

WYDATKI MIESZKANIOWE POLSKICH GOSPODARSTW DOMOWYCH W LATACH 2003–2013

WERONIKA WÓJCIACZYK¹

e-mail: weronikarusek@poczta.fm

ABSTRACT

W. Wójciaczyk. *Housing expenditures of Polish households in years 2003, 2008 and 2013*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2015, 56: 5–21.

In order to evaluate living conditions of particular households it is necessary to take into consideration both the physical characteristics of the premises occupied and the expenses for this purpose. Expenses distribution models can be used to describe the expenditures on the society level. Regression models explain the influence of particular independent variables on the level of housing expenditures. Between 2003 and 2013 housing expenses grew steadily, but the coefficient of variation remained stable, close to 100%. The Gini index of 0.4 indicates high inequality in expenses for housing and energy in the Polish society. The increase in housing expenses is associated with an increase in size of the place of residence, an increase in the number of household members and per capita income growth. Variables such as the size of the place of residence, per capita income and education of the household head have a greater impact on the amount of housing expenses for households that incur lower expenses for this purpose.

STRESZCZENIE

Na ocenę warunków mieszkaniowych gospodarstwa domowego składają się nie tylko fizyczne właściwości zajmowanego przez nie lokalu, ale także wydatki ponoszone na ten cel. W celu zbadania wydatków w skali całego społeczeństwa wykorzystać można modele rozkładu wydatków oraz modele regresji opisujące jakie zmienne niezależne wpływają na wysokość wydatków ponoszonych przez gospodarstwa domowe. W badanych latach 2003–2013 wydatki na utrzymanie mieszkania lub domu rosły systematycznie, przy czym współczynnik zmienności utrzymywał się na stałym, bliskim 100% poziomie. Wysoki był także poziom nierówności wydatków ponoszonych przez gospodarstwa domowe na pokrycie kosztów utrzymania mieszkania lub domu i nośniki energii, opisany współczynnikiem Ginniego. Wzrost wydatków mieszkaniowych jest związany ze wzrostem wielkości miejscowości zamieszkania, wzrostem liczebności gospodarstwa domowego oraz wzrostem dochodów per capita. Zmienne takie jak wielkość miejscowości zamieszkania,

¹ Doktorantka na Wydziale Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie

dochód per capita i wykształcenie głowy gospodarstwa domowego mają większy wpływ na wysokość wydatków mieszkaniowych w przypadku gospodarstw domowych, które ponoszą mniejsze wydatki na ten cel.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

housing expenditures, expenses for housing and energy, expenses distribution,
burr 3 distribution, quantile regression

wydatki mieszkaniowe, wydatki na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii,
rozkład wydatków, rozkład Burra 3, regresja kwantylowa

WSTĘP

Potrzeby mieszkaniowe należą do jednych z najważniejszych potrzeb ludzkich. Mieszkanie jest bowiem miejscem zaspokajania najbardziej podstawowych potrzeb biologicznych jednostki, jak również potrzeb wyższego rzędu: bezpieczeństwa, przynależności, a nawet samorealizacji — gdy realizowane są przy jego udziale aspiracje jednostki; zob. M. Maciejasz-Świątkiewicz, M. Palmer (2007), s. 208. Sposób zaspokajania tych potrzeb ma zasadniczy wpływ na odczuwany komfort życia. Z tego też powodu mieszkanie może być źródłem zadowolenia, kiedy odpowiada oczekiwaniom gospodarstwa domowego, albo źródłem frustracji, kiedy rzeczywista sytuacja nie przystaje do aspiracji rodziny. Ze względu na swoją wagę, kwestie mieszkaniowe znalazły nawet miejsce w polskiej konstytucji — Konstytucja RP (1997). Trzeba także podkreślić, że niezaspokojenie potrzeb mieszkaniowych ludności wywołuje liczne negatywne konsekwencje, wśród których najczęściej wymienia się: destabilizację rodzin, spadek liczby urodzeń oraz brak perspektyw rozwojowych dla ludzi młodych — Gorczyca (2002), s. 5. Na ocenę warunków mieszkaniowych gospodarstwa domowego składają się nie tylko fizyczne właściwości zajmowanego przez nie lokalu, ale także wydatki ponoszone na ten cel. Jeżeli koszt utrzymania mieszkania jest zbyt wysoki, to ogranicza on możliwości nabywania przez gospodarstwo domowe innych potrzebnych mu dóbr i usług. Sytuacja staje się szczególnie uciążliwa w przypadku, kiedy wydatki mieszkaniowe czynione są kosztem zakupu innych dóbr podstawowych, zwłaszcza takich jak żywność czy ochrona zdrowia. W przypadku polskich gospodarstw domowych udział wydatków ponoszonych w celu utrzymania mieszkania lub domu i zakup nośników energii, wśród wszystkich wydatków, jest znaczny, i w całym badanym okresie wynosił około 22%. Względne obciążenie jest większe w przypadku małych gospodarstw domowych, na przykład jednoosobowych, dla których wydatki mieszkaniowe stanowią blisko 30% wszystkich wydatków. Dla gospodarstw domowych liczących 5 lub więcej osób jest to niespełna 20%.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie metod statystycznych, które wykorzystać można w celu przeanalizowania zróżnicowania wydatków

ponoszonych na cele mieszkaniowe oraz pokazanie ich zastosowania w praktyce. W części aplikacyjnej wykorzystane zostały dane indywidualne zebrane przez GUS w toku prowadzenia *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych* w latach 2003, 2008 oraz 2013. Wybór taki podyktowany był chęcią zbadania sytuacji bezpośrednio przed przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej, zmian jakie dokonały się w ciągu pierwszych lat po akcesji oraz bieżącej sytuacji w kraju.

WYBRANE METODY ANALIZY WYDATKÓW MIESZKANIOWYCH

Na poziomie społeczeństwa rozkłady wydatków mają następujące właściwości: jednomodalność oraz prawostronną asymetrię. Prawostronna asymetria rozkładu oznacza, że w całej populacji więcej jest jednostek o wydatkach poniżej średniej niż powyżej niej; modalna rozkładu jest mniejsza od jego mediany, a ta z kolei od wartości przeciętnej; por. Kot (2000), s. 103–105. Na wydatki danego podmiotu wpływają przede wszystkim: wysokość jego dochodów oraz ceny dóbr, którymi jest zainteresowany. Duże znaczenie mają również charakterystyki społeczno-ekonomiczne, takie jak: przeciętna liczba osób w gospodarstwie domowym, aktywność zawodowa oraz przynależność do grupy społeczno-ekonomicznej; Podolec (1992), s. 62. Analizę rozkładu wydatków można wykonać wykorzystując rozkład Burra 3, który przyjmuje postać:

$$F(y) = [1 + e^{-(a+b\ln y)}]^{-c}. \quad (1)$$

Dystrybuanta w tym rozkładzie, zwanym też rozkładem Daguma, po przekształceniach przyjmuje postać:

$$F(y) = \frac{1}{[1 + e^{-(a+b\ln y)}]^c} = \frac{1}{[1 + e^{-a}y^{-b}]^c}, \quad (2)$$

gdzie $y > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Funkcja gęstości ma postać:

$$f(y) = \frac{c \cdot b \cdot e^{-(a+b\ln y)}}{y[1 + e^{-(a+b\ln y)}]^{c+1}}. \quad (3)$$

Funkcja Lorenza przyjmuje postać:

$$L(y) = I_x\left(c + \frac{1}{b}, 1 - \frac{1}{b}\right), \quad (4)$$

gdzie $I_x(p, q)$ to tak zwana niekompletna funkcja Beta obliczana w punkcie $x = [F(y)]^{1/c}$.

Momenty zwykłe rzędu r przyjmują postać:

$$m_r = B\left(1 - \frac{r}{b}, c + \frac{r}{b}\right) e^{-alb \cdot r \cdot c}, \quad (5)$$

gdzie $B(p, q)$ jest funkcją Beta Eulera. Wartość przeciętna $\mu = m_1$ jest równa:

$$\mu = B\left(1 - \frac{1}{b}, c + \frac{1}{b}\right) e^{-\frac{a}{b} \cdot c} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right) \Gamma\left(c + \frac{1}{b}\right)}{\Gamma(c)} e^{-\frac{a}{b}}, \quad (6)$$

gdzie $\Gamma(a)$ jest funkcją Gamma Eulera.

Kwantyle q_p rzędu p , $0 < p < 1$ można opisać wzorem:

$$q_p = [p^{-1/c} - 1]^{-1/b} e^{-alb}, \quad (7)$$

mediana jako kwantyl rzędu 0,5 jest równa:

$$Me = [2^{1/c} - 1]^{-1/b} e^{-alb}. \quad (8)$$

Natomiast modalna jest równa:

$$Mo = \left[\frac{(c+1) \cdot b}{b+1} - 1 \right]^{1/b} e^{-alb}. \quad (9)$$

Współczynnik Giniego G ma wzór:

$$G = \frac{\Gamma(c) \Gamma\left(2c + \frac{1}{b}\right)}{\Gamma(2c) \Gamma\left(c + \frac{1}{b}\right)} - 1. \quad (10)$$

Parametry rozkładu Burra 3 szacuje się wykorzystując metodę największej wiarygodności, o czym więcej w pracy Kota (2000), s. 121–125.

Do analizy wydatków ponoszonych przez gospodarstwa domowe na cele mieszkaniowe wykorzystać można także modele regresji. Parametry modelu regresji najczęściej szacuje się metodą najmniejszych kwadratów. W przypadku, kiedy wartość zmiennej objaśnianej uzależniona jest od wielu zmiennych objaśniających, konieczne jest zastosowanie modeli regresji wielorakiej. Ich konkretna postać związana jest z rodzajem zależności, które zachodzą pomiędzy zmiennymi objaśniającymi, a zmienną objaśnianą. Konstruując modele regresji często zwraca się uwagę na zagadnienie pojawiania się obserwacji odstających, to jest takich, które odbiegają od wzorca wyznaczonego przez większość elementów próby. Pojawienie się takich jednostek powoduje przesunięcie oszacowanego centrum i zwiększa oszacowanie rozrzutu. Często proponowanym wówczas rozwiązaniem jest usunięcie odstających obserwacji z analizowanego zbioru danych. Zastosowanie takiej procedury przysparza pewnych trudności,

gdyż konieczne jest podjęcie decyzji: czy usunięcie obserwacji odstającej jest uprawnione oraz czy obserwacja jest wystarczająco odstająca, aby zostać usunięta, a ponadto, czy obserwacja istotnie jest atypowa; w przeciwnym razie usunięcie jej spowoduje sztuczne ograniczenie zmienności danych; zob. Kosiorowski (2012), s. 21–30. Lepszym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie procedur odpornych, które pozwolą prowadzić analizę z uwzględnieniem obserwacji odstających poprzez właściwą ich kwalifikację i interpretację. Przykładem takiego podejścia jest wykorzystanie regresji kwantylowej. Pozwala ona na estymację zależności całego rozkładu zmiennej objaśnianej od zmiennych objaśniających. W tym przypadku badany jest związek między wielkością kwantyla wybranego rzędu a zmiennymi objaśniającymi; Nehrebecka, Widłak (2012), s. 101–102. Estymacja poszczególnych kwantyli pozwala na pełniejszy opis sytuacji zarówno w punkcie centralnym, jak i „ogonach” rozkładu, co jest szczególnie przydatne, gdy warunkowa dystrybuanta jest różnorodna i nie ma „standardowego” kształtu. Estymacja regresji na kwantylach jest semiparametryczna, a więc nie przyjmuje się założeń o typie rozkładu dla losowego wektora reszt w modelu. Jedynie w deterministycznej części modelowania przyjmowana jest parametryczna postać modelu. Ponieważ estymacja zawsze przebiega na całej próbie, obserwacje nietypowe (odstające) otrzymują niższe wagi, co niweluje ich wpływ na oszacowanie modelu. Jeżeli postać dystrybuanty jest znana, to kwantyl rzędu τ można policzyć korzystając ze wzoru:

$$\xi_{\tau} = F_y^{-1}(\tau), \quad (11)$$

gdzie:

ξ_{τ} — kwantyl rzędu τ ,

F — dystrybuanta zmiennej y .

Warunkowy kwantyl może być zdefiniowany jako:

$$\xi_{\tau}(X) = F_{y|x}^{-1}(\tau), \quad (12)$$

gdzie:

X — macierz zmiennych objaśniających,

y — wektor zmiennej zależnej.

Estymacja parametrów regresji dowolnego kwantyla polega na minimalizacji ważonej sumy wartości bezwzględnych reszt, przypisując im odpowiednie wagi:

$$\min_{\beta \in R^k} \sum_{i=1}^N \rho_{\tau}(|y_i - \xi_{\tau}(x_i, \beta)|), \quad (13)$$

gdzie:

$$\rho_{\tau} = \begin{cases} \tau z & \text{dla } z \geq 0 \\ (1 - \tau)z & \text{dla } z < 0 \end{cases}.$$

Estymatory błędów standardowych współczynników dla regresji kwantylowej uzyskuje się najczęściej za pomocą metody bootstrap, co jest związane z zagrożeniem tych modeli problemem heteroskedastyczności. W tej metodzie wielokrotnie losuje się, z powtórzeniami, próbki z próby obserwacji pobranej do badania i na tej podstawie wnioskuje się o całej zbiorowości. Na polskim gruncie analiza kwantylowa została już zastosowana do analizy zagadnień związanych z mieszkalnictwem w Warszawie; zob. Widłak, Nehrebecka (2012), s. 17–45.

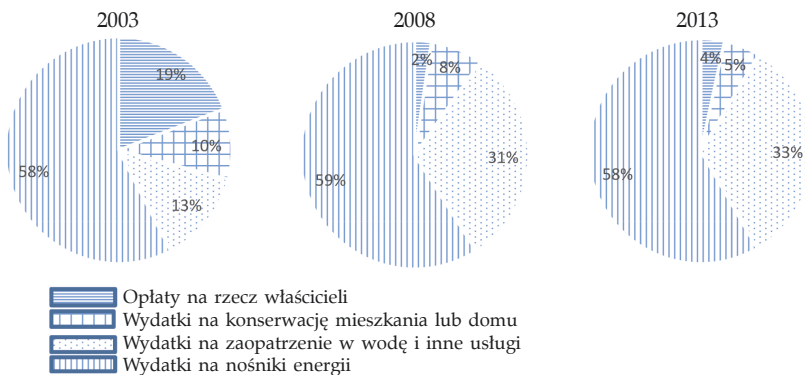
DANE I WYNIKI ESTYMACJI

Na potrzeby niniejszej analizy wykorzystano dane jednostkowe pochodzące z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych*, prowadzonych przez GUS w latach 2003, 2008 i 2013. Objęły one w kolejnych latach następującą liczbę gospodarstw domowych: 32488, 37358 oraz 37181. Wszystkie prezentowane w opracowaniu wyniki uzyskano, stosując wagi podane przez GUS. Ważenie, czyli zastosowanie odpowiedniego mnożnika dla każdej obserwacji, pozwala dopasować strukturę próby do rzeczywistej struktury badanej zbiorowości, a tym samym zwiększa poprawność wyciąganych wniosków.

Wydatki ponoszone na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii są dzielone w badaniach GUS na cztery podgrupy do których należą: opłaty na rzecz właścicieli, wydatki na konserwację mieszkania lub domu, wydatki na zaopatrywanie w wodę i inne usługi związane z zamieszkiwaniem oraz wydatki na nośniki energii. Udział wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii pozostawał w badanym czasie na podobnym poziomie — około 22%. Znacznym zmianom uległ natomiast udział poszczególnych podgrup ponoszonych wydatków. Zdecydowanie zmalał udział opłat na rzecz właścicieli: z 19,06% w 2003 roku do 3,37% w roku 2013. Zdecydowanie wzrósł udział wydatków ponoszonych na zaopatrzenie w wodę i inne usługi: z 13,28% w roku 2003 do 33,07% w roku 2013. Opisywane zmiany miały największą intensywność pomiędzy rokiem 2003 a 2008. Udział wydatków na nośniki energii był podobny w całym badanym okresie i oscylował około 58%. Na Rysunku 1 przedstawiono zmieniający się w czasie udział różnych rodzajów wydatków mieszkaniowych.

Trzeba zaznaczyć, że nie wszystkie gospodarstwa domowe ponoszą wydatki na cele mieszkaniowe. Brak takich wydatków może być na przykład skutkiem współzamieszkiwania jednego lokalu przez kilka gospodarstw domowych. Może się wtedy zdarzyć, że całość kosztów ponosi tylko jedno z nich. W kolejnych latach udział gospodarstw domowych ponoszących wydatki na cele mieszkaniowe rósł systematycznie i wynosił kolejno: 96,75; 98,29 oraz 99,15%. W tym samym czasie udział gospodarstw domowych posiadających dochody był prawie

stuprocentowy. Ze względu na charakter stosowanych modeli dalsza analiza prowadzona będzie wyłącznie dla gospodarstw domowych, które posiadają dochody oraz wydatki na cele mieszkaniowe.



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2013*.

Rysunek 1. Udział różnych grup wydatków mieszkaniowych w kolejnych badanych latach (w %)

Rozkład wydatków na cele mieszkaniowe zbadano w kolejnych latach wykorzystując rozkład Burra 3. W pierwszej kolejności zastosowano model uwzględniający wyłącznie wydatki ponoszone przez gospodarstwa domowe na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii. Wyniki estymacji metodą największej wiarygodności, parametrów rozkładu Burra 3 w kolejnych latach zebrano w tabeli 1, natomiast w tabeli 2 zebrano statystyki opisowe dla tych rozkładów. Na Rysunku 2 zaprezentowano wykresy rozkładu wydatków mieszkaniowych.

Średnia wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii rosła systematycznie i wynosiła w kolejnych latach: 415,34; 480,91 oraz 616,20 PLN. Połowa gospodarstw domowych wydawała na ten cel w badanym czasie co najwyżej 335,10; 378,80 oraz 492,45 PLN. Najczęstsza kwota wydatków to kolejno: 232,09; 272,55 oraz 366,54 PLN. Przeciętne zróżnicowanie wydatków na utrzymanie mieszkania rosło w badanym czasie od 386,80; poprzez 485,82 do 589,12 PLN, co w odniesieniu do poszczególnych średnich daje podobny współczynnik zmienności, oscylujący na poziomie bliskim 100%. Współczynnik ten pokazuje znaczną zmienność wydatków na cele mieszkaniowe w badanym czasie. Współczynnik Giniego dla badanej zbiorowości przyjmuje kolejno wartości: 0,41; 0,40 oraz 0,39, co pokazuje, że rzeczywiste nierówności wydatków zmniejszyły się nieznacznie w badanym czasie. Wartość współczynnika Giniego na poziomie około 0,4 oznacza również wysoki poziom nierówności w rozkładzie wydatków na cele mieszkaniowe.

Tabela 1

Wyniki estymacji parametrów rozkładu Burra 3 dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla gospodarstw domowych w latach 2003, 2008 i 2013

parametr	ocena	błąd statystyczny	wartość z	p
rok 2003				
a	-19,5135	0,203675	-95,81	0,0000
b	3,11135	0,0290497	107,1	0,0000
c	0,422986	0,00682452	61,98	0,0000
rok 2008				
a	-17,3749	0,15988	-108,7	0,0000
b	2,80296	0,0225109	124,5	0,0000
c	0,615667	0,00943888	65,23	0,0000
rok 2013				
a	-18,2835	0,165196	-110,7	0,0000
b	2,85450	0,0225807	126,4	0,0000
c	0,673408	0,0102705	65,57	0,0000

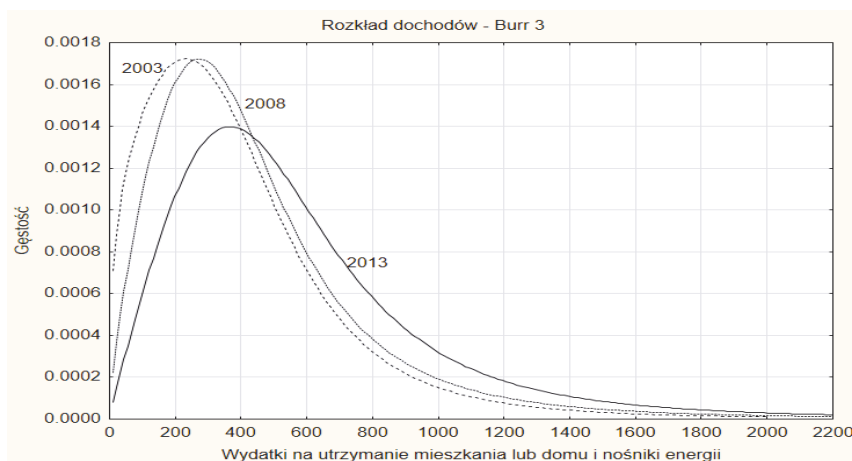
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

Tabela 2

Statystyki opisowe rozkładu Burra 3 dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla gospodarstw domowych w latach 2003, 2008 i 2013

statystyka	rok		
	2003	2008	2013
średnia	415,34	480,91	616,20
mediana	335,10	378,80	492,45
modalna	232,09	272,55	366,54
odchylenie standardowe	386,80	485,82	589,12
współczynnik zmienności	0,93	1,01	0,96
asymetria	0,47	0,43	0,42
współczynnik Giniego	0,41	0,40	0,39

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

Rysunek 2. Wykresy rozkładu Burra 3 dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla gospodarstw domowych w latach 2003, 2008 i 2013

W dalszej kolejności uzmienniono parametry modelu, uzupełniając go o dodatkowe zmienne takie jak: wykształcenie głowy gospodarstwa domowego, liczbę osób wchodzących w skład gospodarstwa domowego oraz klasę miejscowości zamieszkania². Uzmiennienie parametrów umożliwia szeroką i wieloaspektową analizę sytuacji mieszkaniowej. Poniżej zaprezentowano wybrane modele, przy czym zarówno zastosowane zmienne, jak i sposób ich wprowadzenia wybrano przeprowadzając wielokrotne próby, które w różny sposób wpływały na dopasowanie modelu do danych. Opisana modyfikacja w największym stopniu poprawiła to dopasowanie we wszystkich analizowanych latach. Kryterium Akaike obniżyło się w kolejnych latach w następujący sposób: dla 2003 roku: z 435404,9 do 429647,8; dla 2008 roku: z 514991,3 do 509805,1; dla 2013 roku z 532380,1 do 526837,9. Parametry stojące przy dodatkowych zmiennych wprowadzono do modelu w następujący sposób: a_1 dla klasy miejscowości zamieszkania gospodarstwa domowego (KLM), b_1 dla liczby osób wchodzących w skład gospodarstwa domowego (LOS), c_1 dla dochodów rozporządzalnych przypadających na osobę w gospodarstwie domowym (Doch). Wykorzystany model rozkładu Burra 3 przyjął więc następującą postać:

$$f(y) = \frac{(c_0 + c_1 \cdot \text{Doch}) \cdot (b_0 + b_1 \cdot \text{LOS}) \cdot e^{-((a_0 + a_1 \cdot \text{KLM}) + (b_0 + b_1 \cdot \text{LOS}) \ln y)}}{y [1 + e^{-((a_0 + a_1 \cdot \text{KLM}) + (b_0 + b_1 \cdot \text{LOS}) \ln y)}]^{c_0 + c_1 \cdot \text{Doch} + 1}}. \quad (14)$$

² Ze sposobami uzmienniania parametrów modeli dochodów i wydatków można zapoznać się szczegółowo korzystając z pracy pod redakcją S.M. Kota (1999).

Wyniki estymacji modelu uwzględniającego wszystkie dodatkowo wprowadzone zmienne przedstawiono w Tabeli 3.

Tabela 3

Wyniki estymacji parametrów rozkładu Burra 3 uzupełnione dodatkowymi zmiennymi dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla gospodarstw domowych w latach 2003, 2008 i 2013

parametr	ocena	błąd statystyczny	wartość z	p
rok 2003				
a_0	-18,7424	0,173836	-107,8	0,0000
a_1	0,322467	0,00688034	46,87	0,0000
b_0	3,06620	0,0253083	121,2	0,0000
b_1	-0,0592169	0,00138565	-42,74	0,0000
c_0	0,257770	0,00673950	38,25	0,0000
c_1	0,000474570	8,66739e-06	54,75	0,0000
rok 2008				
a_0	-17,9063	0,149084	-120,1	0,0000
a_1	0,213972	0,00544090	39,33	0,0000
b_0	3,00253	0,0221365	135,6	0,0000
b_1	-0,0690635	0,00115601	-59,74	0,0000
c_0	0,422102	0,00786607	53,66	0,0000
c_1	0,000283308	3,26057e-06	86,89	0,0000
rok 2013				
a_0	-19,1255	0,159711	-119,8	0,0000
a_1	0,222435	0,00581209	38,27	0,0000
b_0	3,08308	0,0228235	135,1	0,0000
b_1	-0,0671456	0,00104564	-64,21	0,0000
c_0	0,432267	0,00894720	48,31	0,0000
c_1	0,000266711	4,99116e-06	53,44	0,0000

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

W Tabeli 4 zebrano statystyki opisowe rozkładu Burra 3 dla czterech różnych, przykładowych gospodarstw domowych. Gospodarstwa te można scharakteryzować w następujący sposób:

- G1 — trzyosobowe gospodarstwo domowe, w którym dochód per capita równy jest pierwszemu kwartyłowi dla danego roku, co oznacza kolejno: 458,80; 680,96 oraz 871,00 PLN; gospodarstwo zamieszkuje na wsi;
- G2 — trzyosobowe gospodarstwo domowe, w którym dochód per capita równy jest pierwszemu kwartyłowi dla danego roku, a gospodarstwo zamieszkuje miasto od 200 do 499 tys. mieszkańców;
- G3 — trzyosobowe gospodarstwo domowe, w którym dochód per capita równy jest medianie dochodów per capita dla danego roku i wynosi kolejno: 688,96; 988,13 oraz 1277,60 PLN; a gospodarstwo zamieszkuje miasto od 200 do 499 tys. mieszkańców;
- G4 — jednoosobowe gospodarstwo domowe, w którym dochód per capita równy jest medianie dochodów per capita dla danego roku, a gospodarstwo zamieszkuje miasto od 200 do 499 tys. mieszkańców.

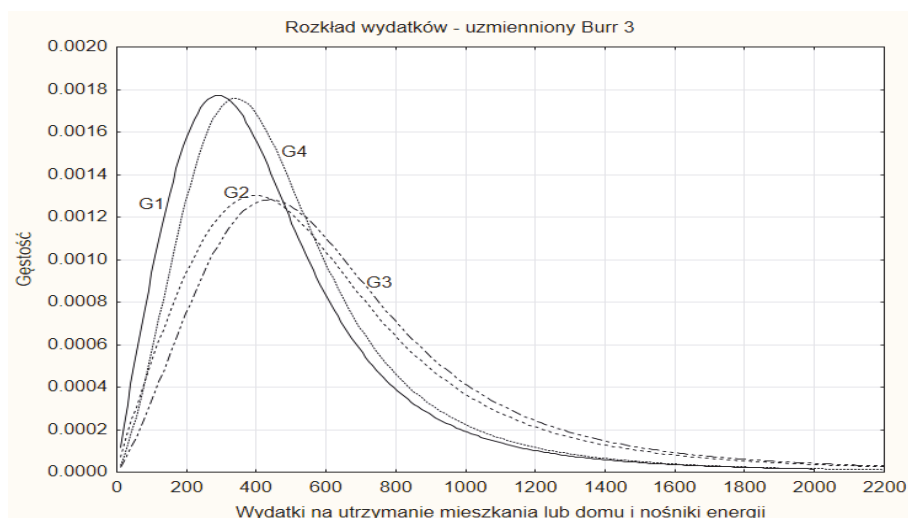
Średnia i mediana wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii rosły w badanym okresie w przypadku wszystkich gospodarstw domowych. W przypadku gospodarstw jednoosobowych, wzrost był szczególnie widoczny w drugiej połowie dziesięciolecia. W większości przypadków w badanym czasie rosła też kwota najczęściej wydawana na utrzymanie mieszkania przez gospodarstwa domowe. Jedyny wyjątek stanowią gospodarstwa trzyosobowe, zamieszkujące w miastach 200–499 tys. mieszkańców i o dochodach per capita równych wartości pierwszego kwartyła. W tym przypadku pomiędzy rokiem 2008 i 2013 zaobserwowano nieznaczny spadek modalnej wydatków. Współczynnik zmienności nieznacznie obniżył się w roku 2013 — w porównaniu do lat poprzednich, ale nadal utrzymuje się na bardzo wysokim poziomie. Jedynie w przypadku gospodarstw jednoosobowych jego wartość obniżyła się do 84%. Również współczynnik Giniego obniżył się w badanym dziesięcioleciu w przypadku wszystkich wybranych typów gospodarstw domowych. Można zauważyć, że wzrost wielkości miejscowości zamieszkania, jak również wzrost liczebności gospodarstwa domowego wiąże się ze wzrostem wartości przeciętnych wydatków mieszkaniowych. Również wzrost dochodów per capita w gospodarstwie domowym wiąże się ze wzrostem wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii, chociaż w tym przypadku zaobserwowana zmiana jest mniej widoczna. Wykresy rozkładu wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii w roku 2013 dla opisanych gospodarstw domowych zamieszczone zostały na Rysunku 3.

Tabela 4

Statystyki opisowe rozkładu Burra 3 uzupełnionego dodatkowymi zmiennymi dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla przykładowych gospodarstw domowych w latach 2003, 2008 i 2013

statystyka	G1	G2	G2	G3
2003				
średnia	285,39	444,51	497,23	385,16
mediana	223,83	348,64	396,56	313,31
modalna	150,32	234,13	289,41	236,63
odchylenie standardowe	290,77	452,90	480,29	346,54
współczynnik zmienności	1,02	1,02	0,97	0,90
asymetria	0,46	0,46	0,43	0,43
współczynnik Giniego	0,42	0,42	0,40	0,38
2008				
średnia	373,69	507,55	543,97	399,33
mediana	293,87	399,17	431,05	323,95
modalna	210,85	286,39	317,94	247,42
odchylenie standardowe	379,65	515,65	536,91	359,69
współczynnik zmienności	1,02	1,02	0,99	0,90
asymetria	0,43	0,43	0,42	0,42
współczynnik Giniego	0,40	0,40	0,39	0,37
2013				
średnia	484,37	659,59	711,30	525,35
mediana	388,66	529,25	574,41	432,87
modalna	290,73	395,90	438,40	339,65
odchylenie standardowe	456,24	621,27	649,10	441,43
współczynnik zmienności	0,94	0,94	0,91	0,84
asymetria	0,42	0,42	0,42	0,42
współczynnik Giniego	0,38	0,38	0,37	0,35

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

Rysunek 3. Wykresy rozkładu Burra 3 uzupełnione dodatkowymi zmiennymi dla wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii dla przykładowych gospodarstw domowych w roku 2013

Kolejny etap prowadzonej analizy stanowiło zbudowanie modeli regresji wydatków ponoszonych w celu utrzymania mieszkania lub domu i opłacenia nośników energii. W pierwszej kolejności dla każdego badanego roku zbudowano prosty model regresji, w którym wydatki te uzależnione były od dochodów per capita w gospodarstwie domowym oraz liczby osób wchodzących w skład gospodarstwa. Wyniki estymacji parametrów modeli regresji przedstawiono w Tabeli 5. Jak można zauważyć, we wszystkich badanych latach oba parametry są statystycznie istotne. Dodatkowo znaki przy ocenach parametrów oznaczają, że wraz ze wzrostem wartości odpowiedniej zmiennej objaśniającej wzrasta wartość zmiennej objaśnianej. Wzrost dochodów per capita o 1% wywoła w kolejnych latach wzrost wydatków na cele mieszkaniowe o 0,60%; 0,47% oraz 0,41%. Skorygowany współczynnik determinacji, określający jaką część zmienności zmiennej objaśnianej została wyjaśniona oszacowaną funkcją regresji nie jest wysoki i przyjmuje kolejno wartości 0,134; 0,110 oraz 0,110. Bardzo duża wartość statystyki F skłania do odrzucenia hipotezy o równości wszystkich parametrów wartości zero na akceptowalnie małym poziomie istotności.

Tabela 5

Oceny parametrów potęgowo–wykładniczego modelu regresyjnego wydatków na cele mieszkaniowe przy uwzględnieniu dochodów per capita i liczby osób w gospodarstwie domowym

parametr	ocena	błąd standardowy	t	p
2003				
const	1,44103	0,0619823	23,2490	<0,00001
lnDoch	0,595449	0,00858059	69,3949	<0,00001
LOS	0,125845	0,00349855	35,9706	<0,00001
$R^2 = 0,134$; $\bar{R}^2 = 0,134$; $F = 2411,249$ ($p < 0,000000$)				
2008				
const	2,24692	0,0551322	40,7552	<0,00001
lnDoch	0,466694	0,00738537	63,1917	<0,00001
LOS	0,138271	0,00299436	46,1772	<0,00001
$R^2 = 0,11018$; $\bar{R}^2 = 0,110$; $F = 2249,970$ ($p < 0,000000$)				
2013				
const	2,78623	0,052212	53,3639	<0,00001
lnDoch	0,411623	0,00677828	60,7267	<0,00001
LOS	0,148217	0,00294504	50,3278	<0,00001
$R^2 = 0,110$; $\bar{R}^2 = 0,110$; $F = 2253,416$ ($p < 0,000000$)				

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badań Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

Kolejnym etapem prowadzonej analizy było wprowadzenie do modelu dodatkowych zmiennych objaśniających, do których zaliczono, oprócz uwzględnionych już wcześniej dochodów per capita oraz liczby osób wchodzących w skład gospodarstwa domowego, klasę miejscowości zamieszkania, wiek oraz wykształcenie głowy gospodarstwa domowego. Zmienną objaśnianą pozostały wydatki na cele mieszkaniowe. Wprowadzenie dodatkowych zmiennych wpłynęło na poprawienie dopasowania hiperpłaszczyzny regresji do danych empirycznych, gdyż wielkość \bar{R}^2 wzrosła we wszystkich badanych latach, przyjmując kolejno następujące wartości: 0,200; 0,142 oraz 0,141. Dla każdego badanego roku opracowano zwykły model regresji oraz modele regresji kwantylowej dla pierwszego, drugiego i trzeciego kwartyła. Wyniki estymacji dla kolejnych lat zamieszczone zostały w Tabeli 6.

Tabela 6

Oceny parametrów potęgowo-wykładniczego modelu regresyjnego wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii w latach: 2003, 2008, 2013

zmienne	regresja		regresja kwantylowa tau=0.25		regresja kwantylowa tau=0.5		regresja kwantylowa tau=0.75	
	ocena	<i>p</i>	ocena	<i>p</i>	ocena	<i>p</i>	ocena	<i>p</i>
2003								
const	2,4704	<0,0001	2,5209	<0,0001	2,8187	<0,0001	3,0826	<0,0001
KLM	-0,1279	<0,0001	-0,1844	<0,0001	-0,1180	<0,0001	-0,0551	<0,0001
LOS	0,1378	<0,0001	0,1452	<0,0001	0,1540	<0,0001	0,1504	<0,0001
lnDoch	0,4368	<0,0001	0,4066	<0,0001	0,3981	<0,0001	0,3978	<0,0001
Wyksz	0,0399	<0,0001	0,04464	<0,0001	0,0300	<0,0001	0,0181	<0,0001
lnWiek	0,09435	<0,0001	0,07421	0,0001	0,0726	<0,0001	0,0567	0,0002
Akaike	75868,67		82038,54		72602,98		73903,19	
2008								
const	3,0342	<0,0001	2,96799	<0,0001	3,3725	<0,0001	3,3624	<0,0001
KLM	-0,0813	<0,0001	-0,1266	<0,0001	-0,0739	<0,0001	-0,0201	<0,0001
LOS	0,1512	<0,0001	0,1560	<0,0001	0,1547	<0,0001	0,1637	<0,0001
lnDoch	0,3680	<0,0001	0,3315	<0,0001	0,3367	<0,0001	0,3772	<0,0001
Wyksz	0,0286	<0,0001	0,0371	<0,0001	0,0230	<0,0001	0,0089	0,0019
lnWiek	0,0300	0,03489	0,0439	0,0066	6,81232e-05	0,9959	-0,0180	0,2006
Akaike	86145,09		91524,38		82830,54		87518,50	
2013								
const	3,6604	<0,0001	3,80402	<0,0001	4,08789	<0,0001	4,05283	<0,0001
KLM	-0,0812	<0,0001	-0,122	<0,0001	-0,0765	<0,0001	-0,0241	<0,0001
LOS	0,1574	<0,0001	0,1538	<0,0001	0,1563	<0,0001	0,1718	<0,0001
lnDoch	0,3310	<0,0001	0,2845	<0,0001	0,2963	<0,0001	0,3526	<0,0001
Wyksz	0,0196	<0,0001	0,0195	<0,0001	0,0146	<0,0001	0,0090	0,0015
lnWiek	-0,0086	0,5073	-0,0096	0,5227	-0,0509	0,0001	-0,1067	<0,0001
Akaike	82324,41		87004,00		78649,08		84316,67	

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z *Badai Budżetów Gospodarstw Domowych 2003, 2008 i 2013*.

Na tej podstawie wyciągnąć można kilka ciekawych wniosków na temat wpływu zmiennych objaśniających na wydatki mieszkaniowe gospodarstw domowych.

We wszystkich badanych latach wyraźnie widać, że im mniejsza miejscowość zamieszkania, tym niższe są wydatki gospodarstwa domowego ponoszone na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii. Korzystając z ocen parametrów dla modelu regresji kwantylowej, można zauważyć, że wpływ wielkości miejscowości zamieszkania zmniejsza się wraz ze zwiększaniem się wydatków na cele mieszkaniowe. To znaczy dla gospodarstw ponoszących mniejsze wydatki wielkość miejscowości zamieszkania ma większy wpływ na wysokość wydatków mieszkaniowych, niż dla gospodarstw ponoszących wyższe wydatki na ten cel.

Wydatki na cele mieszkaniowe zwiększają się wraz ze wzrostem liczebności gospodarstwa domowego. Wpływ liczebności gospodarstwa domowego na poziom wydatków mieszkaniowych jest porównywalny niezależnie od tego, jak dużo gospodarstwo domowe wydaje na ten cel. Jedynie w roku 2013 zaobserwowano wzrost wpływu liczebności gospodarstwa domowego wraz ze wzrostem wydatków.

Ocena parametrów dla modelu regresji kwantylowej pozwala stwierdzić, że od roku 2008 wysokość dochodu per capita ma większy wpływ na wydatki mieszkaniowe w gospodarstwach domowych, których wydatki na ten cel są wyższe. W roku 2003 nie zaobserwowano takiej zależności. Wręcz przeciwnie — wysokość dochodu per capita miała większe znaczenie w przypadku gospodarstw o najniższych wydatkach na cele mieszkaniowe.

Dla wszystkich badanych lat powtarza się zależność, że im niższe wydatki na cele mieszkaniowe, tym większy wpływ ma na nie poziom wykształcenia głowy gospodarstwa domowego. Wpływ wykształcenia na poziom wydatków na utrzymanie mieszkania lub domu maleje z czasem w obserwowanym dziesięcioleciu.

Do roku 2008, wiek był pozytywnie skorelowany ze wzrostem wydatków ponoszonych na utrzymanie mieszkania lub domu i nośniki energii, natomiast w roku 2013 tendencja odwróciła się. Gospodarstwa domowe, których głowa była starsza, ponosiły niższe wydatki.

WNIOSKI

W badanych latach 2003–2013 wydatki na utrzymanie mieszkania lub domu rosły systematycznie, przy czym współczynnik zmienności wydatków utrzymywał się na stałym, bliskim 100% poziomie. Wysoki był także poziom nierówności wydatków ponoszonych przez gospodarstwa domowe na pokrycie kosztów utrzymania mieszkania lub domu i nośniki energii, opisany współ-

czynnikiem Ginniego. Wzrost wydatków mieszkaniowych jest związany ze wzrostem wielkości miejscowości zamieszkania, wzrostem liczebności gospodarstwa domowego oraz wzrostem dochodów per capita. Zmienne, takie jak: wielkość miejscowości zamieszkania, dochód per capita i wykształcenie głowy gospodarstwa domowego mają większy wpływ na wysokość wydatków mieszkaniowych w przypadku gospodarstw domowych, które ponoszą mniejsze wydatki na ten cel.

BIBLIOGRAFIA

- Badanie Budżetów Gospodarstw Domowych* (2008), GUS, Warszawa.
- Badanie Budżetów Gospodarstw Domowych* (2013), GUS, Warszawa.
- Gorczyca M. (2002), *Polski dystans mieszkaniowy; przyczyny i warunki jego pokonywania w procesie integracji z Unią Europejską*, Główny Urząd Statystyczny, Zakład badań statystyczno-ekonomicznych, Warszawa, nr 282.
- Gospodarstwa domowe i rodziny* (2003), GUS, Warszawa.
- Kosiorowski D. (2012), *Wstęp do statystyki odpornej. Kurs z wykorzystaniem środowiska R*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Kot S.M. (2000), *Ekonomiczne modele dobrobytu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Kraków.
- Maciejasz-Świątkiewicz M., Palmer M. (2007), *Postawy gospodarstw domowych względem nieruchomości mieszkalnych*, *Zachowania rynkowe w teorii i praktyce*, red. D. Kopycińska, Katedra Nieruchomości, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Nehrebecka N., Widłak M. (2012), *Zróżnicowania cen mieszkań a ograniczenie budżetowe nabywców*, *Kwartalnik Nauk o Przedsiębiorstwie*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, Warszawa, nr 1.
- Podolec B. (1992), *Budżety gospodarstw domowych w Polsce 1979–1991*, Fundacja im. Friedricha Eberta, Warszawa.
- Ustawa z dnia 2.04.1997 roku, Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej (Dz.U. nr 78, poz. 483).

INCOME OF HOUSEHOLD MEMBERS IN POLAND

PAWEŁ ULMAN

Cracow University of Economics, Department of Statistics¹
e-mail: ulmanp@uek.krakow.pl

STRESZCZENIE

P. Ulman. *Dochody członków gospodarstw domowych w Polsce*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2015, 56: 23–34.

Poziom dochodów gospodarstw domowych wpływa nie tylko na zaspokojenie indywidualnych potrzeb ich członków, ale również zapewnia odpowiedni standard życia gospodarstwa. Z tego względu wielu badaczy wykazuje zainteresowanie analizami dochodów gospodarstw domowych. W artykule podjęto tematykę kształtowania się dochodów członków gospodarstw domowych. Na podstawie indywidualnych danych o dochodach możliwą staje się analiza struktury źródeł dochodów, kształtujących ogólny dochód badanej osoby.

Celem pracy jest prezentacja rozmiaru i źródeł dochodów ludności Polski w różnych przekrojach badanej zbiorowości. Dane statystyczne zostały zaczerpnięte z *Badania Budżetów Gospodarstw Domowych* przeprowadzonego przez GUS w 2011 r. Zbiór danych zawierał 37375 obserwacji gospodarstw i ponad 100 tys. rekordów, zawierających informacje o indywidualnych osobach. W celu porównania rozkładów dochodów wykorzystane zostały modele teoretyczne tych rozkładów z uzmiennionymi parametrami, w szczególności zastosowano rozkład Burra typu XII. Ponadto wykorzystano regresję kwantylową dla identyfikacji determinant dochodów indywidualnych członków gospodarstw domowych.

ABSTRACT

The size of households income determines not merely the degree of satisfaction of individual needs but also ensures households' adequate social status. It causes an interest many researchers in analysis of households income. The subject of the study is the individual income of the each member of household. When analysing household budgets, financial income from one month is assigned to individual persons. Thus, the level and structure of individual income sources may be identified. The income of single persons acquired from numerous sources forms their individual income.

¹ Publication was financed from funds allocated to Faculty of Management (Cracow University of Economics) within grants to maintain research capacity.

The paper aims to show the size and sources of the Polish people income in the different cross section of the analysed sample. The statistical information is derived from the household budget survey of 2011 that is conducted annually by the Central Statistical Office of Poland. The entire set of individual observations of households constitutes 37,375 records and in the case of household members — over 100,000 records. In order to compare income distributions use is made of theoretical models of income distribution with variable parameters. This approach allows to capture the impact of individual characteristics on the shape of the distribution of income and its descriptive statistics. The theoretical distribution Burr XII has been used as a model of income distribution. Moreover quantile regression model are used for identification of determinants of individual income.

SŁOWA KLUCZOWE — KEY WORDS

rozkład dochodów, model regresyjny, źródła dochodów indywidualnych
income distribution, regression models, sources of personal income

1. INTRODUCTION

Household income is one of the most common economic terms. Most often it is generated through basic human labour, which provides for personal needs. For this reason, it has generated much interest in analysing income levels and its variation from person to person. D. Ricardo and T. Malthus had begun discussions regarding the allocation of income among different members of society many years ago. D. Riccardo analysed the low level of minimum wage in comparison to the large surplus of labour force available. The risk of poverty was similarly interpreted by T. Malthus. While examining the relationship between income levels and population growth, he endorsed a limitation to the birth rate, justifying it with the inevitable expansion of poverty. E. Engel conducted research on household income in a special way, analysing statistical budgets of workers' families. He observed a pattern (known as Engel's law), stating that as household income increases, the proportion of income spent on food decreases, thus increasing the proportion of expenditures on durable goods and services. Further on, studies were conducted on various aspects of income distribution, an example of which may be measuring income inequalities throughout the community. As early as in 1898, von Bortkiewicz proposed the mean deviation as a measure of income inequality, while C. Gini (1912) presented one of the most popular measures of income inequality known as the the Gini coefficient. In parallel, methods of describing income distribution using mathematical functions were developed. The first one who used such a function for models of income distribution was V. Pareto. Since then, many measures have been proposed to characterise income distribution along with many functions to describe these distributions. Various theories were also developed which considered the origin and shaping of these distributions.

This paper presents the issue of income, the source and variation among members of Polish households. The analyses of income are often based on data related to household income, which introduces certain limitations. The characteristics of individual household members and their contribution to the general income of the household are thus omitted. The objective of this paper is to present the level of income and its variation in different social groups of Polish society. In particular, this differentiation has been analysed in terms of the factors which shape it, assuming that their effect is not identical in different income groups of the analysed individuals. The Polish Household Budgets Survey data were used for a statistical analysis. They are described in short in the latter part of the paper. The statistical methods used in this paper are also presented there. The third chapter presents the results obtained from the conducted analyses, followed by conclusions in the final part.

2. MATERIAL AND METHODS

Data was retrieved from household budgets survey (HBS) conducted by the Polish CSO in 2011 and was used for analysing individual income of household members. It is one of the basic surveys for public statistics in Poland. It has been conducted on a continuous basis since 1957, although its method and scope of execution has been altered several times since its beginning. In recent years, it has provided data sets for ca. 37,500 household and over 100,000 individuals. From among the total number of Polish household members, this paper takes into account those at least 18 years of age, bringing the number of total observations to 84,316. Data regarding the income and characteristics of these individuals were acquired in this way. The Burr type XII distribution (or simply the Burr distribution) will be used for analysing the income distribution of household members. It is one of the twelve distributions generated by the Burr distribution system, and is also known as the Singh–Maddala distribution; see Kleiber, Kotz (2003). The Burr type III distribution is another distribution in this family, also known under the name of the Dagum distribution. The paper by McDonald and Xu (1995) p. 139 — includes classification of most of the theoretical distributions used for modelling the empirical distribution of income (wages). Utilizing a tree diagram, they presented the dependencies between particular distributions, from the most general, 5-parametric beta distributions to one-parameter distributions, e.g. the χ^2 distribution. Basing on data related to family income, they concluded that the generalised beta type II distribution best approximates empirical distributions of income. The Dagum distribution proved to be slightly inferior according to the used statistical adjustments measures. Bandourian, McDonald and Turley (2003), p. 9 — reached similar conclusions adjusting various income distribution models for data from

23 countries obtained in several one-year periods. They found that the Dagum distribution is more favourable for 3-parametric distributions rather than when used for 2-parametric distributions. As compared with the generalised beta type II distribution, it is slightly worse according to the adjustments needed to the empirical data, whereas the density function charts of both distributions are almost identical. The Burr type III distribution (Dagum) and Burr type XII distribution (Singh–Maddala) are very similar (also due to the approximation possibilities of empirical distributions) models of income distribution and both were used numerous times to describe the shaping of income and wages as indicated by Kleiber Kotz (2003), p. 197–222. For this reason, it was decided to utilize one of these methods in this paper as a model of income distribution for individual household members in Poland.

The cumulative Burr type XII distribution function may be defined as follows:

$$F(y) = 1 - 1/[1 + e^{ay^b}]^c,$$

where y is income, and a , b , and c refer to distribution parameters which may be estimated by ML. Some of the theoretical distribution parameters may be made a function of the characteristics of the studied units (household members). By following this approach, it allows for a more thorough analysis to the changes in income distribution, depending on the characteristics of the individuals obtaining this income. As a result, we have a conditional income distribution in terms of individual characteristics. The selection of these “conditional” parameters is made on the basis of statistical criteria on adjusting the model to empirical data. Most often, reliable results can be obtained by making parameters a and b as a function of explanatory variables, which in turn allows for examine their impact on shaping all distribution descriptives.

To study the effect of various factors on shaping individual income of household members, regression modelling has been used based on so-called quantile regression. Although it was proposed by Koenker and Bessett in 1978 (1978), its popularity came into light in recent years; see Koenker (2000), Koenker, Hallock (2001), Koenker (2005). A quantile regression produces a more robust parameter estimation when compared to a traditional regression based on the expected value of the dependent variable. As a method of robust statistics, it takes into account the existence of non-typical observations (outliers); moreover, the problem of biased estimation disappears, which in traditional regression modelling could arise and exist when sub-samples were extracted on the basis of income criterion. In reference to a classic regression, the quantile approach allows for the expansion of the analysis of changes in the value of the dependent variable into many points (the quantiles of the dependent variable) and not only to the expected value of this variable. Estimation of

parameters of a quantile regression has a semi-parametric nature, which allows rejecting premises about the type of distribution for the residual vector in the model. In a general case, quantile regression parameters for any quantile are estimated by the minimization of the weighted sum of the value of absolute residues according to the formula:

$$\min_{\beta \in R^k} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(|y_i - f(x_i; \beta)|),$$

where:

$$\rho_{\tau}(z) = \begin{cases} \tau z & \text{for } z \geq 0 \\ (1 - \tau)z & \text{for } z < 0 \end{cases}.$$

The estimation of several quantiles each time for the whole sample results in several vectors of parameter estimates (β). In this way, non-typical (outliers) observations are assigned lower weights, which solve the problem of accounting for them in the model. Most often, standard error of estimates in quantile regressions are obtained using the bootstrap method according to the Gould approach; see Gould (1992), (1997).

3. RESULTS AND DISCUSSION

As it has already been reported above, results of empirical research presented below were obtained on the basis of household budget survey of 2011. These mostly refer to income of individual household members of at least 18 years of age. There were 84,316 observations. These individuals obtained income from the following sources: hired work (HW), self-employment other than a private farm in agriculture and free profession (SEMP), private farm in agriculture (AGR), property (PRO), pension of a property or land (REN), social insurance benefits (SIB), other social benefits (OSB) and other sources (OSC). Figure 1 presents the structure of sources of income of the studied individuals categorized by their age. The highest share in total income of the population is shaped by two sources: hired work and social insurance benefits. The former predominates for individuals below 60 years of age, whereas the latter refers to more elderly individuals. Income from self-employment other than a private farm in agriculture and free profession (SEMP) and private farm in agriculture (AGR) form a relatively unsubstantial share of total income. The highest value of this share in both cases is recorded for persons aged 25 to about 50. Thus, two sources of income are of basic significance for the income distribution of the Polish population: hired work and social insurance benefits, which provide almost 80% of the total income observed.

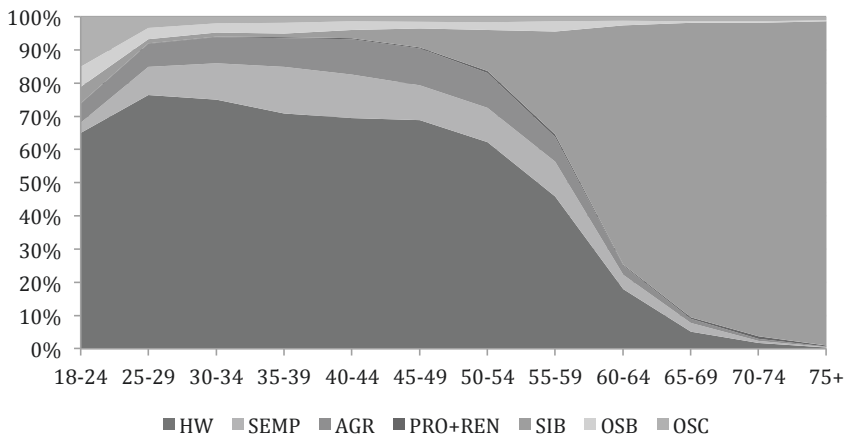


Figure 1. The structure of the individual income from different sources categorized by their age (in %) — Poland 2011

In discussion of the average level of income from the above sources, it should be mentioned that the highest average income is generally obtained by individuals aged 35–39. The main source of income is obtained through hired work and self-employment. A basic decrease in the average income from work and its share in total income is reported for individuals over the age of 50. These individuals often enjoyed the privilege of early retirement or were provided grounds to be awarded pension benefits, especially when a job is lost. Some research examples show that for elderly individuals, the loss of work results in a more difficult task of once again being employed. Thus, the alternative solution is the possibility of obtaining social benefits. Said individuals often decide to terminate professional activity entirely.

The level and structure of the obtained income also varies by gender. The average general income of men is 45% higher than that observed for women. In particular, income of women is clearly lower in both hired work and self-employment, while in the case, generally speaking, unearned sources women have got higher income on average. The share of income from work comprising of total income for men is almost 68%, while for women this share is about 55%. It was observed that women clearly have a higher share of income obtained from social insurance, which is mostly a result of a relatively larger number of women at or above pension age.

The size of the location where the studied individuals reside is directly connected with the variation of the average income. This income is mostly obtained through hired work and self-employment. Its share of total income amounted to 72% in cities and almost 51% in rural areas. The ratio of the average income for residents of large cities to those in the rural areas in Poland in 2011

was 1.46. The higher portions of total income for residents in rural areas were reported from agriculture activities (20.7%) and other social benefits (3.2%).

On average, married women report lower income than single women, whereas the situation in is reversed for men. The comparison of income for wives and husbands shows that the average income of men is significantly higher than that of women (by about 66%), while the structure of income sources remains quite similar for both genders. Men are slightly more prevalent regarding income obtained through self-employment, whereas women prevail from other social benefits. Studying the differentiation of income for men and women is an interesting research issue related to the changes in social roles of both men and women in modern societies. The analysis of this problem in the context of costs and benefits in households would allow for an assessment of economic effectiveness of the given family model. However, assessment of some elements of said costs and benefits is certainly difficult to say the least.

Figure 2 presents the Burr type XII density function for three cases: total income, income from hired work and income from social insurance benefits. The parameters of these distributions have been estimated with the ML using GRETL. All the estimates proved to be statistically significantly different from zero. The figure clearly shows the difference between the distribution of income from hired work and the distribution of income from social insurance. The distribution of income from hired work is skewed towards higher values and demonstrates more variation of income in reference to the distribution of income from social insurance. The distribution of income is largely determined by that obtained through hired work. That being said, its shape is similar to the distribution of income from this source rather than to that from social insurance. The proportion of income obtained from hired work out of total income is ca. 54%, whereas social insurance income is about 25%.

The above observations are confirmed in descriptives of the studied distributions (see Table 1): the average income from hired work is significantly higher than income from social insurance. It is interesting to note that the median and most frequent income shows a lesser variation in both absolute and relative views. This analysis indicates less inequality of income from social insurance than from hired work. All the utilized measures of income inequality confirm this observation. It is interesting to note that distribution of total income is most strongly differentiated due to the fact that the total income is obtained from various sources which contain their own individual internal level of inequality. Moreover, the summary of this income additionally generates a range of inequalities resulting from the differences in shaping income from various sources. Asymmetry of distributions is right-skewed, whereas a abbreviated measure of welfare (the Sen index) shows that income from hired work generates higher levels of welfare than income from social insurance.

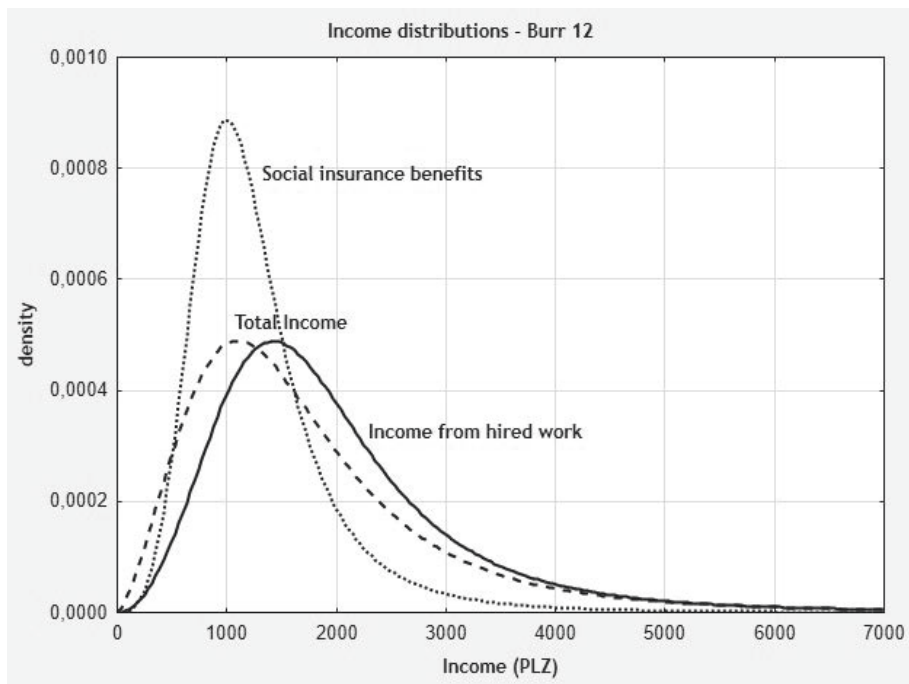


Figure 2. Income distributions (Burr XII) — selected sources of income

Table 1

Descriptives of the selected income distributions on the base Burr XII distribution (in Polish zł)

	Total income	Hired work income	Social insurance benefits
Average	1849.9	2046.4	1309.3
Median	1494.2	1748.3	1157.8
Mode	1100.5	1424.2	1001.0
Coefficient of variation	0.8612	0.6940	0.5772
Relative average deviation	0.2603	0.2202	0.1860
Skewness	0.4704	0.4382	0.4080
Gini	0.3675	0.3130	0.2656
Sen index	1170.0	1406.0	961.5

The discussion of the methods includes the comment that analysis of income distribution may be extended with the assumption that some parameters will become functions of characteristics of the analysed individual. It was decided that both parameters a and b will depend on: the level of education measured on four levels (basic, basic vocational, secondary and higher, with basic education used as the reference level); the place of residence of the analysed individual measured in three categories (large city, small and medium-size cities and villages, with individuals residing in rural areas used as the reference category); gender (a binary variable with female as the reference category); and the age of the analysed individuals in years. The procedure for estimating the parameters of the model would provide statistically significant values. Table 2 presents conditional characteristics of distribution of income from the sources researched earlier and income from self-employment depending on gender. It has been assumed that the analysed individual lives in a large city, has higher education and is 35 years old in the case of income obtained from work, and 70 years old in the case of income obtained from social insurance.

The obtained results confirm the differentiation of income for individual persons by gender, with the smallest range found in income from social insurance. On average the highest level of income applies to self-employed individuals. It is interesting to note that women in this case achieve an average income at the level similar to the average income of men obtained from hired work. The individuals obtaining income from self-employment are certainly characterized by the largest inequalities of income levels, which results in relative equalisation of the values of the Sen index between the incomes from both types of work. This index takes into consideration the average level of income and the level of income inequalities measured by the Gini coefficient. A growth in the value of the average increases the value of the Sen index, whereas a growth in the level of inequalities reduces the value of the said index.

Table 3 presents the results of estimating the quantile regression model for the natural logarithm of income from three sources: hired work, self-employment and social insurance. Three basic factors have been taken into account that mostly determine income from work, i.e. age, gender and level of education. For age, an additional variable has also been used — the square of age, with the objective of capturing non-linearity of income to age relationships according to the theory of wages and age profiles. It assumes that the average income from work (wages) increases with age up to a certain level and decreases in the case of older individuals. The gender variable is by default a binary variable with a female reference category. In order to describe the relationship of income and education, a binary variable set has been used (Educ2–Educ4) which refer to basic vocational, secondary and higher education, respectively. Basic education is the reference category.

Table 2

Descriptives of the selected conditional income distributions on the base Burr XII distribution

	Hired work income		Self-employment income		Social insurance benefits	
	Man	Woman	Man	Woman	Man	Woman
Average	2853.0	1968.9	3706.2	2822.9	2121.8	1901.7
Median	2534.4	1769.4	3001.0	2217.2	1954.9	1762.9
Mode	2142.6	1522.4	1934.4	1443.5	1776.2	1611.6
Coefficient of variation	0.5828	0.5499	0.8058	0.9000	0.4352	0.4175
Relative average deviation	0.2016	0.1925	0.2792	0.2862	0.1484	0.1441
Skewness	0.4272	0.4124	0.5933	0.5429	0.3743	0.3653
Gini	0.2867	0.2741	0.3907	0.4014	0.2127	0.2067
Sen index	2035.1	1429.2	2258.2	1689.8	1670.5	1508.6

The complete estimates of the parameters proved to be statistically significant even for the squared age variable, in the case of which the estimate for income from social insurance proved to be at a very low level. This shows that this income has almost a linear course in reference to age. It is also interesting to observe the levels of the constant value for various quantiles, especially in the case of income from self-employment. These values are clearly varied here, especially in the first and third quartiles. This situation indicates a high level of variation in income from this source, which is also found in Table 2. However, on the other hand, this variation is compensated with a higher positive effect of individual characteristics of the analysed individuals on income from self-employment in the regression model determined for the 25th quantile in reference to the 75th quantile model, which is expressed in estimates of parameters of these models.

In all cases, women obtain lower income. At the same time, the difference grows with an increase in income class from both hired work and social insurance. In the case of income from self-employment, the largest variation in income in terms of gender is found in the lowest income class. It is also interesting to note that a variation in income in this approach is not uniform in terms of the source of income. Women are often observed behind men in the case of income from self-employment and ahead for income from social insurance. The problem of income (wages) variation for men and women is one of more important research issues in which the possibility of discrimination of women is often analysed.

The education level of individual persons is an important factor that affects income. The results presented in Table 3 clearly show that income grows with the increase in the level of education. The most significant increases are observed

in the case of income from self-employment and, similar to that of the gender variable, decreases as the income class progresses. In the case of income from hired work and social insurance, the inter-quartile variation is relatively small. The above results show that variation in the total income of the society has different sources which generate inequalities in the distribution of income with varied strength. For this reason, changes in the structure of the sources of income may result in changes in the level of income inequalities for the total population, even when the level of inequalities generated in the distributions of income from individual sources does not increase.

Table 3

The outcomes of quantile regression for selected income

Income	Quantile	Const.	Age	sq Age	Sex	Educ2	Educ3	Educ4
Hired work	25th	4.6874	0.0971	-0.0011	0.2948	0.2376	0.4048	0.7519
	50th	5.3627	0.0761	-0.0009	0.3231	0.1470	0.3418	0.7099
	75th	5.5926	0.0749	-0.0008	0.3749	0.1409	0.3504	0.7843
Self em-employment	25th	3.2093	0.1333	-0.0015	0.4709	0.6677	0.8452	1.1531
	50th	4.5826	0.1034	-0.0012	0.3585	0.4654	0.6570	0.9406
	75th	5.6154	0.0833	-0.0010	0.3525	0.2575	0.4807	0.7998
Social insurance	25th	4.9727	0.0339	-0.0002	0.1418	0.1419	0.3554	0.6827
	50th	5.4350	0.0273	-0.0001	0.2257	0.1926	0.4071	0.6885
	75th	6.0891	0.0191	-0.0000	0.3010	0.1661	0.3593	0.6346

4. CONCLUSION

Research of social phenomena requires continuous actualization. This is due to dynamic changes in both the analysed phenomenon and the impact of the surroundings within which the phenomenon is analysed. Household income is such a phenomenon and has many research studies devoted to it. Despite this, its nature has not been thoroughly explained.

The paper presents the results of the research on the shaping of income of household members in Poland, whose level has significantly increased, especially after Poland joined the European Union. Income of the Polish population comes mostly from two sources: hired work (ca. 54%) and social insurance (ca. 25%). The largest average level of income from hired work was observed for persons

aged 35–39, whereas persons of over 60 years of age obtained their main source of income from social insurance. While analysing various social groups of individuals included in the study, income may be shown as differing in both the level and the structure of sources as a result of gender, place of residence and marital status. Studying the variation of income in different household types due to their demographic composition may bring about interesting observations in the context of evolving social roles of both men and women. However, such discussions would require special statistical research.

It is also interesting to note that the distribution of income from different sources differs not only with the level of average values, but also with the level of income inequality in these distributions. This then poses the question of the origins of income inequalities in the given society, which may in part be due to changes in the structure of income sources. Thus, assuming an increase in the number of elderly people in the society who receive income from social benefits, one may believe that the general level of income inequality will be lower due to a smaller variation in income from this source. On the other hand, these trends cannot be foreseen in research of social phenomena not only with certainty, but even with high probability.

The application of a quantile regression allowed finding the relationships between income from various income classes and the select characteristics of the studied individuals. It turns out that the effect of these characteristics is not uniform for individuals of different income levels.

The issues related to income in the population, although studied for years, continuously bring about many challenges and observations.

REFERENCES

- Gini C. (1912), *Variabilità e Mutabilità*, Tipografia di Paolo Cuppi, Bologna.
- Kleiber Ch., Kotz S. (2003), *Statistical Size Distribution in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New Jersey.
- McDonald J.B., Xu Y.J. (1995), *The Generalized Beta Distribution with Application*, *Journal of Econometrics*, 66, 133–152.
- Bandourian R., McDonald J.B., Turley R.S. (2003), *A Comparison of Parametric Models of Income Distribution Across Countries and Over Time*, *Estadística*, 55, 135–152.
- Koenker R., Bassett G. (1978), *Regression Quantiles*, *Econometrica*, 46 (1), 33–50.
- Koenker R. (2000), *Galton, Edgeworth, Frisch, and prospects for quantile regression in econometrics*, *Journal of Econometrics*, 95 (2), 347–374.
- Koenker R., Hallock K.F. (2001), *Quantile Regression*, *Journal of Economic Perspectives*, 15 (4), 143–156.
- Koenker R. (2005), *Quantile Regression*, Cambridge University Press.
- Gould W.W. (1992), *Quantile Regression with Bootstrapped Standard Errors*, *Stata Technical Bulletin*, 9, 19–21.
- Gould W.W. (1997), *Interquantile and Simultaneous-Quantile Regression*, *Stata Technical Bulletin*, 38, 14–22.

**ANALIZA CZASÓW TRWANIA POMIĘDZY
ZMIANAMI KIERUNKU CEN AKCJI
— WPŁYW UWZGLĘDNIENIA WEWNĄTRZDZIENNEJ
SEZONOWOŚCI NA RANKING MODELI ACD¹**

JUSTYNA BIAŁKOWSKA²

e-mail: justyna_bialkowska@dell.com

MATEUSZ PIPIEŃ

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych

e-mail: eepipien@cyf-kr.edu.pl

ABSTRACT

J. Białkowska, M. Pipień. *Analysis of duration between changes in direction of trend for the price processes — the impact of seasonal adjustment to explanatory power of a class of ACD models*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2015, 56: 35–80.

The main purpose of the paper was to investigate the properties of a particular type of price duration process, analysed on the field of modelling transaction data. We considered duration between changes in direction of trend for the price processes and consider the problem of stability of the relative explanatory power of a class of ACD models with respect to the seasonality adjustment.

We report model ranking on the basis of information criteria and discuss its sensitivity with respect to the seasonality adjustment procedure elaborated on the basis of nonparametric Nadaraya and Watson regression.

STRESZCZENIE

Przedmiotem badań są dane o wysokiej częstotliwości opisujące kształtowanie się czasu trwania zmiany kierunku cen akcji. Do analizy odstępów czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zdarzeniami transakcyjnymi, polegającymi na zmianie trendu cenowego akcji, wykorzystuje się modele warunkowego czasu trwania (ang. Autoregressive Conditional Duration, ACD). Jednym z celów niniejszej pracy jest zbudowanie rankingu modeli ACD ze względu na ich jakość dopasowania.

¹ Badania finansowane przez Narodowe Centrum Nauki w ramach grantu OPUS, numer grantu DEC-2013/09/B/H54/01945.

² Studentka Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

W artykule zbadano wpływ procedury odsezonowania na zmianę pozycji modeli w rankingu. W celu uwzględnienia efektu wewnątrzdziennej sezonowości zastosowano nieparametryczną regresję Nadaraya i Watsona z funkcją jądrową normalną. Aby potwierdzić poprawność zbudowanych rankingów dla danych odsezonowanych i tych bez efektu cykliczności, przeprowadzono weryfikację statystyczną przy pomocy testów t-Studenta oraz testu ilorazu wiarygodności.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

intraday seasonality, ACD models, modelling tick data

wewnątrzdzienne sezonowość, modele ACD, modelowanie danych transakcyjnych

1. WPROWADZENIE

Od ostatnich czterdziestu lat obserwuje się dynamiczny rozwój ekonometrii finansowej spowodowany przede wszystkim postępowaniem technologicznym i zwiększającą się dostępnością danych pochodzących z rynków finansowych. Dzięki automatyzacji systemów transakcyjnych zbiory danych, opisujące proces transakcyjny, stały się bardziej szczegółowe i jednocześnie łatwo osiągalne. Klasyczne podejście do badań w ekonometrii zakładało analizę danych o regularnych odstępach, np. szeregów obserwacji dziennych lub godzinowych, wykorzystywanych współcześnie w ekonometrii finansowej. Jednak powszechnie dostępne stały się bazy danych zawierające dane o wysokiej częstotliwości, czy tzw. dane tikowe. Dane te charakteryzują się nieregularnym rozmieszczeniem na osi czasu, odpowiadającym chwilom zajścia danego zdarzenia w procesie transakcyjnym. Mikrostruktura rynku określa zbiór cech charakterystycznych i mechanizmów rynku finansowego decydujących o tym w jaki sposób i na jakich warunkach zawierane są transakcje. Badanie mikrostruktury ma na celu uwzględnienie rzeczywistych warunków panujących na danej giełdzie, gdyż zastosowana architektura na rynku finansowym wpływa na własności pozyskiwanych danych, zwłaszcza danych o wysokiej częstotliwości. Do analizy danych tikowych stosuje się modele w czasie transakcyjnym.

Przedmiotem badań w artykule są dane o wysokiej częstotliwości, które opisują kształtowanie się czasu trwania zmiany kierunku cen akcji. Na uwagę zasługuje fakt, że analizy takiego zbioru danych rzadko występują w literaturze przedmiotu. Do analizy odstępów czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zdarzeniami transakcyjnymi, polegającymi na zmianie trendu cenowego akcji, wykorzystane będą modele warunkowego czasu trwania (ang. *Autoregressive Conditional Duration*). Modele ACD są obecnie podstawowym narzędziem ekonometrycznym wykorzystywanym do analizy intensywności transakcyjnej oraz badania efektów mikrostruktury rynku. Jednym z celów niniejszej pracy jest zbudowanie rankingu modeli ACD ze względu na ich jakość dopasowania do danych. Badania mają na celu wskazanie która specyfikacja modelu jest

najlepsza oraz jaki rozkład warunkowy należy wybrać. Kolejnym celem jest zbadanie wpływu odsezonowania danych na potencjalną zmianę pozycji modeli w rankingu. Do eliminacji efektu wewnątrzdziennej sezonowości zastosowana zostanie nieparametryczna regresja Nadaraya i Watsona z funkcją jądrową normalną. Aby potwierdzić poprawność zbudowanych rankingów dla danych odsezonowanych i tych bez efektu cykliczności, przeprowadzono weryfikację statystyczną przy pomocy testów *t*-Studenta oraz testu ilorazu wiarygodności.

W artykule opisano pojęcie mikrostruktury rynku jako podstawę badań nad naturą dynamiki danych transakcyjnych. Omówiono w tej kwestii stosowane mechanizmy na rynkach finansowych a w szczególności te, które zastosowano na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W dalszej części omówiono własności danych o wysokiej częstotliwości oraz metody pomiaru intensywności procesów transakcyjnych. W rozdziale 6 zawarto definicje modeli ACD i ich typy, sposoby estymacji parametrów zastosowanych modeli, opis kryteriów informacyjnych, na podstawie których budowane są rankingi, oraz zarys metody estymacji jądrowej — regresji Nadaraya–Watsona wykorzystanej do eliminacji efektu sezonowości danych. Zawarte w części empirycznej porównanie rankingów rozważanych modeli ukaże czy przeprowadzanie odsezonowania danych transakcyjnych jest konieczne, by poprawnie wnioskować o czasie trwania kierunku zmiany ceny.

2. MIKROSTRUKTURA RYNKU JAKO PODSTAWA BADAŃ NAD NATURĄ DYNAMIKI DANYCH TRANSAKCYJNYCH

Pojęcie mikrostruktury rynku związane jest z dziedziną nauk ekonomicznych zajmujących się procesami transakcyjnymi oraz ich wynikami, przy formalnie ustalonych regułach handlowych; O'Hara (1995). Mikrostrukturę giełdy można zatem zdefiniować jako zespół charakterystyk oraz mechanizmów, które wpływają na proces kształtowania się cen instrumentów finansowych, a także oddziałują na ustalenie warunków i czasu trwania zawarcia transakcji. Badanie mikrostruktury rynku stanowi obecnie dział empirycznych finansów analizujący proces transakcyjny, w którym nieobserwowalne potrzeby inwestorów odzwierciedlane są w cenach transakcyjnych i wolumenie; zob. Madhavan (2000). Klasyczne modele matematyczne opisujące formowanie się cen na rynkach finansowych nie uwzględniają szeregu czynników związanych ze strukturą organizacyjną lub techniczną, czy z obowiązującymi zasadami obrotu dóbr. Takie silne uproszczenia prowadzą do zniekształconego obrazu rynku, za czym idzie podejmowanie nietrafnych decyzji przez inwestorów. Analiza mikrostruktury ma na celu uwzględnienie rzeczywistego funkcjonowania rynku, pokrywa zatem wszystkie te zagadnienia i zjawiska, które są zanedbywane w modelach matematycznych.

Głównymi aspektami mikrostruktury rynku są przede wszystkim: jego płynność, głębokość i efektywność — Doman (2011). Płynność rynku określana jest jako natychmiastowa możliwość kupna lub sprzedaży przez gracza prawie każdej liczby akcji, przy czym mała liczba instrumentów może być zawsze sprzedana lub kupiona po cenie bardzo zbliżonej do aktualnej ceny rynkowej, natomiast duży pakiet akcji może być w długim okresie kupowany lub sprzedawany po cenach, których średnia jest zbliżona do ceny rynkowej. Głębokość rynku wiąże się z jego zdolnością do absorbowania dużych zleceń bez znaczącego wpływu na cenę. Efektywność rynku jest najczęściej analizowana pod kątem informacyjnym — rynek jest efektywny, gdy nowa informacja na temat danej spółki jest szybko i w sposób racjonalny całkowicie odzwierciedlana w cenach jej akcji. Rozwiązania dotyczące handlu stosowane na danym rynku wpływają na wymienione własności, a co za tym idzie na pozyskiwane z niego dane o wysokiej częstotliwości, dlatego też stanowią podstawę badań mikrostruktury rynku. W analizie procesu transakcyjnego należy również brać pod uwagę efekty mikrostruktury, takie jak niesynchroniczny handel czy asymetria informacji. Niesynchroniczny handel związany jest z tym, że transakcje czy zmiany cen instrumentów finansowych nie dokonują się w regularnych odstępach czasu, a także w tym samym momencie istnieje możliwość zawierania transakcji na tym samym instrumencie po różnych cenach. Asymetria informacji na rynku ma miejsce, ponieważ niektórzy inwestorzy oprócz publicznych informacji, które można pozyskać z obserwacji sytuacji na giełdzie, mogą mieć dostęp do prywatnych wiadomości o spółce, które dają im strategiczną przewagę nad resztą graczy.

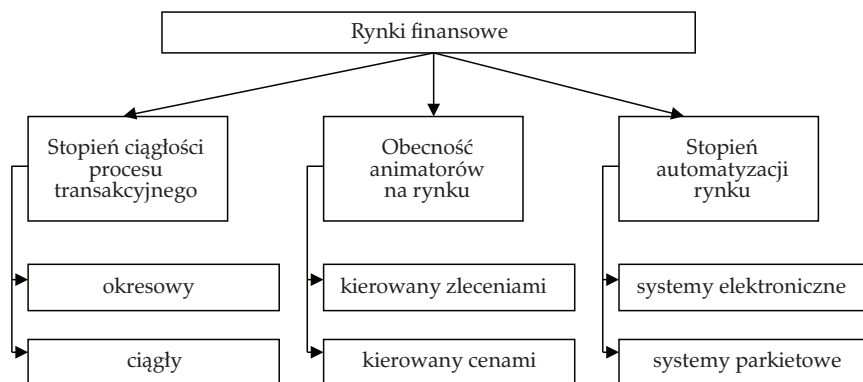
Mechanizmy, które zachodzą pomiędzy określonymi charakterystykami procesu wymiany dóbr determinowane są formalnymi regułami handlowymi oraz pewnymi czynnikami instytucjonalnymi. Zapoznanie się z stosowanymi rozwiązaniami na rynkach finansowych jest kluczowe w poprawnej analizie procesu transakcyjnego.

3. ARCHITEKTURA RYNKÓW FINANSOWYCH — PRZEGLĄD ROZWIĄZAŃ

Rynki finansowe można podzielić ze względu na panujące na nich reguły zawierania transakcji. Jedną z najpopularniejszych klasyfikacji dzieli je według następujących trzech kryteriów: stopień ciągłości procesu transakcyjnego, obecność animatorów na rynku oraz stopień automatyzacji i przejrzystość rynku; Madhavan (2000). Obrazuje to Rysunek 1.

Stopień ciągłości procesu zawierania transakcji wskazuje formalne ustalenia co do okresu, w którym obrót instrumentami finansowymi jest dozwolony. Istnieją dwa rodzaje rynków: okresowe i ciągłe. W rynkach okresowych, zwanych

także wywoławczymi, zawarcie transakcji odbywa się tylko w ściśle określonym momencie. Prowadzona jest na nich aukcja jednej ceny, której pierwowzorem była tzw. aukcja warlasowska. Schemat aukcji warlasowskiej jest następujący: w pierwszej fazie prowadzący aukcję zbiera od inwestorów oferty kupna i sprzedazy na dany instrument finansowy i publicznie ogłasza pierwszą cenę, po której możliwe jest zawarcie transakcji. W następnej fazie inwestorzy znając wycenę aukcjoneru dokonują rewizji ofert i ponownie składają zlecenia. Proces ten trwa do momentu, gdy już żaden inwestor nie będzie chciał rewidować swojej oferty — czyli ustalona zostanie cena równowagi, przy której popyt zrówna się podażą. Po ustaleniu tej ceny zawarcie transakcji staje się możliwe. Równowaga na rynku jest wynikiem przeprowadzania serii cząstkowych aukcji. Obecnie mechanizm aukcji warlasowskiej nie ma częstego zastosowania na rynkach finansowych, jednak procedury ustalania ceny otwarcia lub zamknięcia na niektórych giełdach wykorzystują w pewnym zakresie opisany schemat. Aukcje jednej ceny efektywnie agregują niejednorodną informację wprowadzaną przez uczestników procesu transakcyjnego, dlatego też stosowane są gdy występuje niepewność, co do prawdziwej wartości aktywa. Rynki wywoławcze uznawane są za systemy, które redukują koszty i szum informacyjny dzięki czemu działają w sposób stabilizujący ceny; zob. Doman (2011).



Źródło: opracowanie własne na podstawie Madhavan (2000).

Rysunek 1. Klasyfikacja rynków finansowych

Na rynkach ciągłych zawieranie transakcji możliwe jest nieprzerwanie w sposób ciągły, w godzinach otwarcia danego rynku. System taki sprawdza się w przypadku instrumentów finansowych o znacznej płynności, gdy częstotliwość dokonanych na nich transakcji jest wysoka. Aby system notowań ciągłych funkcjonował sprawnie potrzebna jest duża liczba aktywnych w tym samym momencie inwestorów, co skutkuje ograniczeniem wysokich skoków w cenach instrumentów. Przykładem rynku ciągłego jest otwarty całą dobę

międzybankowy rynek walutowy. Charakterystyczne dla tego systemu jest to, że małe transakcje zawierane są w nim automatycznie, natomiast ceny dużych pakietów instrumentów finansowych są negocjowane telefonicznie. Niewątpliwą zaletą rynków ciągłych jest fakt, że zlecenia realizowane są natychmiast, kiedy jest to możliwe, oraz, że proces cenotwórczy może być obserwowany przez graczy na bieżąco. Współcześnie rynki na świecie łączą te dwa sposoby zawierania transakcji. Często dla systemów notowań ciągłych stosuje się aukcję jednej ceny po to, by ustalić cenę otwarcia lub zamknięcia rynku, a także w przypadku, gdy rynek wznawia pracę po okresie zawieszenia albo znacznego spadku aktywności.

Kryterium obecności animatorów na rynku dzieli systemy transakcyjne na dwa rodzaje: rynki kierowane cenami i rynki kierowane zleceniami. Na rynkach kierowanych cenami, zwanych również rynkami dealerskimi, główną rolę odgrywa *market maker* — specjalista, którego podstawową funkcją jest „tworzenie” rynku instrumentów finansowych. *Market maker* realizuje tę funkcję przede wszystkim poprzez kwotowanie cen kupna (*bid*) i sprzedaży (*ask*), po których inwestorzy będą realizować transakcje. Nazywany jest on także dostawcą płynności, gdyż celem jego działalności jest utrzymywanie jak najwyższego poziomu płynności instrumentów, czyli zapewnienie możliwości ciągłego zawierania transakcji. Charakterystyczne dla rynku dealerskiego jest to, że gracze handlują tylko z *market makerem* po ustalonych przez niego cenach — nie mają możliwości dokonywania transakcji bezpośrednio między sobą. *Market maker* zawiera transakcje na własny rachunek, naraża się zatem na ryzyko zapasu, powstałego między momentem kupna i sprzedaży instrumentu finansowego i związanego z ewentualnym spadkiem wartości danego aktywa. Rekompensatą i zarazem głównym źródłem dochodu *market makera* jest tzw. *bid-ask spread*, czyli różnica pomiędzy kwotowanymi cenami kupna i sprzedaży. Rynki kierowane cenami wyróżniają się tym, że w razie nagłego zapotrzebowania na płynność klienci nie narażają się na ryzyko niezrealizowania transakcji — Bień (2005).

Rynki kierowane zleceniami różnią się od dealerskich przede wszystkim tym, że nie występuje na nich figura *market makera*. Mogą jednak być obecni animatorzy rynku, którzy spełniają funkcję upłynniania rynku, czyli zobowiązują się do sprzedaży instrumentów, na które jest popyt, oraz kupna sprzedawanych przez inwestorów pozycji. Oferty składane przez graczy kojarzone są bezpośrednio, następnie zostają one wysyłane za pośrednictwem domów maklerskich do realizacji. Ceny, po których dokonywane są transakcje, ustalone zostają w chwili pojawienia się oferty albo z pewnym opóźnieniem, zależnie od sytuacji i typu zlecenia.

Na rynku tym istnieją różne rodzaje zleceń, ponieważ inwestorzy mogą kłaść nacisk na rozmaite aspekty realizacji transakcji. Można zatem wyróżnić zlecenia z limitem ceny oraz zlecenia bez limitu ceny.

Zlecenia z limitem ceny charakteryzują się tym, że inwestor określa cenę, po jakiej jest gotowy zrealizować transakcję. Gdy chce kupić dany instrument finansowy precyzuje ile jest w stanie najwyżej za niego dać, natomiast w przypadku sprzedaży — wyznacza minimalną cenę jaką chce uzyskać za ten instrument. Kształtują one zatem *bid-ask spread*. Zlecenie jest realizowane w sytuacji gdy zaistnieje zgodność cen przeciwstawnych zleceń. Oznacza to, że inwestor jest pewny ceny, jednak nie będzie wiedział kiedy dokładnie jego zlecenie zostanie zrealizowane. Zlecenie z limitem uzyskuje status oczekującego, dopóki nie pojawi się przeciwstawna oferta — jest niejako „zamrożone”, gdyż jego charakterystyki nie będą dostosowywać się do napływającej na rynek informacji. W przypadku wystąpienia paru ofert z tym samym limitem ceny wykorzystywany jest priorytet czasu, czyli zlecenie, które pojawiło się najwcześniej, realizowane jest najpierw.

Zlecenia bez limitu ceny składane są przede wszystkim, gdy inwestorowi zależy na szybkiej realizacji transakcji. Transakcje zawierane są natychmiast, jednak z racji tego, że cena nie jest w nich sprecyzowana, gracze narażeni są na ryzyko kursu transakcji. Inwestor musi mieć świadomość, że po wysłaniu oferty na rynek cena realizacji transakcji może się zmienić na niekorzyść tuż przed sfinalizowaniem zlecenia. Można wyróżnić dwa rodzaje zleceń bez limitu ceny: zlecenia po cenie rynkowej i zlecenia po każdej cenie. Zlecenie po cenie rynkowej dokonuje się bezpośrednio po jego złożeniu, z najlepszą oczekującą ofertą, która jest do niego przeciwstawna — a zatem po najlepszej cenie rynkowej. Jeśli zlecenie nie jest realizowane w całości, pozostała część przechodzi automatycznie na zlecenie z limitem ceny, która odpowiada cenie poprzedniej transakcji. Z kolei zlecenie po każdej cenie realizowane jest po kursie, który aktualnie obowiązuje na rynku. Zawsze musi być ono zrealizowane w całości — Bień (2005).

Ostatni wymiar dotyczący rozważanych rozwiązań instytucjonalnych na rynku obejmuje jego stopień zautomatyzowania. Główną funkcją rynku zawsze było umożliwienie i ułatwienie jego uczestnikom spotkania się i dokonania transakcji, jednak na przestrzeni lat metody prowadzące do sfinalizowania wymiany handlowej ulegały znacznym zmianom. Obecnie na rynkach finansowych wyróżnić można systemy zautomatyzowane oraz systemy parkietowe. Rynki z elektronicznym zawieraniem transakcji charakteryzują się tym, że inwestorzy nie kontaktują się ze sobą, a proces transakcyjny przeprowadzany jest przez systemy komputerowe realizujące napływające zlecenia. Aktualnie prawie wszystkie rynki korzystają z tego rozwiązania dzięki jego licznym zaletom. Jeśli jest to możliwe, zlecenia realizowane są natychmiastowo, a obrót instrumentami finansowymi jest efektywniejszy, gdyż rośnie wydajność realizowanych transakcji i maleją ich koszty, przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka błędów operacyjnych popełnianych przez człowieka. Systemy w pełni zautomatyzowane

wane występują przede wszystkim na rynkach kierowanych zleceniami, choć na rynkach dealerskich także wprowadza się rozwiązania elektroniczne.

Systemy parkietowe natomiast cechują się tym, że zawarcie transakcji następuje za pośrednictwem maklera, który jest fizycznie obecny na parkiecie giełdy. Maklerzy negocjują jak najlepsze warunki realizacji transakcji dla swoich klientów (inwestorów).

Dzięki automatyzacji wymiany handlowej i sieciom teleinformatycznym, inwestorzy z całego świata mają możliwość zdalnego dostępu do informacji dotyczących procesu transakcyjnego i cenowego na danym rynku. Szczegółowość tych danych określa stopień przejrzystości rynku. Przejrzystość rynku oznacza, że gracze mają dostęp do informacji o przebiegu handlu na giełdzie; Doman (2011). Informacje te mogą dotyczyć danych, które są dostępne przed zawarciem transakcji, a więc aktualnej sytuacji na rynku. Są to na przykład: oferowane ceny i wolumeny zleceń, tożsamość inwestorów, wiadomości o notowanych spółkach. Drugi typ informacji, które gracz może przyswoić dotyczy już przeprowadzonych transakcji — wielkość i kierunek zrealizowanych zleceń czy personalia inwestorów; zob. Madhavan (2000). Często uważa się rynek za przejrzysty, gdy można obserwować strumień zleceń, czyli wielkość, kierunek i moment pojawiania się zleceń, typ zlecenia, czas jego realizacji. Ważnym aspektem jest także informacja dla kogo udostępniane są te dane i w jakim zakresie. Przejrzystość rynku ma duże znaczenie, gdyż wpływa na strategie inwestycyjne graczy, a co za tym idzie — na proces kształtowania się cen. Rynki kierowane cenami mają stosunkowo niską przejrzystość, natomiast kierowane zleceniami uznaje się za przejrzyste zarówno w zakresie informacji dostępnych przed- jak i po zawarciu transakcji.

Przejrzystość rynku daje inwestorom możliwość obserwacji sytuacji na rynku, jednak dostęp do informacji jest niesymetryczny. Istnieje naturalny podział inwestorów na: poinformowanych i płynnościowych; Doman (2011). Decyzje inwestorów poinformowanych opierają się na ocenie fundamentalnej wartości instrumentu, na podstawie prawidłowo wyciągniętych wniosków z informacji prywatnych lub publicznych. Inwestorzy płynnościowi natomiast nie mają dostępu do informacji lub nie potrafią jej wykorzystać, albo muszą zawierać transakcje z przyczyn płynnościowych. Poinformowani inwestorzy są bardzo ważni na rynku — dzięki ich aktywności cena instrumentu finansowego staje się informacyjna. Gdy oceniają jego cenę jako niedoszacowaną, to dokonują kupna tego instrumentu, natomiast gdy uznają ją za przeszacowaną, to go sprzedają. W ten sposób popychają cenę danego instrumentu do jej wartości fundamentalnej. Niepoinformowani podejmują decyzje, które umożliwiają realizację zleceń złożonych przez poinformowanych i w ten sposób wspierają płynność. Zakłada się, że niepoinformowani inwestorzy wchodzą na rynek w sposób losowy³. Poinformowani zaś tylko wtedy, gdy pojawi się

³ Poddany rozkładowi Poissona.

prywatna wiedza, sygnał. Specjaliści rynkowi powoli przyswajają prywatną informację, poprzez obserwację przepływu zleceń i zgodnie z tym dostosowują ceny. Poinformowani inwestorzy będą dokonywać transakcji tak długo jak ich informacja ma jakąś wartość (zanim specjaliści się jej nauczą). Stąd można zaobserwować grupowanie się intensywności transakcji po zdarzeniu pojawienia się informacji, gdyż wtedy zwiększa się liczba inwestorów poinformowanych; zob. Engle, Russel (1998).

4. MECHANIZMY TRANSAKCYJNE STOSOWANE NA GPW W WARSZAWIE

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. (GPW) rozpoczęła swą działalność 16 kwietnia 1991 roku jako jednoosobowa spółka Skarbu Państwa. Obecnie jest ona największą krajową giełdą instrumentów finansowych w Europie Środkowej i Wschodniej, uznawana jest także za jedną z najszybciej rozwijających się giełd w Europie. Przedmiotem jej funkcjonowania jest organizowanie oraz promowanie publicznego obrotu papierami wartościowymi, a także upowszechnianie informacji z rynku. Giełda zapewnić ma zatem koncentrację w jednym miejscu i czasie ofert kupujących i sprzedających w celu wyznaczenia kursu i realizacji transakcji. *Misją GPW jest kontynuacja budowy polskiego rynku kapitałowego i wzmocnienie polskiej gospodarki przez zapewnienie, aby GPW była mechanizmem służącym w jak największym stopniu mobilizacji kapitału dla przedsiębiorstw. Jednocześnie GPW powinna osiągać wskaźniki ekonomiczne satysfakcjonujące akcjonariuszy GPW i pozwalające jej plasować się lepiej na tle innych podobnych giełd, działających na rynkach wschodzących* (raportroczny2012.gpw.pl, odczyt z dn. 14.05.2014 r.). Tabela 1. ukazuje, jak w przeciągu kilku lat zmieniały się podstawowe charakterystyki giełdy.

Tabela 1

Podstawowe statystyki GPW

Rok	Kapitalizacja spółek krajowych (mln zł)	Liczba spółek	Obroty akcjami (mln zł)
2013	593 464,45	450	256 147,00
2012	523 390,23	438	202 880,00
2011	446 151,22	426	268 139,00
2010	542 646,12	400	234 288,00
2009	421 178,00	379	175 943,00

Źródło: opracowanie własne na podstawie www.gpw.pl (odczyt z dn. 14.05.2014 r.).

Podstawy prawne GPW obejmują 5 dokumentów: kodeks spółek handlowych, ustawa o obrocie instrumentami finansowymi, ustawa o ofercie publicznej, warunkach wprowadzania instrumentów finansowych do zorganizowanego systemu obrotu oraz o spółkach publicznych, statut Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. oraz Regulamin Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A.

GPW prowadzi rynek regulowany dla akcji i instrumentów pochodnych, alternatywny rynek akcji dla spółek wzrostowych — NewConnect, rynek przeznaczony dla emitentów obligacji korporacyjnych i komunalnych — Catalyst, a także rynek energii. Z dniem 23 czerwca 2008 roku na GPW wprowadzono Program Wspierania Płynności, który powstał z myślą o spółkach cechujących się niską płynnością, a jego celem jest poprawa płynności obrotu akcjami oraz polepszenie komunikacji z inwestorami danej spółki. 9 listopada 2010 r. GPW stała się spółką publiczną notowaną na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

GPW jest zautomatyzowanym rynkiem kierowanym zleceniami — kursy poszczególnych instrumentów finansowych są ustalane na podstawie zleceń kupujących i sprzedających. Oznacza to, że w celu ustalenia ceny instrumentu sporządza się zestawienie zleceń zawierających dyspozycje kupna i sprzedaży. Kojarzenia tych zleceń dokonuje się według ściśle określonych na giełdzie zasad, zaś realizacja transakcji odbywa się w trakcie sesji giełdowych. Obrót instrumentami finansowymi odbywa się w systemie notowań jednolitych i ciągłych.

W systemie ciągłym notowane są akcje spółek o najwyższej płynności, jak i również: obligacje, opcje, certyfikaty inwestycyjne, kontrakty terminowe, jednostki indeksowe, ETF-y i warranty. Harmonogram sesji giełdowej w tym systemie przedstawia Tabela 2⁴.

W systemie kursu jednolitego dokonuje się obrotu akcjami, których płynność jest stosunkowo niska. Notowania te bazują na procedurze tzw. fixingu — jest to określenie ceny papieru wartościowego w oparciu o zlecenia, które zostały złożone przed rozpoczęciem notowań. Tabela 3. prezentuje obowiązujący harmonogram sesji giełdowej notowań jednolitych.

Poprzednim systemem komputerowym, w którym prowadzone były notowania na GPW, był system transakcyjny WARSET wprowadzony w listopadzie 2000 roku. Był on modyfikacją i adaptacją do polskich warunków systemu NSC giełdy paryskiej. Zapewniał pełną automatyzację procesu transakcyjnego, a także zdalny dostęp do systemu obrotu instrumentami finansowymi oraz informacji o sytuacji na rynku dla inwestorów. Od 15 kwietnia 2013 roku warszawska giełda funkcjonuje w oparciu o nowy system transakcyjny UTP (*Universal Trading Platform*), stworzonego przez NYSE Technologies. Tę samą platformę

⁴ Zamieszczono harmonogram sesji z roku 2009, ponieważ analiza empiryczna niniejszej pracy została przeprowadzona na danych z tego roku.

Tabela 2

Harmonogram sesji giełdowej na rynku kasowym w systemie notowań ciągłych

Rok 2009		Rok 2014	
8.00–9.00	Przyjmowanie zleceń na otwarcie	8.30–9.00	Faza przed otwarciem
9.00	Faza otwarcia (określanie kursu na otwarciu)	9.00	Faza otwarcia (określanie kursu na otwarciu)
9.00–16.10	Faza notowań ciągłych	9.00–16.50	Faza notowań ciągłych
16.10–16.20	Przyjmowanie zleceń na zamknięcie	16.50–17.00	Faza przed zamknięciem
16.20	Faza zamknięcia (określenie kursu na zamknięciu)	17.00	Faza zamknięcia (określenie kursu na zamknięciu)
16.20–16.30	Faza dogrywki	17.00–17.05	Faza dogrywki

Źródło: opracowanie własne na podstawie www.gpw.pl (odczyt z dn. 14.05.2014 r.).

Tabela 3

Harmonogram sesji giełdowej w systemie notowań jednolitych

Rok 2014	
8.30–11.00	Faza przez otwarciem
11.00	Faza otwarcia (określanie kursu jednolitego)
11.00–11.30	Faza dogrywki
11.30–15.00	Faza przez otwarciem
15.00	Faza otwarcia (określanie kursu jednolitego)
15.00–15.30	Faza dogrywki
15.30–17.05	Faza przez otwarciem

Źródło: opracowanie własne na podstawie www.gpw.pl (odczyt z dn. 14.05.2014 r.).

obrotu stosują giełdy grupy NYSE Euronext z siedzibami w Nowym Jorku, Paryżu, Lizbonie, Amsterdamie i Brukseli, jak również wiele rynków giełdowych. W porównaniu z WARSETEM, UTP jest znacznie szybszy, bardziej wydajny, skalowalny i ma większą przepustowość, co w praktyce oznacza możliwość obsługi kilkadziesiąt razy większej liczby zleceń w danej jednostce czasu. Podczas gdy w poprzednim systemie możliwe było zrealizowanie 850 zleceń w ciągu sekundy, UTP daje możliwość przeprowadzenia około 20 tysięcy zleceń na sekundę. UTP otwiera polski rynek kapitałowy na nowe kategorie graczy —

w tym globalne firmy inwestycyjne, które stosują techniki handlu algorytmicznego. Dzięki wprowadzeniu UTP znacznie wzrosło zróżnicowanie możliwości inwestycyjnych, które oferuje GPW. Uruchamiane są kolejne segmenty rynku instrumentów pochodnych i nowe klasy aktywów, które wcześniej nie mogły być wprowadzane na rynek przez ograniczenia technologiczne poprzedniego system (www.gpw.pl, odczyt z dn. 14.05.2014 r.).

Poziom przejrzystości na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie jest wysoki, zarówno w przypadku transparentności przed transakcją jak i po. Członkowie i inwestorzy mają pełny dostęp do książki zleceń. System transakcyjny daje możliwość pozyskania szczegółowych informacji o obrocie instrumentów finansowych. Zachowana jest jednak anonimowość dostarczycieli płynności i graczy na giełdzie; zob. Doman (2011).

5. METODY POMIARU INTENSYWNOŚCI PROCESÓW TRANSAKCYJNYCH

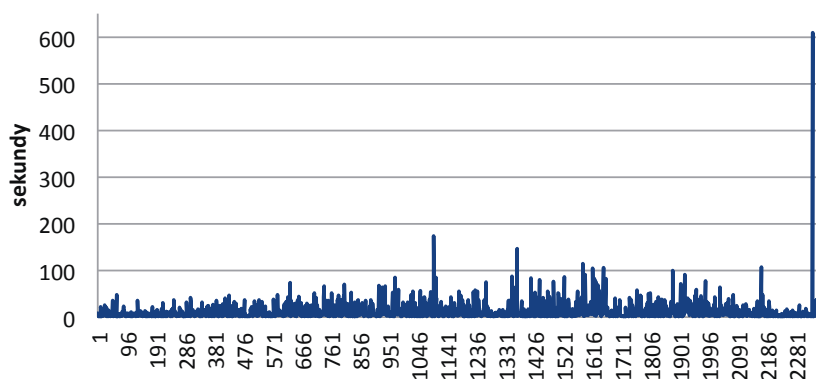
Modelowanie procesu napływu informacji na rynek odgrywa kluczową rolę w inwestowaniu na rynkach finansowych, gdyż daje możliwość prognozowania wszelkich wielkości charakteryzujących badane instrumenty finansowe. Klasyczne podejście w ekonometrii finansowej obejmuje modelowanie stóp zwrotu danego instrumentu, które odpowiadają równym odstępom czasu. W rzeczywistości częstotliwość kolejnych kwotowanych cen nie jest stała. Przedział czasu pomiędzy kolejnymi zmianami cen instrumentów finansowych, lub pomiędzy transakcjami, dostarcza istotnych informacji dotyczących intensywności procesu transakcyjnego.

Dzięki automatyzacji systemów transakcyjnych na giełdach papierów wartościowych powszechnie dostępne stały się zbiory danych, które dokładnie opisują handel walorami. Rejestrowane są wszystkie transakcje, w miarę ich pojawiania się, ze wszelkimi charakterystykami opisującymi dane zdarzenie finansowe. Takie dane nazywane są danymi o wysokiej częstotliwości (ang. *high frequency data*), danymi tikowymi (ang. *tick-by-tick data*) lub danymi transakcyjnymi (ang. *transaction data*) — Bień (2005). Dane tikowe obejmują czas dokonania transakcji, cenę, wolumen, cenach *bid* i *ask*, czy też szczegółowe informacje o zleceniach. Przy wyborze odpowiedniego narzędzia do analizy ekonometrycznej danych o wysokiej częstotliwości, należy pamiętać o ich pewnych charakterystycznych cechach jakimi są: nierównomierne rozmieszczenie obserwacji na osi czasu, występowanie wielu transakcji w tym samym momencie, dyskretne zmiany cen transakcyjnych, odbicia *bid-ask*, grupowanie się intensywności transakcyjnych i występowanie śróddziennej sezonowości; Huptas (2013).

Konsekwencją niesynchronicznego handlu i zarazem najważniejszą cechą danych o wysokiej częstotliwości jest losowe rozłożenie kolejnych obserwa-

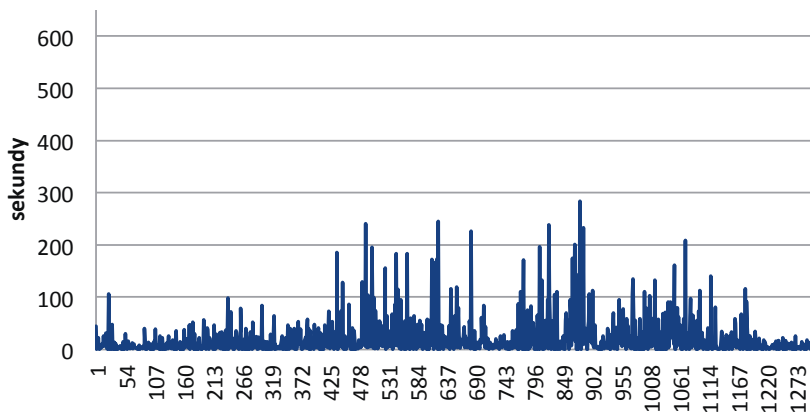
cji w czasie, a więc nierówne odstępy między nimi. Nieregularne obserwacje można zamienić na równoodległe w czasie (np. godzinowe, 15-minutowe, minutowe), co umożliwić będzie stosowanie klasycznych metod modelowania szeregów czasowych. Jednak wiąże się to najczęściej z utratą informacji jaką niesie za sobą proces transakcyjny, także wybór sposobu transformacji danych oraz przedziału czasu, w którym mają być one zagregowane, jest kwestią problematyczną. Istnieje również ryzyko błędnego wnioskowania, ponieważ efektem analizy danych tikowych w ustalonych odstępach czasu mogą być pozorne korelacje krzyżowe, a także autokorelacje zwrotów. Aby uwzględnić informacje jakie niewątpliwie niosą za sobą czasy trwania pomiędzy kolejnymi obserwacjami, należy korzystać z tzw. modeli w czasie transakcyjnym. Odstępy między wybranymi zdarzeniami traktowane są jako zmienne losowe, natomiast ciąg tych zmiennych jako proces stochastyczny. W badaniach mikrostruktury rynków finansowych rozważane są następujące czasy trwania — Doman (2011), transakcyjne czasy trwania (ang. *trade duration*), cenowe czasy trwania (ang. *price duration*), wolumenowe czasy trwania (ang. *volume duration*) oraz czasy trwania kierunku zmiany ceny (ang. *directional change duration*).

Transakcyjny czas trwania to czas oczekiwania na kolejną transakcję. Jest jedną z metod pomiaru intensywności procesu transakcyjnego. W teorii mikrostruktury wykorzystuje się te czasy trwania jako zmienne zastępcze dla pojawienia się nowej informacji na rynku finansowym. Często też dane te są źródłem informacji na temat intensywności popytu na płynność. Odstępy pomiędzy transakcjami są najczęstszym przedmiotem badań empirycznych danych o wysokiej częstotliwości. Poniższy wykres przedstawia przykładowy szereg transakcyjnych czasów trwania dla akcji spółki PKO BP z dnia 4 maja 2009 roku.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 1. Transakcyjne czasy trwania w przypadku akcji PKO BP z dnia 4 maja 2009 roku

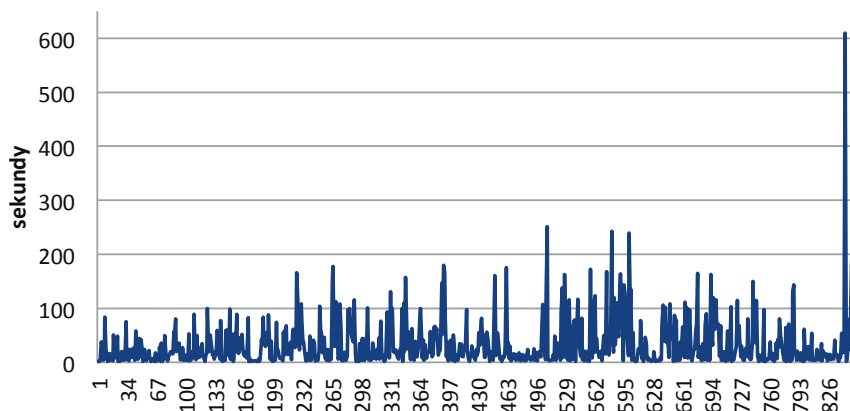


Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2. Cenowe czasy trwania w przypadku akcji PKO BP z dnia 4 maja 2009 roku

Cenowy czas trwania definiowany jest jako odstęp czasu potrzebny do zaobserwowania zmiany ceny instrumentu finansowego o pewną przyjętą arbitralnie wartość. Wartość ma być wielokrotnością tzw. tiku cenowego i określa o ile cena musi spaść (lub wzrosnąć) by zarejestrować jej zmianę. Cenowe czasy trwania związane są z płynnością danego instrumentu, a także z intensywnością napływu informacji na rynek. Często, a w szczególności na rynkach kierowanych cenami, zamiast cen transakcyjnych rozważa się tzw. *midquotes*, czyli średnią arytmetyczną cen kupna i sprzedaży w chwili zawarcia transakcji. Przykładowy szereg cenowych czasów trwania został przedstawiony na powyższym wykresie (Wykres 2). Arbitralnie przyjętą wartością jest 1 grosz.

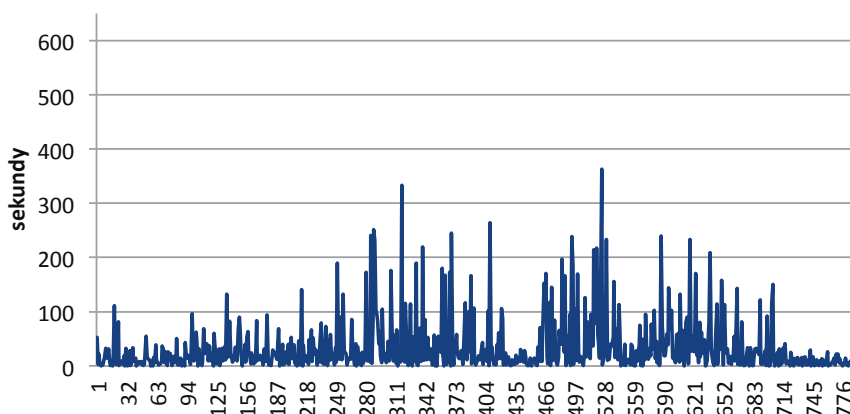
Wolumenowy czas trwania to czas potrzebny do zrealizowania w kolejnych transakcjach określonej wartości wolumenu, która została ustalona arbitralnie. Można zauważyć, że ta definicja nie określa czasu trwania tak precyzyjnie jak poprzednie — np. gdy założona wielkość wolumenu zostanie przekroczona w pojedynczej transakcji, powstaje problem czy nadwyżkę zaliczać na poczet kolejnego czasu trwania czy nie. Podobnie jak transakcyjne i cenowe czasy trwania, wolumenowe czasy oczekiwania są źródłem informacji o intensywności popytu na płynność. Traktowane są także jako zmienna zastępcza dla tzw. intensywności wolumenu. Ponadto wykorzystuje się je do analizy płynności oraz głębokości rynku. Można również badać czas trwania wolumenu nadwyżkowego (ang. *excess volume duration*), czyli odstęp czasu potrzebnego do zrealizowania nadwyżki wolumenu ofert sprzedaży lub ofert kupna. Nadwyżka ta może być wskaźnikiem pojawienia się nowej informacji na rynku, która do tej pory nie została zdyskontowana w cenach. Wykres poniżej ukazuje przykładowy szereg wolumenowego czasu trwania, gdzie ustaloną wielkością był średni poziom wolumenu w badanym dniu.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 3. Wolumenowe czasy trwania w przypadku akcji PKO BP z dnia 4 maja 2009 roku

Czas trwania kierunku zmiany ceny określa się jako odległość w czasie pomiędzy kolejnymi dwoma ekstremami lokalnymi procesu cenowego. Jest to zatem oczekiwanie na zakończenie ciągu kolejnych wzrostów (spadków) ceny, a więc zmiany trendu. Analogicznie jak w przypadku cenowych czasów trwania można badać zmiany ceny, która przekracza pewną wartość, lub rozważać ceny *mid*. Przykładowy szereg omawianych czasów trwania przedstawiony został poniżej.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 4. Czasy trwania kierunku zmiany ceny w przypadku akcji PKO BP z dnia 4 maja 2009 roku

Podstawowe charakterystyki opisowe zostały zestawione w Tabeli 4.

Tabela 4

Charakterystyki opisowe przedstawionych czasów trwania

Czasy trwania (w sekundach)	liczba	średnia	mediana	modalna	minimum	maksimum	wariancja (s^2)	odchylenie standardowe
transakcyjny	855	31,57	16	3	1	609	1853,35	43,05
cenowy	1314	20,09	8	0	0	609	1328,26	36,45
wolumenowy	2369	11,40	6	1	1	609	360,37	18,98
kierunku zmiany ceny	785	32,86	16	0	0	363	2222,87	47,15

Źródło: opracowanie własne.

Ze względu na to, że do przedstawienia przykładowych czasów trwania zdecydowano się wykorzystać proces transakcyjny dotyczący jednej akcji z tego samego dnia, można lepiej zauważyć jak różnią się charakterystyki badanych szeregów. W niniejszej pracy przedmiotem analiz będzie szereg czasów trwania zmiany kierunku ceny, który rzadko występuje w badaniach empirycznych w literaturze przedmiotu.

Powszechnym zjawiskiem w przypadku danych o wysokiej częstotliwości jest występowanie wielu transakcji w tej samej sekundzie. Także transakcje te mogą być zawierane na tym samym instrumencie w tej samej chwili, ale po różnych cenach. Dzieje się tak, ponieważ w okresach bardzo natężonego handlu na rynkach jedna sekunda okazuje się być już zbyt długim przedziałem czasu by zarejestrować wszystkie zmiany procesu transakcyjnego. Sytuacja ta jest najbardziej widoczna na rynkach kierowanych zleceniami. Pojawianie się wielu transakcji w tym samym momencie stanowi wyzwanie dla badacza, gdyż staje on między innymi przed problemem ustalenia jednej ceny dla danej sekundy, a więc sposobem agregacji danych. Również występowanie wielu zerowych czasów trwania może sprawiać trudności w zastosowaniu określonych metod modelowania. Wystąpienie wielokrotnych transakcji w tej samej sekundzie niesie za sobą istotną informację o tempie procesu transakcyjnego, jednak już ilość zawartych transakcji w danej sekundzie nie jest kluczowa dla wnioskania; zob. Huptas (2013).

Kolejną cechą charakterystyczną danych tikowych jest ich dyskretność. Ceny instrumentów finansowych zmieniają się w sposób skokowy. Wartością minimalną o jaką zmienia się cena jest tzw. tik cenowy, można zatem zauważyć,

że ceny walorów są wielokrotnościami pojedynczego tiku cenowego. Najczęściej zmiana ceny z transakcji na transakcję następuje o małą liczbę tików. Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wielkość tiku cenowego jest zależna od wartości akcji. Warto nadmienić, że wartość tiku silnie wpływa na funkcjonowanie rynku finansowego. Wraz ze zmniejszeniem tiku cenowego zmniejsza się *bid-ask spread*, co z kolei prowadzi do spłykania rynku; Bień (2005).

Następna cecha danych transakcyjnych związana jest z *bid-ask spreadem* oraz występowaniem na rynku animatorów, którzy podtrzymują jego płynność. Ustalają oni różne ceny kupna i sprzedaży instrumentu finansowego z czego wynika wielkość *bid-ask spreadu*. Konsekwencją występowania *spreadu* może być pozorna ujemna autokorelacja pierwszego rzędu zmian kursu transakcyjnego, którą można zaobserwować nawet w wypadku gdy fundamentalna wartość instrumentu nie ulega zmianie. Zjawisko to nazywane jest odbiciem *bid-ask* i powoduje ciągłą fluktuację cen transakcyjnych pomiędzy cenami *bid* i *ask* w zależności od zleceń. Można zatem wyciągnąć wniosek, że obserwowane zmiany cen na rynku nie muszą świadczyć o pojawieniu się nowej informacji na rynku; zob. Doman (2006).

Dla danych o wysokiej częstotliwości charakterystyczne jest grupowanie się intensywności transakcyjnych. Nowa informacja napływa na rynek w ciągu dnia z różnym natężeniem, co przekłada się na zróżnicowaną intensywność procesu transakcyjnego. Można zatem zauważyć okresy podwyższonej aktywności inwestorów na rynku, jak i okresy, w których liczba zawieranych transakcji jest niska. W związku z tym występuje grupowanie się czasów trwania — po okresach długich czasów trwania następują okresy krótkiego oczekiwania na badaną zmianę (i na odwrót) — Huptas (2013).

Bardzo typowym zjawiskiem, które obserwuje się w szeregach danych tiko- wych jest występowanie silnych efektów cyklicznych w ciągu dnia. Związane jest to z pewną ustaloną dzienną rutyną graczy na giełdzie. Większe natężenie aktywności transakcyjnej ma miejsce tuż po otwarciu rynku, ponieważ inwestorzy wykorzystują wtedy informacje, które napłynęły do nich w ciągu nocy. Wraz z przyswajaniem tych wiadomości aktywność transakcyjna spada osiągając swoje minimum we wczesnych godzinach popołudniowych (tzw. efekt lunchu). Wraz ze zbliżaniem się do końca sesji natężenie zawieranych transakcji wzrasta, ponieważ inwestorzy dokonują korekty swoich pozycji, bądź je zamykają. Zwiększona aktywność transakcyjna graczy na początku i na końcu sesji uwidacznia się w krótszych czasach oczekiwania na kolejną transakcję, natomiast wyraźnie niższa aktywność w czasie lunchu skutkuje tym, że odstępy między transakcjami są dłuższe. Zatem wykres odwzorowujący śróddzienną sezonowość będzie miał kształt odwróconej litery „U”. Podobnie jest w przypadku cenowych oraz wolumenowych czasów trwania — Huptas (2013). Należy mieć na uwadze tę niezwykle istotną cechę danych o wysokiej częstotliwości i przed przystąpieniem do analiz zaleca się wyeliminowanie czyn-

nika periodycznego, tak by nie fałszował on wniosków. W niniejszej pracy do zlikwidowania czynnika wewnątrzdziennej sezonowości zastosowano regresję Nadaraya–Watsona, która zostanie opisana w części 3.3.

6. MODELE ACD W BADANIACH DYNAMIKI CZASÓW TRWANIA

Dane o wysokiej częstotliwości charakteryzują się nieregularnością występowania kolejnych zdarzeń transakcyjnych. Obserwacje o nierównych odstępach można zamienić na dane regularnie pojawiające się na osi czasu, jednak wiąże się to z wieloma niedogodnościami. Przede wszystkim badacz musi być świadomy, że takiej transformacji danych towarzyszy przeważnie utrata informacji. Wybór sposobu przekształcenia danych także jest problematyczny, a otrzymany regularny szereg jest najczęściej zbudowany z przeważającej liczby zer, co skutecznie utrudnia jego modelowanie; zob. Doman (2011). Stosowanie modeli w czasie transakcyjnym jest lepszym rozwiązaniem, gdyż nieregularność danych, uwzględniana w tych modelach, niesie ze sobą istotne informacje.

Czas oczekiwania na kolejne zdarzenie traktuje się jako zmienną losową o ustalonym rozkładzie prawdopodobieństwa, natomiast ciąg tych zmiennych jest procesem stochastycznym. W związku z tym, że dane te nie napływają regularnie uznaje się taki szereg za proces punktowy. Procesem punktowym nazywamy szczególny rodzaj procesu stochastycznego, w którym punkty generowane są losowo na osi czasu; Pacuar (2006). Niech $t \in [0; +\infty)$ będzie zmienną opisującą czas, natomiast $\{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$ to ciąg chwil, w których nastąpiły dane zdarzenia procesu transakcyjnego, gdzie $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$. Zatem taki szereg momentów $t = t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ jest procesem punktowym. Mówimy o prostym procesie punktowym, gdy spełniony jest warunek, że $t_i < t_{i+1}$ dla $i=1, 2, \dots$, czyli momenty nie mogą zachodzić jednocześnie. Do opisu napływania kolejnych zdarzeń stosuje się te procesy punktowe, w których realizacja zdarzeń zależy od chwil, w których występowały zdarzenia poprzedzające; Pacuar (2006). Oznacza to, że proces taki może być sformułowany jako proces warunkowej intensywności transakcji. Podejście to występuje w przypadku rodziny modeli autoregresyjnego warunkowego czasu trwania wprowadzonych przez Engle'a i Russela–Engle, Russel (1998) — które zostaną szczegółowo opisane w niniejszym rozdziale. Klasyczny model Engle'a i Russela został w ciągu lat wielokrotnie modyfikowany — ze względu na różny rozkład składnika losowego lub różną postać funkcyjną modelu; Bień (2005). Wybrane podejścia wykorzystane w niniejszej pracy w analizie empirycznej zostaną omówione w części 2.1.

Dynamikę oczekiwanego czasu trwania można opisać modelem przedstawionym w 1998 roku przez Engle'a i Russela zwanym modelem autoregresyjnego warunkowego czasu trwania, ACD (ang. *Autoregressive Conditional Duration*).

Rozważmy $x_i = t_i - t_{i-1}$, co oznacza odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zdarzeniami transakcyjnymi, które zaistniały w chwili t_i oraz t_{i-1} . Ponadto, niech \mathcal{F}_{i-1} oznacza zbiór informacji dostępnej do momentu t_{i-1} włącznie. Obserwowany czas trwania (*duration*) wyrażony jest w postaci następującego iloczynu; zob. Engle, Russel (1998):

$$x_i = \Psi_i \cdot \varepsilon_i,$$

gdzie:

Ψ_i — warunkowa wartość oczekiwana czasu trwania,

$\varepsilon_i > 0$ — składnik losowy.

Zakłada się, że ε_i to ciąg nieskorelowanych zmiennych losowych na dodatniej półosi rzeczywistej o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. Charakteryzują się one funkcją gęstości postaci $f_\varepsilon(\varepsilon_i)$ o wartości oczekiwanej $E(\varepsilon_i) = 1$ oraz stałej wariancji $Var(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$, co można zapisać $\varepsilon_i \sim i.i.d(1, \sigma_\varepsilon^2)$. Zakładamy, że warunkowa wartość Ψ_i jest poprawnie zdefiniowana, w związku z czym prawdziwe jest założenie, że składniki ε_i są stochastycznie niezależne od Ψ_i , czyli $\varepsilon_i \perp \Psi_i$; zob. Huptas (2013). Skoro $E(\varepsilon_i) = 1$, to Ψ_i można przedstawić następująco:

$$\Psi_i = E(x_i | \mathcal{F}_{i-1}).$$

Z kolei warunkowa wariancja czasu trwania jest postaci:

$$Var(x_i | \mathcal{F}_{i-1}) = \Psi_i^2 \varepsilon_i^2.$$

Podstawowa specyfikacja modelu ACD bazuje na liniowej parametryzacji dynamiki oczekiwanego czasu trwania i jest ona postaci — Engle, Russel (1998):

$$\Psi_i = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \Psi_{i-j},$$

gdzie:

$\omega > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ — parametry modelu dla każdego $j = 1, 2, \dots$,

p, q — rzędy opóźnień odpowiednio dla x_i oraz Ψ_i .

Jest to klasyczny model określany jako ACD(p,q). Narzucone restrykcje na parametry są wystarczające dla nieujemności procesu czasu trwania. Proces ten jest kowariancyjnie stacjonarny, gdy spełniony jest warunek, że $\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Wówczas istnieje analityczna postać bezwarunkowej wartości oczekiwanej:

$$E(x_i) = \frac{\omega}{1 - (\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^q \beta_j)}.$$

W badaniach empirycznych często wykorzystywana jest uproszczona specyfikacja, czyli model ACD(1,1). Postać modelu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}x_i &= \Psi_i \varepsilon_i, \\ \Psi_i &= \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1},\end{aligned}$$

gdzie:

$\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ — parametry modelu.

W niniejszej pracy zostały zastosowane modele jedynie o pojedynczych opóźnieniach, w związku z tym indeksy przy parametrach modelu będą pomijane. Bezwarunkowa wartość oczekiwana procesu w takim przypadku ma postać:

$$E(x_i) = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \quad \text{gdy } \alpha + \beta < 1.$$

Natomiast jego bezwarunkowa wariancja wygląda następująco:

$$Var(x_i) = [E(x_i)]^2 \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - 2\alpha\beta - \beta^2}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 \sigma_\varepsilon^2} \quad \text{gdy } (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 \sigma_\varepsilon^2 < 1. \quad (1)$$

Restrykcja na istnienie bezwarunkowej wariancji procesu jest jednocześnie warunkiem kowariancyjności procesu ACD(1,1). Z formuły (1) można wyprowadzić wzór na kwadrat współczynnika zmienności dla procesu, poprzez podzielenie obu stron przez $[E(x_i)]^2$:

$$V_x^2 = \frac{Var(x_i)}{[E(x_i)]^2} = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \frac{1 - 2\alpha\beta - \beta^2}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 \sigma_\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Z formuły (2) wynika, że zawsze gdy parametr α jest większy od 0, współczynnik zmienności V_x jest większy od odchylenia standardowego składnika innowacji σ_ε ($\sigma_\varepsilon = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2}$). Modele ACD charakteryzują się tym, że odchylenie standardowe składnika losowego σ_ε równa się współczynnikowi zmienności ε_i (gdyż $E(\varepsilon_i) = 1$, zatem $V_\varepsilon = \frac{\sigma_\varepsilon}{E(\varepsilon_i)} = \sigma_\varepsilon$). W związku z tym, prawdziwe jest stwierdzenie, że kiedy $\alpha > 0$, czas trwania x_i cechuje się większym rozproszeniem od składnika ε_i . Również wraz ze wzrostem wartości parametru α dyspersja zmiennej x_i rosnąć będzie w stosunku do dyspersji zmiennej ε_i . Kiedy odchylenie standardowe σ_ε będzie większe lub równe 1, współczynnik zmienności czasu trwania będzie zawsze większy od 1. Zjawisko to nazywane jest nadmiernym rozproszeniem zmiennej (*overdispersion*) i jest własnością bardzo często spotykaną w analizie empirycznej czasów trwania — zob. Huptas (2013).

W praktyce, jeżeli w modelowanym procesie pojawiają się bardzo długie lub bardzo krótkie czasy trwania, model ACD(p, q) ma tendencję do przeszaco-

wywania warunkowej wartości oczekiwanej. Ponadto, narzucone restrykcje na dodatniość parametrów modelu mogą sprawiać problemy natury numerycznej. Dlatego powstało wiele modyfikacji równania opisującego warunkową wartość oczekiwaną. Jedną z najwcześniejszych rozszerzeń specyfikacji modelu ACD była wprowadzona przez Bauwensa i Giot — zob. Bauwens, Giot (2000) — logarytmiczna wersja modelu ACD. Czas trwania opisywany jest tutaj poprzez następujące relacje:

$$\begin{aligned} x_i &= e^{\psi_i} \cdot \varepsilon_i \\ \Psi_i &= \exp(\psi_i) \quad \text{zatem } \psi_i = \ln \Psi_i \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie błędy $\varepsilon_i \sim i.i.d(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$, tak więc:

$$E(x_i | \mathcal{F}_{i-1}) = \mu \cdot \exp(\psi_i).$$

Zakłada się również, że dla modeli ACD stosunek $\frac{x_i}{E(x_i | \mathcal{F}_{i-1})}$ jest *i.i.d.*, a zatem $\frac{x_i}{\Psi_i}$ także jest *i.i.d.* — Engle, Russel (1998). Do ukazania zależności, która zgodnie z empirią skutkuje skupianiem się czasów oczekiwania, Bauwens i Giot wprowadzili dwie specyfikacje modelu log-ACD różniące się postacią funkcyjną składnika ε_i . Pierwszy model log-ACD₁(p, q) dany jest następującym wzorem (Bauwens, Giot (2008)):

$$\begin{aligned} \phi_i &= \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \ln \varepsilon_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \phi_{i-j} = \\ &= \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \ln x_{i-j} + \sum_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_j) \phi_{i-j}. \end{aligned}$$

Druga wersja modelu log-ACD₂(p, q) ma postać:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j \phi_{i-j} = \\ &= \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left(\frac{x_{i-j}}{\Psi_i} \right) + \sum_{j=1}^q \beta_j \phi_{i-j}. \end{aligned}$$

Dla obu wersji logarytmicznych modeli ACD warunkiem ścisłej stacjonarności procesu jest nierówność: $|\beta_j| < 1$ — Huptas (2013). W niniejszej pracy wykorzystywana jest wyłącznie specyfikacja log-ACD₁(1,1), którą można zapisać jako następujące równanie:

$$\ln \Psi_i = \omega + \alpha \ln \varepsilon_{i-1} + \beta \ln \Psi_{i-1}.$$

Proces ten jest stacjonarny gdy $|\beta| < 1$.

Wadą logarytmicznej specyfikacji modeli ACD jest przede wszystkim fakt, że nie istnieją ogólne analityczne postaci bezwarunkowych momentów procesu. Z drugiej strony, niewątpliwą zaletą modeli log-ACD jest to, że nie wymagają one nakładania restrykcji na α , β i ω , gdyż budowa równania (3) zapewnia dodatniość parametrów. Ponadto, innowacje ε_{i-1} , które wiążą się ze zbyt długim lub zbyt krótkim czasem trwania, oddziałują na warunkową wartość oczekiwaną w sposób nieliniowy. Zastosowanie logarytmicznych modeli ACD w celu testowania efektów mikrostruktury rynku jest korzystniejsze niż wykorzystanie klasycznych modeli warunkowego czasu trwania; zob. Bauwens, Giot (2008).

Rozszerzenia modeli ACD rozwijały się także w kierunku zmian typu rozkładu składnika innowacji ε_i , jako że wyniki i jakość estymacji zależą od wybranej funkcji gęstości składników losowych. W tej rodzinie modeli, możliwym jest zastosowanie dla zaburzeń jedynie rozkładów prawdopodobieństwa określonych na zbiorze liczb dodatnich rzeczywistych.

Najprostszym i zarazem najpopularniejszym rozkładem wykorzystanym do opisu zmiennej losowej ε_i jest rozkład wykładniczy. Model taki nosi nazwę EACD(p, q); Engle, Russel (1998). Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego dana jest wzorem:

$$f_{\varepsilon}(\varepsilon_i) = \lambda \exp(-\lambda\varepsilon_i),$$

gdzie:

λ — parametr, $\varepsilon_i > 0$.

Wartość oczekiwana oraz wariancja zmiennej wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon} &= E(\varepsilon_i) = \lambda, \\ \sigma_{\varepsilon}^2 &= \text{Var}(\varepsilon_i) = \lambda^2. \end{aligned}$$

Składniki losowe ε_i mają być niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 1, zatem dla $\varepsilon_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ dla $\lambda = 1$, czyli:

$$f_{\varepsilon}(\varepsilon_i) = \exp(-\varepsilon_i).$$

Stosowanie rozkładu wykładniczego może jednak okazać się zbyt restrykcyjne; Huptas (2013). Naturalnym uogólnieniem wykładniczego typu rozkładu ε_i dla modeli ACD będzie rozkład Weibulla, również często używany w analizach czasów trwania. Model ten nazywany jest WACD(p, q). Funkcja gęstości rozkładu Weibulla ma następującą postać:

$$f_{\varepsilon}(\varepsilon_i) = \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \exp\left(-\left(\frac{\varepsilon_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right),$$

gdzie:

λ, γ — parametry. Ze względu na występowanie w tym rozkładzie parametru kształtu γ funkcja gęstości może lepiej dopasowywać się do danych. Odpowiednio, wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$\mu_\varepsilon = E(\varepsilon_i) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \text{Var}(\varepsilon_i) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right)^2 \right].$$

Gdzie $\Gamma(\cdot)$ — funkcja gamma. Aby spełnione zostało założenie o niezależności i jednakowym rozkładzie zmiennych ε_i , o wartości oczekiwanej równej 1, należy dokonać reparametryzacji λ :

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Po tej modyfikacji gęstość rozkładu Weibulla zmiennej ε_i będzie mieć postać:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_i) = \gamma \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \left(\varepsilon_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\varepsilon_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right)^\gamma\right).$$

W niniejszej pracy wykorzystane zostaną dwa przedstawione powyżej typy rozkładów składnika losowego ε_i dla modeli ACD.

Do szacowania parametrów modeli ACD zastosowano Metodę Największej Wiarygodności (MNW). Dla MNW fundamentalną kwestią będzie wybór i przyjęcie danego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ε_i . Proponowanymi przez literaturę przedmiotu rozkładami dla modeli ACD są między innymi: rozkład wykładniczy, Weibulla, uogólniony gamma, logarymiczno-normalny czy rozkład Burra; Bień (2005). Warunkowy rozkład zmiennej x_i stanowi szczególny przypadek rozkładu składnika losowego $\varepsilon_i = \frac{x_i}{\Psi_i}$ (gdzie $\Psi_i = 1$), zatem warunkowa funkcja gęstości x_i ma następującą postać:

$$(x_i | \Psi_i; \theta) = \frac{1}{\Psi_i} f_\varepsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right),$$

gdzie:

θ — wektor estymowanych parametrów. Funkcję wiarygodności dla nieznanymi parametrów modelu konstruuje się jako iloczyn N funkcji gęstości $f(x_i | \mathcal{F}_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, N$ (gdzie N — liczebność próby), przy warunkach początkowych x_0, Ψ_0 :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i | \Psi_i; \theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\Psi_i} f_\varepsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right).$$

Estymatorami parametrów θ będą takie $\hat{\theta}$, dla których funkcja wiarygodności $L(\theta)$ osiąga maksimum. Do obliczeń wykorzystuje się logarytm naturalny funkcji wiarygodności $l(\theta)$. Taka transformacja nie zmienia położenia maksimum, a znacznie ułatwia proces optymalizacji:

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N [\ln f(x_i | \Psi_i; \theta)] = \sum_{i=1}^N \left[\ln f_\varepsilon\left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right) - \ln(\Psi_i) \right].$$

Estymatory MNW charakteryzują się asymptotycznym rozkładem normalnym. Oznacza to, że przy liczebności N zmierzającej do nieskończoności rozkład estymatora $\hat{\theta}$ będzie rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną równą prawdziwej wartości wektora θ i macierzy kowariancji równej $V(\theta)$. Estymator macierzy kowariancji ma następującą postać:

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = \left[-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \ln f(x_i | \Psi_i; \theta)}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}'} \right]^{-1}.$$

W niniejszej pracy przy budowie modeli warunkowego czasu trwania zastosowane zostały dwa rozkłady warunkowe: rozkład wykładniczy oraz Weibulla. Dla rozkładu wykładniczego warunkowa funkcja gęstości czasu trwania jest postaci:

$$f(x_i | \Psi_i; \theta) = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right).$$

W związku z czym logarytm funkcji wiarygodności wyraża się wzorem:

$$l(\theta) = - \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i}{\Psi_i} + \ln(\Psi_i) \right].$$

W przypadku, gdy za rozkład ε_i przyjmiemy rozkład Weibulla, warunkowa funkcja gęstości procesu x_i wygląda następująco:

$$f(x_i | \Psi_i; \theta) = \frac{\gamma}{x_i} \left[\frac{x_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\Psi_i} \right]^\gamma \exp \left\{ - \left[\frac{x_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\Psi_i} \right]^\gamma \right\}.$$

Zatem logarytm funkcji wiarygodności opisuje się za pomocą wzoru:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \left\{ \ln\left(\frac{\gamma}{x_i}\right) + \gamma \ln \left[\frac{x_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\Psi_i} \right] - \left[\frac{x_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\Psi_i} \right]^\gamma \right\}.$$

Oszacowane estymatory będą zgodne i asymptotycznie najbardziej efektywne, o ile rozkład składnika losowego ε_i został wybrany poprawnie. Jeśli rozkład ten nie jest właściwy estymatory MNW tracą swoje własności; zob. Bień (2005).

W przypadku estymacji procesu z wykorzystaniem logarytmów funkcji wiarygodności definiuje się tzw. kryteria informacyjne pozwalające na porównywanie modeli. Najbardziej znaną i najczęściej wykorzystywaną miarą w badaniach empirycznych jest kryterium informacyjne Akaike'a AIC (*Akaike Information Criterion*). Jego formuła określona jest następująco — Kufel (2007):

$$AIC = -\frac{2l(\hat{\theta})}{N} - \frac{2k}{N},$$

gdzie:

k to liczba parametrów modelu, zaś N oznacza liczba obserwacji. Model o najniższej wartości kryterium AIC jest uznawany za najlepszy w takim sensie,

że jest on najbardziej dopasowany do danych i zarazem najprostszy. Powyżej przedstawiona miara zostanie wykorzystana do sporządzenia rankingu modeli ACD w dalszej części pracy.

W celu oceny i sprawdzenia poprawności obliczonych modeli, a w związku z tym trafności rankingu, można posłużyć się weryfikacją statystyczną. Z racji tego, że w niniejszej pracy zestawiane są modele ACD o warunkowych rozkładach wykładniczym i Weibulla, zasadnym jest testowanie parametru kształtu γ , który przyjmując za wartość 1 sprowadza rozkład Weibulla do wykładniczego. Testowanie γ można przeprowadzić przy pomocy testu t -Studenta. W tym przypadku hipoteza zerowa wobec alternatywnej będzie przedstawiać się następująco:

$$\begin{aligned} H_0 : \gamma &= 1, \\ H_1 : \gamma &\neq 1. \end{aligned}$$

Sprawdzianem w tym teście jest statystyka postaci:

$$t_\gamma = \frac{\hat{\gamma} - 1}{d(\hat{\gamma})}.$$

W ramach modelu regresji liniowej przy założeniu normalności składników losowych oraz prawdziwości hipotezy zerowej statystyka t ma rozkład t -Studenta o $N-k-1$ stopniach swobody, gdzie k to liczba parametrów (warto zauważyć, że przy dużej liczbie obserwacji rozkład t -Studenta sprowadza się do rozkładu normalnego); zob. Wywiół (2004). W przypadku modeli ACD stosuje się testowanie przybliżone. Z asymptotycznej normalności estymatora MNW wynika przybliżony rozkład t -Studenta dla rozważanej statystyki. Pozwala to na wykorzystanie opisanego testu do weryfikacji istotności parametrów w modelu ACD, który został oszacowany metodą największej wiarygodności.

Model można również ocenić wykorzystując test ilorazu wiarygodności, który służy do porównywania różnych form funkcyjnych modeli. Jest on oparty na różnicy logarytmów wartości funkcji wiarygodności dla dwóch zestawianych modeli. Test ilorazu wiarygodności stosowany jest bardzo często, gdyż daje możliwość porównywania modeli oszacowanych na tej samej próbie. W tym przypadku test ten sprawdzać będzie istotność całego modelu z warunkowym rozkładem Weibulla względem modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym, w którym parametr kształtu sprowadza się do 1 (czyli będzie to model z warunkiem narzuconym na γ). Hipoteza zerowa zakładać zatem będzie, że rozkładem warunkowym danego modelu jest rozkład wykładniczy, natomiast hipoteza alternatywna mówić będzie o tym, że jest to rozkład Weibulla. Test przeprowadzany jest za pomocą poniższej statystyki; Wywiół (2004):

$$LR = 2(\ln L_1 - \ln L_2),$$

gdzie $\ln L_1$ to logarytm naturalny funkcji wiarygodności modelu z narzuconym warunkiem (z rozkładem wykładniczym), a $\ln L_2$ oznacza logarytm naturalny

funkcji wiarygodności modelu bez ograniczeń (z rozkładem Weibulla). Statystyka LR ma rozkład chi-kwadrat o liczbie stopni swobody równej liczbie wszystkich parametrów, występujących w obu omawianych modelach.

Przedstawione metody zostaną wykorzystane w empirycznej części pracy, w której za pomocą kryterium informacyjnego AIC zbudowano ranking modeli ACD. Jego zasadność weryfikowana będzie przy użyciu opisanych testów statystycznych. Ranking zostanie utworzony dla danych odsezonowanych oraz dla tych niepoddanych odsezonowaniu, dzięki czemu możliwe będzie porównanie pozycji modeli w rankingu przy uwzględnieniu wewnątrzdziennej cykliczności. W kolejnym podrozdziale omówione zostaną narzędzia wykorzystane do eliminacji sezonowości.

7. REGRESJA NADARAYA I WATSONA JAKO NARZĘDZIE ELIMINACJI SEZONOWOŚCI WEWNĄTRZDZIENNEJ

Wewnątrzdzienne sezonowości jest cechą charakterystyczną danych o wysokiej częstotliwości, w tym czasów trwania. Własność ta zazwyczaj powoduje ich silną dodatnią autokorelację; zob. Bień (2005). Aby wyeliminować zjawisko autokorelacji, należałoby usunąć efekt cykliczności, co jest możliwe dzięki odpowiedniej transformacji danych. Literatura przedmiotu postuluje, by przed właściwym szacowaniem modeli ACD stosownie przekształcić zbiór danych; Engle, Russel (1998). W tym celu dokonuje się dekompozycji czasów trwania na część deterministyczną $\phi(t_i)$ oraz stochastyczną x_i . Dane transformowane są zgodnie z następującą formułą:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{\phi(t_i)},$$

gdzie \hat{x}_i — czas trwania bez efektu cykliczności. Metodą powszechnie stosowaną do szacowania wewnątrzdziennej funkcji sezonowości jest estymacja jądrowa. Charakteryzuje się ona przede wszystkim tym, że analityczna postać funkcji gęstości czasu trwania nie musi być określona. Niech X będzie zbiorem składającym się z n obserwacji d -wymiarowych, generowanych przez rozkład prawdopodobieństwa $p(x)$. Dla $\tilde{x} \in X$ konstruowane jest O — czyli małe otoczenie, w którym \tilde{x} jest położone w centrum. W przypadku gdy $d=1$, O będzie odcinkiem o długości h . Otoczenie O ma własność — Härdle (1992):

$$\int_0^1 p(x) = P.$$

Prawdopodobieństwo, że l z n obserwacji należy do obszaru O zależy od wielkości n i P . Dla dostatecznie dużego n , l przybliża się następująco:

$$l \approx n \cdot P.$$

Przy bardzo małym h przyjmuje się, że $p(x)$ jest stałe nad obszarem O :

$$P \approx p(x) \cdot h.$$

Z czego wynika, że:

$$p(x) = \frac{1}{n \cdot h}.$$

Formuła ta stanowi przybliżenie wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa w punkcie x . W celu oszacowania estymatora funkcji gęstości dla badanego zbioru danych badacz przesuwając po obserwacjach ruchomym otoczeniem (oknem) i w każdego z nich wylicza $p(x)$. W przypadku jądrowych estymatorów gęstości szerokość otoczenia jest stała, natomiast zmienia się liczba l . Wpływ punktów należących do okna waży się za pomocą funkcji jądrowej. Funkcją jądrową nazywa się jednoczynnikową nieujemną funkcję gęstości prawdopodobieństwa, która spełnia następujące założenia — zob. Heiler (1999):

$$\begin{aligned} \int K(z) dz &= 1, \\ \int zK(z) dz &= 0, \\ \int z^2K(z) dz &= K_2 < \infty. \end{aligned}$$

Zakłada się ponadto, że dla każdego $z \in \mathbb{R}$ funkcja ta jest symetryczna względem zera oraz ma w zerze maksimum globalne. Przykłady często wykorzystywanych funkcji jądrowych przedstawia poniższa tabela:

Tabela 5

Przykłady funkcji jądrowych

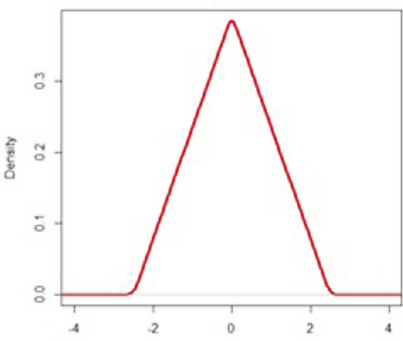
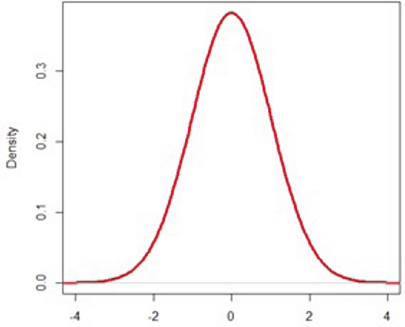
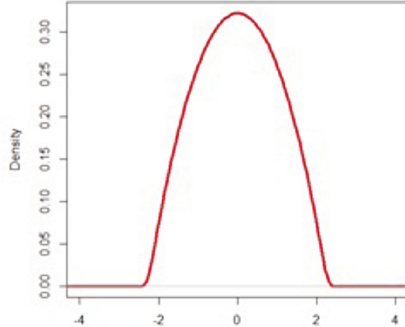
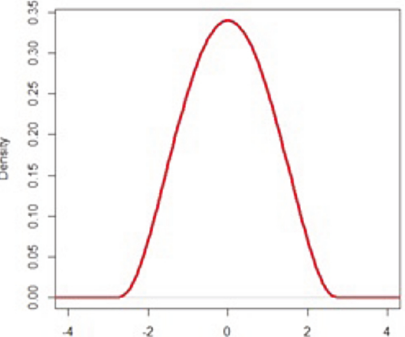
Jądro trójkątne	
$K(z) = 1 - z \mathbb{I}_{ z \leq 1}(z)$	 <p style="text-align: center;">jądro trójkątne</p>

Tabela 5

<p>Jądro gaussowskie (normalne)</p> $K(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) I_{\mathbb{R}}(z)$	<p>jądro normalne</p> 
<p>Jądro Epanechnikova</p> $K(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2) I_{ z \leq 1}(z)$	<p>jądro Epanechnikova</p> 
<p>Jądro quartic</p> $K(z) = \frac{15}{16}(1 - z^2)^2 I_{ z \leq 1}(z)$	<p>jądro quartic</p> 

Źródło: opracowanie własne.

Dla zbiorów pochodzących z przestrzeni wielowymiarowych (czyli gdy $d > 1$) można przyjąć, że ich jądrem jest iloczyn funkcji jądrowych jednowymiarowych:

$$K(x_1, x_2) = K(x_1) \cdot K(x_2).$$

Przy zadanej postaci funkcji jądrowej K formuła na liczbę l przyjmuje postać:

$$l = \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h^d}\right),$$

przy czym dodatni współczynnik h określa się mianem parametru wygładzania lub szerokością pasma. Po podstawieniu powyższej zależności do równania 2.38 na $p(x)$ wzór na estymator gęstości w d -wymiarowej przestrzeni, czyli tzw. estymator Rosenblatta–Parzena przedstawia się następująco; Härdle (1992):

$$p(x) = \frac{1}{n \cdot h^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h^d}\right).$$

Nadaraya i Watson w oparciu o powyższy estymator jądrowy funkcji gęstości, skonstruowali regresję jądrową. Dana niech będzie próba $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$ taka, że $y_i \in \mathbb{R}$ i $x_i \in \mathbb{R}^d$ o łącznej gęstości $f(y, x)$. Do prognozowania wartości zmiennej y potrzebna jest jej warunkowa funkcja gęstości dana wzorem:

$$g(y|x) = \frac{f(y, x)}{f_x(x)}.$$

Na podstawie estymatora jądrowego funkcji gęstości Rosenblatta–Parzena otrzymuje się następujące oszacowanie warunkowej gęstości y :

$$\hat{g}(y|x) = \frac{\frac{1}{h_y} \cdot \sum_{i=1}^n K_y\left(\frac{y - y_i}{h_y}\right) \cdot K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}{\sum_{i=1}^n K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}.$$

W wyniku wyliczenia następującej całki: $\int y \cdot \hat{g}(y|x) dy$ uzyskuje się oszacowanie warunkowej wartości oczekiwanej $E(y|x)$, zwane estymatorem Nadaraya i Watsona — Andersen i in. (2009):

$$m(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}{\sum_{i=1}^n K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}.$$

Jest to średnia ważona zmiennej zależnej, gdzie wagi zależą od zmiennych niezależnych w następujący sposób:

$$w_i = \frac{K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}{\sum_{i=1}^n K_x\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right)}.$$

Stosując powyższy nieparametryczny estymator do zagadnienia eliminacji sezonowości w niniejszej pracy, czynnik deterministyczny przyjmować będzie postać:

$$\phi(t_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i K\left(\frac{t - t_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - t_i}{h}\right)},$$

gdzie t to liczba sekund od początku sesji każdego dnia (ewentualnie od północy), natomiast t_i to liczba sekund od początku sesji (ewentualnie od północy) do momentu wystąpienia zmiany kierunku ceny akcji. x_i to czasy trwania odpowiadające momentom t_i . K jest wybraną funkcją jądra przy współczynniku wygładzania h .

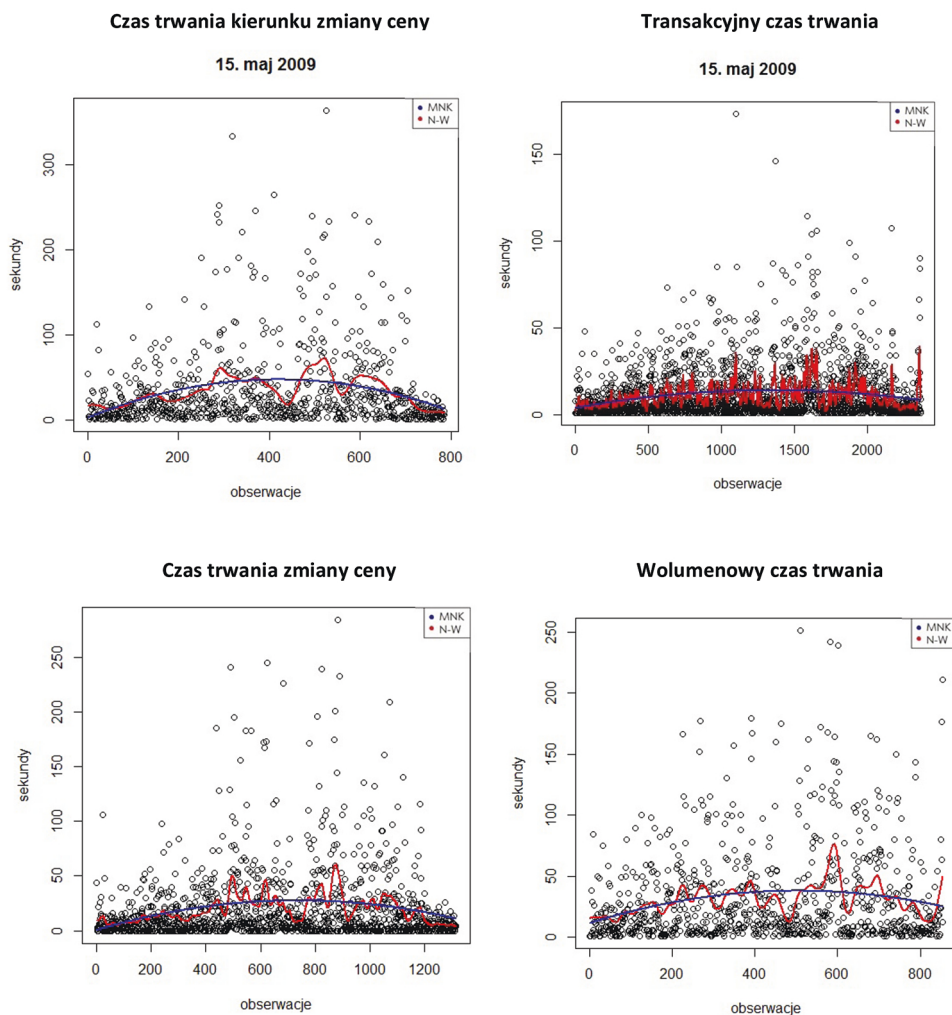
Przykład działania powyższej metody najlepiej zobrazuje zestawienie jej z dowolną regresją parametryczną. Rysunek poniżej (Wykres 5) przedstawia odsezonowanie przykładowych czasów trwania przy pomocy regresji Nadaraya i Watsona oraz regresji liniowej.

Ukazane są na nim wykresy rozrzutu, na których dla każdej obserwacji zaznaczona jest liczba sekund oczekiwania pomiędzy kolejnym zdarzeniem transakcyjnym. Krzywa naniesiona szarym kolorem symbolizuje przebieg regresji Nadaraya–Watsona, natomiast niebieska regresji liniowej estymowanej MNK. Piki krzywych oznaczają, że liczba sekund do następnego zdarzenia była duża, czyli intensywność zjawiska była niska. Natomiast kształtowanie się wykresu na niskim poziomie oznacza wysoką intensywność procesu transakcyjnego. Na przykładzie regresji Nadaraya i Watsona dla cenowego czasu trwania można zauważyć, że przy 400. obserwacji zmiany ceny zaczynają zachodzić coraz rzadziej, ponieważ na wykresie zaczynają pojawiać się piki. Związane jest to zapewne z tzw. efektem lunchu. Na początku i końcu sesji giełdowej wykres kształtuje się na niskich poziomach co jest typowe dla dziennego cyklu transakcyjnego, ponieważ częstość zmian cen w tych okresach jest bardzo duża, a więc czas oczekiwania na kolejną zmianę bardzo mały.

Przytoczone porównania wyraźnie ukazują, że regresja Nadaraya–Watsona lepiej dopasowuje się do danych niż regresja liniowa, a co za tym idzie wierniej oddaje efekt sezonowości wewnątrzdziennej.

Należy zaznaczyć, że wyniki danej estymacji nieparametrycznej zależą będą od wybranej funkcji jądrowej. W powyższym przykładzie użyto jądra normalnego. Wybór jądra jest ważny, ale nie aż tak jak właściwy wybór szerokości pasma.

Decyzja co do parametru wygładzania zależy od wielkości próby. W niniejszej pracy jest on równy $2,78sN^{-0,2}$ (s — odchylenie standardowe z próby, N — liczba obserwacji), natomiast zastosowaną funkcją K jest jądro normalne.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 5. Porównanie regresji Nadaraya i Watsona z regresją liniową

8. WYNIKI EMPIRYCZNE

Obliczenia przeprowadzone zostały przy użyciu pakietu statystycznego *R* oraz *Statistica*, natomiast przygotowanie danych dokonano za pomocą programu *MS Excel*. Dane transakcyjne pobrane zostały ze strony *www.stooq.pl*. Modelowaniu poddano czasy trwania pomiędzy kolejnymi zmianami kierunku cen akcji. Zdecydowano się na analizę czasów oczekiwania na zdarzenia tego typu ze względu na rzadkie występowanie podobnego badania w literaturze przedmiotu. Głównym celem było rozpatrzenie wpływu wewnątrzdziennej sezonowości występującej w rozważanym zbiorze danych. Do opisu kształtowania się czasów trwania kierunku zmiany cen wykorzystano różne typy modeli ACD, które uporządkowano ze względu na jakość dopasowania do danych. Analiza sprowadzała się do monitorowania ewentualnej zmiany rankingu modeli wobec odsezonowania danych metodą estymacji jądrowej.

Badany zbiór danych transakcyjnych zawiera zestawienie cen akcji i wolumenów spółki PKO BP z godziną ich pojawienia się oraz datą, w której dana sesja giełdowa nastąpiła. Przykładowy fragment zbioru danych wygląda następująco:

Tabela 6

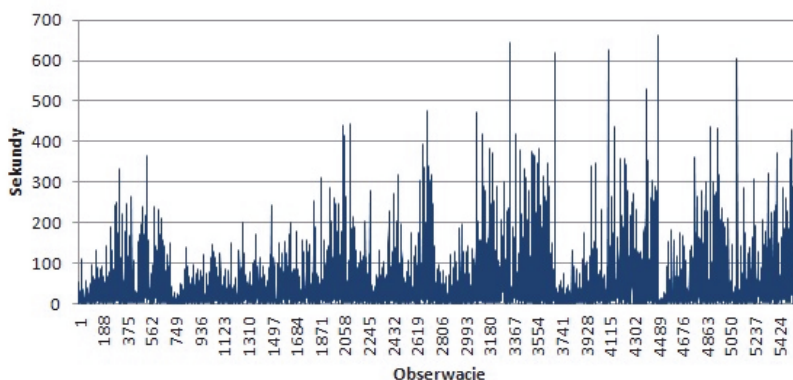
Fragment badanego zbioru danych

Spółka	Data	Godzina	Cena	Wolumen
PKOBP	20090504	09:00:53	27,41	80
PKOBP	20090504	09:00:56	27,45	360
PKOBP	20090504	09:01:18	27,40	100
PKOBP	20090504	09:01:21	27,44	40
PKOBP	20090504	09:01:21	27,40	2688

Źródło: opracowanie własne.

Dane zebrane zostały z dni od 4. do 15. maja 2009 roku, a więc obejmowały 2 tygodnie — 10 dni roboczych. Wybrano spółkę PKO BP, ponieważ w badanym okresie odznaczała się ona najwyższą płynnością spośród spółek portfela WIG20; zob. Huptas (2013). Na podstawie powyższych danych obliczono czas trwania kierunku zmiany ceny, czyli okres pomiędzy kolejnymi zmianami trendu procesu cenowego. Czas ten mierzono z dokładnością do jednej sekundy. Można zatem w rozważanym szeregu znaleźć obserwacje zerowe. Dzieje się tak gdy zdarzenie transakcyjne zajdzie w czasie krótszym niż 1 sekunda, czyli w tym przypadku — jeśli w przeciągu sekundy cena akcji zmieni swoją tendencję z rosnącej na malejącą (lub odwrotnie). Zerowe czasy trwania pociągają za

sobą problemy natury numerycznej, z tego powodu przed estymacją modeli skorygowano szereg dodając do każdego pomiaru 1 sekundę. Do analizy wzięto pod uwagę jedynie obserwacje dla fazy notowań ciągłych. Na GPW notowania ciągłe w 2009 roku miały miejsce od godziny 9:00 do 16:30 w dni robocze. Na potrzeby badania przyjęto „płynne” końce sesji giełdowej. Oznaczało to, że ostatni czas trwania zmiany kierunku ceny w dniu odpowiadał ostatniej pojawiającej się transakcji, a okres pomiędzy końcem jednego dnia a początkiem drugiego wynosi 0. Wykres poniżej obrazuje kształtowanie się poziomów czasów oczekiwania na kolejną zmianę trendu cenowego w badanym okresie. Zbudowany szereg składał się z 5587 obserwacji, które podlegały modelowaniu.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 6. Czas trwania kierunku zmiany ceny w dniach od 4. do 15. maja 2009 roku

W celu przybliżenia wstępnych charakterystyk zbioru danych obliczono statystyki opisowe, które przedstawia Tabela 7. Natomiast kształtowanie się gęstości szeregu ukazano na wykresie poniżej, który przedstawia histogram badanych czasów trwania.

Średnia liczba sekund jaka mijała między dwoma kolejnymi zmianami kierunku trendu cenowego wynosiła około 45. Połowa obserwacji nie przekraczała poziomu 22 sekund. Najczęstszą wartością w badanym szeregu była 1 sekunda. Maksymalnym zaobserwowanym czasem trwania były 662 sekundy, natomiast minimalnym — 1 sekunda. Wariancja szeregu wyniosła około 3918. Przeciętnie obserwacje różniły się od średniego czasu trwania o około ± 62 sekundy. Współczynnik zmienności na poziomie 1,39 wskazuje, że wartość odchylenia standardowego jest wyższa niż średniej. Obserwujemy zatem zjawisko nadmiernego rozproszenia badanej zmiennej, które jest typowe dla danych o wysokiej częstotliwości. Skośność na poziomie 3,27 mówi o dodatniej asymetrii rozkładu czasów oczekiwania, co również potwierdza histogram. Oznacza to, że większość obserwacji ma wartość niższą niż średnia. Wysoka dodatnia wartość kur-

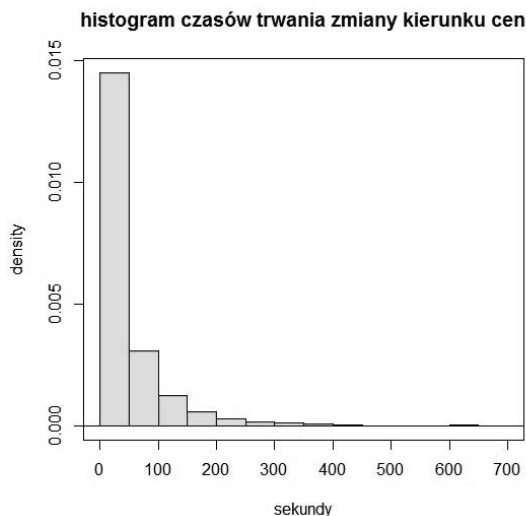
toży (16,1) jest konsekwencją dyskretnego charakteru analizowanych danych. Czasy trwania na zmianę kierunku ceny podlegają także istotnej dodatniej autokorelacji, co ukazuje poniższy autokorelogram.

Tabela 7

Statystyki opisowe badanych czasów trwania w sekundach

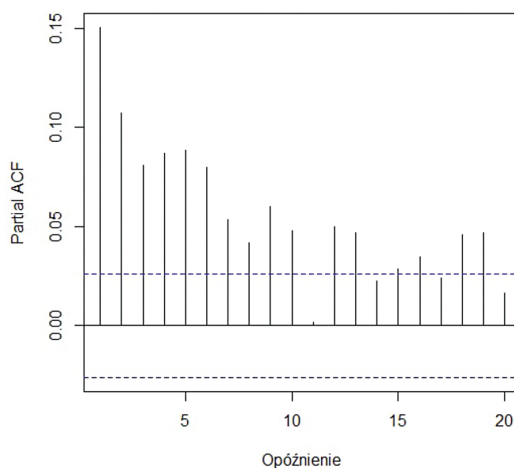
Średnia	45,08
Mediana	22,00
Modalna	1,00
Wariancja	3918,21 [s ²]
Odchylenie standardowe	62,60
Minimum	1,00
Maksimum	662,00
Współczynnik zmienności	1,39
Skośność	3,27 [s ³]
Kurtoza	16,10 [s ⁴]
ACF(1)	0,151

Źródło: opracowanie własne.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 7. Histogram badanych czasów trwania



Źródło: opracowanie własne.

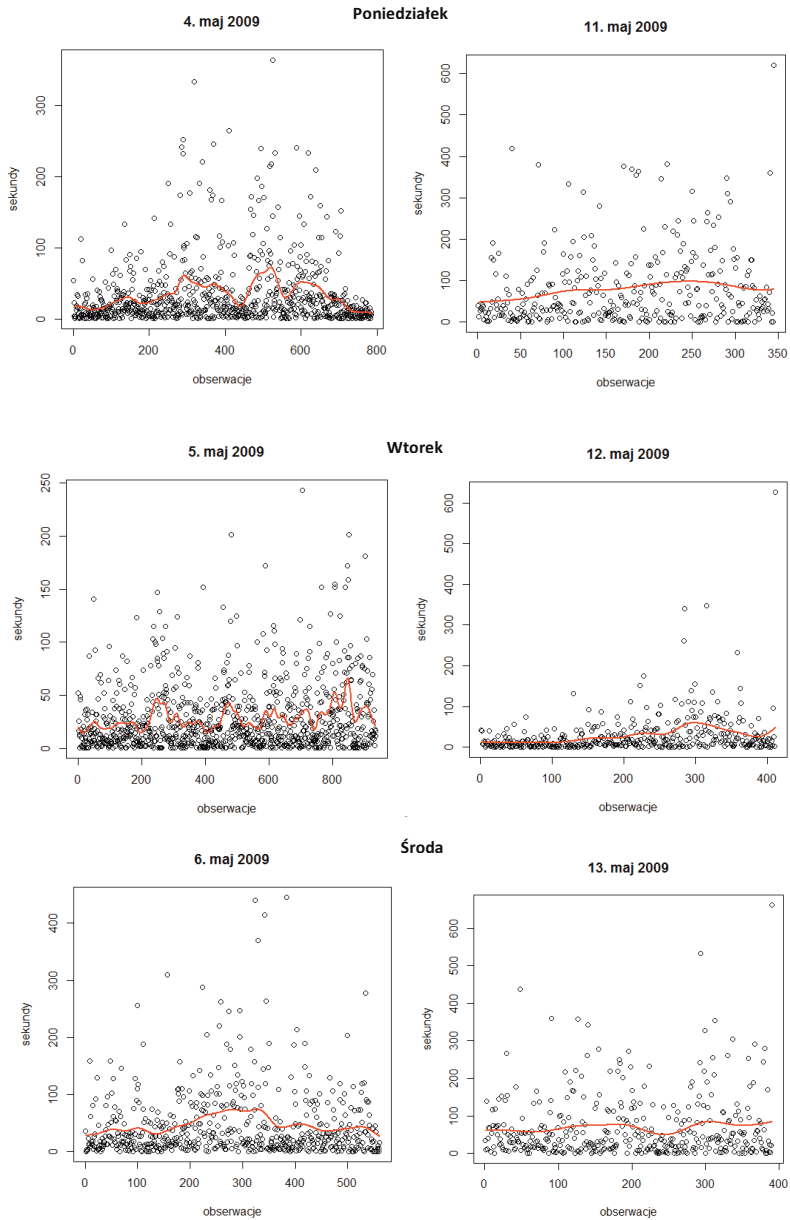
Wykres 8. Funkcja autokorelacji cząstkowej analizowanego czasu trwania

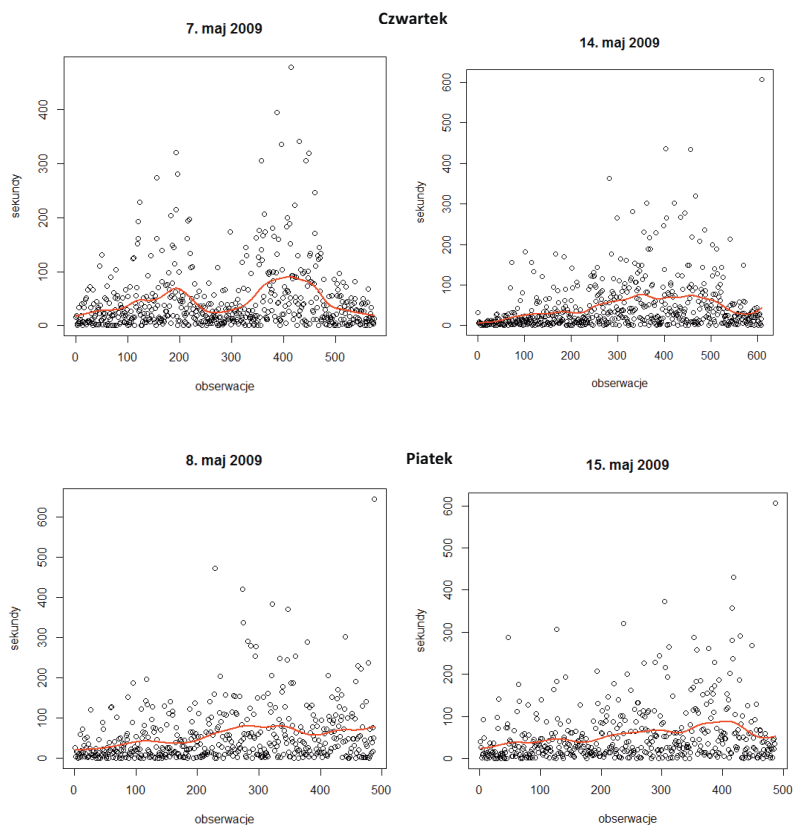
Wykres zbudowany został dla pierwszych 20 opóźnień. Wartość współczynnika autokorelacji pierwszego rzędu wynosi 0,151. Zauważalna jest malejąca tendencja funkcji autokorelacji cząstkowej. Dodatnia autokorelacja może być wynikiem efektu sezonowości wewnątrzdziennej. Uwzględnienie efektu wewnątrzdziennej cykliczności odbyła się przy pomocy regresji nieparametrycznej Nadaraya i Watsona z funkcją jądrową normalną. Metodę tę wykorzystano do określenia czynnika deterministycznego $\phi(t_i)$ dla odsezonowanego czasu trwania. Oszacowanie przeprowadzone zostało dla każdego dnia osobno. Odwzorowanie wewnątrzdziennej sezonowości na podstawie wyników estymacji jądrowej przedstawiają wykresy poniżej.

Typowym kształtem odwzorowania wewnątrzdziennej cykliczności transakcyjnych czasów trwania jest, opisywany w literaturze, kształt odwróconej litery „U” — Huptas (2013). Świadczy on o wysokiej intensywności zawierania transakcji w godzinach porannych, następnie spowolnieniu procesu transakcyjnego w godzinach około-południowych (tzw. „efekt lunchu”) i znów wysokiemu natężeniu transakcji pod koniec sesji giełdowej. Najbardziej podobny kształt odwzorowania sezonowości można zaobserwować na wykresie z dnia 6 maja, jednak łatwo zauważyć, że w przypadku pozostałych badanych dni nie ma tego efektu silnie zarysowanego. Efekt cykliczności można tu uznać za słaby, dlatego badanie czy istotnie wpływa on na wybór najlepszego modelu opisującego czas oczekiwania jest zasadne.

Statystyki opisowe czasów trwania po usunięciu komponentu wewnątrzdziennej cykliczności zestawione zostały w Tabeli 8. Poniżej przedstawiony został również histogram odsezonowanych danych oraz wykres ich funkcji

autokorelacji cząstkowej. Można zauważyć, że dane nie charakteryzują się już istotną dodatnią autokorelacją rzędu 1. (współczynnik autokorelacji na poziomie 0,011). Zatem likwidacja efektu sezonowości wewnątrzdziennej wyeliminowała to zjawisko.





Źródło: opracowanie własne.

Wykres 9. Kształtowanie się wewnątrzdziennej sezonowości w dniach od 4. do 15. maja 2009 roku

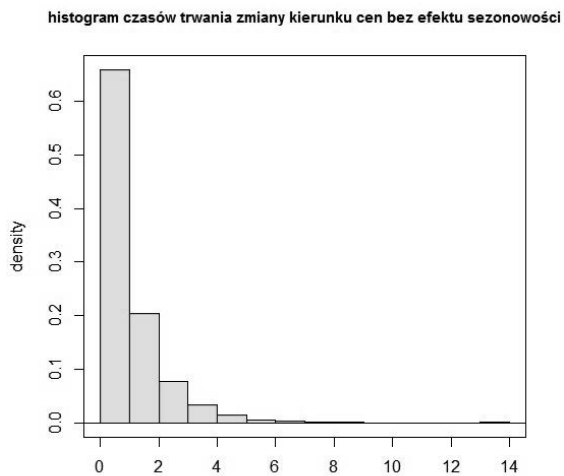
Do opisu czasu oczekiwania na zmianę kierunku ceny zastosowano modele warunkowego czasu trwania ACD — specyfikację klasyczną oraz logarymiczną z rozkładami warunkowymi wykładniczym i Weibulla. Estymacja parametrów przeprowadzona została Metodą Największej Wiarygodności. Modele zbudowano i oszacowano dla czasów trwania z efektem cykliczności wewnątrzdziennej oraz dla danych odsezonowanych. Wyniki przedstawiono poniżej w Tabelach 9 oraz 11. Tabele wynikowe podzielone są na dwie części pod względem postaci rozkładu warunkowego składnika losowego modeli. Dla każdego modelu podano wartości oceny MNW parametrów, ich błędy średnie szacunku oraz wartość *p-value*, czyli empiryczny poziom istotności, przy którym odrzuca się hipotezę zerową mówiącą o zerowaniu się danego parametru. Podano również kryteria informacyjne AIC obliczone dla każdego modelu.

Tabela 8

Statystyki opisowe odsezonowanych czasów trwania

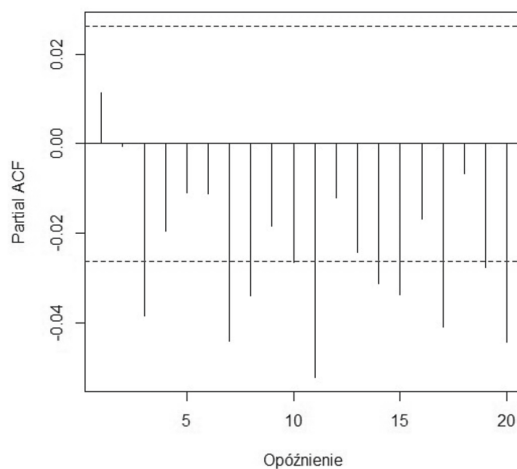
Liczba obserwacji	5587
Średnia	0,982
Mediana	0,609
Wariancja	1,278
Odchylenie standardowe	1,131
Minimum	0,010
Maksimum	13,989
Współczynnik zmienności	1,152
Skośność	2,728
Kurtoza	13,109
ACF(1)	0,011

Źródło: opracowanie własne.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 10. Histogram badanych czasów trwania



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 11. Funkcja autokorelacji cząstkowej analizowanego czasu trwania bez efektu sezonowości

Tabela 9

Estymacja MNW parametrów modeli ACD dla danych z wewnątrzdziennej sezonowością

Warunkowy rozkład wykładniczy							
Model ACD				Model log-ACD			
AIC		52803,42		AIC		52758,37	
Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p	Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p
ω	0,5095	0,10	0,00	ω	0,0743	0,010	0,00
α	0,0628	0,01	0,00	α	0,0502	0,003	0,00
β	0,9268	0,01	0,00	β	0,9398	0,004	0,00
Warunkowy rozkład Weibulla							
Model ACD				Model log-ACD			
AIC		52499,18		AIC		52478,25	
Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p	Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p
ω	0,5128	0,11	0,00	ω	0,0803	0,010	0,00
α	0,0652	0,01	0,00	α	0,0532	0,004	0,00
β	0,9242	0,01	0,00	β	0,9357	0,005	0,00
γ	0,8466	0,01	0,00	γ	0,8503	0,010	0,00

Źródło: opracowanie własne.

Można zauważyć, że wszystkie parametry w każdym z analizowanych modeli są statystycznie istotne, gdyż wartości *p-value* są mniejsze od założonego poziomu istotności 0,05. Warunki nieujemności parametrów modeli ACD są spełnione. Dowodem na zakładaną własność nadmiernego rozproszenia danych jest to, że oceny parametrów α modeli klasycznych są większe od 0. Warunek kowariancyjnej stacjonarności dla formuły podstawowej na warunkową wartość oczekiwaną Ψ_i został spełniony zarówno w przypadku modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym jak i rozkładem Weibulla, ponieważ suma parametrów $\alpha + \beta < 1$. Także dla każdej oszacowanej specyfikacji log-ACD proces jest stacjonarny, gdyż wartości parametrów β są na moduł mniejsze od 1.

W przypadku podstawowej formuły ACD możliwym jest określenie bezwarunkowej wartości oczekiwanej modelu $E(x)$, ponieważ istnieje jej analityczna postać. Dla modelu ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym średni bezwarunkowy czas oczekiwania na kolejną zmianę kierunku cen akcji PKO BP wyniósł około 49 sekund. Natomiast średni bezwarunkowy czas trwania zmiany kierunku cen w przypadku modelu ACD z warunkowym rozkładem Weibulla jest równy około 48 sekund. Rozkład warunkowy rozważanych modeli nie ma wpływu na jakość oszacowania tej własności procesu.

Zależnie od wybranego rozkładu warunkowego można zauważyć, że dla tych samych specyfikacji wartości ocen MNW się różnią. Dla podstawowego ACD parametry ω mają bardzo podobny poziom, jednak parametr α w modelu z warunkowym rozkładem Weibulla jest wyższy o 3% od jego odpowiednika w modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym. Parametr β zaś w modelu z rozkładem Weibulla jest niższy od tego w modelu z rozkładem wykładniczym o około 1%. Największą różnicę można zaobserwować, gdy porównuje się wartości parametrów γ . Należy mieć na uwadze, że w przypadku specyfikacji z warunkowym rozkładem wykładniczym parametr ten sprowadza się do 1, jest on zatem wyższy o ponad 15% od γ oszacowanego dla modelu z warunkowym rozkładem Weibulla. W przypadku modeli log-ACD można zaobserwować większą różnicę w wartościach parametrów. Parametr ω modelu z wykładniczym rozkładem warunkowym jest o 8% niższy niż jego odpowiednik w modelu z rozkładem Weibulla. Również większa zmiana występuje dla α , gdyż parametr ten w modelu z warunkowym rozkładem Weibulla jest o 5% wyższy od α w modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym. Parametr β zachowuje się podobnie jak dla specyfikacji klasycznej ACD — różnica jest taka sama. Również sytuacja dla parametru γ jest analogiczna, ponieważ w modelu z rozkładem warunkowym Weibulla jest on niższy o 15% niż jego odpowiednik w modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym.

Z zaprezentowanego zestawienia można również odczytać jak dobrze dany model w stosunku do innych dopasowuje się do danych. Mówi o tym wartość

kryteriów informacyjnych AIC. Najlepsza specyfikacja to ta o najniższej wartości AIC — została ona podkreślona w powyższym zestawieniu. Na podstawie wartości kryteriów zbudowano ranking modeli ACD, przedstawiony poniżej.

Tabela 10

Ranking modeli ACD dla danych z wewnątrzdziennej sezonowością

Pozycja	Model	AIC
1.	log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla	52478,25
2.	ACD z warunkowym rozkładem Weibulla	52499,18
3.	log-ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym	52758,37
4.	ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym	52803,42

Źródło: opracowanie własne.

Modelem, który jest najlepszy do opisu czasu trwania zmiany kierunku cen akcji PKO BP, dla danych niepoddanych eliminacji wewnątrzdziennej sezonowości, jest model log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla.

Pierwsza pozycja w rankingu tej specyfikacji została podparta testami statystycznymi przybliżonym t -Studenta oraz ilorazu wiarygodności. Sprawdzone hipotezę zerową mówiącą o tym, że parametr γ jest równy 1. Statystyki testowe $t = -15,34$ dla podstawowej specyfikacji oraz $t = -14,97$ dla modelu log-ACD znajdują się w obszarze krytycznym, zatem wskazuje one na odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie istotności równym 0,05. Oznacza to, że warunkowy rozkład wykładniczy (dla którego $\gamma = 1$) jest mniej preferowany. W teście ilorazu wiarygodności hipoteza zerowa mówiła o tym, że rozkładem składników losowych jest rozkład wykładniczy, natomiast hipoteza alternatywna wskazuje, że innowacje mają rozkład Weibulla. Dla klasycznych modeli ACD statystyka testowa $LR = 306,24$ zaś dla modeli log-ACD $LR = 282,12$. Obie statystyki znajdują się w obszarze krytycznym, dlatego hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie istotności 0,05, na korzyść hipotezy alternatywnej mówiącej o tym, że składniki losowe mają warunkowy rozkład Weibulla.

Dla danych bez wewnątrzdziennej cykliczności wyniki estymacji zostały przedstawione poniżej, w Tabeli 11. Tabela wynikowa wskazuje, że większość parametrów jest statystycznie nieistotna na powszechnie przyjmowanych poziomach istotności. Błędy średnie szacunku są na o wiele wyższym poziomie niż w przypadku modelowania danych z efektem sezonowości. Można zauważyć, że warunek nieujemności w przypadku modelu ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym nie został spełniony dla parametru β , jednak wynikać to będzie z błędu numerycznego; dla innych parametrów modeli klasycznych założenie to jest spełnione. Oceny parametrów α specyfikacji podstawowych

są dodatnie, tak więc zjawisko nadmiernego rozproszenia danych nadal występuje, nawet po eliminacji efektu cykliczności wewnątrzdziennej. Parametry β każdego oszacowanego modelu są na moduł mniejsze od 1 co wskazuje, że procesy te są stacjonarne.

Tabela 11

Estymacja MNW modeli ACD dla danych bez efektu wewnątrzdziennej sezonowości

Warunkowy rozkład wykładniczy							
Model ACD				Model log-ACD			
AIC		10974,03		AIC		10972,89	
Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p	Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p
ω	0,9792	0,36	0,0059	ω	-0,0133	0,02	0,444
α	0,0121	0,01	0,3279	α	0,0048	0,01	0,6434
β	-0,0098	0,36	0,9783	β	0,1186	0,47	0,8014
Warunkowy rozkład Weibulla							
Model ACD				Model log-ACD			
AIC		10880,54		AIC		10869,91	
Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p	Parametr	Ocena	Błąd śr. szacunku	p
ω	0,9562	0,41	0,0189	ω	-0,0464	0,03	0,1075
α	0,0108	0,01	0,4233	α	-0,0082	0,00	0,0176
β	0,0131	0,42	0,9747	β	-0,9463	0,02	0,0000
γ	0,9066	0,01	0,0000	γ	0,907	0,01	0,0000

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie oszacowanych ocen MNW obliczono bezwarunkowe wartości oczekiwane dla specyfikacji klasycznych ACD. Dla modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym bezwarunkowa wartość oczekiwana czasu trwania zmiany kierunku ceny bez efektu sezonowości wyniósł około 0,9814, natomiast dla modelu z warunkowym rozkładem Weibulla $E(x) = 0,9796$.

Można zauważyć, że ze względu na wybrany rozkład warunkowy, parametry w tych samych specyfikacjach modeli różnią się diametralnie. Przykładem może być parametr ω w modelach logarytmicznych — dla modelu z warunkowym rozkładem wykładniczym jest aż 350% niższy od swego odpowiednika

w modelu z warunkowym rozkładem Weibulla. Również znaki stojące przy danych parametrach różnią się w tych samych specyfikacjach. Można na podstawie tej obserwacji wysnuć wniosek, że dla danych odsezonowanych stabilność parametrów jest o wiele niższa niż dla tych z efektem cykliczności wewnątrz-dziennej. Parametry γ dla modeli z warunkowym rozkładem Weibulla (zarówno klasycznych jak i log-ACD) są o 10% niższe od γ w modelach z warunkowym rozkładem wykładniczym.

Najniższą wartość AIC, a zarazem najlepszy model, zaznaczono w powyższej tabeli wyników. Ranking modeli ACD dla danych odsezonowanych przedstawiono poniżej.

Tabela 12

Ranking modeli ACD dla danych bez efektu wewnątrzdziennej sezonowości

Pozycja	Model	AIC
1.	log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla	10869,91
2.	ACD z warunkowym rozkładem Weibulla	10880,54
3.	log-ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym	10972,89
4.	ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym	10974,03

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie kryterium informacyjnego AIC najlepszym modelem dla danych poddanych odsezonowaniu jest specyfikacja log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla. Jak wcześniej, poprawność rankingu potwierdzają przeprowadzone testy statystyczne. Ponownie w przybliżonym teście t -Studenta hipoteza zerowa mówiła o tym, że parametr $\gamma = 1$. Odpowiednio dla specyfikacji podstawowej ACD i logarytmicznej ACD statystyki testowej kształtują się na następujących poziomach: $t = -9,34$ oraz $t = -9,3$. Oznacza to, że na poziomie istotności równej 0,05 znajdują się one w obszarze krytycznym, a więc przy tej istotności hipoteza zerowa została odrzucona. Dla danych odsezonowanych również warunkowy rozkład wykładniczy nie jest preferowany, co odzwierciedlone jest w rankingu. Podobnie jak wcześniej, w teście ilorazu wiarygodności hipoteza zerowa mówi, że rozkładem składników losowych jest rozkład wykładniczy, natomiast hipoteza alternatywna głosi, że rozkładem innowacji jest rozkład Weibulla. Statystyki testowe $LR = 95,47$ dla modeli podstawowych oraz $LR = 104,98$ dla modeli log-ACD znajdują się w obszarze krytycznym przy istotności na poziomie 0,05. Zatem odrzucona została hipoteza zerowa na korzyść alternatywnej, która głosi, że rozkładem warunkowym jest rozkład Weibulla.

Przeprowadzona analiza ukazała, że pomimo eliminacji efektu sezonowości wewnątrzdziennej ranking oszacowanych modeli ACD nie zmienia się. Niezależnie czy estymuje się dane z sezonowością czy bez, najlepszym modelem jest ten najbardziej skomplikowany pod względem specyfikacji i o ogólniejszej postaci rozkładu warunkowego, czyli model log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla. Fakt, że ranking modeli po odsezonowaniu danych się nie zmienia świadczy o tym, że poddawanie szeregu eliminacji cykliczności wewnątrzdziennej jest zbędne. Może to być związane z tym, że efekt sezonowości dla czasów oczekiwania na kolejną zmianę kierunku ceny jest słaby. Badacz nie musi zatem stosować skomplikowanych metod likwidowania efektu sezonowości, jeśli analizuje czas trwania kierunku zmiany ceny.

9. PODSUMOWANIE

Jednym z celów niniejszej pracy był wybór najlepszego modelu ACD opisującego kształtowanie się czasów oczekiwania na kolejną zmianę trendu cenowego akcji PKO BP. Rozważane były tezy, czy rozszerzone modele ACD lepiej modelują badany zbiór danych od podstawowych specyfikacji, jak również czy rozkład warunkowy powinien przyjmować bardziej ogólną postać. Kolejnym celem była analiza wpływu odsezonowania danych metodą estymacji jądrowej na zachowanie się rankingu dopasowania modeli ACD. Dokonano dekompozycji czasów trwania kierunku zmiany ceny na część stochastyczną oraz deterministyczną. Następnie dla każdego badanego dnia osobno oszacowano kształtowanie się funkcji sezonowości wewnątrzdziennej, na podstawie których można było określić jak silny jest efekt cykliczności dla tego typu danych.

Podjęto analizy z wykorzystaniem modeli warunkowego czasu trwania, gdyż pomimo tego, że w literaturze światowej modele te mają już ugruntowaną pozycję, to w Polsce obserwuje się nieliczne prace z zakresu ich zastosowań, zob. Doman (2011), Huptas (2013), Bień (2005). Również decyzja co do badania czasów trwania kierunku zmiany ceny powodowana była tym, że tego typu dane są bardzo rzadko rozważane w literaturze przedmiotu — wiedza na temat ich własności nie jest tak mocno ugruntowana jak na temat właściwości czasów transakcyjnych lub cenowych czasów trwania.

Analiza empiryczna dotyczyła oszacowania modeli warunkowego czasu trwania dla czasów oczekiwania pomiędzy kolejną zmianą kierunku ceny akcji PKO BP w dniach od 4 do 15 maja 2009 roku. Sprawdzone własności badanego szeregu, czy pokrywały się z typowymi własnościami danych transakcyjnych. Można było zaobserwować cechy nadmiernego rozproszenia danych oraz dodatniej autokorelacji spowodowanej występowaniem efektu sezonowości śróddziennej. Zbudowano i oszacowano Metodą Największej Wiarygodności 4 modele dla danych z komponentem sezonowości wewnątrzdziennej: ACD

z warunkowym rozkładem wykładniczym, ACD z warunkowym rozkładem Weibulla, log-ACD z warunkowym rozkładem wykładniczym oraz log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla. Estymację powtórzono dla danych odsezonowanych, po ówczesnej eliminacji efektu cykliczności wewnątrzdziennej przy pomocy regresji Nadaraya i Watsona. W sumie uzyskano zatem 8 modeli. Estymacja wskazała, że dla danych odsezonowanych jednym modelem, którego wszystkie parametry strukturalne były istotne był log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla. Dzięki oszacowaniom MNW obliczono kryteria informacyjne AIC dla każdego badanego modelu. Na podstawie wyznaczonych wartości AIC zbudowano dwa rankingi modeli ACD — odpowiednio dla danych z efektem sezonowości oraz tych odsezonowanych. Najlepszym modelem opisujących oba typy danych okazał się log-ACD z warunkowym rozkładem Weibulla. Potwierdzeniem zajętych pozycji w rankingu były przeprowadzone testy statystyczne, które wykazały wyższość modeli z warunkowymi rozkładami Weibulla. Porównanie rankingów wykazało, że pozycja żadnego z rozważanych modeli nie zmienia się. Oznaczać to będzie, że poddawanie czasów trwania zmiany kierunku ceny zabiegom mającym na celu eliminację sezonowości nie jest konieczne.

Wykazano, że dla badanego szeregu efekt cykliczności wewnątrzdziennej jest na tyle słaby, że odsezonowanie danych nie wpłynie na ranking jakości dopasowania modeli ACD. Jednak może być to prawdą jedynie w przypadku, gdy do eliminacji sezonowości wykorzystana się opisaną regresję Nadaraya i Watsona. Dlatego bardziej wnikliwa analiza własności czasów trwania kierunku zmiany ceny wydaje się być atrakcyjnym polem dalszych badań.

BIBLIOGRAFIA

- Adresen T.G., Davis R.A., Kreiss J.F., Mikosch T. (2009), *Handbook of Financial Time Series*, Springer.
- Bauwens L., Giot P. (2001), *Econometric Modelling of Stock Market Intraday Activity*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Bauwens L., Giot P. (2000), *The Logarithmic ACD Models: An application to the bid-ask quote process of three NYSE stocks*, *Annales d'Economie et de Statistique* 60.
- Bauwens L., Giot P. (2008), *The Moments of Log-ACD Models*, *Quantative and Qualitative Analysis in Sociela Science*, vol. 2.
- Bień K. (2005), *Wybrane modele ekonometryczne finansowych szeregów czasowych o ultrawysokiej częstotliwości*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Doman M. (2011), *Mikrostruktura giełd papierów wartościowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Doman M. (2006), *Modelowanie Mikrostruktury Polskiego Rynku Kapitałowego*, *Zeszyty Naukowe Katedry Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu* 78, s. 150–166.
- Engle R.F., Russel J.R. (1998), *Autoregressive Conditional Duration: A new model for irregularly spaced transaction data*, *Econometrica*, vol. 66, no. 5.
- Härdle W. (1992), *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press.

- Heiler S. (1999), *A survey on Nonparametric Time Series Analysis*, CoFE Discussion Paper no. 9906, University of Konstanz.
- Huptas R. (2013), *Modele ACD i wnioskowanie bayesowskie w analizie danych transakcyjnych z polskiego rynku akcji*, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.
- Kufel T. (2007), *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRET*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Madhavan A. (2000), *Market Microstructure: A survey*, Journal of Financial Markets 3.
- O'Hara M. (1995), *Market Microstructure Theory*, Blackwell, Cambridge MA.
- Pacurar M. (2006), *Autoregressive Conditional Duration (ACD) Models in Finance: A survey of the Theoretical and Empirical Literature*, School of Business Administration, Dalhousie University.

WŁASNOŚCI EMPIRYCZNE CYKLU FINANSOWEGO — ANALIZA PORÓWNAWCZA CZECH, POLSKI, WĘGIER, WIELKIEJ BRYTANII I USA¹

ŁUKASZ LENART

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Matematyki
e-mail: lukasz.lenart@uek.krakow.pl

MATEUSZ PIPIEŃ

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych
e-mail: eepipien@cyf-kr.edu.pl

ABSTRACT

Ł. Lenart, M. Pipień. *Empirical properties of the financial cycle — comparative analysis for Czech Republic, Great Britain, Hungary, Poland and USA*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2015, 56: 81–112.

We discuss the notion of the financial cycle indicating its novelty within the research project of analysing the cyclical nature of fluctuations of economic systems. We focus on the observed series of credit and make formal statistical inference about the properties of the cycles in case of five countries, namely Czech Republic, Great Britain, Hungary, Poland and USA.

The non-standard subsampling procedure and discrete spectral characteristics of almost periodically correlated time series are applied to make formal statistical inference about the cycle. We extract the cyclical component and confront empirical properties of the financial cycle for small open economy with those established so far in case of developed economies.

This research is based partially on the results from Lenart and Pipień (2013a) and Lenart and Pipień (2015).

STRESZCZENIE

Podjęte w opracowaniu zagadnienie cykliczności w systemie finansowym jest nową odsłoną klasycznych, bo rozważanych od ponad 160-ciu lat, badań nad cykliczną naturą zjawisk w ekonomii. Celem badań było wypracowanie metod wnioskowania statystycznego w celu określenia cech cyklu finansowego i w szczególności kredytowego. W pracy zaproponowano nieparametryczny

¹ Badania finansowane przez Narodowe Centrum Nauki w ramach grantu OPUS, numer grantu DEC-2013/09/B/H54/01945.

test, umożliwiającą wnioskowanie o statystycznie istotnych częstościach dyskretnego spektrum procesu opisującego cykliczne fluktuacje.

Uzyskane rezultaty empiryczne pozwalają stwierdzić, że cechy cyklu kredytowego dla Polski mają charakter swoisty i znacznie różnią się od tych otrzymanych dla rozwiniętych gospodarek. Cykl kredytowy trwa w przypadku Polski około dekady i jest podobny do cyklu uzyskanego w przypadku Czech, trwającego 12 lat.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

financial cycle, credit cycle, almost periodically correlated processes

cykl finansowy, cykl kredytowy, procesy prawie okresowo skorelowane

1. MOTYWY I CEL BADAŃ NAD NATURĄ CYKLI FINANSOWYCH

W tym rozdziale przedstawiono naturę cykli finansowych w nieco szerszym kontekście niż w pracy Lenart i Pipień (2015). Część z motywów przedstawiona w tej pracy została przytoczona poniżej.

Badania nad cykliczną naturą aktywności w systemach ekonomicznych to jeden z najważniejszych projektów badawczych w ekonomii. Początki analiz cykliczności na gruncie empirycznym datuje się na lata 40-te XX wieku, przywołując fundamentalną pracę Burns i Mitchel (1946). Jednak rozważania teoretyczne na temat cykli w ekonomii mają swe korzenie w połowie XIX wieku; por. Juglar (1856). Przed globalnym kryzysem finansowym z końca pierwszej dekady XXI wieku, zasadnicze pytania związane z cyklicznością aktywności gospodarczej były formułowane na gruncie sfery realnej gospodarki. W ten sposób przez wiele dekad od pojawienia się cytowanej powyżej pracy Burns i Mitchel (1946), cykl koniunkturalny stanowił centrum zainteresowań badawczych. Jak piszą Drehman i inni (2012) przed globalnym kryzysem wiodący nurt badań wynikał z przekonania, że fluktuacje w systemie finansowym, obserwowane w postaci cyklicznych zmian w aktywności podmiotów na rynkach finansowych, występowania bąbli spekulacyjnych i innych zjawisk, mają charakter drugorzędny. Dobrym przykładem takiego stanowiska jest monografia Woodford (2003). Stąd idea występowania cykli w systemie finansowym nie była reprezentowana w głównym nurcie badań.

Globalny kryzys finansowy, który wywołał poważną recesję w wielu rozwiniętych gospodarkach, spowodował zasadnicze zmiany w wiodących zagadnieniach makroekonomii i finansów. Budowa formalnego modelu funkcjonowania rynków finansowych oraz identyfikacja roli jaką sytuacja w systemie finansowym może odgrywać w modelach gospodarki, stanowią obecnie najważniejsze zagadnienia podejmowane na gruncie makroekonomii. W konsekwencji, w ostatnich latach, obserwuje się powrót idei cykliczności w sektorze finansów i badań na jej naturę; por. Borio (2012), Drehmann i inni (2012), Aikman i inni (2012), Schularick i Taylor (2012), Jordá i inni (2011), Dell'Arriccia i inni (2012).

Próba konceptualizacji na gruncie teoretycznym cyklicznej natury zmian aktywności w systemie finansowym była rozważana już kilkanaście lat przed pracą Burnsa i Mitchela. Rozważania teoretyczne w tym zakresie można bowiem znaleźć w monografii Fisher (1933). Jednak teorie, które postulowały istnienie cyklu finansowego nie były obecne w głównym nurcie przez całe dekadę XX wieku. Istotne rozważania w tym zakresie prowadził Hyman Minsky. W pracy Minsky (1982) rozwinął on koncepcję zwaną "paradygmatem Wall Street", stanowiącą podstawy budowy finansowej teorii wyjaśniającej fluktuacje w inwestycjach i oryginalnej teorii cyklu koniunkturalnego, silnie związanego z wahaniami aktywności w systemie finansowym. Zagadnieniem węzłowym teorii Minsky'ego jest tzw. hipoteza niestabilności finansowej (ang. *Financial Instability Hypothesis*, FIH). Jak pisał Minsky (1990), produkcja w systemie ekonomicznym jest warunkowana wymianą i — przede wszystkim — alokacją (dóbr, czynników produkcji). Skoro alokacja oznacza nabywanie czynników produkcji na rynkach, finansowanie działalności podmiotów gospodarczych odgrywa ważną rolę w procesie produkcji. Analizując tę kwestię na gruncie empirycznym w przypadku gospodarki amerykańskiej, Minsky wskazał kredyt jako podstawowe źródło, które umożliwiało działalność podmiotów gospodarczych. Jeśli zaś kredyt jest produktem pochodzącym z systemu finansowego, fluktuacje w tej sferze mogą odgrywać ważną rolę w zmianach aktywności gospodarczej i mieć wpływ na cykl koniunkturalny.

Minsky prowadził też badania nad rozwojem systemu finansowego i wskazał, że teoria kreatywnej destrukcji, zaproponowana przez Schumpetera, bardzo dobrze pasuje do podmiotów działających na rynku finansowym. Funkcjonowanie w środowisku silnej konkurencji, jak również ewolucja i zmiana jako podstawowe elementy rozwoju, pasują o wiele bardziej do bankowości i finansów niż, jak to sugerował pierwotnie Schumpeter, do przedsiębiorstw produkcyjnych. Dodatkowo, w przypadku podmiotów działających w systemie finansowym, silne podporządkowanie aktywności kryterium zysku, stanowi zasadniczy element odróżniający je od podmiotów działających w innych sferach.

Badania empiryczne nad naturą cyklu finansowego zostały zapoczątkowane analizami procykliczności systemu finansowego, które stały się niezwykle popularne w ostatnich 15 latach; por. Borio i inni (2001), Danielsson i inni (2004), Kashyap i Stein (2004), Brunnermeier i inni (2009), Adrian i Shin (2010) czy Olszak i Pipień (2016). Zasadniczym celem badań w tym zakresie nie było określenie cech cyklu finansowego, ale empiryczna weryfikacja hipotez o istotności wpływu wybranych wskaźników na cykliczną naturę zmian aktywności w systemie finansowym. W konsekwencji, w ostatnich dwóch dekadach pojawiła się bogata literatura, w której podejmowano zagadnienie cykliczności systemu finansowego, analizując ten fenomen zarówno od strony mikroekonomicznej i makroekonomicznej. Z mikroekonomicznego punktu widzenia frykcje finansowe pomiędzy podmiotami udzielającymi kredytu a kredytobiorcami, takie jak ograniczenia w zabezpieczeniach, asymetria

informacji i inne, mogą stanowić wyjaśnienie cyklicznie obserwowanych w systemie finansowym okresów dużej i niskiej aktywności, szczególnie w odniesieniu do fluktuacji w agregacie kredytu; por. Kiyotaki and Moore (1997), Holmstrom and Tirole (1997), Bernanke et al. (1999), Lorenzoni (2008), Gorton and He (2008), Bianchi (2011) and others. Empiryczna makroekonomiczna perspektywa też była podejmowana jako ważna, ponieważ funkcjonowało silne przekonanie istnienia powiązań pomiędzy sferą realną i systemem finansowym. Taki punkt widzenia, sformułowany po raz pierwszy w pracy Fisher (1933), był przedmiotem badań w pracach Bernanke i inni (1996), Gilchrist i Zakrajsek (2008). Przegląd literatury w tym zakresie przedstawia Sinai (1992).

Rola rynków finansowych w gospodarce została też szczególnie silnie podniesiona w pokryzysowej debacie nad właściwym kształtem polityki makroostrożnościowej; por. ESRB (2014). Potrzeba budowy efektywnego systemu, który umożliwiałby ograniczenie ryzyka systemowego wynikał z poglądu, że nadmierne wahania w cenach aktywów i w agregacie kredytu mogą być szkodliwe dla wzrostu gospodarczego. Pogłębione badania na empirycznych własnościach cyklu finansowego, w szczególności cyklu kredytowego, mogą być umotywowane istnieniem ryzyka, że zbyt silne tempo wzrostu kredytu może w średnim okresie spowodować spowolnienie lub w ekstremalnych przypadkach głęboką recesję. Stąd wiele proponowanych narzędzi polityki makroostrożnościowej jest ściśle podporządkowane takiemu działaniu, aby zmniejszyć prawdopodobieństwo wystąpienia kryzysu finansowego, poprzez działanie antycykliczne wobec cyklu kredytowego. Przykłady takich narzędzi to antycykliczny bufor kapitałowy, zmienne w czasie wskaźniki LTV, DTI i inne. Jak piszą Galati i Moessner (2014) ocena efektywności działania narzędzi polityki makroostrożnościowej jest nadal przedmiotem intensywnej debaty, jednak bez wątplenia cykl finansowy — w szczególności cykl kredytowy — przenika wszystkie aspekty polityki makroostrożnościowej; por. ESRB (2014).

Pomimo istotnej roli wahań cyklicznych obserwowanych w systemie finansowym, które omówiono skrótowo powyżej, literatura nie wypracowała formalnej definicji cyklu finansowego. Jak pisze Borio (2012) nie ma konsensusu jeśli chodzi o definicję tego rodzaju cykliczności. Sam proponuje opisową definicję cyklu finansowego jako skutki istnienia wzajemnie oddziałujących interakcji pomiędzy percepcją wartości i ryzyka, skłonnością do ryzyka i ograniczeń w dostępie do finansowania. Interakcje te mogą wywoływać cykliczne efekty w postaci silnych wzrostów i spadków aktywności podmiotów w systemie finansowym. Może to z kolei oddziaływać procyklicznie na koniunkturę i powodować nierównowagę makroekonomiczną i poważne problemy finansowe podmiotów (*self-reinforcing interactions between perceptions of value and risk, attitudes towards risk and financing constraints, which translate into booms followed by busts. These interactions can amplify economic fluctuations and possibly lead to serious financial distress and economic dislocations*; por. Borio (2012)).

Na potrzeby analiz empirycznych należy rozważyć zestaw zmiennych, które w oszczędny i jednocześnie wyczerpujący sposób są w stanie opisać wahania cykliczne w systemie finansowym. W doborze wskaźników do badań istotne znaczenie powinno mieć występowanie kryzysów finansowych oraz powiązania z koniunkturą gospodarczą. Drehmann i inni (2012) sugerują, że najlepszym wyborem do badań nad empirycznymi własnościami cyklu finansowego jest agregat kredytu i ceny nieruchomości. Dodatkowo literatura dostarcza rezultatów badań nad własnościami cyklicznymi takich wskaźników, jak ceny akcji, zmienność, premia za ryzyko, wskaźniki niewypłacalności, NPL (ang. *non-performing loans*), ceny aktywów, wskaźniki dźwigni finansowej i inne; por. English i inni (2005), Ng (2011), Hatzius i inni (2011). Odrębny i jednocześnie wiodący kierunek badań dotyczy własności cyklu kredytowego; Aikman i inni (2010), Schularick i Taylor (2009), Jordá i inni (2011), Dell'Arriccia i inni (2012).

Na podstawie badań empirycznych zamieszczonych w pracy Drehmann i inni (2012) można stwierdzić, że cykl finansowy ma okres znacznie dłuższy niż cykl koniunkturalny. Przeciętna długość trwania cyklu uzyskana w powyższej pracy, dla siedmiu uprzemysłowionych gospodarek, to 16 lat, jednak w pewnych przypadkach okres ten może przekraczać dwie dekady. Amplituda cyklu finansowego jest też większa niż amplituda cyklu koniunkturalnego. Drehmann i inni (2012) rozważali miesięczne szeregi czasowe dla Australii, Niemiec, Japonii, Norwegii, Szwecji, Wielkiej Brytanii i USA. W pracy Claessens i inni (2011) analizy cyklu finansowego obejmowały 21 rozwiniętych krajów OECD, w okresie czasu od 1960 do 2007. Borio (2012) wskazuje też na jeden element ważny w analizach empirycznych. Skoro metody bazujące na procedurach filtracji obserwowanych szeregów czasowych są dominujące w analizach cykliczności, wymagana liczba obserwacji determinuje zbiór krajów podlegających analizie. Uzyskane dotychczas w literaturze własności empiryczne cyklu finansowego dotyczą jedynie tych przypadków, dla których sprawozdawczość statystyczna systemu finansowego daje dostęp do szeregów czasowych miesięcznych obserwacji z co najmniej czterech dekad. Oznacza to, że wnioski mogą nie mieć charakteru ogólnego i pogłębione badania nad własnościami cykli w przypadku gospodarek rozwijających się jest konieczne. Zasadniczym celem podejmowanych badań powinna być zatem weryfikacja hipotezy, czy cechy empiryczne cyklu finansowego dla gospodarek rozwijających się, na przykład Polski i innych krajów Europy środkowo-wschodniej, mają charakter swoisty dla regionu, czy też uzyskane dotychczas wyniki badań na podstawie gospodarek rozwiniętych są uniwersalne. Otwiera to pole badań nad niestandardowymi metodami analiz cykliczności, w szczególności takimi, które umożliwiają określenie empirycznych cech w przypadku dostępu do krótszych szeregów czasowych.

Zasadniczym celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie oryginalnej procedury weryfikacji wybranych cech cyklu finansowego i przedstawienie działania proponowanych metod w przypadku cyklu kredytowego dla Polski.

W proponowanym podejściu zastosowano metodę podpróbki (ang. *sub-sampling*) w celu budowy formalnych procedur testowania cech cyklu takich, jak częstotliwość i amplituda. Cykliczne zmiany, będące przedmiotem analiz, mogą być opisane klasą procesów stochastycznych prawie okresowo skorelowanych (ang. *Almost Periodically Correlated*, APC). Procesy APC stanowią uogólnienie klasy procesów okresowo skorelowanych (ang. *Periodically Correlated*, PC) wprowadzonych w pracy Gladyshev (1961). Rozważana klasa procesów nie jest zbyt popularna w badaniach ekonomicznych, jednak w zastosowaniach potwierdziła swoje lepsze własności wobec klasy procesów stacjonarnych, której jest uogólnieniem; por. Parzen i Pagano (1979), Osborn i Smith (1989), Franses (1996), Bollerslev i Ghysels (1996), Franses i Boswijk (1996), Burridge i Taylor (2001), Lenart i Pipień (2013a,b). Procesy okresowo skorelowane są niestacjonarne w ścisłym sensie. Niestacjonarność jest spowodowana zmiennością w czasie wartości oczekiwanej, która jest opisana przez funkcję okresową argumentu czasu. W przypadku klasy APC wartość oczekiwana jest opisana przez funkcję prawie okresową, co nakłada słabsze założenia co do regularności zmian w czasie poziomu procesu, jednak nadal umożliwia formalne modelowanie i identyfikację charakterystyk.

W proponowanym podejściu odchylenia od długookresowego trendu badanego wskaźnika mogą być opisane procesem APC. W ten sposób uogólnia się standardowe podejście, wykorzystywane w badaniach cykliczności koniunkturalnej, w którym odchylenia od długookresowego trendu są stacjonarne. Proponowane podejście bazujące na założeniach stanowiących uogólnienie klasycznego schematu umożliwia testowanie standardowego podejścia jako przypadku szczególnego.

2. ZAAWANSOWANE METODY SPEKTRALNE W ANALIZIE CYKLICZNOŚCI

W tej części przedstawiono podstawowe pojęcia i autorskie podejście metodologiczne do analiz cykliczności obserwowanych zjawisk. Omawiamy własności klasy procesów stochastycznych prawie okresowo skorelowanych, reprezentację spektralną wartości oczekiwanej procesu oraz schemat wnioskowania o cechach cykli wraz z procedurą ekstrakcji komponentu cyklicznego z obserwowanego szeregu czasowego. Część omówionych tu pojęć i metod została przedstawiona w nieco węższym kontekście w pracach Lenart i Pipień (2013a) oraz Lenart i Pipień (2015).

Pojęcia funkcji okresowych i prawie okresowych są pierwotne w stosunku do definicji szeregów czasowych okresowo i prawie okresowo skorelowanych w szerszym sensie. Po raz pierwszy klasę szeregów czasowych okresowo skorelowanych (ang. *periodically correlated*) zdefiniował Gladyshev (1961). Szeregi czasowe okresowo skorelowane oraz odpowiednio prawie okresowo skorelo-

wane nazywane są też szeregami cyklostacjonarnymi, lub prawie cyklostacjonarnymi (ang. *cyclostationary time series* oraz odpowiednio *almost cyclostationary time series*); por. Gardner i inni (2006). Rozważmy szereg czasowy $\{X_t; t \in Z\}$ o funkcji wartości oczekiwanej $\mu(t) = E(X_t) < \infty$ oraz funkcji autokowariancji $B(t, \tau) = \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) < \infty$ gdzie $t, \tau \in Z$. Wprowadźmy definicję szeregów czasowych okresowo skorelowanych.

Definicja (Gladyshev 1961): *Mówimy, że szereg czasowy $\{X_t; t \in Z\}$ jest okresowo skorelowany w sensie szerszym (w skrócie OS) z okresem równym T , jeśli dla każdego $\tau \in Z$ funkcje $\mu(t)$ oraz $B(t, \tau)$ są funkcjami okresowymi zmiennej całkowitoliczbowej t z okresem równym T .*

Aby zdefiniować klasę szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych w sensie szerszym podamy najpierw definicję funkcji prawie okresowej, zaczerpniętą z monografii Corduneanu (1989).

Definicja (Corduneanu 1989): *Funkcję zmiennej całkowitej $f: Z \rightarrow R$ nazywamy prawie okresową, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita N_ε , taka że w każdym zbiorze N_ε — elementowym kolejnych liczb całkowitych istnieje taka liczba p , dla której zachodzi:*

$$\sup_{t \in Z} |f(t+p) - f(t)| < \varepsilon.$$

Każda funkcja okresowa o okresie równym T jest również funkcją prawie okresową. Rodzina funkcji prawie okresowych jest zamknięta ze względu na operacje dodawania oraz iloczynu; por. Corduneanu (1989). Funkcje prawie okresowe stanowią topologiczne domknięcie rodziny funkcji okresowych. Oznacza to, że każdą funkcję prawie okresową można przybliżyć z dowolną dokładnością pewną funkcją okresową. Podstawową własnością funkcji prawie okresowej $f: Z \rightarrow R$ jest fakt, iż granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+n} f(t)$$

istnieje i nie zależy od wartości parametru całkowitoliczbowego t_0 ; por. Corduneanu 1989. Granicę tą nazywamy wartością średnią funkcji prawie okresowej. Własność ta jest dalej wykorzystywana w budowie metod w estymacji parametrów utożsamianych z częstotliwościami odpowiedzialnymi za wahania cykliczne.

Definicja klasy szeregów czasowych prawie okresowo skorelowanych jest zatem naturalnym uogólnieniem definicji klasy szeregów czasowych okresowo skorelowanych. W szerszej z definicji klasie procesów wartość oczekiwana i kowariancje są opisane funkcjami prawie okresowymi. Mówi o tym poniższa definicja.

Definicja: Mówimy, że szereg czasowy $\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$ jest prawie okresowo skorelowany w sensie szerszym (w skrócie POS), jeśli dla każdego $\tau \in \mathbb{Z}$ funkcje $\mu(t)$ oraz $B(t, \tau)$ są funkcjami prawie okresowymi zmiennej całkowitoliczbowej t .

Każdy szereg czasowy stacjonarny jest również okresowo skorelowany, zaś każdy szereg czasowy okresowo skorelowany jest prawie okresowo skorelowany. Aby w sposób intuicyjny wyjaśnić różnicę pomiędzy funkcją okresową i prawie okresową, rozważmy prosty przykład funkcji okresowej $f(t)$ o okresie równym $T=12$. Korzystając z elementarnych własności funkcji okresowych funkcja f ma reprezentację Fouriera postaci

$$f(t) = \sum_{k=0}^{T-1} b_k e^{it\omega_k}, \quad (1)$$

gdzie b_k są liczbami zespolonymi, zaś częstotliwości ω_k są równe $\omega_k = 2k\pi/T$ dla $k=0, 1, \dots, T-1$. Charakterystyczną własnością funkcji okresowej jest to, że w reprezentacji (1) częstotliwości ω_k są ściśle zależne od okresu T . Zakładając natomiast, że funkcja $f(t)$ jest funkcją prawie okresową postaci

$$f(t) = \sum_{k=0}^K b_k e^{it\omega_k}, \quad (2)$$

zakładamy jedynie, że ω_k są liczbami z przedziału $[0, 2\pi)$, zaś K jest dowolną liczbą naturalną i nie narzucamy funkcyjnej relacji pomiędzy tymi charakterystykami spektrum.

W dalszej kolejności przedstawiono reprezentację funkcji wartości oczekiwanej i autokowariancji w postaci szeregów Fouriera:

$$\mu(t) = \sum_{\psi \in \Psi} m(\psi) e^{i\psi t}, \quad (3)$$

$$B(t, \tau) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau} a(\lambda, \tau) e^{i\lambda t}, \quad (4)$$

gdzie współczynniki $m(\psi)$ oraz $a(\lambda, \tau)$ są równe odpowiednio:

$$m(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mu(t) e^{-i\psi t},$$

$$\alpha(\lambda, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B(j, \tau) e^{-i\lambda j}.$$

Zasadniczym rezultatem, który umożliwia zbudowanie narzędzi statystycznych w identyfikacji istotnych częstotliwości opisujących wartość oczekiwaną procesu jest spostrzeżenie, że zbiory $\Psi = \{\psi \in [0, 2\pi) : m(\psi) \neq 0\}$ oraz $\Lambda_\tau = \{\lambda \in [0, 2\pi) : a(\lambda, \tau) \neq 0\}$ są przeliczalne; por. Corduneanu (1989). Jeśli szereg czasowy jest okresowo skorelowany, wtedy reprezentacje (3) oraz (4) stają się równościami, zaś zbiory Ψ oraz Λ_τ są zawarte w zbiorze $\{2k\pi/T : k=0, 1, \dots, T-1\}$ gdzie T jest długością okresu.

Punktem wyjścia w klasycznej analizie cykli, szczególnie rozwiniętych w zakresie badań koniunktury, jest założenie o stacjonarności wyodrębnionych wahań utożsamianych z wahaniami aktywności gospodarczej. Założenie to nie jest jednak w większości przypadków weryfikowane, poza zastosowaniem testów pierwiastka jednostkowego. Warunek stacjonarności tych wahań jest równoważny z warunkiem, iż mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem procesu prawie okresowo skorelowanego, dla którego zachodzą równości: $\Psi = \{0\}$ oraz $\Lambda = \{0\}$. Równości te nie muszą być jednak uzasadnione, zważywszy na liczne przypadki modelowania makroekonomicznych szeregów czasowych zawierających komponent utożsamiany z wahaniami aktywności gospodarczej przy zastosowaniu modeli o niestacjonarnej, okresowej strukturze funkcji autokowariancji (patrz dla przykładu: Franses i Paap (2004)). Proponowane podejście do badania wahań aktywności gospodarczej stanowi zatem uogólnienie, w ramach którego jest możliwe testowanie przyjmowanego powszechnie założenia o stacjonarności. W proponowanym podejściu modelowanie wahań cyklicznych odbywa się zatem przy słabszych założeniach. Zakłada się bowiem, że podstawowe własności wahań cyklicznych takie jak: długość wahań, amplituda, ich asymetria oraz faza, mogą być modelowane poprzez parametry dyskretnego spektrum szeregu czasowego POS. Korzystając z podstawowej reprezentacji Fouriera funkcji wartości oczekiwanej szeregu czasowego POS pewne częstotliwości w tej reprezentacji będą utożsamiane z interpretowalnymi na gruncie ekonomicznym wahaniami cyklicznymi, inne zaś za wahania sezonowe. Prawie okresowość funkcji wartości oczekiwanej szeregów czasowych POS może przyczynić się do lepszego (w sensie dopasowania empirycznego modelu do danych) opisu cech wahań aktywności gospodarczej.

Niech $\{P_t; t \in \mathbb{Z}\}$ będzie obserwowanym szeregiem czasowym. Dla ustalenia uwagi koncentrujemy się na szeregach obserwowanych z częstotliwością miesięczną². Zakładamy, że $\{P_t; t \in \mathbb{Z}\}$ to szereg czasowy o skończonej bezwarunkowej wartości oczekiwanej, dla dowolnej chwili czasowej $t \in \mathbb{Z}$. Równanie modelu opiera się o założenie, że funkcja wartości oczekiwanej $\mu_P(t) = E(P_t)$ jest sumą funkcji $f(t, \beta)$ argumentu $t \in \mathbb{Z}$ i parametru $\beta \in \mathbb{R}^s$ oraz funkcji prawie okresowej:

$$g(t) = \sum_{\psi \in \Psi_P} m_P(\psi) e^{i\psi t}$$

argumentu $t \in \mathbb{Z}$, gdzie $\Psi_P \subset [0, 2\pi)$. Równanie modelu ma zatem postać

$$\mu_P(t) = f(t, \beta) + g(t) = f(t, \beta) + \sum_{\psi \in \Psi_P} m_P(\psi) e^{i\psi t}. \quad (5)$$

Dla zbioru Ψ_P stosujemy naturalną reprezentację postaci $\Psi_P = \Psi_{P,1} \cup \Psi_{P,2} \cup \Psi_{P,3}$, gdzie zbiór $\Psi_{P,3}$ to zbiór zawierający częstotliwości

² Analogicznie można rozważać szereg czasowy w ujęciu kwartalnym lub innym.

utożsamiane z częstotliwościami odpowiedzialnymi za interpretowalne wahania cykliczne, zbiór $\Psi_{P,2}$ to zbiór częstotliwości odpowiedzialnych za wahania sezonowe, zaś zbiór $\Psi_{P,3}$ to zbiór pozostałych częstotliwości. Do zbioru $\Psi_{P,1}$ zaliczamy takie częstotliwości, które odpowiadają cyklom o długości od półtora roku do nieskończoności³, co oznacza, że $\Psi_{P,1} \cap (0,0.35) = \Psi_{P,1}$.

Zbiór $\Psi_{P,1}$ zawiera zatem częstotliwości będące obiektem zainteresowania. Zbiór $\Psi_{P,2}$ utożsamiamy z przecięciem zbioru Ψ_P ze zbiorem częstotliwości $\{2k\pi/T: k=1,2,\dots,T-1\}$, gdzie T to liczba obserwacji badanego szeregu w roku. Natomiast, zbiór $\Psi_{P,2}$ zawiera pozostałe częstotliwości, np. te odpowiedzialne za interakcję wahań sezonowych i wahań cyklicznych utożsamianych z wahaniami spowodowanymi zmianami w koniunkturze gospodarczej.

W rozważaniach będziemy przyjmować, że funkcja $f(t,\beta)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej drugiego, czyli $f(t,\beta) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_p t^p$, gdzie $p \leq 2$. Wartość parametru p będzie przyjmowana w zależności od wskaźnika makroekonomicznego jako 1 lub 2, po obserwacji graficznej realizacji pierwszych lub drugich różnic rozważanego szeregu czasowego. Zaznaczmy, iż funkcja $f(t,\beta)$ może nie zawierać wyrazu wolnego, ponieważ wyraz wolny jest naturalnym wyrazem szeregu trygonometrycznego $g(t)$.

Poniżej omówiono procedurę identyfikacji i estymacji parametrów modelu (przedstawiony w postaci algorytmu składającego się z czterech etapów).

Etap 1. Osłabienie wahań sezonowych

Zważywszy na fakt, że w większości miesięcznych wskaźników makroekonomicznych obecne są wahania sezonowe spowodowane zmianami pór roku, oczywiste wydaje się być spostrzeżenie, że $\Psi_P \cap \{2k\pi/12: k=1,2,\dots,11\} \neq \emptyset$, co oznacza że zbiór Ψ_P zawiera pewne częstotliwości odpowiedzialne za wahania sezonowe. Identyfikacja parametrów modelu utożsamianych z wahaniami sezonowymi nie jest kluczowym celem podczas badań nad aktywnością gospodarczą. Chcąc wyeliminować wahania sezonowe oraz jednocześnie wzmocnić wahania koniunkturalne będziemy stosować dla rozważanego wskaźnika filtr z rodziny scentrowanej średniej ruchomej. Jedną z możliwości jest wspomniany już operator typu $2 \times 12MA$ (patrz: Makridakis i inni (1998), Brockwell i Davis (2002)). Działając operatorem $2 \times 12MA$ otrzymujemy szereg czasowy $\{Y_t: t \in Z\}$ dla którego $Y_t = L_{2 \times 12}(B)P_t$, gdzie $L_{2 \times 12}(B) = (B^{-6} + 2B^{-5} + \dots + 2B^{-1} + 2 + 2B + \dots + 2B^5 + B^6)/24$ zaś $B^k P_t = P_{t-k}$ dla dowolnych całkowitoliczbowych wartości czasu t i przesunięcia k . Zauważmy, że dla szeregu czasowego $\{Y_t: t \in Z\}$ bezwarunkowa wartość oczekiwana istnieje. Funkcję bezwarunkowej wartości oczekiwanej szeregu czasowego $\{Y_t: t \in Z\}$ można zapisać w następującej postaci:

$$\mu_Y(t) = E(Y_t) = \underbrace{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 t + \dots + \tilde{\beta}_p t^p}_{\tilde{f}(t, \tilde{\beta})} + \sum_{\psi \in \Psi_Y} m_Y(\psi) e^{i\psi t},$$

³ Nie wszystkie częstotliwości z tego zbioru utożsamiamy z wahaniami aktywności gospodarczej.

gdzie $\Psi_Y \cap \{2k\pi/12: k=1,2,\dots,11\} = \emptyset$ oraz $\Psi_Y = \Psi_P \setminus \{2k\pi/12: k=1,2,\dots,11\}$. Oznacza to, że szereg czasowy $\{Y_t: t \in \mathbb{Z}\}$ zawiera te same częstotliwości w zbiorze Ψ_Y co szereg czasowy $\{P_t: t \in \mathbb{Z}\}$ w zbiorze Ψ_P , po odjęciu częstotliwości odpowiadających za wahania sezonowe. Dodatkowo, dla współczynników $m_P(\psi)$ oraz $m_Y(\psi)$ zachodzi zależność:

$$m_Y(\psi) = L_{2 \times 12}(e^{-i\psi})m_P(\psi).$$

Dla współczynników $\tilde{\beta}_k$ oraz β_k otrzymujemy $\tilde{\beta}_k = \beta_k$, dla $k=p$ oraz $k=p-1$, co oznacza, że dla $p=0$ oraz $p=1$ współczynniki wielomianów się nie zmieniają. W przypadku, gdy $p=2$ zmienia się jedynie wyraz wolny wielomianu.

Etap 1 będzie wykonywany dla wszystkich rozważanych wskaźników makroekonomicznych podczas analizy cykliczności koniunkturalnej bez względu na uzasadnienie obecności wahań sezonowych. Powodem są własności jakie posiada filtr 2×12 MA, po zastosowaniu którego wahań przypadkowe zostają osłabione, co ułatwi kolejne etapy analizy.

Etap 2. Eliminacja trendu

Kolejnym krokiem, który proponujemy w algorytmie identyfikacji częstotliwości zbioru Ψ_P w reprezentacji (5) jest zastosowanie operatora eliminującego ewentualny trend z szeregu czasowego $\{P_t: t \in \mathbb{Z}\}$. Przypomnijmy, że w pracy rozważamy jedynie przypadek, w którym funkcja $f(t, \beta)$ jest wielomianem stopnia p , gdzie $p \leq 2$. Rozważymy zatem dwa przypadki.

Przypadek 1. Niech $p=1$. Stosując operator $L_1(B) = (1-B)$ dla szeregu czasowego średniej ruchomej otrzymujemy szereg czasowy $\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$ postaci $X_t = L_1(B)Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (P_{t+6} - P_{t-6} + P_{t+5} - P_{t-7})/24$. Wartość oczekiwana dla szeregu czasowego $\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$ istnieje i jest funkcją prawie okresową daną wzorem:

$$\mu_X(t) = \beta_1 + \sum_{\psi \in \Psi_X} m_X(\psi) e^{i\psi t},$$

gdzie $\Psi_X = \Psi_P \setminus \{2k\pi/12: k=0,1,2,\dots,11\}$. Dodatkowo:

$$m_X(\psi) = L_1(e^{-i\psi})m_Y(\psi) = L_1(e^{-i\psi})L_{2 \times 12}(e^{-i\psi})m_P(\psi).$$

oraz $\Psi_X \cap (0,0.35) = \Psi_{P,1}$. Należy zwrócić uwagę, iż wartość oczekiwana szeregu czasowego $\{X_t: t \in \mathbb{Z}\}$ jest funkcją prawie okresową, którą można identyfikować z dynamiką zmian szeregu czasowego $\{P_t: t \in \mathbb{Z}\}$.

Przypadek 2. Dla $p=2$ stosujemy operator $L_2(B) = (1-B)^2$. W ten sposób otrzymujemy szereg $X_t = (1-B)(P_{t+6} - P_{t-6} + P_{t+5} - P_{t-7})/24$ o wartości oczekiwanej postaci:

$$\mu_X(t) = \tilde{\beta}_2 + \sum_{\psi \in \Psi_X} m_X(\psi) e^{i\psi t},$$

gdzie $m_X(\psi) = L_2(e^{-i\psi})m_Y(\psi) = L_2(e^{-i\psi})L_{2 \times 12}(e^{-i\psi})m_P(\psi)$,
 $\Psi_X = \Psi_P \setminus \{2k\pi/12 : k=0, 1, 2, \dots, 11\}$. Analogicznie jak w przypadku, gdy $p=1$ otrzymujemy $\Psi_X \cap (0, 0.35) = \Psi_{P,1}$.

W tym miejscu warto wyjaśnić, dlaczego przed przystąpieniem do wyznaczania pierwszych lub drugich różnic nie wykonujemy znanych w literaturze testów pierwiastka jednostkowego ADF (*Augmented Dickey–Fuller*). Powodem jest brak w literaturze uzasadnienia dla stosowania testu ADF w przypadku gdy zakładamy, że wartość oczekiwana rozważanego szeregu czasowego zależy od wartości nietrywialnej funkcji prawie okresowej. Operacja różnicowania, która jest wykonywana w Etapie 2 jest postrzegana w kategoriach filtru, dzięki któremu wyeliminowany zostanie ewentualny składnik trendu liniowego, bądź trendu stochastycznego. Nieuzasadnione stosowanie filtru różnicowania nie powoduje bowiem utraty żadnych informacji (z formalnego punktu widzenia) o częstotliwościach utożsamianych z cyklicznymi zmianami mającymi uzasadnienie ekonomiczne.

Etap 3. Identyfikacja i estymacja częstotliwości

Identyfikacja i estymacja częstotliwości w zbiorze Ψ_P dla szeregu czasowego $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$ sprowadza się zatem do ich identyfikacji na podstawie realizacji szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$. W literaturze dotyczącej analizy wahań aktywności gospodarczej znaleźć można również przykłady zastosowania szeregów Fouriera jako metody aproksymacji funkcji trendu. W monografii Milas i inni (2006) rozważono model ze zmiennym w czasie wyrazem wolnym, który aproksymowano przy zastosowaniu szeregów Fouriera. Podejście to jest jednak nieco inne od tego, gdzie analiza fourierowska jest stosowana w celu identyfikacji i estymacji parametrów mogących mieć wpływ na obraz wahań koniunkturalnych. Funkcja trendu nie podlega zaś estymacji, jak to miało miejsce w przypadku wyników zawartych w Milas i inni (2006).

Na potrzeby dalszego rozumowania sformułujemy dodatkowe założenie dotyczące szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$. Założenie to umożliwi identyfikację częstotliwości zbioru Ψ_P szeregu czasowego $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ na podstawie realizacji szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$. Przyjmijmy zatem, że szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest szeregiem czasowym POS, co oznacza, że charakteryzuje się również prawie okresową funkcją autokowariancji. Założenie to jest konieczne w celu identyfikacji częstotliwości zbioru Ψ_P metodą podpróbki. Nie należy oceniać tego założenia jako nazbyt restrykcyjnego, ponieważ szereg ten powstał w wyniku zastosowania operatora różnicowania i operatora średniej ruchomej dla pierwotnych danych. Dodatkowo w wielu cytowanych wcześniej artykułach oraz monografiach dotyczących analizy wskaźników makroekonomicznych (patrz

dla przykładu: Parzen i Pagano (1979), Osborn i Smith (1989), Franses i Boswijk (1996), Franses (1996), Franses i Ooms (1997), Franses i Dijk (2005)) przyjmuje się nieco silniejsze założenia o okresowej strukturze funkcji autokowariancji.

W celu identyfikacji parametrów podlegających wnioskowaniu w zbiorze $\Psi_{P,1}$ stosujemy statystykę testową $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\}) = \sqrt{n}|\hat{r}_n(\psi)|$ oraz odpowiadające wartości krytyczne $\tilde{g}_{n,b}(0.99\%)$ dla szeregu $\{X_t: t \in Z\}$. Przypomnijmy, że statystyka testowa $\tilde{\Pi}_n(\{\psi\})$ może być identyfikowana z wartością statystyki testowej $\Pi_n(\{\psi\}) = \sqrt{n}|\hat{m}_n(\psi)|$ opartej na próbie $\{X_1 - \bar{X}_n, X_2 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n\}$, gdzie \bar{X}_n jest średnią z próby $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Wartość krytyczna jest obliczana według formuły:

$$\tilde{g}_{n,b}^{\{\psi\}}(1 - \alpha) = \inf\{x: \tilde{G}_{n,b}^{\{\psi\}}(x) \geq 1 - \alpha\},$$

która wykorzystuje postać dystrybuanty empirycznej uzyskanej na podstawie próbek:

$$\tilde{G}_{n,b}^{\{\psi\}}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}\{\sqrt{b}(|\hat{r}_n^{t-1,b}(\psi)| - |\hat{r}_n(\psi)|) \leq x\}$$

oraz zestandaryzowaną wersję estymatora współczynnika Fouriera skojarzonego z wybraną częstotliwością ψ :

$$\hat{r}_n^{t-1,b}(\psi) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{t+b-1} (X_j - \bar{X}_n) e^{-i\psi j}.$$

W analizach przyjmujemy, iż $b=2.5\sqrt{n}$. Wartości statystyki testowej wraz z wartościami krytycznymi wyznaczamy dla częstotliwości ψ z dyskretnego zbioru⁴ zawartego w przedziale $(0,0.35)$. Jeśli wartość statystyki testowej przekracza wartość krytyczną na pewnym przedziale $I \subset (0,0.35)$, wtedy zakładamy, że w przedziale tym zawarta jest częstotliwości ze zbioru $\Psi_{P,1}$. W kolejnym kroku dokonujemy estymacji nieznannej częstotliwości.

Powyższe podejście do estymacji, które wykorzystuje procedurę podpróbokowania umożliwia weryfikację hipotezy zerowej według następującego problemu testowania

$$\begin{aligned} H_0: \psi &\notin \Psi_{P,1} \\ H_1: \psi &\in \Psi_{P,1}, \end{aligned} \quad (6)$$

który jest równoważny poniższemu problemowi testowania:

$$\begin{aligned} H_0: |m(\psi)| &= 0 \\ H_1: |m(\psi)| &\neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Odrzucenie hipotezy zerowej w problemie (7) interpretować należy jako istnienie empirycznych przesłanek, że amplituda skojarzona z poszczególną warto-

⁴ Zbiór ten zostanie tak dobrany aby jego licznosc była kilkakrotnie większa od licznosci próby.

ścią częstotliwości $\psi \in (0, 2\pi]$, będącą przedmiotem testowania, jest niezerowa. Częstość $\psi \in (0, 2\pi]$ opisuje wtedy bezwarunkową wartość oczekiwaną procesu $\{P_t : t \in \mathbb{Z}\}$.

Etap 4. Wyodrębnienie cyklu filtrem Hodricka i Prescottta

W tym kroku dokonywany jest wybór parametru filtracji metodą Hodricka i Prescottta, tak aby poprawnie wyodrębnić wahania będące obiektem zainteresowania. Poprzez filtr HP będziemy rozumieć filtr (wyodrębniający wahania cykliczne) postaci: $L(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j B^j = 1 - 1/(1 + \lambda(1 - B)^2(1 - B^{-1})^2)$, gdzie filtr $1 - L(B)$ jest filtrem wyodrębniającym długookresową ścieżkę wzrostu lub spadku (trend).

W zastosowaniach empirycznych metody filtracji zaproponowanej przez Hodricka i Prescottta szczególnie ważnym jest właściwy dobór parametru wygładzającego λ . Zmiana parametru λ dla danych wpływa na gładkość wyodrębnionej linii trendu. Im większa wartość parametru λ , tym gładzsza linia trendu, a przez to wyodrębnione wahania (będące różnicą pomiędzy danymi a wartościami z linii trendu) zawierają cykle o większej długości. Algorytm doboru parametru wygładzającego λ w zależności od długości cykli będących obiektem zainteresowania zaprezentowano w pracy Maravall i del Rio (2001). W pracy tej przytoczono formułę na wartość parametru λ jako funkcję częstotliwości ω_0 postaci

$$\lambda = [4(1 - \cos(\omega_0))^2]^{-1}. \quad (8)$$

Częstotliwość ω_0 można interpretować jako dolną granicę częstotliwości będących przedmiotem zainteresowania. Ustalenie ω_0 , które dotychczas w literaturze odbywało się arbitralnie, ściśle determinowało cechy morfologiczne uzyskanych estymatorów cyklu. Na mocy konstrukcji wartość parametru λ może być interpretowana jako wartość, dla której, po zastosowaniu filtra HP, wzmocnione zostaną wahania o korespondujących częstotliwościach powyżej wartości ω_0 , zaś osłabieniu wahania o korespondujących częstotliwościach poniżej wartości ω_0 . Taka interpretacja jest możliwa poprzez wykazanie, iż filtr HP można otrzymać jako szczególny przypadek filtra Butterwortha; por. Gómez (1999), Gómez (2001).

Proponowane w niniejszym opracowaniu podejście sprowadza się do zdefiniowania parametru wygładzania λ wartościami istotnymi statystycznie częstotliwości zidentyfikowanych w etapie 3. algorytmu. Parametr wygładzania dobieramy zatem tak, aby osłabić wahania nie będące efektem swoistych zmian cyklicznych a jednocześnie wzmocnić wahania, które uzyskują empiryczne wsparcie. Dobór parametru λ staje się w konsekwencji procedurą statystyczną, o własnościach asymptotycznych, zaś nie jest jak dotychczas czysto arbitralną decyzją.

3. ETAPY ANALIZ EMPIRYCZNYCH

W tej części artykułu przedstawiono wyniki analiz empirycznych. W pierwszej kolejności przytoczono w celach porównawczych główne tezy z artykułu Lenart i Pipień (2015). Części 3.2 oraz 3.3 zawierają kolejno: wyniki analiz cykli kredytowych dla Węgier i Czech oraz analizę cyklu kredytowego w ramach kategorii kredytów dla Polski.

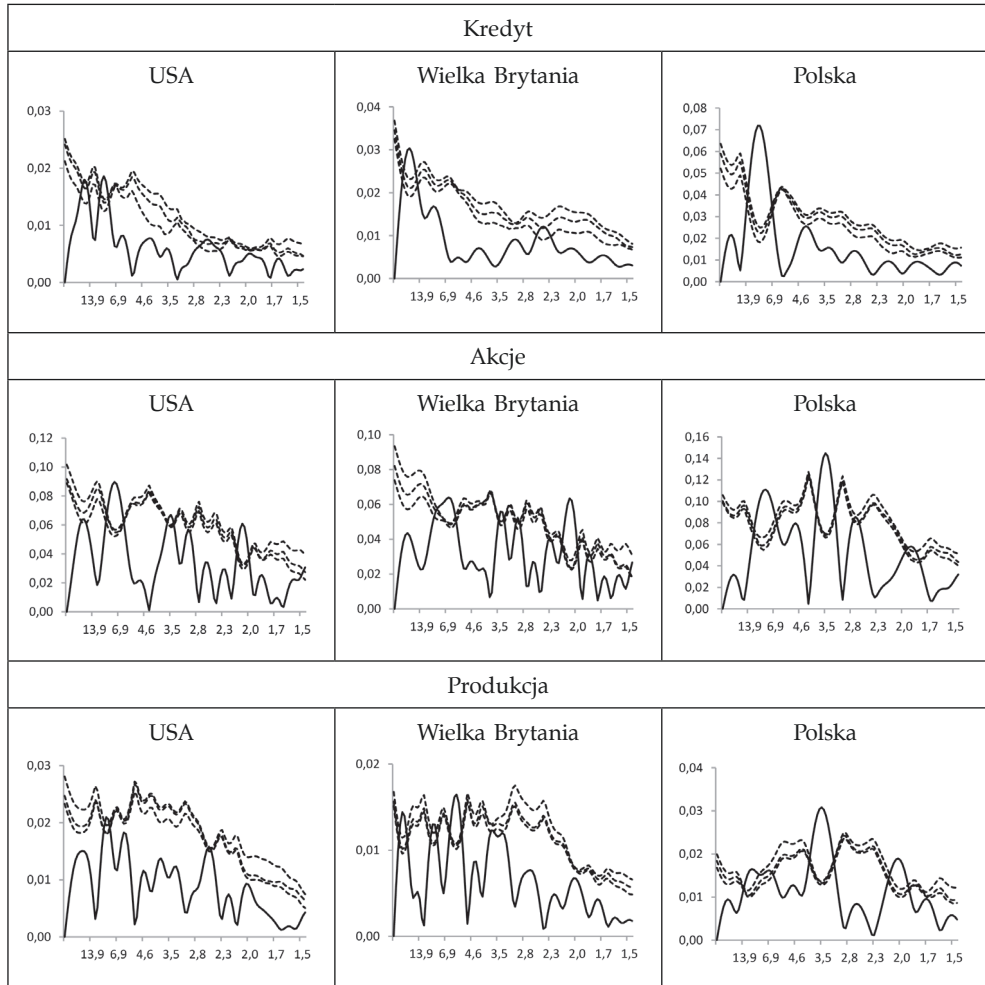
3.1. Cykl kredytowy i cykl na rynku akcji — Polska na tle USA i UK

W celu analiz cech cykli finansowych dla polskiej gospodarki w pierwszej kolejności porównano je z rezultatami odpowiadającymi gospodarkom rozwiniętym. Dla przykładu wybrano gospodarkę USA i Wielkiej Brytanii. W niniejszej części omawiamy wyniki badań nad cyklem kredytowym i cyklem na rynku akcji. Analizowane szeregi czasowe w przypadku Polski są relatywnie krótsze od tych dostępnych dla USA, jednak wnioskowanie statystyczne o cechach cyklu umożliwiło zwrócenie uwagi na pewne zasadnicze różnice.

Analizie poddano miesięczne szeregi czasowe kredytu w okresie od stycznia 1947 do października 2014 (814 obserwacji) w przypadku USA, od lipca 1996 do października 2014 (220 obserwacji) w przypadku Wielkiej Brytanii oraz od grudnia 1996 do października 2014 (215 obserwacji) w przypadku Polski. Jako miesięczne szeregi czasowe opisujące sytuację na rynku akcji przyjęto indeksy MSCI, w okresie od grudnia 1969 do listopada 2014 w przypadku USA i Wielkiej Brytanii (540 obserwacji) oraz od stycznia 1995 do listopada 2014 (228 obserwacji) w przypadku Polski. Uzyskane rezultaty o cyklicznej naturze badanych szeregów konfrontowane są z empirycznymi cechami cyklu koniunkturalnego. W tym przypadku rozważamy miesięczne wartości produkcji przemysłowej w każdym z krajów w tym samym okresie czasu.

Na Rysunku 1 przedstawiono rezultaty testu podpróbkowego wykorzystanego w celu weryfikacji hipotezy H_0 w problemie (7) w przypadku dziewięciu miesięcznych szeregów czasowych opisujących wahania w kredycie, akcjach i produkcji (odpowiednio pierwszy, drugi i trzeci wiersz), dla USA (pierwsza kolumna), Wielkiej Brytanii (druga kolumna) i Polski (trzecia kolumna). Na rysunkach przedstawiono przebieg statystyki testowej (linia ciągła) obliczonej dla cykli dłuższych niż jeden i pół roku oraz wartości krytyczne na poziomie istotności $\alpha=0.1$, 0.05 i 0.01 (linie przerywane). Bardzo zmienny przebieg wartości statystyki testowej obserwowany gdy zmieniamy wartość częstotliwości będącej przedmiotem testowania, powoduje, iż wnioskowanie o statystycznie istotnych częstotliwościach jest trudne. Klasyczna analiza, z wykorzystaniem spektrum ciągłego procesu, bazująca na jakościowej ocenie „ważności” danej częstotliwości w spektrum jedynie na podstawie wartości amplitudy skojarzonej z tą częstotliwością, może prowadzić do błędnych konkluzji. Uzyskane rezultaty

wskazują, że statystyka testowa przekracza wartości krytyczne jedynie w kilku przypadkach wartości częstotliwości $\psi \in (0, 2\pi]$. Porównując obszary, w których statystyka testowa przekracza wartości krytyczne w przypadku szeregu czasowego agregatu kredytowego oraz produkcji przemysłowej, można stwierdzić, że komponent cykliczny w kredycie ma okres znacznie dłuższy niż analogiczny komponent w szeregu produkcji przemysłowej.



Źródło: Lenart i Pipień (2015).

Rysunek 1. Statystyki testowe (linia ciągła) oraz wyznaczone metodą podpróbkiowania wartości krytyczne $\alpha=0.1, 0.05$ i 0.01 wykorzystywane w teście (7) — linia przerywana

Oznacza to, że cykliczne przemiany w kredycie następują znacznie wolniej niż w koniunkturze gospodarczej. Cykl na rynku akcji ma naturę nieregularną, ponieważ zbiór statystycznie istotnych częstości jest większy niż w przypadku kredytu i produkcji. Dodatkowo statystyka testowa przekracza wartości krytyczne dla częstości o zbliżonych wartościach. Jednak podobnie jak w agregacie kredytu uzyskujemy istotność statystyczną dla wartości częstości odpowiadających okresom dłuższym niż w przypadku produkcji. Dodatkowo, dane opowiadają się za statystyczną istotnością częstości odpowiadającej relatywnie krótkim okresom 2–3 lat.

Tabela 1

Długości cyklu (w latach) odpowiadające statystycznie istotnym (na poziomie istotności $\alpha=0.02$) częstościom uzyskanym w procedurze testowania (7)

	Kredyt	Akcje	Produkcja
USA	18.5; 9.3	2.1; 3.5; 7.6	8.8; 2.5
Wielka Brytania	23.8	6.7; 3.4; 2.9; 2.1	41.7; 9.3; 5.7
Polska	9.8	8.3; 3.5; 1.9	10.4; 3.5; 2.0

Źródło: Lenart i Pipień (2015).

W Tabeli 1 zamieszczono wartości okresów cykli, które odpowiadają statystycznie istotnym częstotliwościom, na poziomie istotności $\alpha=0.01$. Analizy w przypadku kredytu dla USA i Wielkiej Brytanii potwierdzają opisywane wcześniej w literaturze empiryczne cechy cyklu. Dane wskazują, że cykl kredytowy trwa dłużej niż cykl koniunkturalny i w przypadku USA może być opisany przez dwie częstotliwości odpowiadające okresowi 9.3 i 18.5 lat, zaś w przypadku Wielkiej Brytanii uzyskano nawet dłuższy okres trwania, większy niż 23 lata. W przypadku Polski cykliczne fluktuacje w kredycie mają znacznie krótszy okres, bo opisywany przez komponent o okresie nieco krótszym niż 10 lat. Ten rezultat wyraźnie odróżnia przypadek Polski od rozwiniętych gospodarek. Jednak taki okres trwania cyklu kredytowego jest nadal znacznie dłuższy niż cykl produkcji, przyjmowany na poziomie około 3.5 do 4 lat dla polskiej gospodarki.

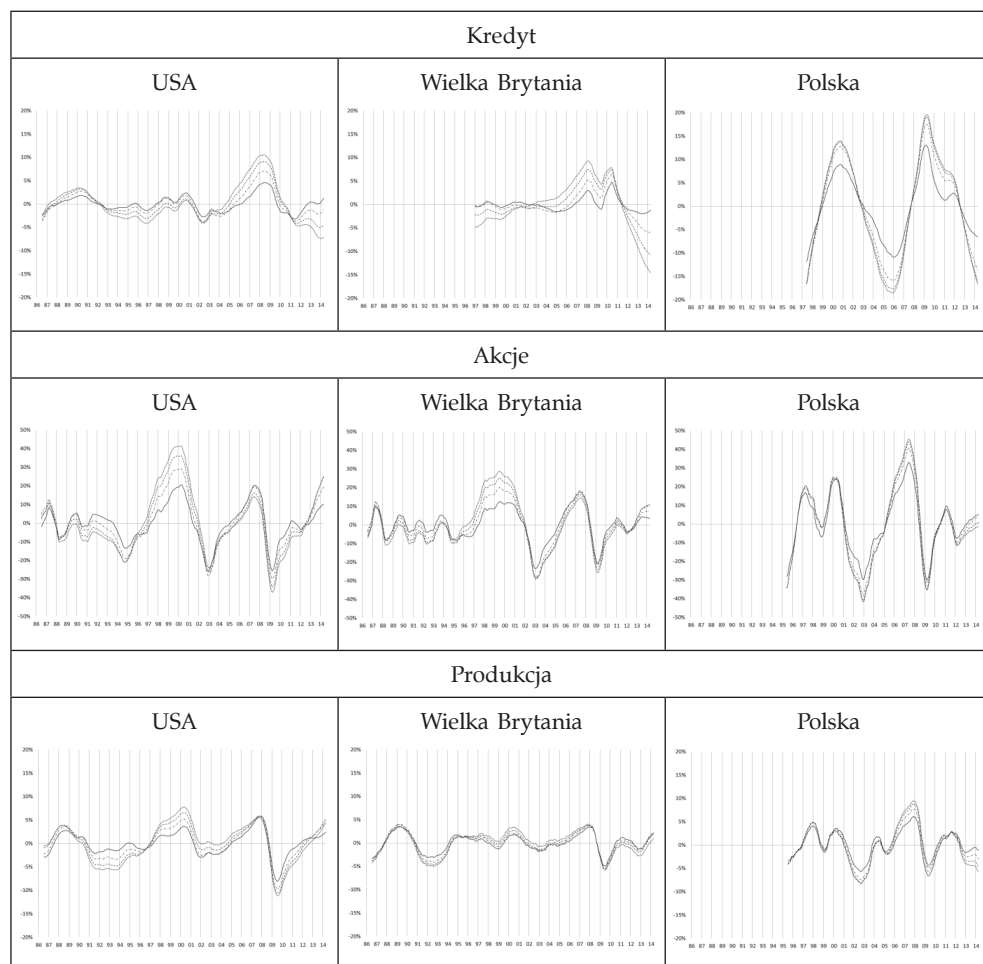
Komponent cykliczny na rynku akcji ma naturę bardzo nieregularną. Procedura identyfikuje bardzo wiele statystycznie istotnych częstotliwości o zbliżonych wartościach. W przypadku USA i Polski uzyskano trzy istotne statystycznie wartości, zaś w przypadku Wielkiej Brytanii nawet cztery. Wnioskowanie w przypadku Polski jest jednak inne, ponieważ częstości odpowiadają okresom cyklu podobnym do tych otrzymanych dla produkcji przemysłowej. Oznacza to, że w przypadku USA i Wielkiej Brytanii, procesy cykliczne zachodzące na bardzo rozwiniętych i innowacyjnych rynkach finansowych, mogą mieć słaby

związek z analogicznymi procesami zachodzącymi w koniunkturze. Rezultaty i interpretację w przypadku rynku akcji należy przyjąć z dużą ostrożnością. Procedura, w świetle hipotez efektywnego funkcjonowania rynków akcji, może wskazywać na cykle pozorne.

Na podstawie procedur testowania statystycznie istotnych częstotliwości uzyskano komponenty cykliczne metodą filtrowania. W analizach wykorzystano, zgodnie z algorytmem opisanym w rozdziale 2 algorytmie, filtr HP z parametrem wygładzania ściśle związanym z istotnymi częstościami. Na Rysunku 2 przedstawiono przebieg komponentów cyklicznych w analizowanych dziewięciu szeregach czasowych z przyjętym parametrem wygładzania odpowiadającym okresowi 10 lat (linia ciągła) oraz 15, 20 i 25 lat (linie przerywane). Wartości komponentu cyklicznego przyjęto jako odchylenia od długookresowego trendu wyrażone w procentach. Otrzymane różne alternatywne przebiegi filtrowanych odchyleń od trendu mają na celu wskazać zarówno przybliżony kształt komponentu cyklicznego (dla parametru wygładzania bliskiego wartości okresu czasu statystycznie istotnej częstotliwości) i dodatkowo jego wrażliwość ze względu na zmiany w wartościach parametru wygładzania filtra HP. W przypadku Polski wyraźnie widać regularne zmiany cykliczne dla kredytu, wskazujące na istnienie dwóch faz ekspansji (występujących po 2000 roku i około roku 2009) oraz dwóch faz recesji (2006 i 2014). Komponenty cykliczne uzyskane w przypadku USA i Wielkiej Brytanii są o wiele bardziej nieregularne. Dodatkowo amplituda komponentu cyklicznego w kredycie nie jest jednoznacznie zidentyfikowana w każdym z krajów i w okresach dolnego i górnego punktu zwrotnego cyklu może się różnić znacząco jeśli zmieni się wartości parametru wygładzania HP.

Na przykład w przypadku Polski, ujemne odchylenia od długookresowego trendu w okresie 2005–2006 może być rzędu -11% (parametr HP ustalony na 10 lat) do przeszło -19% , jeśli parametr HP odpowiada okresowi 25 lat, a więc przybliżonej referencyjnej wartości dla cyklu finansowego, którą sugeruje Borio (2012) i inni. W przypadku górnego punktu zwrotnego w 2009 roku dodatnie odchylenie od długookresowego trendu może przyjmować wartości od 12% , dla parametru HP odpowiadającemu 10 lat, do 19% (parametr HP przyjęto na 25 lat). Analizy kredytu w USA i Wielkiej Brytanii wskazują na podobną wrażliwość odchylenia od długookresowego trendu ze względu na zmiany w parametrze wygładzania HP. Górny punkt zwrotny w 2008 roku dla kredytu w USA może być opisany przez dodatnie odchylenie od trendu wielkości od 5% (parametr HP ustalony na wartości okresu 10 lat) do 10% (parametr HP przyjęty na poziomi wartości okresu 25 lat). W przypadku Wielkiej Brytanii analogiczny okres opisywany może być odchyleniem od trendu rzędu 3% (parametr HP 10 lat) do 9% (parametr HP 25 lat).

Dolne punkty zwrotne, występujące po okresie recesji, także mogą się odchyłać od długookresowego trendu o wartości znacząco wrażliwe ze względu na wybór parametru HP. Na przykład w przypadku Polski ujemne odchylenie



Źródło: Lenart i Pipień (2015).

Rysunek 2. Przebieg komponentów cyklicznych, uzyskanych metodą filtrowania HP z parametrem wygładzania λ odpowiadającym długości cyklu 10 lat (linia ciągła) oraz 15, 20 i 25 lat (linie przerywane)

od trendu w latach 2005–2006 może sięgać wartości od -11% (parametr HP 10 lat) do -19% (parametr HP ustalony na wartości okresu 25 lat). Analogicznie w przypadku roku 2014 różnice są podobnej skali. O ile w sytuacji analiz kredytu dla Polski określenie faz i punktów zwrotnych jest niezmiennicze ze względu na dobór parametru HP, to w przypadku USA i Wielkiej Brytanii można zidentyfikować takie okresy czasu, dla których odchylenie od trendu może być zarówno dodatnie, jak i ujemne, w zależności od doboru parametru HP. Oznacza to problemy z właściwym określeniem konkretnej fazy

w tych przypadkach. Na przykład dla Wielkiej Brytanii odchylenie od trendu w 2014 może być wielkości -2% (parametr HP ustalony na 10 lat) do -15% (dla parametru HP odpowiadającemu okresowi 25 lat). Pierwszy przypadek może być interpretowany jako małe ujemne odchylenie od trendu, zaś drugi może oznaczać wyhamowanie akcji kredytowej na dużą skalę. W przypadku USA odchylenie od trendu dla parametru HP ustalonego na okresie 10 lat wskazuje na niewielkie dodatnie odchylenie, rzędu 2% , zaś w przypadku przyjęcia wartości parametru HP na poziomie 25 lat, odchylenie od trendu jest ujemne, wskazując na recesję w akcji kredytowej.

Cykl w szeregu czasowym MSCI dla USA i Wielkiej Brytanii, pomimo nieregularnego przebiegu z powodu zmiennej amplitudy, pozostaje niezmienniczy dla różnych wariantów filtracji HP, jedynie za wyjątkiem okresu ekspansji i górnego punktu zwrotnego w latach 1999–2001. Dodatkowo odchylenie od trendu może przyjmować wartość od 20% (HP 10 lat) do 40% (HP 25 lat) w tym okresie.

Wobec powyższego, uzyskanie precyzyjnych i silnie empirycznie potwierdzonych przez dane informacji o cyklu finansowym ogólnie a w szczególności o cyklu kredytowym i cyklu na rynku akcji, nie jest łatwe. Przedstawione przykłady wyraźnie wskazują, że dla właściwej oceny skali ekspansji lub wyhamowania w cyklu, kluczowym było skonstruowanie metody powiązania parametru filtru z częstościami statystycznie istotnymi. Zgodnie z uzyskanymi rezultatami właściwym wyborem wartości parametru wygładzania dla USA i Wielkiej Brytanii jest taka, która odpowiada okresowi 20–25 lat, co znajduje potwierdzenie w literaturze przedmiotu; por. Borio (2012) i Drehmann (2012). Uzyskane rezultaty wyraźnie wskazują, że przyjęcie analogicznych wartości dla Polski nie jest właściwe i może prowadzić do błędnych konkluzji co do skali ekspansji lub wyhamowania akcji kredytowej. Dla Polski właściwy wybór parametru wygładzania w procedurze filtracji HP powinien uwzględniać wartość okresu około 10 lat i nie większą.

W dalszej kolejności przeprowadzono jakościową analizę występowania wyprzedzeń i opóźnień w komponentach cyklicznych w kredycie i w indeksie MSCI względem cyklu koniunkturalnego, wyznaczonego na podstawie szeregu czasowego produkcji przemysłowej. W Tabeli 2 przedstawiono korelacje z próby pomiędzy wartościami komponentu cyklicznego w kredycie ($Corr(C_t, P_{t+n})$) lub equity ($Corr(E_t, P_{t+n})$) i produkcji, z ośmiomiesięcznym przesunięciem wstecz jak i w przód; to znaczy dla $n = -8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$. Parametr wygładzania λ przyjęto jako 10 lat dla polski, 20 lat dla USA oraz 25 lat dla Wielkiej Brytanii. W klasycznej analizie cykliczności koniunkturalnej taka analiza stanowi podstawy do dyskusji nad synchronizacją analizowanych cykli. Analizowane korelacje z próby zostały wyznaczone w dwóch przypadkach, w pierwszym obejmującym cały analizowany okres oraz drugim, w którym wyłączone zostały obserwacje z okresu od marca 2008 do marca 2009. Celem prezentacji rezultatów analizy „lead-lag” dla dwóch wariantów jest zbadanie w jaki sposób zależność

Tabela 2

Wartości korelacji z próby $Corr(C_t, P_{t+n})$ oraz $Corr(E_t, P_{t+n})$ pomiędzy wartościami komponentu cyklicznego w kredycie (C_t) lub equity (E_t) i produkcji (P_t), z przesunięciem $n = -8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$. Parametr wygładzania λ przyjęto jako 10 lat dla Polski, 20 lat dla USA oraz 25 lat dla Wielkiej Brytanii

	Wartości opóźnione																	Wartości wyprzedzające								
	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	
USA																										
n	0,68	0,69	0,68	0,65	0,60	0,53	0,45	0,36	0,28	0,20	0,12	0,03	-0,04	-0,12	-0,19	-0,24	-0,28	0,20	0,12	0,03	-0,04	-0,12	-0,19	-0,24	-0,28	
Kredyt	0,51	0,55	0,57	0,58	0,56	0,51	0,46	0,39	0,32	0,22	0,11	0,01	-0,07	-0,15	-0,21	-0,26	-0,29	0,32	0,22	0,11	-0,07	-0,15	-0,21	-0,26	-0,29	
Kredyt*	0,00	0,04	0,09	0,15	0,22	0,29	0,36	0,43	0,49	0,56	0,61	0,65	0,66	0,64	0,61	0,56	0,50	0,49	0,56	0,61	0,66	0,64	0,61	0,56	0,50	
Akcje	0,16	0,12	0,08	0,05	0,04	0,05	0,07	0,11	0,18	0,26	0,34	0,41	0,44	0,46	0,47	0,46	0,45	0,26	0,34	0,41	0,44	0,46	0,47	0,46	0,45	
Akcje*	Wielka Brytania																									
n	-0,19	-0,11	-0,06	0,01	0,12	0,23	0,32	0,41	0,47	0,50	0,48	0,43	0,37	0,34	0,31	0,26	0,20	0,47	0,50	0,48	0,43	0,37	0,34	0,31	0,26	0,20
Kredyt	-0,11	-0,07	-0,05	-0,05	-0,01	0,06	0,15	0,24	0,34	0,37	0,36	0,31	0,27	0,28	0,30	0,31	0,30	0,34	0,37	0,36	0,31	0,27	0,28	0,30	0,31	0,30
Kredyt*	-0,11	-0,08	-0,05	-0,01	0,06	0,13	0,19	0,27	0,33	0,38	0,42	0,44	0,45	0,46	0,45	0,42	0,38	0,33	0,38	0,42	0,44	0,45	0,46	0,45	0,42	0,38
Akcje	0,00	-0,01	-0,04	-0,06	-0,04	-0,01	0,04	0,09	0,14	0,18	0,22	0,24	0,26	0,29	0,30	0,29	0,29	0,14	0,18	0,22	0,24	0,26	0,29	0,30	0,29	0,29
Akcje*	Polska																									
n	0,25	0,20	0,14	0,06	0,00	-0,07	-0,12	-0,16	-0,18	-0,21	-0,23	-0,27	-0,29	-0,30	-0,30	-0,31	-0,32	-0,21	-0,23	-0,27	-0,29	-0,30	-0,30	-0,31	-0,32	
Kredyt	0,23	0,24	0,22	0,18	0,16	0,13	0,10	0,09	0,06	0,04	0,01	-0,05	-0,09	-0,12	-0,15	-0,18	-0,22	0,06	0,04	-0,05	-0,09	-0,12	-0,15	-0,18	-0,22	
Kredyt*	-0,08	0,01	0,10	0,21	0,33	0,44	0,53	0,59	0,64	0,69	0,72	0,73	0,72	0,69	0,65	0,60	0,53	0,64	0,69	0,72	0,73	0,72	0,69	0,65	0,60	0,53
Akcje	-0,03	0,01	0,06	0,13	0,22	0,32	0,40	0,45	0,50	0,56	0,60	0,63	0,64	0,64	0,63	0,59	0,53	0,56	0,60	0,63	0,64	0,64	0,63	0,59	0,53	
Akcje*	* w tych przypadkach wyłączono wartości analizowanych komponentów z okresu czasu od marca 2008 do marca 2009. Kursywią zaznaczono w tabeli korelacje nieistotne statystycznie na poziomie 0,01.																									

* w tych przypadkach wyłączono wartości analizowanych komponentów z okresu czasu od marca 2008 do marca 2009. Kursywią zaznaczono w tabeli korelacje nieistotne statystycznie na poziomie 0,01.

Źródło: Lenart i Pipień (2015).

dynamiczna pomiędzy wyizolowanymi komponentami cyklicznymi jest wrażliwa na okres czasu, w którym nasilił się globalny kryzys finansowy.

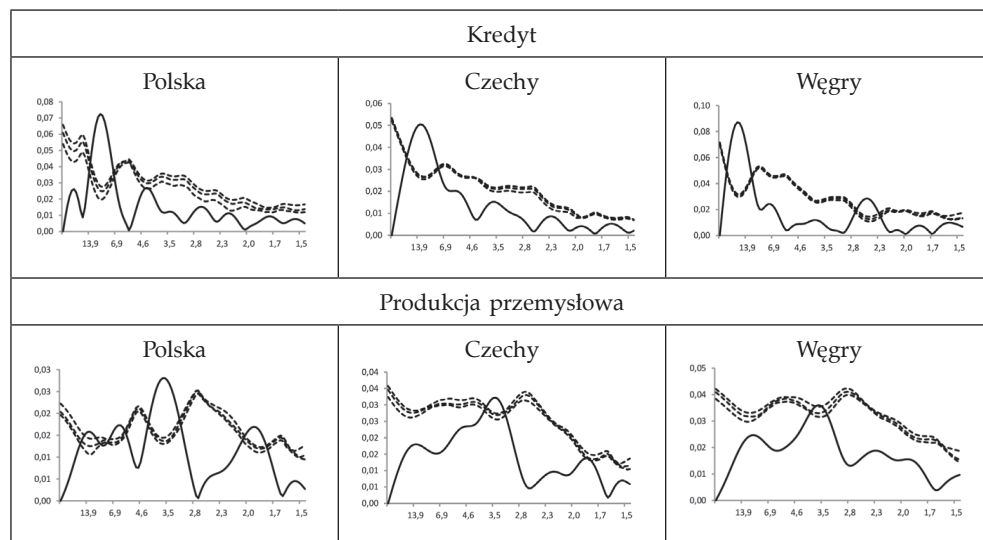
W przypadku wartości cyklu w szeregu czasowym MSCI jego bieżąca wartość jest najsilniej dodatnio skorelowana z przyszłą wartością komponentu cyklicznego w produkcji. Dla USA zmiany w cyklu produkcji wyprzedzają zmiany w cyklu na rynku akcji o około cztery lata, zaś dla Wielkiej Brytanii efekt ten wynosi około 5–8 miesięcy. Dla Polski uzyskujemy najsilniejszą dodatnią korelację pomiędzy bieżącą wartością a wartością wyprzedzającą o około 3 miesiące. Natura zależności czasowych dla cykli w kredycie i produkcji wydaje się inna w trzech analizowanych przypadkach. Dla USA cykl produkcji wydaje się być opóźniony w stosunku do cyklu kredytowego, ponieważ najsilniejszą korelację uzyskano w przypadku opóźnienia wynoszącego 7 miesięcy. Podobnie w przypadku Polski, omawiane opóźnienie wynosi 8 miesięcy. Cykl kredytowy dla Wielkiej Brytanii jest prawie dokładnie zsynchronizowany czasowo z cyklem produkcji, ponieważ najsilniejszą korelację uzyskano w przypadku jednomiesięcznego wyprzedzenia. Powyższe wnioski, dotyczące analiz korelacji dla całego badanego okresu czasu, pozostają jakościowo niezmiennicze, jeśli usunie się okres nasilenia zjawisk kryzysowych od marca 2008 do 2009 roku.

3.2. Cykl kredytowy — Polska na tle regionu

Kolejnym etapem analiz empirycznych jest omówienie cech cykliczności dla Polski na tle krajów regionu Europy środkowej i wschodniej. W niniejszej części zaprezentowano wyniki analiz dla Czech, Polski i Węgier, skupiając się na badaniu własności empirycznych cyklu kredytowego. Analizie poddano szeregi czasowe o częstotliwości miesięcznej agregatu kredytu w okresach, dla Polski, od grudnia 1996 do lipca 2015 (224 obserwacje), dla Czech od stycznia 2002 do lipca 2015 (151 obserwacji) a dla Węgier od stycznia 2000 do lipca 2015 (175 obserwacji). Wybrane szeregi czasowe poddano procedurze identyfikacji statystycznie istotnych częstotliwości oraz ekstrakcji komponentów cyklicznych. Podobnie jak poprzednio uzyskane rezultaty porównywane są pomiędzy krajami oraz komponenty cyklu kredytowego odnoszone są do cyklu produkcji w każdym kraju.

Rysunek 3 przedstawia przebieg wartości statystyk testowych (linia ciągła) oraz wyznaczonych metodą podpróbki wartości krytycznych (linia przerywana) na poziomie istotności odpowiednio $\alpha=0.1$, 0.05, 0.01, które są wykorzystywane w teście (7). W pierwszym wierszu przedstawiono wykresy dotyczące kredytu, zaś w drugim wierszu produkcji przemysłowej dla Polski (pierwsza kolumna), Czech (druga kolumna) i Węgier (trzecia kolumna). Wartość statystyki testowej podlega silnej zmienności wraz ze zmianami w wartości częstotliwości poddawanej testowaniu. Jednak wyraźnie można dostrzec podobieństwo w jej przebiegu we wszystkich trzech krajach. Duża wartość

statystyki testowej w spektrum w okolicach niskich wartości częstości oraz jej wygasanie wraz ze zbliżaniem się do obszarów wysokich częstości charakteryzuje fluktuacje w agregacie kredytu dla trzech rozważanych krajów Europy środkowej i wschodniej.



Rysunek 3. Statystyki testowe (linia ciągła) oraz wyznaczone metodą podpróbki wartości krytyczne $\alpha=0.08$, 0.05 i 0.02 wykorzystywane w teście (7) — linia przerywana

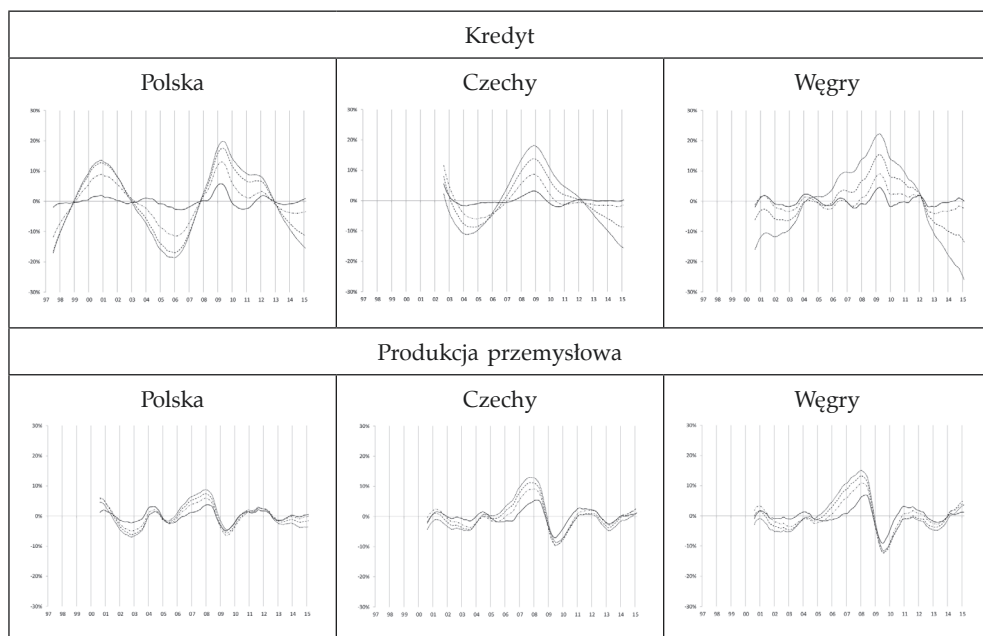
Tabela 3

Długości cyklu (w latach) odpowiadające statystycznie istotnym (na poziomie istotności $\alpha=0.02$) częstościom uzyskanym w procedurze testowania (7)

	Kredyt	Produkcja
Polska	9.8	12.8; 6.2; 3.6; 1.9
Czechy	12.8	3.4
Węgry	20.8, 2.5	3.6

Porównując przebieg statystyki testowej dla kredytu z analogiczną wielkością uzyskaną w przypadku produkcji przemysłowej należy stwierdzić, że cykl w agregacie kredytu może być opisany przez znacznie niższe częstotliwości niż w przypadku cyklu produkcji. W Tabeli 3 przedstawiono długość cykli odpowiadających statystycznie istotnym częstotliwościom. W przypadku Polski okres trwania cyklu w kredycie wynosi około 10 lat, i wynik ten pozostaje niezmienny względem analiz przeprowadzonych w poprzedniej części dla szeregu czasowego obserwacji do listopada 2014. Dla Czech cykl w kredycie trwa dłużej,

ponieważ jedyna statystycznie istotna częstotliwość odpowiada okresowi nieco mniejszemu niż 13 lat. Agregat kredytu Węgier wskazuje na dwie statystycznie istotne częstotliwości. Komponent cykliczny może być w tym przypadku opisany przez złożenie dwóch cykli o okresach odpowiednio około 21 lat i 2 i pół roku. Skoro statystyczną istotność uzyskała częstotliwość odpowiadająca okresowi dłuższemu niż okres, z którego pochodzą obserwacje empiryczne, wynik w przypadku Węgier jest obarczony dużą niepewnością i należy go przyjmować ostrożnie. W rozważanych gospodarkach cykl kredytowy trwa zatem znacznie dłużej niż cykl produkcji, który w przypadku Czech i Węgier trwa mniej niż 4 lata. Odpowiednia statystyka testowa przekracza bowiem wartości krytyczne dla szeregów produkcji przemysłowej jedynie dla częstotliwości odpowiadającej około 3 i pół roku. Nieregularne obserwacje od grudnia 2014 do lipca 2015 zmieniły obraz cykliczności produkcji w Polsce. Uzyskujemy zatem zmianę wnioskowania o statystycznie istotnych częstotliwościach, które odpowiadają dla dłuższego szeregu czasowego okresom cyklu 2 lata, około 3 i pół roku, nieco ponad 6 lat i 13 lat. Na uwagę zasługuje stabilność cech cyklu kredytowego w Polsce, który zarówno w przypadku krótszego szeregu czasowego, analizowanego w poprzedniej części, jak i obecnie dla danych do listopada 2015, wskazuje podobne cechy.



Rysunek 4. Przebieg komponentów cyklicznych, uzyskanych metodą filtrowania HP z parametrem wygładzania λ odpowiadającym długości cyklu 5 lat (linia ciągła) oraz 10, 15 i 20 lat (linie przerywane)

Na podstawie procedur testowania statystycznie istotnych częstotliwości, podobnie jak w poprzedniej części, uzyskano komponenty cykliczne metodą filtrowania. W analizach wykorzystujemy filtr HP z parametrem wygładzania ściśle związanym z istotnymi częstościami. Rysunek 4 przedstawia przebieg komponentów cyklicznych, uzyskanych metodą filtrowania HP z parametrem wygładzania λ odpowiadającym długości cyklu 5 lat (linia ciągła) oraz 10, 15 i 20 lat (linie przerywane). Skala ekspansji kredytowej w Czechach w 2008–2009 roku jest wrażliwa na wybór parametru HP. Górny punkt zwrotny pod koniec 2009 roku może być opisany poprzez odchylenie od trendu rzędu 3% (parametr HP ustalony na 5 lat) do 18% (parametr HP ustalony na 20 lat). Oprócz bardzo nieregularnego przebiegu komponentu cyklicznego w przypadku Węgier, odchylenie od trendu także jest bardzo wrażliwe na dobór parametru HP. Podobnie jak w przypadku Polski i Czech, obraz ekspansji kredytowej i górnego punktu zwrotnego wyznaczającego przejście do fazy wyhamowania, jest różny i właściwe określenie skali odchylenia od długookresowego trendu wymaga przeprowadzenia omawianych wyżej testów istotności. Górny punkt zwrotny może być opisany przez odchylenie od trendu rzędu 20% do wartości nawet mniejszej od 3%.

Analizując fazy wyhamowania i recesji można wysnuć podobne konkluzje. W przypadku Polski dolny punkt zwrotny w latach 2005–2006 może być opisany przed odchyleniem od trendu rzędu 2.5% (parametr HP ustalony na wartości 5 lat) do 19% (parametr HP ustalony na wartości 20 lat). W roku 2014 odchylenie od trendu może się też różnić znacząco dla różnych wartości parametru wygładzania.

Uzyskane rezultaty wyraźnie wskazują na kłopoty w właściwą identyfikacją faz cyklu, gdy parametr wygładzania odpowiada długości cyklu około 5 lat, a więc wartości nieco większej niż odpowiadająca cyklowi produkcji. Uzyskana na drodze estymacji wartość 10 lat dla Polski stanowi kompromis, który umożliwi identyfikację faz i jednocześnie oszacowanie skali ekspansji lub wyhamowania w akcji kredytowej. Przyjęcie, że cykl kredytowy może trwać dłużej, co wynika z badań dla gospodarek rozwiniętych, może prowadzić do błędnych wniosków. Przeprowadzone powyżej analizy wskazują, że kraje Europy środkowo-wschodniej cechuje swoista dynamika kredytu, co prowadzi do błędnych wniosków o naturze cykli finansowych, w tym cyklu kredytowego.

Rezultaty analizy występowania wyprzedzeń i opóźnień w komponentach cyklicznych w kredycie względem cyklu koniunkturalnego przedstawiono w Tabeli 4. Podobnie jak w poprzedniej części wyznaczono korelacje z próby pomiędzy wartościami komponentu cyklicznego w kredycie i produkcji, z ośmiomiesięcznym przesunięciem wstecz jak i w przód; to znaczy dla $n = -8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$. Parametr wygładzania λ przyjęto jako 10 lat dla Polski, 12 lat dla Czech i 20 lat w przypadku dla Węgier. Najwyższe wartości korelacji uzyskano dla opóźnienia rzędu 8 miesięcy. Pomimo pewnych różnic w długościach cykli dla każdego z krajów, analiza „lead-lag” dostarcza podobnych wniosków co do zależności w czasie z cyklem produkcji. Cykl kredytowy

może być charakteryzowany jako wyprzedzający w stosunku do cyklu produkcji. Z powodu przeprowadzenia analiz na próbie z dołączonymi obserwacjami z okresu od listopada 2014 do lipca 2015, wartości korelacji z próby wyznaczone w przypadku Polski nieznacznie różnią się od wartości zamieszczonych w Tabeli 2. Zasadnicza konkluzja co do wyprzedzającego charakteru cyklu kredytowego względem cyklu produkcji pozostaje niezmienną. Porównując między krajami siłę związku cyklu kredytowego z cyklem produkcji należy stwierdzić, że efekt ten jest w przypadku Czech najsilniejszy a w przypadku Polski najslabszy. Najwyższa korelacja dodatnia nieco przekracza 0.52 w przypadku Czech, zaś dla Polski wynosi 0.21 i jest na granicy statystycznej istotności.

Tabela 4

Wartości korelacji z próby $Corr(C_t, P_{t+n})$ pomiędzy wartościami komponentu cyklicznego w kredycie (C_t) i produkcji (P_{t+n}), z przesunięciem $n = -8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$.
Parametr wygładzania λ przyjęto jako 10 lat dla Polski, 12 lat dla Czech i 20 lat dla Węgier

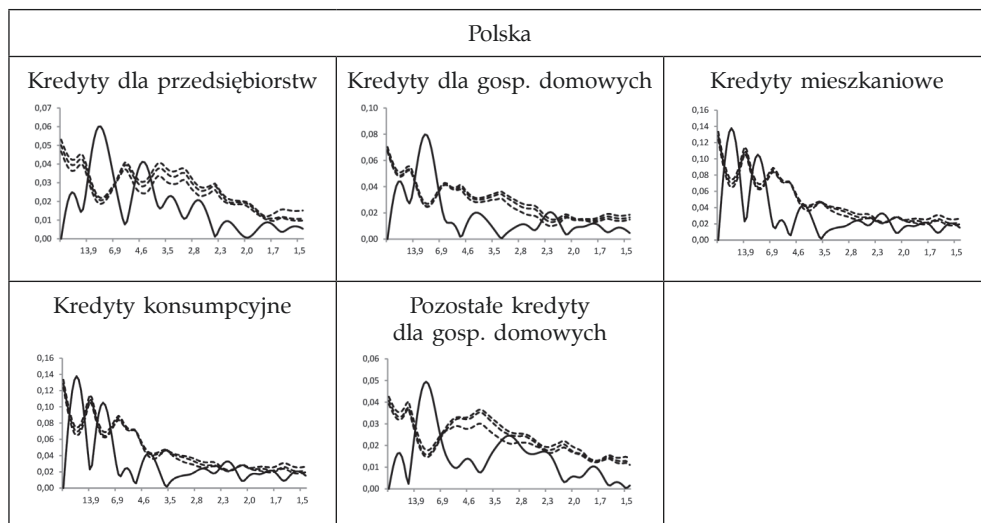
n	Wartości opóźnione								Wartości wyprzedzające								
	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Czechy	0,52	0,48	0,43	0,39	0,38	0,28	0,22	0,16	0,10	0,04	-0,01	-0,06	-0,12	-0,17	-0,22	-0,27	-0,31
Polska	0,21	0,16	0,12	0,07	0,02	-0,03	-0,08	-0,12	-0,16	-0,22	-0,28	-0,33	-0,38	-0,43	-0,47	-0,51	-0,54
Węgry	0,32	0,29	0,25	0,21	0,17	0,13	0,08	0,04	0,00	-0,03	-0,06	-0,09	-0,12	-0,14	-0,16	-0,18	-0,19

Kursywą zaznaczono w tabeli korelacje nieistotne statystycznie na poziomie 0.01.

3.3. Cykl kredytowy — analiza w ramach kategorii kredytów dla Polski

Jedyną statystycznie istotną częstotliwością, w przypadku agregatu kredytu dla Polski, była wartość odpowiadająca okresowi około 10 lat. Efekt ten uzyskano zarówno w przypadku analiz szeregu czasowego obserwacji do listopada 2014 oraz przy aktualizacji danych do lipca 2015. W tej części opracowania przeprowadzono procedurę wnioskowania o cechach cykli dla podkategorii kredytu w Polsce. W okresie od grudnia 1996 do lipca 2015 (224 obserwacje) rozważono kategorie kredytu dla przedsiębiorstw i kredytu dla gospodarstw domowych ogółem. Dodatkowo w ramach kredytu dla gospodarstw domowych rozważono osobno kredyty mieszkaniowe, konsumpcyjne i kategorię pozostałych kredytów gospodarstw domowych.

Rysunek 5 przedstawia przebieg statystyk testowych w przypadku wszystkich pięciu kategorii kredytów. Wartości statystyki różnią się w kategoriach, jednak wnioskowanie o statystycznie istotnych częstościach (Tabela 5) wskazuje na podobne własności cykliczne. W przypadku obydwu podstawowych kategorii, to jest kredytu dla przedsiębiorstw i kredytu dla gospodarstw domowych obserwacje opowiadają się za statystycznie istotną częstością wskazującą na długość cyklu nieco mniejszą od 10 lat (podobnie jak dla całego agregatu kredytowego). Kategorie kredytów dla gospodarstw domowych, a więc kredyty mieszkaniowe, konsumpcyjne i pozostałe też wskazują na statystycznie istotny cykl o długości około 10 lat. W przypadku kredytu dla gospodarstw domowych i podkategorii kredytów mieszkaniowych dane opowiadają się dodatkowo za krótkim cyklem długości około 2 lat. Ten krótki cykl nie znajduje potwierdzenia w przypadku kredytów konsumpcyjnych i kategorii pozostałych kredytów. Dane także wskazują na niską wartość częstości statystycznie istotnej, która odpowiada cyklowi dłuższemu niż ćwierć wieku. Tak wolne przemiany cykliczne w agregacie kredytu mieszkaniowego mogą mieć swoje źródła w procesach demograficznych i przemianach systemowych. Ten rezultat, choć poprawny formalnie, należy jednak traktować z dużą ostrożnością, gdyż jego obiektywne ekonomiczne uzasadnienie nie jest łatwe. W każdym przypadku, gdy procedura wychwytyje statystycznie istotne częstości odpowiadające okresom dłuższymi niż badana próba, interpretacja jest w dużej mierze arbitralna.

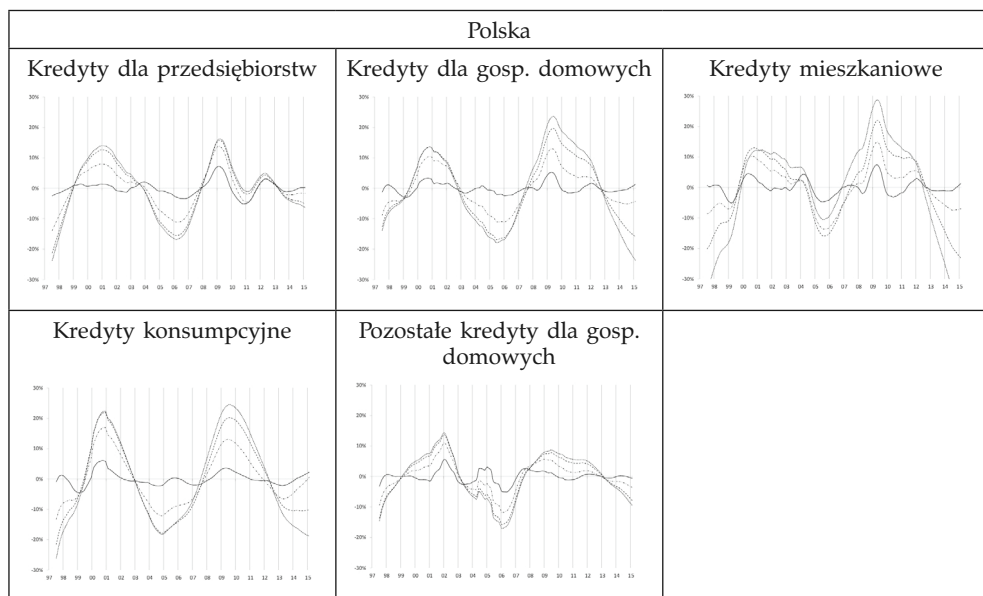


Rysunek 5. Statystyki testowe (linia ciągła) oraz wyznaczone metodą podpróbki wartości krytyczne $\alpha=0.08$, 0.05 i 0.02 wykorzystywane w teście (7) — linia przerywana. Analizy w przypadku kredytu dla przedsiębiorstw, dla gospodarstw domowych ogółem i w rozbięciu na kredyty mieszkaniowe, konsumpcyjne i pozostałe

Tabela 5

Długości cyklu (w latach) odpowiadające statystycznie istotnym (na poziomie istotności $\alpha=0.02$) częstościom uzyskanym w procedurze testowania (7). Analizy w przypadku kredytu dla przedsiębiorstw, dla gospodarstw domowych ogółem i w rozbiciu na kredyty mieszkaniowe, konsumpcyjne i pozostałe

Kredyt					Produkcja
Kredyty dla przedsiębiorstw	Kredyty dla gosp. domowych	Kredyty mieszkaniowe	Kredyty konsumpcyjne	Pozostałe kredyty dla gosp. domowych	
9.3; 4.5	9.8; 2.3	27.8; 9.3; 2.2	9.3	9.8	10.4; 3.5; 2.0



Rysunek 6. Przebieg komponentów cyklicznych, uzyskanych metodą filtrowania HP z parametrem wygładzania λ odpowiadającym długości cyklu 5 lat (linia ciągła) oraz 10, 15 i 20 lat (linie przerywane). Analizy w przypadku kredytu dla przedsiębiorstw, dla gospodarstw domowych ogółem i w rozbiciu na kredyty mieszkaniowe, konsumpcyjne i pozostałe

Zamieszczone na Rysunku 6 przebiegi komponentów cyklicznych, które uzyskano metoda filtracji HP, wskazują na znaczną i o wiele większą wrażliwość na dobór parametru wygładzania, niż w przypadku całego agregatu kredytu. Uzyskane rezultaty wskazują także na poważne problemy w określeniu pozycji cyklicznej w 2014 roku. Niepewność związana z określeniem fazy jest szczególnie widoczna w przypadku kredytów dla gospodarstw domowych ogółem

Tabela 6

Wartości korelacji z próby $Corr(C_t, P_{t+h})$ pomiędzy wartościami komponentu cyklicznego w kategoriach kredytu (C_t) i produkcji (P_t), z przesunięciem $h = -8, -7, \dots, 0, 1, 2, \dots, 8$.
 Parametr wygładzania λ przyjęto jako 10 lat

	Wartości opóźnione									Wartości wyprzedzające								
	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
n																		
Kredyty ogółem	0,21	0,16	0,12	0,07	0,02	-0,03	-0,08	-0,12	-0,16	-0,22	-0,28	-0,33	-0,38	-0,43	-0,47	-0,51	-0,54	
Kredyty dla przedsiębiorstw	0,27	0,21	0,15	0,08	0,02	-0,04	-0,11	-0,17	-0,22	-0,29	-0,36	-0,43	-0,49	-0,54	-0,59	-0,63	-0,66	
Kredyty dla gospodarstw domowych	0,22	0,18	0,14	0,10	0,06	0,02	-0,02	-0,06	-0,10	-0,15	-0,20	-0,25	-0,30	-0,34	-0,39	-0,42	-0,45	
Kredyty mieszkaniowe	0,12	0,09	0,06	0,03	0,00	-0,03	-0,06	-0,09	-0,12	-0,17	-0,21	-0,25	-0,30	-0,34	-0,38	-0,41	-0,44	
Kredyty konsumpcyjne	0,12	0,09	0,06	0,03	0,00	-0,02	-0,04	-0,07	-0,09	-0,13	-0,17	-0,21	-0,25	-0,28	-0,31	-0,34	-0,37	
Pozostałe	0,35	0,30	0,25	0,19	0,13	0,07	0,00	-0,06	-0,13	-0,20	-0,27	-0,34	-0,41	-0,47	-0,53	-0,58	-0,62	

Kursywą zaznaczono w tabeli korelacje nieistotne statystycznie na poziomie 0.01.

i podkategorii. W przypadku komponentu cyklicznego, uzyskanego na podstawie parametru wygładzania, odpowiadającemu okresowi 5 lat, pierwsza połowa 2015 roku powinna się charakteryzować nieznacznym ożywieniem, to jest dodatnim (niewielkim) odchyleniem od długookresowego trendu. Parametry wygładzania odpowiadające okresom 10 lat i dłuższym wskazują na wyhamowanie i ujemne odchylenie od długookresowego trendu. Kredyty dla przedsiębiorstw charakteryzują się sytuacją nieznacznego spowolnienia. Odchylenie od długookresowego trendu w pierwszej połowie 2015 roku jest ujemne ale niewielkie (5%–1%) i mało wrażliwe na dobór parametru wygładzania.

Analizy występowania wyprzedzeń i opóźnień w komponentach cyklicznych w rozważanych kategoriach kredytu przedstawiono w Tabeli 6. Podobnie jak w przypadku całego agregatu kredytu cykle wyznaczone dla jego komponentów mają wyprzedzający charakter względem cyklu produkcji. Najwyższe wartości korelacji uzyskano dla opóźnienia rzędu 8 miesięcy. Efekt ten jest jednak bardzo słaby i w przypadku kredytów mieszkaniowych i kredytów konsumpcyjnych nieistotny statystycznie. Najsilniejszą zależność od opóźnień cyklu produkcji uzyskano w przypadku kategorii pozostałych kredytów.

4. PODSUMOWANIE

Podjęte w opracowaniu zagadnienie cykliczności w systemie finansowym jest nową odsłoną klasycznych, bo rozważanych od ponad 160-ciu lat, badań nad cykliczną naturą zjawisk w ekonomii. Celem badań było wypracowanie metod wnioskowania statystycznego w celu określenia cech cyklu finansowego i w szczególności kredytowego. W pracy zaproponowano nieparametryczny test, umożliwiający wnioskowanie o statystycznie istotnych częstościach dyskretnego spektrum procesu opisującego cykliczne fluktuacje.

Uzyskane rezultaty empiryczne pozwalają stwierdzić, że cechy cyklu kredytowego dla Polski mają charakter swoisty i znacznie różnią się od tych otrzymanych dla rozwiniętych gospodarek. Cykl kredytowy trwa w przypadku Polski około dekady i jest podobny do cyklu uzyskanego w przypadku Czech, trwającego 12 lat.

BIBLIOGRAFIA

- Adrian T., Shin H. (2010), *Financial Intermediaries and Monetary Economics*, in B. Friedman and M. Woodford (eds), *Handbook of Monetary Economics*, Vol. 3, Amsterdam: North Holland.
- Aikman D., Haldane A., Nelson B. (2010), *Curbing the Credit Cycle*, paper presented at the Columbia University Center on Capitalism and Society Annual Conference, New York, November.
- Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S. (1996), *The Financial Accelerator and the Flight to Quality*, *The Review of Economics and Statistics* 78, 1–15.

- Bernanke, B., Gertler M., Gilchrist S. (1999), *The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework* in J.B. Taylor and M. Woodford eds., *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1, Part C, Elsevier.
- Besicovitch A.S. (1932), *Almost Periodic Functions*, Cambridge University Press, London.
- Bianchi J. (2011), *Overborrowing and Systemic Externalities in the Business Cycle*, *American Economic Review* 101, 3400–3426.
- Bollerslev T., Ghysels E. (1996), *Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, *Journal of Business and Economic Statistics* 14(2), 139–152.
- Borio C. (2012), *The Financial Cycle and Macroeconomics: What Have We Learnt?*, BIS Working Papers 395.
- Borio C., Furfine C., Lowe P. (2001), *Procyclicality of the financial system and financial stability: Issues and policy options*, [in:] *Marrying the macro- and micro-prudential dimensions of financial stability*, BIS Papers, no 1, 1–57.
- Brockwell P.J., Davis R.A. (2002), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, New York.
- Brunnermeier M., Crockett A., Goodhart C. Hellwig M., Persaud A., Shin H. (2009), *The Fundamental Principles of Financial Regulation*, *Geneva Reports on the World Economy*, no 11.
- Burns A.F., Mitchell W.C. (1946), *Measuring Business Cycles*, New York, National Bureau of Economic Research.
- Burridge P, Taylor A.M. (2001), *On Regression-based Tests for Seasonal Unit Roots in the Presence of Periodic Heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics* 104, 91–117.
- Claessens S., Ayhan Kose M., Terrones M.E. (2011a), *Financial Cycles: What? How? When?*, IMF Working Paper, WP/11/76.
- Corduneanu C. (1989), *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York
- Danielsson J., Shin H.S., Zigrand J.-P. (2004), *The Impact of Risk Regulation on Price Dynamics*, *Journal of Banking and Finance* 28, 1069–1087.
- Dell’Arriccia D., Igan, Laeven L., Tong H. (2012), *Policies for Macrofinancial Stability: How to Deal with Credit Booms*, IMF Discussion Note, April.
- Drehmann M., Borio C., Tsatsaronis K. (2012), *Characterising the Financial Cycle: Don’t Lose Sight of the Medium Term!*, BIS Working Papers 380.
- English W., Tsatsaronis K., Zoli E. (2005), *Assessing the Predictive Power of Measures of Financial Conditions for Macroeconomic Variables*, BIS Papers, no 22, 228–252.
- European Systemic Risk Board, ESRB* (2014), *The ESRB Handbook on Operationalising Macro-prudential Policy in the Banking Sector*, Frankfurt.
- Fisher I. (1933), *The Debt-Deflation Theory of Great Depressions*, *Econometrica* 1, 337–357.
- Franses P.H. (1996), *Stochastic Trends in Economic Time Series*, Oxford University Press, New York.
- Franses P.H., Boswijk H.P. (1996), *Temporal Aggregation in a Periodically Integrated Autoregressive Process*, *Statistics and Probability Letters* 30, 235–240.
- Franses P.H., Boswijk H.P. (1996), *Temporal aggregation in a periodically integrated autoregressive process*, *Statistics and Probability Letters*, 30, 235–240.
- Franses P.H., Dijk D. (2005), *The forecasting performance of various models for seasonality and nonlinearity for quarterly industrial production*, *International Journal of Forecasting*, 21, 87–102.
- Franses P.H., Ooms M. (1997), *A periodic long-memory model for quarterly UK inflation*, *International Journal of Forecasting*, 13, 117–126.
- Franses P.H. (1996) *Stochastic Trends in Economic Time Series*, Oxford University Press, New York.
- Galati G., Moessner R. (2013), *Macroprudential Policy — A Literature Review*, *Journal of Economic Surveys* 27, 846–878.
- Gardner W.A., Napolitano A., Paura L. (2006), *Cyclostationarity: Half a century of research*, *Signal Processing*, 86, 639–697.
- Gilchrist S., Zakrajsek E. (2008), *Linkages Between the Financial and Real Sectors: An Overview*, Working Paper, Boston University.

- Gladyshev E.G. (1961), *Periodically Correlated Random Sequence*, *Sov. Math.* 2, 385–388.
- Gómez V. (2001), *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(3), 365–373.
- Gómez V. (1999), *Three equivalent methods for filtering finite nonstationary time series*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 17(1), 109–117.
- Gorton G., He P. (2008), *Bank Credit Cycles*, *Review of Economic Studies* 75, 1181–1214.
- Hatzius J., Hooper P., Mishkin F., Schoenholtz K., Watson M. (2010), *Financial Conditions Indexes: a Fresh Look After the Financial Crisis*, NBER Working Papers, no 16150.
- Holmstrom B., Tirole J. (1997), *Financial Intermediation, Loanable Funds, and the Real Sector*, *Quarterly Journal of Economics* 112, 663–691.
- Hurd H. (1989), *Representation of Strongly Harmonizable Periodically Correlated Process and their Covariances*, *Journal of Multivariate Analysis* 29, 53–67.
- Hurd H. (1991), *Correlation Theory of Almost Periodically Correlated Processes*, *Journal of Multivariate Analysis* 37, 24–45.
- Hurd H., Míamee A.G. (2007), *Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice*, Wiley, Hoboken, New Jersey.
- Jordá O., Schularick M., Taylor A.M. (2011), *When Credit Bites Back: Leverage, Business Cycles and Crises*, Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2011-27.
- Juglar C. (1856), *Des Crises Commerciales et leur Retour Periodique en France, en Angleterre, et aux Etats-Unis*, Paris, Guillaumin.
- Kashyap A., Stein J. (2004), *Cyclical Implications of the Basel II Capital Standards*, Federal Reserve Bank of Chicago Economic Perspectives 1, 18–31.
- Kiyotaki N., Moore J. (1997), *Credit cycles*, *Journal of Political Economy* 105, 211–248.
- Lenart Ł. (2013), *Non-Parametric Frequency Identification and Estimation in Mean Function for Almost Periodically Correlated Time Series*, *Journal of Multivariate Analysis* 115, 252–269.
- Lenart Ł., Pipień M. (2013a), *Almost Periodically Correlated Time Series in Business Fluctuations Analysis: the case of Poland*, *Acta Physica Polonica A* 123, 70–86.
- Lenart Ł., Pipień M. (2013b), *Seasonality Revisited - Statistical Testing for Almost Periodically Correlated stochastic process*, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics* 5, 85–102.
- Lenart Ł., Pipień M. (2015), *Empirical Properties of the Credit and Equity Cycle within Almost Periodically Correlated Stochastic Processes – the Case of Poland, UK and USA*, *Central European Journal of Econometric Modelling and Econometrics* 7, 169–186.
- Lorenzoni G. (2008), *Inefficient Credit Booms*, *Review of Economic Studies* 75, 809–833.
- Makridakis S., Wheelwright S.C., Hyndman R.J. (1998), *Forecasting: Methods and Applications*, Wiley, New York.
- Maravall A., del Ro A. (2001), *Time aggregation and the Hodrick-Prescott filter*, Banco de España — Servicio de Estudios Documento de Trabajo, n° 0108.
- Milas C., Rothman P.A., Dijk D. (2006), *Nonlinear Time Series Analysis of Business Cycles*, Elsevier, Amsterdam.
- Minsky H.P. (1982), *Can "It" Happen Again? Essays on Instability and Finance*, Armonk, M.E. Sharpe.
- Minsky H.P. (1990), *Schumpeter: Finance and Evolution [in:] Evolving Technology and Market Structure: Studies in Schumpeterian Economics*, Arnold Heertje and Mark Perlman, [eds.] Ann Arbor, Mich., The University of Michigan Press.
- Ng T. (2011), *The Predictive Content of Financial Cycle Measures for Output Fluctuations*, *BIS Quarterly Review* 21, 53–65.
- Olszak M., Pipień M. (2016), *Cross Country Linkages as Determinants of Procyclicality of Loan Loss Provisions*, *European Journal of Finance*, (w druku).
- Osborn D.R., Smith J.P. (1989), *The Performance of Periodic Autoregressive Models in Forecasting Seasonal U.K. Consumption*, *Journal of Business and Economic Statistics* 9, 117–127.

- Parzen E., Pagano M. (1979), *An Approach to Modeling Seasonally Stationary Time-Series*, *Journal of Econometrics* 9, 137–153.
- Schularick M., Taylor A.M. (2012), *Credit Booms Gone Bust: Monetary Policy, Leverage Cycles, and Financial Crises, 1870–2008*, *American Economic Review* 102, 1029–1061.
- Sinai A. (1992), *Financial and Real Business Cycles*, *Eastern Economic Journal* 18, 1–54.
- Woodford M. (2003), *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary policy*, Princeton, Princeton University Press.