag{4.123}$$

A zatem prawdopodobieństwo wystąpienia długiego czasu oczekiwania na foton po emisji fotonu czerwonego jest w przybliżeniu równe jeden, czyli po emisji fotonu czerwonego niemal zawsze następuje okres ciemności.

Opiszmy jeszcze krótko zachowanie układu, gdy odstrojenia są równe:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta. \tag{4.124}$$

Otrzymujemy wówczas pierwiastki r_j równania (4.96) postaci

$$r_1 = -\mathrm{i}\Delta, \tag{4.125}$$

$$r_2 = -\frac{1}{4}\Gamma - \frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta + \frac{1}{4}(\Gamma^2 - 4\Omega_1^2 - 4\Omega_2^2 - 4\Delta^2 - 4\mathrm{i}\Gamma\Delta)^{1/2}, \tag{4.126}$$

$$r_3 = -\frac{1}{4}\Gamma - \frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta - \frac{1}{4}(\Gamma^2 - 4\Omega_1^2 - 4\Omega_2^2 - 4\Delta^2 - 4\mathrm{i}\Gamma\Delta)^{1/2}. \tag{4.127}$$

Można sprawdzić, że dla równych odstrojeń

$$\sum_{l=1}^{2} \int_{0}^{+\infty} W_l(t|\,|1\rangle)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\varOmega_1^2}{\varOmega_1^2+\varOmega_2^2}\,, \tag{4.128}$$

$$\sum_{l=1}^{2} \int_{0}^{+\infty} W_l(t|\,|2\rangle)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\varOmega_2^2}{\varOmega_1^2+\varOmega_2^2}\,. \tag{4.129}$$

Oznacza to, że po emisji dowolnego fotonu fluorescencji istnieje niezerowe prawdopodobieństwo tego, że układ nigdy nie wyemituje kolejnego fotonu. Ta wyjątkowa własność jest charakterystyczna dla układu Λ [98].

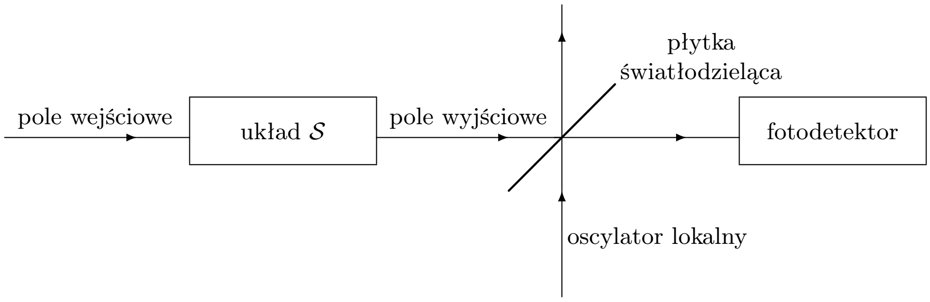
Rozdział 5

Ciągła nieniszcząca obserwacja dyfuzyjna ściśniętego stanu koherentnego

Korzystając z kwantowej teorii filtracji opiszemy ewolucję *a posteriori* jednomodowego pola elektromagnetycznego (oscylatora harmonicznego) znajdującego się wewnątrz optycznej wnęki rezonansowej z częściowo przepuszczalną ścianą [113]. W tym przypadku informacji o układzie dostarcza pomiar promieniowania uciekającego z wnęki.

W rozdziale wyznaczymy kwantowe równanie filtracji dla dwóch typów pomiaru promieniowania: *pomiaru heterodynowego* i *różnicowego pomiaru heterodynowego* [4, 33, 97]. Nieliniowe równanie filtracji dla obserwacji heterodynowej otrzymamy jako graniczny przypadek równania dla obserwacji zliczającej. W odróżnieniu od wyprowadzeń podanych w [6] oraz [113], w których wykorzystano pojęcie instrumentu bez odwoływania się do stochastycznego rachunku Ito, w pracy użyjemy sformułowanej wewnątrz modelu unitarnej stochastycznej ewolucji układu złożonego metody funkcjonału generującego [15]. Wyprowadzenie liniowego równania filtracji dla różnicowego pomiaru heterodynowego otrzymamy korzystając z unitarnego modelu obserwacji dyfuzyjnej opisanego w [16]. W obu przypadkach do rozważań włączymy pole lasera, z którym mieszane jest pole opuszczające wnękę.

Głównym celem rozdziału jest przedstawienie analitycznego rozwiązania równania filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej jednomodowego pola elektromagnetycznego, które w chwili początkowej znajduje się w ściśniętym stanie koherentnym. W rozdziale podamy rozwiązanie równania filtracji z zespolonym procesem dyfuzji otrzymanego dla



Rysunek 5.1: Schemat detekcji heterodynowej.

podwójnego pomiaru heterodynowego oraz równania filtracji z rzeczywistym szumem kwantowym wyznaczonego dla pojedynczego pomiaru heterodynowego. Wykażemy, że podczas obu ewolucji stochastycznych stan koherentny i ściśnięty stan koherentny są zachowane.*

Opis statystyki procesów wyjściowych dla pomiaru heterodynowego, bez dyskusji warunkowych wartości oczekiwanych i ewolucji *a posteriori*, można znaleźć w [4].

5.1 Pomiar heterodynowy. Przejście od skoków kwantowych do dyfuzji stanu kwantowego

Rozważmy oscylator harmoniczny, który nazywać będziemy układem $\mathcal{S}$, oddziałujący z otoczeniem modelowanym przez jednowymiarowe pole bozonowe (3.14), które w chwili początkowej znajduje się w stanie próżni.

Operator ewolucji układu złożonego w obrazie interakcji eliminującym ewolucję swobodną pola bozonowego spełnia kwantowe stochastyczne równanie różniczkowe w sensie Ito postaci [20]

$$\mathrm{d}U(t) \;=\; \left[\sqrt{\mu}\; c\; \mathrm{d}A^{\dagger}(t) - \sqrt{\mu}\; c^{\dagger}\; \mathrm{d}A(t) - \frac{\mu}{2}\; c^{\dagger}c\; \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{\hbar} H \mathrm{d}t\right] U(t)\,, \quad U(0) \;=\; I\,, \quad (5.1)$$

gdzie $H = \hbar\omega\left(c^{\dagger}c + \frac{1}{2}\right)$ jest hamiltonianem układu $\mathcal{S}$, c oznacza operator anihilacji, $c^{\dagger}$ jest operatorem kreacji, a $\mu \in \mathbb{R}$ jest stałą sprzężenia układów. Równanie (5.1) opisuje ewolucję jednomodowego pola znajdującego się wewnątrz rezonansowej wnęki i sprzężonego z nim, poprzez częściowo przepuszczalne lustro, rezerwuaru [33, 51, 78]. Oddziaływanie układów zapisane jest w przybliżeniu RWA.

*Część podanych w rozdziale wyników była prezentowana podczas wystąpienia na konferencji Quantum Probability and Its Applications 26. - 31. March 2006, Greifswald

W pomiarze heterodynowym [33, 97], którego schemat przedstawiony został na Rysunku 5.1, wyjściowe pole bozonowe $A^{\mathrm{out}}(t) = U^\dagger(t)A(t)U(t)$, które interpretujemy jako pole wychodzące z wnęki, jest superponowane, przy użyciu płytki światłodzielącej, z silnym polem lasera (*oscylatorem lokalnym*). Pole lasera będziemy opisywać za pomocą operatorów $A_{\mathrm{lo}}(t)$ oraz $A_{\mathrm{lo}}^\dagger(t)$ spełniających relacje komutacji (3.12) i przyjmiemy, że podczas doświadczenia znajduje się ono w stanie koherentnym $\iota(f)$ [4]. Zakładając, że płytka światłodzieląca wykazuje znikomą absorpcję, otrzymujemy pole docierające do fotodetektora postaci

$$B(t) \;=\; \sqrt{T}A^{\mathrm{out}}(t) + \mathrm{i}\sqrt{1-T}\,A_{\mathrm{lo}}(t)\,, \tag{5.2}$$

gdzie T jest współczynnikiem transmisji płytki. Zauważmy, że $B(t)$ oraz operator do niego sprzężony $B^\dagger(t)$ spełniają reguły komutacji (3.12). Dla uproszczenia załóżmy, że fotodetektor zlicza w sposób natychmiastowy wszystkie docierające do niego fotony.

Wyjściowy operator generujący dla opisanej obserwacji zdefiniujmy jako [5]

$$\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(k,t) \;:=\; \langle\iota(f)|\exp\left\{\int_0^t \ln k(t')\mathrm{d}B(t')\dot{B}(t')\right\}\iota(f)\rangle\,, \tag{5.3}$$

gdzie $\dot{B}(t) = \mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. Łatwo sprawdzić, korzystając z reguł (3.18) oraz (3.19), że $\big(\mathrm{d}B(t)\dot{B}(t)\big)^2 = \mathrm{d}B(t)\dot{B}(t)$.

Aby płytka światłodzieląca transmitowała bez strat pole $A^{\mathrm{out}}(t)$ przejdziemy do granicy $T \to 1$ i jednocześnie przyjmiemy, że $|f| \to \infty$ tak, aby wielkość $(1-T)|f|^2 = \varepsilon^{-2}$ miała stałą wartość [33, 48], dzięki temu otrzymujemy

$$\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(k,t) \;=\; \exp\left\{\int_0^t \ln k(t')\,\mathrm{d}\mathcal{Y}^{\mathrm{out}}(t')\right\}, \tag{5.4}$$

z liczącym procesem wyjściowym

$$\mathcal{Y}^{\mathrm{out}}(t) \;=\; \int_0^t \mathrm{d}\Lambda^{\mathrm{out}}(t') + \frac{r(t')}{\varepsilon}\mathrm{d}A^{\mathrm{out}\dagger}(t') + \frac{\overline{r(t')}}{\varepsilon}\mathrm{d}A^{\mathrm{out}}(t') + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}t'\,, \tag{5.5}$$

gdzie $r(t)$ jest funkcją zespoloną z modułem $|r(t)| = 1$. Z postaci równania (5.1) wynika, że

$$\mathrm{d}A^{\mathrm{out}}(t) \;=\; \mathrm{d}A(t) + \sqrt{\mu}\,c_t\,\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}A^{\mathrm{out}\dagger}(t) \;=\; \mathrm{d}A^\dagger(t) + \sqrt{\mu}\,c_t^\dagger\,\mathrm{d}t\,, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{d}\Lambda^{\mathrm{out}}(t) \;=\; \mathrm{d}\Lambda(t) + \sqrt{\mu}\,c_t\,\mathrm{d}A^\dagger(t) + \sqrt{\mu}\,c_t^\dagger\,\mathrm{d}A(t) + \mu\,c_t^\dagger\,c_t\,\mathrm{d}t\,, \tag{5.7}$$

gdzie $c_t = U^\dagger(t)c\,U(t)$.

Korzystając z reguł komutacji (3.12) można wykazać, że proces $\mathcal{Y}(t) = U(t)\mathcal{Y}^{\rm out}(t)U^\dagger(t)$ komutuje z $\mathcal{Y}(t')$ dla dowolnych t i t', stąd oraz z tego, że $U(t)\mathcal{Y}^{\rm out}(t') = \mathcal{Y}(t')U(t)$, otrzymujemy

$$[\mathcal{Y}^{\rm out}(t), \mathcal{Y}^{\rm out}(t')] \;=\; 0\,, \qquad \forall\, t,\, t'\,. \tag{5.8}$$

Zgodnie z (5.8) proces samosprzężony (5.5) może być przedstawiony za pomocą klasycznej miary stochastycznej na zbiorze $\mathbb{R}$ z wartościami $\{0, 1, 2, \dots\}$. Innymi słowy proces stochastyczny (5.5) jest samonieniszczący.

Wyznaczmy teraz równanie różniczkowe dla odwzorowania $\mathrm{g}(k, t) : Z \to \mathrm{g}(k, t)[Z]$ zdefiniowanego przez

$$\langle\psi|g(k, t)[Z]\psi\rangle \;:=\; \langle\psi \otimes \iota(0)|\mathrm{G}^{\rm out}(k, t)Z_t\psi \otimes \iota(0)\rangle\,, \tag{5.9}$$

gdzie $Z_t = U^\dagger(t)ZU(t)$ jest operatorem układu $\mathcal{S}$ zapisanym w obrazie Heisenberga, ψ jest funkcją falową układu $\mathcal{S}$ w chwili początkowej i $\iota(0)$ jest stanem próżni pola bozonowego. Biorąc pod uwagę to, że $(\mathrm{d}\mathcal{Y}(t))^2 = \mathrm{d}\mathcal{Y}(t)$ łatwo sprawdzić, używając kwantowych reguł różniczkowania Ito, że operator $\mathrm{G}(k, t) = U(t)\mathrm{G}^{\rm out}(k, t)U^\dagger(t)$ spełnia równanie

$$\mathrm{dG}(k, t) \;=\; (k(t) - 1)\mathrm{d}\mathcal{Y}(t)\mathrm{G}(k, t)\,. \tag{5.10}$$

Korzystając z (5.10), dla operatora $\pi_k^{\rm out}(t, Z) = U^\dagger(t)\mathrm{G}(k, t)ZU(t)$ otrzymujemy stochastyczne równanie różniczkowe postaci

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi_k^{\rm out}(t, Z) \;=\; & -\big(K_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z) + \pi_k^{\rm out}(t, Z)K_t\big)\mathrm{d}t + \mu c_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t\mathrm{d}t \\
& + \sqrt{\mu}\big(c_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z) - \pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t^\dagger\big)\mathrm{d}A(t) + \sqrt{\mu}\big(\pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t - c_t\pi_k^{\rm out}(t, Z)\big)\mathrm{d}A^\dagger(t) \\
& + \big(k(t) - 1\big)\big(\pi_k^{\rm out}(t, Z)\mathrm{d}\mathcal{Y}(t) + \sqrt{\mu}\, c_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z)\mathrm{d}A(t) + \sqrt{\mu}\,\pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t\mathrm{d}A^\dagger(t)\big) \\
& + \big(k(t) - 1\big)\left(\sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}\pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t + \sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{\varepsilon}c_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z) + \mu c_t^\dagger\pi_k^{\rm out}(t, Z)c_t\right)\mathrm{d}t\,,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie $K_t = U^\dagger(t)KU(t)$ oraz $K = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}H + \frac{\mu}{2}c^\dagger c$. Wartość średnia (5.9) dla wyrażeń z równania (5.11) daje

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\langle\pi_k^{\rm out}(t, Z)\rangle \;=\; & \langle\eta(t)| - \big(K^\dagger\pi_k(t, Z) + \pi_k(t, Z)K\big)\mathrm{d}t + k(t)\,\mu c^\dagger\pi_k(t, Z)c\,\mathrm{d}t \\
& + \big(k(t) - 1\big)\left(\pi_k(t, Z)\varepsilon^{-2} + \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}\pi_k(t, Z)c + \sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{\varepsilon}c^\dagger\pi_k(t, Z)\right)\mathrm{d}t|\eta(t)\rangle\,,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

gdzie $\pi_k(t, Z) = \mathrm{G}(k, t)Z$ oraz $\eta(t) = U(t)\eta$, $\eta = \psi \otimes \iota(0)$. Z równania (5.12) wynika, że odwzorowanie generujące $\mathrm{g}(k, t)$ spełnia równanie różniczkowe postaci

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{g}(k, t)[Z] \;=\; & \mathrm{g}(k, t)\big[- K^\dagger Z - ZK - \sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{\varepsilon}c^\dagger Z - \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}Zc - \varepsilon^{-2}Z \\
& + k(t)\big(\sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{\varepsilon}c^\dagger Z + \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}Zc + \varepsilon^{-2}Z + \mu\, c^\dagger Zc\big)\big]\,.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Rozwiązanie równania (5.13) można zapisać jako

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(k,t)[Z] \;=\; & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \mathrm{d}t_n \int_0^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_1\, k(t_1)\ldots k(t_n)\times \\ & \times S^{\dagger}(t_1)\ldots S^{\dagger}(t_n) Z(t) S(t_n)\ldots S(t_1)\,, \end{aligned} \tag{5.14}$$

gdzie

$$Z(t) \;=\; \mathrm{e}^{-K^{\dagger}t-\varepsilon^{-2}t/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c^{\dagger}\int_0^t r(t')\,\mathrm{d}t'}\, Z\, \mathrm{e}^{-Kt-\varepsilon^{-2}t/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\,, \tag{5.15}$$

oraz

$$S(t) \;=\; \mathrm{e}^{Kt+\varepsilon^{-2}t/2+\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'} \left(\sqrt{\mu}\,c+\frac{r(t)}{\varepsilon}\right) \mathrm{e}^{-Kt-\varepsilon^{-2}/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}\,c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\,. \tag{5.16}$$

Niech $\tau=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ będzie trajektorią obserwowanego procesu liczącego $\mathcal{Y}^{\mathrm{out}}(t)$ do chwili t oraz $\Sigma^t=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{\tau\subset[0,t):|\tau|=n\}$. Szereg (5.14) można przedstawić jako

$$\mathrm{g}(k,t)[Z] \;=\; \int_{\tau\in\Sigma^t} k(\tau)V^{\dagger}(\tau\,|\,t)\,ZV(\tau\,|\,t)\mathrm{d}\tau\,, \tag{5.17}$$

gdzie $k(\tau)=\prod\limits_{i=1}^{n}k(t_i)$, $\mathrm{d}\tau=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}t_i$ jest miarą probabilistyczną na Σ^t oraz

$$V(\tau\,|\,t) \;=\; \mathrm{e}^{-Kt-\varepsilon^{-2}t/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\, S(t_n)\ldots S(t_1)\,. \tag{5.18}$$

Propagator stochastyczny $\widehat{V}(t)(\tau)=V(\tau\,|\,t)$, który definiuje dla dowolnej trajektorii τ ewolucją *a posteriori* $\widehat{\psi}(t)=\widehat{V}(t)\psi$, gdzie ψ jest stanem początkowym układu $\mathcal{S}$, można zapisać za pomocą chronologicznej całki Ito postaci

$$\begin{aligned} \widehat{V}(t) \;=\; & \mathrm{e}^{-Kt-\varepsilon^{-2}t/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\times \\ & \times\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \mathrm{d}t_n\int_0^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\ldots\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_1\, S'(t_n)\,\ldots\, S'(t_1)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}Y(t_i)\,, \end{aligned} \tag{5.19}$$

gdzie

$$S'(t) \;=\; \mathrm{e}^{Kt+\varepsilon^{-2}t/2+\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\, S'\, \mathrm{e}^{-Kt-\varepsilon^{-2}t/2-\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}c\int_0^t \overline{r(t')}\,\mathrm{d}t'}\,, \tag{5.20}$$

$$S' \;=\; \sqrt{\mu}\,c+\frac{r(t)}{\varepsilon}-I\,, \tag{5.21}$$

natomiast $Y(t)$ jest zmienną losową taką, że $\mathrm{d}Y(t)(\tau^{\infty})=1$ dla $t\in\tau^{\infty}$ i $\mathrm{d}Y(t)(\tau^{\infty})=0$ dla $t\notin\tau^{\infty}$ oraz $Y(0)=0$. Z pomocą reguł (4.56) możemy wyznaczyć równanie

$$\mathrm{d}\widehat{V}(t) \;=\; -\left(K+\sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}c+\varepsilon^{-2}/2\right)\widehat{V}(t)\mathrm{d}t+\left(\sqrt{\mu}\,c+\frac{r(t)}{\varepsilon}-I\right)\widehat{V}(t)\mathrm{d}Y(t)\,, \tag{5.22}$$

z $\widehat{V}(0) = I$. Zatem nieunormowana funkcja falowa *a posteriori* $\widehat{\psi}(t) = \widehat{V}(t)\psi$ spełnia równanie stochastyczne

$$\mathrm{d}\widehat{\psi}(t) \;=\; -\Big(K + \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}c + \varepsilon^{-2}/2\Big)\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}t + \Big(\sqrt{\mu}\,c + \frac{r(t)}{\varepsilon} - I\Big)\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}Y(t)\,, \tag{5.23}$$

z warunkiem początkowym $\widehat{\psi}(0) = \psi$.

Z liniowego równania filtracji (5.23) możemy przejść do równania dla unormowanej funkcji falowej $\widehat{\varphi}(t) = \langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\widehat{\psi}(t)$. Stosując klasyczne reguły różniczkowania Ito otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{\varphi}(t) \;=\; &\Bigg[\Big(-K - \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}c + \frac{\mu}{2}\langle c^\dagger c\rangle_t + \sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{2\varepsilon}\langle c^\dagger\rangle_t + \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{2\varepsilon}\langle c\rangle_t\Big)\mathrm{d}t \\ &+ \left(\frac{\sqrt{\mu}\,c + \frac{r(t)}{\varepsilon}}{\sqrt{\mu\langle c^\dagger c\rangle_t + \sqrt{\mu}\,\frac{\overline{r(t)}}{\varepsilon}\langle c\rangle_t + \sqrt{\mu}\,\frac{r(t)}{\varepsilon}\langle c^\dagger\rangle_t + \varepsilon^{-2}}} - I\right)\mathrm{d}Y(t)\Bigg]\,\widehat{\varphi}(t)\,,\end{aligned} \tag{5.24}$$

gdzie $\langle.\rangle_t \;=\; \langle\widehat{\varphi}(t)|(.)\widehat{\varphi}(t)\rangle$ jest średnią *a posteriori* operatora układu $\mathcal{S}$. Gdy stan początkowy układu $\mathcal{S}$ jest macierzą gęstości ρ, wówczas zależna od wyników obserwacji do chwili t unormowana macierz gęstości $\widehat{\rho}(t)$ spełnia równanie filtracji

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{\rho}(t) = &\Big(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\widehat{\rho}(t)] - \frac{\mu}{2}\{c^\dagger c,\widehat{\rho}(t)\} + \mu c\widehat{\rho}(t)c^\dagger\Big)\mathrm{d}t \\ &+ \Big(\varepsilon\mu c\widehat{\rho}(t)c^\dagger + \sqrt{\mu}\,\overline{r(t)}c\widehat{\rho}(t) + \sqrt{\mu}\,r(t)\widehat{\rho}(t)c^\dagger - \widehat{\rho}(t)\Big(\varepsilon\mu\langle c^\dagger c\rangle_t + 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\,\big)\Big)\Big) \\ &\times\Big(\varepsilon^2\mu\langle c^\dagger c\rangle_t + 1 + 2\varepsilon\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\,\big)\Big)^{-1} \\ &\times\Big(\varepsilon\mathrm{d}Y(t) - \varepsilon\mu\langle c^\dagger c\rangle_t\mathrm{d}t - \varepsilon^{-1}\mathrm{d}t - 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\big)\mathrm{d}t\Big)\,,\end{aligned} \tag{5.25}$$

gdzie $\{a,b\} = ab + ba$. Równanie (5.25) wyznaczono w [6] nie używając kwantowego rachunku stochastycznego Ito i nie podając szczegółów schematu pomiaru heterodynowego oraz interpretacji fizycznej funkcji $r(t)$.

Łatwo sprawdzić, korzystając z rozważań rozdziału trzeciego, że nieselektywna ewolucja układu $\mathcal{S}$ dana jest poprzez równanie master postaci (por. z wzorem (3.41)):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\rho}(t) \;=\; -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\tilde{\rho}(t)] - \frac{\mu}{2}\{c^\dagger c,\tilde{\rho}(t)\} + \mu c\tilde{\rho}(t)c^\dagger\,. \tag{5.26}$$

Równanie (5.26) otrzymać można także z (5.25) biorąc pod uwagę to, że wartość średnia *a posteriori* przyrostu $\mathrm{d}Y(t)$ dana jest przez

$$\langle\mathrm{d}Y(t)\rangle(\tau) \;=\; 2\sqrt{\mu}\,\varepsilon^{-1}\mathrm{Re}\big(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\big)\mathrm{d}t + \varepsilon^{-2}\mathrm{d}t + \mu\langle c^\dagger c\rangle_t\mathrm{d}t\,. \tag{5.27}$$

Rozważmy teraz liniową transformację procesu liczącego $Y(t)$ postaci [6]

$$\mathrm{d}W^\varepsilon(t) \;:=\; \varepsilon\mathrm{d}Y(t) - \frac{\mathrm{d}t}{\varepsilon}\,. \tag{5.28}$$

Dla procesu wyjściowego $W^\varepsilon(t)$ mamy

$$\mathrm{d}W^\varepsilon(t)\mathrm{d}W^\varepsilon(t) \;=\; \varepsilon^2\mathrm{d}Y(t) \;=\; \varepsilon\mathrm{d}W^\varepsilon(t)+\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}W^\varepsilon(t)\mathrm{d}t \;=\; 0\,. \tag{5.29}$$

W granicy $\varepsilon \to 0$ dla procesu $W(t) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} W^\varepsilon(t)$ dostajemy reguły Ito postaci

$$\mathrm{d}W(t)\mathrm{d}W(t) \;=\; \mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}W(t)\mathrm{d}t \;=\; 0\,. \tag{5.30}$$

Gdy $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy z (5.25) równanie filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej [6, 33]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{\rho}(t) \;=\; & \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\widehat{\rho}(t)] - \frac{\mu}{2}\{c^\dagger c,\widehat{\rho}(t)\} + \mu c\widehat{\rho}(t)c^\dagger\right)\mathrm{d}t \\ & + \left(\sqrt{\mu}\,\overline{r(t)}c\;\widehat{\rho}(t) + \sqrt{\mu}\,r(t)\widehat{\rho}(t)c^\dagger - 2\widehat{\rho}(t)\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\right) \\ & \times\left(\mathrm{d}W(t) - 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\mathrm{d}t\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Wartość oczekiwana *a posteriori* przyrostu $\mathrm{d}W(t)$ wynosi

$$\langle \mathrm{d}W(t)\rangle\big(\tau\big) \;=\; 2\,\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{5.32}$$

Gdy w chwili początkowej układ $\mathcal{S}$ znajduje się w stanie czystym, wówczas unormowana funkcja falowa *a posteriori* $\widehat{\varphi}(t)$ spełnia równanie stochastyczne postaci

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{\varphi}(t) \;=\; & \Bigg[-\left(K - \mu\,\langle c^\dagger\rangle_t c + \frac{\mu}{2}\,|\langle c\rangle_t|^2\right)\mathrm{d}t + \\ & +\sqrt{\mu}\,\overline{r(t)}\left(c - \langle c\rangle_t\right)\left(\mathrm{d}W(t) - 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\mathrm{d}t\right)\Bigg]\widehat{\varphi}(t)\,,\end{aligned} \tag{5.33}$$

gdzie $\langle . \rangle_t \;=\; \langle\widehat{\varphi}(t)|(.)\widehat{\varphi}(t)\rangle$. Aby to udowodnić wystarczy sprawdzić, stosując rachunek stochastyczny Ito, że $\widehat{\rho}(t) = |\widehat{\varphi}(t)\rangle\langle\widehat{\varphi}(t)|$ spełnia (5.31).

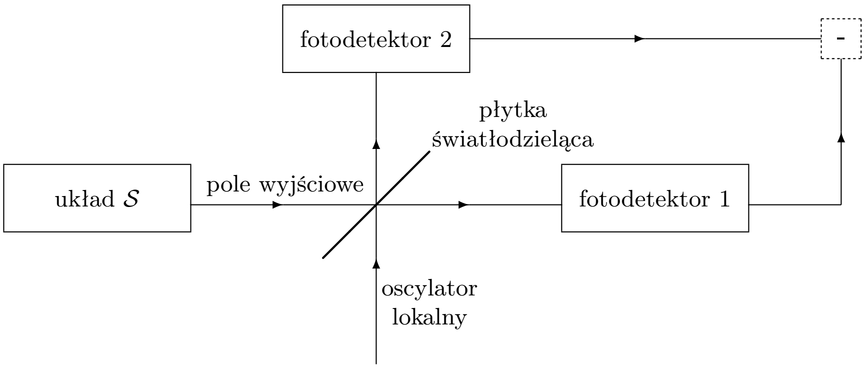
Dla wartości oczekiwanych *a posteriori* dowolnego operatora układu $\mathcal{S}$ można, korzystając z (5.31) lub (5.33), wyznaczyć równanie

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\langle Z\rangle_t + \langle ZK + K^\dagger Z - \mu c^\dagger Z c\rangle_t \mathrm{d}t \;=\; \\ &\quad \sqrt{\mu}\,\langle r(t)c^\dagger Z + Z\overline{r(t)}c - 2Z\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\rangle_t\big(\mathrm{d}W(t) - 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(t)}\langle c\rangle_t\right)\mathrm{d}t\big)\,.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Uśrednienie (5.34) po wszystkich trajektoriach τ do chwili t prowadzi do równania dla wartości oczekiwanych *a priori* postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Z\rangle^t + \langle ZK + K^\dagger Z - \mu c^\dagger Z c\rangle^t \;=\; 0\,, \tag{5.35}$$

gdzie $\langle Z\rangle^t = \mathrm{Tr}[Z\tilde{\rho}(t)]$ i $\tilde{\rho}(t)$ jest stanem *a priori* spełniającym równanie (5.26).



Rysunek 5.2: Schemat różnicowej detekcji heterodynowej.

5.2 Równanie filtracji dla różnicowego pomiaru heterodynowego

W różnicowej detekcji heterodynowej, której schemat przedstawiono na Rysunku 5.1, pola $A^{\text{out}}(t)$ oraz $A_{\text{lo}}(t)$ padają na światłodzielącą płytkę o współczynniku transmisji $T = 1/2$ dając dwa superponowane pola

$$B_1(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(A^{\text{out}}(t) + \mathrm{i}\,A_{\text{lo}}(t)\big)\,, \quad B_2(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathrm{i}\,A^{\text{out}}(t) + A_{\text{lo}}(t)\big)\,. \tag{5.36}$$

W doświadczeniu, którego opis można znaleźć na przykład w [4, 33, 97], wyznaczana jest różnica natężeń pól $B_1(t)$ oraz $B_2(t)$. Podobnie jak w zwykłej detekcji heterodynowej, przedstawionej w poprzednim podrozdziale, zakładamy tutaj, że oscylator lokalny znajduje się w stanie koherentnym $\iota(f)$ takim, że $f(t) = |f|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$. Dla mierzonej w doświadczeniu obserwabli definiujemy wyjściowy operator generujący postaci

$$\mathrm{G}^{\text{out}}(k,t) \;:=\; \langle\iota(f)|\exp\left\{\int_0^t \varepsilon\, k(t')\mathrm{i}\Big(\mathrm{d}A^{\text{out}\dagger}(t')\dot{A}_{\text{lo}}(t') - \mathrm{d}A^{\text{out}}(t')\dot{A}^{\dagger}_{\text{lo}}(t')\Big)\right\}|\iota(f)\rangle\,, \tag{5.37}$$

gdzie $\varepsilon^{-1} = |f|$, a $k(t)$ jest dowolną, całkowalną funkcją zespoloną. W granicy bardzo intensywnego pola oscylatora lokalnego, czyli $\varepsilon \to 0$, z (5.37) otrzymujemy

$$\mathrm{G}^{\text{out}}(k,t) \;=\; \exp\left\{\int_0^t k(t')\,\mathrm{d}\mathcal{Q}^{\text{out}}(t')\right\}, \tag{5.38}$$

gdzie

$$\mathcal{Q}^{\text{out}}(t) \;=\; \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t')}\mathrm{d}A^{\text{out}\dagger}(t') + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t')}\mathrm{d}A^{\text{out}}(t')\,, \tag{5.39}$$

przy czym $\phi(t) = \pi/2 + \theta(t)$. Zgodnie z (5.6) oraz (5.7),

$$\mathrm{d}\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t) \; = \; \mathrm{d}\mathcal{Q}(t) + \sqrt{\mu}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}c_t^\dagger + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c_t\right)\mathrm{d}t\,, \tag{5.40}$$

gdzie $\mathcal{Q}(t)$ jest wejściowym procesem Wienera. Używając reguł (3.19) można wykazać, że $(\mathrm{d}\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t))^2 = \mathrm{d}t$. Z wzoru (5.39) wynika, że w pomiarze heterodynowym mierzymy kwadratury optyczne pola wyjściowego.

Aby znaleźć równanie dla odwzorowania generującego (5.9) z operatorem $\mathrm{G}^{\mathrm{out}}(k,t)$ danym wzorem (5.38) należy wyznaczyć równanie stochastyczne dla operatora $\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) = U^\dagger(t)\mathrm{G}(k,t)ZU(t)$. Stosując kwantowe reguły różniczkowania Ito można sprawdzić, że

$$\mathrm{dG}(k,t) \; = \; \left(k(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t) + \frac{1}{2}k^2(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{G}(k,t)\,. \tag{5.41}$$

Z pomocą (5.41) otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) \; = \; & -\left(K_t^\dagger\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) + \pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)K_t\right)\mathrm{d}t + \mu c_t^\dagger\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)c_t\mathrm{d}t \\
& + \left(\sqrt{\mu}c_t^\dagger\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) - \pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\sqrt{\mu}c_t^\dagger + k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\right)\mathrm{d}A(t) \\
& + \left(\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\sqrt{\mu}c_t - \sqrt{\mu}c_t\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) + k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\right)\mathrm{d}A^\dagger(t) \\
& + \left(\frac{1}{2}k^2(t)\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) + k(t)\sqrt{\mu}c_t^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z) + k(t)\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\sqrt{\mu}c_t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\right)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Dla stanu początkowego $\eta = \psi\otimes\iota(0)$ układu złożonego otrzymujemy równanie różniczkowe dla wartości średniej operatora $\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)$ postaci

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\pi_k^{\mathrm{out}}(t,Z)\rangle \; = \; & \langle\eta(t)| - K^\dagger\pi_k(t,Z) - \pi_k(t,Z)K + \mu c^\dagger\pi_k(t,Z)c \\
& + \frac{1}{2}k^2(t)\pi_k(t,Z) + k(t)\left(\sqrt{\mu}c^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\pi_k(t,Z) + \pi_k(t,Z)\sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\right)|\eta(t)\rangle\,,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

gdzie $\eta(t) = U(t)\eta$. Zatem odwzorowanie generujące $\mathrm{g}(k,t)$ spełnia równanie

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{g}(k,t)[Z] \; = \; & \mathrm{g}(k,t)[-K^\dagger Z - ZK + \mu c^\dagger Zc \\
& + \frac{1}{2}k^2(t)Z + k(t)\left(\sqrt{\mu}c^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}Z + Z\sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\right)]\,,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

z warunkiem początkowym $\mathrm{g}(k,0) = Z$. Zgodnie z [16], rozwiązanie równania (5.44) można zapisać w postaci

$$\mathrm{g}(k,t)[Z] \; = \; \int_{\Omega^t}\mathrm{G}(k,q^t)V^\dagger(q^t)ZV(q^t)\mathrm{d}\nu(q^t)\,, \tag{5.45}$$

gdzie ν jest standardową miarą probabilistyczną Wienera określoną na przestrzeni Ω ciągłych trajektorii $q = [q(t)|t > 0]$ obserwowanego procesu $\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t)$ ograniczoną do przestrzeni $\Omega^t = \{q^t | q \in \Omega\}$ trajektorii $q^t = [q(r) | r \leq t]$ do chwili t. Całkę (5.45) wyznaczamy dla operatora

$$\mathrm{G}(k, q^t) = \mathrm{G}^{\mathrm{out}}(k,t)(q) = \exp\left\{ \int_0^t k(t')\mathrm{d}q(t') \right\} \tag{5.46}$$

oraz propagatora stochastycznego $\widehat{V}(t)(q^t) = V(q^t)$, który spełnia stochastyczne równanie różniczkowe postaci

$$\mathrm{d}\widehat{V}(t) = -K\widehat{V}(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\widehat{V}(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t), \quad \widehat{V}(0) = I. \tag{5.47}$$

Aby udowodnić powyższą tezę wprowadźmy odwzorowanie stochastyczne

$$\Xi(t)[Z] := \widehat{V}^\dagger(t) Z \widehat{V}(t), \tag{5.48}$$

z algebry operatorów układu $\mathcal{S}$ w nią samą, które dla dowolnej trajektorii $q \in \Omega$ definiuje selektywny instrument $\Xi(t)(q)[Z] = V^\dagger(q^t) Z V(q^t)$. Zauważmy, że jeżeli operator $\widehat{V}(t)$ spełnia równanie (5.47), wówczas

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big(\widehat{V}^\dagger(t) Z \widehat{V}(t)\big) &= \widehat{V}^\dagger(t)\big(-K^\dagger Z - ZK + \mu c^\dagger Z c\big)\widehat{V}(t)\mathrm{d}t + \\ &+ \widehat{V}^\dagger(t)\big(\sqrt{\mu}c^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} Z + Z\sqrt{\mu}c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\big)\widehat{V}(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Zatem stochastyczne równanie rekurencyjne dla odwzorowania $\Xi(t)[Z]$ jest postaci

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Xi(t)[Z] &= \Xi(t)[-K^\dagger Z - ZK + \mu c^\dagger Z c]\mathrm{d}t + \Xi(t)[\sqrt{\mu}c^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} Z + Z\sqrt{\mu}c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}]\mathrm{d}\mathcal{Q}(t), \\ \Xi(0)[Z] &= Z. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Uśrednienie równania

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big(\mathrm{G}(k,t)\Xi(t)[Z]\big) &= \mathrm{G}(k,t)\Xi(t)[k(t)Z + \sqrt{\mu}c^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} Z + Z\sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}]\mathrm{d}\mathcal{Q}(t) \\ &+ \mathrm{G}(k,t)\Xi(t)\left[\frac{1}{2}k^2(t)Z + k(t)\sqrt{\mu}\big(c^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)} Z + Zc\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\big) - K^\dagger Z - ZK + \mu c^\dagger Z c\right]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.51}$$

względem standardowej miary probabilistycznej Wienera prowadzi do (5.44) dla wartości średniej (5.45) i to kończy dowód.

Zgodnie z (5.47), nieunormowana funkcja falowa $\widehat{\psi}(t) = \widehat{V}(t)\psi$ układu $\mathcal{S}$ spełnia równanie stochastyczne

$$\mathrm{d}\widehat{\psi}(t) = -K\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t), \quad \widehat{\psi}(0) = \psi. \tag{5.52}$$

Proces $\mathcal{Q}(t)$ w równaniu (5.52) jest klasycznym procesem Wienera. Aby otrzymać dynamikę *a priori* układu $\mathcal{S}$ korzystając z równania (5.52), należy wyznaczyć równanie

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\sigma}(t) &= \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, \widehat{\sigma}(t)] - \frac{\mu}{2}\{c^\dagger c, \widehat{\sigma}(t)\} + \mu c\widehat{\sigma}(t)c^\dagger\right)\mathrm{d}t \\ &+ \big(\sqrt{\mu}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\widehat{\sigma}(t) + \widehat{\sigma}(t)\sqrt{\mu}c^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\big)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t) \end{aligned} \tag{5.53}$$

dla operatora $\widehat{\sigma}(t) = |\widehat{\psi}(t)\rangle\langle\widehat{\psi}(t)|$ i uśrednić je względem standardowej miary probabilistycznej Wienera. Informację o wyjściowym procesie $\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t)$ możemy otrzymać korzystając z wynikającej z (5.45) formuły

$$\langle \mathrm{G}^{\mathrm{out}}(k,t)Z_t\rangle \;=\; \int\limits_{\Omega^t} \mathrm{G}(k,q^t)\langle V(q^t)\psi|ZV(q^t)\psi\rangle \mathrm{d}\nu(q^t)\,, \tag{5.54}$$

która dla operatora $Z = I$ daje funkcjonał generujący rozważanego procesu wyjściowego z wyjściową miarą prawdopodobieństwa

$$\mathrm{d}\zeta(q^t) \;=\; \mathrm{d}\nu(q^t)\langle V(q^t)\psi|V(q^t)\psi\rangle\,. \tag{5.55}$$

Wzór (5.54) wyznacza wartość średnią *a posteriori* operatora Z jako

$$\langle Z\rangle(q^t) \;=\; \langle\varphi(q^t)|Z\varphi(q^t)\rangle\,, \tag{5.56}$$

gdzie $\widehat{\varphi}(t)(q) = \varphi(q^t)$, $\widehat{\varphi}(t) = \langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\widehat{\psi}(t)$ jest unormowaną funkcją *a posteriori* spełniającą równanie

$$\mathrm{d}\widehat{\varphi}(t) \;=\; -\widetilde{K}\widehat{\varphi}(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}\,\tilde{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\widehat{\varphi}(t)\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Q}}(t)\,, \qquad \widehat{\varphi}(0) \;=\; \psi\,, \tag{5.57}$$

gdzie

$$\widetilde{K} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\widetilde{H} + \frac{\mu}{2}\,\tilde{c}^\dagger\tilde{c}\,, \tag{5.58}$$

$$\widetilde{H} \;=\; H - \mu\hbar\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\langle c\rangle_t\big)\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\,, \tag{5.59}$$

$$\tilde{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)} \;=\; c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)} - \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\langle c\rangle_t)\,, \tag{5.60}$$

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Q}}(t) \;=\; \mathrm{d}\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t) - 2\sqrt{\mu}\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\langle c\rangle_t\big)\mathrm{d}t\,, \tag{5.61}$$

z $\langle c\rangle_t = \langle\widehat{\varphi}(t)|c\widehat{\varphi}(t)\rangle$.

Stosując klasyczny rachunek stochastyczny Ito można sprawdzić, że dla funkcji $\widehat{\psi}(t)$ spełniającej liniowe równanie filtracji (5.52) prawdziwe są formuły

$$\mathrm{d}\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle \;=\; \sqrt{\mu}\langle\widehat{\psi}(t)|\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\widehat{\psi}(t)\rangle\mathrm{d}\mathcal{Q}(t)\,, \tag{5.62}$$

oraz

$$\mathrm{d}[\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}] \;=\; \langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\bigg[\frac{3}{8}\mu\langle\widehat{\varphi}(t)|\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\widehat{\varphi}(t)\rangle^2\mathrm{d}t + \\ - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\langle\widehat{\varphi}(t)|\big(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\widehat{\varphi}(t)\rangle\mathrm{d}\mathcal{Q}(t)\bigg]\,, \tag{5.63}$$

gdzie $\widehat{\varphi}(t) \;=\; \langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle^{-1/2}\widehat{\psi}(t)$. Łatwo sprawdzić, że równania (5.62) oraz (5.63) prowadzą do równania nieliniowego (5.57) dla funkcji $\widehat{\varphi}(t)$. Odpowiadające równaniu

(5.57) równanie dla unormowanej macierzy gęstości *a posteriori* $\widehat{\rho}(t)$ ma postać

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{\rho}(t) &= \Big(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\widehat{\rho}(t)] - \frac{\mu}{2}\{c^\dagger c,\widehat{\rho}(t)\} + \mu c\widehat{\rho}(t)c^\dagger\Big)\mathrm{d}t \\ &\quad + \big(\sqrt{\mu}\,\tilde{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\,\widehat{\rho}(t) + \widehat{\rho}(t)\sqrt{\mu}\,\tilde{c}^\dagger\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\big)\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Q}}(t)\,, \end{aligned} \tag{5.64}$$

gdzie iloczyn $\tilde{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}$ oraz proces $\widetilde{\mathcal{Q}}(t)$ dane są poprzez (5.60) oraz (5.61) z $\langle c\rangle_t = \mathrm{Tr}[\widehat{\rho}(t)c]$.

Wartość średnią procesu $\mathrm{d}\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t)$ zależną od trajektorii q^t do chwili t można wyznaczyć korzystając z warunkowej miary prawdopodobieństwa

$$p(\mathrm{d}q(t)) = \frac{\langle V(q^{t+\mathrm{d}t})\psi|V(q^{t+\mathrm{d}t})\psi\rangle \mathrm{d}\nu(q^{t+\mathrm{d}t})}{\langle V(q^t)\psi|V(q^t)\psi\rangle \mathrm{d}\nu(q^t)}\,, \tag{5.65}$$

której postać wynika z formuły (5.54). Wyrażenie $\mathrm{d}\nu(q^{t+\mathrm{d}t})/\mathrm{d}\nu(q^{t+\mathrm{d}t}) = p^s(\mathrm{d}q(t))$ jest warunkową standardową miarą probabilistyczną Wienera, czyli

$$p^s(\mathrm{d}q(t)) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\sqrt{2\pi\mathrm{d}t}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{d}q(t))^2}{\mathrm{d}t}\Big\}. \tag{5.66}$$

Korzystając z rachunku różniczkowego Ito można wykazać, że

$$p(\mathrm{d}q(t)) = p^s(\mathrm{d}q(t))\Big(1 + \frac{\mathrm{d}\langle V(q^t)\psi|V(q^t)\psi\rangle}{\langle V(q^t)\psi|V(q^t)\psi\rangle}\Big). \tag{5.67}$$

Z (5.52) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\langle V(q^t)\psi|V(q^t)\psi\rangle}{\langle V(q)\psi|V(q)\psi\rangle} = \sqrt{\mu}\,\langle\varphi(q^t)|\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\varphi(q^t)\rangle\,\mathrm{d}q(t)\,, \tag{5.68}$$

stąd

$$p(\mathrm{d}q) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\sqrt{2\pi\mathrm{d}t}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\mathrm{d}t}\Big[\mathrm{d}q(t) - 2\sqrt{\mu}\langle\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\rangle(q^t)\mathrm{d}t\Big]^2\Big\}. \tag{5.69}$$

Zatem

$$\langle\mathrm{d}\mathcal{Q}^{\mathrm{out}}(t)\rangle(q^t) = 2\sqrt{\mu}\,\langle\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}c\big)\rangle(q^t)\mathrm{d}t\,. \tag{5.70}$$

Dla detekcji heterodynowej musimy przyjąć, że $\phi(t) = \pi/2 + \vartheta t$, gdzie ϑ jest częstością oscylatora lokalnego. W pracy [16] Belavkin rozważył pomiar obserwabli pola (5.39) dla funkcji $\phi(t) = 0$. W optyce kwantowej nie istnieje jednak schemat pomiarowy realizujący taką obserwację [4]. W wielu pracach autorzy mylnie piszą, że zaprezentowane przez Belavkina [16] oraz Belavkina i Staszewskiego [25] wyprowadzenia równania filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej odpowiadają pomiarowi homodynowemu [58], [28]. Jak zauważył Barchielli, pomiar homodynowy w modelu z wielomodowym światłem wyjściowym wymaga, aby pole bozonowe, z którym oddziałuje obserwowany pośrednio układ, było w chwili początkowej w stanie koherentnym [4]. Ewolucja stochastyczna układu obserwowanego dla pomiaru homodynowego i heterodynowego opisana została także przez Carmichaela [33] oraz Milburna i Wisemana [113]. Podane przez nich równania filtracji różnią się jednak nieco od równań jakie można otrzymać używając modelu unitarnej stochastycznej ewolucji układu złożonego.

Liniowe równanie filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej wyprowadzone przez Belavkina w [16], pozostawało przez kilka lat niezauważane przez naukowców zajmujących się zastosowaniem kwantowej teorii filtracji w optyce kwantowej [33, 52, 53, 112, 113]. Autorzy prezentowali jedynie nieliniową wersję równania filtracji omawiając przykłady jego rozwiązywań numerycznych. Do wzrostu zainteresowania liniową wersją równania przyczyniła się praca Goetscha i Grahama [58], w której autorzy przedstawili dyskusję fizycznej treści liniowego równania filtracji podając przykłady jego ścisłego rozwiązania.

5.3 Rozwiązania równania filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej z szumem zespolonym

Opiszemy teraz ewolucję *a posteriori* jednomodowego pola elektromagnetycznego znajdującego się wewnątrz wnęki rezonansowej z dwoma częściowo przepuszczalnymi lustrami [48]. W tym przypadku układ oddziałuje z dwoma niezależnymi składowymi $A_1(t)$ oraz $A_2(t)$ pola bozonowego, a równanie ewolucji układu złożonego można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U(t) &= \sqrt{\frac{\mu}{2}}\Big(c\,\mathrm{d}A_1^\dagger(t) - c^\dagger\,\mathrm{d}A_1(t)\Big)U(t) + \sqrt{\frac{\mu}{2}}\Big(c\,\mathrm{d}A_2^\dagger(t) - c^\dagger\,\mathrm{d}A_2(t)\Big)U(t) \\ &\quad - \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H + \frac{\mu}{2}c^\dagger c\right)U(t)\mathrm{d}t\,. \qquad (5.71) \end{aligned}$$

Warunki doświadczenia pozwalają prowadzić pomiar procesów wyjściowych

$$\mathcal{Q}_1^{\mathrm{out}}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\mathcal{Q}_1(t') + \sqrt{\mu/2}\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t')}c\big)\mathrm{d}t'\,, \qquad (5.72)$$

$$\mathcal{Q}_2^{\mathrm{out}}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\mathcal{Q}_2(t') + \sqrt{\mu/2}\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2(t')}c\big)\mathrm{d}t'\,. \qquad (5.73)$$

Zgodnie z wzorami (5.72) oraz (5.73), w których

$$\mathcal{Q}_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1(t')}\mathrm{d}A_1^\dagger(t') + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t')}\mathrm{d}A_1(t')\,, \qquad (5.74)$$

$$\mathcal{Q}_2(t) \;=\; \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2(t')}\mathrm{d}A_2^\dagger(t') + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2(t')}\mathrm{d}A_2(t')\,, \tag{5.75}$$

podwójny pomiar heterodynowy można traktować jako łączny pomiar obserwabli $\sqrt{\mu/2}\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}c\big)$ oraz $\sqrt{\mu/2}\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2(t)}c\big)$ obarczony losowymi błądami $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\mathcal{Q}_1(t)$ oraz $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\mathcal{Q}_2(t)$.

Korzystając z wyników poprzedniego podrozdziału można wykazać, że nieunormowana funkcja falowa *a posteriori* $\widehat{\psi}(t)$ układu $\mathcal{S}$ dla podwójnej obserwacji heterodynowej spełnia równanie filtracji postaci

$$\mathrm{d}\widehat{\psi}(t) \;=\; -\Big(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H + \frac{\mu}{2}c^\dagger c\Big)\widehat{\psi}(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}\,c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t)\widehat{\psi}(t)\,, \tag{5.76}$$

gdzie

$$\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathrm{d}\mathcal{Q}_1(t) - \mathrm{i}\mathrm{d}\mathcal{Q}_2(t)\big) \tag{5.77}$$

jest *zespolonym procesem dyfuzji* dla którego, zgodnie z tym, że $\mathrm{d}\mathcal{Q}_1(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}_2(t) = 0$ oraz $\big(\mathrm{d}\mathcal{Q}_1(t)\big)^2 = (\mathrm{d}\mathcal{Q}_2(t))^2 = \mathrm{d}t$, mamy

$$\big(\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t)\big)^2 \;=\; 0\,, \qquad \mathrm{d}\mathcal{Q}_z^\dagger(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t) \;=\; \mathrm{d}t\,. \tag{5.78}$$

Równanie (5.76) otrzymujemy zakładając, że $\phi_2(t) - \phi_1(t) = \pi/2$.

Dyskusję o ewolucji warunkowej układu obserwowanego zaczniemy od wyznaczenia rozwiązania równania (5.76) dla przypadku, gdy $|\widehat{\psi}(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$, gdzie $|\alpha_0\rangle$ jest stanem koherentnym z amplitudą $\alpha_0 \in \mathbb{C}$. Korzystając z własności

$$c^\dagger|\alpha\rangle \;=\; \frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\overline{\alpha}|\alpha\rangle\,, \tag{5.79}$$

oraz liniowej niezależności wektorów: $|\alpha\rangle$ oraz $\frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial\alpha}$, można sprawdzić, że podstawienie $|\widehat{\psi}(t)\rangle = l(t)|\alpha(t)\rangle$ do równania (5.76) prowadzi do niesprzecznego układu równań równiczkowych

$$\mathrm{d}\alpha(t) \;=\; -\Big(\mathrm{i}\omega + \frac{\mu}{2}\Big)\alpha(t)\mathrm{d}t\,, \tag{5.80}$$

$$\mathrm{d}l(t) \;=\; \Big[-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}\,\alpha(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t) - \frac{\mu}{2}|\alpha(t)|^2\mathrm{d}t\Big]l(t)\,, \tag{5.81}$$

z warunkiem początkowym: $\alpha(0) = \alpha_0$, $l(0) = 1$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie liniowego równania filtracji postaci

$$|\widehat{\psi}(t)\rangle \;=\; \exp\Big[-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2} + \frac{1}{2}\,|\alpha_0|^2\,\big(\mathrm{e}^{-\mu t} - 1\big) + \sqrt{\mu}\int\limits_0^t \alpha(t')\,\mathrm{e}^{-\phi_1(t')}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t')\Big]|\alpha(t)\rangle, \tag{5.82}$$

z amplitudą $\alpha(t) = \alpha_0\, \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)t}$. Z wzoru (5.82) wynika, że wartości średnie *a posteriori* dowolnego operatora Z układu $\mathcal{S}$ dane jako

$$\langle Z\rangle_t \;=\; \frac{\langle\widehat{\psi}(t)|Z\widehat{\psi}(t)\rangle}{\langle\widehat{\psi}(t)|\widehat{\psi}(t)\rangle} \;=\; \langle\alpha(t)|Z|\alpha(t)\rangle \tag{5.83}$$

nie zależą od mierzonego sygnału. W szczególności, dla kwadratur optycznych $X = (c + c^\dagger)/2$, $Y = (c - c^\dagger)/2\mathrm{i}$ oraz operatora liczby cząstek $n = c^\dagger c$, otrzymujemy formuły

$$\langle X\rangle_t \;=\; \mathrm{Re}\,\alpha(t)\,, \qquad \langle Y\rangle_t \;=\; \mathrm{Im}\,\alpha(t)\,, \qquad \langle n\rangle_t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t}|\alpha_0|^2\,. \tag{5.84}$$

Z wzoru (5.82) wynika, że jeżeli w chwili początkowej układ znajdował się w stanie koherentnym wyniki pomiaru obserwabli (5.72) i (5.73) nie zwiększają naszej wiedzy o układzie. Podobnie jak w przypadku obserwacji zliczającej, gdy detektor mierzy w sposób bezpośredni fotony uciekające z wnęki [33] ewolucja *a posteriori* dla $|\widehat{\psi}(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ daje stan koherentny z malejącą wykładniczo i niezależną od kwantowego szumu amplitudą oraz stochastycznie zmienną fazą.

Korzystając z wzoru (5.82) wyznaczymy teraz statystykę *a posteriori* dla superpozycji dwóch stanów koherentnych postaci

$$|\widehat{\psi}(0)\rangle \;=\; |\alpha_0, \pm\rangle \;=\; \frac{|\alpha_0\rangle \pm |-\alpha_0\rangle}{N_\pm}\,, \tag{5.85}$$

gdzie $N_\pm = \sqrt{2\left(1 \pm \mathrm{e}^{-2|\alpha_0|^2}\right)}$ jest czynnikiem normalizacyjnym. Przypomnijmy, że stan $|\alpha_0, +\rangle$ jest kombinacją liniową stanów Focka $|n\rangle$ o parzystej liczbie obsadzeń i dlatego nazywamy go *parzystym stanem koherentnym*, $|\alpha_0, -\rangle$ nazywany jest *nieparzystym stanem koherentnym* zgodnie z tym, że można go wyrazić poprzez stany Focka o nieparzystej liczbie obsadzeń. Gdy $|\alpha_0| \gg 1$ składniki $|\pm\alpha_0\rangle$ sumy (5.85) stają się „makroskopowo rozróżnialne" i otrzymujemy dwa przykłady *stanu typu kota Schrödingera* [105].

Z liniowości równania (5.76) oraz z tego, że dowolny stan układu można wyrazić poprzez stany koherentne wynika, że wzór (5.82) pozwala wyznaczyć ewolucję *a posteriori* dla dowolnego stanu początkowego. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania (5.76) dla stanu początkowego (5.85) można zapisać jako

$$|\widehat{\psi}(t)\rangle \;=\; \kappa(t)\left(\mathrm{e}^{\chi(t)}|\alpha(t)\rangle \pm \mathrm{e}^{-\chi(t)}|-\alpha(t)\rangle\right)\,, \tag{5.86}$$

gdzie

$$\kappa(t) \;=\; \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2} + \frac{1}{2}\,|\alpha_0|^2\left(\mathrm{e}^{-\mu t} - 1\right)\right]/N_\pm \tag{5.87}$$

oraz $\chi(t) = \sqrt{\mu}\int\limits_0^t \alpha(t')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t')$, $\alpha(t) = \alpha_0\mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)t}$.

Wtedy, gdy $|\alpha_0| \gg 1$ oraz $t \ll 1/\mu$ możemy przyjąć, że

$$\langle \alpha(t)| - \alpha(t)\rangle \ = \ \mathrm{e}^{-2|\alpha_0|^2 \mathrm{e}^{-\mu t}} \approx 0\,. \tag{5.88}$$

Stąd dla obu rozważanych stanów typu kota Schrödingera otrzymujemy

$$\langle X\rangle_t \ = \ \mathrm{Re}\,\alpha(t)\tanh\left(2\mathrm{Re}\chi(t)\right)\,,\ \langle Y\rangle_t \ = \ \mathrm{Im}\,\alpha(t)\tanh\left(2\mathrm{Re}\chi(t)\right)\,, \tag{5.89}$$

Wyznaczone zgodnie z wzorem

$$\Delta Z(t) \ = \ \sqrt{\langle Z^2\rangle_t - \langle Z\rangle_t^2} \tag{5.90}$$

zależne od wyników pomiaru niepewności kwadratur optycznych mają dla (5.88) postać

$$\Delta X(t) \ = \ \sqrt{\frac{1}{4} + \mathrm{Re}^2\alpha(t)\left(1 - \tanh^2\left(2\mathrm{Re}\chi(t)\right)\right)}\,, \tag{5.91}$$

$$\Delta Y(t) \ = \ \sqrt{\frac{1}{4} + \mathrm{Im}^2\alpha(t)\left(1 - \tanh^2\left(2\mathrm{Re}\chi(t)\right)\right)}\,. \tag{5.92}$$

Wyrażenie $\tanh\left(2\mathrm{Re}\chi(t)\right)$ zmierza do jednej z dwóch wartości ± 1, co oznacza, że podczas obserwacji jeden ze składników sumy (5.86) staje się dominujący. Ten ciekawy efekt opisany został w [53]. We wspomnianej pracy przedstawiono otrzymane na podstawie symulacji numerycznej wykresy wielkości (5.89), (5.91), (5.92) oraz niezależnej od szumu warunkowej wartości średniej $\langle n\rangle_t = \mathrm{e}^{-\mu t}\,|\alpha_0|^2$. Analityczne rozwiązanie liniowego równania filtracji z rzeczywistym procesem dyfuzji dla parzystego stanu koherentnego można znaleźć w [59].

Udowodnimy teraz, że gdy układ $\mathcal{S}$ znajduje się w chwili początkowej w *ściśniętym stanie koherentnym*

$$|\widehat{\psi}(0)\rangle \ = \ S(\xi_0)D(\alpha_0)|0\rangle \ = \ S(\xi_0)|\alpha_0\rangle \ = \ |\xi_0, \alpha_0\rangle\,, \tag{5.93}$$

gdzie

$$D(\alpha_0) \ = \ \exp\left(\alpha_0 c^\dagger - \overline{\alpha_0} c\right)\,, \tag{5.94}$$

oraz

$$S(\xi_0) \ = \ \exp\left(\frac{1}{2}\overline{\xi_0} c^2 - \frac{1}{2}\xi_0 \left(c^\dagger\right)^2\right) \tag{5.95}$$

z $\xi_0 = \varrho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathbb{C}$, rozwiązanie równania filtracji (5.76) można przedstawić w postaci

$$|\widehat{\psi}(t)\rangle \ = \ l(t)S(\xi(t))|\alpha(t)\rangle\,. \tag{5.96}$$

Zauważmy, że gdy $\xi_0 = 0$ formuła (5.93) definiuje stan koherentny $|\alpha_0\rangle$, gdy natomiast $\alpha_0 = 0$ otrzymujemy *ściśnięty stan próżni* $S(\xi_0)|0\rangle$.

Opiszemy teraz postępowanie, które pozwala wykazać, że podstawienie wektora (5.96) do równania (5.76) daje niesprzeczny układ równań różniczkowych dla współczynników $\varrho(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$ oraz $l(t)$. Aby znaleźć przyrost $\mathrm{d}S\left(\xi(t)\right) = S\left(\xi(t+\mathrm{d}t)\right) - S(\xi(t))$ wygodnie jest posłużyć się postacią operatora ściśnięcia $S(\xi)$ z normalnym porządkiem operatorów anihilacji c i kreacji $c^\dagger$ [111]

$$S(\xi) \;=\; (\cosh\varrho)^{-1/2}\exp\left[-\Gamma\left(c^\dagger\right)^2/2\right]\exp\left[-\ln\left(\cosh\varrho\right)c^\dagger c\right]\exp\left[\overline{\Gamma}c^2/2\right]\,, \tag{5.97}$$

gdzie

$$\Gamma \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tanh\varrho\,. \tag{5.98}$$

Kolejnym krokiem jest przemnożenie obu stron równania (5.76) z lewej strony przez $S^\dagger(\xi(t))$. Aby otrzymać

$$\begin{aligned} S^\dagger(\xi(t))\mathrm{d}S(\xi(t)) \;=\; & \frac{1}{2}\tanh\varrho(t)\mathrm{d}\varrho(t)\left[2\overline{\Gamma(t)}c^2 - 2c^\dagger c - 1\right] + \frac{\mathrm{d}\overline{\Gamma(t)}}{2}c^2 + \\ & -\frac{\mathrm{d}\Gamma(t)}{2}\left[\left(c^\dagger\right)^2\cosh^2\varrho(t) - \left(2c^\dagger c+1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)}\sinh\varrho(t)\cosh\varrho(t) + c^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta(t)}\sinh^2\varrho(t)\right] \end{aligned} \tag{5.99}$$

należy skorzystać z wyznaczonej za pomocą formuły Bakera-Hausdorfa transformacji unitarnej

$$S^\dagger\left(\xi\right)\left(c^\dagger\right)^2 S\left(\xi\right) \;=\; \left(c^\dagger\right)^2\cosh^2\varrho - \left(2c^\dagger c+1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh\varrho\cosh\varrho + c^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\sinh^2\varrho\,. \tag{5.100}$$

Prawą stronę równania można przekształcić używając wzorów

$$S^\dagger(\xi)cS(\xi) \;=\; c\cosh\varrho - c^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh\varrho\,, \tag{5.101}$$

$$S^\dagger(\xi)c^\dagger cS(\xi) \;=\; c^\dagger c\cosh^2\varrho + \left(c^\dagger c+1\right)\sinh^2\varrho - \left[c^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \left(c^\dagger\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]\sinh\varrho\cosh\varrho\,. \tag{5.102}$$

Następnie musimy skorzystać z wzoru (5.79) oraz własności

$$(c^\dagger)^2|\alpha\rangle \;=\; \frac{\partial^2|\alpha\rangle}{\partial\alpha^2} + \overline{\alpha}\frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial\alpha} + \frac{1}{4}\overline{\alpha}^2|\alpha\rangle\,. \tag{5.103}$$

Wreszcie liniowa niezależność zbioru wektorów $\left\{|\alpha\rangle, \frac{\partial|\alpha\rangle}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2|\alpha\rangle}{\partial\alpha^2}\right\}$ pozwala wyznaczyć układ równań różniczkowych

$$\mathrm{d}\theta(t) \;=\; -2\omega\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}\varrho(t) \;=\; -\mu\sinh\varrho(t)\cosh\varrho(t)\mathrm{d}t\,, \tag{5.104}$$

$$\mathrm{d}\alpha(t) \;=\; \left[-\left(\mathrm{i}\omega + \frac{\mu}{2}\right) - \mu\sinh^2\varrho(t)\right]\alpha(t)\mathrm{d}t - \sqrt{\mu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\sinh\varrho(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t)\,, \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}l(t)}{l(t)} \;=\; & -\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\mathrm{d}\left|\alpha(t)\right|^2 + \frac{\mu}{4}\sinh^2\varrho(t)\left|\alpha(t)\right|^2\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}\alpha(t)\cosh\varrho(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t) \\ & -\frac{\mu}{2}\sinh^2\varrho(t)\mathrm{d}t + \frac{\mu}{2}\alpha^2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)}\sinh\varrho(t)\cosh\varrho(t)\mathrm{d}t\,, \end{aligned} \tag{5.106}$$

z warunkiem początkowym: $l(0) = 1$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\varrho(0) = \varrho_0$. Rozwiązanie układu można zapisać w postaci

$$\theta(t) \;=\; \theta_0 - 2\omega t\,, \quad \varrho(t) \;=\; \operatorname{ar\,tanh}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0\right)\,, \tag{5.107}$$

$$\alpha(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)t}\,\frac{\cosh\varrho(t)}{\cosh\varrho_0}\left(\alpha_0 - \sqrt{\mu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\sinh\varrho_0\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)t'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t')}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t')\right)\,, \tag{5.108}$$

$$l(t) \;=\; \sqrt{\frac{\cosh\varrho(t)}{\cosh\varrho_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}+\frac{1}{2}\left(|\alpha(t)|^2-|\alpha_0|^2\right)}\times$$

$$\times\exp\left[\sqrt{\mu}\int\limits_0^t\left(\alpha(t')\cosh\varrho(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1(t')}\mathrm{d}\mathcal{Q}_z(t')+\sqrt{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t')}\alpha^2(t')\sinh\varrho(t')\cosh\varrho(t')\mathrm{d}t'\right)\right]. \tag{5.109}$$

Z wzorów (5.107) oraz (5.108) wynika, że dla ściśniętego stanu koherentnego wartości średnie *a posteriori* kwadratur optycznych dane przez

$$\langle X\rangle_t \;=\; \operatorname{Re}\left(\alpha\,(t)\cosh\varrho(t) - \overline{\alpha\,(t)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\sinh\varrho(t)\right)\,, \tag{5.110}$$

$$\langle Y\rangle_t \;=\; \operatorname{Im}\left(\alpha(t)\cosh\varrho(t) + \alpha(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)}\sinh\varrho(t)\right) \tag{5.111}$$

zależą od mierzonego sygnału. Używając formuł (5.100)–(5.102) możemy wyznaczyć niepewności kwadratur optycznych

$$\triangle X(t) \;=\; \frac{1}{2}\left[1+\frac{2\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0}{1-\mathrm{e}^{-2\mu t}\tanh^2\varrho_0}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0 - \cos\left(\theta_0-2\omega t\right)\right)\right]^{1/2}\,, \tag{5.112}$$

$$\triangle Y(t) \;=\; \frac{1}{2}\left[1+\frac{2\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0}{1-\mathrm{e}^{-2\mu t}\tanh^2\varrho_0}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0 + \cos\left(\theta_0-2\omega t\right)\right)\right]^{1/2}\,. \tag{5.113}$$

Dla $\mu = 0$ z (5.112) oraz (5.113) otrzymujemy wyrażenia

$$\triangle X(t) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sinh\varrho_0\left[\sinh\varrho_0 - \cosh\varrho_0\cos\left(\theta_0-2\omega t\right)\right]}\,, \tag{5.114}$$

$$\triangle Y(t) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sinh\varrho_0\left[\sinh\varrho_0 + \cosh\varrho_0\cos\left(\theta_0-2\omega t\right)\right]}\,, \tag{5.115}$$

dla ewolucji swobodnej układu $\mathcal{S}$. Z wzorów (5.112) oraz (5.113) wynika, że periodycznie zmienne ściśnięcie obserwowanego stanu maleje w czasie. Ściśnięcie kwadratury X otrzymujemy, gdy

$$\cos\left(\theta_0-2\omega t\right) > \mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0\,, \tag{5.116}$$

a kwadratury Y dla

$$\cos\left(\theta_0-2\omega t\right) < -\mathrm{e}^{-\mu t}\tanh\varrho_0\,. \tag{5.117}$$

Otrzymane formuły dla $\varrho_0 = 0$ odpowiadają rozwiązaniu dla początkowego stanu koherentnego, gdy położymy $\alpha_0 = 0$ otrzymamy ewolucję *a posteriori* dla ściśniętego stanu próżni.

W literaturze rozważana jest także definicja ściśniętego stanu koherentnego postaci [83, 105]

$$|\beta, \xi\rangle \;=\; D\left(\beta\right) S\left(\xi\right) |0\rangle \,. \tag{5.118}$$

Ponieważ operatory $D(\beta)$ oraz $S(\xi)$ nie komutują, wektory $|\beta, \xi\rangle$ oraz $|\xi, \beta\rangle$ nie są tymi samymi stanami. Równość $D(\beta) S(\xi) = S(\xi) D(\alpha)$ zachodzi wtedy, gdy [83]

$$\alpha \;=\; \beta \cosh \varrho + \overline{\beta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sinh \varrho \,, \qquad \beta \;=\; \alpha \cosh \varrho - \overline{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sinh \varrho \,. \tag{5.119}$$

Korzystając z powyższych relacji można w łatwy sposób wyznaczone dla stanu (5.93) formuły *a posteriori* wyrazić poprzez parametry stanu $|\beta, \xi\rangle$.

Zespolony proces dyfuzji i analityczne rozwiązanie równania filtracji dla obserwacji oscylatora harmonicznego, który w chwili początkowej znajduje się w stanie gaussowskim, bez wyznaczenia stochastycznej fazy wektora, opisane zostały przez Belavkina i Barchielliego [6].

5.4 Rozwiązania równania filtracji dla obserwacji dyfuzyjnej z rzeczywistym szumem

Analizę ewolucji *a posteriori* jednomodowego pola elektromagnetycznego znajdującego się wewnątrz wnęki rezonansowej dla pojedynczej różnicowej obserwacji heterodynowej rozpoczniemy od przypadku, gdy $|\widehat{\psi}(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$.

Podstawienie wektora $|\widehat{\psi}(t)\rangle = l(t)|\alpha(t)\rangle$ do równania (5.52) daje układ równań różniczkowych postaci

$$\mathrm{d}\alpha(t) \;=\; -\left(\mathrm{i}\omega + \frac{\mu}{2}\right)\alpha(t)\mathrm{d}t \,, \tag{5.120}$$

$$\mathrm{d}l(t) \;=\; \left[-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}\,\alpha(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}(t) - \frac{\mu}{2}|\alpha(t)|^2\mathrm{d}t\right] l(t) \,, \tag{5.121}$$

z warunkiem początkowym $\alpha(0) = \alpha_0$, $l(0) = 1$. Funkcja $\mathcal{Q}(t)$ w (5.121) jest klasycznym standardowym proces Wienera.

Z równania (5.120) otrzymujemy niezależną od szumu amplitudę $\alpha(t) = \alpha_0\, \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega + \frac{\mu}{2}\right)t}$. Klasyczna formuła różniczkowa Ito

$$\mathrm{d}\big(\ln l(t)\big) \;=\; \frac{1}{l(t)}\mathrm{d}l(t) - \frac{1}{2l^2(t)}\big(\mathrm{d}l(t)\big)^2 \tag{5.122}$$

do której, zgodnie z (5.121), podstawiamy

$$\big(\mathrm{d}l(t)\big)^2 \;=\; \mu\,\alpha^2(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi(t)}l^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5.123}$$

pozwala wyznaczyć rozwiązanie postaci

$$l(t)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}+\frac{|\alpha|^2}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}-1\right)+\int_0^t\left(\sqrt{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t')}\alpha(t')\mathrm{d}\mathcal{Q}(t')-\frac{\mu}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi(t')}\alpha^2(t')\mathrm{d}t'\right)\right]. \tag{5.124}$$

Udało się nam zatem wykazać, że dla pojedynczego pomiaru heterodynowego, podobnie jak dla podwójnej obserwacji heterodynowej, stan koherentny jest zachowany. Wartości średnie *a posteriori* operatorów układu $\mathcal{S}$, do wyznaczenia których wystarczy znajomość funkcji $\alpha(t)$, nie zależą od mierzonego sygnału, a stany *a posteriori* dla obu rozważanych obserwacji różnią się jedynie postacią fazy.

Warto przedstawić tutaj jeszcze jedną metodę, która pozwala sprawdzić, czy stan koherentny jest zachowany podczas ewolucji stochastycznej. Zauważmy, że jeżeli nieunormowana funkcja falowa $\widehat{\psi}(t)$ spełniająca liniowe równanie filtracji jest w dowolnej chwili $t \geq 0$ równa, z dokładnością do stałej, wektorowi koherentnemu, wówczas

$$c\,\widehat{\psi}(t) \;=\; \alpha(t)\widehat{\psi}(t)\,, \tag{5.125}$$

oraz

$$c\,\widehat{\psi}(t+\mathrm{d}t) \;=\; \alpha(t+\mathrm{d}t)\,\widehat{\psi}(t+\mathrm{d}t)\,. \tag{5.126}$$

Z równań (5.125) i (5.126) otrzymujemy

$$(c-\alpha(t)-\mathrm{d}\alpha(t))\,\mathrm{d}\widehat{\psi}(t) \;=\; \mathrm{d}\alpha(t)\widehat{\psi}(t)\,. \tag{5.127}$$

gdzie $\mathrm{d}\alpha(t) = \alpha(t+\mathrm{d}t) - \alpha(t)$. Jeżeli teza jest prawdziwa podstawienie do (5.127) przyrostu $\mathrm{d}\widehat{\psi}(t)$ z liniowego równanie filtracji pozwala wyznaczyć równanie równiczkowe dla zmiennej $\alpha(t)$.

Aby udowodnić, że podczas ewolucji stochastycznej danej równaniem (5.52) ściśnięty stan koherentny jest zachowany skorzystamy z tego, że dla stanu typu (5.93) zachodzi równość [83]

$$S(\xi)c\,S^\dagger(\xi)|\xi,\alpha\rangle \;=\; \alpha\,|\xi,\alpha\rangle\,. \tag{5.128}$$

Używając formuły Bakera-Hausdorfa można sprawdzić, że [83]

$$S(\xi)cS^\dagger(\xi) \;=\; c\,\Gamma_1 + c^\dagger\,\Gamma_2\,, \tag{5.129}$$

gdzie $\Gamma_1 = \cosh\varrho$, $\Gamma_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh\varrho$. Równanie (5.128) jest równaniem własnym dla ściśniętego stanu koherentnego typu (5.93). Jeżeli funkcja falowa $\widehat{\psi}(t)$ spełniająca równanie filtracji (5.52) jest w każdej chwili $t \geq 0$ z dokładnością do stałej ściśniętym stanem koherentnym, wówczas prawdziwe są równania

$$S(\xi(t))cS^\dagger(\xi(t))\widehat{\psi}(t) \;=\; \big[c\,\Gamma_1(t) + c^\dagger\,\Gamma_2(t)\big]\,\widehat{\psi}(t)\,, \tag{5.130}$$

$$S(\xi(t+\mathrm{d}t))cS^\dagger(\xi(t+\mathrm{d}t))\widehat{\psi}(t+\mathrm{d}t) \;=\; \big[c\,\Gamma_1(t+\mathrm{d}t) + c^\dagger\,\Gamma_2(t+\mathrm{d}t)\big]\,\widehat{\psi}(t+\mathrm{d}t)\,. \tag{5.131}$$

Z (5.130) oraz (5.131) możemy wyznaczyć równanie postaci

$$\begin{aligned}&\big[c\,\left(\Gamma_1(t)+\mathrm{d}\Gamma_1(t)\right) + c^\dagger\,\left(\Gamma_2(t)+\mathrm{d}\Gamma_2(t)\right) - \alpha(t) - \mathrm{d}\alpha(t)\big]\,\mathrm{d}\widehat{\psi}(t)\\ &\qquad + \left(c\,\mathrm{d}\Gamma_1(t) + c^\dagger\,\mathrm{d}\Gamma_2(t) - \mathrm{d}\alpha(t)\right)\widehat{\psi}(t) \;=\; 0\,.\end{aligned} \tag{5.132}$$

Podstawienie przyrostu $\mathrm{d}\widehat{\psi}(t)$ z równania (5.52) do (5.132) pozwala otrzymać niesprzeczny układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{aligned}&\alpha(t)\Gamma_1(t)\left[-\Gamma_1(t)\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\Gamma_1(t)-\sqrt{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\mathrm{d}\alpha(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t)\right]-\mathrm{d}\alpha(t)\\ &\quad-\alpha(t)\,\overline{\Gamma_2(t)}\left[\Gamma_2(t)\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\Gamma_2(t)\right]-\sqrt{\mu}\,\Gamma_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\mathrm{d}\mathcal{Q}(t) \;=\; 0\,,\end{aligned} \tag{5.133}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma_2(t)\left[-\Gamma_1(t)\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\Gamma_1(t)-\sqrt{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)}\mathrm{d}\alpha(t)\mathrm{d}\mathcal{Q}(t)\right]\\ &\qquad-\Gamma_1(t)\left[\Gamma_2(\mathrm{t})\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\Gamma_2(t)\right] \;=\; 0\end{aligned} \tag{5.134}$$

z warunkiem początkowym $\Gamma_1(0) = \cosh\varrho_0$, $\Gamma_2(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\sinh\varrho_0$, $\alpha(0) = \alpha_0$, co kończy dowód.

Wyznaczmy teraz niepewności kwadratur optycznych ściśniętego stanu koherentnego *a posteriori*. Dla zmiennej (5.98) z równań (5.133) oraz (5.134) możemy wyznaczyć *równanie Riccatiego* postaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma(t) \;=\; -2\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma(t)+\mu\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi(t)}\,\Gamma^2(t)\,, \qquad \Gamma(0) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\sinh\varrho_0\,. \tag{5.135}$$

Rozwiązanie ogólne równania (5.135) możemy zapisać jako

$$\Gamma(t) \;=\; \frac{\Gamma(0)\mathrm{e}^{-(2\mathrm{i}\omega+\mu)t}}{1-\mu\,\Gamma(0)\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\left(2\mathrm{i}\omega+\mu\right)t'-2\mathrm{i}\phi(t')}\mathrm{d}t'}\,. \tag{5.136}$$

Dla funkcji $\phi(t) = \pi/2 + \vartheta t$, otrzymujemy

$$\Gamma(t) \;=\; \frac{\left(2\mathrm{i}\omega+2\mathrm{i}\vartheta+\mu\right)\Gamma(0)}{\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}\omega+\mu)t}\left[2\mathrm{i}\omega+2\mathrm{i}\vartheta+\mu(1+\Gamma(0))\right]-\mu\,\Gamma(0)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta t}}\,. \tag{5.137}$$

Formuła (5.137) pozwala, zgodnie z tym, że

$$\Delta X(t) \;=\; \left(2\mathrm{Re}\kappa(t)\right)^{-1/2} \;, \tag{5.138}$$

$$\Delta Y(t) \;=\; |\kappa(t)| \left(2\mathrm{Re}\kappa(t)\right)^{-1/2} \;, \tag{5.139}$$

gdzie

$$\kappa(t) \;=\; \frac{1+\Gamma(t)}{1-\Gamma(t)}\,, \tag{5.140}$$

wyznaczyć niepewności kwadratur optycznych ściśniętego stanu koherentnego *a posteriori* dla pojedynczego różnicowego pomiaru heterodynowego.

Pomiar kwadratur optycznych tłumionego oscylatora harmonicznego, oparty na heurystycznym modelu obserwacji położenia i pędu cząstki w komorze pęcherzykowej [23], opisany został w pracach [24, 35, 102]. Autorzy prac wykazali, że gdy obserwujemy tylko jedną z kwadratur optycznych, stan koherentny układu nie jest zachowany, a dowolny początkowy stan gaussowski staje się stanem ściśniętym. Zgodnie z otrzymanymi przez nich formułami, stan koherentny może być zachowany tylko dla łącznego pomiaru położenia i pędu oscylatora harmonicznego. Różnica pomiędzy wynikami podanymi w dysertacji i cytowanych pracach wynika z tego, że oddziaływanie pomiędzy oscylatorem i polem bozonowym w [24, 35, 102] zapisane jest bez przybliżenia wirującej fali.

5.5 Porównanie wartości średnich *a priori* i *a posteriori* operatorów układu

Walls i Milburn w pracy [110] wykazali, że rozwiązanie równania master (5.26) dla stanu początkowego $\tilde{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ można przedstawić w postaci

$$\tilde{\rho}(t) \;=\; |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|\,, \tag{5.141}$$

gdzie $\alpha(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)t}\alpha_0$. Widać zatem, że wartości średnie *a priori* i *a posteriori* operatorów układu, który w chwili początkowej znajduje się w stanie koherentnym są takie same ($\langle a\rangle_t \;=\; \langle a\rangle^t \;=\; \alpha(t)$). Stochastyczna faza stanu *a posteriori* staje się istotna dopiero wówczas, gdy rozważamy superpozycje stanów koherentnych. Oczywiście, dla rozważanych w rozdziale doświadczeń, dowolny stan *a priori* i *a posteriori* zmierza asymptotycznie do stanu próżni. Aby udowodnić, że podczas ewolucji *a priori* stan koherentny jest zachowany można, inaczej niż autorzy [110], posłużyć się transformacją [6]

$$\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) \;=\; \mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c}\tilde{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^{\dagger}}\right\} \tag{5.142}$$

z działaniem odwrotnym zdefiniowanym jako

$$\tilde{\rho} \;=\; \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}_2\beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\beta}c}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta c^\dagger}\, \tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) . \tag{5.143}$$

Formuły

$$\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c} c\tilde{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^\dagger}\right\} \;=\; \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\overline{\beta}}\,\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) , \tag{5.144}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c} c^\dagger\tilde{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^\dagger}\right\} \;=\; \left(-\mathrm{i}\overline{\beta}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) , \tag{5.145}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c} \tilde{\rho}c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^\dagger}\right\} \;=\; \left(-\mathrm{i}\beta+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\overline{\beta}}\right)\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) , \tag{5.146}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c} \tilde{\rho}c^\dagger\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^\dagger}\right\} \;=\; \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta}\,\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta\right) . \tag{5.147}$$

pozwalają z (5.26) wyznaczyć równanie

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta;t\right) \;=\; \left[-\left(\mathrm{i}\omega+\frac{\mu}{2}\right)\overline{\beta}\,\frac{\partial}{\partial\overline{\beta}}+\left(\mathrm{i}\omega-\frac{\mu}{2}\right)\beta\,\frac{\partial}{\partial\beta}\right]\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta;t\right) . \tag{5.148}$$

Rozwiązanie równania (5.148) dla stanu początkowego

$$\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta;0\right) \;=\; \mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\,c}|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta c^\dagger}\right\} \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\alpha_0-\mathrm{i}\beta\overline{\alpha}_0} \tag{5.149}$$

można zapisać jako

$$\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta;t\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\beta}\alpha(t)-\mathrm{i}\beta\overline{\alpha(t)}+h(t)} , \tag{5.150}$$

bowiem podstawienie (5.150) do (5.148) prowadzi do niesprzecznego układu równań różniczkowych: $\mathrm{d}\alpha(t) = -(\mathrm{i}\omega+\mu/2)\alpha(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}h(t) = 0$ i to kończy dowód. Podobny sposób postępowania dla stanu $\tilde{\rho}(0) = |\xi_0,\alpha_0\rangle\langle\xi_0,\alpha_0|$, dla którego

$$\tilde{\rho}\left(\overline{\beta},\beta;0\right) \;=\; \exp\left[-\mathrm{i}\,\left(\overline{\beta}\,s_0+\beta\,\overline{s_0}\right)-\frac{1}{2}\left(\left(\overline{\beta}\right)^2 l_0+\beta^2\,\overline{l_0}\right)-|\beta|^2 r_0\right] , \tag{5.151}$$

gdzie

$$s_0 \;=\; \alpha_0\cosh\varrho_0-\overline{\alpha_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\sinh\varrho_0 , \tag{5.152}$$

$$l_0 \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\sinh\varrho_0\cosh\varrho_0 , \tag{5.153}$$

$$r_0 \;=\; \sinh^2\varrho_0 , \tag{5.154}$$

pozwala łatwo sprawdzić, że ewolucja *a priori* nie zachowuje ściśniętego stanu koherentnego.

Wartości średnie *a priori* obserwabli układu $\mathcal{S}$ dla dowolnego stanu początkowego można wyznaczyć korzystając z równania (5.35). W szczególności, dla operatora liczby cząstek otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}\langle n\rangle^t}{\mathrm{d}t} \;=\; -\mu\,\langle n\rangle^t , \tag{5.155}$$

stąd

$$\langle n \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t} \langle n(0) \rangle \,. \tag{5.156}$$

W analogiczny sposób możemy wyznaczyć wartości średnie *a priori* kwadratur optycznych

$$\langle X \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{2}} \left[\langle X(0) \rangle \cos \omega t + \langle Y(0) \rangle \sin \omega t \right] \,, \tag{5.157}$$

$$\langle Y \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{2}} \left[\langle Y(0) \rangle \cos \omega t - \langle X(0) \rangle \sin \omega t \right] \,. \tag{5.158}$$

Zatem dla układu, który w chwili początkowej przebywał w parzystym stanie koherentnym $|\alpha_0, +\rangle$, otrzymujemy

$$\langle n \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t} \left| \alpha_0 \right|^2 \tanh \left| \alpha_0 \right|^2 \,, \tag{5.159}$$

dla nieparzystego stanu koherentnego $|\alpha_0, -\rangle$, mamy

$$\langle n \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t} \left| \alpha_0 \right|^2 \coth \left| \alpha_0 \right|^2 \,. \tag{5.160}$$

Zgodnie z (5.157) oraz (5.158), wartości średnie *a priori* kwadratur optycznych dla stanów $|\alpha_0, \pm\rangle$ pozostają równe zeru. Dla ściśniętego stanu próżni $S(\xi_0)|0\rangle$, otrzymujemy

$$\langle n \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t} \sinh^2 \varrho_0 \tag{5.161}$$

oraz $\langle X \rangle^t = 0$, $\langle Y \rangle^t = 0$, a dla ściśniętego stanu koherentnego $|\xi_0, \alpha_0\rangle$, otrzymujemy

$$\langle n \rangle^t \;=\; \mathrm{e}^{-\mu t} \left| \alpha_0 \cosh \varrho_0 - \overline{\alpha_0} \sinh \varrho_0 \right|^2 + \sinh^2 \varrho_0 \,. \tag{5.162}$$

Rozdział 6

Podsumowanie

Celem niniejszej dysertacji było przedstawienie przykładów zastosowań, opartej na niekomutatywnej wersji stochastycznego rachunku Ito, kwantowej teorii filtracji w optyce kwantowej. Model ciągłych nieniszczących obserwacji markowskiego układu otwartego, który pozwala opisać szeroką klasę problemów oddziaływania układów kwantowych z polem elektromagnetycznym, posłużył w pracy do rozważenia skoków kwantowych i efektu odkładania elektronu na półkę w doświadczeniu Dehmelta oraz przedstawienia nieidealnego pomiaru kwadratur optycznych tłumionego oscylatora harmonicznego. Praca zawiera wyprowadzenia i analizę rozwiązań kwantowego równania filtracji Belavkina dla dwóch typów obserwacji: liczącej i dyfuzyjnej. Posługując się kwantowym rachunkiem stochastycznym Ito wyznaczono w pracy między innymi formułę na średni czas oczekiwania na zliczenie fotonu fluorescencji dla atomu o schemacie poziomów energetycznych typu Λ. Struktura otrzymanego wzoru potwierdza wyniki innych prac, w których wskazano na występowanie okresów jasności i ciemności w świetle emitowanym przez układ Λ. W dysertacji wykazano, że pośredni pomiar kwadratur optycznych oscylatora harmonicznego, w przypadku gdy układ w chwili początkowej znajduje się w stanie koherentnym, nie zwiększa naszej wiedzy o układzie – układ pozostaje w stanie koherentnym, a zatem niepewności kwadratur optycznych nie ulegają zmianie. Analityczne rozwiązania liniowego równania filtracji otrzymano również dla ściśniętego stanu koherentnego oraz dwóch stanów typu kota Schrödingera. W pracy podano także, wskazując założenia leżące u postaw teorii pomiaru procesów samonieniszczących, wyprowadzenie kwantowych stochastycznych reguł mnożenia Ito.

Bibliografia

[1] R. Alicki and K. Lendi. *Quantum Dynamical Semigroup and Applications*, volume 717 of *LNP*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.

[2] A. Barchielli. Measurement theory and stochastic differential equations in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 34:1642–1649, 1986.

[3] A. Barchielli. Quantum stochastic differential equations: an application to the electron shelving effect. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:6341–6355, 1987.

[4] A. Barchielli. Direct and heterodyne detection and other applications of quantum stochastic calculus to quantum optics. *Quantum Opt.*, 2:423–441, 1990.

[5] A. Barchielli. Continual measurement in quantum mechanics and quantum stochastic calculus. In A. Joye A. Atall and C. A. Pillet, editors, *Open Quantum Systems* III. *Recent Developments*, LNM, pages 207–288. Springer, 2006.

[6] A. Barchielli and V. P. Belavkin. Measurement continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:1495–1514, 1991.

[7] A. Barchielli, L. Lanz, and G. M. Prosperi. A model for the macroscopic description and continual observations in quantum mechanics. *Nuovo Cimento*, 72B:79–121, 1982.

[8] A. Barchielli, L. Lanz, and G. M. Prosperi. Statistics of continuous trajectories in quantum mechanics: Operation valued stochastic processes. *Found. Phys.*, 13:779–812, 1983.

[9] A. Barchielli and G. Lupieri. Quantum stochastic calculus, operation valued stochastic processes, and continual measurements in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 26:2222–2230, 1985.

[10] A. Barchielli and G. Lupieri. Quantum stochastic models of two-level atoms and electromagnetic cross sections. *J. Math. Phys.*, 41:7181–7205, 2000.

[11] A. Barchielli and A. M. Paganoni. Detection theory in quantum optics: stochastic representation. *Quantum Opt.*, 8:133–156, 1996.

[12] A. Barchielli and N. Pero. A quantum stochastic approach to the spectrum of a two-level atom. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 4:272–282, 2002.

[13] V. P. Belavkin. *Optimal Measurement and Control in Quantum Dynamical Systems.* Preprint No.411, Institute of Physics, Nicolaus Copernicus University, Toruń, 1979.

[14] V. P. Belavkin. Quantum filtering of Markov signals with white quantum noise. *Radiotechnika i Elektronika*, 25:1445–1453, 1980.

[15] V. P. Belavkin. A continuous counting observation and posterior quantum dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:L1109–L1114, 1989.

[16] V. P. Belavkin. A posterior Schrödinger equation for continuous nondemolition measurement. *J. Math. Phys.*, 31:2930–2934, 1990.

[17] V. P. Belavkin. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering. *J. Multivariate Anal.*, 42:171–201, 1992.

[18] V. P. Belavkin. Quantum diffusion, measurement and filtering. *Theory Probab. Appl.*, 38:742–757, 1993.

[19] V. P. Belavkin. Quantum diffusion, measurement and filtering. *Theory Probab. Appl.*, 39:640–658, 1994.

[20] V. P. Belavkin. Measurement, filtering and control in quantum open dynamical systems. *Rep. Math. Phys.*, 43:405–425, 1999.

[21] V. P. Belavkin. Quantum causality, stochastic, trajectories and information. *Rep. Prog. Phys.*, pages 353–420, 2002.

[22] V. P. Belavkin and Ch. Bendjaballah. Continuous measurements of quantum phase. *Quantum Optics*, 6:169–186, 1994.

[23] V. P. Belavkin and O. Melsheimer. A stochastic hamiltonian approach for quantum jumps, spontaneous localizations, and continuous trajectories. *Quantum Semiclass. Opt.*, 8:167–187, 1996.

[24] V. P. Belavkin and P. Staszewski. A quantum particle undergoing continuous observation. *Phys. Lett. A*, 140:359–362, 1989.

[25] V. P. Belavkin and P. Staszewski. Nondemolition observation of a free quantum particle. *Phys. Rev. A.*, 45:1347 – 1356, 1992.

[26] J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. J. Wineland. Observation of quantum jumps in a single atom. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1699–1702, 1986.

[27] L. Bouten. *Filtering and Control in Quantum Optics.* PhD thesis, Radboud Universiteit Nijmegen, 2004. quant-ph/0410080.

[28] L. Bouten, M. I. Guţă, and H. Maassen. Stochastic Schrödinger equation. *J. Phys. A*, 37:3189–3209, 2004.

[29] V. B. Braginsky and F. Ya. Khalili. *Quantum Measurement.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[30] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* I. Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1979.

[31] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* II. Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[32] P. Busch, M. Grabowski, and P. J. Lahti. *Operational Quantum Physics.* Springer, Berlin-Heidelberg, 1995.

[33] H. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics.* Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.

[34] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann. On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. *Rev. Mod. Phys.*, 52:341–392, 1980.

[35] D. Chruściński and P. Staszewski. On the asymptotic solution of Belavkin's stochastic wave equation. *Physica Scripta*, 45:193–199, 1992.

[36] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard. Single-atom laser spectroscopy. Looking for dark periods in flourescence light. *Europhys. Lett.*, 1(9):441–448, 1986.

[37] R. J. Cook and H. J. Kimble. Possibility of direct observation of quantum jumps. *Phys. Rev. Lett.*, 54:1023 – 1026, 1985.

[38] E. B. Davies. Quantum stochastic processes. *Commun. Math. Phys.*, 15:277–304, 1969.

[39] E. B. Davies. *Quantum Theory of Open System.* Academic Press, New York, 1976.

[40] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Commun. Math. Phys.*, 17:239–260, 1970.

[41] A. Dąbrowska. Counting photons in the Λ-experiment. *Open Sys. & Information Dyn.*, 9:381–392, 2002.

[42] H. G. Dehmelt. Proposed 10^{14} $\Delta\nu < \nu$ laser fluorescence spectroscopy on Tl+ mono-Ion oscillator II (spontaneous quantum jumps). *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 20:60, 1975.

[43] L. Diósi. Continuous quantum measurement and Itô formalism. *Phys. Lett. A*, 129:419–423, 1988.

[44] L. Diósi. Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations. *Phys. Rev. A*, 40:1165–1174, 1989.

[45] Ch. N. Friedman. Semigroup product formulas, compressions and continual observations in quantum mechanics. *Indiana Uni. Math. J.*, 21:1001–1011, 1972.

[46] A. Frigerio. Covariant Markov dilations of quantum dynamical semigroups. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 21:657–675, 1985.

[47] C. Gardiner and P. Zoller. *Quantum Noise.* Springer, Berlin, 2000.

[48] C. W. Gardiner and M. J. Collet. Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification. *Phys. Rev. A*, 30:1386–1391, 1984.

[49] C. W. Gardiner and M. J. Collett. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation. *Phys. Rev. A*, 31:3761–3774, 1985.

[50] C. W. Gardiner, A. S. Parkins, and P. Zoller. Wave-function quantum stochastic differential equations and quantum-jump simulation methods. *Phys. Rev. A*, 46:4363–4381, 1992.

[51] C. W. Gardiner and P. Zoller. Quantum Noise in Quantum Optics: the Stochastic Schrödinger Equation. In E. Giacobino and S. Reynaud, editors, *Lecture Notes for the Les Houches Summer School LXIII on Quantum Fluctuations in July 1995 to appear Elsevier Science Publishers*, 1995.

[52] B. M. Garraway and P. L. Knight. Comparison of quantum-state diffusion and quantum-jump simulations of two photon processes in a dissipative enviroment. *Phys. Rev. A*, 49:1266–1274, 1994.

[53] B. M. Garraway and P. L. Knight. Evolution of quantum superpositions in open environments: Quantum trajectories, jumps, and localization in phase space. *Phys. Rev. A*, 50:2548–2563, 1994.

[54] J. M. Geremia, J. K. Stockton, A. C. Doherty, and H. Mabuchi. Quantum Kalman filtering and the Heisenberg limit in atomic magnetometry. *Phys. Rev. Lett.*, 91:250801–250806, 2003.

[55] N. Gisin. Irreversible quantum dynamics and the hilbert space structure of quantum kinematics. *J. Math. Phys.*, 24:1779–1782, 1983.

[56] N. Gisin. Quantum measurements and stochastic processes. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1657–1660, 1984.

[57] N. Gisin and I. C. Percival. The quantum-state diffusion model applied to open systems. *J. Phys. A*, 25:5677–5691, 1992.

[58] P. Goetsch and R. Graham. Linear stochastic wave equations for continuously measured quantum systems. *Phys. Rev. A*, 50:5242–5255, 1994.

[59] P. Goetsch, R. Graham, and F. Haake. Schrödinger cat states and single runs for the damped harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 51:136–142, 1995.

[60] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Comletely positive dynamical semigroup of N-level system. *J. Math. Phys.*, 17:821–825, 1976.

[61] V. Gorinia, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Properties of quantum Markovian master equation. *Rep. Math. Phys.*, 13:149–173, 1978.

[62] M. Gregoratti. The Hamiltonian operator associated to some quantum stochastic evolution. *Commun. Math. Phys.*, 222:181–200, 2001.

[63] A. Guichardet. *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics*, volume 261 of *LNM*. Springer, Berlin, 1972.

[64] J. Hellmich, R. Honegger, C. Köstler, B. Kümmerer, and A. Rieckers. Coupling to classical and non-classical squeezed white noise as stationary Markov processes. *Publ. RIMS*, 38:1–31, 2002.

[65] K. Hepp and E. Lieb. Phase transition in reservoir driven open systems with applications to lasers and superconductors,. *Helv. Phys. Acta*, 46:573–602, 1973.

[66] A. Holevo. *Statistical Structure of Quantum Theory*, volume 67 of *LNP*. Springer, 2001.

[67] A. S. Holevo. Information-theoretic aspects of quantum measurement. *Probl. Inform. Transm.*, 9:31–42, 1973.

[68] A. S. Holevo. Estimation of shift parameters of a quantum state. *Rep. Math. Phys.*, 13:379–399, 1978.

[69] A. S. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspect of Quantum Theory*. North Holland, Amsterdam, 1982.

[70] A. S. Holevo. *Quantum Probability and Quantum Statistics*, volume 83 of *Progress in Science and Technology: Contemporary Problems in Mathematics*. VINITI, Moscow, 1991.

[71] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy. Quantum Ito's formula and stochastic evolution. *Commun. Math. Phys.*, 93:301–323, 1984.

[72] J. M. Jauch. *Foundations of Quantum Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1968.

[73] H. J. Kimble, R. J. Cook, and A. L. Wells. Intermittent atomic fluorescence. *Phys. Rev. A*, 34:3190–3194, 1986.

[74] P. Kruszyński and W. M. de Muynck. Compatibility of observables represented by positive operator-valued measures. *J. Math. Phys.*, 28:1761–1763, 1987.

[75] P. Lahti. Coexistence and joint measurability in quantum mechanics. *Int. J. Theor. Phys.*, 42:893–903, 2003.

[76] P. Lahti and S. Pulmannova. Coexistent observables and effects in quantum mechanics. *Rep. Math. Phys.*, 39:339–351, 1997.

[77] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroup. *Commun. Math. Phys.*, 48:119–130, 1976.

[78] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation.* John Wiley & Sons, 1990.

[79] G. Lüders. Über die Zustandsänderung durch den Messprozess. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 8:322–328, 1951.

[80] G. Ludwig. Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories, II. *Commun. Math. Phys.*, 4:331–348, 1967.

[81] G. Ludwig. Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. III. *Commun. Math. Phys.*, 9:1–12, 1968.

[82] H. Mabuchi and H. M. Wiseman. Retroactive quantum jumps in a strongly coupled atom-field system. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4620–4623, 1998.

[83] L. Mandel and E. Wolf. *Quantum Coherence and Quantum Optics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[84] P. A. Meyer. *Quantum Probability for Probabilists.* Springer, Berlin, 1993.

[85] B. Misra and E. C. G. Sudarshan. The Zeno's paradox in quantum theory. *J. Math. Phys.*, 18:756–763, 1977.

[86] W. Mlak. *Hilbert Spaces and Operator Theory.* Kluwer Academic Publisher, 1992.

[87] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt. Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps. *Phys. Rev. Lett*, 56:2797–2799, 1986.

[88] M. Nakamura and H. Umegaki. On von Neumann's theory of measurements in quantum statistics. *Math. Japonica*, 7:151–157, 1962.

[89] M. Ozawa. *Probability Theory and Quantum Statistics*, chapter Conditional expectation and repeated measurement of continuous quantum observables, pages 518–525. LMN. Springer, Berlin, 1983.

[90] M. Ozawa. Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 21:279–295, 1985.

[91] K. R. Parthasarathy. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[92] Ph. Pearle. Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization. *Phys. Rev. A*, 39:2277–2289, 1989.

[93] I. Percival. *Quantum State Diffusion.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[94] E. Prugovečki. *Quantum Mechanic in Hilbert Space.* Academic Press, New York-London, 1971.

[95] L. Rey-Bellet, S. Attal, R. Rebolledo, and F. Fagnola. *Open Quantum Systems* II. *The Markovian Approach.* LNM. Springer, Berlin-Heidelberg, 2006.

[96] Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. E. Toschek. Observation of quantum jumps. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1696–1698, 1986.

[97] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[98] B. W. Shore. *The Theory of Coherent Atomic Excitation.* Wiley, New York, 1990.

[99] P. Staszewski. *Quantum Mechanics of Continuously Observed Systems.* N. Copernicus University Press, Toruń, 1993.

[100] P. Staszewski and G. Staszewska. The atom under a continuous-counting observation: relaxation without mixing. *Europhys. Lett.*, 20:191–196, 1992.

[101] P. Staszewski and G. Staszewska. Atom relaxing under a counting observation. *Open Sys. Information Dyn.*, 1:103–114, 1993.

[102] P. Staszewski and G. Staszewska. A coherent state undergoing a continuous nondemolition observation. *Phys. Lett. A*, 287:19–22, 2001.

[103] W. F. Stinespring. Positive functions on C*-algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 6:211–216, 1955.

[104] J. K. Stockton, J. M. Geremia, A. C. Doherty, and H. Mabuchi. Robust quantum parameter estimation: Coherent magnetometry with feedback. *Phys. Rev. A*, 69:032109–032109, 2004.

[105] C. C. Gerry, P. L. Knight. *Wstęp do optyki kwantowej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2007.

[106] M. Grabowski, R. Ingarden. *Mechanika kwantowa*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989.

[107] L. K. Thomsen, S. Mancini, and H. M. Wiseman. Spin squeezing via quantum feedback. *Phys. Rev. A*, 65:061801–061805, 2002.

[108] P. E. Toschek. Absorption by the numbers: Recent experiment with single trapped and cooled ions. *Physica Scripta*, T23:170–175, 1988.

[109] J. von Neumann. *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1955.

[110] D. F. Walls and G. J. Milburn. Effect of dissipation on quantum coherence. *Phys. Rev. A*, 31:2403–2408, 1985.

[111] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer Study Edition, Heidelberg, 1994.

[112] H. M. Wiseman and G. J. Milburn. Interpretation of quantum jump and diffusion processes ilustrated on theBloch sphere. *Phys. Rev. A*, 47:1652–1666, 1993.

[113] H. M. Wiseman and G. J. Milburn. Quantum theory of field-quadrature measurements. *Phys. Rev. A*, 47:642–662, 1993.

[114] H. P. Yuen and J. H. Shapiro. Quantum-state propagation and quantum-noise reduction. *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-24:657–668, 1978.

Dodatek A

Wyznaczenie kwantowych reguł Ito w reprezentacji Focka

Symetryczną przestrzeń Focka $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+))$ można rozpatrywać jako przestrzeń Hilberta $L^2\big(\Upsilon^\infty(\mathbb{R}_+)\big)$ całkowalnych z kwadratem symetrycznych funkcji $\varphi(\tau)$ zmiennej $\tau = (t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $t_i \in \mathbb{R}_+$ i $t_1 < \ldots < t_n$. Iloczyn skalarny w $L^2\big(\Upsilon^\infty(\mathbb{R}_+)\big)$ dany jest wzorem [17]

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \mathrm{d}t_n \int_0^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \ldots \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_1\, \overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n)\psi(t_1, \ldots, t_n)\,. \tag{A.1}$$

Przestrzeń $\Upsilon^\infty(\mathbb{R}_+)$ nazywana bywa *przestrzenią Guichardeta* [63]. Wektor wykładniczy, który oznaczymy przez φ_f, definiuje się jako $\varphi_f\big(\emptyset\big) = 1$, $\varphi_f(\tau) = \prod_{t\in\tau} f(t)$. Dla unormowanego wektora próżni $\delta_\emptyset$ mamy $\delta_\emptyset\big(\emptyset\big) = 1$ oraz $\delta_\emptyset(\tau) = 0$, gdy $\tau \neq \emptyset$.

Proces anihilacji $A(t)$, kreacji $A^\dagger(t)$ oraz liczby cząstek $\Lambda(t)$ dla dowolnego $t \geq 0$ definiujemy za pomocą równości

$$(A(t)\varphi)(\tau) = \int_0^t \varphi(\tau \sqcup s)\mathrm{d}s\,, \tag{A.2}$$

$$(A^\dagger(t)\varphi)(\tau) = \sum_{s\in\tau} \chi^t(s)\varphi(\tau\backslash s)\,, \tag{A.3}$$

$$(\Lambda(t)\varphi)(\tau) = |\tau^t|\varphi(\tau)\,, \tag{A.4}$$

gdzie $\chi^t(s) = 1$, gdy $s < t$, $\chi^t(s) = 0$, gdy $s \geq t$, $|\tau^t| = \sum_{s\in\tau} \chi^t(s)$. Ciąg $\tau \sqcup s$ jest postaci $(t_1, \ldots, t_i, s, t_{i+1}, \ldots, t_n)$, gdy $t_i < s < t_{i+1}$ oraz $\tau\backslash s = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$, gdy $s = t_i$. Łatwo sprawdzić, że dla wektora próżni $(A(t)\delta_\emptyset)(\tau) = 0$, $(A^\dagger(t)\delta_\emptyset)(\tau) = 0$, gdy $|\tau| \neq 0$, $(A^\dagger(t)\delta_\emptyset)(\tau) = \chi^t(s)$ dla $s \in \tau$, gdy $|\tau| = 1$, $(\Lambda(t)\delta_\emptyset)(\tau) = 0$.

Zauważmy, że z definicji (A.4) wynika, że

$$\langle\varphi|\Lambda(t)\varphi\rangle = \int\limits_0^\infty \chi^t(s)|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s + \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t_2 \int\limits_0^{t_2} \mathrm{d}t_1 \big(\chi^t(t_1)+\chi^t(t_2)\big)|\varphi(t_1,t_2)|^2$$

$$+ \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t_3 \int\limits_0^{t_3} \mathrm{d}t_2 \int\limits_0^{t_2} \mathrm{d}t_1 \big(\chi^t(t_1)+\chi^t(t_2)+\chi^t(t_3)\big)|\varphi(t_1,t_2,t_3)|^2 + \ldots . \tag{A.5}$$

W szczególności dla wektora eksponencjalnego otrzymujemy formułę

$$\langle\varphi_f|\Lambda(t)\varphi_f\rangle \;=\; \exp\left\{\int\limits_0^\infty |f(t')|^2\mathrm{d}t'\right\} \int_0^t |f(t')|^2\mathrm{d}t' . \tag{A.6}$$

Korzystając z (A.6) można sprawdzić że, dla wektora koherentnego zdefiniowanego jako $\iota_f = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\varphi_f\|^2}\varphi_f$, zachodzi wzór

$$\langle\iota_f|\big(\Lambda(t)-\Lambda(s)\big)\iota_f\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\int_s^t |f(t')|^2\mathrm{d}t'} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\int_s^t |f(t')|^2\mathrm{d}t'\right)^n}{n!} \int_s^t |f(t')|^2\mathrm{d}t' . \tag{A.7}$$

Widać zatem, że proces $\Lambda(t)$ jest *niejednorodym procesem Poissona.*

Wykażemy poniżej, że kwantowe reguły mnożenia Ito dla infinitezymalnych przyrostów procesów (A.2)-(A.4) wynikają z założenia, że proces $\Lambda(t)$ jest regularny tzn. tylko jeden foton może być obserwowany w danej chwili. Innymi słowy przyjmujemy, że prawdopodobieństwo więcej niż jednego zliczenia w przedziale czasu o długości dt znika. Stąd, zgodnie z tym, że różnica $|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|$ może wynosić tylko jeden lub zero, mamy

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}\Lambda(t)\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi](\tau) &= \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\varphi(\tau) \;=\; \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\varphi(\tau) \\ &= (\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi)(\tau) .\end{aligned} \tag{A.8}$$

Jeżeli $t\in\tau$ wówczas wszystkie wyrażenia rzędu dt i większego niż dt są zaniedbywalnie małe w porównaniu z przyrostem $|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|=1$, pozwala to wyznaczyć reguły:

$$[\mathrm{d}A(t)\mathrm{d}t\varphi](\tau) \;=\; \mathrm{d}t\mathrm{d}t\varphi(\tau\sqcup t) \;=\; 0 , \tag{A.9}$$

$$[\mathrm{d}A^\dagger(t)\mathrm{d}t\varphi](\tau) \;=\; \mathrm{d}t\Bigg(\sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}\varphi(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}\varphi(\tau\backslash r)\Bigg) \;=\; \begin{cases}\mathrm{d}t\varphi(\tau\backslash t) & \text{gdy } t\in\tau \\ 0 & \text{gdy } t\notin\tau\end{cases} \;=\; 0 , \tag{A.10}$$

$$[\mathrm{d}\Lambda(t)\mathrm{d}t\varphi](\tau) \;=\; \mathrm{d}t\big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\varphi(\tau) \;=\; \begin{cases}\mathrm{d}t\varphi(\tau) & \text{gdy } t\in\tau \\ 0 & \text{gdy } t\notin\tau\end{cases} \;=\; 0 , \tag{A.11}$$

$$[\mathrm{d}A(t)\mathrm{d}A(t)\varphi](\tau) \;=\; \mathrm{d}t\mathrm{d}t\varphi(\tau\sqcup t\sqcup t) \;=\; 0 , \tag{A.12}$$

$$[\mathrm{d}A^\dagger(t)\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi](\tau) \;=\; \Big(\sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}(\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi)(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}(\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi)(\tau\backslash r)\Big) \;=\; 0\,, \quad \text{(A.13)}$$

$$[\mathrm{d}\Lambda(t)\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi](\tau) \;=\; \mathrm{d}t\big(\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi\big)(\tau\sqcup t) \;=\; \mathrm{d}t[(\Lambda(t+\mathrm{d}t)-\Lambda(t))\varphi](\tau\sqcup t)$$

$$=\; \mathrm{d}t\big(|(\tau\sqcup t)\cap[0,t+\mathrm{d}t)| - |(\tau\sqcup t)\cap[0,t)|\big)\varphi(\tau\sqcup t) \;=\; \mathrm{d}t\varphi(\tau\sqcup t) \;=\; (A(t)\varphi)(\tau)\,, \quad \text{(A.14)}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}\Lambda(t)\mathrm{d}A(t)\varphi](\tau) \;&=\; \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)(\mathrm{d}A(t)\varphi)(\tau) \;=\; \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\mathrm{d}t\varphi(\tau\sqcup t)\\ &=\; \begin{cases}\mathrm{d}t\varphi(\tau\sqcup t) & \text{gdy } \ t\in\tau\\ 0 & \text{gdy } \ t\notin\tau\end{cases} \;=\; 0\,, \qquad \text{(A.15)}\end{aligned}$$

$$[\mathrm{d}\Lambda(t)\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi](\tau) = [(\Lambda(t+\mathrm{d}t)-\Lambda(t))\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi](\tau) = \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)(\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi)(\tau)$$

$$\begin{aligned}&=\; \big(|\tau^{t+\mathrm{d}t}|-|\tau^t|\big)\Big(\sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}\varphi(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}\varphi(\tau\backslash r)\Big) \;=\; \begin{cases}\varphi(\tau\backslash t) & \text{gdy } \ t\in\tau\\ 0 & \text{gdy } \ t\notin\tau\end{cases}\\ &=\; (\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi)(\tau)\,, \qquad \text{(A.16)}\end{aligned}$$

$$[\mathrm{d}A^\dagger(t)\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi](\tau) \;=\; \sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}(\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi)(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}(\mathrm{d}\Lambda(t)\varphi)(\tau\backslash r)$$

$$=\; \sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}|(\tau\backslash s)\cap[t,t+\mathrm{d}t)|\varphi(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}|(\tau\backslash r)\cap[t,t+\mathrm{d}t)|\varphi(\tau\backslash r) \;=\; 0\,, \quad \text{(A.17)}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}A(t)\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi](\tau) \;&=\; \mathrm{d}t(\mathrm{d}A^\dagger(t)\varphi)(\tau\sqcup t) \;=\; \mathrm{d}t[\big(A^\dagger(t+\mathrm{d}t)-A^\dagger(t)\big)\varphi](\tau\sqcup t)\\ &=\; \mathrm{d}t\left(\sum_{s\in\tau\sqcup t}\chi^{t+\mathrm{d}t}(s)\varphi(\tau\sqcup t\backslash s) - \sum_{r\in\tau\sqcup t}\chi^t(r)\varphi(\tau\sqcup t\backslash r)\right)\\ &=\; \mathrm{d}t\left(\sum_{s\in(\tau\sqcup t)\cap[0,t+\mathrm{d}t)}\varphi(\tau\sqcup t\backslash s) - \sum_{r\in(\tau\sqcup t)\cap[0,t)}\varphi(\tau\sqcup t\backslash r)\right)\\ &=\; \mathrm{d}t\varphi(\tau)\,, \qquad \text{(A.18)}\end{aligned}$$

$$[\mathrm{d}A^\dagger(t)\mathrm{d}A(t)\varphi](\tau) \;=\; \sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}(\mathrm{d}A(t)\varphi)(\tau\backslash s) - \sum_{r\in\tau^t}(\mathrm{d}A(t)\varphi)(\tau\backslash r)$$

$$=\sum_{s\in\tau^{t+\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t\varphi(\tau\backslash s\sqcup t) - \sum_{r\in\tau^t}\mathrm{d}t\varphi(\tau\backslash r\sqcup t) \;=\; \begin{cases}\mathrm{d}t\varphi(\tau) & \text{gdy } \ t\in\tau\\ 0 & \text{gdy } \ t\notin\tau\end{cases} \;=\; 0\,. \quad \text{(A.19)}$$

Wyznaczone reguły łatwo uogólnić do przypadku wielowymiarowej symetrycznej przestrzeni Focka $\mathcal{F}$ nad przestrzenią $\mathbb{C}^n\otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ rozpatrywanej w rozdziale trzecim.

Spis rysunków