

PL ISSN 0071-674X

POLSKA AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE
KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI
KRAKOWSKA SZKOŁA WYŻSZA
IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

folia oeconomica cracoviensia

Vol. XLVIII

2007

WYDAWNICTWO ODDZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
KRAKÓW

POLSKA AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE
KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI
KRAKOWSKA SZKOŁA WYŻSZA
IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

FOLIA OECONOMICA CRACOVIENSIA

Vol. XLVIII
2007

WYDAWNICTWO ODDZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
KRAKÓW

REDAKTOR

Prof. dr hab. Andrzej Iwasiewicz

KOMITET REDAKCYJNY

prof. dr hab. Anna Czubała

prof. dr hab. Henryk Gurgul

prof. dr hab. Jacek Osiewalski — Sekretarz Naukowy Komisji Nauk
Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie
i sekretarz naukowy Komitetu Redakcyjnego

Jan Szumilak

Michał Woźniak

Adres redakcji

31-018 Kraków, ul. św. Jana 28

Wydanie publikacji finansowane przez
Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego,
Krakowską Szkołę Wyższą im. A. Frycza Modrzewskiego

Redaktor Wydawnictwa

Krystyna Duszyk

© *Copyright Autorzy, Polska Akademia Nauk Oddział w Krakowie*
Kraków 2007

ISSN 0071-674X

Wydawnictwo Oddziału Polskiej Akademii Nauk

31-018 Kraków, ul. św. Jana 28

tel. 0-12 422-36-43, fax 0-12 422-27-91

Ark. wyd. 8. Ark. druk. 9

Łamanie, druk

Wydawnictwo PANDIT

31-334 Kraków, ul. Łokietka 177



SPIS TREŚCI

Henryk Gurgul, Paweł Majdosz: <i>Zastosowanie metod biproporcjonalnych do analizy zmian strukturalnych polskiej gospodarki w latach 1995–2000</i>	5
Paweł Młodkowski: <i>Elastyczność polityki fiskalnej w unii walutowej</i>	25
Piotr Fiszedler: <i>Konstrukcja portfeli efektywnych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH</i>	47
Renata Wróbel-Rotter: <i>Dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych</i>	69
Mateusz Pipień: <i>An approach to measuring the relation between risk and return. Bayesian analysis for WIG data</i>	95
Sabina Denkowska: <i>Testowanie wielokrotne w badaniach ekonomicznych</i>	119
Zdzisław Jan Broda: <i>Prof. dr hab. Anna Jankowska-Kłapkowska (1925–2004)</i>	137

ZASTOSOWANIE METOD BIPROPORCJONALNYCH DO ANALIZY ZMIAN STRUKTURALNYCH POLSKIEJ GOSPODARKI W LATACH 1995–2000

HENRYK GURGUL

Zakład Programowania Matematycznego
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
PL 30-067 Kraków, ul. Kawiorzy 40
e-mail: h.gurgul@neostrada.pl

PAWEŁ MAJDOSZ

Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii
Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie
PL 31-150 Kraków, ul. św. Filipa 17
email: pmajdosz@go2.pl

ABSTRACT

Henryk Gurgul, Paweł Majdosz. *Application of biproportional methods in analysis of the structural changes of the Polish economy in 1995–2000.* Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 5–23.

In this paper we describe structural changes of the Polish economy which occurred over a five-year-period from 1995 to 2000. This is an important topic since Polish model of transition process from centrally planned to market economy, which started in 1990, was the first in Central and Eastern Europe. We found material flows (and partly intermediate demand) to be relatively stable in the considered period in the traditional Polish industries like mining. Our analysis also concerns with changes in value added, final demand and international trade balance of the Polish economy in the period under consideration.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

biproportional methods, structural changes
metody biproporcjonalne, zmiany strukturalne

1. WPROWADZENIE

Badanie zmian zachodzących w strukturze gospodarki dostarcza szeregu ważnych informacji na temat sil i procesów zachodzących w skomplikowanym układzie ekonomicznym, które nie są widoczne „gołym okiem”. Tego typu informacje są podstawą oceny skuteczności odcinkowych interwencji lub programów reform gospodarczych, podejmowanych na szeroką skalę. Ich przydatność wydaje się szczególnie duża w przypadku takich krajów jak Polska, których gospodarka podlega procesowi transformacji. Można bowiem przypuszczać, że przechodzenie od pewnego stadium gospodarki socjalistycznej do gospodarki rynkowej wyzwala siły, które w normalnych warunkach nie występują w gospodarkach rozwiniętych.

Pierwsze prace empiryczne z zakresu badań nad zmianami strukturalnymi w kontekście modelu nakładów i wyników dotyczą prawie wyłącznie krajów o ustabilizowanych, dobrze funkcjonujących gospodarkach rynkowych. Na szczególną uwagę zasługuje praca de Mesnarda (1990), w której przedstawiono analizę gospodarki francuskiej w latach od 1971 do 1985. Wspomniany wyżej autor za podstawę identyfikowania zmian strukturalnych przyjął przepływy pośrednie pomiędzy sektorami, wyrażone wartościowo. Inaczej postąpili Dietzenbacher i Linden (1995), którzy badając zmiany strukturalne w gospodarkach państw członkowskich Unii Europejskiej w latach 1965–1985 za podstawę analizy przyjęli wartość współczynników bezpośredniej materiałochłonności.

Ważny przykład analizy zmian strukturalnych w gospodarce okresu transformacji stanowi praca Andréosso-O’Callaghana i Yue’a (2000). Przedmiotem badania jest gospodarka Chin w latach 1987–1995. Autorów interesowała głównie dekompozycja obserwowanych zmian w poszczególnych sektorach gospodarki na składowe, których przyczynami są: postęp technologiczny, substytucja nakładów, zmiany preferencji nabywców oraz poszerzanie się gospodarki rynkowej.

Specyfika chińskiej transformacji, a szczególnie utrzymujący się przez pewien okres dualny system cen (ceny regulowane i rynkowe), stanowi pewną trudność w stosowaniu klasycznego modelu input-output (zob. Xu i in., 1992). W Polsce, dzięki zastosowaniu na początku lat dziewięćdziesiątych tzw. terapii szokowej (radykałny program reform gospodarczych, mający na celu stworzenie trwałych podstaw długofalowego wzrostu gospodarczego), problem ten praktycznie nigdy nie występował. Niniejsza praca ilustruje zmiany zachodzące w gospodarce poddanej procesowi reform według modelu, który stał się następnie podstawą programów przechodzenia do gospodarki rynkowej w innych krajach Europy Środkowo-Wschodniej. Ustalono m.in., że relatywnie stabilna struktura zużycia pośredniego (częściowo także popytu pośredniego) jest charakterystyczna dla gałęzi, których działalność polega na wydobywaniu surowców naturalnych oraz sektorów uchodzących w powszechnym odczuciu za tradycyjne.

Badanie zostało uzupełnione o analizę zmian strukturalnych obserwowanych w strukturze wartości dodanej i popytu finalnego oraz rachunku wymiany z zagranicą.

Praca została podzielona na pięć części. Część druga zawiera opis metodyki badania. Rozpoczyna ją krótka charakterystyka klasycznej metody RAS, następnie przedstawiono jej rolę w analizie zmian strukturalnych i odmienną interpretację niedoskonałości metody w ścisłym prognozowaniu macierzy w okresie docelowym. W części trzeciej zamieszczono informacje na temat podstawowych danych wykorzystanych w badaniu, niezbędnych korekt wykonanych na surowych danych oraz opis obliczania przepływów w bilansie w cenach stałych. Część czwarta zawiera prezentację wyników empirycznych, uzyskanych dzięki użyciu technik identyfikowania zmian strukturalnych, opisanych w części drugiej. W tej części przedstawiono też wyniki badania zmian w strukturze wartości dodanej, popytu finalnego, importu i eksportu. Na ostatnią, piątą część pracy składają się podsumowanie i najważniejsze wnioski.

2. METODYKA BADANIA

2.1. Metoda RAS

Mimo że pierwsze odnotowane w literaturze użycie metody biproporcjonalnej do rozwiązania konkretnego problemu badawczego (oszacowanie natężenia ruchu w komunikacji telefonicznej; zob. Lahr i de Mesnard, 2004) przypada na drugą połowę lat trzydziestych XX wieku, jej popularność nie tylko nie zmalała z upływem czasu, lecz przeciwnie — systematycznie poszerzano katalog problemów, do rozwiązywania których metoda ta była stosowana, ponadto pojawiły się nowe, uogólnione jej wersje. Różnorodność zastosowań, z jaką mamy niewątpliwie do czynienia w wypadku metody biproporcjonalnej (używano jej m.in. do szacowania relacji liczby urodzin do liczby zgonów — Chandrasekar i Deming, 1949; migracji — Chilton i Poet, 1973; Schoen i Jonsson, 2003; ruchu w transporcie — Furness, 1965, a nawet zachowań wyborców podczas głosowania — Balinski i Gonzalez, 1997; Johnston i in., 1982) nie stanowi przeszkody w jasnym określeniu podstawowego celu i obszarów jej zastosowań.

Niech $X^1 = [x_{ij}^1]$ i $X^t = [x_{ij}^t]$ oznaczają odpowiednio macierz wyjściową (bazową) i wynikową. Obie macierze są tych samych wymiarów oraz $x_{ij}^t \in \mathfrak{R}^+$ przy czym macierz wynikowa najczęściej nie jest znana, lecz niezbędna jest znajomość sum elementów w poszczególnych wierszach i kolumnach tej macierzy. Problem można wtedy zdefiniować następująco: znaleźć macierz $\bar{X} = [\bar{x}_{ij}]$, która będzie odznaczać się identycznymi własnościami co macierz wynikowa oraz:

$$\sum_i x_{ij}^t = \sum_i \tilde{x}_{ij} \quad \text{i} \quad \sum_j x_{ij}^t = \sum_j \tilde{x}_{ij}. \quad (1)$$

Rozwiązanie zdefiniowanego wyżej problemu ma najczęściej na celu minimalizację odległości między macierzami X^t i \tilde{X} , przy zachowaniu zgodności, w praktyce do pewnej stałej ϵ , sum brzegowych obu macierzy — patrz (1).

U powszechnienie metody biproporcjonalnej w ramach modelu nakładów i wyników (ang. *input-output model*) dokonało się głównie za sprawą prac Stone'a (zob. Stone i in., 1942; Stone, 1961, 1962), chociaż jako pierwszy metody tej użył Leontief (1941) do identyfikacji źródeł zmian elementów narodowych tabel input-output. Istotny wkład w rozwój tej metody, powszechnie oznaczanej skrótem RAS, wniósł również Bacharach (1970). Jej przewaga nad alternatywnymi algorytmami znajdowania nieznanych elementów macierzy przy określonych warunkach co do sum brzegowych wynika z pewnością z faktu, że algorytm RAS jest prosty, a ponadto gwarantuje, co ma podstawowe znaczenie w przypadku zastosowań w ramach modelu nakładów i wyników, że oszacowania będą liczbami nieujemnymi (ujemny przepływ w tablicy input-output nastęrcza poważne trudności interpretacyjne i wówczas, gdy jest on elementem popytu pośredniego, może być utożsamiany w zasadzie tylko ze zwrotem produktu i -tej gałęzi, który nie jest wytwarzany przez j -tą gałąź).

Istota algorytmu RAS polega na iteracyjnym korygowaniu elementów w wierszach i kolumnach macierzy \tilde{X} , przy użyciu współczynników proporcjonalności, obliczonych na podstawie znanych sum elementów w wierszach i kolumnach macierzy wynikowej. Dla k -tej iteracji otrzymujemy:

$$\tilde{X}^{(k)} = \left(\prod_{p=1}^k \hat{R}^{(p)} \right) X^t \left(\prod_{p=1}^k \hat{S}^{(p)} \right), \quad (2)$$

gdzie: $\hat{R}^{(p)} = \text{diag}(X^t \mathbf{1}) \text{diag}(\tilde{X}^{(p-1)} \mathbf{1})^{-1}$ i $\hat{S}^{(p)} = \text{diag}(\mathbf{1}^T X^t) \text{diag}(\mathbf{1}^T \tilde{X}^{(p-1/2)})^{-1}$ oraz $\tilde{X}^{(0)} = X^t$ i $\tilde{X}^{(p-1/2)} = \hat{R}^{(p)} \tilde{X}^{(p-1)}$, $\text{diag}(\cdot)$ oznacza zaś operację utworzenia macierzy diagonalnej z wektorem (argumentem) na głównej przekątnej.

Jeżeli dla k -tej iteracji macierze $\hat{R}^{(k)}$ i $\hat{S}^{(k)}$ są tożsame, z dokładnością do pewnej dodatniej stałej, macierzy jednostkowej, algorytm zostaje zatrzymany, zaś macierz \tilde{X} można zapisać jako:

$$\tilde{X} = \hat{R} X^t \hat{S}, \quad (3)$$

gdzie: $\hat{R} = \prod_{p=1}^k \hat{R}^{(p)}$ i $\hat{S} = \prod_{p=1}^k \hat{S}^{(p)}$.

Elementy r_i i s_j , usytuowane na głównych przekątnych odpowiednich macierzy reprezentują odpowiednio efekt substytucji (ang. *substitution effect*) i wytwarzania (ang. *fabrication effect*). Należy jednak zaznaczyć, że porównywanie wartości obu mnożników dla arbitralnie ustalonych i oraz j nie jest najlepszym sposobem badania siły wspomnianych wyżej efektów, gdyż — jak łatwo zauważyć — dla pewnej stałej α zachodzi równość: $\hat{R}X\hat{S} = (\alpha\hat{R})X'(\hat{S}/\alpha)$. Podobnie, równość ta będzie zachodzić wtedy, gdy zamiast skalaru α użyta zostanie dowolna macierz diagonalna. Z tego też powodu w literaturze przedmiotu spotkać można wiele technik normalizacji mnożników substytucji i wytwarzania (zob. np. Dietzenbacher i Linden, 1995). Warto też zwrócić uwagę na ciekawą interpretację elementów r_i i s_j , gdy metoda RAS będzie postrzegana w kategoriach metody zmiennych instrumentalnych (zob. Toh, 1998).

W literaturze przedmiotu spotkać można również uwagi krytyczne formułowane pod adresem metody RAS. W szczególności podnosi się zarzut, że założenia tkwiące u podstaw tej metody są błędne, a sama metoda jest mechanicznym zabiegiem dokonywanym na danych, bez jakiegokolwiek umocowania w teorii ekonomii (zob. np. Lecomber, 1975; Miernyk, 1977). W konsekwencji obserwuje się dość duże rozbieżności między elementami macierzy wynikowej a odpowiednimi elementami macierzy wyestymowanej. Autorzy niniejszej pracy podzielają jednak pogląd, że fakt braku zupełnej (zadowolającej) zgodności między obiema macierzami świadczyć może jedynie o występowaniu trzeciego czynnika, który obok znanego efektu substytucyjnego i wytwarzania wpływa na postać macierzy wynikowej. Czynnikiem takim może być np. specyficzny sektorowy efekt substytucji (zob. Dietzenbacher i Linden, 1995). Niezdolność efektów substytucji i wytwarzania do zupełnego wyjaśnienia zmian zachodzących w strukturze tablic input-output nie stanowi jeszcze dostatecznej podstawy do dyskredytowania samej metody RAS.

Różnice między macierzą wynikową a macierzą otrzymaną za pomocą algorytmu RAS są centralnym punktem analizy zmian strukturalnych, jakie zachodzą w gospodarce na przestrzeni pewnego okresu. Zagadnienia te zostaną omówione w kolejnej części pracy.

2.2. Identyfikacja zmian strukturalnych

Badając zmiany w czasie współczynników bezpośredniej materiałochłonności Dietzenbacher i Linden (1995) postulują istnienie pewnego specyficznego czynnika (Δ_{ij}), który obok efektu substytucyjnego i efektu wytwarzania wpływa na postać macierzy współczynników bezpośredniej materiałochłonności w okresie docelowym. Dla elementu położonego na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny związek między wartością współczynnika w okresie docelowym a jego wartością w okresie początkowym można zapisać następująco:

$$a_{ij}^1 = \tilde{a}_{ij} \Delta_{ij} = r_i a_{ij}^0 s_j \Delta_{ij}, \quad (4)$$

gdzie a_{ij}^1 i a_{ij}^0 oznaczają współczynniki bezpośredniej materiałochłonności odpowiednio w okresie docelowym i początkowym, a \tilde{a}_{ij} jest oszacowaniem współczynnika. Jak łatwo zauważyć, wyrażony w ten sposób czynnik specyficzny (Δ_{ij}) jest stosunkiem współczynnika materiałochłonności w okresie docelowym do szacunkowej wartości współczynnika, obliczonego za pomocą metody RAS.

Dietzenbacher i Linden podkreślają, że ten właśnie dodatkowy czynnik zmian macierzy współczynników bezpośredniej materiałochłonności może być wykorzystany do rozpoznawania zmian, jakie zachodziły na przestrzeni lat w strukturze nakładów i wyników.

Zasadnicze rozszerzenie ekonomicznej interpretacji metody RAS, przez wskazanie, że różnica między macierzą w okresie docelowym a jej oszacowaniem może być rozpoznana w kategoriach zmian strukturalnych, jest jednak osiągnięciem de Mesnarda (1990, 2004).

Niech $Z_t = [z_{ij}^t]$ oznacza macierz nakładów bezpośrednich (wyrażonych wartościowo) w roku t . Element z_{ij}^t reprezentuje zatem wartość produktu i -tej gałęzi zużywaną w produkcji j -tej gałęzi. Aby zaznaczyć, że dana macierz jest wynikiem zastosowania algorytmu RAS do pewnej macierzy Z_0 , przy użyciu sum brzegowych macierzy Z_1 , stosowany będzie zapis Z_0^t . Różnica $Z_1 - \tilde{Z}_0^t$ wyraża zatem efekt zmian strukturalnych, jakie zaszły w macierzy Z_1 w relacji do macierzy Z_0 (zob. de Mesnard, 1990). Porównanie obu macierzy jest możliwe, ponieważ sumy brzegowe macierzy występujących w różnicy są sobie równe.

Zapiszmy ogólnie różnicę wyrażającą zaszłe zmiany strukturalne jako:

$$\Theta = \tilde{Z}_1^B - \tilde{Z}_0^B, \quad (5)$$

gdzie B jest pewną macierzą o tych samych wymiarach co macierze Z_0 i Z_1 . Za pomocą macierzy Θ można wyznaczyć miary zmian względnych, a mianowicie współczynnik względnej zmiany w j -tej kolumnie:

$$\sigma_j^t = \frac{\sqrt{\sum_i \theta_{ij}^2}}{\sum_i \tilde{z}_{ij}^{1,B}}, \quad (6)$$

współczynnik względnej zmiany w i -tym wierszu:

$$\sigma_i^t = \frac{\sqrt{\sum_j \theta_{ij}^2}}{\sum_j \tilde{z}_{ij}^{1,B}} \quad (7)$$

oraz współczynnik względnej zmiany całej struktury:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j \theta_{ij}^2}}{\sum_i \sum_j \bar{z}_{ij}^{1,B}}. \quad (8)$$

Jeżeli B jest tożsama z macierzą w okresie docelowym, tj. Z_1 , metodę analizy zmian strukturalnych nazywamy prospektywną. Z podejściem retrospektywnym będziemy mieć natomiast do czynienia wówczas, gdy w charakterze B zostanie użyta macierz w okresie początkowym, tj. Z_0 . Wykorzystanie jako B albo macierzy z okresu docelowego, albo macierzy z okresu początkowego nie pozostaje bez wpływu na otrzymane wyniki, ponieważ nie zachodzi równość (kreski pionowe oznaczają normę macierzy) $\|Z_1 - \bar{Z}_0\| = \|Z_0 - \bar{Z}_1\|$. Aby uniknąć konieczności analizy dwóch zestawów wyników (dla podejścia pro- i retrospektywnego), w literaturze przedmiotu proponuje się rozwiązania pośrednie (zob. de Mesnard, 2004). Jedno z nich polega na wykorzystaniu w charakterze B średniej z macierzy w okresie początkowym i docelowym, tj. $B = 0,5(Z_0 + Z_1)$. Ciekawą propozycją jest niewątpliwie sugestia użycia jako B macierzy jednostkowej lub — ogólnie — macierzy o jednakowych sumach kolumnowych i wierszowych. Jej wykorzystanie eliminuje konieczność relatywizowania efektów zmian strukturalnych względem wielości poszczególnych sektorów.

3. CHARAKTERYSTYKA DANYCH

W badaniu wykorzystano tablice przepływów międzygałęziowych dla lat 1995 i 2000, które zostały opublikowane przez Główny Urząd Statystyczny (GUS). Ze względu na fakt, że publikacja z 1995 roku obejmuje bilans przepływów międzygałęziowych wyłącznie w cenach nabywców, zdecydowano się na stosowanie wyceny według cen nabywców w przypadku obu lat. Brak wymaganych danych był również powodem rezygnacji z wydzielenia przepływów produktów pochodzących z importu z całości realizowanych przepływów międzygałęziowych, chociaż oparcie analizy zmian strukturalnych na przepływach produktów wytworzonych wyłącznie w kraju byłoby z pewnością lepszym rozwiązaniem.

Należy zauważyć, że uwzględnienie w polskim systemie rachunków narodowych sfery usług niematerialnych w 1990 roku bynajmniej nie rozwiązywało problemu zgodności polskiej statystyki IO ze standardami stosowanymi w innych krajach, bez balastu socjalistycznego dziedzictwa. Wiele odstępstw od zaleceń systemu rachunków narodowych, które były obecne w bilansie przepływów międzygałęziowych dla 1995 roku, zostało skorygowanych w 2000 roku. Jest to okoliczność, która z pewnością stawia pod znakiem zapytania pełną

porównywalność obu bilansów. Niemniej jednak, zmiany, jakie zaszły w systemie rachunków narodowych na przestrzeni pięciu lat (licząc od 1995 roku), nie były na tyle istotne, aby zagrozić poprawności wnioskowania prowadzonego w ramach niniejszego badania.

Jako podstawę wyceny przepływów międzygałęziowych przyjęto ceny obowiązujące w 1995 roku. Mając na uwadze fakt, że użycie deflatorów dla kategorii ekonomicznych o wysokim stopniu agregacji, np. produkcji globalnej, nie jest najlepszą praktyką w przypadku pojedynczych pozycji z bilansu, wszędzie tam, gdzie to tylko było możliwe starano się wykorzystać deflatory indywidualne. Dla tych spośród pozycji, dla których nie istniały deflatory indywidualne, obliczono deflatory przeciętne, korzystając ze wzoru (por. Lipiński, 1997, s. 255–261):

$$\bar{P}_k = \frac{\sum_{i \in I_k} x_{i,k}}{\frac{X_k}{P_k} - \sum_{i \in I_k} \frac{x_{i,k}}{P_{i,k}}}, \quad (9)$$

gdzie: \bar{P}_k i P_k oznaczają odpowiednio przeciętny i rzeczywisty (znany) deflator dla k -tej kategorii ekonomicznej, X_k jest wartością k -tej kategorii w cenach bieżących (przez kategorię ekonomiczną rozumie się tu np. import, spożycie itp.), $x_{i,k}$ reprezentuje wartość i -tej pozycji w k -tej kategorii w cenach bieżących, $P_{i,k}$ jest deflatorem dla i -tej pozycji w k -tej kategorii, zaś I_k oznacza zbiór indeksów pozycji należących do k -tej kategorii, dla których istnieją deflatory indywidualne.

W przedstawiony wyżej sposób zostały skorygowane (wyrażone w cenach stałych) import, eksport oraz krajowy popyt finalny — w wypadku tego ostatniego formuła (9) uległa rozszerzeniu w celu uwzględnienia dodatkowo podkategorii: spożycie, spożycie gospodarstw domowych, akumulacja brutto, zob. Lipiński (1997), s. 255. W charakterze przybliżenia deflatora wartości dodanej wykorzystano deflator produkcji globalnej. Jeśli dysponuje się realną wartością popytu finalnego, to najprostszym sposobem obliczenia realnego popytu pośredniego, a następnie indywidualnych deflatorów jest obliczenie różnicy między realną podażą a realnym popytem. Realną wartość podaży można uzyskać, gdyż znana jest realna wartość produkcji globalnej i importu, o ile wcześniej udało się wiarygodnie oszacować realne rozmiary pozostałej podaży. Niestety, ze względu na zmiany zasad ewidencji tej kategorii (szczególnie sukcesywne uwzględnienie marży handlowej i transportowej), jakie zaszły w badanym okresie, oraz praktyczny brak deflatorów konieczne było użycie publikowanego deflatora zużycia pośredniego dla całości przepływów zawartych w tablicy nakładów bezpośrednich.

Wykorzystane w badaniu tablice nakładów bezpośrednich zostały opracowane za pomocą układu 58×58 produktów (gałęzi) w 1995 roku i 55×55

produktów (gałęzi) w 2000 roku. Na wstępie analizy wykluczono usługi gospodarstw domowych. Pozostałe produkty z bilansu zostały zagregowane do 24 kategorii (zob. tab. 1).

Tabela 1

Lista gałęzi w agregacji 24 × 24

Numer	Charakterystyka gałęzi
1	wyroby przemysłu węglowego, paliwowego (ropa naftowa, koks, gaz ziemny), rudy metali, pozostałe produkty kopalniane
2	energia elektryczna, gaz, gorąca woda
3	wyroby hutnicze żelaza i nieżelaznych, usługi odzyskiwania metali
4	wyroby przemysłu metalowego
5	maszyny, urządzenia
6	wyroby przemysłu precyzyjnego (maszyny biurowe, komputery)
7	wyroby przemysłu środków transportu i handel środkami transportu
8	wyroby przemysłu elektrotechnicznego
9	chemikalia i wyroby chemiczne (wyroby z gumy i tworzyw sztucznych), wyroby z pozostałych surowców niemetalowych (wyroby szklarskie, materiały budowlane)
10	wyroby przemysłu drzewnego, bez mebli i pozostałe wyroby, usługi przemysłowe
11	wyroby przemysłu papierniczego i poligraficznego, nośniki informacji, pozostałe wyroby i usługi materialne
12	wyroby przemysłu włókienniczego
13	odzież i wyroby futrzarskie, skóry i wyroby ze skór
14	produkty spożywcze i napoje
15	roboty budowlane
16	produkty rolnictwa i łowiectwa, gospodarki leśnej, rybołówstwa i rybactwa
17	usługi transportu
18	usługi łączności
19	usługi handlu
20	usługi komunalne, woda zimna i jej dystrybucja
21	usługi mieszkaniowe
22	usługi oświaty, wychowania, służby zdrowia i opieki społecznej, usługi naukowo-badawcze
23	pozostałe usługi dla ludności (hotele i restauracje, usługi turystyczne, usługi pośrednictwa finansowego, usługi finansowe, wynajem maszyn i urządzeń, rekreacyjne kulturowe i sportowe)
24	usługi ogólnospołeczne (administracji publicznej, organizacji członkowskich)

4. WYNIKI EMPIRYCZNE

4.1. Nakłady bezpośrednie

Ze względu na rodzaj bilansu przepływów międzygałęziowych, który posłużył do empirycznej ilustracji metod identyfikowania zmian w strukturze gospodarki, jednostkowy przepływ w tablicy nakładów bezpośrednich (z_{ij}), oprócz wartości produktów wytworzonych w kraju w i -tej gałęzi, a zużytych przez j -tą gałąź, obejmuje również wartość produktów pochodzących z importu, marż handlowych oraz podatki od produktów i -tej gałęzi. W tabelach 2 i 3 przedstawiono współczynniki względnych zmian struktury zużycia pośredniego (kolumny macierzy — por. wzór (6) — i popytu pośredniego — wiersze macierzy, por. wzór (7), jakie zaszły w polskiej gospodarce pomiędzy 1995 a 2000 rokiem. Obliczenia rozpoczęto od najbardziej naturalnego wariantu analizy, tj. podejścia prospektywnego, wykorzystującego w charakterze **B** macierz nakładów bezpośrednich w okresie docelowym, a następnie powtórzono badanie, za każdym razem inaczej specyfikując macierz **B**. Aby ułatwić ocenę względnej pozycji danej gałęzi (pomijamy tu problem produkcji obcoprofilowej), w nawiasach kwadratowych zamieszczono rangi w porządku malejącym. Oznacza to, że rangę 1 otrzymała ta gałąź, której współczynnik względnej zmiany był najwyższy.

Pierwsze spostrzeżenie dotyczy porównania wyników otrzymanych dla różnych specyfikacji macierzy **B**. Można zauważyć, że wartości odpowiednich współczynników w trzech pierwszych podejściach, tj. w podejściu prospektywnym, retrospektywnym oraz podejściu opartym na średniej wartości z okresu początkowego i docelowego, różnią się tylko nieznacznie. W zasadzie, większe różnice dają się zauważyć w rangach, ale te zależą od rozkładów wartości współczynników i pełnią tu drugorzędą, informacyjną rolę. Do zgoła odmiennego wniosku dochodzimy, gdy porównamy wyniki otrzymane w podejściu, które w charakterze **B** wykorzystuje macierz jednostkową. W tym przypadku zdarzają się już znaczące różnice. W tabeli 2, na przykład, współczynnik względnych zmian dla sektora pierwszego („Wyroby przemysłu węglowego i paliwowego, rudy metali i pozostałe produkty kopalniane”) waha się od 5,09% (podejście retrospektywne) do 6,33% (podejście prospektywne), gdy zawężymy nasze zainteresowanie do pierwszych trzech prezentowanych podejść. Natomiast w przypadku ostatniego podejścia ten sam współczynnik osiąga wartość 22,88%.

Wykorzystanie macierzy jednostkowej w charakterze **B** upraszcza wzory (6) i (7), gdyż suma elementów w dowolnym wierszu lub kolumnie przetransformowanej macierzy jest równa jedności. Znika zatem problem różnej wielkości porównywanych sektorów. Nie ma w zasadzie merytorycznych przesłanek (za wyjątkiem „wygody” w posługiwaniu się wskaźnikami zmian), które uzasadniałyby zastosowanie macierzy jednostkowej w tej specyficznej roli. Niemniej jednak w literaturze przedmiotu podkreśla się niekiedy, że podejście oparte na

Tabela 2

Zmiany struktury zużycia pośredniego

Gałąź	W charakterze macierzy B użyto			
	macierz w okresie docelowym	macierz w okresie początkowym	średnią obu macierzy	macierz jednostkową
1	6,33 [23]	5,09 [22]	5,75 [23]	22,88 [4]
2	11,26 [15]	12,23 [12]	11,72 [14]	22,09 [2]
3	10,88 [18]	9,96 [19]	10,42 [19]	15,28 [14]
4	11,69 [14]	11,78 [13]	11,76 [13]	8,47 [21]
5	11,97 [13]	13,04 [11]	12,40 [11]	11,97 [17]
6	11,03 [17]	10,97 [17]	10,87 [18]	18,60 [9]
7	20,98 [4]	21,80 [3]	21,28 [4]	15,91 [13]
8	14,92 [10]	16,47 [9]	15,49 [9]	18,66 [8]
9	12,60 [12]	9,86 [20]	11,38 [15]	10,84 [19]
10	6,93 [22]	7,37 [21]	7,08 [21]	6,14 [23]
11	15,50 [9]	13,08 [10]	14,58 [10]	14,36 [15]
12	13,19 [11]	11,34 [16]	12,30 [12]	12,60 [16]
13	22,61 [3]	21,58 [4]	22,14 [3]	17,99 [11]
14	6,98 [21]	4,77 [23]	5,94 [22]	4,80 [24]
15	11,08 [16]	11,45 [15]	11,17 [16]	8,62 [20]
16	5,22 [24]	4,71 [24]	4,91 [24]	6,39 [22]
17	18,81 [5]	19,66 [5]	18,81 [5]	19,48 [7]
18	36,53 [1]	32,79 [1]	34,97 [1]	20,24 [6]
19	16,66 [7]	16,84 [8]	16,38 [7]	21,00 [5]
20	15,55 [8]	17,24 [7]	15,98 [8]	11,63 [18]
21	34,24 [2]	31,24 [2]	32,04 [2]	33,61 [1]
22	18,40 [6]	17,76 [6]	18,05 [6]	18,29 [10]
23	9,00 [20]	10,53 [18]	9,52 [20]	26,26 [3]
24	10,80 [19]	11,62 [14]	10,93 [17]	17,55 [12]

Liczby wyrażono w procentach; w nawiasach kwadratowych zamieszczono rangi w porządku malejącym.

Zmiany struktury popytu pośredniego

Gałąź	W charakterze macierzy B użyto:			
	macierz w okresie docelowym	macierz w okresie początkowym	średnią obu macierzy	macierz jednostkowa
1	8,07 [22]	6,67 [22]	7,36 [23]	12,67 [14]
2	13,40 [14]	12,60 [14]	13,04 [14]	11,81 [17]
3	7,98 [23]	7,02 [21]	7,47 [22]	11,03 [18]
4	5,08 [24]	5,90 [24]	5,37 [24]	5,55 [24]
5	18,06 [8]	15,59 [11]	16,85 [8]	15,28 [11]
6	11,53 [18]	15,68 [10]	13,23 [13]	15,58 [10]
7	28,02 [4]	23,62 [6]	26,17 [4]	20,27 [5]
8	15,87 [10]	17,07 [8]	16,14 [10]	18,23 [8]
9	11,57 [17]	9,57 [17]	10,65 [17]	10,17 [21]
10	13,41 [13]	11,56 [16]	12,63 [15]	8,75 [23]
11	9,70 [20]	8,92 [18]	9,37 [19]	12,30 [16]
12	23,43 [7]	20,47 [7]	22,07 [7]	19,24 [7]
13	13,78 [12]	14,25 [12]	13,94 [11]	12,91 [13]
14	11,32 [19]	6,58 [23]	9,23 [20]	10,82 [19]
15	17,19 [9]	16,97 [9]	16,82 [9]	19,32 [6]
16	12,03 [16]	8,22 [20]	10,22 [18]	10,25 [20]
17	14,35 [11]	13,50 [13]	13,91 [12]	12,53 [15]
18	9,61 [21]	8,74 [19]	9,14 [21]	10,14 [22]
19	32,76 [2]	31,40 [2]	32,12 [2]	25,54 [3]
20	25,96 [5]	24,18 [4]	25,34 [5]	15,09 [12]
21	30,58 [3]	23,89 [5]	27,83 [3]	29,19 [2]
22	25,30 [6]	24,71 [3]	25,00 [6]	21,06 [4]
23	13,17 [15]	12,06 [15]	12,58 [16]	15,73 [9]
24	60,79 [1]	53,83 [1]	58,38 [1]	41,86 [1]

Liczby wyrażono w procentach; w nawiasach kwadratowych zamieszczono rangi w porządku malejącym.

macierzy jednostkowej powinno być preferowane, gdyż pozwala w jednym kroku korygować trzy efekty, tj. substytucji, wytwarzania i wielkości (ang. *size effect*) (zob. np. de Mesnard, 2004).

Podjmując próbę charakterystyki zmian w strukturze zakupów przedsiębiorstw, reprezentowanych przez zużycie pośrednie, można zauważyć, że trzy spośród ośmiu wyróżnionych sektorów usług, tj. usługi transportu (17), łączności (18) i mieszkaniowe (21) znalazły się na szczycie zestawienia. Są to więc sektory, które zmieniły strukturę zakupów w największym stopniu. Do tej samej grupy należy zakwalifikować gałąź wytwarzającą i handlującą środkami transportu (7) oraz sektor odzieży i skóry, wyrobów futrzarskich i skórzanych (13). Względnie stabilne, ze względu na strukturę zużycia pośredniego, okazały się natomiast gałęzie związane z przemysłem węglowym i paliwowym oraz rudami metali (1), wyroby przemysłu drzewnego (10), produkty spożywcze i napoje (14), produkty rolnictwa, łowiectwa, rybołówstwa i gospodarki leśnej (16) oraz pozostałe usługi dla ludności (23).

Można zatem sformułować wniosek, że na szczycie zestawienia znalazły się gałęzie szybko poddane reformie, co oznaczało ich szerokie otwarcie na kapitał zagraniczny, który zaczął odtąd pełnić dominującą rolę w strukturze właścicielskiej, oraz stworzenie dogodnych warunków dla rozwoju prywatnej inicjatywy (niebagatelne znaczenie mogło też mieć dopuszczenie na rynek produktów pochodzących z importu). Z kolei sektory, których działalność opiera się głównie na wydobywaniu surowców naturalnych oraz gałęzie uchodzące za tzw. tradycyjne zajmują najniższe miejsca w rankingu. Nie jest też z pewnością przypadkiem, że są to jednocześnie sektory — z różnych względów — zaniechywane w procesie prywatyzacji.

Do ciekawego wniosku prowadzi także bliższe przyjrzenie się sektorom zajmującym miejsca w połowie zestawienia. Należy tu wymienić: sektor maszyn i urządzeń (5), chemikalia i wyroby chemiczne (9) oraz wyroby przemysłu włókienniczego (12). W 2000 roku należały one do grupy powszechnie określanej jako tzw. sektory słabo zorientowane (ang. *weak oriented sectors*), tj. sektory o słabych powiązaniach popytowych i podażowych (zob. Gurgul i Majdosz, 2005).

W badanym okresie istotnie zmieniła się również struktura sprzedaży (patrz tabela 3). Największe zmiany można zauważyć w sektorach usług: handlu (19), komunalnych (20), mieszkaniowych (21), oświatowych, służby zdrowia i opieki społecznej (22) oraz tzw. usług ogólnospołecznych (24), która to kategoria obejmuje w szczególności usługi świadczone przez administrację publiczną oraz organizacje członkowskie. Po raz kolejny, relatywnie stabilne, tym razem pod względem struktury popytu pośredniego, okazały się gałęzie związane z wydobywaniem surowców naturalnych („Wyroby przemysłu węglowego i paliwowego, rudy metali i pozostałe produkty kopalniane”) oraz produkty spożywcze i napoje (14). Niewielkie zmiany zaszły też w strukturze sprzedaży wyrobów przemysłu ciężkiego, w tym hutniczych (3) oraz przemysłu metalowego (4). Stabilna

w badanym okresie okazała się również struktura popytu pośredniego na wyroby przemysłu papierniczego i poligraficznego (11).

Koncentrując uwagę na pytaniu, jaki procent produkcji globalnej w Polsce w 2000 roku pochodził od sektorów odznaczających się największymi zmianami struktury zużycia pośredniego, a jaki od sektorów o najniższym współczynniku względnych zmian, należy stwierdzić, że blisko jedna trzecia produkcji globalnej należała do gałęzi o stabilnej strukturze zakupów. Udział sektorów charakteryzujących się największymi zmianami wynosił niespełna 18%. Niestety, brak wyników dla innych krajów, które podobnie jak Polska na początku lat dziewięćdziesiątych rozpoczęły proces reformowania swoich gospodarek, uniemożliwia porównanie. Jest to obszar dla kolejnych, pogłębionych badań w przyszłości. Aczkolwiek nie należy zapominać, że sytuacja każdego kraju na starcie reform była inna i bezpośrednie porównanie gospodarki polskiej z gospodarkami węgierską czy czechosłowacką, które charakteryzowały się płytszymi strukturalnymi deformacjami (niższym stopniem socjalistycznej industrializacji), winno być przeprowadzane z dużą dozą ostrożności (na temat różnych obciążeń krajów Europy Środkowo-Wschodniej na początku transformacji zob. Balcerowicz, 1995, s. 330).

W następnych dwóch podpunktach tej części pracy uzupełniamy analizę o dodatkowe elementy, stanowiące integralną część bilansu całej gospodarki, a mianowicie wartość dodaną i popyt finalny oraz rachunek wymiany z zagranicą.

4.2. Wartość dodana i popyt finalny

Uzupełniając macierz nakładów bezpośrednich o dodatkowe dwa wiersze (wektor wartości dodanej i wektor importu) oraz dodatkowe dwie kolumny (wektor popytu finalnego i wektor eksportu) otrzymaliśmy nową macierz, która dużo lepiej nadaje się do kompleksowego opisu zmian zachodzących w gospodarce w badanym okresie. Tak utworzona macierz stała się następnie podstawą analizy zmian strukturalnych w wyróżnionych obszarach, a mianowicie zmian w strukturze wartości dodanej, popytu finalnego, importu i eksportu. W charakterze B użyto macierz w okresie docelowym.

W tabeli 4 zestawiono wartość zmian, jakie zaszły w latach 1995–2000, w wartości dodanej oraz popycie finalnym w poszczególnych sektorach gospodarki. Uzupełnienie stanowi informacja o procentowym udziale wartości bezwzględnej zmiany w sumie bezwzględnych wartości zmian. W nawiasach kwadratowych przedstawiono natomiast rangi bezwzględnych wartości zmian w porządku malejącym (ranga 1 została przypisana sektorowi o największej bezwzględnej zmianie).

Można zauważyć, że w badanym okresie nastąpił transfer wartości dodanej z sektora środków transportu (7), handlu (19), rolnictwa, rybołówstwa, łowiectwa i gospodarki leśnej (16) oraz robót budowlanych (15) i usług łączności

Tabela 4

Zmiany struktury wartości dodanej i popytu finalnego

Gałąź	Wartość dodana		Popyt finalny	
	Zmiana (w mln zł)	Udział (w %)	Zmiana (w mln zł)	Udział (w %)
1	624,88	1,58 [14]	-3,029,04	5,67 [10]
2	74,94	0,19 [22]	-3310,47	4,02 [9]
3	-464,24	1,17 [16]	177,44	0,22 [21]
4	9,47	0,02 [24]	1854,40	2,25 [16]
5	-132,31	0,33 [21]	4600,03	5,58 [7]
6	715,47	1,81 [13]	4029,96	4,89 [8]
7	-5279,42	13,35 [1]	5877,23	7,13 [4]
8	436,01	1,10 [17]	-2460,36	2,98 [14]
9	2901,44	7,34 [6]	5445,67	6,61 [6]
10	-340,24	0,86 [18]	-946,28	1,15 [19]
11	3211,65	8,12 [5]	2885,35	3,50 [11]
12	-238,55	0,60 [19]	-2638,27	3,20 [13]
13	-183,56	0,46 [20]	2816,50	3,42 [12]
14	-59,34	0,15 [23]	-5471,61	6,64 [5]
15	-2788,88	7,05 [7]	-75,59	0,09 [24]
16	-3746,98	9,48 [4]	-8914,83	10,81 [3]
17	1297,23	3,28 [11]	-118,14	0,14 [22]
18	-2157,88	5,46 [10]	1781,16	2,16 [17]
19	-4380,75	11,08 [2]	-2012,04	2,44 [15]
20	536,76	1,36 [15]	-475,54	0,58 [20]
21	991,87	2,51 [12]	11749,48	14,25 [1]
22	4152,77	10,50 [3]	-1216,29	1,48 [18]
23	2507,86	6,34 [8]	-10431,15	12,65 [2]
24	2311,81	5,85 [9]	-117,61	0,14 [23]

W nawiasach kwadratowych zamieszczono rangi w porządku malejącym.

Zmiany struktury importu i eksportu

Gałąź	Import		Eksport	
	Zmiana (w mln zł)	Udział (w %)	Zmiana (w mln zł)	Udział (w %)
1	533,91	1,27 [16]	4110,46	9,83 [4]
2	10,54	0,03 [21]	166,66	0,40 [18]
3	2358,87	5,61 [6]	-343,97	0,82 [16]
4	404,63	0,96 [17]	1071,59	2,56 [12]
5	1445,05	3,43 [10]	-130,16	0,31 [19]
6	43,21	0,10 [20]	1992,51	4,77 [9]
7	6076,84	14,44 [2]	4798,45	11,48 [3]
8	1248,65	2,97 [11]	2361,97	5,65 [7]
9	-1476,15	3,51 [9]	-2018,76	4,83 [8]
10	1043,98	2,48 [12]	3383,26	8,09 [6]
11	-1532,39	3,64 [8]	993,90	2,38 [13]
12	3117,42	7,41 [5]	4952,46	11,85 [2]
13	1028,83	2,45 [13]	1148,79	2,75 [11]
14	-4764,63	11,32 [3]	-3998,42	9,57 [5]
15	3725,19	8,85 [4]	-7163,92	17,14 [1]
16	-1808,82	4,30 [7]	-174,60	0,42 [17]
17	-537,83	1,28 [15]	-1848,45	4,42 [10]
18	-127,83	0,30 [19]	-6,43,62	1,54 [14]
19	-736,65	1,75 [14]	-4,49	0,01 [21]
20	0,00 ^d	0,00 [22]	0,00 ^d	0,00 [22]
21	0,00 ^a	0,00 [22]	0,00 ^d	0,00 [22]
22	-219,45	0,52 [18]	29,19	0,07 [20]
23	-9833,37	23,37 [1]	-461,93	1,11 [15]
24	0,00 ^d	0,00 [22]	0,00 ^d	0,00 [22]

W nawiasach kwadratowych zamieszczono rangi w porządku malejącym.

^a — produkty lub usługi nie będące przedmiotem wymiany z zagranicą.

(15) do sektora papierniczego i poligraficznego (11), chemicznego (9) oraz sektorów usług oświaty, wychowania i służby zdrowia (22), usług ogólnospołecznych (24) i pozostałych usług świadczonych dla ludności (23). W tym samym okresie relatywnie wzrósł popyt odbiorców finalnych na usługi mieszkaniowe (21), środki transportu (7), chemikalia i inne wyroby chemiczne (9) oraz maszyny i urządzenia (5). Spadki popytu odnotowano natomiast w przypadku pozostałych usług dla ludności (23) produktów rolnictwa, rybołówstwa i łowiectwa (16), produktów spożywczych i napojów (14) oraz energii elektrycznej, gazu i gorącej wody (2).

Uwzględnienie dodatkowych rachunków bilansu przepływów międzygałęziowych wpłynęło też na wartość współczynników względnych zmian dla poszczególnych sektorów oraz łącznie dla całej struktury. Warto odnotować fakt, że współczynnik względnej zmiany (8), po uwzględnieniu wartości dodanej i popytu finalnego oraz wymiany z zagranicą, osiągnął wartość 2,38%, podczas gdy ten sam współczynnik obliczony dla macierzy nakładów bezpośrednich wynosił 3,48%. Dodatkowe zmienne stabilizują zatem całą strukturę. Indywidualne współczynniki, dla pojedynczych sektorów reagowały, oczywiście, różnie. Jednoznaczny wzrost odnotowano w sektorach wyrobów przemysłu włókienniczego (12), przemysłu papierniczego i poligraficznego (11), produktów rolnictwa, rybołówstwa, łowiectwa i leśnictwa (16) oraz pozostałych usług dla ludności (23). Największy spadek wystąpił natomiast w sektorze usług oświatowych, wychowawczych i służby zdrowia (22), usług ogólnospołecznych (24), w sektorze maszyn i urządzeń (5) oraz środków transportu (7).

4.3. Import i eksport

Tabela 5 przedstawia zmiany struktury importu i eksportu w badanym okresie. Największy wzrost udziału importu dotyczył sektora środków transportu (7), robót budowlanych (15) i przemysłu włókienniczego (12). Spadek importu odnotowały m.in. niektóre z sektorów usług (w szczególności pozostałe usługi dla ludności (23)), produkty spożywcze i napoje (14) oraz produkty rolnictwa, rybołówstwa, łowiectwa i leśnictwa (16). Zmiany struktury eksportu okazały się najbardziej korzystne w sektorze środków transportu (7), przemysłu włókienniczego (12) i drzewnego (10). Relatywny spadek wielkości eksportu można natomiast zauważyć w badanym okresie w przemyśle węglowym i paliwowym, rud metali i pozostałych produktów kopalnianych (1), robotach budowlanych (15), produktach spożywczych i napojach (14) oraz w chemikaliach i wyrobach chemicznych (9).

5. WNIOSKI

W pracy omówiono metodę identyfikowania zmian struktury nakładów i wyników w gospodarce. Podejście to wykorzystuje znaną technikę proporcjonalnego korygowania elementów macierzy względem kolumn i wierszy (RAS). Korzystając z tej techniki, nadano nową interpretację różnicom pomiędzy macierzą rzeczywistą a macierzą prognozowaną. W praktyce możliwe są różne warianty prezentowanego podejścia, przez odpowiednią definicję macierzy **B** w metodzie RAS. Wyniki zaprezentowane w pracy sugerują, że pro- i retrospektywny wariant analizy oraz kombinacja dwóch skrajnych rozwiązań, wyrażająca się zastosowaniem średniej macierzy w okresie początkowym i docelowym, prowadzą w zasadzie do tych samych wniosków końcowych. Różnice pojawiają się dopiero podczas zastosowania czwartego rozwiązania, w którym w charakterze macierzy **B** stosowana jest macierz jednostkowa.

Analiza zmian struktury nakładów bezpośrednich w latach 1995–2000 ujawniła pewne prawidłowości, w tym:

- największe zmiany struktury zużycia pośredniego odnotowały gałęzie najszybciej zreformowane, z kolei najmniejsze — sektory, których działalność opiera się głównie na wydobywaniu surowców naturalnych oraz tzw. gałęzie tradycyjne;
- sektory o najsłabszych powiązaniach popytowych i podażowych stanowią kategorię pośrednią między gałęziami o dynamicznej i stabilnej strukturze zużycia pośredniego;
- struktura popytu pośredniego zmieniła się najbardziej w wypadku sektorów świadczących usługi, najmniej zaś — po raz kolejny — w sektorach eksploatujących surowce naturalne;
- blisko jedna trzecia produkcji globalnej należała do gałęzi o stabilnej strukturze zużycia pośredniego.

Wartość dodana i popyt finalny oraz wymiana z zagranicą miały w badanym okresie stabilizujący wpływ na całą strukturę bilansu. W odniesieniu jednak do pojedynczych sektorów lub produktów mogły powodować zarówno wzrost ogólnego współczynnika względnej zmienności, jak i jego spadek.

Wydaje się celowe porównanie otrzymanych wyników dla polskiej gospodarki z wynikami dla innych gospodarek w okresie transformacji. Na przeszkodzie stoi jednak nie tylko różna sytuacja krajów Europy Środkowo-Wschodniej na starcie procesu reform gospodarczych w początkach lat dziewięćdziesiątych, lecz — a może przede wszystkim — różnice w stosowanej przez te kraje metodologii opracowywania odpowiednich tablic input-output, będących podstawą badania.

BIBLIOGRAFIA

- Andreosso-O'Callaghan B., Yue G. 2000. *An Analysis of Structural Change in China Using Biproportional Methods*, Economic Systems Research, 12, 99–111.
- Bacharach M. 1970. *Biproportional Matrices and Input-Output Change*, Cambridge, U.K., Cambridge University Press.
- Balcerowicz L. 1995. *Wolność i rozwój. Ekonomia wolnego rynku*, Kraków, Wydawnictwo Znak.
- Balinski M., Gonzalez V.R. 1997. *Mexican Electoral Law: 1996 version*, Electoral Studies, 16, 329–340.
- Chandrasekar C., Deming W.E. 1949. *On a Method for Estimating Birth and Death Rates and the Extend of Registration*, Journal of the American Statistical Association, 44, 101–115.
- Chilton R., Poet R. 1973. *An Entropy Maximizing Approach to the Recovery of Detailed Migration Patterns from Aggregate Census Data*, Environment and Planning, 4, 205–233.
- Dietzenbacher E., Linden J.A. 1995. *The Determinants of Structural change in the European Union: A New Application of RAS*, SOM Research Report, No. 95D36 [<http://irs.ub.rug.nl/ppn/149814240>].
- Furness K. P. 1965. *Time Function Iteration*, Traffic Engineering and Control, 7, 458–460.
- Gurgul H., Majdosz P. 2005. *Key Sector Analysis: A Case of the Transited Polish Economy*, Managing Global Transitions, 3 (1), 95–111.
- Johnston R. J., Hay A.M., Taylor R.J. 1982. *Estimating the Sources of Spatial Change in Election Results: A Multiproportional Approach*, Environment and Planning, 14, 951–961.
- Lahr M., Mesnard L. de 2004. *Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis*, Economic Systems Research, 16 (2), 115–134.
- Lecomber J.R. 1975. *Estimating and Projecting Input-Output Coefficients*. [w:] R.I. Allen, W.F. Gosling (eds.), *Estimating and Projecting Input-Output Coefficients*, London, Input-Output Publishing Company.
- Leontief W.W. 1941. *The Structure of American Economy, 1919–1929: An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, Cambridge, UK, Cambridge University Press.
- Lipiński C. 1997. *Wrażliwość systemu ekonomicznego na zmiany w strukturze nakładów i wyników*, Łódź, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Mesnard L. de 1990. *Biproportional Method for Analysing Interindustry Dynamics: the Case of France*, Economic Systems Research, 2 (3), 271–293.
- Mesnard L. de 2004. *Biproportional Methods of Structural Change Analysis: a Typological Survey*, Economic Systems Research, 16 (2), 205–230.
- Miernyk W.H. 1977. *Medium Dynamic Forecasting*, [w:] W.F. Gosling (ed.) *The 1975 London Input-Output Conference*. London, Input-Output Company.
- Schoen R., Jonsson S.H. 2003. *Estimating Multistate Transition Rates from Population Distributions*, Demographic Research, 9, 1–24.
- Stone R. 1961. *Input-Output and National Accounts*, Paris, Organization of European Economic Cooperation.
- Stone R. 1962. *Multiple Classifications in Social Accounting*, Bulletin de l'Institut International de Statistique, 39, 215–233.
- Stone R., Champernowne, D.G., Meade J.E. 1942. *The Precision of National Income estimates*, Review of Economic Studies, 9, 111–125.
- Toh M.-H. 1998. *The RAS Approach in Updating Input-Output Matrices: An Instrumental Variable Interpretation and Analysis of Structural Change*, Economic Systems Research, 10 (1), 63–78.
- Xu D., Deng, S., Gruver, G. 1992. *The Application of the Leontief Input-Output Matrix in the Transition Process*, Economic Systems Research, 4 (1), 35–47.

ELASTYCZNOŚĆ POLITYKI FISKALNEJ W UNII WALUTOWEJ¹

PAWEŁ MŁODKOWSKI

Katedra Ekonomii

Wyższa Szkoła Biznesu — National Louis University

PL 33-300 Nowy Sącz, ul. Zielona 27

e-mail: Pawel.Mlodkowski@wsb-nlu.edu.pl

Praca była przedstawiona przez autora na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych Oddziału PAN w Krakowie, w listopadzie 2006 roku. Problemy przedstawione w pracy były też prezentowane na międzynarodowej konferencji naukowej „Future of the banking in the world and Czech Republic” (Uniwersytet w Ostrawie, Karvina 2005).

ABSTRACT

Paweł Młodkowski, *Fiscal policy flexibility in a currency union*, *Folia Oeconomica Cracoviensia* 2007, 48: 25–46.

The discussion of the need to formally coordinate fiscal policies in monetary union member countries lacks a framework to assess the feasibility of different limits and requirements imposed on public finance at the member-country level. The main argument raised by opponents to a multilateral supervision is that it allows for no flexibility in conducting fiscal policy. A lack of this flexibility makes a response to asymmetric shocks impossible and increases differences in business cycle phases among monetary union member countries. This paper offers a framework to assess and compare fiscal policy flexibility under a variety of different fiscal constraints and their levels.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

monetary integration, fiscal policy flexibility, fiscal convergence criteria
integracja monetarna, elastyczność polityki monetarnej, kryteria konwergencji fiskalnej

¹ Autor składa serdeczne podziękowania uczestnikom posiedzenia Komisji Nauk Ekonomicznych Oddziału PAN w Krakowie za uwagi pomocne w przygotowaniu ostatecznej wersji artykułu. Wszelkie ewentualne błędy obciążają wyłącznie autora.

1. WPROWADZENIE

Potrzeba konwergencji fiskalnej w unii walutowej jest powszechnie akceptowana. Świadczą o tym przykłady prawie wszystkich unii monetarnych na świecie. Istnieje jednak groźba, że narzucone sektorowi finansów publicznych limity i wymogi będą wywierały negatywny wpływ na gospodarkę kraju członkowskiego. Z tego powodu potrzebna jest metoda oceny kryteriów konwergencji fiskalnej i odpowiedzi na pytanie o ich faktyczny wpływ. W artykule podjęto próbę stworzenia takiej metody wraz z syntetycznym wskaźnikiem stopnia elastyczności polityki fiskalnej w warunkach istnienia ograniczeń i wymogów dla władz publicznych.

Część pierwsza prezentuje obecne poglądy teoretyczne w zakresie oceny kryteriów konwergencji fiskalnej oraz warunków trwałości i integralności unii walutowej. Wskazane są tu także teoretyczne konsekwencje dla polityki budżetowej wprowadzenia nadzoru wielostronnego opartego na kryteriach konwergencji fiskalnej. W części drugiej zaprezentowano doświadczenia pozaeuropejskich unii monetarnych (ZUM, ŚUM i WUM) o kilkudziesięcioletniej historii. Wprowadzono kryteria konwergencji fiskalnej, które umożliwiły uporanie się z wieloma problemami nieodpowiedzialnej polityki na szczeblu krajowym. Część trzecia prezentuje formalizację kryteriów konwergencji fiskalnej wprowadzonych w uniach opisanych w części 2. Część czwarta zawiera omówienie koncepcji elastyczności polityki fiskalnej i metodę jej pomiaru. Całość zamykają wnioski na temat elastyczności polityki fiskalnej, jej głównych determinant oraz potencjalnych możliwości wykorzystania.

2. WARUNKI STABILNOŚCI MAKROEKONOMICZNEJ I TRWAŁOŚCI UNII WALUTOWEJ

Panuje powszechne przekonanie, że unia walutowa przynosi wiele korzyści. Badania empiryczne przeprowadzone przez Edwardsa i Magendza (2002) udowodniły, że kraje członkowskie niezależnych unii walutowych doświadczały niższych stóp inflacji i wyższych stóp wzrostu PKB niż kraje posługujące się walutami narodowymi. Badanie obejmowało okres 1970–1998. Korzyści materializują się w wyniku członkostwa, ale są one uwarunkowane istnieniem pewnych cech. Eichengreen (2002) wskazuje, że wykorzystanie wszystkich potencjalnych zalet wspólnego pieniądza i polityki monetarnej zależy od wielu czynników. Jednym z nich jest wysoka dodatnia korelacja cyklu koniunkturalnego. Im silniej pozytywnie skorelowana jest aktywność gospodarcza, tym wspólna polityka pieniężna jest lepiej dopasowana do sytuacji we wszystkich krajach członkowskich. Z powodu braku możliwości prowadzenia polityki monetarnej dostosowanej do indywidualnych warunków kraju członkowskiego, rząd reali-

zujący politykę fiskalną jest odpowiedzialny za koordynację i konwergencję faz cyklu koniunkturalnego między krajami członkowskimi unii walutowej. Polityka monetarna definiowana jest na poziomie regionalnym, co powoduje, że polityka fiskalna musi się do niej dopasowywać. Z tego powodu staje się ona kluczowa dla utrzymania równowagi wewnętrznej i zewnętrznej.

Polityka fiskalna realizowana na poziomie krajowym jest określana przez wiele różnorodnych czynników. Analizując przykłady istniejących unii walutowych Masson i Pattillo (2002) dochodzą do wniosku, że nie jest jasne, czy członkostwo w takim ugrupowaniu pomaga czy utrudnia w utrzymaniu dyscypliny finansów publicznych. Brak tej dyscypliny może być odpowiedzialny za dywergencję cyklu koniunkturalnego. Jest to wysoce niepożądane, gdyż prowadzi do niedopasowania polityki monetarnej do warunków w niektórych gospodarkach członkowskich.

Jak dotychczas, literatura na temat UGW i doświadczenia Strefy Franka CFA w Afryce sugerują możliwość kreowania przesłanek do zbyt ekspansywnej polityki fiskalnej w unii walutowej. Rządy stają przed możliwością osiągnięcia korzyści na poziomie krajowym. Jednocześnie, ewentualne negatywne konsekwencje zostaną rozłożone solidarnie na wszystkie terytoria połączone unią. Worrell (2003) opierając się na wynikach badań empirycznych podaje listę negatywnych konsekwencji: wysokie stopy procentowe, niepewny klimat inwestycyjny i niski potencjał wzrostu gospodarczego. Hefeker (2003) uważa, że brak koordynacji polityki fiskalnej wywiera negatywny wpływ na wspólny pieniądz.

Debrun et al. (2002) wskazują, że rządzący osiągają doraźny interes polityczny, co umożliwia realizację korzyści przez wybrane grupy w społeczeństwie. Dokonują tego przez nadmierne wydatki publiczne. Przesłankę dla nieodpowiedzialnej polityki fiskalnej tworzy fakt istnienia unijnego banku centralnego, który w momencie kryzysu może wybawić rząd kraju członkowskiego z kłopotu, np. wykupując część długu publicznego. W ten sposób koszty zbyt ekspansywnej polityki fiskalnej rozkładane są na wszystkie kraje tworzące unię, by nie dopuścić do dezintegracji unii walutowej. Kryteria konwergencji fiskalnej i nadzór wielostronny mają na celu zapobieżenie powyższemu scenariuszowi.

Masson i Pattillo (2002) wykazują, iż unia walutowa jest trwała i pozwala na osiągnięcie potencjalnych korzyści tylko wówczas, gdy „ręce władz fiskalnych związane są przez zestaw kryteriów i ograniczeń fiskalnych”. Mają one być wiążące nie tylko przed przystąpieniem do unii, ale w ciągu jej całego życia. Ten punkt widzenia znajduje oparcie także w teoretycznej analizie przeprowadzonej przez Chariego i Kehoe (1998). Dowodzą oni, że to czy unia walutowa wymaga limitu dla długu publicznego zależy od stopnia wiarygodności banku centralnego w jego postanowieniu o nieingerencji w sytuacji kryzysu finansów publicznych. Jeśli podmiot emisyjny nie potrafi utrzymać tego zobowiązania, to wystąpi zjawisko „gapowicza” w polityce fiskalnej. Z tego powodu limit dla poziomu długu publicznego może być pożądanym.

Unia walutowa bez kryteriów konwergencji fiskalnej nie jest rozwiązaniem pozwalającym na osiągnięcie szybszego ani stabilnego wzrostu. Beetsma i Uhlig (1999) uważają, że w celu uniknięcia kosztów zewnętrznych nieodpowiedzialnej polityki fiskalnej musi być ona skoordynowana. Aby osiągnąć potencjalne korzyści z tytułu wspólnej polityki monetarnej i używania unijnego pieniądza, rządy krajów członkowskich powinny zdefiniować na poziomie ponadnarodowym właściwy zestaw ograniczeń oraz wprowadzić wiarygodny i skuteczny system nadzoru wielostronnego w celu egzekwowania narzuconych limitów. Istnieje jednak istotne zagrożenie. Osiągnięcie ograniczeń i spełnienie wymogów narzuconych przez kryteria konwergencji fiskalnej może prowadzić do utraty autonomii krajowej polityki budżetowej.

Brak elastyczności polityki fiskalnej jest podstawą krytyki wysuwanej przeciwko wszelkim ograniczeniom fiskalnym. Można ją odnaleźć w pracy Debruna (2000) lub wydedukować z artykułów Beana (1992), Buiters et al. (1992) czy Dornbusha (1997) oraz Simsa (1998). Pamiętać bowiem należy, iż przy wspólnej polityce monetarnej, jedyną polityką gospodarczą, która może służyć stabilizacji w odpowiedzi na szoki asymetryczne, jest właśnie polityka fiskalna. Przy braku reakcji rozbieżność między fazami cyklu koniunkturalnego może wzrastać. Z tego powodu wydaje się wysoce pożądane rozpoznanie determinant elastyczności polityki fiskalnej i zaproponowanie metody służącej podejmowaniu decyzji w ramach reformowania porozumień unii walutowych.

3. DOŚWIADCZENIA KONWERGENCJI FISKALNEJ W POZAEUROPEJSKICH UNIACH WALUTOWYCH

Poniższy przegląd kryteriów konwergencji fiskalnej w trzech pozaeuropejskich uniach monetarnych ma pozwolić na zaprezentowanie generalnych idei, na których oparte są stosowane ograniczenia. Celem jest także wskazanie różnic w zakresie rozwiązań instytucjonalnych, co pozwala na lepsze zrozumienie natury nadzoru wielostronnego.

ZUM — Zachodnioafrykańska Unia Monetarna (WAEMU — West African Economic and Monetary Union)

Zachodnioafrykańską Unię Monetarną tworzą: Benin, Burkina Faso, Wybrzeże Kości Słoniowej, Gwinea-Bissau, Mali, Niger, Senegal i Togo. Po przeprowadzeniu dewaluacji franka CFA w 1994 roku wprowadzono w ZUM kryteria konwergencji fiskalnej i system nadzoru wielostronnego. Celem było zapewnienie większej zgodności polityk gospodarczych krajów członkowskich z celami na poziomie unijnym. Główne kryteria konwergencji fiskalnej w ZUM w okresie od 1994 do 1998 były następujące:

- wynagrodzenia w sektorze publicznym (WAB) nie mogły przekraczać 50% dochodów podatkowych — w styczniu 1998 roku ten limit został obniżony do 40%;
- przynajmniej 20% dochodów podatkowych musiało być wydatkowane na inwestycje w sektorze publicznym (DFI);
- podstawowe saldo budżetu (BAB) — zdefiniowane jako dochody, bez grantów minus wydatki, bez inwestycji finansowanych ze źródeł zewnętrznych, musiało wykazywać nadwyżkę na poziomie co najmniej 15% dochodów podatkowych;
- zmiana zaległości w spłatach zobowiązań (ARR) wewnętrznych i zewnętrznych nie mogła być dodatnia.

W 1999 roku ZUM weszła w drugą fazę konwergencji fiskalnej, gdy podpisano Pakt Konwergencji, Stabilności, Wzrostu i Solidarności². Celem było podniesienie stabilności makroekonomicznej, przyspieszenie wzrostu gospodarczego i rozwijanie solidarności między krajami członkowskimi.

Kryteria konwergencji fiskalnej podzielono na dwie kategorie: pierwszorzędne i drugorzędne. Najważniejsze z kryteriów należących do pierwszej grupy miało na celu poprawę i stabilizację finansów publicznych w krajach członkowskich. Podstawowe saldo budżetu (BAB) od 2002 roku miało wykazywać nadwyżkę. Drugie kryterium z pierwszej grupy dotyczyło ograniczenia długu publicznego (PD) do poziomu 70% PKB. Celem kolejnego kryterium było uniknięcie nierynkowego finansowania deficytów fiskalnych. Narzucono tu wymóg niedodatnich zmian w zaległościach (ARR) spłat zobowiązań¹. Nowym ograniczeniem był limit dla stopy inflacji. Ogólny poziom cen nie mógł rosnąć szybciej niż 3% w skali roku. Celem w tym przypadku było utrzymanie różnicy między inflacją w UGW i Strefie Franka CFA na najniższym możliwym poziomie. Dzięki temu ograniczono ewentualną presję na sztywny kurs walutowy.

Cztery wymogi i ograniczenia przedstawione powyżej należą do grupy pierwszorzędowych. Są one uzupełnione przez grupę kryteriów drugiego rzędu. Niektóre z nich pochodzą z zestawu wprowadzonego już w 1994 roku. Inwestycje publiczne finansowane ze źródeł krajowych (DFI) muszą być utrzymane na poziomie co najmniej 20% dochodów podatkowych. Wynagrodzenia w sektorze publicznym (WAB) nie mogą przekraczać 35% dochodów podatkowych. Kolejnym kryterium drugiego rzędu jest wymóg dla dochodów podatkowych (TAR), które mają stanowić co najmniej 17% PKB. Ostatnie z kryte-

² Pakt ten został podpisany w 1999, a nowe kryteria konwergencji fiskalnej zaczęły obowiązywać od 2000 roku. Okres przejściowy dla wymaganych dostosowań wyznaczono na trzy lata. Ostatecznym terminem spełnienia nowych wymogów i zachowania limitów był 31 grudnia 2002.

¹ Wymóg taki znajdował się już poprzednio wśród kryteriów konwergencji fiskalnej w okresie 1994–1998.

riów dotyczy salda rachunku bieżącego bilansu płatniczego (CAB), którego deficyt nie może przekroczyć 5% PKB⁴.

System nadzoru wielostronnego i zestaw kar za łamanie limitów i niespełnianie wymogów zostały zdefiniowane w § 74 Traktatu ZUM. W zależności od stopnia przekroczenia limitów i chęci współpracy, przewidziane są kary następujące: wycofanie finansowania przez Zachodnioafrykański Bank Rozwoju oraz zaprzestanie finansowania budżetów przez unijny bank centralny.

Narzucone kryteria konwergencji fiskalnej i towarzyszący im system nadzoru wielostronnego osiągnęły zakładane cele i umożliwiły konsolidację finansów publicznych. Dore i Masson (2002) wskazują jednak na dwa okresy o różnym stopniu efektywności. Pierwszy to lata 1994–1997. Większość faktycznych dostosowań miało miejsce przed 1998 rokiem. Po 1997 roku konwergencja fiskalna stała się o wiele wolniejsza. Można było wskazać nawet pierwsze oznaki dywergencji. Pomimo ujemnego podstawowego salda budżetu (BAB), w całym okresie od 1994 do 1997 kierunki zmian były prawidłowe. Poprawie uległa struktura wydatków publicznych i odzyskano kontrolę nad wydatkami bieżącymi. Wynagrodzenia w sektorze publicznym obniżono z 55% do 37,2% w 1998. Tylko dwa kraje (Niger i Togo) nie spełniły tego wymogu (na poziomie 40% dochodów podatkowych). Inwestycje publiczne wzrosły z 11% (w 1994 roku) do 21% w 1998. Zaległości (ARR) krajowe i zagraniczne zmniejszyły się. Jednak od 1998 roku te korzystne tendencje zostały odwrócone. Duże deficyty i wolniejszy wzrost PKB oraz utrata kontroli nad wydatkami publicznymi były powszechne we wszystkich krajach ZUM. Wynagrodzenia w sektorze publicznym (WAB) wzrosły z 37,2% do 37,9% w 2001. Tylko trzy kraje (Benin, Mali i Senegal) spełniały to ograniczenie. Inwestycje publiczne rosły, ale wystąpiły znaczne różnice między krajami członkowskimi. Po 1998 roku tylko Burkina Faso i Mali spełniały ten wymóg (na poziomie 20% dochodów podatkowych). Nie wystąpiła natomiast żadna poprawa jeśli chodzi o dochody podatkowe, które utrzymywały się na poziomie 15% PKB, podczas gdy docelowo miały one wynosić co najmniej 17% PKB.

Nie dotrzymano założonego pierwotnie terminu i pod koniec 2002 roku nadal większość krajów nie spełniała wymogów ani limitów narzuconych przez Pakt podpisany w 1999 roku. Tempo dochodzenia do wymogów różniło się wyraźnie między krajami członkowskimi. W niektórych przypadkach występowały istotne opóźnienia. Kryteria konwergencji fiskalnej zawierały wskazówki dotyczące kluczowych kwestii budżetowych, lecz — jak wskazuje Moussa (2004) — były one niespójne. Warunkiem osiągnięcia sukcesu jest zatem scharmonizowanie celów i sposobów ich osiągania. W przeciwnym razie należy się liczyć z porażką systemu opartego na opisanych powyżej kryteriach i zasadach ich egzekwowania. Kolejnym przykładem unii walutowej, w której wprowadzono

⁴ Przy kalkulacji tego wskaźnika odlicza się granty otrzymane z zagranicy.

kryteria konwergencji fiskalnej i system nadzoru wielostronnego jest Środkowoafrykańska Unia Monetarna (ŚUM) w Strefie Franka CFA.

ŚUM — Środkowoafrykańska Unia Monetarna (CAEMC — Central African Economic and Monetary Community)

Środkowoafrykańska Unia Monetarna utworzona została w 1959 roku przez następujące kraje: Kamerun, Republikę Środkowej Afryki, Czad, Republikę Kongo, Gwineę Równikową i Gabon. Po przeprowadzeniu dewaluacji w 1994 roku w ŚUM wprowadzono system nadzoru wielostronnego oparty na kryteriach konwergencji fiskalnej. Celem było zintensyfikowanie integracji regionalnej. System składał się z następujących elementów:

- górnego limitu dla stopy inflacji na poziomie 3% w skali roku;
- limitu dla długu publicznego;
- procedur akumulacji rezerw walutowych;
- wymogu nadwyżkowego lub zrównoważonego budżetu centralnego.

Największym zagrożeniem dla osiągnięcia wyznaczonych limitów było uzależnienie dochodów budżetowych od cen ropy naftowej i wielkości produkcji. Nadzór wielostronny w ŚUM był oparty na kryteriach ilościowych. Miały one na celu monitorowanie rozwoju sytuacji makroekonomicznej w krajach członkowskich. W pierwszej fazie konwergencji stosowano cztery mierniki z wyznaczonymi limitami:

- rezerwy walutowe (FER) musiały pokrywać emisję pieniądza w co najmniej 20%;
- podstawowe saldo budżetu (BAB) musiało być nieujemne;
- zmiana w zaległościach spłat zobowiązań (ARR) musiała być niedodatnia;
- zmiana wielkości wynagrodzeń w sektorze publicznym (WAB) nie mogła przekroczyć stopy wzrostu dochodów budżetowych.

Zauważono jednak pewne ograniczenia zestawu powyższych wskaźników. Z tego powodu 14 lipca 2001 roku Rada Ministrów ŚUM uzgodniła nowe kryteria konwergencji fiskalnej, które miały obowiązywać od stycznia 2002 roku. Od tamtego czasu polityka fiskalna w ŚUM jest ograniczona zestawem wymogów i dąży do spełnienia opisanych poniżej limitów.

Pierwsze kryterium mierzy zdolność rządu do finansowania wszystkich bieżących i kapitałowych wydatków ze źródeł krajowych. Podstawowe saldo budżetu musi być dodatnie lub zerowe. Sposób wyliczania tej kategorii jest następujący: dochody bez grantów z zagranicy minus całkowite wydatki. Nadwyżka pierwotna pozwala na spłatę długu i świadczy o braku pułapki zadłużenia. Drugie kryterium fiskalne dotyczy inflacji i ustalone jest jako limit na poziomie 3% w skali roku. Trzeci limit ogranicza dług publiczny (krajowy i zagraniczny) do 70% PKB od 2004 roku. Ostatnie kryterium dotyczy zaległości w spłatach zobowiązań (ARR), których zmiana nie może być dodatnia w bieżącym okresie.

Celem tego kryterium była likwidacja problemów płatniczych, stabilizacja gospodarki i narodowych sektorów bankowych oraz odzyskanie wiarygodności na międzynarodowych rynkach kapitałowych.

Od 2002 roku rządy w SUM podjęły starania spełnienia wyznaczonych limitów. Po roku dostosowań kryteria BAB i PD/PKB spełniały cztery z sześciu krajów członkowskich. W 2003 roku jedynie Republika Konga zanotowała wzrost zaległości w spłatach zobowiązań, a jedynym krajem, który łamał limit narzucony na wynagrodzenia w sferze budżetowej był Kamerun. Można zatem stwierdzić, że wdrożenie nowego zestawu kryteriów konwergencji fiskalnej zakończyło się sukcesem. Większość krajów spełniała wyznaczone limity. Kraje niespełniające wymogów wymagały bowiem drastycznych dostosowań i konsolidacji sektora finansów publicznych. Wydaje się to zrozumiałe, gdyż obniżenie relacji długu publicznego do PKB z 250% do 70% (np. w Republice Konga) w ciągu krótkiego okresu nie jest możliwe.

Poniższe wskaźniki nadzoru wielostronnego nie stanowiły obowiązujących limitów. Służyły one diagnozowaniu warunków finansowych i ekonomicznych w krajach członkowskich. Od 2002 roku zastosowano trzy rodzaje wskaźników:

1. wskaźniki makroekonomiczne:
 - a) stopa wzrostu realnego PKB;
 - b) stopa pokrycia emisji pieniądza rezerwami walutowymi (przynajmniej 20%);
 - c) saldo rachunku obrotów bieżących wyrażone w % PKB;
2. wskaźniki analityczne:
 - a) stopa inwestycji (całkowite, publiczne i prywatne) jako % PKB;
 - b) wynagrodzenia w sektorze publicznym jako % całkowitych dochodów budżetowych bez grantów zagranicznych;
 - c) zmiany w pozycji konkurencyjnej mierzone indeksem REER;
3. wskaźniki polityki gospodarczej:
 - a) sytuacja polityki fiskalnej mierzona relacją BAB/całkowite dochody budżetowe, BAB/PKB i OVB/PKB;
 - b) sytuacja polityki monetarnej mierzona podażą pieniądza i kredytu.

Cztery wiążące kryteria konwergencji fiskalnej wprowadzone w SUM były bardzo zbliżone do zestawu uzgodnionego przez Komitek Konwergencji Strefy Franka CFA na poziomie ponadunijnym. Obie opisane unie wykorzystują franka CFA jako środek płatniczy (nazwy walut w obu uniach różnią się, ale są związane z euro według tego samego parytetu). Gwarancja Skarbu Francji czyni przyjęte rozwiązanie kursowe wiarygodnym. Trzecią pozaeuropejską unią walutową, która podjęła kroki w kierunku konwergencji fiskalnej między terytoriami członkowskimi jest Wschodniokaraibska Unia Monetarna (WUM).

WUM — Wschodniokaraibska Unia Monetarna
(ECCU — Eastern Caribbean Currency Union)

Wschodniokaraibską Unię Monetarną utworzyły w 1965 roku następujące terytoria: Anguilla, Antigua i Barbuda, Grenada, Mont Serrate, Dominica, St. Vincent, St. Lucia, St. Kitts and Grenadines. Walutą unijną jest dolar wschodniokaraibski, związany sztywnym kursem z dolarem amerykańskim. Unia ta jest przypadkiem szczególnym, jeśli bierze się pod uwagę kryteria konwergencji fiskalnej. Po okresie istotnego pogorszenia się sytuacji budżetowej w latach dziewięćdziesiątych XX wieku unijny bank centralny wyszedł z inicjatywą mającą na celu odwrócenie niepożądanych tendencji.

Wschodniokaraibski Bank Centralny jest odpowiedzialny za promowanie wzrostu gospodarczego w regionie w warunkach sztywnego kursu i zliberalizowanych rachunków bilansu płatniczego. Aby osiągnąć ten cel i zapobiec monetyzacji długu publicznego przez finansowanie deficytów budżetowych, WBC stworzył zestaw dyrektyw dla sektora finansów publicznych. Dodatkowo, miały one podnieść skuteczność polityki fiskalnej. Cele jakościowe uzupełnione zostały planem reform strukturalnych. Oczekiwano poprawy efektywności opodatkowania i wpływu wydatków sektora publicznego na wzrost gospodarczy.

Wprowadzenie dyrektyw dla sektora publicznego było znakiem, iż deklaracja WBC o niefinansowaniu deficytów budżetowych była niewystarczająca by wymusić odpowiedzialną politykę fiskalną. Jednak dyrektywy WBC nie były wiążące i bank centralny nie posiadał władzy, aby domagać się spełnienia wymogów i zachowania limitów. Sugerował on jedynie spełnienie sześciu kryteriów ilościowych:

- oszczędności rządu centralnego powinny wynosić rocznie od 4 do 6% PKB;
- całkowity deficyt budżetowy (OVB) nie powinien przekraczać 3% PKB;
- dług publiczny (PD) nie powinien przekraczać 60% PKB;
- oszczędności sektora finansów publicznych, włączając systemy emerytalne, powinny sięgać 7–8% PKB rocznie;
- inwestycje sektora publicznego (PSI) powinny wynosić co najmniej 12% PKB;
- pierwotne saldo budżetu (BAB) powinno być nieujemne.

Pozostałe ogólne dyrektywy to:

- likwidacja zaległości w spłatach zobowiązań (ARR);
- spłata długu publicznego dzięki utworzeniu funduszy celowych;
- utworzenie funduszy rezerwowych w celu usuwania skutków katastrof naturalnych.

Dyrektywy WBC były bardzo podobne do kryteriów konwergencji fiskalnej, wprowadzonych w Strefie Franka CFA po dewaluacji w 1994 roku. Różnicą jest fakt braku faktycznego przymusu realizacji dyrektyw fiskalnych na Karaibach. Przypadek WUM służy zatem wyłącznie wskazaniu alternatywnego zestawu kryteriów konwergencji fiskalnej.

Prezentacja koordynacji polityk budżetowych w pozaeuropejskich uniach walutowych pozwala na rozpoznanie rozwiązań służących unikaniu krótkowzrocznej i niespójnej w czasie polityki gospodarczej na poziomie kraju członkowskiego. Kolejnym krokiem, który umożliwi precyzyjne zdefiniowanie elastyczności polityki fiskalnej jest formalizacja kryteriów konwergencji fiskalnej.

4. PROPOZYCJA METODY FORMALNEGO POMIARU KRYTERIÓW KONWERGENCJI FISKALNEJ

Ograniczenia stawiane polityce fiskalnej w ramach nadzoru wielostronnego obejmują sześć obszarów. Najliczniejsza grupa wymogów stosowana jest w ZUM. Część z nich występuje również w dwóch pozostałych uniach. Trudność w zaproponowaniu uogólnionego ujęcia wynika z rozbieżności definicji podstawowych kategorii. Dotyczy to w szczególności dochodów budżetowych, wydatków, pierwotnego/podstawowego salda budżetu oraz inwestycji. Proponowane ujęcie abstrahuje od rozbieżności wynikających ze sposobu wyliczania niektórych kategorii.

Kryterium I — dług publiczny (PD)

To kryterium jest zdefiniowane jako maksymalny dopuszczalny poziom długu publicznego (PD) w relacji do PKB. Nominalna wartość PD na koniec okresu t to: PD z okresu poprzedniego ($t - 1$), całkowite saldo budżetu w okresie bieżącym (OVB), zmiana netto zaległości w regulowaniu zobowiązań (ARR) w okresie t .

$$PD_{it} = PD_{it1961} + OVB_{it} + ARR_{it} \text{ dla kraju członkowskiego } i = 1, \dots, n; \quad (1)$$

i okresu 1, ..., T .

W przypadku pułapki zadłużenia, płatności odsetkowe są ujęte albo w OVB_{it} albo w ARR_{it} . W pierwszym przypadku, finansowanie oparte jest na rynku kapitałowym, w pozostałych przypadkach rząd wykorzystuje pozarynkowe sposoby finansowania.

Kryterium II — całkowite lub podstawowe/pierwotne saldo budżetu (OVB, BAB)

Saldo budżetu jest jednym z najważniejszych wskaźników sytuacji polityki fiskalnej. Istnieje wiele sposobów wyliczania tej kategorii. W przypadku ogólnym, saldo wyliczane jest przez odjęcie wydatków od dochodów. Modyfikacje wprowadzane do obu tych podstawowych kategorii prowadzą do wyliczania szerokiego spektrum różnego rodzaju deficytów lub nadwyżek. W każdej unii

walutowej objętej niniejszą analizą saldo budżetu występowało jako wskaźnik służący nadzorowi wielostronnemu.

Całkowite saldo budżetu może być rozłożone na wydatki i dochody bieżącego okresu:

$$OVB_{it} = REV_{it} - EXP_{it} \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Po wprowadzeniu ograniczenia fiskalnego musi być spełniony następujący warunek:

$$OVB_{it} = REV_{it} - EXP_{it} \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Wykorzystując definicję podstawowego salda budżetu stosowaną w ZUM (dochody bez grantów z zagranicy minus wydatki z wyłączeniem inwestycji finansowanych ze źródeł zagranicznych) można podzielić dochody (REV) i wydatki (EXP) na podkategorie. Jest to konieczny zabieg, gdy kryteria konwergencji fiskalnej opierają się na niektórych częściach tych ogólnych kategorii.

W przypadku podstawowego salda budżetu istnieje wiele koncepcji liczenia. W ZUM wskaźnik ten służy jako jeden z kryteriów pierwszego rzędu. Jednak w wielu badaniach empirycznych (np. Dore i Masson 2002, s. 10) wykorzystuje się całościowe saldo budżetu we wszystkich estymacjach. Wynika to głównie z braku informacji koniecznej do obliczania podstawowego salda budżetu.

Całkowite saldo budżetu jest zdefiniowane w równaniu (2). Koncepcja podstawowego salda budżetu (BAB) opiera się na wyłączeniu kilku składników dochodów i wydatków. Całkowite dochody (REV) składają się z dochodów podatkowych (TAR) i niepodatkowych (NTR):

$$REV_{it} = TAR_{it} + NTR_{it} \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (4)$$

Wydatkowa strona budżetu (EXP) jest o wiele bardziej złożona i można tu wyróżnić na początek dwie podkategorie: wydatki bieżące (CUR) i wydatki inwestycyjne (PIE).

$$EXP_{it} = CUR_{it} + PIE_{it} \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (5)$$

Wydatki bieżące (CUR) mogą być rozłożone na wynagrodzenia w sferze budżetowej (WAB), płatności odsetkowe ($r \cdot PD_{it-1}$) i pozostałe wydatki (OTH):

$$CUR_{it} = WAB_{it} + r \times PD_{it-1} + OTH_{it} \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (6)$$

Całkowite wydatki inwestycyjne budżetu (PIE) mogą być rozbite na dwie podkategorie: inwestycje finansowane ze źródeł zagranicznych (EFI) oraz inwes-

tycje finansowane ze źródeł krajowych (DFI). Pierwszy rodzaj wydatków kapitałowych jest wyłączany przy kalkulacji podstawowego salda budżetu:

$$PIE_{it} = EFI_{it} + DFI_{it} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (7)$$

Podsumowując, całkowite wydatki budżetowe (EXP) mogą być zapisane jako:

$$EXP_{it} = WAB_{it} + r \times PD_{it-1} + EF_{it} + DFI_{it} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

Równanie dla całościowego salda budżetu przybiera wtedy następującą postać:

$$OVB_{it} = TAR_{it} + NTR_{it} - WAB_{it} - r \times PD_{it-1} - OTH_{it} - EF_{it} - DFI_{it}. \quad (9)$$

W celu wyliczenia podstawowego salda budżetu (BAB), dochody (REV) oraz wydatki (EXP) muszą zostać zmodyfikowane (* — gwiazdka oznacza kategorie zmodyfikowane):

$$REV_{it}^* = TAR_{it} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (10)$$

Zmodyfikowane dochody obejmują wyłącznie dochody podatkowe. Modyfikacja wydatków polega na wyłączeniu inwestycji finansowanych ze źródeł zagranicznych (EFI):

$$EXP_{it}^* = WAB_{it} - (WAB_{it} + r \times PD_{it-1} + OTH_{it} + DFI_{it}) \quad (11)$$

dla $i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T$

Podstawowe saldo budżetu (BAB) jest zatem dane jako różnica zmodyfikowanych dochodów (REV*) oraz wydatków (EXP*):

$$BAB_{it} = TAR_{it} - (WAB_{it} + r \times PD_{it-1} + OTH_{it} + DFI_{it}) \quad (12a)$$

lub

$$BAB_{it} = TAR_{it} - WAB_{it} - r \times PD_{it-1} - OTH_{it} - DFI_{it} \quad (12b)$$

dla $i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T.$

Na podstawie danych z bazy danych Banku Francji, obejmującej informacje na temat Strefy Franka CFA, można stwierdzić, że struktura dochodów w ZUM i SUM jest prosta i składa się z dwóch elementów: dochodów podatkowych (TAR) oraz niepodatkowych (NTR), w tym z grantów zagranicznych. Przy istnieniu kryteriów konwergencji fiskalnej, podstawowe saldo budżetu (BAB) powinno spełniać następujący warunek:

$$BAB_{it} = TAR_{it} - WAB_{it} - r \times PD_{it-1} - OTH_{it} - DFI_{it} \geq \quad (13)$$

dla $i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T$.

W przypadku krajów produkujących ropę w tym regionie, niepodatkowe źródło dochodów to sprzedaż ropy naftowej i produktów pochodnych⁵. Oznacza to, że zaproponowana metoda liczenia podstawowego salda budżetu (BAB) jest właściwa i precyzyjna zarówno dla ZUM, jak i ŚUM. Co więcej, w ZUM różnica między BAB i OVB równa się części wydatków publicznych na inwestycje (PIE) finansowanych ze źródeł zewnętrznych (EFI).

Kryterium III — zaległości w spłatach zobowiązań (ARR)

W tym przypadku dominują dwa główne cele. W krótkim okresie zmiana zaległości w okresie $t - 1$ i t nie może być dodatnia:

$$\Delta ARR = ARR_{it} - ARR_{it-1} \leq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (14)$$

Długoterminowy cel to redukcja zaległości w regulowaniu zobowiązań do zera:

$$\lim_{t \rightarrow T} ARR_t = 0. \quad (15)$$

Zaległości w spłatach zobowiązań są różnorodnej natury. Kwota zaległości rozumiana jest jako wartość zapadłego, ale jeszcze nieuregulowanego zobowiązania. Często powstaje pytanie, od którego momentu należy uważać zobowiązanie za wymagalne. Zaległości powstają, gdy zobowiązania nie są uregulowane w okresie, w którym zapadają. Zobowiązanie jest prawnie wymagalne w momencie dostarczenia dóbr lub usług. Jest to tak zwana „faza likwidacji”. Obejmuje to szerokie spektrum zobowiązań, włączając te, które płyną z wydatków bieżących (CUR): WAB, OTH i obsługi długu ($r \cdot PD_{it-1}$) lub jego spłaty⁶.

Kryterium IV — wynagrodzenia w sferze budżetowej (WAB)

Wynagrodzenia w sferze budżetowej (WAB) należą do wydatków bieżących (CUR). Wynagrodzenie dla pracowników sektora publicznego postrzegane jest jako instru-

⁵ Szersze rozważania na temat zasobów naturalnych w ŚUM oraz ich wpływu politykę fiskalną i bogactwo oferuje Wiegand (2004).

⁶ Fakt złożenia zamówienia na dobra lub usługi nie stanowi podstawy do zapłaty przez rząd ani też nie oznacza powstania zaległości. Powstają one, gdy dobra lub usługi są dostarczone (faza likwidacji), ale nie wydano jeszcze decyzji o zapłacie. W tym przypadku powstają zaległości płatnicze wynikające z procedur administracyjnych, nazywane także technicznymi zaległościami. Faktyczne zaległości w regulowaniu zobowiązań powstają, gdy po wydaniu decyzji o zapłacie nie następuje ona ze względu na brak gotówki.

ment stymulowania popytu konsumpcyjnego w gospodarce o prawie zerowym potencjale stymulowania wzrostu. Z tego powodu, zbyt duże obciążenie pensjami pracowników sektora publicznego musi być zlikwidowane w celu prowadzenia stabilnej polityki fiskalnej. Narzucenie maksymalnego limitu dla wynagrodzeń w sferze budżetowej ma na celu poprawę jakości wydatków publicznych, gdy konieczne są dostosowania stabilizacyjne. Cięcia w wydatkach na wynagrodzenia w sektorze publicznym są politycznie niepopularne. Jednak czasami jest to nieodzowne i stanowi jedyną drogę do pro wzrostowej i przezrocznej polityki fiskalnej:

$$\frac{WAB_{it}}{TAR} < b \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (16)$$

Gdy wymogi dotyczące innych rodzajów wydatków są wiążące, to ograniczenie wskazuje drogę dla zmian w strukturze wydatków publicznych. Wprowadzeniu limitu dla poziomu wynagrodzeń towarzyszy zawsze wymóg minimalnych wydatków w kategorii „wydatki inwestycyjne”. Oczekuje się wystąpienia efektu zamiany — środki zaoszczędzone na wynagrodzeniach mają być przeznaczone na inwestycje. Następuje zatem przekierowanie środków publicznych z wydatków jałowych na wydatki zwiększające potencjał wzrostowy.

Kryterium V — całkowite publiczne wydatki inwestycyjne (PIE) i inwestycje publiczne finansowane ze źródeł krajowych (DFI)

To kryterium konwergencji fiskalnej jest jednym z dwóch, których celem jest poprawa jakości wydatków publicznych. Bardzo często cechą krajów o niskim poziomie dochodu jest brak wydatków niebieżących. To krótkoterminowe podejście można wytłumaczyć niestabilnością polityczną. Rządy w Afryce rzadko są formowane w wyniku demokratycznych wyborów. Brak stabilności implikuje zarządzanie zasobami ukierunkowane na osiągnięcie wszystkich korzyści w okresie bieżącym lub tak szybko, jak to tylko możliwe, bez rozważania ogólnonarodowej funkcji użyteczności w długim okresie. Niestabilność polityczna wpływa w ten sposób negatywnie na wzrost gospodarczy, nawet na kraje członkowskie unii walutowej. Przykładem z ostatnich lat jest Wybrzeże Kości Słoniowej czy Togo w ZUM oraz Republika Środkowej Afryki i Republika Konga w SUM lub Grenada we WUM.

Kryterium oparte na relacji PIE/PKB (lub DFI/PKB) jest dwojakiej natury. Po pierwsze, służy ono poszerzaniu potencjału wzrostowego⁷. Jednocześnie służy to

⁷ Sektor prywatny jest bardzo często niezdolny do podjęcia wymaganych inwestycji infrastrukturalnych. Wynika to z wysokiego poziomu kosztów utopionych, długich okresów zwrotu z tego typu inwestycji i niepieniężnych korzyści, jakie one przynoszą. Powoduje to, że inwestycje infrastrukturalne podejmowane są z konieczności przez sektor publiczny.

drugiemu celowi. Gdy pierwszorzędowe kryteria konwergencji fiskalnej stawiają za cel zrównoważony lub nadwyżkowy budżet, to dostosowanie polega najczęściej na zmniejszeniu wydatków inwestycyjnych (jeśli w ogóle takowe występują). W krótkim okresie jest to zarówno możliwe, jak i efektywne rozwiązanie, pozwalające spełnić postawione wymagania. Jednak oceniając długookresowy wpływ takiej polityki, negatywne skutki dla wzrostu i potencjału wzrostowego stają się ewidentne:

$$\frac{DFI_{it}}{PKB_{it}} \geq c \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T, \quad (17a)$$

$$\frac{PIE_{it}}{PKB_{it}} \geq c \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T, \quad (17b)$$

gdzie c — minimalny poziom inwestycji, jako procent dochodów podatkowych.

Równania (16), (17a) i (17b) powinny być zatem interpretowane jako warunki ograniczające dla podstawowego salda budżetu (BAB).

W ŚUM wskaźniki inwestycyjne (całkowite wydatki inwestycyjne, publiczne wydatki inwestycyjne, prywatne wydatki inwestycyjne) są wykorzystywane w nadzorze wielostronnym, ale nie są wiążące dla rządów krajów członkowskich. Służą one wyłącznie diagnozowaniu warunków ekonomicznych. Wschodnio-karaibski Bank Centralny także zaproponował dyrektywę uwzględniającą publiczne wydatki inwestycyjne na Karaibach. Wykorzystuje on jednak kategorię o wiele szerszą niż w ŚUM i ZUM. Obejmuje ona bowiem inwestycje całego sektora finansów publicznych (PIE). Sugerowany poziom tak zdefiniowanych wydatków wynosi 12% PKB w skali roku.

Kryterium VI — dochody podatkowe (TAR)

Dochody podatkowe mogą być podzielone na części składowe, jak pokazano w równaniu (4). Celem narzucenia wymogu w tym obszarze jest podnoszenie jakości krajowych systemów danin publicznych przy jednoczesnym uniknięciu destabilizacji politycznej. Ghura i Marcereau (2004) uważają, że istnieją dowody przemawiające za związkami przyczynowo-skutkowymi między chroniczną słabością w ściąganiu dochodów budżetowych a akumulacją zaległości wypłat wynagrodzeń i spłat długu. Autorzy wskazują na przykład Republiki Centralnej Afryki w XX wieku, gdzie nieefektywny system danin publicznych prowadził do niestabilności politycznej i degradacji usług publicznych. Znaczne zaległości oraz nieregularne wypłaty dla służby cywilnej i personelu wojskowego prowadziły do przedłużających się strajków i rebelii. Poprawa efektywności systemów podatko-

wych posiada potencjał pośredniego przeciwdziałania wymienionym patologiom negatywnie wpływającym na wzrost gospodarczy i stabilność polityczną.

Znajomość poziomu dochodów pozwala na lepsze dopasowanie planów wydatków, zależnych od dostępnych zasobów. W ten sposób możliwe staje się uniknięcie kreacji deficytów strukturalnych. Wszelkie nieoczekiwane odchylenia od minimalnego poziomu wyznaczonego w kryterium konwergencyjnym mogą być wykorzystane na wcześniejszą spłatę długu publicznego. Kryterium to może być ujęte w następujący sposób:

$$\frac{TAR_t}{PKB_t} \geq adla \quad i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T. \quad (18)$$

Stabilne i pewne dochody podatkowe są pożądane w każdym kraju, bez względu na poziom dochodu. Jednak przypadek unii walutowej jest specjalny, ponieważ polityka fiskalna jednego kraju oddziałuje na pozostałych członków. Automatyczne stabilizatory czynią dochody podatkowe cyklicznymi. Ostry kryzys gospodarczy prowadzi do ograniczenia zasobów finansowych dostępnych na potrzeby polityki fiskalnej. Kryteria konwergencji zawierające minimalny wymóg w zakresie dochodów podatkowych są ukierunkowane na poprawę jakości i efektywności systemu podatkowego, czyniąc go bardziej odpornym na szoki. Redystrybucja pewnej części PKB realizuje także dodatkowy cel, jakim jest prowadzenie możliwej do utrzymania polityki fiskalnej. Osiąganie dochodów podatkowych na pewnym minimalnym poziomie pozwala na lepsze planowanie i rozkładanie wydatków w długim okresie.

Kryterium VII — stopa inflacji

W obu afrykańskich uniach monetarnych opisanych w tym artykule narzucono ograniczenie dla stopy inflacji. Podobne rozwiązanie zastosowano w Unii Gospodarczej i Walutowej. Sposób zdefiniowania ograniczenia dla wzrostu ogólnego poziomu cen jest jednak odmienny. W uniach afrykańskich jest to bezpośredni cel inflacyjny na poziomie 3%. Rozwiązanie wprowadzone w UGW jest zdefiniowane w bardziej elastyczny sposób i pozwala uwzględnić zmiany w sytuacji wewnętrznej i zewnętrznej wpływające na wszystkie kraje członkowskie. Można tu wskazać także dążenie do stworzenia większej swobody dla krajów członkowskich. Wynika to prawdopodobnie ze świadomości znacznego zróżnicowania gospodarek tworzących UGW.

Kryterium VIII — wskaźnik pokrycia emisji pieniądza rezerwami walutowymi (FER)

W ŚUM wprowadzono specyficzne kryterium konwergencji, mające na celu zapewnienie wystarczającego poziomu rezerw walutowych w relacji do emisji pieniądza unijnego. Wynika to ze stosowania systemu kursu sztywnego w Strefie Franka CFA. Wiarygodność tego rozwiązania wymaga wysokiego pokrycia bazy monetarnej rezerwami walutowymi. Pomimo że Skarb Francji gwarantuje wymienialność franka CFA, to unijny bank centralny potrzebuje rezerw walutowych w celu prowadzenia samodzielnej polityki monetarnej.

Kryterium IX — deficyt rachunku obrotów bieżących (CAD)

Kraje ZUM wprowadziły w 2000 roku nowe kryterium konwergencyjne: ograniczenie dla deficytu na rachunku obrotów bieżących bilansu płatniczego do 5% PKB. Przy wyliczaniu tego wskaźnika wyłącza się granty otrzymane z zagranicy. Jest to kolejne pośrednie kryterium fiskalne. Saldo rachunku obrotów bieżących odzwierciedla bowiem różnicę między produktem i absorpcją krajową⁸:

$$\frac{CAD_{it}}{PKB_{it}} \geq f \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (19)$$

Ekspansywna polityka fiskalna jest bardzo często odpowiedzialna za deficyt na rachunku obrotów bieżących. W teorii finansów międzynarodowych występuje nawet specjalny termin: deficyty bliźniacze. Dotyczy on sytuacji, w której deficyt budżetowy wywołuje wystąpienie deficytu na rachunku obrotów bieżących w bilansie płatniczym. Ekspansja fiskalna (większe wydatki krajowe) są zaspokajane przez dobra i usługi importowane, gdyż produkcja krajowa nie jest w stanie pokryć zgłoszonego zapotrzebowania. Kryterium to pozwala narzucić rządowi konieczność brania pod uwagę wpływu polityki fiskalnej na stabilność zewnętrzną przy danym produkcie i absorpcji pozostałych sektorów.

⁸ Brak dopływu kapitału w formie inwestycji bezpośrednich i portfelowych — charakterystyczny dla krajów o niskim dochodzie w Afryce — oznacza, że brak jest trwałych źródeł finansowania deficytu na rachunku obrotów bieżących. W celu uniknięcia problemów płynących z wyczerpania rezerw walutowych, należy unikać permanentnych deficytów w bilansie płatniczym. W przeciwnym razie prowadzić to będzie do niestabilności i presji dewaluacyjnych, problemów w handlu zagranicznym i ucieczki kapitału.

Kryteria X i XI — oszczędności rządowe (GOS) i oszczędności sektora publicznego (PUS)

Istnieje tylko jedna unia walutowa, w której podjęto próbę koordynacji oszczędności publicznych na poziomie regionalnym:

$$\frac{GOS_{it}}{PKB_{it}} \geq f \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T, \quad (20a)$$

$$\frac{PUS_{it}}{PKB_{it}} \geq f \quad \text{dla } i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \quad (20b)$$

Wschodniokaraibski Bank Centralny przygotował dwie dyrektywy, których celem jest zwiększenie krajowych oszczędności publicznych. Oczekuje się, że pozwoli to na udostępnienie zasobów na inwestycje i spłatę długów. Jak na razie, żadna z tych dyrektyw nie jest wiążąca.

Po zaprezentowaniu ograniczeń fiskalnych oraz ich związków, możliwe staje się przedstawienie łącznego ograniczenia dla polityki fiskalnej w unii walutowej. Poniższa koncepcja teoretyczna opisuje sytuację w momencie pełnego wprowadzenia zalecanych wymogów i osiągnięcia narzuconych limitów płynących z faktu koordynacji tej polityki na szczeblu regionalnym.

5. KONCEPCJA ELASTYCZNOŚCI POLITYKI FISKALNEJ (EPF) W SYTUACJI KONWERCENCJI FISKALNEJ W UNII WALUTOWEJ

Elastyczność polityki fiskalnej może być zdefiniowana jako swoboda w podejmowaniu decyzji dotyczących wydatków budżetowych. W celu pomiaru tej swobody można wykorzystać nominalny poziom wydatków autonomicznych. Wydatki autonomiczne są zdefiniowane jako te wydatki publiczne, które nie są w żaden sposób bezpośrednio regulowane przez kryteria konwergencji fiskalnej. Im wyższy poziom tego rodzaju wydatków (w relacji do PKB), tym polityka fiskalna jest bardziej elastyczna i posiada potencjalnie silniejszy wpływ na gospodarkę. Odwołując się do oznaczeń wprowadzonych w poprzedniej części, wydatki autonomiczne to OTH — pozostałe wydatki budżetowe. W Afryce kryteria konwergencji fiskalnej regulują zarówno dochody, jak i wydatki budżetowe. Z tego powodu rządy krajów członkowskich posiadają relatywnie mniejszą swobodę w podejmowaniu decyzji niż w przypadku UGW. Im większe środki dostępne są na wydatki autonomiczne bez przekraczania wyznaczonych limitów, tym polityka fiskalna jest bardziej elastyczna. Problemem, jaki występuje

w pozaeuropejskich uniach walutowych jest istotne ograniczenie swobody władz krajowych w momencie spełnienia wszystkich wymagań stawianych przez kryteria konwergencji fiskalnej. Nie mają one zbyt dużych możliwości reagowania na szoki asymetryczne.

Wykorzystując równanie podstawowego salda budżetu (BAB) — (12b) możliwe staje się przedstawienie poziomu elastyczności polityki fiskalnej w momencie spełnienia wymogów i przestrzegania limitów narzuconych przez kryteria konwergencji. Spełnienie wymogu dotyczącego długu publicznego implikuje dwa warunki: $BAB = 0$ oraz $ARR = 0$, wtedy:

$$0 = TAR - WAB - r \times PD - DFI - OTH, \quad (21)$$

$$OTH = TAR - WAB - r \times PD - DFI. \quad (22)$$

W celu przedstawienia ogólnego poziomu elastyczności polityki fiskalnej dla celów badań porównawczych można przedstawić je jako procent PKB bieżącego okresu:

$$\frac{OTH}{PKB} = \frac{TAR}{PKB} - \frac{WAB}{PKB} - \frac{r \cdot PD}{PKB} - \frac{DFI}{PKB}. \quad (23)$$

W pozaeuropejskich uniach walutowych kryteria konwergencji fiskalnej zdefiniowane są w odniesieniu do PKB oraz do dochodów podatkowych budżetu centralnego (TAR). W celu uwzględnienia ich łącznego wpływu na elastyczność polityki fiskalnej należy zaproponować wspólny mianownik. Na początek można dokonać następujących przekształceń i podstawień:

$$\frac{TAR}{PKB} \geq A \Rightarrow TAR \geq A \times PKB \quad (PKB \text{ jest zawsze nieujemne}), \quad (24)$$

gdzie A jest faktycznym procentowym udziałem dochodów podatkowych w PKB.

Podstawiając TAR z (24) do kryterium konwergencji fiskalnej zdefiniowanego w relacji do dochodów podatkowych otrzymujemy:

$$\frac{WAB}{TAR} \leq b \Rightarrow \frac{WAB}{A \times PKB} \leq b \Rightarrow \frac{WAB}{PKB} \leq b \times A \quad (A \text{ jest zawsze nieujemne}), \quad (25)$$

b — limit dla wynagrodzeń w sferze budżetowej wyrażony jako procent dochodów podatkowych (TAR).

$$\frac{DFI}{TAR} \geq c \Rightarrow \frac{DFI}{A \times PKB} \geq c \Rightarrow \frac{DFI}{PKB} \geq c \times A \quad (A \text{ jest zawsze nieujemne}), \quad (26)$$

c — docelowy poziom inwestycji publicznych wyrażony jako procent TAR.

$$\frac{PI}{PKB} \leq d \quad (27)$$

d — limit dla poziomu długu publicznego wyrażony jako procent PKB.

Miernik elastyczności polityki fiskalnej w momencie spełnienia wszystkich kryteriów konwergencyjnych dany jest równaniem (28) ponieważ wszystkie znaki \leq oraz \geq stają się =:

$$\frac{OTI1}{PKB} = A - B \cdot A - r \times d - c \cdot A, \quad (28)$$

$$\frac{OTH}{PKB} = A(1 - b - c) r d. \quad (29)$$

Równanie (28) może służyć w badaniach porównawczych różnych poziomów limitów i wymogów stawianych w ramach koordynacji polityki fiskalnej w unii walutowej. Występuje tu jednak jedna zmienna niezależna, która posiada istotny wpływ na elastyczność polityki fiskalnej. Jest nią stopa procentowa. Wpływa ona bezpośrednio na koszt obsługi zadłużenia publicznego, który w wielu przypadkach stanowi znaczną część wydatków budżetowych w krajach wysokozadłużonych.

6. PODSUMOWANIE

Najważniejszymi determinantami elastyczności polityki fiskalnej w krajach członkowskich unii walutowych są: dług publiczny, stopy procentowe i stopa wzrostu nominalnego PKB. Wszystkie trzy znajdują się poza bezpośrednim wpływem władz krajowych. Dług publiczny jest wynikiem wielu deficytów w poprzednich okresach. Pomimo że najczęściej został on wykreowany przez inne ekipy rządzące, to konieczne jest honorowanie wszystkich zobowiązań i terminowe ich regulowanie. W przeciwnym razie wiarygodność władz fiskalnych narażona jest na uszczerbek. Niedopuszczalne jest zatem wystąpienie zaległości w spłatach zobowiązań lub odmowa ich honorowania.

Poziom stop procentowych teoretycznie zależy od polityki monetarnej prowadzonej na szczeblu regionalnym przez wspólny bank centralny. Przy liberalizacji wszystkich rachunków bilansu płatniczego i sztywnym kursie walutowym, cena pieniądza zależy od stóp procentowych w kraju, z walutą którego związane pieniądze unijny. W takich warunkach rządy krajów członkowskich nie mają żadnej możliwości wpływania na poziom kosztów obsługi długu, poza sukcesywnym spłacaniem kapitału.

W niniejszym opracowaniu zawarto propozycję metody pomiaru kryteriów konwergencji fiskalnej oraz elastyczności polityki fiskalnej. Może ona służyć do oceny różnych zestawów ograniczeń i ich poziomów narzucanych na krajowe polityki budżetowe w ramach ich koordynacji w unii walutowej. Przedstawiona koncepcja może służyć przy reformowaniu zasad nadzoru wielostronnego. Metoda ta jest także użyteczna dla krajów dążących do utworzenia unii walutowych i projektujących rozwiązania integrujące przyszłych członków w ramach koordynacji regionalnej. Pozwala ona na uwzględnienie aktualnej sytuacji polityki fiskalnej potencjalnych członków unii walutowej, co umożliwi wyznaczenie możliwych do spełnienia limitów, które jednocześnie nie będą destabilizowały gospodarek w krótkim okresie. W przeciwnym razie mogą wystąpić niepożądane zjawiska, takie jak kreatywna rachunkowość budżetowa. Prowadzi to do porażki konwergencji fiskalnej. Ramy analityczne przedstawione w tym opracowaniu pozwalają na zaprojektowanie kryteriów konwergencji fiskalnej i wyznaczenie ich poziomów w sposób zapewniający trwałość i dobrobyt unii walutowej w długim okresie.

BIBLIOGRAFIA

- Bean Ch. 1992. *Economic and Monetary Union in Europe*, Journal of Economic Perspectives 6.
- Beetsma R., Jensen R. 1999. *Structural Convergence under Reversible and Irreversible Monetary Unification*. CEPR Discussion Paper 2116.
- Beetsma R., Uhlig H. 1999. *An Analysis of the Stability and Growth Pact*. Economic Journal 109, 546–571.
- Buiter W. 1992. Giancarlo Corsetti, Nouriel Roubini, *Excessive Deficits, Sense and Nonsense in the Treaty of Maastricht*. CEPR Discussion Paper 750.
- Chari V.V., Kehoe P.J. 1998. *On the Need for Fiscal Constraints in a Monetary Union*. Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 589 (August 1998).
- Debrun X. 2000. *Fiscal Rules in a Monetary Union, A Short-Run Analysis*, Open Economies Review 11.
- Debrun X., Masson P., Patillo C. 2002. *Monetary Union in West Africa: Who Might Gain, Who Might Lose, and Why?* IMF Working Paper WP/02/226.
- Dore O., Masson P. 2002. *Experience with Budgetary Experience in WAEMU*. IMF Working Paper WP/02/108.
- Dornbush R. 1997. *Fiscal Aspects of Monetary Integration*. American Economic Review 87, 2, 221–223.
- Easterly W., 1999. *When is Fiscal Adjustment an Illusion?*. Economic Policy 28, 57–86.
- Edwards S., Magendzo I. I. 2002. *Independent Currency Unions — Growth and Inflation*. paper prepared and presented at the Tenth International Conference, organized by the Bank of Japan, Tokyo, 1–2 (July).
- Eichengreen B. 2002. *Capital Account Liberalization, What do Cross — Country Studies Tell Us?* Unpublished, Berkley, University of California.
- Farrell T., Worrell DeLisle. 1994. *Caribbean Monetary Integration*. Caribbean Information Systems and Services, Port-of-Spain.
- Fouda S., Stasavage D. 2000. *The CFA Franc Zone After EMU: Status Quo, Reform or Dissolution?* World Economy 23, 221–233.
- Frankel J.A., Rose A.K. 1998. *The Endogeneity of the Optimum Currency Area Criteria*. Economic Journal 108(449), 1009–1025.

- Frieden J. 2003. *The Political Economy of Dollarization*, [w:] *Dollarization*, E. Levy-Leyati and F. Sturzenegger (red.), MIT Press, 305–334.
- Gali J., Perotti R. 2003. *Fiscal Policy and Monetary Integration in Europe*. Economic Policy 18 (October), 533–572.
- Ghura D., Marcereau B. 2004. *Political Instability and Growth: The Central African Republic*. IMF Working Paper WP/04/80.
- Guillaume D., Stasavage D. 2000. *Improving Policy Credibility: Is There a Case for African Monetary Unions?*. World Development 28, 1391–1407.
- Gupta S., Clements B., Balducci E., Mulas-Granados C. 2002. *Expenditure Composition, Fiscal Adjustment and Growth in Low-Income Countries*. IMF Working Paper 02/77.
- Hefeker C., 2003. *Fiscal Reform and Monetary Union in West Africa*. HWWA Discussion Paper 224.
- Hemming R., Kell M., Mahfouz S. 2002. *The Effectiveness of Fiscal Policy in Stimulating Economic Activity-A Review of the Literature*. IMF Working Paper 02/208.
- Henry R., Downes A. 1994. *Labor Market Issues in Caribbean Monetary Union*, [w:] *Caribbean Monetary Integration*, T. Farrell and Worrell DeLisle (red.), Caribbean Information Systems and Services, Port-of-Spain.
- Hernandes-Cata E. 1998. *The West African Economic and Monetary Union*. Recent Developments and Policy Issues. IMF Occasional Paper 170, Washington D.C.
- Martin P. 1995. *Free-Riding, Convergence, and Two-Speed Monetary Unification in Europe*. European Economic Review 39, 7, 1345–1364.
- Masson P., Pattillo C. 2002. *Monetary Union in West Africa: An Agency of Restraint for Fiscal Policies?* IMF Working Paper 02/4.5
- Moussa Y. 2004. *Public Expenditure Management in Francophone Africa: A Cross-Country Analysis*. IMF Working Paper, WP/04/42.
- Ozkan F., Siebert G., Sutherland A. 1997. *Monetary Union, Entry Conditions and Economic Reform*. SEPR Discussion Paper 1720.
- Patillo C., Poirson H., Ricci L. 2002. *External Debt and Growth*, IMF Working Paper /02/69.
- Phelps E. 1966. *Golden Rules of Economic Growth*. W.W. Norton, New York.
- Sims Ch. 1998. *The Precarious Fiscal Foundations of EMU*. Manuskrypt.
- Wiegand J. 2004. *Fiscal Surveillance in a Petro-Zone: The Case of the CEAMC*, IMF Working Paper WP/04/.
- Worrell DeLisle. 2003. *A Currency Union for the Caribbean*, IMF Working Paper WP/03/35.

KONSTRUKCJA PORTFELI EFEKTYWNYCH Z ZASTOSOWANIEM WIELORÓWNIANIOWYCH MODELI GARCH¹

PIOTR FISZEDER

Katedra Ekonometrii i Statystyki WNEiZ
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
PL 87-100 Toruń, ul. Gagarina 13a
e-mail: piter@uni.torun.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych PAN w dniu 7 listopada 2006 r.

ABSTRACT

Piotr Fiszeder, *Construction of Efficient Portfolios with Application of Multivariate GARCH Models*, Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 47–68.

The purpose of this paper is to present dynamic approach to selection of efficient portfolios using a forecasts of variances and covariances from the multivariate GARCH models. Evaluation of efficiency for different methods of asset allocation is also performed for stocks from the WSE. Twelve specifications of the multivariate GARCH models, the univariate GARCH model and six other covariance matrix estimation methods are used. Taking into consideration time varying variances and covariances of stock returns in portfolio selections increases, with some exceptions, efficiency of asset allocation process. Simple specifications of the multivariate GARCH models, which parameters are estimated in one stage, are the best performing models. From economic point of view, the differences between the models are not significant, with exception of the factor and orthogonal models. RiskMetrics methodology commonly used by practitioners does not give good results for constructions of efficient portfolios.

SŁOWA KLUCZOWE — KEY WORDS

multivariate GARCH models, portfolio selection, efficient portfolios
wielorównaniowe modele GARCH, konstrukcja portfela, porfele efektywne

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005–2007, projekt badawczy nr 1-H02B-033-29.

1. WPROWADZENIE

Przy wyznaczaniu portfeli efektywnych dużą rolę odgrywa wybór estymatorów wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu oraz ściśle z tym związany wybór metod prognozowania wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Proces budowy portfela według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela. Wybór estymatorów wariancji i kowariancji ma również istotny wpływ na alokację aktywów. Tradycyjnie stosowane estymatory wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stopy zwrotu, czyli średnia arytmetyczna, wariancja i kowariancja obliczane na podstawie dostępnych danych historycznych, nie dają najlepszych wyników przy wyznaczaniu portfeli efektywnych.

W artykule zaprezentowano dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Istnieje bardzo obszerna literatura dotycząca zmienności wariancji warunkowej procesów finansowych. Okazuje się jednakże, że zmieniają się nie tylko warunkowe wariancje, ale również warunkowe kowariancje, jak i warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy procesami finansowymi. Wielorównaniowy proces GARCH pozwala opisać zarówno zmieniające się w czasie warunkowe wariancje, jak i zmieniające się warunkowe kowariancje stóp zwrotu. Jeżeli wariancje i kowariancje stóp zwrotu nie są stałe w czasie, to prognozy uzyskane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH powinny przynieść dodatkowe korzyści przy wyznaczaniu portfeli efektywnych. Literatura dotycząca wykorzystania modeli GARCH przy budowie portfeli jest uboga. Wyniki tych analiz z uwagi na złożoność problemu są na razie fragmentaryczne. Głównym celem zaprezentowanych badań jest ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. Przedstawione podejścia do tworzenia portfela różnią się wyłącznie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono sposób konstrukcji portfeli efektywnych. W części trzeciej zaprezentowano stosowane w badaniu metody estymacji macierzy kowariancji. Część czwarta zawiera analizę skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych dla trzech spółek giełdowych. W części piątej badanie zostało rozszerzone na dwadzieścia spółek. Część szósta zawiera podsumowanie.

2. DYNAMICZNY PROCES BUDOWY PORTFELA

Proces budowy portfela według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stóp zwrotu. Konstruując portfel efektywny trudno jest odróżnić wpływ wyboru estymatora macierzy kowariancji od wyboru estymatora wartości oczekiwanej. Jednym ze sposobów na wyeliminowanie wpływu wyboru estymatora wartości oczekiwanej jest konstrukcja portfela o minimalnej wariancji. Udziały poszczególnych aktywów w portfelu o minimalnej wariancji zależą wyłącznie od macierzy kowariancji. Dynamiczny proces budowy portfela został przedstawiony najpierw dla portfela o minimalnej wariancji, jednakże — jak zostało pokazane dalej — cała procedura może być łatwo rozszerzona na wyznaczanie dowolnych portfeli efektywnych.

Dla danego t na podstawie dostępnych danych z okresu $(1, t)$ estymowane są parametry modelu GARCH². Na podstawie oszacowanego modelu konstruowana jest prognoza macierzy kowariancji stóp zwrotu dla okresu $t + \tau$, gdzie τ oznacza horyzont prognozy. Wyznaczoną prognozę wykorzystuje się do konstrukcji portfela efektywnego. Niech $W'_{t+\tau} = (w_{1t+\tau}, w_{2t+\tau}, \dots, w_{Nt+\tau})$, gdzie $w_{it+\tau}$ oznacza udział i -tego aktywu w portfelu dla okresu $t + \tau$, $H_{t+\tau}$ to prognoza warunkowej macierzy kowariancji dla okresu $t + \tau$. Wariancja portfela jest wówczas równa $W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau}$. Aby wyznaczyć portfel o minimalnej wariancji (minimum globalne), wystarczy rozwiązać następujące zadanie programowania kwadratowego:

$$W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau} \rightarrow \min, \quad (1)$$

przy warunkach:

$$W'_{t+\tau} l = 1, \quad (2)$$

gdzie l jest kolumnowym wektorem o N składowych, przy czym każda z nich równa jest jedności.

Jeżeli nie występuje krótka sprzedaż, to należy dodatkowo wprowadzić warunki brzegowe:

$$w_{it+\tau} \geq 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Całą procedurę powtarza się następnie dla kolejnych okresów (w miarę napływu kolejnych danych).

² Jeżeli warunkowe wartości oczekiwane stóp zwrotu są różne od zera, to należy również estymować parametry w równaniach dla warunkowych średnich.

Jeżeli dopuszcza się krótką sprzedaż, to udziały aktywów w portfelu o minimalnej wariancji dla okresu $t + \tau$ określone są za pomocą wzoru:

$$W_{t+\tau} = \frac{1}{C_{t+\tau}} H_{t+\tau}^{-1} l, \quad (4)$$

gdzie $C_{t+\tau} = l' H_{t+\tau}^{-1} l$.

Wariancja portfela o minimalnej wariancji jest wówczas równa $V_{t+\tau} = 1/C_{t+\tau}$.

Inne portfele efektywne można wyznaczyć poprzez znalezienie portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu. Należy w tym przypadku znaleźć rozwiązanie spełniające następujące warunki:

$$W'_{t+\tau} H_{t+\tau} W_{t+\tau} \rightarrow \min, \quad W'_{t+\tau} l = 1 \quad \text{oraz} \quad W'_{t+\tau} r_{t+\tau} = \mu, \quad (5)$$

gdzie $r_{t+\tau}$ jest to wektor oczekiwanych stóp zwrotu dla okresu $t + \tau$ o wymiarach $N \times 1$, μ to przyjęta minimalna oczekiwana stopa zwrotu portfela.

Jeżeli występuje krótka sprzedaż, to udziały aktywów w portfelu dla okresu $t + \tau$ określone są za pomocą wzoru¹:

$$W_{t+\tau} = g_{t+\tau} + h_{t+\tau} \mu, \quad (6)$$

gdzie $g_{t+\tau} = \frac{1}{D_{t+\tau}} [B_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} l) - A_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau})]$, $h_{t+\tau} = \frac{1}{D_{t+\tau}} [C_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}) - A_{t+\tau} (H_{t+\tau}^{-1} l)]$,

$A_{t+\tau} = l' H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}$, $B_{t+\tau} = l'_{t+\tau} H_{t+\tau}^{-1} r_{t+\tau}$, $D_{t+\tau} = B_{t+\tau} C_{t+\tau} - A_{t+\tau}^2$.

Za oczekiwane stopy zwrotu dla okresu $t + \tau$ przyjmuje się prognozy skonstruowane na podstawie modeli dla warunkowych średnich.

3. SPECYFIKACJE WIELORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH

W badaniu zastosowano dwanaście specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym, model BEKK z warunkowym rozkładem t -Studenta, diagonalną i skalarną postać modelu BEKK, model skalarno-diagonalny, model zintegrowany, model stałych warunkowych współczynników korelacji, K -czynnikiowy model, model ortogonalny dla dwóch i trzech czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Dodatkowo wykorzystano również jednorównaniowy model GARCH. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami dla sześciu innych metod:

¹ Zob. Campbell, Lo i MacKinlay (1997).

równe udziały dla wszystkich aktywów, bezwarunkowa macierz kowariancji stóp zwrotu, ruchoma macierz kowariancji, ruchoma macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25, model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji oraz model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji z parametrem wygasania równym 0,94 (tzw. model RiskMetrics). Poniżej podano tylko podstawowe informacje dotyczące stosowanych modeli wielorównaniowych. Więcej informacji na temat własności i metod estymacji można znaleźć na przykład w pracy Bauwens, Laurent i Rombouts (2006).

Estymacja parametrów ogólnej postaci wielorównaniowego modelu GARCH, zwanej postacią VECH, jest trudna już nawet dla kilku aktywów. Z tego względu w badaniu zastosowano prostsze specyfikacje wielorównaniowego modelu GARCH. Rozważano tylko specyfikacje zapewniające dodatnią określoność macierzy kowariancji. Baba i wsp. (1990) przedstawili następującą postać modelu nazywaną modelem BEKK (p,q)⁴ (Engle i Kroner, 1995):

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim D(0, H_t), \quad (7)$$

$$H_t = CC' + \sum_{i=1}^q D_i \varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i} D_i' + \sum_{j=1}^p E_j H_{t-j} E_j', \quad (8)$$

gdzie ψ_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w okresie $t - 1$, $D(0, H_t)$ oznacza określoną postać wielowymiarowej funkcji gęstości o wartościach oczekiwanych równych zeru i macierzy kowariancji H_t , C , D_i oraz E_j są macierzami parametrów o wymiarach $N \times N$, a macierz C jest macierzą trójkątną.

W pracy przyjęto dwa warunkowe rozkłady ε_t : wielowymiarowy rozkład normalny oraz t-Studenta. Diagonalna postać modelu BEKK (diagonalny BEKK) zakłada, że macierze D_i i E_j są macierzami diagonalnymi, natomiast skalarna postać (skalarny BEKK) zakłada, że powyższe macierze są zastąpione skalarami pomnożonymi przez macierz jedynek. Zastępując macierze D_i i E_j skalarami $d_i^{1/2}$ i $e_j^{1/2}$ otrzymamy model skalarno-diagonalny. Dalsze uproszczenie modelu uzyskujemy zakładając:

$$CC' = 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^q d_i + \sum_{j=1}^p e_j = 1.$$

Taka specyfikacja modelu jest określana jako model zintegrowany.

⁴ Nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk autorów.

Bollerslev (1990) wprowadził model stałych warunkowych współczynników korelacji, w którym zakłada się, że zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje są proporcjonalne do iloczynu odpowiednich warunkowych odchyłeń standardowych:

$$H_t = D_t \Gamma D_t \quad (9)$$

gdzie D_t oznacza macierz diagonalną o wymiarach $N \times N$, której elementami są warunkowe odchylenia standardowe opisane za pomocą dowolnych jednorównaniowych modeli GARCH — $D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$, a Γ jest macierzą stałych warunkowych współczynników korelacji.

Kolejną rozważaną specyfikacją modelu to K -czynnikiowy model GARCH(p,q), zaproponowany przez Engle'a (1987). Model ten można przedstawić w postaci:

$$H_t = \Omega + \sum_{k=1}^K g_k g'_k h_{kt}^* \quad (10)$$

gdzie Ω jest symetryczną macierzą parametrów o wymiarach $N \times N$, g_k jest wektorem parametrów o wymiarach $N \times 1$, h_{kt}^* oznaczają wariancje warunkowe czynników opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH.

Badano również ortogonalny model GARCH (Alexander i Chibumba, 1996):

$$V^{-1/2} \varepsilon_t = u_t = \Lambda_m f_t \quad (11)$$

$$H_t = V^{1/2} V_t V^{1/2}, \quad (12)$$

gdzie $V = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_N)$, v_i jest bezwarunkową wariancją ε_{it} , Λ_m to macierz wektorów własnych (ortogonalnych) o wymiarach $N \times m$, $f_t = (f_{1t} \ f_{2t} \ \dots \ f_{mt})'$ jest procesem o warunkowych parametrach: $E_{t-1}(f_t) = 0$, $\text{Var}_{t-1}(f_t) = Q_t = \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2, \dots, \sigma_{mt}^2)$, σ_{it}^2 jest opisane za pomocą jednorównaniowego stacjonarnego modelu GARCH (dla $i = 1, 2, \dots, m$), $V_t = \text{Var}_{t-1}(u_t) = \Lambda_m Q_t \Lambda'_m$.

Model DCC (*dynamic conditional correlation*) wprowadzony przez Engle'a (2002) można przedstawić w następującej formie:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (13)$$

$$R_t = Q_t^{-1} Q_t Q_t^{-1}, \quad (14)$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j \right) S + \sum_{i=1}^q \alpha_i (z_{t-i} z'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j Q_{t-j} \quad (15)$$

gdzie $D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$, warunkowe variancje h_{kt} (dla $k = 1, 2, \dots, N$) opisane są za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH, z_t to wektor standaryzowanych wartości ε_{kt} , takich że $z_{kt} = \varepsilon_{kt} / \sqrt{h_{kt}}$, R_t to macierz zmiennych w czasie warunkowych współczynników korelacji dla z_t , S oznacza bezwarunkową macierz kowariancji dla z_t , a Q_t^* jest macierzą diagonalną, której elementami są pierwiastki kwadratowe z elementów diagonalnych macierzy Q_t .

Jeżeli Q_t jest opisane równaniem:

$$Q_t = (1 - \lambda)(z_{t-1}z'_{t-1}) + \lambda Q_{t-1}, \quad (16)$$

to model DCC jest wówczas określany jako zintegrowany model DCC.

W badaniu dla dwudziestu aktywów zastosowano również upraszczające parametryzacje dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych, tzw. celowanie w variancję (Engle i Mezrich, 1996). Na przykład dla skalarno-diagonalnego modelu (1,1) iloczyn macierzy wyrazów wolnych określony jest jako:

$$CC' (1 - d_1 - e_1) S. \quad (17)$$

Estymacja upraszczającej parametryzacji modelu przebiega w dwóch krokach⁵. W pierwszym kroku estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji $S = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \varepsilon'_t$, uzyskane szacunki podstawia się do estymacji wielorównaniowego modelu GARCH w drugim kroku.

4. OCENA EFEKTYWNOŚCI DLA TRZECH SPÓŁEK

Ocenę skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych dokonano na podstawie rzeczywistych danych finansowych. Przeprowadzono dwie analizy. Pierwsza dotyczyła małej liczby aktywów, mianowicie trzech spółek akcyjnych. Budowa portfela na podstawie tylko trzech aktywów wydaje się być problemem mało istotnym z praktycznego punktu widzenia, ponieważ przy konstrukcji portfela na ogół bierze się pod uwagę od co najmniej kilkunastu do nawet kilkuset aktywów. Jednakże przyjęcie małej liczby aktywów pozwoliło na zastosowanie dużej liczby specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, a także umożliwiło analizę określonych restrykcji w modelach. Takie badanie nie byłoby możliwe dla dużej liczby aktywów. Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku (1880 obserwacji). Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na Gieldzie

⁵ Dla modelu DCC estymacja będzie wówczas przebiegała w trzech krokach.

Papierów Wartościowych w Warszawie wybrano trzy spółki o największej kapitalizacji: KGHM Polska Miedź, Bank Pekao SA oraz Telekomunikacja Polska. Wybrane spółki należą do najbardziej płynnych spółek. Przyjęto jednodniowy horyzont prognozy, ponieważ prognozy zmienności uzyskane na podstawie modeli GARCH są bardziej trafne w przypadku bardzo krótkiego horyzontu prognozy (np. West i Cho, 1995; Andersen i Bollerslev, 1998), w przeciwieństwie do długiego horyzontu, dla którego prognozy obliczone na podstawie innych modeli są bardzo często dokładniejsze. Dane z trzech pierwszych lat zostały wykorzystane jedynie przy estymacji modelu. Ocena skuteczności przedstawionej metody została dokonana dla stosunkowo długiego okresu, mianowicie na podstawie danych z okresu od stycznia 2002 do czerwca 2006 roku (1131 obserwacji). Własności procesów w krótkim okresie mogą znacznie odbiegać od własności w długim okresie, dlatego wyniki analiz przeprowadzonych dla krótkiego okresu mogą być mylące. Zaczynając od 31 grudnia 2001 roku na podstawie danych od początku 1999 roku szacowano parametry wszystkich rozważanych modeli. Na podstawie każdego modelu konstruowano prognozę warunkowej macierzy kowariancji na następną sesję. Na podstawie sformułowanej prognozy wyznaczono dwa portfele efektywne. Pierwszy, to portfel o minimalnej wariancji, drugi — o minimalnej wariancji przy dziennym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu równym 0,5%. W obu przypadkach założono nieskończoną podzielność aktywów, możliwość krótkiej sprzedaży oraz brak kosztów transakcyjnych. Następnie — *ex post* — obliczano osobno wariancje dla tych portfeli jako kwadrat zaobserwowanych stóp zwrotu. Dla następnych okresów dodawano kolejno jedną obserwację do danych, na podstawie których szacowano model i powtarzano całą procedurę aż do 29 czerwca 2006 roku. Zatem parametry każdego z zastosowanych w pracy modeli były szacowane 1131 razy. Dla każdego modelu z oszacowanych *ex post* wariancji portfeli dla okresu od stycznia 2002 do czerwca 2006 roku obliczono średnie, osobno dla portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu. W tym drugim przypadku prognozy stóp zwrotu były konstruowane na podstawie modelu VAR. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 1 (przedstawiono odchylenia standardowe). Przy budowie portfela o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu nie wiadomo, czy skuteczność (bądź nieskuteczność) metody wynika z prognoz stóp zwrotu, czy też z prognoz wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Głównym celem tej analizy jest ocena efektywności tworzenia portfeli z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, dlatego interpretację wyników przeprowadzono w stosunku do procedury budowy portfela o minimalnej wariancji, która nie zależy od wyboru metody prognozowania stóp zwrotu (z pewnymi wyjątkami miejsca w rankingu, przy ocenie efektywności budowy portfela o minimalnej wariancji przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu, dla większości modeli były zbliżone).

Tabela 1

Szacunki średnich odchyłeń standardowych stóp zwrotu portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu dla trzech spółek

Oznaczenie portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorówn. modele GARCH	0,016331	6	0,112919	7
BEKK	0,016430	10	0,123315	17
BEKK rozkład <i>t</i> -Studenta	0,016529	11	0,121536	16
Diagonalny BEKK	0,016311	4	0,114276	12
Skalarny BEKK	0,016821	13	0,114074	10
Skalarno-diagonalny	0,016277	1	0,111847	5
Zintegrowany	0,016329	5	0,114606	13
Stałych współ. korelacji	0,016304	3	0,113650	9
<i>K</i> -czynnikiowy 2 czynniki	0,016915	16	0,115408	14
Ortogonalny 2 czynniki	0,142260	19	0,230898	18
Ortogonalny 3 czynniki	0,016902	15	0,117250	15
DCC	0,016360	7	0,111523	1
DCC zintegrowany	0,016397	8	0,111817	4
Równe wagi	0,016936	17	—	—
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,016899	14	0,114074	11
Ruchoma macierz kowariancji	0,016282	2	0,111666	2
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,017049	18	0,112656	6
Wyrównywanie wykładnicze	0,016424	9	0,113460	8
RiskMetrics	0,016586	12	0,111713	3

Źródło: obliczenia własne.

W badaniu zastosowano metody prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu opisane w punkcie 3.

W większości prac dotyczących efektywności metod tworzenia portfeli bardzo ogólnikowo analizuje się własności badanych szeregów czasowych, przez co nie możliwe jest sformułowanie bardziej ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu. W tabeli 2 zaprezentowano wyniki testów dotyczących zarówno własności szeregów stóp

Analiza własności i charakteru zależności badanych szeregów dla trzech spółek

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk		
		Pekao BP	TP SA	KGHM
Brak autokorelacji	Ljunga-Boxa(12)	19,31	13,85	11,37
Brak efektu ARCH	LM(12)	56,03*	149,02*	92,36*
Normalność rozkładów bezwarunkowych	Jarque-Bera	372,01*	224,70*	944,14*
Normalność rozkładu warunkowego w modelu BEKK	LR	174,08*		
Stołość warunkowych współczynników korelacji	LMC	5,58		
BEKK — macierze diagonalne	LR	42,72*		
BEKK — skalary razy macierz jedynek	LR	482,01*		
BEKK — skalary	LR	71,78*		
Diagonalny BEKK — skalary	LR	28,92*		
Skalarno-diagonalny — $CC' = 0, e_1 = 1 - d_1$	LR	96,21*		
Zintegrowany GARCH — $1 - d_1 = 0,94$	LR	149,41*		

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

Źródło: obliczenia własne.

zwrotu badanych spółek, jak i charakteru zależności między nimi. Stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji, miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. Do opisu warunkowej macierzy kowariancji wystarczająca okazała się parametryzacja GARCH(1,1). Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH, omawiane w dalszej części pracy, były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego.

Najbardziej złożoną parametryzacją spośród rozważanych modeli jest model BEKK. Estymowano model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym oraz t -Studenta. Według testu LR model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem t -Studenta. Jednakże, jak się okazuje, lepsze dopasowanie w próbie w tym przypadku nie przekłada się na wzrost skuteczności przy tworzeniu portfeli efektywnych. Ten rezultat jest o tyle ważny, że estymacja parametrów modelu BEKK z warunkowym rozkładem t -Studenta była najbardziej czasochłonna i często występowały problemy ze znalezieniem odpowiednich wartości startowych.

W celu wykluczenia przypuszczenia, że uzyskany wynik jest charakterystyczny tylko dla modelu BEKK i jest następstwem trudności z estymacją parametrów tego modelu, rozważono jeszcze dodatkowo najlepszy w rankingu model, czyli model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t -Studenta. Dla tego modelu nie było żadnych problemów z estymacją parametrów. Okazało się, że również w tym przypadku lepsze dopasowanie w próbie nie przekłada się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfeli. Szacunki średnich odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji wynosiły 0,016277 i 0,016303 odpowiednio dla modeli z warunkowym rozkładem normalnym i t -Studenta.

Liczba parametrów w modelu BEKK w przypadku dużej liczby walorów w portfelu jest na tyle duża, że ich estymacja jest bardzo trudna lub wręcz niemożliwa. Z tego względu zbadano, jaki wpływ na efektywność procesu alokacji aktywów ma uproszczenie postaci wielorównaniowego modelu GARCH. W pierwszej kolejności rozważano diagonalną i skalarną postać modelu BEKK oraz model skalarno-diagonalny. Wszystkie trzy specyfikacje modelu są zagnieżdżone w modelu BEKK, a wyniki testu LR wskazują na odrzucenie restrykcji nałożonych przez te postacie modelu. O ile skalarna postać modelu BEKK prowadzi do spadku efektywności przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, o tyle zaskakujący jest wzrost efektywności dla diagonalnego modelu BEKK oraz modelu skalarno-diagonalnego. Model skalarno-diagonalny ma tyle samo parametrów co skalarny model BEKK (dwa parametry poza wyrazami wolnymi), jednakże jego parametryzacja jest znacznie prostsza. Pomimo tak prostej specyfikacji postać ta okazała się być najlepszą przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji. Najprostszą postacią modelu przy tej parametryzacji jest zintegrowany model GARCH. Jest on modelem zagnieżdżonym w modelu skalarno-diagonalnym. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Zatem wyniki testu są zgodne z wynikami skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych.

Kolejnym uproszczeniem modelu jest przyjęcie założenia, że warunkowe korelacje stóp zwrotu są stałe w czasie. W pierwszej kolejności zastosowano jednorównaniowe modele GARCH, które pozwalają opisać i prognozować zmieniające się w czasie warunkowe wariancje stóp zwrotu. Estymacja jednorównaniowych modeli GARCH jest znacznie prostsza, jednakże modele te nie pozwalają opisać zmieniających się w czasie warunkowych korelacji. Macierz korelacji była estymowana na podstawie rozkładu brzegowego standaryzowanych reszt. Na podobnych założeniach opiera się model stałych warunkowych współczynników korelacji. Jest to jednakże model wielorównaniowy i w odróżnieniu od modeli jednorównaniowych wszystkie parametry są estymowane łącznie, co przełożyło się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Zauważmy, że powyższe modele uplasowały się na wysokich miejscach w rankingu, wyprzedzając większość specyfikacji pozwalających opisać zmieniające się warunkowe współczynniki korelacji. Jak się okazuje bardziej

złożone modele, nie muszą dawać lepszych prognoz macierzy kowariancji szczególnie, że w tym przypadku hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji nie została odrzucona na podstawie testu Tse (2000). Na podkreślenie zasługuje szóste miejsce w rankingu modeli jednorównaniowych, które można zastosować dla dowolnie dużej liczby aktywów, a ich estymacja jest znacząco krótsza⁶.

Następne parametryzacje, mianowicie K-czynnikowy model GARCH oraz ortogonalny model GARCH zakładają, że stopy zwrotu aktywów są zależne od wspólnych niezależnych czynników. Podstawową zaletą tych specyfikacji jest łatwość estymacji parametrów nawet dla bardzo dużej liczby szeregów za pomocą uproszczonych procedur opartych na modelach jednorównaniowych. W obu przypadkach czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. Wspólne czynniki wyjaśniały odpowiednio 64%, 21% i 15% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Model K-czynnikowy oraz ortogonalny plasują się na odległych miejscach w rankingu, co wynika przede wszystkim z utraty istotnych informacji⁷. Dla dwóch czynników zdecydowanie lepiej wypada model K-czynnikowy⁸, ponieważ wszystkie parametry tego modelu są estymowane. Jednakże przy dużej liczbie aktywów w przypadku modelu ortogonalnego zwiększanie liczby czynników nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu.

Kolejną rozważaną parametryzacją wielorównaniowego modelu GARCH był model DCC. Podobnie, jak w przypadku dwóch poprzednich modeli główną zaletą tej parametryzacji jest możliwość estymacji parametrów za pomocą procedury dwustopniowej. Model DCC i jego zintegrowana wersja uplasowały się na odpowiednio siódmym i ósmym miejscu.

Słabsza efektywność w procesie alokacji aktywów najbardziej złożonych postaci modeli, takich jak model BEKK może wynikać z dwóch powodów. Po pierwsze, rzeczywiste zależności mogą mieć prostszą strukturę i parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Po drugie, uzyskane oceny parametrów nie gwarantowały stacjonarności wielowymiarowego procesu. Znalezienie ekstremum funkcji wiarygodności przy nałożonych restrykcjach gwarantujących stacjonarność okazało się niemożliwe. Trudności z estymacją parametrów modelu BEKK już przy tak małej liczbie aktywów przemawiają na korzyść prostszych postaci modeli.

Uzyskane wyniki dla modeli GARCH zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie innych metod konstrukcji portfeli, w tym również metod

⁶ Dla trzech spółek estymacja wielorównaniowego modelu GARCH była około dziesięć razy dłuższa, dla większej liczby aktywów różnica jest jeszcze bardziej znacząca.

⁷ Modele czynnikowe wypadają słabo już przy opisie szeregów finansowych — patrz badanie Osiewalskiego i Pipienia (2004) dla modelu GARCH z ukrytym czynnikiem.

⁸ Dla trzech czynników jest podobnie, z tym że estymacja 3-czynnikowego modelu nie ma podstaw teoretycznych.

stosowanych przez praktyków rynku finansowego. Budowano sześć portfeli. Pierwszy portfel — statyczny został skonstruowany w ten sposób, że dla wszystkich okresów przyjęto równe wagi dla trzech walorów — $W'_{t+1} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Portfel ten służy wyłącznie jako punkt odniesienia. Pozostałe portfele różniły się jedynie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu. Tradycyjny sposób konstrukcji portfela polega na zastosowaniu bezwarunkowej macierzy kowariancji. Uzyskane wyniki wskazują, że klasyczne podejście zakładające stałość warunkowych wariancji i kowariancji prowadzi do spadku efektywności, choć należy zauważyć, że występowały modele o zmiennej macierzy kowariancji, które plasowały się jeszcze dalej w rankingach.

Praktycy rynku finansowego do prognozowania macierzy kowariancji stosują najczęściej ruchomą macierz kowariancji oraz model wyrównywania wykładniczego. W badaniu przyjęto dwa modele stosowane przez analityków J. P. Morgan — ruchomą macierz kowariancji ze stałą wykładzianą równą 25 oraz model wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania równym 0,94. Modele te uplasowały się na dalekich pozycjach w rankingu przy konstrukcji portfela o najmniejszej wariancji, choć należy podkreślić, że wypadły znacznie lepiej w rankingu przy budowie portfela o minimalnej wariancji dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu. Zauważmy, że model wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania 0,94 jest szczególnym przypadkiem zintegrowanego wielorównaniowego modelu GARCH. Wynik testu LR zdecydowanie odrzuca model RiskMetrics na korzyść modelu zintegrowanego. Tak jak można było przypuszczać estymacja parametru wygasania daje lepsze rezultaty niż przyjmowanie pewnych wartości z góry. Dodatkowo zastosowano również procedurę zaproponowaną w pracy Fiszdera (2004a), polegającą na wyborze stałej wykładzianki w modelu średniej ruchomej oraz parametru wygasania w modelu wyrównywania wykładniczego dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Próbkę wstępną miała 150 obserwacji, stała wykładzianki mogła przyjmować wartości od 5 do 120, a parametr wygasania od 0,6⁹ do 0,99 (co 0,01). Wybierano te wartości, dla których średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji było najmniejsze w próbce wstępnej. Przy takiej procedurze znacznie gorzej wypadł model wyrównywania wykładniczego, natomiast model ruchomej macierzy kowariancji uplasował się na drugim miejscu w rankingu, wyprzedzając wszystkie poza modelem skalaro-diagonalnym specyfikację wielorównaniowego modelu GARCH.

Dodatkowo dla modeli, których parametry były szacowane jednocześnie oraz tam gdzie było możliwe oszacowanie łącznej funkcji wiarygodności podano szacunki bayesowskiego kryterium Schwarza (tab. 3). Wprawdzie uzyskany ranking modeli według tego kryterium nie pokrywa się z rankingiem otrzymana-

⁹ W modelu wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji bardzo rzadko się zdarza, aby wyznaczony parametr wygasania przyjmował wartości poniżej 0,9.

Ranking modeli według bayesowskiego kryterium Schwarza dla trzech spółek

Oznaczenia portfeli	SC	Ranking
BEKK	-27 698	8
BEKK rozkład t-Studenta	-27 882	1
Diagonalny BEKK	-27 746	6
Skalarny BEKK	-27 337	10
Skalarno-diagonalny	-27 748	5
Zintegrowany	-27 704	7
Stałych współ. korelacji	-27 783	4
DCC	-27 806	3
DCC zintegrowany	-27 807	2
RiskMetrics	-27 562	9

Źródło: obliczenia własne.

nym na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, ale jest bardziej do niego zbliżony, niż wyniki bezpośredniego testowania restrykcji przedstawione w tabeli 2.

Wnioski

Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela, z pewnymi wyjątkami, wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji prowadzi na ogół do zmniejszenia szacunków odchyżeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji, często na przekór wynikom testów. Wydaje się, że parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza. Wyjątkiem od tej zasady jest skalarny model BEKK oraz modele: K -czynnikiowy i ortogonalny, przy których występuje znaczna utrata informacji. Wyniki przeprowadzonych testów statystycznych tylko w części zostały potwierdzone przez badanie skuteczności tworzenia portfeli. Jako ważny wyjątek, warto zauważyć, że w przypadku modelu BEKK zastąpienie warunkowego rozkładu t -Studenta rozkładem normalnym nie powoduje spadku skuteczności przy budowie portfeli.

Niespełnienie klasycznych założeń dotyczących testowania (np. brak normalności rozkładu) oraz złożoność rozważanych parametryzacji nie pozwala na

zbadanie statystycznej istotności różnic pomiędzy odchyleniami standardowymi portfeli otrzymanymi dla rozważanych specyfikacji modeli. Możliwa jest jednak ocena ekonomiczna występujących różnic. Na przykład zastosowanie modelu skalarno-diagonalnego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 3,7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,0642 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę o ponad 1 punkt procentowy (spadek z około 26,9% do 25,9%)¹⁰. W tym przypadku różnica jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia¹¹, jednakże różnice pomiędzy niektórymi modelami są dużo mniejsze. Na przykład różnica pomiędzy pierwszym a szóstym modelem w rankingu w skali roku jest mniejsza niż 0,1 punktu procentowego. Zatem dla większości inwestorów wystarczające jest zastosowanie najprostszej metody estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu, czyli modelu ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania wybieraną dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej lub jednorównaniowych modeli GARCH.

Oczywiście otrzymanych wyników nie można uogólnić na dowolne spółki czy aktywa finansowe. Wybrane spółki należą do największych pod względem kapitalizacji oraz najbardziej płynnych spółek notowanych na GPW w Warszawie. W podobnym badaniu przeprowadzonym na danych tygodniowych dla spółek mniejszych i mniej płynnych (Fiszeder, 2004b) różnice pomiędzy poszczególnymi modelami były bardziej istotne z ekonomicznego punktu widzenia. Jednakże główne wnioski wynikające z analizy były zbliżone do przedstawionych wyżej. Podobnie uzyskanych rezultatów nie można jednoznacznie uogólnić na dowolną liczbę aktywów, dlatego w dalszej części rozdziału przedstawiono wyniki analizy dla dwudziestu spółek.

5. OCENA EFEKTYWNOŚCI DLA DWUDZIESTU SPÓŁEK

Badanie dla dwudziestu aktywów było analogiczne do tego, które zostało przeprowadzone dla trzech aktywów. Dla dużej liczby aktywów jest bardzo mało analiz, w których ocenia się skuteczność budowy portfeli efektywnych z zastosowaniem prognoz macierzy kowariancji konstruowanych na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Takie badania zostały przeprowadzone między innymi przez Engle'a i Shepparda (2001), jednakże oceniali oni tylko dwa modele, mianowicie model DCC i model RiskMetrics. Porównywali

¹⁰ Wyniki zostały przeliczone na zwykłe stopy zwrotu.

¹¹ Do pełnej oceny należałoby jeszcze zbadać jaki jest wpływ uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

oni wariancję portfela z prognozowaną wariacją portfela i doszli do wniosku, że przy dużej liczbie aktywów oba modele nie są skuteczne przy konstrukcji portfeli efektywnych. W niniejszej pracy do analizy przyjęto taki sam okres, jak przy badaniu trzech spółek, czyli od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku. Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na GPW w Warszawie wybrano dwadzieścia spółek o największej kapitalizacji: Bank BPH, Bank Millennium, Bank Pekao S.A., BRE Bank, Bank Zachodni WBK, Budimex, Cersanit, Citibank Handlowy, Computerland, Firma Oponiarska Dębica, ING Bank Śląski, Grupa Kęty, KGHM Polska Miedź, Kredyt Bank, Mondi Packaging Paper Świecie, Orbis, Polska Grupa Farmaceutyczna, Prokom Software, Softbank, Telekomunikacja Polska. Przy wyborze pominięto spółki, dla których udział liczby sesji, podczas których nie były notowane przekraczał 5%. Miało to na celu uniknięcie problemu niesynchronicznych transakcji. Dla większości specyfikacji jednoczesna estymacja parametrów wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie trudniejsza w przypadku dwudziestu aktywów. Dla najbardziej złożonych parametryzacji estymacja okazała się nawet niemożliwa z uwagi na bardzo dużą liczbę parametrów. Na przykład najprostsza postać modelu BEKK z $K = 1$ oraz $p = q = 1$ ma tysiąc dziesięć parametrów w samym równaniu dla macierzy kowariancji. Dlatego konieczne było ograniczenie rozważanych specyfikacji modelu. Przyjęto tylko te postacie, których parametry można oszacować bez konieczności poszukiwania „dobrych” wartości startowych w czasie nie przekraczającym kilkunastu godzin (między zamknięciem sesji a otwarciem dnia następnego). W badaniu zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t -Studenta, model zintegrowany, K -czynnikiowy model GARCH dla trzech czynników, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami uzyskanymi na podstawie innych metod, które zastosowano przy badaniu trzech spółek. Otrzymane rezultaty zaprezentowano w tabeli 4.

Miejsca poszczególnych modeli w rankingach są bardzo zbliżone, niezależnie od tego czy portfel o minimalnej wariacji konstruowany jest bez ograniczenia minimalnej stopy zwrotu, czy przy zadanej minimalnej oczekiwanej dziennej stopie zwrotu na poziomie 0,5%. Dalej interpretowane są tylko wyniki dla portfeli o minimalnej wariacji.

Przeprowadzono również wybrane testy dotyczące własności stóp zwrotu badanych spółek. Poza czterema spółkami (Computerland, Millennium, Prokom i Softbank) stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji. Stopy zwrotu wszystkich spółek miały zmienną wariację warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. W tabeli 5 przedstawiono wyniki testów dotyczących charakteru zależności między stopami zwrotu badanych spółek. Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli

Tabela 4

Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji przy zadanym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu dla dwudziestu spółek

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorównaniowe modele GARCH	0,008262	8	0,011437	7
Skalarno-diagonalny	0,007810	3	0,011221	4
Skalarno-diagonalny rozkład t-Studenta	0,007829	4	0,011235	5
Zintegrowany	0,007794	1	0,011154	2
K-czynnikowy 3 czynniki	0,049739	14	0,073727	13
Ortogonalny 3 czynniki	0,274143	15	0,437218	14
Ortogonalny 20 czynników	0,008320	9	0,011520	8
DCC	0,008014	6	0,011157	3
DCC zintegrowany	0,007801	2	0,011036	1
Równe wagi	0,010254	12	—	—
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,008384	10	0,011811	9
Ruchoma macierz kowariancji	0,008038	7	0,011591	12
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,015340	13	0,020486	11
Wyrównywanie wykładnicze	0,007955	5	0,011312	6
RiskMetrics	0,009226	11	0,013628	10

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5

Analiza własności i charakteru zależności badanych szeregów dla dwudziestu spółek

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk
Normalność rozkładu warunkowego w modelu skalarno-diagonalnym	LR	8925*
Stałość warunkowych współczynników korelacji	LMC	409*
Skalarno-diagonalny — $CC' = 0$, $e_1 = 1 - d_1$	LR	1192*
Zintegrowany GARCH — $1 - d_1 = 0,94$	LR	26382*

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

Źródło: obliczenia własne.

Ranking modeli według bayesowskiego kryterium Schwarza dla dwudziestu spółek

Oznaczenia portfeli	SC	Ranking
Skalarno-diagonalny	-190 783	5
Skalarno-diagonalny rozkład <i>t</i> -Studenta	-194 311	1
Zintegrowany	-191 179	4
DCC	-192 506	3
DCC zintegrowany	-193 138	2
RiskMetrics	-164 814	6

Źródło: obliczenia własne.

GARCH były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Dodatkowo w tabeli 6 przedstawiono ranking modeli na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarza.

W celu ograniczenia liczby parametrów dla modeli skalarno-diagonalnego, zintegrowanego oraz DCC zastosowano upraszczające parametryzacje dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych. W pierwszej kolejności estymowano parametry modelu skalarno-diagonalnego z warunkowym rozkładem normalnym oraz *t*-Studenta. Według testu LR model z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta. Zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego rozkładem *t*-Studenta nie powoduje jednakże spadku szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji.

Uproszczeniem modelu skalarno-diagonalnego jest model zintegrowany. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Wobec wyniku testu dosyć zaskakujące jest pierwsze miejsce modelu zintegrowanego w rankingu skuteczności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Należy jednakże zauważyć, że różnica między odchyleniami standardowymi portfeli o minimalnej wariancji dla modeli skalarno-diagonalnego i zintegrowanego nie jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia. Zastosowanie modelu zintegrowanego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,059 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę prawie 1 punkt procentowy (spadek z około 13,31% do 12,37%). Różnice pomiędzy wieloma modelami są jednakże dużo

mniejsze. Różnica pomiędzy modelem zintegrowanym a trzecim w rankingu modelem skalarno-diagonalnym w skali roku jest równa 0,03 punktu procentowego.

Następne rozważane parametryzacje wielorównaniowego modelu GARCH, to modele K -czynnikiowy oraz ortogonalny. W obu przypadkach przy estymacji parametrów zastosowano uproszczone procedury oparte na modelach jednorównaniowych. Czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. W większości prac dotyczących modeli czynnikowych autorzy sugerują, że dwa lub trzy czynniki wyjaśniają większość zmienności stóp zwrotu aktywów i są wystarczające do opisu macierzy kowariancji. Z tego względu w badaniu przyjęto trzy czynniki. Wyjaśniały one odpowiednio 32,4%, 5,9% oraz 5,1% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Modele te uplasowały się na ostatnich miejscach w rankingu. Nieuwzględnienie części zmienności prowadzi do zbyt dużej utraty informacji. Dodatkowo estymacja w drugim kroku równań dla modelu czynnikowego okazała się być bardzo wrażliwa na przyjęte wartości startowe. Model ortogonalny wypada zdecydowanie gorzej, ponieważ część jego parametrów jest wyznaczana na podstawie analizy głównych składowych. Ta wada w przypadku małej liczby czynników okazuje się być zaletą przy większej ich liczbie. Mianowicie rozszerzenie modelu i uwzględnienie większej liczby czynników (nawet wszystkich) nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu. Dlatego rozważono również model ortogonalny z dwudziestoma czynnikami. Ding i Engle (2001) określali taki model jako model GARCH głównych składowych. Model ten wypadł zdecydowanie lepiej przy ocenie skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych, jednakże gorzej niż inne nieczynnikowe postacie wielorównaniowych modeli GARCH.

Kolejną rozważaną parametryzacją modelu GARCH był model DCC. Przy estymacji parametrów modelu zamiast procedury dwustopniowej zastosowano procedurę trzystopniową. W pierwszym kroku szacowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH, w drugim kroku, estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji dla standaryzowanych reszt z modeli jednorównaniowych, w trzecim kroku szacuje się parametry odpowiedzialne za zmienne kowariancje warunkowe. W przypadku zintegrowanej wersji modelu DCC można było zastosować procedurę dwustopniową, ponieważ parametryzacja modelu jest znacznie prostsza. Model DCC i zintegrowany model DCC uplasowały się wysoko w rankingu, mianowicie na szóstym i drugim miejscu.

Obok modeli wielorównaniowych zastosowano również jednorównaniowy model GARCH. Niestety skuteczność tego modelu przy konstrukcji portfeli efektywnych jest znacznie mniejsza niż dla trzech aktywów, choć ciągle daje lepsze rezultaty niż zastosowanie bezwarunkowej macierzy kowariancji. Może to wynikać z faktu, że warunkowe współczynniki korelacji dla dwudziestu spółek są zmienne w czasie (zob. wynik testu Tse w tabeli 5). Przyjęcie w takiej sytuacji stałej macierzy korelacji jest nieprawidłowe.

Pozostałe metody szacowania macierzy kowariancji uplasowały się na dalszych miejscach w rankingu. Najlepiej wypadł model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji (piąte miejsce), w którym parametr wygasania wybierano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wynik testu LR zdecydowanie odrzuca natomiast model RiskMetrics, czyli model z parametrem wygasania równym 0,94 na korzyść modelu zintegrowanego. Ten wynik został później potwierdzony przy badaniu skuteczności tworzenia portfela o minimalnej wariancji. W przeprowadzonej analizie parametr wygasania przyjmował najczęściej wartość 0,98 lub 0,99. Warto zwrócić uwagę na słabszy rezultat w porównaniu z trzema spółkami modelu ruchomej macierzy kowariancji z wybieraną stałą wygładzania. Wynika to prawdopodobnie z ograniczenia maksymalnej wartości stałej wygładzania do 120. W przeprowadzonej analizie stała wygładzania przyjmowała najczęściej wartość 120 lub nieco niższą. Potwierdzeniem tego jest bardzo dalekie miejsce w rankingu modelu ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania równą 25. Otrzymane wyniki wskazują, że modele, w których do konstrukcji prognoz macierzy kowariancji wykorzystuje się większą ilość danych z przeszłości, wypadają lepiej w rankingu.

6. PODSUMOWANIE

W pracy dokonano oceny skuteczności różnych metod tworzenia portfeli efektywnych, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. Generalnie wnioski wynikające z analizy dla dwudziestu spółek są zbliżone do tych, jakie otrzymano dla trzech spółek. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela z pewnymi wyjątkami wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Wyjątkiem są czynnikowe modele GARCH: *K*-czynnikiowy i ortogonalny oraz model ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 oraz model wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji z parametrem wygasania równym 0,94. Przyjmowana w metodologii RiskMetrics wartość parametru stałej wygładzania, dla danych dziennych 0,94, nie jest wartością optymalną dla polskiego rynku akcji (jest zdecydowanie za niska).

Przy dwudziestu aktywach trudno jest oceniać wpływ uproszczenia postaci warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ w zasadzie wszystkie rozważane parametryzacje należą do uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH. Należy jednakże zauważyć, że zarówno przy trzech, jak i dwudziestu spółkach wysoko w rankingach wypadły proste postaci modeli GARCH, których parametry szacowane są jednocześnie, mianowicie model skalarno-diagonalny i zintegrowany. Warto podkreślić, że oba modele, obok modelu stałych współczynników korelacji, okazały się najlepsze ze względu na wyniki testów diagnostycznych w przypadku pięciu spółek z rynku amerykańskiego

(Ding i Engle, 2001). Wyniki przeprowadzonych w niniejszym badaniu testów statystycznych, z pewnymi wyjątkami, zostały potwierdzone przez badanie skuteczności tworzenia portfeli. Rankingi modeli uzyskane na podstawie bayesowskiego kryterium Schwarza okazały się nawet bardziej zbliżone do rankingów uzyskanych na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, niż wynikałoby to z bezpośredniego testowania restrykcji dotyczących szacowanych modeli.

Wyniki dotyczące zarówno trzech, jak i dwudziestu spółek sugerują, że zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego w modelach GARCH rozkładem *t*-Studenta nie powoduje spadku szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji. Ten wynik jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja parametrów modelu z warunkowym rozkładem *t*-Studenta jest trudniejsza i bardziej czasochłonna.

Podstawowa różnica w wynikach między trzema a dwudziestoma spółkami dotyczy modeli zintegrowanych. Zarówno model zintegrowany, jak i zintegrowany model DCC wypadły zdecydowanie lepiej w rankingu dla dwudziestu aktywów. Ten rezultat może sugerować, że w przypadku większej liczby aktywów wielowymiarowy proces stóp zwrotu nie jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, co jak wiadomo może być związane ze zmianami bezwarunkowych macierzy kowariancji w długim okresie.

Stosowanie jednorównaniowych modeli GARCH oraz szacowanie macierzy korelacji na podstawie rozkładów brzegowych standaryzowanych reszt wydaje się być dopuszczalne tylko w przypadku, gdy warunkowe współczynniki korelacji są stałe w czasie. Przy większej liczbie aktywów wydaje się, że rośnie prawdopodobieństwo, iż warunkowe współczynniki korelacji są zmienne w czasie i konieczne będzie zastosowanie modelu wielorównaniowego.

BIBLIOGRAFIA

- Alexander C., Chibumba A. 1996. Multivariate Orthogonal Factor GARCH, University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.
- Andersen T., Bollerslev T. 1998. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review* 39, 4, 885–905.
- Baba Y., Engle R.F., Kraft D.F., Kroner K.F. 1990. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. maszynopis, Department of Economics, University of California at San Diego.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. 2006. Multivariate GARCH Models: A Survey, *Journal of Applied Econometrics* 21, No. 1, 79–110.
- Bollerslev T. 1990. Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach, *Review of Economics and Statistics* 72, 498–505.
- Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Ding Z., Engle R.F. 2001. Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing, *Academia Economic Papers* 29, 2, 157–184.

- Engle R.F. 1987. Multivariate ARCH with Factor Structures-Cointegration in Variance. Discussion Paper 87, University of California, San Diego.
- Engle R.F. 2002. Dynamic Conditional Correlation — A Simple Class of Multivariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339–350.
- Engle R.F., Kroner K.F. 1995. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Engle R.F., Mezrich J. 1996. GARCH for Groups, *Risk* 9, 8, 36–40.
- Engle R.F., Sheppard K. 2001. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, Mimeo, UCSD.
- Fiszeder P. 2004a. Dynamiczna alokacja aktywów — Model Markowitza, Rynki finansowe — prognozy a decyzje, *Acta Universitatis Lodzianis, Folia Oeconomica*, 177, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Fiszeder P. 2004b. Dynamiczna teoria portfela, *Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia* 34, UMK Toruń.
- Osiewalski J., Pipień M. 2004. Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland, *Journal of Econometrics* 123, 371–391.
- Tse Y.K. 2000. A Test for Constant Correlations in A Multivariate GARCH Model, *Journal of Econometrics* 98, 107–127.
- West K.D., Cho D. 1995. The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility, *Journal of Econometrics* 69, 367–391.

DYNAMICZNE STOCHASTYCZNE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ: ZARYS METODOLOGII BADAŃ EMPIRYCZNYCH¹

RENATA WRÓBEL-ROTTER

Katedra Ekonometrii
Akademia Ekonomiczna w Krakowie
PL 31-150 Kraków, ul. Rakowicka 27
e-mail: ewwrobel@cyf-kr.edu.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Komisji Statystyczno-
Demograficznej Oddziału PAN w Krakowie oraz Polskiego Towarzystwa Statystycznego w dniu
21 lutego 2007 r. przez Renatę Wróbel-Rotter.

ABSTRACT

Renata Wróbel-Rotter, 2007. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: an introduction to
empirical research*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 69–93.

The paper presents general idea of construction and estimation of Dynamic Stochastic General
Equilibrium Models. Models belonging to the class of DSGE combine in one specification
the optimization behavior of consumers and producers with mechanisms that allow to model
the nominal and real rigidities observed at the macroeconomic level. DSGE models are widely
applied by financial institutions as a consequence of their ability to flexibly include and test
alternative economic hypotheses and the existence of estimation methods. The article begins
by reviewing main components of the theoretical model with discussion of the most
important assumptions, which is followed by presentation of methods for solving rational
expectation models and the Bayesian estimation of structural parameters.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

dyanamic Stochastic General Equilibrium model, rational expectations, utility and profit
maximisation, Bayesian inference, Markov Chain Monte Carlo

dynamiczne stochastyczny model równowagi ogólnej, racjonalne oczekiwania, maksymali-
zacja zysku i użyteczności, wnioskowanie bayesowskie, metody Monte Carlo oparte na
łańcuchach Markowa

¹ Praca wykonana w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii Akademii Ekonomicznej
w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestni-
kom seminarium Katedry Ekonometrii za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

1. WSTĘP

Modele równowagi ogólnej są obecnie podstawowymi narzędziami analizy dynamiki głównych zmiennych makroekonomicznych, cykli koniunkturalnych oraz wpływu polityki pieniężnej na sferę realną gospodarki. Coraz częściej we współczesnych badaniach empirycznych wykorzystuje się modele należące do klasy dynamicznych, stochastycznych modeli równowagi ogólnej (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models* — DSGE), spełniających kryteria odpowiedniego zaawansowania teoretycznego i estymacyjnego oraz możliwości implementacji. Modele te odzwierciedlające w swojej strukturze założenia teorii makroekonomii równocześnie bazują na fundamentach mikroekonomicznych opisujących postępowanie producentów i konsumentów, co może być pomocne w analizie długoterminowej ewolucji gospodarki, szczególnie w sytuacjach zmiany sposobu podejmowania decyzji przez decydentów fiskalnych i monetarnych oraz w przypadku, kiedy dane empiryczne charakteryzują się znaczną niepewnością. Ich zastosowanie w bankach centralnych oraz w instytucjach finansowych o charakterze międzynarodowym stało się możliwe dzięki opracowaniu spójnych metod wnioskowania o parametrach modeli oraz rozwojowi metod numerycznych. Zagadnienia specyfikacji i bayesowskiej estymacji modeli DSGE, opis procesów optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych i ich reguł decyzyjnych oraz dyskusja zasadniczych założeń są tematem niniejszego opracowania. Charakter przeglądowy i systematyzujący główne problemy metodologiczne określa ramy niniejszego opracowania, które powinno być traktowane jako wstęp do dalszych badań nad możliwościami zastosowania DSGE w modelowaniu gospodarki polskiej.

2. GENEZA MODELI DSGE

Modele równowagi ogólnej mają za zadanie opisanie gospodarki kraju bądź grupy krajów jako całości, umożliwiając badanie wpływu czynników egzogenicznych i endogenicznych na poziom kluczowych zmiennych makroekonomicznych, określenie determinantów wzrostu gospodarczego, wyjaśnienie fluktuacji makroekonomicznych i cyklu koniunkturalnego, analizę mechanizmu transmisyjnego, opisanie propagacji zakłóceń popytowych, podażowych, technologicznych i strukturalnych, prognozowanie efektów zmian polityki gospodarczej oraz wyjaśnienie persystencji w szeregach danych makroekonomicznych. Termin „dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej” odnosi się do szerokiej klasy modeli makroekonomicznych, które obejmują zarówno neoklasyczne modele wzrostu jak i modele monetarne z nominalnymi i realnymi nieelastycznościami (por. m.in. King i wsp. 1988; Christiano i wsp. 1999, 2005). Należą one do klasy modeli makroekonomicznych o niewielkiej skali podobnie jak wektorowa autoregresja (VAR — Sims, 1980) czy koncepcje związane ze szkołą

Realnego Cyklu Koniunkturalnego i pracami Kydlanda i Prescottta (1982), które powstały w odpowiedzi na krytykę stosowanych do końca lat 70. wielorównaniowych strukturalnych modeli popytowych opracowanych pod kierunkiem Komisji Cowlesa (podsumowanie badań — Fair, 1994). Sposób konstrukcji modeli DSGE pozwala na odparcie głównych zarzutów kierowanych pod adresem modeli popytowych, które koncentrowały się wokół nieodpowiedniego modelowania dynamiki gospodarki, identyfikacji równań behawioralnych oraz formowania oczekiwań podmiotów gospodarczych w odpowiedzi na zmiany polityki gospodarczej (por. m.in. Lucas, 1976).

Obecnie stosowane w praktyce modele makroekonomiczne ujmujące dynamikę całej gospodarki i wywodzące się z teorii ekonomii wyłoniły się w efekcie obserwowanej w literaturze ostatniej dekady (por. np. Lane, 1999) tendencji zmierzającej do opracowania spójnych ram modelowania makroekonomicznego, która doprowadziła do połączenia koncepcji dynamicznych modeli równowagi ogólnej (ang. *Dynamic General Equilibrium* — DGE), zakładających równoważące się rynki oraz racjonalne oczekiwania podmiotów gospodarczych, z koncepcją niedoskonałej konkurencji i nominalnych nieelastyczności występujących w gospodarce (Obstfeld i Rogoff, 1995). W konsekwencji powstałe modele zaliczane są zarówno do nurtu nowej klasycznej syntezy jak i nazywane bywają nowo-keynesowskimi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej (Goodfriend i King, 1997; Rotemberg i Woodford, 1997; Rabanal i Rubio-Ramírez, 2005). Modele te głównie stanowiły koncepcje teoretyczne, które po kalibracji parametrów strukturalnych, wykorzystywano m.in. do porównań rezultatów uzyskanych z modeli wektorowej autoregresji oraz konstrukcji restrykcji ekonomicznych poprawiających zdolności prognostyczne VAR (Malley i wsp., 2005; Lane, 1999; Ingram i Whiteman, 1994). Obserwowane w gospodarce nieprzewidywalne czynniki losowe oraz występowanie innych zakłóceń egzogenicznych spowodowało wprowadzenie do modeli makroekonomicznych dodatkowych licznym stacjonarnych i niestacjonarnych procesów stochastycznych i ukształtowanie się klasy modeli nazywanych w literaturze stochastycznymi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej (Chang i Schorfheide, 2003). Zaliczane są one obecnie do nurtu Nowej Makroekonomii Gospodarki Otwartej (ang. *New Open Economy Macroeconomics* — NOEM, por. np. Bergin, 2003; Lubik i Schorfheide, 2005).

Skonstruowanie układu dynamicznego opisującego gospodarke i jednocześnie wywodzącego się z teorii ekonomii, zawierającego znaczną liczbę niestacjonarnych procesów losowych opisujących ewolucję technologii, zmiennych o charakterze błędzenia losowego oraz nominalnych i realnych opóźnień w dostosowywaniu się cen i płac, okazało się mieć kluczowe znaczenie w opisie persystencji szeregów makroekonomicznych. Opracowanie metod efektywnej estymacji parametrów strukturalnych oraz możliwość elastycznego formułowania i testowania zróżnicowanych hipotez ekonomicznych przesądziło o ich

szerokich możliwościach aplikacyjnych. Model DSGE skonstruowany przez Christiano i wsp. (2005) dla gospodarki zamkniętej uważany jest za pionierski w zakresie budowy średniej wielkości empirycznych systemów służących modelowaniu polityki pieniężnej. Dalsze prace rozwijały DSGE dla gospodarek zamkniętych, następnie wprowadzono założenia gospodarki otwartej, stanowiące obecnie dominujący nurt badań empirycznych. Modele DSGE o większej skali niż pierwotne modele teoretyczne należące do nurtu NOEM, i w większości kalibrowane, znalazły zastosowanie przede wszystkim w bankach centralnych: Erceg, Guerrieri i Gust (2003) model SIGMA skonstruowany dla Federal Reserve Board, Benigno i Thoenissen (2003) dla Bank of England, Coletti i wsp. (1996) i Murchison i wsp. (2004) dla Bank of Canada, Lindé i wsp. (2004) oraz Adolfson i wsp. (2005) dla Riksbank, Kortelainen (2002) dla Bank of Finland oraz m.in. Laxton i Presenti (2003) dla MFW. Zainteresowanie budową modeli opisujących mechanizm transmisyjny oraz ujmujących zarówno krótkookresową jak i długookresową dynamikę gospodarki wynika częściowo z konieczności dostarczenia instytucjom finansowym o znaczeniu globalnym narzędzia umożliwiającego badanie wpływu polityki pieniężnej na zmienne makroekonomiczne oraz częściowo z próby odpowiedzi na pytanie o istnienie i trwałość skutków decyzji pieniężnych w czasie. W obecnym stanie badań modele DSGE wydają się stanowić najlepsze narzędzie umożliwiające odpowiedź na te pytania.

3. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA

Modele DSGE są konstrukcją łączącą i umożliwiającą praktyczną implementację teorii mikroekonomii i makroekonomii oraz wykorzystującą zagadnienia stochastycznego dynamicznego programowania do opisu problemów decyzyjnych reprezentatywnego konsumenta i producenta. Zachowanie podmiotów gospodarczych jest wynikiem stosowania reguł decyzyjnych i rozwiązania zagadnień optymalizacji w czasie, których postać wynika z kształtu preferencji konsumentów, technologii stosowanej przez przedsiębiorstwa oraz innych założeń o strukturze sfery realnej gospodarki. Maksymalizacja użyteczności konsumentów oraz maksymalizacja zysku producentów na poziomie mikroekonomicznym są ujęte w modelu razem z założeniami konstruującymi wewnętrzny mechanizm pozwalający na naśladowanie obserwowanej w szeregach danych makroekonomicznych inercji w reakcji na zmianę warunków zewnętrznych. Niepewność związana z przyszłymi warunkami ekonomicznymi, np. z nominalnymi stopami procentowymi ustalonymi przez bank centralny, czy też z produktywnością czynników produkcji ujmowana jest poprzez uwzględnienie egzogenicznych procesów stochastycznych i zakłóceń strukturalnych (wstrząsów ekonomicznych bądź szoków, ang. *shock*) wpływających na zmianę poziomu technologii oraz generujących nieprzewidziane odchylenia od reguły stopy procentowej

decydenta monetarnego. Cechy charakterystyczne modeli DSGE obejmują ponadto założenia monopolistycznej i doskonałej konkurencji dla ustalonych grup przedsiębiorstw, znaczną liczbę nominalnych i realnych nieelastyczności cen i płac, akumulację kapitału wraz z kosztem dostosowania jego zasobu i kosztami zmiany poziomu inwestycji, występowaniem rynków pracy, kształtowanie się przyzwyczajzeń w konsumpcji, zróżnicowanie sektorów produkcyjnych i prowadzących wymianę z zagranicą, bezpośrednie modelowanie gospodarki zagranicznej i polityki fiskalnej oraz istnienie zmiennej w czasie reguły stopy procentowej. Skonstruowanie modelu dla gospodarki otwartej wymaga dodatkowo bezpośredniego uwzględnienia kursu walutowego oraz zagregowanych zmiennych, charakteryzujących wszystkie gospodarki zagraniczne traktowane jako całość, np. średniej zagranicznej stopy procentowej czy całkowitego popytu na eksport. Najczęściej przyjmowane w modelach wykorzystywanych w praktyce założenia małej gospodarki otwartej powodują, że podmioty krajowe nie mają wpływu na resztę świata a zmienne makroekonomiczne opisujące gospodarke zagraniczną są traktowane w modelu egzogenicznie.

Model DSGE, stanowiąc konstrukcję teoretyczną, ujmującą dynamikę gospodarki, opisuje również jej ewolucję w czasie oraz zmiany na skutek oddziaływania stochastycznych zakłóceń o charakterze zewnętrznym i wewnętrznym, dotyczących kluczowych wielkości wpływających na technologię czy też preferencje konsumentów. Określone grupy podmiotów występujących w modelu, mające w uproszczony sposób odzwierciedlać jednostki funkcjonujące w gospodarce, kierujących się w swoim postępowaniu ustalonymi zagadnieniami optymalizacyjnymi i regułami decyzyjnymi, które po odpowiednim zapisaniu warunków koniecznych optymalizacji wraz z ograniczeniami zasobowymi i warunkami równoważenia się rynków, tworzą równania strukturalne modelu. Standardowo przyjmowane w modelach makroekonomicznych założenia reprezentatywnego konsumenta pozwalają na ujednoczenie zagadnień decyzyjnych, a w szczególnych przypadkach na ich zapisanie w formie jednego programu dynamicznego dla zagregowanej konsumpcji i innych zmiennych, występujących w funkcji użyteczności oraz niekiedy przyjęcie koncepcji społecznego decydenta (ang. *social planner*, Woodford, 2003).

Systemy równań tworzące model DSGE mogą być zarówno kalibrowane jak i estymowane, z uwzględnieniem dodatkowych informacji pochodzących z innych źródeł, np. badań mikroekonomicznych. Analiza zdolności modeli kalibrowanych do opisu stylizowanych faktów z gospodarki USA wskazuje na potencjalne problemy oraz potrzebę stosowania w praktyce metod estymacji parametrów strukturalnych (Söderström i wsp., 2002). Modele DSGE o dużej skali funkcjonujące w instytucjach finansowych jednak najczęściej są kalibrowane (Erceg i wsp., 2005; Laxton i Presenti, 2003; Kortelainen, 2002), stosuje się niekiedy przybliżone metody estymacji, wykorzystujące funkcje odpowiedzi impulsowych (Black i wsp., 1997), rzadziej metodę największej wiarygodności

(Bouakez i wsp., 2002; Moran i Dolar, 2002) oraz wnioskowanie bayesowskie (Smets i Wouters, 2003; Adolfson i wsp., 2005). Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego do estymacji parametrów strukturalnych i parametrów opisujących strukturę stochastyczną modeli DSGE wiąże się z koncepcją bayesowskiej kalibracji (Canova, 1994; DeJong i wsp., 1996; Geweke, 1999) oraz z pracami bezpośrednio prezentującymi możliwości jej praktycznego wykorzystania, z których za pionierską uważa się rozprawę doktorską J. Landon-Lane'a z 1998 roku, (Landon-Lane, 2000) oraz artykuły: DeJong i wsp., 2000; Schorfheide, 2000; Otrok, 2001). Funkcję wiarygodności w modelach DSGE konstruuje się na podstawie danych z kilku bądź kilkunastu zagregowanych szeregów makroekonomicznych, do których należą m.in.: PKB, realny kurs walutowy, realne płace, krótkookresowa stopa procentowa, wskaźnik inflacji i inne wielkości przyjęte do estymacji parametrów strukturalnych. Zwiększenie liczby szeregów czasowych, na których estymowany jest model, może prowadzić do precyzyjniejszego oszacowania jego parametrów.

Główna różnica między DSGE a wcześniejszymi modelami makroekonomicznymi, jak np. Area-Wide Model dla strefy Euro, polega na tym, że parametry i procesy stochastyczne występujące w równaniach strukturalnych są związane z parametrami fundamentalnymi (ang. *deep parameters*), opisującymi preferencje, technologię oraz ograniczenia zasobowe decydentów monetarnych i fiskalnych (Fagan i wsp., 2001). Model łączący parametry formy zredukowanej z parametrami fundamentalnymi, których duża zmienność pod wpływem czynników nominalnych jest uważana za mało prawdopodobną (Pagan, 2001), wydaje się odpowiedni do analizy wariantów polityki pieniężnej i uwzględniać argumenty Lucasa (1976). Mikroekonomiczne podstawy, na których jest konstruowany model, powodują, że bezpośrednio uwzględnia się oczekiwania podmiotów co do kształtowania się przyszłych warunków gospodarczych oraz mechanizmy ustalania się cen i wydatków konsumpcyjnych. Model DSGE rozważa się również w kontekście analizy społecznych konsekwencji alternatywnych scenariuszy polityki pieniężnej i fiskalnej, wykorzystując użyteczność gospodarstw domowych jako miarę dobrobytu społecznego (An i Schorfheide, 2006; Otrok, 2001).

4. ZAGADNIENIA SPECYFIKACJI MODELU

Model DSGE jest konstrukcją teoretyczną, łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje, że wszelkie wielkości opisujące gospodarke i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii oraz struktury procesów stochastycznych, kształtującej jej dynamikę. Ogólny charakter DSGE wskazuje na kilka potencjalnych źródeł jego nieodpowiedniej konstrukcji, mających swoje przyczyny w niepoprawnym określeniu relacji strukturalnych,

preferencji konsumentów i technologii, pominięciu zależności nieliniowych, nieprawidłowej formie procesów egzogenicznych i stochastycznych oraz symetrycznym traktowaniu podmiotów w modelach dla gospodarek otwartych (Lubik i Schorfheide, 2005). Zmniejszenie stopnia niepoprawnej specyfikacji DSGE jest możliwe poprzez zwiększenie liczby zmiennych losowych modelujących zakłócenia strukturalne w modelu zapisanym w postaci systemu racjonalnych oczekiwani (Smets i Wouters, 2003; Lubik i Schorfheide, 2005), lub też wprowadzenie stochastycznych zakłóceń do równania obserwacji, bez nadawania im interpretacji ekonomicznej (Sargent, 1989). Ocena modeli DSGE jest najczęściej dokonywana po ich zapisaniu w formie VAR z odpowiednimi parametrycznymi restrykcjami i analizie ich zgodności z danymi empirycznymi i modelem referencyjnym (Schorfheide, 2000).

Opracowanie formalnych metod estymacji modeli DSGE pozwoliło na empiryczne badania stopnia ich niepoprawnej specyfikacji, które uzasadniają stwierdzenie, że w obecnie stosowanych systemach nie jest tak znaczący jak w poprzedniej generacji kalibrowanych modeli makroekonomicznych. Stopień niezgodności restrykcji, wynikających z mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych, z danymi makroekonomicznymi może być również analizowany w kontekście rozkładu *a priori* i *a posteriori* na gruncie wnioskowania bayesowskiego. Del Negro i Schorfheide (2004) przedstawili propozycję konstrukcji rozkładu *a priori* dla VAR w formie ograniczeń wynikających z teorii ekonomicznej, ujętej przez model DSGE, a następnie Del Negro i wsp. (2005) omówili wpływ ich stopniowego uwalniania na zmianę brzegowej gęstości obserwacji oraz przebieg funkcji odpowiedzi impulsowych. Formalne porównanie brzegowych gęstości obserwacji referencyjnego modelu VAR z rozkładem *a priori* typu Minnesota oraz estymowanego modelu DSGE dla dwóch krajów przedstawili Lubik i Schorfheide (2005), natomiast procedury porównywania zbioru modeli DSGE za pomocą funkcji straty zaproponował Schorfheide (1999, 2000). Omówienie zagadnień polityki pieniężnej w przypadku modeli z pewnym stopniem nieodpowiedniej specyfikacji można znaleźć w pracy Del Negro i Schorfheide (2005), alternatywne ekonometryczne interpretacje modeli DSGE wraz z dyskusją ich założeń prezentuje Geweke (1999).

Obecność potencjalnie niezgodnych z danymi empirycznymi założeń w modelach DSGE nie oznacza ich dyskwalifikacji w świetle VAR, w których duża liczba swobodnych parametrów może prowadzić do znacznej niepewności związanej z wartościami prognozowanymi. Modele VAR nie pozwalają na interpretację dynamiki obserwowanej w szeregach makroekonomicznych w kategoriach zachowania racjonalnych i optymalizujących swoje decyzje podmiotów gospodarczych oraz nie modelują *explicite* wpływu zmian reguł decyzyjnych polityki pieniężnej i fiskalnej na ich zachowanie się oraz kształtowanie oczekiwań. Obecnie rozwijana klasa modeli DSGE wydaje się posiadać własności empiryczne bliskie modelom VAR i jednocześnie pozostaje w pełni uzasadniona

przez teorię makroekonomiczną. Nieliniowe zależności między zmiennymi makroekonomicznymi mogą być w pełni odzwierciedlone przez nieliniowy charakter modeli DSGE, pozwalających równocześnie na ich efektywną estymację, natomiast aproksymacja DSGE liniowymi modelami racjonalnych oczekiwań jest dokonywana w celu uproszczenia obliczeń numerycznych, związanych z konstrukcją funkcji wiarygodności oraz zastosowaniem filtru Kalmana.

5. GOSPODARSTWA DOMOWE

Gospodarstwa domowe podejmują kluczowe decyzje w modelach DSGE, wpływając na kształtowanie się poziomu aktywności w teoretycznej gospodarce krajowej, określając m.in.: podaź pracy, rodzaj konsumpcji, alokację środków pieniężnych między krajowe i zagraniczne aktywa finansowe, które mają związek z oczekiwanymi zmianami kursu walutowego w przypadku gospodarki otwartej — stanowią jedyne źródło kapitału dla przedsiębiorstw krajowych oraz ustalają wielkość jego podaży i inwestycji, warunkową względem danego kosztu dostosowania kapitału (ang. *capital adjustment costs*). Rynek pracy w zależności od sformułowania modelu jest traktowany jako doskonale konkurencyjny w sytuacji przyjęcia założenia jednorodności gospodarstw domowych (Christiano i wsp., 2005; Altig i wsp., 2004), bądź jako monopolistyczny w przypadku ich heterogeniczności, określanej przez niepowtarzalność posiadanych kwalifikacji (Adolfson i wsp., 2005). Modelowanie nominalnych nieelastyczności płac obserwowanych w szeregach makroekonomicznych uzyskuje się po wprowadzeniu mechanizmu Calva (1983) do procesu ich ustalania się w modelu oraz założeniu określania wysokości wynagrodzenia przez konsumentów, opierając się na rozwiązaniu zagadnienia maksymalizacji użyteczności. Mechanizm Calvo (1983) implikuje, że w danym momencie jedynie frakcja gospodarstw domowych rozwiązuje zagadnienie optymalizacyjne, natomiast pozostała część uaktualnia stawkę płacy wykorzystując przyjętą regułę indeksacyjną, zawierającą m.in. bieżący wskaźnik inflacji oraz oczekiwaną inflację w okresie następnym.

Decyzje konsumpcyjne i inwestycyjne gospodarstw domowych są opisywane w czasie przez ciąg identycznych zagadnień maksymalizacji użyteczności, niezmiennych dla każdego ze stanów przyszłości, warunkowych względem danego ciągu ograniczeń budżetowych. Liczba istniejących wiecznie gospodarstw domowych jest unormowana i indeksowa przez $j \in (0, 1)$. Preferencje konsumentów wyrażają się założoną postacią analityczną chwilowej funkcji użyteczności $U(\cdot)$, której argumentami są najczęściej: wielkość konsumpcji $C_{j,t}$, podaź pracy $h_{j,t}$ oraz wartość realnych zasobów pieniężnych $q_{j,t}$. Continuum gospodarstw domowych, podejmując decyzje maksymalizuje warunkową względem ograniczenia budżetowego, oczekiwaną, nieskończoną sumę zdyskontowanych użyteczności:

$$E_0^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_{j,t}, h_{j,t}, q_{j,t}; \xi_t^j), \quad (1)$$

gdzie: E_0 jest operatorem wartości oczekiwanej, warunkowej względem zbioru informacji posiadanej przez konsumenta w momencie początkowym, β jest wspólnym dla całej gospodarki czynnikiem dyskontującym, $C_{j,t}$ oznacza agregat CES dóbr krajowych i importowanych nabywanych przez j -te gospodarstwo domowe w celach konsumpcyjnych i inwestycyjnych, natomiast ξ_t^j jest wektorem egzogenicznych procesów stochastycznych. Obejmuje on wszystkie zmienne losowe opisujące stochastyczną zmienność czynników realnych, wpływających na argumenty funkcji użyteczności, do których można zaliczyć zmienność w gustach gospodarstw domowych związaną z poziomem konsumpcji czy też ilością oferowanej pracy. Obecność procesów stochastycznych o charakterze realnym w funkcji użyteczności ma istotne znaczenie dla kształtowania się wartości zmiennych w równowadze modelu i określenie np. nominalnej stopy procentowej odpowiedniej dla zapewnienia stabilności cen (Woodford, 2003). Argumenty oraz postać analityczna funkcji $U(\cdot)$, zależą od przyjętych w modelu założeń; najczęściej są to funkcje o stałej awersji do ryzyka i ich uogólnienia (ang. *constant rate of risk aversion*, Lubik i Schorfheide, 2005; Erceg i wsp., 2005; Lindé i wsp., 2004; Walque i Wouters, 2004; Benigno i Thoenissen, 2003; Smets i Wouters, 2003), ich połączenia z postaciami logarytmicznymi (Adolfson i wsp., 2005) oraz funkcje CES (Kortelainen, 2002). Możliwa jest również alternatywna specyfikacja założeń modelowych poprzez uchylenia warunku nieskończonego horyzontu istnienia gospodarstw domowych (Kortelainen, 2002).

Funkcje użyteczności w modelach wykorzystywanych w praktyce bankowej najczęściej uwzględniają dodatkowe cechy opisujące kształtowanie się decyzji konsumentów. Poprzez wprowadzenie zmiennej $C_{j,t-1}$, modeluje się inercję zachowań konsumpcyjnych oraz zasadę kształtowania przyzwyczajęń (ang. *habit formation*), oznaczającą zmianę poziomu i rodzaju własnej konsumpcji na skutek systematycznego dostosowywania jej do obserwowanej konsumpcji innych gospodarstw domowych, według zasady „dorównać Kowalskim” (ang. *catching up with the Joneses*). Obecność w funkcji użyteczności realnych zasobów pieniężnych modeluje koszty transakcyjne związane z utrzymywaniem pewnego zasobu pieniądza nie przynoszącego dochodu oraz w sposób pośredni ujmuje nieelastyczności występujące w gospodarce, związane z koniecznością zawierania transakcji (ang. *transactions frictions*). O funkcji użyteczności $U(\cdot)$ przyjmujemy standardowe neoklasyczne założenia: dla dowolnej realizacji wektora zakłóceń ξ_t jest to funkcja wklęsła i silnie rosnąca względem konsumpcji oraz dodatkowo addytywnie separowalna względem podaży pracy i zasobów pieniężnych. Kontrowersje związane z nazewnictwem

funkcji $U(.)$ — niekiedy nazywana jest ona „niebezpośrednią” funkcją użyteczności — dyskusja konsekwencji uchylenia poszczególnych założeń oraz ich wpływ na istnienie i określoność równowagi w modelu została zawarta m.in. w pracy Woodford (2003).

Ciąg ograniczeń budżetowych reprezentatywnego gospodarstwa domowego w kolejnych momentach t zawiera dodatkową informację na temat kształtowania się przepływów aktywów w modelowanej gospodarce. Ograniczenie budżetowe najczęściej jest zapisywane w formie prezentującej sposoby alokacji zasobów (lewa strona) oraz wskazującej źródła ich pochodzenia (prawa strona):

$$M_{j,t} + B_{j,t} + S_{j,t} \leq W_{j,t} + D_{j,t} - T_{j,t} \quad (2)$$

gdzie:

$M_{j,t}$ — całkowita ilość gotówki,

$B_{j,t}$ — nominalna wartość portfela krajowych i zagranicznych aktywów finansowych,

$S_{j,t}$ — całkowite wydatki gospodarstwa domowego na krajowe i zagraniczne dobra konsumpcyjne i inwestycyjne,

$W_{j,t}$ — całkowite dochody z pracy,

$D_{j,t}$ — dochody z portfela aktywów,

$T_{j,t}$ — podatki.

Modele wykorzystywane w analizie polityki pieniężnej posiadają znacznie bardziej rozbudowane ograniczenia budżetowe, uwzględniające ponadto: niepewność związaną z przychodem od zagranicznych aktywów finansowych, odpowiednie stopy podatkowe, koszt kapitału, koszt zmiany wielkości i stopnia wykorzystania kapitału, wydatki inwestycyjne gospodarstw domowych, transfery i inne zmienne wynikające z przyjętych założeń modelowych, odpowiadających sferze realnej gospodarki (por. np.: Adolfson i wsp., 2005; Erceg i wsp., 2005; Murchison i wsp., 2004; Benigno i Thoenissen, 2003; Smets i Wouters, 2003; Laxton i Presenti, 2003; Kortelainen, 2002; Black i wsp., 1997).

Ograniczenie budżetowe zapisywane jest podczas optymalizacji w formie równości ze względu na założenie racjonalności działania gospodarstw domowych oraz przyjmowane są dwa dodatkowe warunki brzegowe: istnieje granica zadłużenia (eliminująca schemat Ponzi) oraz restrykcja związana z akumulacją bogactwa (Woodford, 2003). Rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji międzyokresowej funkcji użyteczności (1) przy ciągu ograniczeń budżetowych (2) prowadzi do warunków pierwszego rzędu w formie równań Eulera, obrazujących optymalne decyzje gospodarstwa domowego dla każdego momentu w zakresie ustalania wielkości konsumpcji, podaży pracy i kapitału, portfela aktywów oraz pozostałych zmiennych w zależności od specyfikacji, wykorzystywane następnie do estymacji parametrów fundamentalnych modelu. Założenia reprezentatywnego gospodarstwa domowego powodują, że w stanie stabilnym wybory doko-

nywane przez gospodarstwa domowe będą się pokrywały, co umożliwi odpowiednią agregację i transformację decyzji dokonywanych na poziomie mikroekonomicznym w decyzje na poziomie całej gospodarki oraz opisanie kształtowania się zmiennych makroekonomicznych.

6. SEKTOR PRODUKCYJNY

Sektor produkcyjny w modelach DSGE stanowią przedsiębiorstwa wytwarzające produkty pośrednie z nakładów pracy i kapitału, przetwarzane następnie w jednorodne dobra końcowe przez producentów finalnych (Christiano i wsp., 2005). Niekiedy wprowadza się do modelu dodatkowe przedsiębiorstwa, których celem jest jedynie przekształcenie niejednorodnej podaży pracy, oferowanej przez monopolistyczne gospodarstwa domowe, w homogeniczny czynnik produkcji, umożliwiając równocześnie modelowanie nominalnych opóźnień w reakcji płacy na stochastyczne zmiany warunków zewnętrznych poprzez mechanizm Calvo (1983; zob. Adolfson i wsp., 2005)). Produkt finalny jest sprzedawany gospodarstwom domowym w celach inwestycyjnych i konsumpcyjnych oraz przedsiębiorstwom prowadzącym wymianę z zagranicą w przypadku gospodarki otwartej. Producent finalny, działający na rynku doskonale konkurencyjnym, wykorzystuje technologię opisaną standardowo indeksem Dixita i Stiglitz (1977), formułującym agregat CES, o stałym efekcie skali produkcji i malejącej produktywności krańcowej, z continuum produktów pośrednich:

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_{it}^{\frac{1}{\lambda_t}} di \right]^{\lambda_t}, \quad (3)$$

gdzie: $1 \leq \lambda_t \leq \infty$, $t = 1, \dots, T$, oznacza proces stochastyczny determinujący, możliwie zmienne w czasie, współczynniki agregacji. Ceny nakładów czynników produkcji, ustalane przez monopolistycznych producentów dóbr pośrednich, oraz cena produktu, wynikająca z warunku zerowych zysków ekonomicznych, są dla producentów finalnych egzogeniczne. Technologia produkcji o stałym efekcie skali oraz przyjęcie założeń doskonałej konkurencji nie pozwalają na określenie optymalnej wielkości produkcji producenta finalnego. Funkcje popytu na dobra pośrednie, wynikające z zagadnienia maksymalizacji zysku przy danej technologii, cenach produktu i nakładów, równoważnie uzyskuje się rozwiązując zagadnienie minimalizacji kosztu całkowitego. Opisują one zapotrzebowanie producenta finalnego na poszczególne dobra pośrednie w zależności od ich ceny, charakteryzują się stałą elastycznością cenową popytu i jednorodnością stopnia pierwszego względem produktu finalnego. Cena dobra final-

nego ma postać indeksu CES i jest wyprowadzana po uwzględnieniu w funkcji produkcji zapotrzebowania na dobra pośrednie.

Sektor wytwarzający dobra pośrednie stanowi w modelu continuum przedsiębiorstw, indeksowanych przez $i \in (0, 1)$, działających według zasad konkurencji monopolistycznej, bez możliwości wejścia i wyjścia z rynku. Przedsiębiorstwa pośrednie nabywają pracę i wynajmują kapitał od gospodarstw domowych na rynku doskonale konkurencyjnym, wytwarzają niejednorodne dobra pośrednie, ustalają ich cenę i sprzedają je producentom finalnym. Technologia każdego z producentów pośrednich opisana jest przez funkcję produkcji Cobb'a i Douglasa o stałym efekcie skali i podlega stochastycznemu wzrostowi w czasie w modelu Adolfson i wsp., 2005):

$$Y_{i,t} = z_t^{1-\alpha} \varepsilon_t K_{i,t}^\alpha H_{i,t}^{1-\alpha} - z_t \varphi,$$

gdzie: α oznacza parametr funkcji produkcji, z_t ujmuje permanentny i egzogeniczny wzrost poziomu technologii, ε_t jest kowariancyjnie stacjonarną zmienną losową modelującą stochastyczne zakłócenia technologiczne, $H_{i,t}$ oznacza jednorodny nakład pracy oraz $K_{i,t}$ jest ilością kapitału bezpośrednio wykorzystywanego w procesie produkcji. Całkowity zasób kapitału fizycznego może się różnić od rzeczywistych jego nakładów, ze względu na czynione w niektórych modelach założenia zmiennego jego wykorzystania (Adolfson i wsp., 2005; Baxte i Farr, 2005). Funkcja produkcji może również zawierać wielkość $z_t \varphi$, wzrastającą pod wpływem akumulacji postępu technologicznego, służącą zapewnieniu zerowych zysków w stanie stabilnym modelu (Christiano i wsp., 2005; Adolfson i wsp., 2005).

Optymalizując decyzje dotyczące zapotrzebowania na czynniki produkcji przedsiębiorstwa pośrednie rozwiązują zagadnienie minimalizacji kosztu całkowitego produkcji, warunkowe względem zadanych egzogenicznie przez producentów dóbr finalnych funkcji popytu na dobra pośrednie, oraz egzogenicznie ustalanych przez gospodarstwa domowe cen kapitału i pracy. Swoje zobowiązania płacowe regulują z funduszy własnych oraz zaciągając kredyty, co prowadzi do określenia związku między nominalną stopą procentową w gospodarce a kosztami pracy w przedsiębiorstwie. Odpowiednio sformułowane zagadnienie minimalizacji kosztu przez przedsiębiorstwo i -te w momencie t , zapisane w postaci funkcji Lagrange, ma następującą postać w modelu Adolfson i wsp. (2005):

$$\min_{K_{i,t}, H_{i,t}} I_t R_t^k H_{i,t} + R_t^k K_{i,t} + \lambda_t P_{i,t} \left[Y_{i,t} - z_t^{1-\alpha} \varepsilon_t K_{i,t}^\alpha H_{i,t}^{1-\alpha} + z_t \varphi \right],$$

gdzie: R_t^k oznacza całkowitą nominalną stopę procentową: po której wynajmowany jest kapitał, tzn. zapisaną w postaci $(1 + r_t)$, gdzie: r_t jest właściwą stopą procentową, I_t jest nominalnym wynagrodzeniem jednostki pracy $H_{i,t}$

R_t^f oznacza całkowitą efektywną stopę procentową płaconą przez przedsiębiorstwa, odzwierciedlającą założenie o finansowaniu ułamka i_t należności z funduszy zewnętrznych, która jest związana z nominalną stopą procentową w gospodarce R_{t-1} zależnością: $R_t^f \equiv v_t R_{t-1} + 1 - v_t$. Mnożnik Lagrange $\lambda_t P_{i,t}$ jest interpretowany jako nominalny koszt krańcowy dobra pośredniego, zaś λ_t — jako koszt realny.

Obserwowane w gospodarce opóźnienia w reakcji cen na zmianę warunków zewnętrznych ujmuje się w modelu poprzez wprowadzenie określonych mechanizmów kształtowania się cen w skali całej gospodarki, przy utrzymaniu założenia optymalizacji decyzji na poziomie mikroekonomicznym. Najczęściej uwzględnia się mechanizm Calvo (1983) w procesie określania cen dóbr pośrednich, który oznacza przyjęcie ograniczenia częstotliwości optymalizacji decyzji w czasie dla grupy przedsiębiorstw pośrednich (inne schematy ustalania cen i ich wpływ na zdolność modelu do opisu danych empirycznych przedstawia Laforte, 2005). Szansa swobodnego i niezależnego od przeszłości ustalenia ceny przez podmiot zadana jest przez rozkład Bernoulliego, którego parametr $\xi_{i,t}$ określa w każdym momencie ułamek jednostek mogących dokonać reoptymalizacji ceny, natomiast $(1 - \xi_{i,t})$ jest frakcją, która uaktualnia cenę według ustalonej reguły indeksacyjnej, korygującej ją o wskaźnik inflacji z okresu bieżącego π_t oraz o przyszły cel inflacyjny π_{t+1}^c . Nowa cena sprzedaży P_t^{new} w momencie t , uwzględniająca ryzyko braku możliwości jej optymalizacji w przyszłości, otrzymywana jest w wyniku maksymalizacji oczekiwanej terażniejszej wartości przyszłych zysków, warunkowej względem egzogenicznej funkcji popytu (Adolfson i wsp., 2005):

$$\max_{P_t^{new}} E_t \sum_{q=0}^{\infty} (\beta \xi_{i,t})^q u_{i,t+q} \left[(\pi_t \dots \pi_{t+q+1})^{\kappa_i} (\pi_{t+1}^c \dots \pi_{t+q}^c)^{1-\kappa_i} P_t^{new} Y_{i,t+q} - MC_{i,t+q} (Y_{i,t+q} + Z_{t+q} \phi) \right],$$

gdzie: $(\beta \xi_{i,t})^q u_{i,t+q}$ jest stochastycznym czynnikiem dyskontującym, $u_{i,t+q}$ jest krańcową użytecznością nominalnego dochodu w okresie $(t + q)$ dla gospodarstw domowych, traktowaną egzogenicznie przez przedsiębiorstwa pośrednie, κ_i jest parametrem indeksacji, zaś $MC_{i,t}$ oznacza nominalny koszt krańcowy produkcji. Konstrukcja zagadnienia maksymalizacyjnego zapewnia spełnienie wymogu zerowych zysków ekonomicznych w stanie stabilnym, natomiast warunki pierwszego rzędu są wykorzystywane do sformułowania zagregowanej krzywej Phillipisa w gospodarce. Nowa cena sprzedaży w sytuacji braku zakłóceń stochastycznych jest wyrażona jako marża (ang. *markup*) na wartości oczekiwanej kosztu krańcowego produkcji, warunkowej względem zbioru informacji w momencie bieżącym, natomiast w pozostałych przypadkach jest ona ustalana jako funkcja oczekiwanej średniej ważonej przyszłych nominalnych kosztów krańcowych (Christiano i wsp., 2005).

W rozbudowanych modelach dla gospodarek otwartych analogiczne zagadnienia optymalizacyjne ustalania cen sprzedaży są rozwiązywane przez przedsiębiorstwa prowadzące wymianę zagraniczną. Continuum eksporterów nabywa jednorodny dobro finalne na rynku krajowym, które transformuje w continuum zróżnicowanych dóbr eksportowych sprzedawanych następnie zagranicznym gospodarstwom domowym (Adolfson i wsp., 2005). Modelowa transformacja dobra polega na nadaniu mu odpowiedniej marki (ang. *brand naming*), powodującej że każde z przedsiębiorstw jest jedynym dostawcą danego produktu na rynku międzynarodowym. Najczęściej dopuszcza się również istnienie niepełnego dostosowania cenowego na skutek zmian kursu walutowego (ang. *incomplete exchange rate pass-through*) oraz krótkookresowych odchyień od prawa jednej ceny, zarówno w sektorze eksportowym, jak i importowym, modelowanych poprzez mechanizm Calvo (1983; zob. Christiano i wsp., 2005; Adolfson i wsp., 2005; Adolfson, 2002; Ambler i wsp., 2003). Cena dobra eksportowanego jest ustalana po uwzględnieniu ceny dobra krajowego, określającej koszt krańcowy produkcji, relacji ceny własnej do zagregowanej ceny eksportowej, wynikającej z funkcji popytu na dane dobro oraz niepewności co do możliwości przyszłej jej optymalizacji. Eksporterzy, którzy w danym momencie nie mogą rozwiązać zagadnienia maksymalizacji zysku, przy danej funkcji popytu na swoje produkty, ustalają nową cenę sprzedaży poprzez indeksowanie dotychczasowej, wykorzystując wskaźnik inflacji dóbr eksportowych z okresu bieżącego oraz krajowy cel inflacyjny (Adolfson i wsp., 2005). Sektor importowy najczęściej składa się z dwóch kategorii przedsiębiorstw nabywających jednorodny produkt na rynku międzynarodowym i przekształcający go odpowiednio w dobra konsumpcyjne i inwestycyjne, sprzedawane następnie gospodarstwom domowym na rynku krajowym. Cena sprzedaży dóbr jest ustalana podobnie jak w przypadku eksporterów poprzez rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji zysku i uwzględnienie schematu Calvo (1983).

7. POLITYKA PIENIĘŻNA I RÓWNOWAGA

Modele DSGE wykorzystywane są w praktyce głównie do wspomagania decyzji monetarnych, dlatego polityka fiskalna jest modelowana w sposób zwięzły, najczęściej poprzez zapisanie ograniczenia budżetowego państwa i specyfikację procesów egzogenicznych dla wydatków budżetowych, bądź też poprzez ich opis systemem VAR wraz ze stopami podatkowymi (Ambler i wsp., 2003; Adolfson i wsp., 2005). Funkcję decydenta monetarnego w modelach DSGE pełni bank centralny, którego działanie opisywane jest za pomocą ustalonej reguły decyzyjnej (ang. *instrument rule*), dostosowującej poziom krótkoterminowej stopy procentowej do odchyień wskaźnika inflacji od założonego, zmieniającego się w czasie, celu inflacyjnego, luki popytowej i realnego kursu walutowego. Poli-

tyka pieniężna w modelach DSGE ma wpływ na zmienne realne najczęściej poprzez kanał stopy procentowej, kursu walutowego oraz kapitału wykorzystywanego w przedsiębiorstwach (ang. *working capital channel*). Alternatywne specyfikacje reguł decyzyjnych wraz z omówieniem ich wpływu na gospodarkę można znaleźć m.in. w pracy Woodford (2003), dyskusję zagadnień wygładzania stopy procentowej przedstawili m.in. Belaygorod, Chib i Dueker (2004)), natomiast szczegółowe omówienie kanałów transmisyjnych polityki monetarnej m.in. Mishkin (1996). Specyfikacja reguły decyzyjnej i uwzględnienie w niej dodatkowych procesów stochastycznych umożliwia badanie wpływu zakłóceń związanych z realizacją polityki pieniężnej na zmienne realne. Luka popytowa występująca w równaniu reguły decyzyjnej banku centralnego może być mierzona odchyleniami obserwowanej produkcji od wartości wynikającej z trendu w gospodarce, maksymalnej produkcji możliwej do uzyskania, bądź jako odchylenia od wielkości produkcji przy giętkich cenach (Adolfson i wsp., 2005; Smets i Wouters, 2003).

Określenie stanu równowagi w modelu DSGE wymaga uwzględnienia warunków jednoczesnego równoważenia się rynków dóbr i rynków finansowych, ograniczeń zasobowych gospodarki oraz warunków pierwszego rzędu, wynikających z zagadnień optymalizacyjnych. Jeśli popyt zgłaszany przez gospodarstwa domowe, decydena fiskalnego oraz eksporterów jest zrównoważony przez krajową produkcję dobra finalnego oraz import inwestycyjny i konsumpcyjny, to istnieje równowaga na krajowym rynku dóbr. Rynek finansowy znajduje się w równowadze, jeśli popyt na kredyty zgłaszany przez przedsiębiorstwa w celu realizacji ich zobowiązań płacowych jest równy podaży depozytów przez gospodarstwa domowe, powiększonej o ilość pieniądza wprowadzonego do gospodarki przez bank centralny. Rynek zagranicznych obligacji w modelach dla gospodarek otwartych równoważy się, jeśli saldo zobowiązań i należności przedsiębiorstw eksportujących i importujących są równe saldu obligacji, jakie gospodarstwa domowe są skłonne utrzymywać.

Model DSGE dostarcza narzędzia pozwalającego na opisanie kształtowania się w czasie równowagi gospodarki, mającej charakter dynamiczny i określanej jako zbiór procesów stochastycznych, spełniających odpowiednie układy równań, przy założonym kształtowaniu się procesów egzogenicznych i ewolucji pozostałych zmiennych stanu. Ścieżkę równowagi opisują ilościowo ograniczenia zasobowe i budżetowe, warunki pierwszego rzędu zagadnień optymalizacyjnych, reguły decyzyjne banku centralnego oraz pozostałe równania tworzące nieliniowy system, zawierający opóźnione i oczekiwane wartości zmiennych makroekonomicznych, procesy stochastyczne oraz inne wielkości występujące w modelu. Trajektoria równowagi może być również zapisana w postaci wektora stanów s_t , nieobserwowalnego dla procesów ukrytych, którego ewolucję w czasie określa równanie przejścia, o parametrach związanych z parametrami fundamentalnymi modelu, natomiast dynamikę kształtu-

je ciąg egzogenicznych, niezależnych zmiennych losowych (innowacji). Równania strukturalne modelu DSGE tworzą nieliniowy system racjonalnych oczekiwań, który w zależności od założeń może nie posiadać stabilnej trajektorii równowagi, można wskazać jedno rozwiązanie (ang. *determinacy*) bądź kilka (ang. *indeterminacy*). Omówienie problemów istnienia lokalnej i globalnej równowagi dynamicznej oraz jej określoność w rozważanej klasie modeli jest analizowana m.in. w pracach Woodford (2003), Lubik i Schorfheide (2003; 2004), Benhabib i wsp. (2001), Beyer i Farmer (2004).

8. ROZWIĄZANIE MODELU

Nieliniowy system racjonalnych oczekiwań nie ma najczęściej znanego rozwiązania analitycznego, dlatego przed estymacją wykorzystuje techniki numeryczne do określania rozwiązania modelu, które tworzy funkcja przejścia (ang. *policy function*), warunkowa względem wektora parametrów strukturalnych modelu θ :

$$s_t = f(s_{t-1}, \varepsilon_t^s; \theta), \quad (4)$$

gdzie ε_t^s jest wektorem innowacji związanych z procesami egzogenicznymi opisującymi zakłócenia strukturalne w modelu. Najwcześniej zaproponowana grupa metod rozwiązywania model racjonalnych oczekiwań zakładała liniową aproksymację funkcji przejścia i ich stosowanie wydaje się być uzasadnione w przypadku, kiedy istnieją przesłanki do założenia liniowej ewolucji gospodarki w czasie. Metody te, wymagające linearyzacji równań strukturalnych modelu DSGE, powstały w odpowiedzi na trudności z implementacją i problemy z wielowymiarowością bezpośredniej techniki rozwiązywania zagadnienia optymalizacyjnego społecznego decydenta, tzw. metody iterowania funkcji wartości (ang. *value function iteration*), zachowując jednocześnie odpowiednie własności asymptotyczne.

Estymacja modeli DSGE najczęściej bazuje na metodach wykorzystujących funkcję wiarygodności i do ich rozwiązania w praktyce używa się metod liniowych. Prowadzą one do reprezentacji DSGE w liniowej przestrzeni stanów, ograniczającej problemy numeryczne związane z implementacją oraz umożliwiającą wykorzystanie filtru Kalmana do wyznaczenia funkcji wiarygodności. Ze zbioru dostępnych metod najbardziej znany wydaje się algorytm Blancharda i Kahna (1980), wykorzystywany m.in. przez banki centralne: Bouakez i wsp. (2002) i Dib (2001), wraz z algorytmami dostarczającymi technik jego numerycznej realizacji, zaproponowanymi przez Andersona i Moore'a (1985) dla modeli w Systemie Rezerwy Federalnej, i następnie uogólnionymi przez Andersona (2000), które stosują m.in. Murchison i wsp. (2004) oraz Adolfson i wsp. (2005); ponadto nieco rzadziej wykorzystuje się technikę bazującą na dekompozycji QZ

zaproponowaną przez Simsa (2002), metodę nieokreślonych współczynników (ang. *undetermined coefficients*) dla zmiennych w postaci logarytmów i poziomów (m.in. Uhlig, 1990; Taylor i Uhlig, 1999) oraz liniowo-kwadratowe aproksymacje Kydlanda i Prescottta (1982).

Nieliniowe metody rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań umożliwiają precyzyjniejszą aproksymację funkcji przejścia i obejmują m.in. technikę perturbacji, zaproponowaną przez Judd i Guu (1997), którą następnie rozwinęli Judd (2002) i Juillard (2003), oraz metody rzutowania: skończonych elementów i spektralne (por. np. An, 2005 oraz literatura cytowana). Metoda perturbacji polega na rozwinięciu funkcji przejścia w szereg Taylora wokół niestochastycznego, statycznego stanu stabilnego modelu, a następnie wyznaczaniu współczynników aproksymacji. Metoda ta zapewnia lepsze przybliżenie funkcji przejścia niż metody liniowe, m.in. poprzez uwzględnienie momentów wyższych rzędów rozkładów zakłóceń strukturalnych, i może być stosowana w szerszej klasie modeli (np. w gospodarkach nie będących Pareto optymalnymi). Własności metody perturbacji oraz porównania z alternatywnymi technikami rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań zostały omówione m.in. przez: Aruoba i wsp. (2006) oraz An (2005). Aproksymacja wyższego rzędu funkcji przejścia jest możliwa również poprzez rozwinięcie drugiego rzędu warunków równowagi modelu (An, 2005).

Estymacja parametrów modelu DSGE wymaga połączenia konstrukcji teoretycznej, powstałej z przyjętej teorii ekonomicznej, z danymi empirycznymi, którą określa się za pomocą odpowiedniej postaci analitycznej równania obserwacji (ang. *measurement equation*). Wiąże ono poszczególne elementy nieobserwowalnego wektora stanu s_t z wektorem obserwowanych zmiennych makroekonomicznych y_t :

$$y_t = g(s_t, \varepsilon_t^*; \theta), \quad (5)$$

gdzie ε_t^* są egzogenicznymi, niezależnymi zmiennymi losowymi, interpretowanymi jako błąd pomiaru danych oraz ujmującymi potencjalną misspecyfikację modelu (Lubik i Schorfheide, 2005); zakłada się standardowo niezależność ε_t^* oraz ε_t . Liniowa postać funkcji $f(\cdot)$ w równaniu przejścia oraz funkcji $g(\cdot)$ w równaniu obserwacji powoduje, że otrzymany układ równań można traktować jako liniowy system przestrzeni stanów, bezpośrednio wykorzystywany do konstrukcji funkcji wiarygodności. W obecnie stosowanych w praktyce modelach DSGE regułą jest przyjmowanie liniowej postaci równania obserwacji oraz zakładanie rozkładów normalnych dla zakłóceń stochastycznych, występujących w postaci strukturalnej modelu oraz w równaniach obserwacji ze względu na mniejszy stopień skomplikowania numerycznego aplikacji. Metody rozwiązywania i estymacji modelu w przypadkach ogólnych opracowali Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004; 2006).

9. ZAGADNIENIA ESTYMACJI I INFORMACJI WSTĘPNEJ

Analiza bayesowska dostarcza narzędzia wnioskowania o parametrach strukturalnych modelu DSGE, oceny niepewności związanej z ich estymacją oraz metody określania błędu popełnianego przy szacowaniu interesujących badacza charakterystyk gospodarki. Możliwość konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa wybranej funkcji parametrów fundamentalnych modelu, procesów stochastycznych i pozostałych wielkości odzwierciedlających mechanizmy gospodarcze ma kluczowe znaczenie w ocenie stopnia wiarygodności rezultatów badań oraz określeniu skutków podejmowanych decyzji, takich jak: odpowiedzi banku centralnego na zmianę kursu walutowego, opisanie zachowania konsumentów i producentów czy analizie cyklu koniunkturalnego i propagacji zakłóceń ekonomicznych. Bayesowskie podejście do estymacji parametrów strukturalnych modeli DSGE wykorzystuje kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł decyzyjnych, który jest następnie szacowany na podstawie danych pochodzących ze zagregowanych szeregów czasowych, pozwalając równocześnie na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych. Jednoczesna estymacja kompletnej reprezentacji modelu dynamicznego pozwala na uniknięcie problemów endogeniczności zmiennych, występujących w regule decyzyjnej banku centralnego, napotykanych przy stosowaniu uogólnionej metody momentów dla wyznaczania współczynników pojedynczych równań. Estymacja bayesowska bazuje na funkcji wiarygodności generowanej przez model DSGE w odróżnieniu od kalibracji i pierwszych technik szacowania parametrów strukturalnych, ustalających ich wartości po minimalizacji odległości wybranych funkcji odpowiedzi impulsowych z modelu DSGE od analogicznych wielkości w identyfikowalnym modelu VAR (Rotemberg i Woodford, 1997; Murchison i wsp., 2004; Christiano i wsp., 2005).

Bayesowskie metody estymacji dostarczają spójnych metod wnioskowania o parametrach strukturalnych w sytuacji potencjalnej misspecyfikacji i braku identyfikowalności modelu. Model ekonometryczny nie jest identyfikowalny, jeśli różne parametryzacje, mające różną interpretację ekonomiczną, prowadzą do tego samego rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji (są obserwacyjnie równoważne), natomiast misspecyfikacja związana jest z zagadnieniem uznania danego modelu za właściwy proces generujący obserwacje. Geweke (1999) przedstawił alternatywne ekonometryczne interpretacje modeli DSGE: silną, związaną z metodą największej wiarygodności, słabą spotykaną w literaturze traktującej o technikach kalibracji oraz minimalną, pozwalającą na porównywanie modeli zarówno między sobą jak również w stosunku do modelu referencyjnego. Określenie warunków identyfikowalności DSGE jest trudniejsze niż w przypadku modeli VAR bądź liniowych modeli o równaniach współzależnych ze względu na nieliniowość związku między parametrami strukturalnymi a reprezentacją w przestrzeni stanów

formy zredukowanej (4) i (5), określającej łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwacji. Modele racjonalnych oczekiwań i DSGE są identyfikowalne przy założeniu odpowiednich rozkładów *a priori* oraz struktury procesów egzogenicznych (Lubik i Schorfheide, 2004; Beyer i Farmer, 2004). Metody estymacji wykorzystujące podejścia z niepełną informacją (uogólniona metoda momentów bądź metoda estymacji poprzez porównywanie funkcji odpowiedzi impulsowych) mogą powodować występowanie ukrytych problemów identyfikacyjnych, ze względu na pominięcie podczas estymacji części założeń dotyczących pozostałych równań bądź procesów stochastycznych modelu. Specyfikacja pełnego układu założeń, konstrukcja funkcji wiarygodności, uwzględnienie informacji spoza próby poprzez rozkład *a priori* oraz jednoczesna estymacja systemu równań pozwalają na zapewnienie identyfikowalności modelu i istnienie rozkładu *a posteriori* (Lubik i Schorfheide, 2005).

Na gruncie bayesowskim wnioskowania o parametrach strukturalnych oraz określonych ich funkcjach dokonuje się poprzez wyznaczenie rozkładów brzegowych z łącznego rozkładu *a posteriori*. Łączny rozkład *a posteriori* wektora parametrów oraz zmiennych ukrytych $p(\theta_i; \gamma, M_i)$, warunkowy względem *i*-tej specyfikacji M_i , jest otrzymywany ze statystycznego modelu bayesowskiego na podstawie wzoru Bayesa:

$$p(\theta_i; \gamma, M_i) = \frac{p(\gamma; \theta_i, M_i) p(\theta_i; M_i)}{p(\gamma; M_i)},$$

gdzie iloczyn łącznego rozkładu wektora obserwacji $\gamma = (\gamma_1', \dots, \gamma_T)'$, określającego gęstość próbkową $p(\gamma; \theta_i, M_i)$ oraz gęstości *a priori* $p(\theta_i; M_i)$, definiuje statystyczny model bayesowski, natomiast $p(\gamma; M_i)$ oznacza brzegową gęstość obserwacji w *i*-tej specyfikacji: $p(\gamma; M_i) = \int p(\gamma; \theta_i, M_i) p(\theta_i; M_i) d\theta_i$ (Zellner, 1971; Osiewalski, 1991; O'Hagan, 1994). Po zaobserwowaniu wektora γ , gęstość wektora obserwacji $p(\gamma; \theta_i, M_i)$ rozpatrujemy jako funkcję parametrów θ_i przy danych obserwacjach, czyli rozważamy funkcję wiarygodności postaci: $l(\theta_i; \gamma, M_i) = p(\gamma; \theta_i, M_i)$. Gęstość rozkładu *a posteriori* jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności $l(\theta_i; \gamma, M_i)$ i rozkładu *a priori*:

$$p(\theta_i; \gamma, M_i) \propto l(\theta_i; \gamma, M_i) p(\theta_i; M_i).$$

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów i innych zmiennych w modelu zawiera wszystkie dostępne o nich informacje, pozwalając na wnioskowanie o ocenach punktowych i niepewności związanej z wybranymi funkcjami parametrów, poprzez odpowiednie rozkłady brzegowe. Estymacja bayesowska modeli równowagi ogólnej prowadzi do elastycznego uwzględnienia informacji o funkcjonowaniu gospodarki uzyskanej z badań mikroekonomicznych. Znajomość przeciętnego

czasu trwania kontraktów placowych, preferencji konsumentów w zakresie podaży pracy oraz prawdopodobnego przedziału zmienności innych wielkości pozwala na ich uwzględnienie poprzez rozkład *a priori*, którego rozproszenie można interpretować jako odzwierciedlenie stopnia wiarygodności wiedzy wstępnej. Subiektywne przekonania badacza dotyczące zachowań grup podmiotów gospodarczych w modelu, wyrażone w rozkładzie *a priori*, są zawsze modyfikowane przez funkcję wiarygodności, co pozwala interpretować różnice między wnioskowaniem *a priori* i *a posteriori* również w kategoriach rozbieżności między danymi mikroekonomicznymi i danymi z szeregów makroekonomicznych. Niska wstępna wiedza o kształtowaniu się parametrów strukturalnych modelu bądź jej całkowity brak oznacza w praktyce przyjęcie dla nich nieinformacyjnych rozkładów *a priori* powodujących, że wnioskovanie *a posteriori* opiera się głównie na informacjach zawartych w funkcji wiarygodności. Alternatywnie do podejścia bayesowskiego w niewielkich modelach DSGE, zarówno liniowych jak i nieliniowych, stosowano do estymacji metodę największej wiarygodności, której własności omawiają m.in. Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004, 2005, 2006; Fernández-Villaverde i wsp., 2006).

Metody wnioskowania bayesowskiego dostarczają ponadto formalnego narzędzia służącego porównywaniu konkurencyjnych modeli DSGE poprzez ich prawdopodobieństwa *a posteriori* (Landon-Lane, 2000; Schorfheide, 2000; Del Negro i Schorfheide, 2004). W zbiorze alternatywnych statystycznych modeli bayesowskich, $M = \{M_1, \dots, M_m\}$, dla danego wektora obserwacji y , możemy określić prawdopodobieństwo *a posteriori* i -tego modelu, korzystając ze wzoru Bayesa:

$$P(M_i; y) = \frac{p(y; M_i) P(M_i)}{\sum_{j=1}^m p(y; M_j) P(M_j)},$$

gdzie θ_i jest wektorem parametrów strukturalnych w każdym z konkurencyjnych modeli DSGE, natomiast $P(M_i)$ jest prawdopodobieństwem *a priori* danej specyfikacji, opisującej subiektywne przekonania badacza co do możliwości opisu wektora obserwacji przez ten model. Model w którym rozkład *a priori* jest scentrowany w obszarach przestrzeni parametrów dla których funkcja wiarygodności przyjmuje niskie wartości będzie mniej prawdopodobny *a posteriori* niż ten sam model z bardziej rozproszonym rozkładem *a priori*, przy założeniu jednakowych szans *a priori* każdej ze specyfikacji. Zgodność informacji wstępnej z funkcją wiarygodności prowadzi do najwyższego prawdopodobieństwa *a posteriori*. Bayesowskie porównywanie modeli umożliwia również eliminację wpływu prawdopodobieństw $P(M_i)$ poprzez rozważenie ilorazu szans *a posteriori* par modeli, zdefiniowanego przez iloczyn czynnika Bayesa oraz ilorazu szans *a priori*:

$$\frac{P(M_s; y)}{P(M_q; y)} = \frac{p(y; M_s)}{p(y; M_q)} \times \frac{P(M_s)}{P(M_q)}$$

Czynnik Bayesa B_{sq} , określony przez iloraz brzegowych gęstości wektora obserwacji, mierzy relatywną moc wyjaśniającą modeli M_s oraz M_q i ujmuje informacje w jakim stopniu obserwacje potwierdzają model M_s w porównaniu z modelem M_q ; $B_{sq} > 1$ oznacza wskazanie przez obserwacje, że model M_s jest bardziej adekwatny do ich opisu (Jeffreys, 1961).

Metody wnioskowania bayesowskiego mogą również zostać zastosowane do bezpośredniego łączenia wiedzy z konkurencyjnych specyfikacji o kształtowaniu się wybranej funkcji parametrów strukturalnych modelu i procesów stochastycznych, opisujących interesującą badacza wielkość makroekonomiczną Δ , np. wskaźnik się inflacji (Jacobson i Karlsson, 2002). Funkcja gęstości uśrednionego rozkładu *a posteriori* Δ jest średnią ważoną gęstości *a posteriori* Δ w każdym z modeli:

$$p(\Delta; y) = \sum_{i=1}^m p(\Delta; y, M_i) P(M_i; y),$$

gdzie wagi $p(M_i; y)$ są określone przez prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli. Strona numeryczna aplikacji modeli DSGE realizowana jest z wykorzystaniem technik Monte Carlo opartych na łańcuchach Markowa, generujących losową próbkę z łącznego rozkładu *a posteriori*, na podstawie której oblicza się rozkłady brzegowe interesujących charakterystyk modelowanej gospodarki oraz niekiedy Monte Carlo z funkcją ważności (DeJong i wsp., 2000; An i Schorfheide, 2006 oraz literatura cytowana). Metody Monte Carlo są stosowane zarówno do aproksymacji brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów jak i w porównaniach modeli DSGE oraz VAR (m.in. Del Negro i wsp., 2004).

10. PODSUMOWANIE

Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej są obecnie jednym z głównych narzędzi stosowanych przez instytucje finansowe do analizy mechanizmu transmisyjnego polityki pieniężnej oraz badania cykli koniunkturalnych w gospodarkach. Stanowią one konstrukcję łączącą nominalne nieelastyczności cen i płac obserwowane w szeregach zagregowanych danych makroekonomicznych z optymalizacyjnym zachowaniem podmiotów gospodarczych, charakterystycznym dla poziomu mikroekonomicznego. Opracowane w ostatnich latach metody estymacji parametrów strukturalnych modeli DSGE, możliwość ich uzasadnienia na gruncie modeli autoregresyjnych oraz łatwość formułowania

i testowania hipotez ekonomicznych zarówno dla gospodarek zamkniętych jak i otwartych przesądziły o coraz szerszym ich wykorzystaniu praktycznym. W zakresie dotyczącym polityki pieniężnej pozwalają one na elastyczne testowanie kanałów mechanizmu transmisyjnego, stopnia dostosowania się cen do zmian kursu walutowego oraz analizę propagacji zakłóceń ekonomicznych. W obecnie wykorzystywanych przez instytucje finansowe modelach DSGE coraz częściej odchodzi się od technik kalibracji parametrów strukturalnych na rzecz ich formalnej estymacji, uwzględniającej pełną informację. Bayesowskie metody estymacji dostarczają spójnych metod wnioskowania o parametrach modelu DSGE oraz pozostałych, interesujących z ekonomicznego punktu widzenia wielkościach, pozwalając równocześnie na włączenie do procesu estymacji dostępnej decydentowi monetarnemu wiedzy, pochodzącej zarówno z badań mikroekonomicznych i innych analiz podmiotów gospodarczych jak i zawartych w funkcji wiarygodności. Modele DSGE pozwalają na formalną estymację i ocenę niepewności związaną z parametrami fundamentalnymi, specyfikacją procesów stochastycznych oraz kształtowaniem się dynamiki modelu.

BIBLIOGRAFIA

- Adolfson M. 2002. *Incomplete exchange rate pass-through and simple monetary policy rules*. Sveriges Riksbank, Working Paper Series 149.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. 2005. *Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass-through*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 15.
- Altig D.E., Christiano L.J., Eichenbaum M., Lindé J. 2004. *Firm-specific capital, nominal rigidities, and the business cycle*, Federal Reserve Bank of Cleveland, Working Paper 16.
- Ambler S., Dib A., Rebei N. 2003. *Nominal rigidities and exchange rate pass-through in a structural model of a small open economy*, Bank of Canada Working Paper 29.
- An S. (2005). *Bayesian estimation of DSGE models: Lessons from second-order approximations*, manuscript, University of Pennsylvania.
- An S., Schorfheide F. 2006. *Bayesian analysis of DSGE models*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, Working Paper 5.
- Anderson G. 2000. *A reliable and computationally efficient algorithm for imposing the saddle point property in dynamic models*, manuscript, Federal Reserve System.
- Anderson G.S., Moore G. (1985). *A linear algebraic procedure for solving linear perfect foresight models*, Economic Letters 17.
- Aruoba S.B., Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2006. *Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies*, Journal of Economic Dynamics and Control 30.
- Baxte M., Farr D.D. 2005. *Variable capital utilization and international business cycles*, Journal of International Economics 65.
- Benhabib J., Schmitt-Grohé S., Uribe M. 2001. *Monetary policy and multiple equilibria*, American Economic Review 91.
- Benigno G., Thoenissen C. 2003. *Equilibrium exchange rates and supply side performance*, Economic Journal 113.
- Bergin P.R. 2003. *Putting the „New Open Macroeconomics” to a test*, Journal of International Economics 60.

- Beyer A., Farmer R.E.A. 2004. *On the indeterminacy of New-Keynesian economics*, European Central Bank, Working Paper 323.
- Black R., Cassino V., Cassino A., Hansen E., Hunt B., Rose D., Scott A. 1997. *The forecasting and policy system: the core model*, Reserve Bank of New Zealand, Research Paper 43.
- Blanchard O.J., Kahn C.M. 1980. *The solution of linear difference models under linear expectations*, *Econometrica* 48.
- Bouakez H., Cardia E., Ruge-Murcia F.J. 2002. *Habit formation and the persistence of monetary shocks*, Bank of Canada Working Paper 27.
- Calvo G. 1983. *Staggered prices in a utility-maximizing framework*, *Journal of Monetary Economics* 12.
- Canova F. 1994. *Statistical inference in calibrated models*, *Journal of Applied Econometrics* 9.
- Canova F. 2002. *Validating monetary DSGE models through VARs*, manuscript, Universitat Pompeu Fabra, LBS i CEPR.
- Chang Y., Schorfheide F. 2003. *Labour supply shifts and economic fluctuations*, *Journal of Monetary Economics* 50.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C. 1999. *Monetary policy shocks: What have we learned and to what end?*, [w:] *Handbook of Macroeconomics* 1A, M. Woodford i J. Taylor (red.), Amsterdam–New York–Oxford.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C. 2005. *Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy*, *Journal of Political Economy* 113.
- Coletti D., Hunt B., Rose D., Tetlow R. 1996. *The dynamic model: QPM*, manuscript, Bank of Canada.
- DeJong D.N., Ingram B.F., Whiteman C.H. 1996. *A Bayesian approach to calibration*, *Journal of Business Economics and Statistics* 14.
- DeJong D.N., Ingram B.F., Whiteman C.H. 2000. *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, *Journal of Econometrics* 98.
- Del Negro M., Schorfheide F. 2004. *Priors from General Equilibrium models for VARs*, *International Economic Review* 45.
- Del Negro M., Schorfheide F. 2005. *Monetary policy analysis with potentially misspecified models*, European Central Bank, Working Paper Series 475.
- Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R. 2005. *On the fit and forecasting performance of New-Keynesian models*, European Central Bank, Working Paper Series 491.
- Dib A. 2001. *An estimated Canadian DSGE model with nominal and real rigidities*, Bank of Canada Working Paper 26.
- Dixit A.K., Stiglitz J. 1977. *Monopolistic competition and optimum product diversity*, *American Economic Review* 67.
- Erceg C.J., Guerrieri L., Gust C. 2005. *SIGMA: A New open economy model for policy analysis*, *International Finance Discussion Papers* 835.
- Fagan G., Henry J., Mestre R. 2001. *An Area-Wide model (AWM) for the Euro Area*, European Central Bank, Working Paper Series 42.
- Fair R. 1994. *Testing Macroeconomic Models*, Cambridge, Harvard University Press.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2004. *Estimating nonlinear dynamic equilibrium economies: A likelihood approach*.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2005. *Estimating dynamic equilibrium economies: Linear versus nonlinear likelihood*, *Journal of Applied Econometrics* 20.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2006. *Estimating macroeconomic models: A likelihood approach*, manuscript, University of Pennsylvania, NBER, CEPR i Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Santos M. 2006. *Convergence properties of the likelihood of computed dynamic models*, *Econometrica* 74.
- Geweke J. 1999. *Computational experiments and reality*, manuscript, University of Minnesota.
- Goodfriend M., King R. 1997. *The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy*, NBER *Macroeconomic Annual* 12.

- Ingram B.F., Whiteman C.H. 1994. *Supplanting „Minnesota” prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors*, Journal of Monetary Economics 34.
- Jacobson T., Karlsson S. 2002. *Finding good predictors for inflation: A Bayesian model averaging approach*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 148.
- Jeffreys H. 1961. *Theory of Probability*, Oxford University Press, London.
- Judd K.L. 2002. *Perturbation methods with nonlinear changes of variables*, Mimeo, Hoover Institution.
- Judd K.L., Guu S.M. 1997. *Asymptotic methods for aggregate growth models*, Journal of Economic Dynamics and Control 21.
- Juillard M. 2003. *Solving Stochastic Dynamic Equilibrium models: A k-order perturbation approach*, manuscript, CEPREMAP i University Paris 8.
- King R., Plosser C., Rebelo S. 1988. *Production, growth and business cycles: I and II*, Journal of Monetary Economics 21.
- Kortelainen M. 2002. *EDGE: a model of the Euro Area with applications to monetary policy*, Bank of Finland Studies E:23.
- Kydland F., Prescott E. 1982. *Time to build and aggregate fluctuations*, Econometrica 50.
- Laforte J.F. 2005. *Pricing models: A Bayesian DSGE approach for the US Economy*, manuscript, Federal Reserve System.
- Landon-Lane J. 2000. *Evaluating real business cycle models using likelihood methods*, manuscript, The University of New South Wales.
- Lane P.R. 1999. *The New Open Economy Macroeconomic: A survey*, CEPR Discussion Paper 2115.
- Laxton D., Pesenti P. 2003. *Monetary rules for small, open, emerging economies*, manuscript, International Monetary Fund, Federal Reserve Bank of New York i NBER.
- Lindé J., Nessén M., Söderström U. 2004. *Monetary policy in an estimated open-economy model with imperfect pass-through*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 18.
- Lubik T., Schorfheide F. 2003. *Computing sunspot equilibria in linear rational expectations models*, Journal of Economic Dynamics & Control 28,
- Lubik T., Schorfheide F. 2004. *Testing for indeterminacy: An application to US monetary policy*, American Economic Review 94.
- Lubik T., Schorfheide F. 2005. *A Bayesian Look at New Open Economy Macroeconomics*, manuscript, Johns Hopkins University i University of Pennsylvania.
- Lucas R.E.Jr. 1976. *Econometric policy evaluation: a critique*, [w:] *The Phillips Curve and Labor Markets*, K. Brunner and A.H. Meltzer (red.), Amsterdam–North-Holland.
- Malley J.R., Muscatelli V.A., Woitek U. 2005. *Real business cycles, sticky wages or sticky prices? The impact of technology shocks on US manufacturing*, European Economic Review 49.
- Mishkin F.S. 1996. *The channels of monetary transmission: Lessons for monetary policy*, NBER Working Paper 5464.
- Moran K., Dolar V. 2002. *Estimated DGE models and forecasting accuracy: A preliminary investigation with Canadian Data*, Bank of Canada Working Paper 18.
- Murchison S., Rennison A., Zhu Z. 2004. *A structural small open-economy model for Canada*, Bank of Canada Working Paper 4.
- O’Hagan A. 1994. *Bayesian Inference*, Edward Arnold, London.
- Obstfeld M., Rogoff K. 1995. *Exchange rate dynamics Redux*, Journal of Political Economy 103.
- Osiewalski J. 1991. *Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorodnaniowych modeli ekonometrycznych*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Monografie, nr 100, Kraków.
- Otrok C. 2001. *On measuring the welfare cost of business cycles*, Journal of Monetary Economics 47.
- Pagan A. 2001. *Report on modeling and forecasting at the Bank of England*, manuscript, Bank of England.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J.F. 2005. *Comparing New Keynesian models of the Business cycle: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Rotemberg J., Woodford M. 1997. *An optimization based econometric framework for the evaluation of monetary policy*, NBER Macroeconomic Annual 12.

- Sargent T.J., 1989. *Two models of measurements and the investment accelerator*, Journal of Political Economy 97.
- Schorfheide F. 1999. *A unified econometric framework for the evaluation of DSGE models*, Penn Institute for Economic Research, Working Paper 7.
- Schorfheide F. 2000. *Loss function based evaluation of DSGE models*, Journal of Applied Econometrics 15.
- Sims C.A. 1980. *Macroeconomics and reality*, Econometrica 48.
- Sims C.A. 2002. *Solving linear rational expectations models*, Computational Economics 20.
- Smets F., Wouters R. 2003. *An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model of the Euro Area*, Journal of the European Economic Association 1.
- Söderström U., Söderlind P., Vredin P. 2002. *Can a calibrated New-Keynesian model of monetary policy fit the facts?*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 147.
- Taylor J.B., Uhlig H. 1990. *Solving nonlinear stochastic growth models: A comparison of alternative solution methods*, Journal of Business and Economic Statistics 8.
- Uhlig H. 1999. *A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily*, [w:] *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, R. Marimón i A. Scott (red.), Oxford University Press.
- Walque G., Wouters R. 2004. *An open economy DSGE model linking the Euro Area and the US economy*, manuscript, National Bank of Belgium.
- Woodford M.M. 2003. *Interest and Prices, Foundations of a Theory of Monetary Policy* Princeton University Press.
- Zellner A. 1971. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, J. Wiley (red.), New York.

AN APPROACH TO MEASURING THE RELATION BETWEEN RISK AND RETURN. BAYESIAN ANALYSIS FOR WIG DATA

MATEUSZ PIPIEŃ

Katedra Ekonometrii
Akademia Ekonomiczna w Krakowie
PL 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27
e-mail: eepipien@cyf-kr.edu.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych PAN w dniu 3 kwietnia 2007 przez autora.

ABSTRACT

Mateusz Pipień. *An approach to measuring the relation between risk and return. Bayesian analysis for WIG data.* Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 95–117.

The main goal of this paper is an application of Bayesian inference in testing the relation between risk and return of the financial time series. On the basis of the Intertemporal CAPM model, proposed by Merton (1973), we built a general sampling model suitable in analysing such relationship. The most important feature of our model assumptions is that the possible skewness of conditional distribution of returns is used as an alternative source of relation between risk and return. Thus, pure statistical feature of the sampling model is equipped with economic interpretation. This general specification relates to GARCH-In-Mean model proposed by Osiewalski and Pipień (2000).

In order to make conditional distribution of financial returns skewed we considered a constructive approach based on the inverse probability integral transformation. In particular, we apply the hidden truncation mechanism, two approaches based on the inverse scale factors in the positive and the negative orthant, order statistics concept, Beta distribution transformation, Bernstein density transformation and the method recently proposed by Ferreira and Steel (2006).

Based on the daily excess returns of WIG index we checked the total impact of conditional skewness assumption on the relation between return and risk on the Warsaw Stock Market. Posterior inference about skewness mechanisms confirmed positive and decisively significant relationship between expected return and risk. The greatest data support, as measured by the posterior probability value, receives model with conditional skewness based on the Beta distribution transformation with two free parameters.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE:

bayesian model comparison, Bayes factors, GARCH models, skewness, fat tails
wnioskowanie bayesowskie, czynnik Bayesa, GARCH, skośność, grube ogony

1. INTRODUCTION

The relationship between risk and return constitutes the foundation of financial economics. Numerous papers have investigated this trade-off testing the functional dependence of excess return on the level of risk, both measured by conditional expectation and conditional variance of aggregate wealth. According to Merton (1973), given risk aversion among investors, when investment opportunity set is constant, there is a positive relationship between expected excess return and the level of risk. Hence, it is possible to express the risk in terms of expected premium generated.

Historically, authors have found mixed empirical evidence concerning the relationship. In some cases a significant positive relationship can be found, in others it is insignificant and also some authors report it as being significantly negative. For instance, using monthly U.S. data French, Schwert and Stambaugh (1987) and also Campbell and Hentschel (1992) found a predominantly positive but insignificant relationship. Glosten, Jagannathan and Runkle found a negative and significant relationship on the basis of Asymmetric-GARCH model, instead of commonly used GARCH-in-Mean framework; see Engle, Lilien and Robins (1987). Scruggs (1998) summarises the empirical evidence of considered relationship.

Recent empirical work offers some resolutions to the conflicting results in the literature. Including into Merton (1973) Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM) an additional risk factor, measured by long term government bond returns, Scruggs (1998) restores a positive relationship between risk and return. Pastor and Stambaugh (2001) considered a possibility of structural breaks in the risk-return relationship. Brandt and Kang (2004) investigated lead-lag correlations and find a strong negative dependence between the contemporaneous innovations and both the conditional mean and conditional variance of excess returns. Ghysels, Santa-Clara and Valkanov (2006) find a positive risk aversion coefficient using a mixed data sampling (MIDAS) approach to estimating conditional dispersion. Campbell and Hentschel (1992), Guo and Whitelaw (2003) and Kim, Morley and Nelson (2004) find a positive relationship when volatility feedbacks are incorporated. Also many authors investigated a nonlinear relationship between market risk and return, finding some evidence confirming positive risk premium; see Pagan and Hong (1990) for nonparametric approach and for other methods: Backus and Gregory (1993), Whitelaw (2000) and Linton and Perron (2003).

The main goal of this paper is an application of Bayesian model comparison, based on the posterior probabilities, in testing the relation between risk and excess return of the financial time series. We revisited ICAPM model in order to investigate the empirical importance of the skewness assumption of the conditional distribution of excess returns. On the basis of the ICAPM model, we built a general sampling model suitable in estimating risk premium. The most

important feature of our model assumptions is that the possible skewness of conditional distribution of returns is used as an alternative source of relation between risk and return. Thus, pure statistical feature of the sampling model is equipped with economic interpretation. This general specification relates to GARCH-In-Mean model proposed by Osiewalski and Pipień (2000). In order to make conditional distribution of financial returns skewed we considered a constructive approach based on the inverse probability integral transformation. In particular, we apply the hidden truncation mechanism, two approaches based on the inverse scale factors in the positive and the negative orthant, order statistics concept, Beta distribution transformation, Bernstein density transformation and the method recently proposed by Ferreira and Steel (2006).

Based on the daily excess returns of index of the Warsaw Stock Exchange we checked the total impact of conditional skewness assumption on the relation between return and risk on the Warsaw Stock Market. On the basis of the posterior probabilities and posterior odds ratios, we test formally the explanatory power of competing, conditionally fat tailed and asymmetric GARCH processes. Additionally we present formal Bayesian inference about conditional asymmetry in all competing specifications on the basis of the skewness measure defined by Arnold and Groenveld (1995).

2. CREATING ASYMMETRIC DISTRIBUTIONS

The unified representation of univariate skewed distributions that we study is based on the inverse probability integral transformation.

The family $IP = \{\varepsilon, \varepsilon_s; \Omega \rightarrow R\}$, with the representative density $s(.|\theta, \eta_p)$ is called the skewed version of the symmetric family I (of random variables with unimodal symmetric density $f(.|\theta)$ and distribution function F , such that the only one modal value is localised at $x = 0$) if s is given by the form:

$$s(x|\theta, \eta_p) = f(x|\theta) \cdot p(F(x|\theta)|\eta_p), \text{ for } x \in R. \quad (1)$$

As seen from (1) the asymmetric distribution $s(.|\theta, \eta_p)$ is obtained from $f(.|\theta)$ by applying the density $p(.|\eta_p)$ as a weighting function. The resulting family IP is parameterised by two vectors, θ and η_p , where first is strictly inherited from the symmetric family I , while η_p contains specific information about the skewing mechanism. The most important feature of (1) is that the distributions s and f are identical if and only if $p(.|\eta_p)$ is the density of the uniform distribution over the unit interval; i.e. $s = f$ iff $p(y|\eta_p) = 1$, for each $y \in (0, 1)$.

Within the general form (1) several classes of distributions P have been imposed on some specific families of symmetric random variables. The first approach of making distribution $F(.|\theta)$ skewed applied hidden truncation ideas.

The skew-Normal distribution proposed by Azzalini (1985) constitutes the first explicit formulation of such a skewing mechanism. In general this approach assumes, that:

$$s(x|\theta, \gamma_2) = 2 \cdot f(x|\theta) \cdot F(\gamma_2 \cdot x|\theta), \text{ for } x \in R, \quad (2)$$

where $\gamma_2 \in R$ is the only one parameter which governs the skewing mechanism; $\eta_p = (\gamma_2)$. In this case $p(y|\gamma_2) = 2 \cdot F(\gamma_2 \cdot F^{-1}(y)|\theta)$, for $y \in (0, 1)$, and hence in (2) positive and negative values of γ_2 define right and left skewed distributions. Since, for each $y \in (0, 1)$, it is true that $p(y|0) = 2 \cdot F(0 \cdot F^{-1}(y)|\gamma_2 = 0) = 1$, the case $\gamma_2 = 0$ leads to symmetry in (2).

As an alternative Jones (2004) proposed to apply the family of Beta distributions in order to define $p(.|\eta_p)$. This is a formal application of the distribution of order statistics in skewing the family of random variables I . In particular $s(x|\theta, \gamma_3)$ can be defined as follows:

$$s(x|\theta, \gamma_3) = f(x|\theta) \cdot Be(F(x|\theta) | \gamma_3, \gamma_3^{-1}), \text{ for } x \in R, \quad (3)$$

where $Be(y|a, b)$ is the value of the density function of the Beta distribution with parameters $a > 0$ and $b > 0$, calculated at $y \in (0, 1)$. Since $Be(.|1, 1)$ defines the density of the uniform distribution, we obtain, that for $\gamma_3 = \gamma_3^{-1} = 1$ the density s is symmetric. In (3) there is still only one parameter $\gamma_3 > 0$, which defines the type of asymmetry. If $\gamma_3 > 1$, then s is right asymmetric, while $\gamma_3 < 1$ constitutes skewness to the left.

The family IP of skewed distributions proposed in (3) can be generalised, by incorporating Beta distribution with two free parameters $a > 0$ and $b > 0$. This leads to the following form of s :

$$s(x|\theta, \eta_p) = f(x|\theta) \cdot Be(F(x|\theta) | a, b), \text{ for } x \in R. \quad (4)$$

In this case the vector $\eta_p = (a, b)$, which governs skewness, contains two parameters. If $a = b = 1$ we retrieve symmetry, while $a < b$ or $a > b$ defines left or right skewness. It can be shown that the skewing mechanism (4) in case, when I is the family of Student- t distributions yields skewed Student- t family proposed by Jones and Faddy (2003).

Another method for introducing skewness into an unimodal distribution is based on the inverse scale factors on the left and on the right side of the mode of the density $f(.|\theta)$. Investigating this concept Fernández and Steel (1998) proposed skewed Student- t family of distributions with the density $f_{skv}(.|\nu, 0, 1, \gamma_1)$ defined as follows:

$$f_{skv}(x|0, 1, \nu, \gamma_1) = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_1^{-1}} \{ f_t(x \cdot \gamma_1 | 0, 1, \nu) \cdot I_{(-\infty, 0)} + f_t(x \cdot \gamma_1^{-1} | 0, 1, \nu) \cdot I_{(0, +\infty)} \},$$

where $f_i(x|\mu, h, \nu)$ denotes the value of the density function of the Student- t distribution with $\nu > 0$ degrees of freedom, modal parameter $\mu \in R$ and inverse precision $h > 0$, calculated at $x \in R$. The approach studied by Fernández and Steel (1998) can be applied to any family I of symmetric distributions by defining in (1) the following skewing mechanism for each $y \in (0, 1)$:

$$p(y|\gamma_1) = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_1^{-1}} \frac{\{f(\gamma_1 \cdot F^{-1}(y))I_{(0,0.5)} + F(\gamma_1^{-1} \cdot F^{-1}(y))I_{(0.5,1)}\}}{f(F^{-1}(y))}, \quad (5)$$

for $\gamma_1 > 0$. The resulting density $s(\cdot|\theta, \gamma_1)$ is symmetric if $\gamma_1 = 1$, while $\gamma_1 > 1$ or $\gamma_1 < 1$ make distribution right or left skewed.

In the next approach we apply Bernstein densities, which are convex discrete mixtures of appropriate densities of Beta distribution. For posterior inference of such a family of distributions see Petrone and Wasserman (2002). The following form of p constitutes flexible skewing mechanism:

$$p(y|w_1, \dots, w_m) = \sum_{j=1}^m w_j Be(y|j, m-j+1), \quad y \in (0, 1),$$

where $m > 0$, $w_j > 0$, $w_1 + \dots + w_m = 1$.

The resulting $s(\cdot|\theta, \eta_p)$ takes the form:

$$s(x|\theta, \eta_p) = f(x|\theta) \cdot \sum_{j=1}^m w_j Be(F(x|\theta) | j, m-j+1), \quad \text{for } x \in R, \quad (6)$$

where $\eta_p = (w_1, \dots, w_{m-1})$, $w_j \in (0, 1)$ for $j = 1, \dots, m-1$, and in (6) $w_m = 1 - w_1 - \dots - w_{m-1}$. Equal weights $w_j = m^{-1}$ lead to the symmetry in (6). However, in general the resulting skewed densities (6) are often multimodal, especially for large values of m . The main disadvantage of skewing mechanism based on (6) is, that we lose some regularities of constructed family IP in favor of total flexibility in data fit.

Ferreira and Steel (2006) considered a constructive representation of the univariate skewness by defining a mechanism which does not depend on F , does not change location of the modal value and also keep the moment structure unchanged. Starting from a general form of skewing mechanism:

$$p(y|\gamma_4) = 1 + l(\gamma_4)[g(y|\gamma_4) - 1], \quad \gamma_4 \in R, \quad (7)$$

they proposed an approach of deriving appropriate $l(\cdot)$ and $g(\cdot|\gamma_4)$ meeting required properties. In particular, according to Ferreira and Steel (2006), it is possible to consider:

$$I(\gamma_4) = \frac{\left[\frac{2}{\pi} \arctan(2\gamma_4/5) \right]^3}{1 - 2 \int_0^{0.5} g(t|\gamma_4) dt},$$

where $g(y|\gamma_4) = h^*(y|\gamma_4)I_{[0, 0.5]} + [2 - h^*(y - 0.5|\gamma_4)I_{[0.5, 1]}]$, for h^* of the following form:

$$h^*(y|\gamma_4) = h \left(\frac{\exp(\gamma_4 y - 1)}{2(\exp(0.5\gamma_4) - 1)} \right),$$

with h defined as a polynomial of order 2; $h(z) = -32z^3 + 24z^2$. Such a particular solution defines skewing mechanism equipped with properties restricted to the postulates of the construct. Ferreira and Steel (2006) do not present exhaustive characterisation of skewing mechanism (7), making their individual proposition focused only on modelling distributional skewness around the mode.

The next skewing mechanism is another example of an application of the inverse scale factors idea. Four years before Fernández and Steel (1998) published their skewed version of the t distribution, Hansen (1994) proposed the following simple generalisation of the Student- t density (normalized to have unit variance):

$$s(x|0, 1, \nu, \gamma_5) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bx+a}{1-\gamma_5} \right)^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} & \text{if } x < -\frac{a}{b} \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bx+a}{1+\gamma_5} \right)^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} & \text{if } x \geq -\frac{a}{b}, \end{cases} \quad (8)$$

where $\nu > 2$, $\gamma_5 \in (-1; 1)$, $a = 4 \cdot \gamma_5 \cdot c(\nu - 2)/(\nu - 1)$, $b^2 = 1 + 3 \cdot \gamma_5^2 - a^2$ and

$$c = \frac{\Gamma(0.5(\nu + 1))}{\Gamma(0.5\nu) \sqrt{\pi(\nu - 2)}}.$$

If $\gamma_5 = 0$, then the function $s(x|0, 1, \nu, 0)$ represents the density of the symmetric Student- t distribution with $\nu > 2$ degrees of freedom, zero mode and unit variance, while $\gamma_5 \in (-1, 0)$ and $\gamma_5 \in (0, 1)$ enable for left and right asymmetry respectively. Here we will show, that the Hansen skewed Student- t density can be treated within (1) as a result of imposing a particular skewing

mechanism based on the inverse scale factors on the left and on the right side of the mode. Let consider a random variable Z_s with the density of the following form:

$$f_s(x|0, 1, \nu, \gamma_s) = \{ f_{st}(x/(1-\gamma_s)|0, 1, \nu) \cdot I_{(-\infty, 0)}(x) + f_{st}(x/(1 + \gamma_s)|0, 1, \nu) \cdot I_{(0, +\infty)}(x) \}, \\ \gamma_s \in (-1; 1), \nu > 2,$$

where $f_{st}(\cdot|0, 1, \nu)$ is the density of the Student- t distribution with $\nu > 2$ degrees of freedom, zero mean and unit variance. The mean E and the variance V of Z_s are given as follows:

$$E(Z_s) = a = 4 \gamma_s c(\nu-2)/(\nu-1)$$

$$V(Z_s) = b^2 = 1 + 3 \gamma_s^2 - a^2,$$

where:

$$c = \frac{\Gamma(0.5(\nu + 1))}{\Gamma(0.5) \sqrt{\pi(\nu - 1)}}.$$

It can be shown that the skewed density proposed by Hansen (1994) is the density of the random variable X_s obtained by standardisation of Z_s :

$$X_s = \frac{Z_s - a}{b}.$$

Consequently Hansen (1994) idea can be adapted to any symmetric and unimodal density f (with distribution function F) by imposing the following skewing mechanism:

$$p(y|\gamma_s) = \frac{f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1-\gamma_s}\right) I_{(0;0.5)}(y) + f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1+\gamma_s}\right) I_{(0.5;1)}(y)}{f(F^{-1}(y))}, \text{ for } \gamma_s \in (-1; 1). \quad (9)$$

In spite of a very similar form of mechanism defining Fernández and Steel (1998) skewed Student- t to the one related to Hansen (1994), both generalisations lead to different classes of asymmetric distributions with Student-type tails. But some equivalences can be discovered. In particular, for each $\gamma_s \in (-1, 1)$, there exist only one $\gamma_2^* > 0$ (namely $\gamma_2^* = \{(1 + \gamma_s)/(1 - \gamma_s)\}^{0.5}$) such, that mechanisms $p(\cdot|\gamma_s)$ in (9) and $p(\cdot|\gamma_2^*)$ in (5) generate skewed densities with the same ratio of the probability mass on the left and on the right side of the mode.

In the next section we present basic model framework, which is a starting point in generating conditionally heteroscedastic models for daily returns. In order to create the set of competing specifications, we make use of all presented skewing mechanisms.

3. BASIC MODEL FRAMEWORK AND COMPETING SKEWED CONDITIONAL DISTRIBUTIONS

Let denote by x_j the value of a stock or a market index at time j . The excess return on x_j , denoted by y_j , is defined as the difference between the logarithmic daily return on x_j , in percentage points ($r_j = 100 \ln[x_j/x_{j-1}]$) and the risk free interest rate (denoted by r_f^j), namely $y_j = r_j - r_f^j$. The voluminous literature focused on examination the relationship between risk and return bases on the Intertemporal Capital Asset Pricing Model, proposed by Metron (1973). According to the assumptions of Merton (1973) theory, expected excess return E is proportional to the standard deviaton D (both conditional with respect to the information set at time j , denoted by ψ_{j-1}):

$$E(y_j|\psi_{j-1}) = \alpha^* D(y_j|\psi_{j-1}). \quad (10)$$

The coefficient $\alpha^* > 0$ in (10) measures the relative risk aversion of the representative agent. Under assumption of the informational efficiency of the market, the information set at time j can be reduced to the history of the process of the excess return, namely $\psi_{j-1} = (\dots, y_{j-2}, y_{j-1})$. Consequently an econometric model of the relationship between risk and return should explain the properties of the conditional (with respect to the past of the process of y_j) distribution of the excess return y_j . It is also of particular interest to find any linkage between expected excess return and the measure of dispersion of the distribution of y_j conditional to ψ_{j-1} . Following Engle, Lilien and Robins (1987), French, Schwert and Stambaugh (1987) and Osiewalski and Pipień (2000) we consider for y_j a simple GARCH-In-Mean process, defined as follows:

$$y_j = [\alpha + E(z_j)] h_j^{0.5} + u_j, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

where $u_j = [z_j - E(z_j)] h_j^{0.5}$, and z_j are independently and identically distributed random variables with $E(z_j) < +\infty$. The scaling factor h_j is given by the GARCH(1, 1) equation; see Bollerslev (1986):

$$h_j = \alpha_0 + \alpha_1 u_{j-1}^2 + \beta_1 h_{j-1}.$$

The specific form of the conditional distribution of y_j is strictly dependent on the type of the distribution of z_j . Initially, in model denoted by M_0 we

assumed for z_j the Student- t density with unknown degrees of freedom $\nu > 1$, zero mode and unit inverse precision:

$$z_j | M_0 \sim \text{St}(\nu, 0, 1), \nu > 1.$$

The density of the distribution of z_j is given as follows:

$$p(z_j | M_0) = f_t(z_j | 0, 1, \nu) = \frac{\Gamma(0.5(\nu + 1))}{\Gamma(0.5\nu) \sqrt{\pi\nu}} \left[1 + \frac{z_j^2}{\nu} \right]^{-(\nu+1)/2}. \quad (12)$$

Given model M_0 , $E(z_j) = 0$, $u_j = z_j h_j^{0.5}$, and hence (11) reduces to the simpler form $y_j = \alpha h_j^{0.5} + u_j$. Let denote by $\theta = (\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \nu)$ the vector of all parameters in model M_0 . Here the conditional distribution of the error term u_j is the Student- t distribution with $\nu > 1$ degrees of freedom, zero mode and inverse precision h_j :

$$p(u_j | \psi_{j-1}, \theta, M_0) = h_j^{-0.5} \cdot f_t(h_j^{-0.5} u_j | 0, 1, \nu), j = 1, 2, \dots$$

Consequently the following density represents conditional distribution of the excess return at time j :

$$p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_0) = h_j^{-0.5} \cdot f_t(h_j^{-0.5} \cdot (y_j - \alpha h_j^{0.5}) | 0, 1, \nu), j = 1, 2, \dots$$

Given model M_0 the expected excess return (conditional to the whole past ψ_{j-1}) is proportional to the square root of the inverse precision h_j :

$$E(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_0) = \alpha h_j^{0.5}. \quad (13)$$

The parameter $\alpha \in R$ captures the dependence between expected excess return and the level of risk both measured by $E(y_j | \psi_{j-1}, M_0, \theta)$ and the scale parameter $h_j^{0.5}$ respectively. Initially the relationship between risk and return stated in (10) relates to the conditional standard deviation as a measure of risk. In our approach, the relative risk aversion coefficient α^* can be obtained by reparameterisation of the model in terms of variance, instead of introducing inverse precision. However our approach, based on the more general scale measure, enables to test Merton (1973) theory in case of more volatile excess returns, which do not possess conditional second moment.

Now we want to construct a set of competing GARCH specifications $\{M_i, i = 1, \dots, k\}$ by introducing asymmetry into density of the conditional distribution of excess return, $p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_0)$. The resulting asymmetric distributions are obtained by skewing the distribution of the random variable z_j according to

methods presented in the previous section. The resulting asymmetric density of z_i is of the general form related to the formula (1):

$$p(z | M_i) = f_i(z|0, 1, \nu) \cdot p [F_i(z) | \eta_i, M_i], \text{ for } z \in R, i = 1, 2, \dots, k,$$

where $p (.|\eta_i, M_i)$ defines the skewing mechanism parameterised by the vector η_i , and $F_i(.)$ is the distribution function of the Student- t random variable with $\nu > 1$ degrees of freedom parameter, zero mode and unit inverse precision. Consequently, the conditional distribution of the error term u_j in model M_i takes the form:

$$p(u_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i) = h_j^{-0.5} \cdot f_i(h_j^{-0.5}u_j|0, 1, \nu) \cdot p[F_i(h_j^{-0.5}u_j) | \eta_i, M_i], j = 1, 2, \dots$$

This leads to the general form of the conditional distribution of daily excess return y_j in model M_i :

$$p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i) = h_j^{-0.5} \cdot f_i(h_j^{-0.5}(y_j - \mu_j)|0, 1, \nu) \cdot p[F_i(h_j^{-0.5}(y_j - \mu_j)) | \eta_i, M_i], \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots,$$

where $\mu_j = [\alpha + E(z_j)]h_j^{0.5}$. As the first specification, namely M_1 , we consider GARCH model with skewed Student- t distribution obtained by the method investigated by Fernández and Steel (1998). The skewing mechanism $p [.\eta_1, M_1]$ is given by the formula (5), where $\eta_1 = \gamma_1 > 0$, and $\gamma_1 = 1$ defines symmetry (i.e. M_1 reduces to the model M_0 under restriction $\gamma_1 = 1$). The model M_2 is the result of skewing conditional distribution $p (y_j | \psi_{j-1}, \theta, M_0)$ according to the hidden truncation method. In this case $p [.\eta_2, M_2]$ is defined by (2), $\eta_2 = \gamma_2 \in R$, while $\gamma_2 = 0$ defines symmetric Student- t conditional distribution for y_j . In model M_3 we apply Beta skewing mechanism with one asymmetry parameter. Density $p [.\eta_3, M_3]$ is defined by (3), where $\eta_3 = \gamma_3 > 0$, and $\gamma_3 = 1$ reduces our model to the case of M_0 . Specification M_4 is based on the Skewed Student- t distribution proposed by Jones and Faddy (2003). In this case $p [.\eta_4, M_4]$ is defined by the formula (4), $\eta_4 = (a, b)$, for $a > 0$ and $b > 0$ and $a = b = 1$ reduces M_4 to M_0 . In model M_5 we apply Bernstein density based skewing mechanism for $m = 2$ parameters. It means that the skewing mechanism $p [.\eta_5, M_5]$ is defined by the formula (6), $\eta_5 = (w_1, w_2)$ and $w_1 = w_2 = 1/3$ retrieves symmetry of the conditional distribution of y_j . In model M_6 we applied a construct defined by Ferreira and Steel. Skewing mechanism $p [.\eta_6, M_6]$ is defined by (7), while $\eta_6 = \gamma_4 \in R$ and $\gamma_4 = 0$ defines conditional symmetry. In specification M_7 we considered Hansen (1994) skewed Student- t conditional distribution, by applying mechanism $p [.\eta_7, M_7]$ defined in (9). Here $\eta_7 = \gamma_5 \in (-1, 1)$, while $\gamma_5 = 0$ reduces M_7 to the case of conditional symmetry.

All formulated specifications assume, that the conditional distribution of y_j is heteroscedastic, where time varying dispersion measure h_j , defined by

GARCH(1, 1) specification, is a function of the whole past of the process. The degrees of freedom parameter $\nu > 1$ enable for fat tails of $p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$. In each specification it is also possible to test whether the dataset supports conditional distribution with Gaussian-type tails (for $\nu \rightarrow \downarrow$). The possible asymmetry of conditional distribution can be captured in all models by the presence of skewing mechanism. Additionally, skewness of the distribution of z_j in M_i generates nonzero expectation $E(z_j) < + \downarrow$. Consequently in (11):

$$E(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i) = [\alpha + E(z_j)]h_j^{0.5}, \text{ for } E(z_j) \neq 0. \quad (15)$$

And hence for each specification M_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, conditional skewness of excess returns y_j can be interpreted as an additional source of the relationship between risk and return. This idea fully corresponds to Harvey and Siddique (2000), who emphasize, that systematic skewness is economically important and governs risk premium.

We denote by $y^{(t)} = (y_1, \dots, y_t) \in Y$ the vector of observed up to day t (used in estimation in day t) daily excess returns and by $y_f^{(t)} = (y_{t+1}, \dots, y_{t+n}) \in Y_f$ the vector of forecasted observables at time t . The following density represents the i -th sampling model ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) at time t :

$$p(y^{(t)}, y_f^{(t)} | \theta, \eta, M_i) \prod_{j=1}^{t+n} p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Constructed at time t Bayesian model M_i , i.e. the joint distribution of the observables $(y^{(t)}, y_f^{(t)})$ and the vector of parameters (θ, η_i) takes the form:

$$p(y^{(t)}, y_f^{(t)}, \theta, \eta_i | M_i) = p(y^{(t)}, y_f^{(t)} | \theta, \eta_i, M_i) \cdot p(\theta, \eta_i | M_i), \quad (16)$$

and requires formulation of the prior distribution $p(\theta, \eta_i | M_i)$, for each specification M_i . In general we assumed the following prior independence:

$$p(\theta, \eta_i | M_i) = p(\theta | M_i) \cdot p(\eta_i | M_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \quad (17)$$

In this paper we assume that for each i :

$$p(\theta | M_i) = p(\theta) = p(\alpha) p(\alpha_0) p(\alpha_1) p(\beta_1) p(\nu),$$

where $p(\alpha)$ is normal with zero mean and variance 10, $p(\alpha_0)$ is exponential with mean 1, $p(\alpha_1)$ and $p(\beta_1)$ are both uniform over $(0, 1)$, while $p(\nu)$ defines exponential distribution with mean (and standard deviation) equal to 10.

In order to make posterior inference about conditional asymmetry, as well as to compare prior information about this phenomenon in all competing

specifications, we considered skewness measure proposed by Arnold and Groenvelde (1995). Such a skewness measure, applied to the density $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$ takes the form:

$$\gamma_M = 1 - 2 \cdot P [\text{Mod}(y_j|M_i) | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i], \quad (18)$$

where $P[\cdot | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i]$ denotes the cumulative distribution function of the conditional distribution of daily return y_j (given the whole past, parameters and model M_i) and $\text{Mod}(y_j|M_i)$ denotes the modal value of this distribution. The case of symmetry is defined for $\gamma_M = 0$, while $\gamma_M < 0$ or $\gamma_M > 0$ imply left or right skewness of $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$.

Initially, we use (18) to control the total prior information about asymmetry, which is included in each specification through the distribution $p(\eta_i|M_i)$. Our goal is to introduce prior information about η_i in such a way, that the resulting prior distribution of skewness measure γ_M , elicited in all models, are as much similar as it is possible. In order to perform this task the prior distribution of model specific (skewness) parameters can be defined in the following way. For $i = 1$, $\eta_1 = \gamma_1 > 0$, and $p(\eta_1|M_1)$ is the density of the standardized lognormal distribution truncated to the interval $\gamma_1 \in (0.5; 2)$. For $i = 2$, $\eta_2 = \gamma_2 \in R$, and $p(\eta_2|M_2)$ is the density of the normal distribution with zero mean and variance equal to 3. For $i = 3$, $\eta_3 = \gamma_3 > 0$, and $p(\eta_3|M_3)$ is the density of the standardized lognormal distribution. For $i = 4$, $\eta_4 = (a, b)$, and $p(\eta_4|M_4)$ is the product of the densities of the standardized lognormal distribution. For $i = 5$, $\eta_5 = (w_1, w_2)$ and $p(\eta_5|M_5)$ is the product of the normal densities, both with mean 0.33 and variance 36, truncated by the following set of restrictions: $w_1 > 0$, $w_2 > 0$, $w_1 + w_2 < 1$. For $i = 6$, $\eta_6 = \gamma_4 \in R$, and $p(\eta_6|M_6)$ is the density of the normal distribution with mean 0 and variance equal to 20. For $i = 7$, $\eta_7 = \gamma_5 \in (-1, 1)$, and $p(\eta_7|M_7)$ is the density of the uniform distribution truncated to $\gamma_5 \in [-0.5, 0.5]$. All competing specifications, together with the prior distributions for η_i are presented in Table 1.

4. EMPIRICAL RESULTS FOR WIG DATA

In this part we present an empirical example of Bayesian comparison of all competing specifications. We also discuss the results of the total impact of the conditional skewness assumption on the relationship between risk and return on the Warsaw Stock Exchange (WSE). Our dataset was constructed on the basis of $T = 2144$ observations of daily growth rates, r_j , of the index of the WSE (WIG index) from 06.01.98 till 31.07.06. The risk free interest rate, r_j^f , used in excess return y_j , was approximated by the WIBOR overnight interest rate (WIBORo/n instrument). The time series of the excess returns y_j , as well as the risk free interest rate, are depicted on Figure 1. As seen from the grey plot in Figure 1,

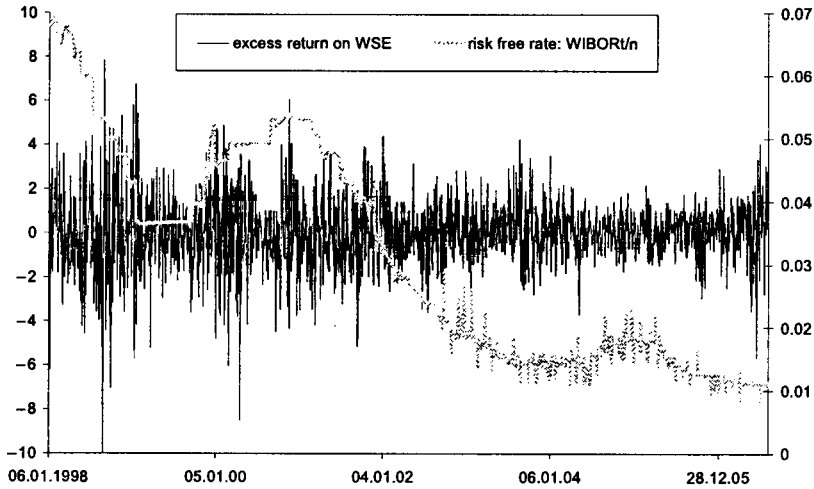


Fig. 1. Daily excess return on the Warsaw Stock Exchange from 06.01.1998 to 31.07.2006; $T = 2144$ observations (black plot) and annualised risk free interest rate approximated by WIBOR short term interest rate (grey plot)
 mean = 0.0214; std. dev. = 1.49; skewness = -0.28; kurtosis = 6.58

huge outliers, caused by changes in the monetary policy, together with the regions of almost no variability at the end of the 90s, depict very volatile behaviour of the Polish zloty short term interest rate. Thus, it was very important to check the sensitivity of our results with respect to the changes in the definition of the risk free interest rate. Our empirical results remained practically unchanged for r_f^j calculated on the basis of the middle and long term WIBOR zloty interest rate and also in the case $r_f^j = 0$ for each j .

Table 2 presents decimal logarithms of the marginal data density value, as well as the posterior probabilities $P(M_i|y^{(t)})$, both calculated for each of competing models M_i , $i = 0, 1, \dots, 7$. The initial specification M_0 , built on the basis of the conditional symmetric student- t distribution, receives a little data support, as the posterior probability $P(M_0|y^{(t)})$ is not greater than 8.5%. The all remaining posterior probability mass is attached to specifications which allow for conditional skewness. It is clear, that the modelled dataset of excess returns of WIG index do not support decisively superiority of any of competing skewing mechanism. The mass of posterior probabilities is rather dispersed and strongly distributed among models which allow for conditional asymmetry. The greatest value of $P(M_i|y^{(t)})$ receives conditionally skewed Student- t GARCH model generated by the Beta distribution transformation with two free parameters. In this case the value of posterior probability is greater than 40%. The dataset also support conditionally skewed Student- t GARCH model with hidden truncation mechanism (M_2) and Beta distribution transformation with one free parameter

Table 1

Presentation of the set of competing skewing mechanisms and the prior distributions of skewness parameters, $p(\eta_i|M_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

<p>M_2 Azzalini (1985), $\gamma_2 \in R$, $\gamma \sim N(0,3)$</p> <p>$p(y \gamma_2) = 2 \cdot F(\gamma_2) \cdot F^{-1}(y) \theta$</p> <p>symmetry: $\gamma_2 = 0$</p>	<p>M_3 Beta distribution with one parameter (Jones 2004), $\gamma_3 > 0$ $\ln \gamma_3 \sim N(0,1)$</p> <p>$p(y \gamma_3) = Be(y \gamma_3, \gamma_3^{-1})$</p> <p>symmetry: $\gamma_3 = 1$</p>	<p>M_6 Ferreira and Steel (2006) construct, $\gamma_4 \sim N(0,20)$</p> <p>$p(y \gamma_4) = 1+l(\gamma_4)[g(y \gamma_4) - 1]$</p> <p>symmetry: $\gamma_4 = 0$</p>	<p>M_5 Bernstein densities (2 parameters) $w_1 \sim N(0.33;36)$, $w_2 \sim N(0.33;36)$</p> <p>$p(y w_1, w_2) = w_1 Be(y 1,3) + w_2 Be(y 2,2) + (1-w_1-w_2)Be(y 3,1)$</p> <p>symmetry: $w_i = 1/3$, $i = 1,2,3$</p>
<p>M_4 Beta distribution, two parameters (Jones, Faddy 2003) $\ln a \sim N(0,1)$, $\ln b \sim N(0,1)$, $a>b$, $b>0$</p> <p>$p(y a,b) = Be(y a,b)$</p> <p>symmetry: $a = b = 1$</p>	<p>M_7 Hansen (1994) skewed Student-t $\gamma_5 \sim U(-0.5; 0.5)$</p> <p>$p(y \gamma_5) = \frac{f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1-\gamma_5}\right)I_{(0;0.5)}(y) + f\left(\frac{F^{-1}(y)}{1+\gamma_5}\right)I_{(0.5;1)}(y)}{f(F^{-1}(y))}$</p> <p>symmetry: $\gamma_5 = 0$</p>	<p>M_1 Inverse scale factors, Fernández and Steel (1998), $\ln \gamma_1 \sim N(0,1)$, $\gamma_1 \in (0.5;2)$</p> <p>$p(y \gamma_1) = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_1^{-1}} \frac{\{f\gamma_1 \cdot F^{-1}(y)I_{(0;0.5)} + f\gamma_1^{-1} \cdot F^{-1}(y)I_{(0.5;1)}\}}{f(F^{-1}(y))}$</p> <p>symmetry: $\gamma_1 = 1$</p>	

(M_3). Those three models cumulate more than 90% of the posterior probability mass, making all remained conditionally skewed specifications improbable in the view of the data. Thus, inverse scale factors (models M_1 and M_7), the Bernstein density transformation (with 2 free parameters) and Ferreira and Steel (2006) construct lead to very doubtful explanatory power of the resulting GARCH specification. Those models are strongly rejected by the data, as the values of posterior probabilities are much smaller than posterior probability of symmetric GARCH model (M_0).

In Table 3 we present the results of Bayesian inference about tails and skewness of the conditional distribution of daily excess returns in all competing specifications. Apart from making inference about model specific skewness parameters in each model, we also put posterior means and standard deviations of Arnold and Groenvelde (1995) skewness measure γ_M , as well as the values of posterior probability of left asymmetry of the density $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$ (i.e. $P(\gamma_M < 0|y^{(j)}, M_i)$).

In case of conditional symmetry (model M_0) the dataset clearly support the hypothesis of existence of the variance of the distribution $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, M_0)$, because the whole density of the posterior distribution of the degrees of freedom parameter ν is located on the right side of the value $\nu = 2$. Also, rather tight location of $p(\nu|y^{(j)}, M_0)$ around the value $\nu = 7$ in model M_0 , assures that the conditional distribution of daily returns possesses moments of order till 7. Those properties of the posterior distribution $p(\nu|y^{(j)}, M_0)$ remains unchanged in case of all conditionally skewed specifications. Only in model M_4 , Beta distribution transformation with 2 free parameters both, location and scale of the posterior density of the degrees of freedom parameter change substantially. However the moment structure of the conditional distribution if y_j remains rather the same in model M_4 . The dispersion of the posterior distribution of ν , as measured by the posterior standard deviation, precludes conditional normality in all competing specifications.

The posterior means and standard deviations of both, asymmetry parameters η_i and skewness measure γ_M (see Arnold and Groenvelde 1995) indicate, that, in the majority of the specifications, there is strong evidence in favour of left skewness of the conditional distribution of modelled daily returns. The posterior distributions of γ_M are tightly located on the left side of the value $\gamma_M = 0$ in case of M_i , for $i = 2, 3, 4, 5$ and 6 , decisively confirming left asymmetry of $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$. The greatest intensification of conditional skewness, measured by posterior mean of $p(\gamma_M|y^{(j)}, M_i)$, is obtained in model M_3 . In this case the posterior expectation of asymmetry measure is equal to $\gamma_M = -0.0216$, with posterior standard deviation equal about 0.0024. Also hidden truncation mechanism and Beta distribution transformation with two free parameters support comparable level of conditional left asymmetry. The inverse scale factors mechanisms (both, M_1 and M_7) and conditional density based on the Ferreira and Steel (2006) construct generated posterior distributions of γ_M , localized very close to the value $\gamma_M = 0$ and also much more dispersed. Consequently, in case of models M_1, M_6

Table 2

Decimal logarithm of the marginal data density values, posterior probabilities of all competing specifications and posterior odds ratios for M_i , for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, against M_0

	M_2 Azzalini (1985)	M_3 Beta with 1 parameter, Jones (2004)	M_4 Beta with 2 parameters Jones and Faddy (2003)	M_5 Bernstein densities	M_1 Fernández and Steel (1998)	M_6 Ferreira and Steel (2006)	M_7 Hansen (1994)	M_0 Student- t GARCH (conditional symmetry)
Symmetry	$\gamma_2 = 0$	$\gamma_3 = 1$	$a = b = 1$	$w_i = 1/3$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_4 = 0$	$\gamma_5 = 0$	Always
$\log p(y^{(t)} M_i)$	-1558.50	-1558.78	-1558.41	-1560.82	-1559.45	-1560.45	1559.34	-1559.06
$P(M_i y^{(t)})$, $i = 0, \dots, 6$	0.3015	0.1582	0.3709	0.0014	0.0338	0.0338	0.0436	0.0830
$P(M_i y^{(t)})$, $i = 1, \dots, 6$	0.3288	0.1725	0.4045	0.0016	0.0369	0.0369	0.0475	X

Table 3

Posterior means and standard deviation of tails and asymmetry parameters and posterior probabilities of left asymmetry of the density $p(y_j | \Psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$

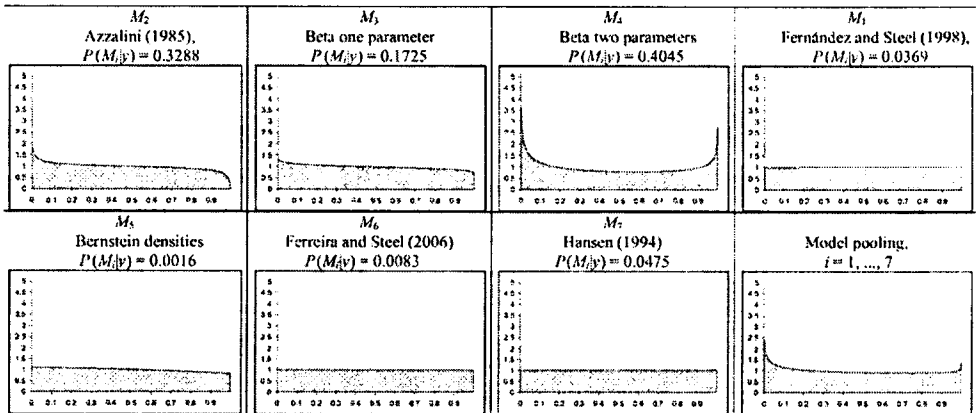
	M_2 Azzalini (1985)	M_3 Beta with 1 parameter, Jones (2004)	M_4 Beta with 2 parameters Jones and Faddy (2003)	M_5 Bernstein densites	M_1 Fernández and Steel (1998)	M_6 Ferreira and Steel (2006)	M_7 Hansen (1994)	M_0 Student- <i>t</i> GARCH (conditional symmetry)
$P(M_i y^{(t)})$	0.3015	0.1582	0.3709	0.0014	0.0338	0.0076	0.0436	0.0830
tails $\nu > 1$	7.05 1.06	7.14 1.06	10.57 2.59	7.05 0.90	6.94 1.01	7.15 1.02	6.94 1.05	6.96 1.02
skewness, η_i	g2: -0.1074 0.0617	g3: 0.9480 0.0288	a : 0.6665 0.1259 b : 0.7586 0.1384	w_1 : 0.3637 0.0324 w_2 : 0.3579 0.0342	γ_1 : 1.0029 0.0148	γ_4 : -0.0489 0.0238	g5: 0.0030 0.0148	—
γ_M , symetry $\gamma_M = 0$	-0.0208 0.0029	-0.0216 0.0024	-0.0193 0.0067	-0.0164 0.0054	0.0038 0.0080	8.086e-5	0.0030 0.0148	—
$P(\gamma_M < 0 y^{(t)}, M_i)$	1.0000	1.0000	0.9960		0.3260	14.557e-5	0.4173	—
$P(\gamma_M < 0 y^{(t)})$	0.9677							

and M_7 , the posterior probabilities of left asymmetry, $P(\gamma_M < 0 | y^{(0)}, M_i)$, are very small, making symmetry, as well as skewness to the right, not strongly rejected by the data. Finally, on the basis of the Bayesian model pooling technique, we obtained posterior probability of left asymmetry calculated considering the whole class of specifications $M_i, i = 1, \dots, 7$. The modelled dataset clearly supports left asymmetry, as $P(\gamma_M < 0 | y^{(0)}) = 0.9677$, but it also leaves some uncertainty about the true intensification of this phenomenon. Posterior probability of symmetry and right skewness of $p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$ (equal to 0.0323) does not totally reject those cases.

Our inverse probability integral approach to representation of the univariate skewness enables to present the sources of possible conditional asymmetry easily. In Table 4 we discuss the empirical differences between all competing skewing mechanisms. We present the posterior means of the skewing distributions $p(.|\eta_i)$ in all competing specifications $M_i, i = 1, \dots, 7$. The WIG excess returns data contain specific information about the conditional asymmetry occurred as a source of different tail behavior of the density $p(y_j | \psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$. This may explain such clear separation of conditionally skewed models with reasonable data support and models strongly rejected in the view of the data. The subset of specifications with very weak data support, namely models M_1, M_5, M_6 and M_7 , show no conditional skewness effect, because the presented densities $p(.|\eta_i)$ are very close to the one corresponding to uniform distribution. Consequently, two alternative inverse scale factors, Ferreira and Steel (2006) construct and Bernstein densities do not yield a mechanism sensitive to the skewness represented by the WIG data. Three models with the greatest data support (built on the basis of hidden truncation mechanism and Beta distribution transforma-

Table 4

Posterior means of skewing mechanisms $p(.|\eta_i)$ in models $M_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ and the skewing mechanism obtained using Bayesian model pooling approach



tions) show substantial difference of $p(.|\eta_i)$ from the case of conditional symmetry. Since the values of $p(.|\eta_i)$ (for $i = 2, 3$ and 4) exhibit variability on the bounds of the interval $(0, 1)$, the considerable amount of skewness is located in the tails of the conditional distribution of the excess returns y_j . Quite similar tail behavior can be observed in case of hidden truncation mechanism and Beta distribution transformation with one free parameter. In model M_2 and M_3 the conditional left asymmetry of the density $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$ is forced by greater concentration of probability mass in its left tail than in the right tail. In model with the greatest data support, namely in M_4 based on the Beta distribution transformation with two free parameters, the conditional skewness effect is also the result of asymmetric tail monotonicity. However the distinction between left and right tail of $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_4, M_4)$ is definitely more subtle. In case of model M_4 , the skewing mechanism $p(.|\eta_4)$ makes conditional distribution of excess returns more leptokurtic, as the function $p(.|\eta_4)$ has its extremes on the bounds of the interval $(0, 1)$. Since the global extreme value of $p(y|\eta_4)$ is reached for $y = 0$, the skewing mechanism in M_4 forces left asymmetry.

Finally in Table 5 we compare the total impact of the conditional skewness effect on the tested relation between risk and return. According to our assumptions, the conditional expectation of the excess return is proportional to the square root of the inverse precision h_j . Since we parameterize the market risk by a more general dispersion measure, than standard deviation, we report the information about the relative risk aversion by the posterior characteristics of the function $\alpha + E(z_j)$, see (15). Initially we checked the strength of the relation in model M_0 , which does not allow for conditional skewness. Given M_0 , $E(z_j) = 0$ and the whole information about relative risk aversion is reflected in parameter α , see (13). Just like many other researchers, given M_0 , we obtain positive but rather weak relation between expected excess return and risk. The posterior probability $P(\alpha > 0|M_0, y^{(n)})$ equal about 0.92 leaves considerable level of uncertainty about the true strength of tested relation. Consequently, model M_0 does not confirm our hypothesis strongly. Imposing unreasonable (in the view of the data) skewness into conditional distribution of excess returns also may not strengthen our inference. In case of models with weak data support (inverse scale factors M_1 and M_7 , Ferreira and Steel (2006) construct M_6) the assumption of asymmetry of the density $p(y_j|\psi_{j-1}, \theta, \eta_i, M_i)$ does not improve posterior inference about the sign of $\alpha + E(z_j)$. In case of M_1 , M_6 and M_7 posterior probability of positive relationship is very close to the value generated within M_0 . Only in case of the skewing mechanisms with the greatest data support, namely Beta transformation with two parameters and hidden truncation, the WIG excess returns yield decisive support of the positive sign of the relative risk aversion coefficient. In case of model M_3 , the posterior probability of positive sign of $\alpha + E(z_j)$ is greater than 0.99, leaving no doubt about the significance of the relationship between risk and return postulated by Merton (1973). Hence,

Posterior analysis of the impact of the conditional skewness assumption on the relation between risk and return

	M_2 Azzalini (1985)	M_3 Beta with 1 parameter, Jones (2004)	M_4 Beta with 2 parameters Jones and Faddy (2003)	M_5 Bernstein densites	M_1 Fernández and Steel (1998)	M_6 Ferreira and Steel (2006)	M_7 Hansen (1994)	M_0 Student-t GARCH (conditional symmetry)
$\alpha + E(z_t)$	0.2567 0.1162	0.1440 0.0912	0.2148 0.0852	0.2085 0.0933	0.0469 0.0349	0.0489 0.0338	0.441 0.0316	0.0483 0.0337
$P(\alpha + E(z_t) > 0 M_i, y^{(t)})$	0.9894	0.9528	0.9972	0.9893	0.9102	0.9230	0.9171	0.9201
$P(\alpha + E(z_t) > 0 y^{(t)})$	0.9777							

it is possible to confirm positive sing of $\alpha + E(z_i)$ only by imposing specific skewing mechanism into conditional distribution of excess returns. Beta distribution transformation with two free parameters is able to detect additional source of information about risk premium in the WIG dataset. Also, hidden truncation mechanism and Bernstein density transformation strongly confirm positive sing of the risk aversion coefficient, as posterior probability $P(\alpha + E(z_i) > 0 | M_i, \gamma^{(i)})$ is greater than 0.98 for $i = 2$ and 5.

5. CONCLUDING REMARKS

In this paper we presented the results of Bayesian estimation of the impact of the conditional skewness assumption on the strength of the relationship between risk and return. Initially, on the basis of the Intertemporal CAPM model, proposed by Merton (1973), we built the GARCH-In-Mean sampling model, suitable in analysing such relationship. Our approach, which fully relates to the model proposed by Osiewalski and Pipień (2000), treats the skewness of the conditional distribution of excess returns as an alternative source of information about risk aversion. Thus pure statistical feature of the sampling model was equipped with economic interpretation.

Based on the daily excess returns of WIG index we checked the total impact of conditional skewness assumption on the relation between risk and return. Posterior inference about skewing mechanisms showed positive and decisively significant value of the coefficient of the relative risk aversion once an appropriate, specific skewing mechanism was imposed in conditional Student- t distribution. The greatest data support, and also very strong support of the relation postulated by Merton (1973), received skewness obtained by Beta distribution transformation with two free parameters; see Jones and Faddy (2003). Also strong confirmation of positive relative risk aversion coefficient was generated by hidden truncation mechanism, proposed by Azzalini (1985) and Bernstein density transformation. Many other skewing mechanisms considered in the paper were strongly rejected by the WIG dataset. Consequently, in many cases we observed no impact of conditional asymmetry on the tested relation. The WIG excess return contained specific information about conditional skewness, which was able to detect only by models with the greatest data support. Thus, in our empirical example it was possible to identify asymmetry of the conditional distribution as an additional source of information concerning risk premium only in case of specific, more flexible skewing mechanisms, than previously considered in the literature.

STRESZCZENIE

Mateusz Pipień. *Wykorzystanie warunkowej asymetrii w badaniu zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a poziomem ryzyka. Analiza bayesowska dla danych WIG*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 95–117.

Zasadniczym celem artykułu jest zastosowanie wnioskowania bayesowskiego w badaniu relacji pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a poziomem ryzyka na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Na podstawie międzyokresowego modelu CAPM (ang. *Intertemporal-CAPM*), zaproponowanego przez Mertona (1973), zbudowano ogólny model próbkowy w ramach którego jest możliwe testowanie omawianej relacji. W rozważanym modelu statystycznym źródłem zależności pomiędzy oczekiwanym zwrotem a poziomem ryzyka jest asymetria rozkładu warunkowego stóp zmian. Propozycja ta wykorzystuje koncepcję GARCH-In-Mean Osiewalskiego i Pipienia (2000) oraz dostarcza formalnej, ekonomicznej interpretacji skośności występującej w modelu próbkowym.

W artykule rozważono wiele konkurencyjnych specyfikacji dopuszczających warunkową asymetrię. W szczególności zastosowano mechanizm ukrytego ucięcia, alternatywne skalowania wokół modalnej, transformacje rozkładem Beta, gęstości Bersteina oraz metodę zaproponowaną przez Ferreira i Steela (2006).

Na podstawie danych dotyczących kwotowań indeksu WIG dokonano analizy wpływu wprowadzenia do modelu warunkowej asymetrii stóp zmian na postulowaną relację pomiędzy oczekiwaną stopą zmian a poziomem ryzyka. Wyniki bayesowskiego porównania modeli, jak również analiza *a posteriori* parametrów skośności potwierdziły w sposób zdecydowany założenia teorii Mertona (1973). Uzyskano silnie istotną i dodatnią zależność pomiędzy stopą zwrotu indeksu WIG i zmiennością. Najwyższą wartość prawdopodobieństwa *a posteriori* uzyskał model, w którym efekt asymetrii jest rezultatem zastosowania transformacji rozkładem Beta z dwoma swobodnymi parametrami.

REFERENCES

- Arnold B.C., Groenveld R.A. 1995. *Measuring Skewness with Respect to the Mode*, The American Statistician 49, 34–38.
- Azzalini A. 1985. *A Class of Distributions which Includes the Normal Ones*, Scandinavian Journal of Statistics 12, 171–178.
- Backhus D.K., Gregory A.W. 1993. *Theoretical Relation between Risk Premiums and Conditional Variances*, Journal of Business and Economic Statistics 11, 177–185.
- Bollerslev T. 1986. *Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 31, 307–327.
- Brandt M.W., Kang Q. 2004. *On the Relationship Between the Conditional Mean and Volatility of Stock Returns: A Latent VAR Approach*, Journal of Financial Economics 72, 217–257.
- Campbell J.Y., Hentschel L. 1992. *No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns*, Journal of Financial Economics 31, 281–318.
- Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. 1987. *Estimating Time-varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model*, Econometrica 55, 391–408.
- Fernández C., Steel M.F.J. 1998. *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*, Journal of the American Statistical Association 93, 359–371.
- Ferreira J.T.A.S., Steel M.F.J. 2006. *A Constructive Representation of Univariate Skewed Distributions*, Journal of the American Statistical Association 101, 823–839.

- French K.R., Schwert G.W., Stambaugh R.F. 1987. Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics* 19, 3–29.
- Ghysels E., Santa-Clara P., Valkanov R. 2006. *Predicting Volatility Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies*, *Journal of Econometrics* 131, 59–95.
- Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. 1993. *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*, *Journal of Finance* 48, 1779–1801.
- Guo H., Whitelaw R.F. 2003. *Uncovering the Risk-Return Relation in the Stock Market*, NBER Working Paper 9927.
- Hansen B.E. 1994. *Autoregressive Conditional Density Estimation*, *International Economic Review* 35, 705–730.
- Harvey C.R., Siddique A. 2000. *Conditional Skewness in Asset Pricing Models*, *Journal of Finance* 55, 1263–1295.
- Jones M.C. 2004. *Families of Distributions Arising from Distributions of Order Statistics*, *Test* 13, 1–43.
- Jones M.C., Faddy M.J. 2003. *A Skew Extension of the t-Distribution, with Applications*, *Journal of Royal Statistical Association B* 65, 159–174.
- Kim C.-J., Morley J.C., Nelson C.R. 2004. *Is there a Positive Relationship between Stock Market Volatility and the Equity Premium?*, *Journal of Money Credit and Banking* 36, 339–367.
- Linton O., Perron B. 2003. *The Shape of the Risk Premium: Evidence from a Semiparametric Generalised Conditional Heteroscedasticity Model?* *Journal of Business and Economic Statistics* 21, 345–367.
- Merton R.C. 1973. *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, *Econometrica* 41, 867–887.
- Osiewalski J., Pipień M., 2000. *GARCH-In-Mean through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates*, 26-th International Conference MACROMODELS'99, ed. Welfe W., Wdowiński P., Łódź, s. 354–369.
- Pagan A., Hong Y. 1990. *Non-Parametric Estimation and the Risk Premium*, [in:] *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, (ed.), W. Barnett, J. Powell, G. Tauchen, Cambridge University Press.
- Pastor L., Stambaugh R.F. 2001. *The Equity Premium and Structural Breaks*, *Journal of Finance* 4, 1207–1231.
- Petrone S., Wasserman L. 2002. *Consistency of Bernstein Polynomial Posteriors*, *Journal of Royal Statistical Association B* 64, 79–100.
- Scruggs J.T. 1998. *Resolving the Puzzling Intertemporal Relation between the Market Risk Premium and Conditional Market Variance: A Two-Factor Approach*, *Journal of Finance* 53, 575–603.
- Whitelaw R. 2000. *Stock Market Risk and Return: An Equilibrium Approach*, *Review of Financial Studies* 13, 521–547.

TESTOWANIE WIELOKROTNE W BADANIACH EKONOMICZNYCH

SABINA DENKOWSKA

Katedra Statystyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
PL 31-150 Kraków, ul. Rakowicka 27
e-mail: sabina.denkowska@ae.krakow.pl

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Komisji Statystyczno-Demograficznej Oddziału PAN w Krakowie 22 maja 2007 roku przez autorkę.

ABSTRACT

Sabina Denkowska. *Multiple testing in the Economic Research*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48, 119–135.

In the paper multiple testing procedures based on *ordered p-values* are applied to control type I errors rates for family of inferences in different statistical problems. Multiple testing procedures based on *ordered p-values* may be found an interesting tool for simultaneous testing of more than one hypothesis at a time. Discussed methods are applicable to a broad spectrum of statistical problems since their requirements for statistical assumption are considerably less restricted than in case of classical procedures (only dependency among test statistics should be controlled). The analysis is put down to a collection of *p-values* or adjusted *p-values*. Depending on approach to the control of Type I error for the family of inferences these methods may be categorized into two major groups: FWE (Family-Wise Error Rate) and FDR (False Discovery Rate) procedures.

The procedures of multiple testing are applied to typical situations in economics research: to separate homogenous groups of means, to test the significance of correlation coefficients in the correlation matrix and to infer about significance of regression parameters in linear regression model.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

multiple testing, multiple comparison procedures MCP, simultaneous testing, multiple testing procedures based on ordered *p-values*, adjusted *p-values*, FWE (Family-Wise Error Rate), FDR (False Discovery Rate)

testowanie wielokrotne, procedury porównań wielokrotnych, testowanie jednoczesne (równoległe), procedury testowań wielokrotnych oparte na prawdopodobieństwach testowych, skorygowane prawdopodobieństwa testowe, FWE, FDR

WSTĘP

Kontrolą efektu równoczesnego testowania wielu hipotez zajmuje się teoria wnioskowań wielokrotnych. Dynamiczny rozwój tej dziedziny wiedzy wynika z intensywnego stosowania metod statystycznych w różnorodnych dziedzinach nauki: medycynie, farmacji, genetyce, fizyce, astronomii itp. Również w badaniach ekonomicznych testowanie wielokrotne dotyczy bardzo wielu sytuacji badawczych. W przeciwieństwie do wnioskowania sekwencyjnego, które zazwyczaj występuje *explicite*, równoległe testowanie wielokrotne jest często niedostrzegane, a czasem po prostu świadomie lekceważone.

Zazwyczaj wnioski z badań empirycznych wysnuwane są po zweryfikowaniu wielu hipotez statystycznych, każdej na poziomie istotności α . Tym samym ignorowany jest fakt, że im większa liczba rozpatrywanych hipotez, tym jest większe prawdopodobieństwo wykrycia pozornie istotnych statystycznie związków, które w rzeczywistości nie istnieją. Dla zilustrowania problemu rozważmy k niezależnych testów istotności, których hipotezy zerowe są prawdziwe. Testowania przeprowadzamy na poziomie istotności α . Prawdopodobieństwo tego, że nie odrzucimy żadnej hipotezy zerowej wynosi $(1 - \alpha)^k$. Jeżeli przykładowo, testujemy $k = 20$ niezależnych, prawdziwych hipotez zerowych, każdą na poziomie istotności 0,05 to prawdopodobieństwo odrzucenia przynajmniej jednej z nich wynosi $1 - 0,95^{20} = 0,64$, czyli okazuje się, że bardziej prawdopodobne jest uzyskanie przynajmniej jednego istotnego statystycznie wyniku, niż nie odrzucenie żadnej z hipotez zerowych. Ponieważ w badaniach praktycznych rzadko mamy do czynienia z niezależnymi testami, więc powyższe obliczenia należy traktować jako ostrzeżenie mówiące o tym, że im więcej testowań przeprowadzamy, tym więcej występuje błędnych odrzuceń hipotez zerowych. Należy zatem starać się ograniczać w badaniach liczbę przeprowadzanych testowań oraz stosować właściwą metodologię, umożliwiającą kontrolowanie opisanego powyżej efektu wnioskowania wielokrotnego.

Klasyczne procedury wnioskowań wielokrotnych MCP (ang. *Multiple Comparison Procedure*), od lat obecne w literaturze naukowej, mają liczne grono zarówno zwolenników, jak i przeciwników. Już w najbardziej typowej sytuacji wnioskowania wielokrotnego przy wydzielaniu jednorodnych podgrup wartości przeciętnych, gdy ANOVA spowoduje odrzucenie hipotezy zerowej, badacz napotyka problem wyboru najwłaściwszej procedury z bogatego zbioru procedur *post-hoc*, zwłaszcza że różne procedury dają różne podziały zbioru wartości przeciętnych (Denkowska 1999). Kolejną wadą procedur *post-hoc* są otrzymywane wyniki, częstokroć trudne do zinterpretowania na gruncie praktyki (np. nierozłączne jednorodne podzbiory wartości przeciętnych). Rozwiązania klasyczne zalecane w literaturze przedmiotu mają ponadto rygorystyczne wymagania modelowe.

Wybór procedury MCP zależy m.in. od zbioru elementów, które zamierzamy testować. Do typowych sytuacji badawczych należą: porównywanie parami

wartości przeciętnych, porównywanie parami wartości przeciętnych z wartością kontrolną lub „najlepszą” oraz testowanie istotności kontrastów, czyli kombinacji liniowych wartości przeciętnych, dla których suma współczynników wynosi zero. Innym bardzo istotnym czynnikiem decydującym o wyborze procedury są założenia modelu statystycznego. Wybór właściwej procedury nie jest zadaniem prostym. Wielość zaawansowanych i złożonych procedur, różnorodność uzyskiwanych wyników w zależności od wybranej procedury oraz trudności interpretacyjne mogą zniechęcać praktyków do stosowania procedur wnioskowań wielokrotnych. A przecież testowanie wielokrotne to nie tylko porównywanie wartości przeciętnych wymienione wcześniej, czy testowanie istotności kontrastów. Z testowaniem wielu hipotez mamy do czynienia np. przy doborze zmiennych objaśniających do modelu regresji podczas testowania istotności współczynników korelacji w macierzy korelacji lub przy testowaniu istotności ocen parametrów strukturalnych w modelu regresji wielorakiej.

Alternatywę dla procedur klasycznych stanowią procedury testowań wielokrotnych, oparte na prawdopodobieństwach testowych, w których proces testowania opiera się przede wszystkim na analizie indywidualnych prawdopodobieństw testowych. Procedury testowań wielokrotnych oparte na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych rekomendowane są w licznych artykułach naukowych, zarówno z genetyki, psychologii, jak i farmacji, czy meteorologii. Zaletą tych procedur jest fakt, iż zakres ich zastosowań może być bardzo szeroki, a ich wymagania co do założeń modelu statystycznego są nieduże. Istotną kwestią jest jedynie typ zależności pomiędzy statystykami testowymi, gdyż w przypadku niezależnych statystyk testowych lub pewnych typów zależności należy stosować procedury o większej mocy.

Testowanie wielokrotne w badaniach ekonomicznych jest faktem. W dobie wielkiej popularności metody *data mining*, kontrola efektu testowania wielokrotnego wydaje się po prostu niezbędna. Nasuwa się zatem pytanie: czy kontrolę efektu wnioskowania wielokrotnego w badaniach ekonomicznych można powierzyć procedurom testowań wielokrotnych opartym na prawdopodobieństwach testowych.

W artykule rozważane jest stosowanie procedur testowań wielokrotnych opartych na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych w typowych sytuacjach badawczych występujących w ekonomii:

- do porównywania parami wartości przeciętnych w celu wydzielenia jednorodnych podgrup wartości przeciętnych w modelu jednoczynnikowej analizy wariancji;
- do testowania istotności współczynników korelacji w macierzy korelacji;
- do testowania istotności parametrów strukturalnych w modelu regresji wielorakiej.

2. WPROWADZENIE DO TEORII TESTOWAŃ WIELOKROTNYCH

Właściwa kontrola efektu wielokrotności testowania jest zagadnieniem trudnym i kontrowersyjnym. Pierwszą, a zarazem kluczową decyzją jest wybór zbioru wnioskowań, który będzie tworzyć rodzinę wnioskowań. Hochberg i Tamhane (1987) zalecają, żeby w przypadku, gdy testowane hipotezy nie są ze sobą powiązane ani zawartością, ani późniejszym wykorzystaniem, traktować je oddzielnie, a nie łącznie. W przeciwnym wypadku, istotnym jest branie pod uwagę łącznego pomiaru błędów. Gdy wniosek końcowy wysnuwany jest na podstawie przeprowadzonych testów analizowanych łącznie i jego trafność zależy od łącznego pomiaru błędów dla danego zbioru wnioskowań, wtedy taki zbiór wnioskowań powinien być rozpatrywany łącznie jako rodzina.

W celu zaprezentowania najważniejszych miar błędu I rodzaju dla rodziny wnioskowań rozważmy problem jednoczesnego testowania k hipotez, wśród których k_0 hipotez jest prawdziwych. Niech R oznacza liczbę hipotez zerowych odrzuconych na korzyść odpowiednich hipotez alternatywnych, zaś V — liczbę prawdziwych hipotez zerowych, które odrzucamy. R , V są to zmienne losowe. Po przeprowadzeniu testowania znana jest tylko liczba hipotez, które odrzucamy — R , a tym samym liczba hipotez zerowych, dla których nie mamy podstaw do odrzucenia: $k - R$. Wartość zmiennej losowej V nie jest obserwowana.

W literaturze tematu najczęściej wyróżniane są dwie miary błędu I rodzaju dla rodziny wnioskowań FWE (ang. *Family-Wise Error Rate*) (Hochberg i Tamhane, 1987; Miller, 1981):

$$\text{FWE} = P(V \geq 1),$$

FDR (ang. *False Discovery Rate*):

$$\text{FDR} = \begin{cases} E\left(\frac{V}{R}\right) & \text{gdy } R > 0 \\ 0 & \text{gdy } R = 0. \end{cases}$$

Kontrola FWE dla rodziny wnioskowań oznacza, iż prawdopodobieństwo odrzucenia przynajmniej jednej prawdziwej hipotezy zerowej jest nie większe od ustalonego z góry α . Nie we wszystkich badaniach stosowanie procedur kontrolujących FWE daje dobre rezultaty. W przypadku licznych rodzin wnioskowań, procedury FWE osłabiają moc indywidualnych wnioskowań, w wyniku czego otrzymujemy zbyt mało odrzuceń hipotez zerowych. W 1995 roku Benjamini i Hochberg zaproponowali nową miarę błędu I rodzaju dla rodziny wnioskowań FDR (ang. *False Discovery Rate*), której kontrola oznacza, iż wartość oczekiwana frakcji błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń hipotez zerowych jest kontrolowana na ustalonym z góry poziomie.

Dla zilustrowania różnicy pomiędzy FWE i FDR rozpatrzmy sytuację, gdy rodzina wnioskowań obejmuje 1000 hipotez zerowych i odpowiadających im hipotez alternatywnych. Porównajmy sytuację odrzucenia 100 hipotez zerowych, z czego jedna jest prawdziwa, z sytuacją odrzucenia w tym zbiorze dwóch hipotez, z czego jedna jest prawdziwa. Z punktu widzenia FWE obie te sytuacje są tak samo niekorzystne, bo odrzucona została jedna prawdziwa hipoteza zerowa. Można jednak spojrzeć na ten wynik w ten sposób, iż tylko 1% odrzuceń było błędnych w pierwszej sytuacji, a aż 50% w drugiej.

3. PROCEDURY TESTOWAŃ WIELOKROTNYCH OPARTE NA PRAWDOPODOBIEŃSTWACH TESTOWYCH

Procedury testowań wielokrotnych oparte na prawdopodobieństwach testowych wydają się być interesującą alternatywą dla klasycznych procedur MCP. Zakres zastosowań tych procedur jest bardzo szeroki. Procedury te mogą być stosowane w przypadku skończonych rodzin hipotez minimalnych, a proces testowania przy ich wykorzystaniu opiera się przede wszystkim na analizie indywidualnych prawdopodobieństw testowych. Istotną zaletą tych procedur są nieduże wymagania co do założeń modelu statystycznego.

Z procedurami testowań wielokrotnych ściśle związane jest pojęcie skorygowanych prawdopodobieństw testowych (ang. *adjusted p-values*). Analogicznie do definicji zwykłych (nieskorygowanych) prawdopodobieństw testowych p , skorygowane prawdopodobieństwo \tilde{p}_i dla hipotezy $H_{0,i}$ vs. $H_{A,i}$, równe jest najmniejszej wartości FWE, dla której $H_{0,i}$ może zostać odrzucona, gdy cała rodzina hipotez jest rozpatrywana. Przy czym zakładamy, że rozpatrujemy rodzinę 'k' minimalnych hipotez zerowych $H_{0,1}, H_{0,2}, \dots, H_{0,k}$ z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami testowymi p_1, p_2, \dots, p_k . Mając wyznaczone¹ skorygowane prawdopodobieństwa testowe \tilde{p}_i ($i = 1, \dots, k$) dla każdego testu $H_{0,i}$ vs. $H_{A,i}$, decyzja o odrzuceniu hipotezy $H_{0,i}$ na poziomie FWE równym α podejmowana jest, gdy $\tilde{p}_i \leq \alpha$. Skorygowane prawdopodobieństwa testowe są definiowane analogicznie dla FDR.

Ze względu na kontrolę błędu I rodzaju dla rodziny wnioskowań, procedury testowań wielokrotnych można podzielić na:

- procedury kontrolujące FWE;
- procedury kontrolujące FDR.

Do uniwersalnych procedur testowań wielokrotnych kontrolujących FWE zaliczamy jednoetapową procedurę Bonferroniego oraz jej wieloetapową mo-

¹ Sposoby wyznaczania skorygowanych prawdopodobieństw testowych dla poszczególnych procedur testowań wielokrotnych przedstawione zostaną w dalszej części artykułu.

dyfikację — procedurę Holma. Procedura Bonferroniego jest najprostszą procedurą testowań wielokrotnych, a jej algorytm można przedstawić następująco:

$$\text{odrzucaamy } H_{0,i} \text{ wtedy gdy } p_i \leq \frac{\alpha}{k}.$$

Metoda Bonferroniego jest bardzo konserwatywna, czyli jest metodą o malej mocy. Skorygowane prawdopodobieństwa testowe dla metody Bonferroniego wyznaczane są ze wzoru:

$$\tilde{p}_j = \min(kp_j; 1) \quad \text{dla } j = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Procedura Holma jest mniej konserwatywna niż metoda Bonferroniego, bowiem każda hipoteza odrzucona przez metodę Bonferroniego jest odrzucona również przez metodę Holma, natomiast hipotezy odrzucone przez metodę Holma mogą nie zostać odrzucone przez metodę Bonferroniego. Dla uporządkowanych prawdopodobieństw testowych $p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(k)}$ skorygowane prawdopodobieństwa testowe dla metody Holma wyznaczane są ze wzorów:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(1)} &= \min(1; kp_{(1)}) \quad \text{oraz} \\ \tilde{p}_{(j)} &= \min\left(1; \max(\tilde{p}_{(j-1)}, (k-j+1)p_{(j)})\right) \\ &\quad \text{dla } j = 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2)$$

Procedurę Bonferroniego można zmodyfikować korzystając z nierówności Šidáka w przypadku, gdy rozpatrywane statystyki testowe tworzą wielowymiarowy rozkład normalny lub rozkład *t*-Studenta o niezależnych składowych (Hochberg i Tamhane, 1987; Shaffer, 1995), a rozważane hipotezy alternatywne mają dwustronne zbiory krytyczne. Modyfikacja metody Bonferroniego polega na zastąpieniu $\frac{\alpha}{k}$ przez $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{k}}$. Prawdopodobieństwa skorygowane dla procedury Bonferroniego-Šidáka liczone są ze wzoru:

$$\tilde{p}_j = \min\left(1 - (1 - p_j)^k; 1\right) \quad \text{dla } j = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Jak wykazali Holland i Copenhaver (1987) procedura Bonferroniego-Šidáka kontroluje FWE również w przypadku, gdy statystyki testowe mają dodatnią zależność orthantową (Denuit i Scaillet, 2004).

Procedura Holma-Šidáka jest modyfikacją metody Holma opartą na nierówności Šidáka. Skorygowane prawdopodobieństwa testowe dla tej metody wyznaczane są ze wzorów:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(1)} &= \min\left(1; 1 - (1 - p_{(1)})^k\right) \text{ oraz} \\ \tilde{p}_{(j)} &= \min\left(1; \max\left(\tilde{p}_{(j-1)}, 1 - (1 - p_{(j)})^{k-j+1}\right)\right), \\ &\text{dla } j = 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (4)$$

Procedura Shaffer to modyfikacja procedury Holma dla hipotez logicznie powiązanych. Z hipotezami logicznie powiązanymi mamy do czynienia np. w przypadku porównywania parami wartości przeciętnych. Prawdopodobieństwa skorygowane dla tej metody wyznaczamy ze wzorów:

$$\tilde{p}_{(1)} = \min(1; kp_{(1)}) \text{ oraz } \tilde{p}_{(j)} = \min\left(1; \max(\tilde{p}_{(j-1)}, t_j p_{(j)})\right) \text{ dla } j = 2, \dots, k, \quad (5)$$

gdzie t_j — jest to maksymalna liczba hipotez zerowych, dla których możemy stwierdzić brak podstaw do odrzucenia, gdy $(j - 1)$ — hipotez jest już odrzuconych.

Kontrolę FDR dla niezależnych statystyk testowych zapewnia procedura LSU (*Linear Step-Up*), zaproponowana przez Hochberga i Benjaminiego (1995). Skorygowane prawdopodobieństwa testowe dla procedury Hochberga-Benjaminiego otrzymujemy ze wzorów:

$$\tilde{p}_{(k)} = p_{(k)}; \quad \tilde{p}_{(k-j)} = \min\left(\tilde{p}_{(k-j+1)}, \frac{k}{k-j} p_{(k-j)}\right) \text{ dla } j = 1, \dots, k - 1. \quad (6)$$

Benjamini i Yekutieli (2001) wykazali, że procedura LSU zapewnia kontrolę FDR również w przypadku statystyk testowych o zależności dodatnio regresyjnej.

Uniwersalną procedurą kontrolującą FDR jest procedura Yekutieliiego-Benjaminiego². Jest ona modyfikacją procedury LSU (*Linear Step-Up*) Hochberga-Benjaminiego zapewniającą kontrolę FDR bez względu na typ zależności pomiędzy statystykami testowymi. Niestety procedura ta jest procedurą konserwatywną w porównaniu z procedurą LSU. Skorygowane prawdopodobieństwa testowe dla metody Yekutieliiego-Benjaminiego wyznaczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(k)} &= \min\left(1; p_{(k)} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}\right) \text{ oraz} \\ \tilde{p}_{(k-j)} &= \min\left(\tilde{p}_{(k-j+1)}, p_{(k-j)} \frac{k}{k-j} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}\right) \\ &\text{dla } j = 1, \dots, k - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

² Patrz Benjamini i Yekutieli (2001).

4. WYDZIELANIE JEDNORODNYCH PODGRUP WARTOŚCI PRZECIĘTNYCH

Przydatność procedur testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych do wydzielenia jednorodnych podgrup wartości przeciętnych badano poprzez konfrontację tych procedur z procedurami klasycznymi w modelu jednoczynnikowej zrównoważonej analizy wariancji.

Klasyczne procedury *post-hoc*, procedury oparte na analizie skupień oraz wybrane, na podstawie teoretycznych rozważań, procedury testowań wielokrotnych oparte na prawdopodobieństwach testowych, zastosowano w przykładach empirycznych dotyczących wyodrębniania grup gospodarstw domowych o jednorodnym poziomie przeciętnych wydatków na osobę na wybrane artykuły. Badania empiryczne zaprezentowane przez autorkę (Denkowska, 2005) pokazały typowe problemy napotymane przy stosowaniu klasycznych procedur *post-hoc*. Procedury porównań wielokrotnych od lat dostępne w pakietach statystycznych nadal budzą sporo kontrowersji. Różnorodność otrzymywanych wyników, nierozłączność jednorodnych podzbiorów wartości oczekiwanych, to tylko niektóre z czynników zniechęcających badaczy do sięgania po te procedury. Procedury oparte na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych wypadły w badaniach porównywalnie, a czasami nawet lepiej niż rozwiązania klasyczne (Denkowska, 2005). Na szczególne wyróżnienie zasługiwała procedura Holma, która niejednokrotnie dawała więcej odrzuceń hipotez zerowych, niż zalecana w literaturze do tego typu badań procedura Tukeya. Biorąc pod uwagę rezultaty badań empirycznych oraz zalety procedur testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych, takie jak szeroki zakres ich zastosowań oraz prostotę ich stosowania, kontynuowano badania nad efektywnością i wykorzystaniem tych procedur do bardziej zaawansowanych problemów testowań wielokrotnych.

W celu porównania efektywności klasycznych procedur *post-hoc* z procedurami testowań wielokrotnych opartymi na prawdopodobieństwach testowych w modelu statystycznym jednoczynnikowej zrównoważonej analizy wariancji, autorka artykułu (Denkowska, 2006b) przeprowadziła rozbudowane badania Monte Carlo. Badania te polegały na generowaniu prób z rozkładów normalnych o znanych parametrach, a następnie badaniu, czy decyzja podjęta na podstawie tych prób jest poprawna, czy nie. Próby takie były generowane wielokrotnie, a prawdopodobieństwo poprawnej decyzji było szacowane jako częstość występowania dobrych decyzji.

Procedury poddane badaniom symulacyjnym można podzielić na trzy grupy. Jedną grupę procedur stanowiły najpopularniejsze procedury klasyczne dostępne w pakiecie STATISTICA: procedura NIR, procedura Tukeya, procedura Scheffégo, procedura Duncana oraz procedura Newman-Keulsa. Pozostałe procedury to wybrane procedury testowań wielokrotnych oparte na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych, które można zastosować w przypadku modelu jednoczynnikowej zrównoważonej analizy wariancji do wydzielenia

jednorodnych podgrup. Grupę drugą — grupę procedur kontrolujących prawdopodobieństwo popełnienia przynajmniej jednego błędu I rodzaju na poziomie α (FWE), tworzyły: procedura Bonferroniego, procedura Bonferroniego-Šidaka, procedura Holma, procedura Holma-Šidaka oraz procedura Shaffer dla hipotez logicznie powiązanych. W skład grupy trzeciej wchodziły procedury kontrolujące FDR, czyli wartość oczekiwaną frakcji błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń. Badaniom poddano: procedurę LSU Hochberga-Benjaminiego³ oraz procedurę Yekutieli-Benjaminiego. Tak więc badaniami Monte Carlo objęto 12 procedur porównań wielokrotnych. Program symulacyjny porównujący 12 procedur MCP napisano w języku STATISTICA Visual Basic (SVB). W programie wykorzystano gotowe, oprogramowane w STATISTICE, popularne procedury klasyczne z pierwszej grupy procedur. Procedury z dwóch pozostałych grup zostały oprogramowane w oparciu o wyznaczone w STATISTICE prawdopodobieństwa testowe dla par wartości przeciętnych.

Zarówno przeprowadzone badania symulacyjne, jak i badania empiryczne pokazały, że procedury testowań wielokrotnych oparte na prawdopodobieństwach testowych mogą stanowić poważną konkurencję dla procedur klasycznych. W przypadku procedur kontrolujących FWE w rozważanym w pracy modelu statystycznym zrównoważonej analizy wariancji, efektywność procedur opartych na prawdopodobieństwach testowych była porównywalna z efektywnością procedur klasycznych. Spośród procedur klasycznych wysoką efektywnością charakteryzowały się procedury Newman-Keulsa i Duncana, jednak stosowanie tych procedur nie jest zalecane w praktyce badawczej, gdyż nie kontrolują one FWE na zadanym poziomie. Szczególnie zalecana w literaturze przedmiotu do porównań parami w rozważanym modelu statystycznym jest procedura Tukeya. W prowadzonych badaniach symulacyjnych dobrze wypadły wieloetapowe procedury testowań wielokrotnych, osiągając niejednokrotnie efektywność wyższą od efektywności klasycznej procedury Tukeya. Badania Monte Carlo nie stanowią formalnego dowodu, jednak biorąc dodatkowo pod uwagę fakt, iż procedury takie jak np. procedura Holma, czy jej modyfikacja zaproponowana przez Shaffer mogą być stosowane do porównywania parami wartości przeciętnych również w sytuacjach, gdy założenia modelowe analizy wariancji nie są spełnione, z pewnością warto promować tę grupę metod porównań wielokrotnych.

Podsumowując wyniki empiryczne i symulacyjne dotyczące procedur testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych, można stwierdzić, że spośród metod kontrolujących FWE na szczególne wyróżnienie zasługuje wieloetapowa metoda Holma. Zarówno modyfikacja zaproponowana przez Shaffer, polegająca na uwzględnieniu logicznych powiązań pomiędzy

³ Procedura Hochberga-Benjaminiego, na podstawie badań symulacyjnych przeprowadzonych przez Y. Benjaminiego, Y. Hochberga oraz Y. Klinga, zapewnia kontrolę FDR w przypadku rozpatrywanych w eksperymencie porównań parami. Więcej na ten temat u Benjaminiego i Yekutieli, 2001.

hipotezami, jak również modyfikacja wykorzystująca nierówność Šidáka, nie wpłynęły znacząco na poprawę efektywności procedury Holma. Teoretyczna analiza prawdopodobieństw skorygowanych w przypadku procedury Holma-Šidáka nie zapowiadała rewolucyjnych zmian i fakt ten potwierdziły badania symulacyjne. Zastosowanie nierówności Šidáka skomplikowało natomiast prostotę obliczeniową metody Holma, a uzyskana tą drogą korekta wartości skorygowanych okazała się nieznaczna, przy czym modyfikacja ta zapewnia kontrolę FWE tylko w przypadku niezależnych lub charakteryzujących się dodatnią zależnością orthantową statystyk testowych. Właściwie niezauważalna jest poprawa efektywności metody Holma w wyniku zastosowania modyfikacji Shaffer. Wydaje się jednak, że korzyść z zastosowania tej poprawki dla hipotez logicznie powiązanych będzie widoczniejsza przy rozpatrywaniu większej liczby parametrów. W przypadku rozpatrywania znacznej liczby wartości przeciętnych, gdy w rozpatrywanych badaniach wystarczy kontrola wartości oczekiwanej frakcji błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń na z góry zadanim poziomie, warto polecić procedurę LSU Hochberga-Benjaminiego. Natomiast uniwersalna procedura Yekutieli-Benjaminiego okazała się procedurą bardzo konserwatywną i to nie tylko w stosunku do procedury LSU.

5. TESTOWANIE WIELOKROTNE W MACIERZY KORELACJI

W wielu praktycznych zastosowaniach statystyki i ekonometrii zachodzi konieczność wnioskowania o istotności współczynników korelacji liniowej w macierzy korelacji. Podzbiorów wzajemnie skorelowanych zmiennych poszukujemy testując wielokrotnie w macierzy korelacji, m.in. przy wyborze zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego, zmiennych definiujących przestrzeń klasyfikacji w analizie skupień, zmiennych tworzących wskaźniki agregatywne, zmiennych diagnostycznych w analizie dyskryminacyjnej. We wszystkich wymienionych przypadkach zazwyczaj ignorowany jest fakt testowania wielokrotnego. Dostępne w literaturze klasyczne testy globalne dotyczące współczynników korelacji liniowej (Domański, 1990) pozostawiają badacza w kłopotliwej sytuacji, gdy zostanie odrzucona hipoteza zerowa. Wówczas, aby wysnuć bardziej szczegółowe wnioski i wskazać istotne statystycznie współczynniki korelacji, najczęściej stosowanym rozwiązaniem jest testowanie istotności współczynników korelacji, każdego na poziomie istotności α . Brak klasycznych rozwiązań kontrolujących efekt testowania wielokrotnego w przypadku badania istotności współczynników korelacji w macierzy korelacji powoduje, że przydatność procedur testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych jest bezsprzeczna.

Testowanie z wykorzystaniem procedur opartych na prawdopodobieństwach testowych należy rozpocząć od określenia rodziny wnioskowań. Bardzo ważne jest,

by na wstępie badań starać się poprzez analizę merytoryczną oraz analizę formalno-statystyczną maksymalnie zredukować liczbę wnioskowań, czyli w przypadku testowania wielokrotnego w macierzy korelacji — zredukować liczbę zmiennych. Po przeprowadzeniu analizy merytorycznej i formalno-statystycznej zostaje ustalona liczba rozważanych zmiennych, a tym samym znana jest rodzina wnioskowań. Kolejny etap polega na wyznaczeniu prawdopodobieństw testowych dla całej rozważanej rodziny wnioskowań, a następnie na zastosowaniu „najlepszej” z procedur testowań wielokrotnych opartych na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych. Wybór „najlepszej” procedury rozumiany jest jako wskazanie procedury o największej mocy, w zależności od wyboru miary kontroli błędu I rodzaju dla całej rodziny wnioskowań. W przypadku kontroli FWE w macierzy korelacji, wybór zawiąże się do dwóch metod: Bonferroniego oraz metody „sekwencyjnego odrzucania” Holma, które można polecić bez względu na typ zależności pomiędzy statystykami testowymi. Metodą większej mocy spośród rozważanych, jest metoda Holma, bowiem w wyniku jej zastosowania liczba wykrytych istotnych współczynników korelacji będzie nie mniejsza od liczby wykrytych istotnych współczynników korelacji przez metodę Bonferroniego, przy zapewnieniu kontroli prawdopodobieństwa błędnego stwierdzenia jednej lub więcej istotnych współzależności pomiędzy zmiennymi na założonym poziomie α dla całej rodziny wnioskowań. W przypadku, gdy zalecana redukcja zmiennych nie spowoduje znacznego zmniejszenia liczby cech i rodzina wnioskowań jest bardzo liczna, warto rozważyć kontrolę FDR przy pomocy metody Yekutieli–Benjaminiego. Dla dużych macierzy korelacji kontrola FWE nie jest rozwiązaniem satysfakcjonującym badaczy. Przy licznej rodzinie wnioskowań indywidualne poziomy istotności, w przypadku procedur FWE, są tak małe, iż zbyt rzadko dochodzi do odrzuceń hipotez zerowych i stwierdzania istotnych współzależności pomiędzy zmiennymi. Tak więc w sytuacji dużych macierzy korelacji, jeśli dopuszczamy $\alpha 100\%$ — błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń hipotez zerowych, warto wykorzystać procedurę Yekutieli–Benjaminiego, kontrolującą FDR na poziomie α . W praktyce oznacza to, że akceptujemy niewielki procent współczynników błędnie uznanych za istotne, wśród wszystkich uznanych za istotne współczynników korelacji.

W przykładzie empirycznym, zaprezentowanym u autorki (Denkowska, 2006a), wyznaczano cechy diagnostyczne do oceny przestrzennego zróżnicowania sytuacji mieszkaniowej w Polsce w 2002 roku. Przedstawiono w nim dwa podejścia: jedno polegające na tradycyjnym wnioskowaniu w macierzy korelacji, w którym ignorowany jest efekt wielokrotności testowania oraz drugie podejście, w którym efekt ten kontrolowano za pomocą wybranych metod testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych. Do kontroli efektu wielokrotności testowania zastosowano wybrane uniwersalne procedury kontrolujące FWE i FDR. Przykład empiryczny pokazał, że lekceważenie efektu testowania wielokrotnego powoduje wykrywanie zbyt wielu istotnych współ-

czynników korelacji, co w rezultacie skutkuje zbytnią redukcją zmiennych diagnostycznych. Tym samym, w finalnym zbiorze zmiennych może zabraknąć ważnych zmiennych diagnostycznych.

Dobór zmiennych objaśniających do modeli ekonometrycznych jest jednym z najistotniejszych zagadnień współczesnej ekonometrii. Od lat bardzo popularną metodą doboru zmiennych objaśniających do liniowego modelu regresji jest metoda oparta na badaniu istotności współczynników korelacji w macierzy korelacji (Bartosiewicz, 1980; Grabiński i wsp., 1982). Metoda ta jest spotykana w literaturze pod nazwą metody analizy grafów (Goryl i wsp., 2003) i znajduje zastosowanie przede wszystkim w przypadku, gdy rozpatrywana jest niezbyt liczna rodzina potencjalnych zmiennych objaśniających. W metodzie tej ignorowany jest fakt testowania wielokrotnego w macierzy korelacji i wnioski wysnuwane są po zweryfikowaniu wielu hipotez statystycznych, każdej na poziomie istotności α . Lekceważenie efektu testowania wielokrotnego powoduje zbytnią redukcję zmiennych objaśniających.

Autorka (Denkowska, 2007a) zaproponowała modyfikacje metody analizy grafów uwzględniające efekt wielokrotności testowania w macierzy korelacji. Modyfikacje te polegają na wykorzystaniu odpowiednich procedur testowań wielokrotnych kontrolujących FWE lub FDR do kontroli efektu testowania wielokrotnego istotności współczynników korelacji liniowej w macierzy korelacji. W przypadku, gdy istotne jest, by prawdopodobieństwo błędnego stwierdzenia jednej lub więcej istotnych statystycznie zależności było kontrolowane na poziomie α , najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie modyfikacji opartej na metodzie Holma. Kontrola FWE na poziomie α oznacza, że uzyskane istotne wyniki możemy z dużym zaufaniem przyjąć, gdyż prawdopodobieństwo błędnego alarmu jest niewiększe od α . Natomiast w sytuacji licznej rodziny wnioskowań warto rozważyć, czy nie wystarczy kontrola (FDR) wartości oczekiwanej frakcji błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń na z góry ustalonym poziomie. W przypadku bowiem „dużych” macierzy korelacji, a tym samym licznej rodziny wnioskowań, gwałtownie maleje moc indywidualnych testów w przypadku zastosowania procedur kontrolujących FWE, a tym samym w wyniku zastosowania tych procedur otrzymujemy zbyt mało istotnych wyników. Modyfikacja metody analizy grafów, oparta na uniwersalnej procedurze Yekutieli-Benjaminiego pozwala uniknąć zachowawczej postawy procedur kontrolujących FWE. Wybór przez badacza tej miary błędu I rodzaju dla rodziny wnioskowań oznacza, że dopuszcza on i akceptuje pewien niewielki procent $\alpha 100\%$ — błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń, a w zamian za to oczekuje mniej ostrożnej postawy niż w przypadku kontroli FWE i w efekcie większej liczby wykrytych istotnych statystycznie zależności. Z pewnością jest to lepsze rozwiązanie niż ignorowanie faktu testowania wielokrotnego.

6. TESTOWANIE WIELOKROTNE PRZY WERYFIKACJI OCEN PARAMETRÓW STRUKTURALNYCH LINIOWEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO

Procedury testowań wielokrotnych oparte na prawdopodobieństwach testowych można polecić również do kontroli efektu testowania jednoczesnego przy weryfikacji ocen parametrów strukturalnych liniowego modelu ekonometrycznego.

Badania empiryczne prowadzone przez autorkę (Denkowska, 2007b), dotyczące płac w okresie transformacji systemowej w Polsce, nawiązywały do badań prowadzonych przez zespół kierowany przez S. M. Kota⁴ (1999). Pokazują one w jaki sposób należy przeprowadzać kontrolę testowania wielokrotnego istotności parametrów strukturalnych w modelach regresji wielorakiej oraz jakie są skutki braku takiej kontroli.

Należy zatem mieć świadomość, że niekontrolowane testowanie równoległe wielu hipotez prowadzić może do „bardzo kiepskich modeli”. Tam, gdzie to możliwe, konieczne jest ograniczanie liczby testowań. Zaleca się również stosowanie metod wyboru zmiennych objaśniających, które nie opierają się na wnioskowaniu wielokrotnym (np. metoda Z. Hellwiga) lub kontrolują ten efekt (zmodyfikowana metoda analizy grafów, Denkowska 2007a). W przypadku bardzo bogatych zbiorów zmiennych kuszące jest wykorzystanie np. sekwencyjnych metod doboru zmiennych. Jednak na końcowym etapie budowy modelu regresji konieczne jest skorygowanie wyników poprzez kontrolę efektu testowania wielokrotnego współczynników regresji cząstkowej. W przykładzie zaprezentowanym przez autorkę (Denkowska, 2007b), metody testowań wielokrotnych zastosowane do modelu regresji, uznanego za ostateczny przez autorów *Analizy ekonometrycznej kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*, pozwoliły stwierdzić, że aż trzy zmienne niesłusznie zostały uznane za istotne statystycznie. Tym samym budowa modelu regresji powinna być kontynuowana. Rezultat ten otrzymano na podstawie analizy ostatecznego modelu regresji, bez ingerowania w proces budowy modelu. Przykład ten wskazuje na konieczność kontroli efektu testowania wielokrotnego istotności współczynników regresji cząstkowej, przynajmniej na końcowym etapie budowy modelu regresji. Kontrola ta pozwoli sprawdzić, czy pozostawione parametry strukturalne nie zostały uznane za istotne wyłącznie z powodu testowania wielokrotnego podczas weryfikacji ich istotności statystycznej.

Wszędzie tam, gdzie równoległe testujemy hipotezy dotyczące parametrów regresji należy zatem stosować metody testowań wielokrotnych. Wybie-

⁴ Autorzy *Analizy ekonometrycznej kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji* badali metodami ekonometrycznymi mechanizmy kształtujące rozkłady płac w okresie przechodzenia od odgórnie sterowanej gospodarki do normalnie funkcjonującego rynku pracy. Wszechstronne badania obejmowały między innymi estymację parametrów regresyjnych modeli płac.

rać można zarówno spośród klasycznych metod opartych na wielokrotnych przedziałach ufności (np. przedziały Scheffého, przedziały Bonferroniego), jak również spośród rozwiązań nieklasycznych, a w szczególności z metod testowań wielokrotnych opartych na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych. Spośród metod testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych autorka (Denkowska, 2007b) zaleca stosowanie metod uniwersalnych: Holma i Yekutieliiego-Benjaminiego. W przypadku kontroli FWE autorka poleca procedurę Holma, natomiast gdy rozważane są bardzo bogate zbiory, kilkudziesięciu lub kilkuset zmiennych, warto spojrzeć na testowanie mniej tradycyjnie i dopuścić pewien niewielki odsetek błędnych odrzuceń w zbiorze wszystkich odrzuceń. Zastosowanie procedur kontrolujących FWE w przypadku tak bogatych zbiorów powoduje, iż indywidualne decyzje są podejmowane przy tak małych indywidualnych poziomach istotności, że bardzo rzadko dochodzi do stwierdzenia istotności parametru regresji, a wniosek końcowy wysnuty będzie na poziomie istotności α dla całej rodziny wnioskowań. W przypadku kontroli FDR, metoda Benjaminiego-Yekutieliiego jest metodą uniwersalną, którą zastosować można zawsze bez względu na zależności między statystykami testowymi. W sytuacji, gdy badania dotyczą istotności parametrów strukturalnych ortogonalnego modelu liniowego lub gdy statystyki testowe są dodatkowo regresyjnie zależne (Lehmann, 1966), należy zastosować⁵ procedurę o większej mocy — procedurę Hochberga-Benjaminiego. Przy interpretacji wyników pamiętać jednak należy, że w tym przypadku α oznacza akceptowany odsetek błędnie uznanych za istotne współczynników regresji wśród wszystkich uznanych za istotne parametrów strukturalnych regresji wielorakiej.

7. PODSUMOWANIE

Na zakończenie warto wspomnieć o kierunkach badawczych zmierzających do poprawy mocy znanych procedur wnioskowań wielokrotnych, jak i wynalezienia nowych, lepszych rozwiązań. Istotną poprawę mocy procedur testowań wielokrotnych opartych na prawdopodobieństwach testowych można uzyskać poprzez zastosowanie repróbkiowania (ang. *resampling*) do oszacowania prawdopodobieństw testowych. Termin repróbkiowanie oznacza, że zaobserwowane dane są wielokrotnie wykorzystywane w analizie symulacyjnej w celu podjęcia wniosku. Prawdopodobieństwa uzyskane za pomocą technik repróbkiowania są zazwyczaj mniejsze od prawdopodobieństw testowych otrzymanych w wyniku zastosowania tradycyjnego testu *t*-Studenta. Testowanie wielokrotne oparte na repróbkiowaniu (np. Westfall i Young, 1993) wykorzystuje

⁵ Szerzej na ten temat u Benjaminiego i Yekutieliiego (2001).

empiryczną strukturę danych, a korzyść ze stosowania tej techniki jest szczególnie widoczna w przypadku silnych wewnętrznych korelacji w zbiorze danych. Wykorzystanie repróbki w testowaniu wielokrotnym propagują na przykład Westfall i Young (1993) oraz Bejamini i wsp. (2005). Metody te nie są jednak powszechnie dostępne w pakietach statystycznych, co utrudnia ich praktyczne wykorzystanie.

Kontrola FDR stwarza możliwość kontroli efektu testowań wielokrotnych w tych dziedzinach, w których typowe badania empiryczne polegają na rozpatrywaniu bardzo licznych rodzin wnioskowań. Znaczny konserwatyzm uniwersalnej procedury Yekutieli-Benjaminiego mobilizuje do bardziej wnikliwych badań nad procedurą LSU. Rozważane są różne modyfikacje poprawiające moc tej metody. Prowadzone są badania symulacyjne nad wymaganiami modelowymi procedury LSU, określającymi w jakich sytuacjach badawczych zapewni ona kontrolę FDR. W ostatnim czasie jedną z często rozważanych metod poprawy mocy procedury LSU jest metoda polegająca na wprowadzeniu dodatkowego etapu, którego zadaniem jest oszacowanie nieznannej liczby prawdziwych hipotez zerowych. W tym celu proponowane jest wykorzystanie metod graficznych, takich jak nieformalna metoda zaproponowana przez T. Schwedera i E. Spjøtvolla (1982), czy też nawiązująca do niej procedura Y. Hochberga, Y. Benjaminiego (zob. np. Westfall i wsp., 1999).

Podsumowując, należy stwierdzić, że w badaniach ekonomicznych przydatne mogą być zarówno procedury kontrolujące FWE, jak i FDR. Decyzja o tym, która z tych miar powinna być kontrolowana, należy do prowadzącego badania i jest zależna od wielu czynników. Przede wszystkim należy określić, czy w badaniach dopuszczany jest pewien niewielki procent błędnych odrzuceń. Jeśli tak, to w zamian zyskujemy zazwyczaj więcej istotnych statystycznie wyników. Przy interpretacji uzyskanych tą metodą rezultatów należy jednak pamiętać o odsetku wyników błędnie uznanych za istotne. Z kolei kontrola FWE powoduje, że wykrywana jest często zbyt mała część istotnych statystycznie zależności. A ponieważ dalszym badaniom zazwyczaj poddawane są jedynie istotne wyniki, przy jednoczesnym zignorowaniu rezultatów, przy których stwierdzono brak podstaw do odrzucenia, to w efekcie przy zastosowaniu procedur FWE utracić możemy ważne relacje. Zastosowanie procedur kontrolujących FDR pozwala uniknąć zachowawczej postawy FWE przy zapewnieniu kontroli frakcji błędnych odrzuceń wśród wszystkich odrzuceń hipotez zerowych na zadanym poziomie. I z pewnością jest to lepszym rozwiązaniem niż ignorowanie efektu wielokrotności testowania.

Warto na koniec podkreślić, że ignorowanie efektu wielokrotności prowadzi do wykrywania wielu zupełnie przypadkowych zależności. Zależności takie są później często eksponowane w naukowych, jak również popularnonaukowych publikacjach jako ciekawe czy wręcz zdumiewające wyniki badań. To z kolei budzi sceptycyzm wobec metod statystycznych, podczas gdy źródłem nieporo-

zumienia są niewłaściwie przeprowadzone badania, nieuwzględniające efektu testowania wielokrotnego.

*I believe it [FDR] is one of the cornerstones in the bridge that „multiple comparisons” can offer between traditional statistical thinking and modern problems in Data Mining and Bioinformatics. It is crucial for us to strengthen this bridge and widen it. We should look for more such bridges, if we want Statistics remain a vital and important player in the arena of information sciences.*⁶

BIBLIOGRAFIA

- Bartosiewicz S. (red.) 1980. *Metody ekonometryczne. Przykłady i zadania*, PWE, Warszawa, 1980.
- Benjamini Y., Hochberg Y. 1995. *Controlling the False Discovery Rate: a Practical and Powerful Approach to Multiple Testing*, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B 57, 1.
- Benjamini Y. 2001. *False Discovery Rate in Large Multiplicity Problems*; www.math.tau.ac.il/~ybenja/Temple.ppt
- Benjamini Y., Yekutieli D. 2001. *The Control of the False Discovery Rate in Multiple Testing Under Dependency*, Annals of Statistics 29.
- Benjamini Y., Kenigsberg E., Reiner A., Yekutieli D. 2005. *FDR Adjustments of Microarray Experiments*, www.math.tau.ac.il/~ybenja/Software/fdrame.pdf.
- Denkowska S. 1999. *Multiple Comparisons in Socio-Economic Research*, Kiev National University of Economics, Economic and Social Statistics in Transition, Proceedings of the Ukrainian, Polish and Slovak Scientific Seminar (Kiev, 20–22 October, 1998), Kiev.
- Denkowska S. 2005. *Zastosowanie procedur testowań wielokrotnych opartych na uporządkowanych prawdopodobieństwach testowych do wydzielenia jednorodnych podgrup wartości przeciętnych*, Przegląd Statystyczny 52, 1.
- Denkowska S. 2006a. *Multiple Testing in a Correlation Matrix*, [w:] *A Comparative Analysis of the Socio-Economic Consequences of Transition Process in Central and Eastern European Countries*, J. Pocięcha (red.), Cracow University of Economics.
- Denkowska S. 2006b. *Monte Carlo analysis of the effectiveness of Multiple Comparison Procedures*, 13th Slovak-Polish-Ukrainian Scientific Seminar in SvätĚ Jur , 7–10, November 2006.
- Denkowska S. 2007a. *Modyfikacja metody analizy grafów*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych — teoria i zastosowania*, Prace Naukowe AE 1169, Taksonomia 14, K. Jajuga, M. Walesiak (red.), Wydawnictwo AE, Wrocław.
- Denkowska S. 2007b. *Testowanie wielokrotne przy weryfikacji ocen parametrów strukturalnych liniowego modelu ekonometrycznego*, złożony do druku.
- Denuit M., Scaillet O. 2004. *Nonparametric tests for positive quadrant dependence*, Journal of Financial Econometrics, 2004, 2, 422–450.
- Domarński Cz. 1990. *Testy statystyczne*, PWN, Warszawa.
- Domarński Cz., Pruska K. 2000. *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa.
- Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A. 1982. *Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych*, PWN, Warszawa.
- Goryl A., Jędrzejczak Z., Kukuła K., Osiewalski J., Walkosz A. 2003. *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa.
- Hochberg Y., Tamhane A.C. 1987. *Multiple Comparison Procedures*, John Wiley & Sons, NY, 1987.

⁶ Patrz: Y. Benjamini (2001).

- Holland B., Copenhaver M.D. 1987. *An Improved Sequentially Rejective Bonferroni Test Procedure*, *Biometrics* 43, 417–423.
- Holm S. 1979. *A Simple Sequentially Rejective Test Procedure*, *Scandinavian Journal of Statistics*, 6.
- Kot S.M. (red.) 1999. *Analiza ekonometryczna kształtowania się plac w okresie transformacji*, PWN, Warszawa–Kraków.
- Lehmann E. 1966. *Some Concepts of Dependence*, *Annals of Mathematical Statistics*, 37, 1137–1153.
- Miller R.G. 1981. *Simultaneous Statistical Inference*, Springer-Verlag, New York.
- Schweder T., Spjøtvøll E. 1982. *Plots of p-Values to Evaluate Many Tests Simultaneously*, *Biometrika* 69, 3, 493–502.
- Shaffer J.P. 1995. *Multiple Hypothesis Testing*, *Annual Review of Psychology* 46, 561–584.
- Sokołowski A., Denkowska S. 2000. *Testowanie wielokrotne w macierzy korelacji — eksperyment symulacyjny*, [w:] *Materiały z XXXV Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej (Osieczany, 23–25 III 1999 r.)*, A. Zeliaś (red.), Kraków.
- Westfall P.H., Young S.S. 1993. *Resampling Based Multiple Testing*, Wiley, New York.
- Westfall P.H., Tobias R.D., Rom D., Wolfinger R.D., Hochberg Y. 1999. *Multiple Comparisons and Multiple Tests, Using the SAS System*, SAS Institute Inc.

**PROF. DR HAB. ANNA JANKOWSKA-KŁAPKOWSKA
(1925–2004)**

ZDZISŁAW JAN BRODA

30 października 2004 roku opuściła grono krakowskich ekonomistów prof. dr hab. Anna Jankowska-Kłapkowska, znana i wysoko ceniona, zarówno za Jej zasługi dla nauki i kształcenia młodzieży akademickiej, jak i za osobiste przymioty. Urodziła się 29 kwietnia 1925 roku w Łodzi (jako córka Stanisława i Marii z domu Petrowskiej); tamże w roku 1939 ukończyła szkołę powszechną. Bezpośrednio po wojnie wraz z rodziną przeniosła się do Krakowa, gdzie pracowała do końca życia. W 1949 zdała egzamin dojrzałości w Liceum Handlowym, zweryfikowany w zakresie liceum humanistycznego. Rozważała trzy kierunki studiów wyższych: ekonomia, pedagogika bądź dziennikarstwo. W roku 1949 podjęła studia na Wydziale Dziennikarskim WSNS w Krakowie, które ukończyła w roku 1951. Niemal równolegle pracowała w Studium Naukowo-Badawczym WSNS w charakterze asystenta-pracownika naukowego. Prowadziła zajęcia w Państwowej Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie w latach 1950–1952. Przeniosła się do Zakładu Ekonomii Politycznej w Akademii Górniczo-Hutniczej 1 października 1952 roku i odtąd była związana z tą uczelnią do końca życia.

W czasie swojej pracy zawodowej na AGH odbyła wiele staży zawodowych oraz wyjazdów zagranicznych. Prowadziła stałą współpracę z różnymi ośrodkami naukowymi krajowymi i zagranicznymi. Była organizatorem wielu konferencji i seminariów naukowych oraz uczestniczyła w konferencjach międzynarodowych, jako referent i dyskutant. Początkowo została zatrudniona na stanowisku starszego asystenta. Jeszcze w październiku podjęła studia magisterskie na Wydziale Przemysłu Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Krakowie. W lutym 1953 Kierownik Katedry Ekonomii AGH powierzył Jej prowadzenie wykładów z ekonomii politycznej. 1 stycznia 1954 została awansowana na stanowisko adiunkta. W roku 1955 ukończyła studia II stopnia w Wyższej Szkole Ekonomicznej uzyskując tytuł magistra ekonomii. Dopiero wtedy zrezygnowała z młodzieńczych pragnień zostania dziennikarką — zdecydowała o tym satysfakcja płynąca

z zawodu nauczyciela akademickiego oraz perspektywy zaangażowania się w pracy naukowej z zakresu ekonomii.

Początkowo nie miała sprecyzowanych zainteresowań tematycznych. W czasie studiów i pracy na WSP zainteresowała się gospodarką bułgarską, a jej hobby stała się nauka języka bułgarskiego (1949–1951). Zaowocowało to drobnymi przyczynkami na temat rolniczych spółdzielni produkcyjnych (1949), rozwoju i osiągnięć rolnictwa bułgarskiego (1951), przemysłu bułgarskiego (1950) oraz planu rozwoju gospodarczego Bułgarii na rok 1950.

Po przejściu do Katedry Ekonomii Politycznej AGH doc. dr hab. B. Kłapkowski w ramach podziału pracy naukowo-badawczej przydzielił Jej problematykę rachunku makroekonomicznego, rachunku efektywności inwestycji i postępu technicznego. Jako pole badań i egzemplifikacji tych zagadnień wybrała region górniczy oraz gałęzie przemysłu wydobywczego surowców mineralnych oraz ich przetwórstwa. Wprawdzie te układy gospodarcze wchodzą w zakres mezoekonomii, ale zawsze starała się uwzględniać przy ich rozpatrywaniu kryteria i aspekty makroekonomiczne. Już w trakcie przygotowywania rozprawy doktorskiej *Rachunek ekonomiczny we wstępnej fazie zagospodarowania złóż*, obronionej na Wydziale Przemysłu Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Krakowie w roku 1956, a napisanej pod kierownictwem naukowym prof. dra Wiktora Bonieckiego, Autorka związała się z problematyką leżącą w profilu naukowym i dydaktycznym Akademii Górniczo-Hutniczej. Stopniowo ją poszerzała i pogłębiała przez cały okres swej aktywności naukowej.

Jej dysertacja habilitacyjna *Kategorie ekonomiczne w rachunku bilansowości złóż*, przedstawiona na Wydziale Produkcji i Obrotu Towarowego (kolokwium habilitacyjne w dniu 5 czerwca 1967 roku) stanowi dalsze pogłębienie tej problematyki pod kątem podnoszenia efektywności gospodarowania w przemyśle wydobywczym. W roku 1968 została docentem na AGH, w 1973 — profesorem nadzwyczajnym, a w 1983 — profesorem zwyczajnym. Oto podstawowe wydarzenia w Jej karierze Naukowej, po uzyskaniu habilitacji.

- 1 października 1967 roku została powołana na stanowisko p.o. kierownika Zakładu i Katedry Ekonomii Politycznej AGH, a w następnym roku przedłużono Jej angaż na kolejny rok.
- Przed upływem tego okresu została Jej powierzona funkcja dyrektora Instytutu Nauk Społecznych AGH w organizacji, w skład którego została włączona także Katedra Ekonomii, podzielona na cztery zakłady tworzące tzw. Pion Nauk Ekonomicznych INS. Funkcję tę pełniła w latach 1969–1980, łącząc ją z funkcją kierownika Zakładu Ekonomii Politycznej.
- 1 kwietnia 1980 roku został powołany Instytut Nauk Ekonomicznych wyodrębniony z INS — Pion Zakładów Nauk Ekonomicznych. Na jego dyrektora została mianowana prof. dr hab. Anna Jankowska-Kłapkowska. Również w jego ramach pełniła nadal także funkcję kierownika Zakładu Ekonomii Politycznej i Polityki Gospodarczej (do 1991 roku).

- W roku 1991 INE został zlikwidowany — wraz z reformą szkolnictwa wyższego nastąpiło rozwiązanie jednostek instytutowych i powrót AGH do struktury katedralnej; prof. A. Jankowska-Kłapkowska została powołana na stanowisko kierownika wyodrębnionej Katedry Ekonomii i Gospodarki Zasobami Przyrody. Funkcję tę pełniła do chwili przejścia na emeryturę w roku 1999 (przez następne dwa lata pracowała tam nadal w niepełnym wymiarze etatu).
- W latach 1974–1980 prowadziła Seminarium „Makroorganizacje i zastosowania metod matematycznych w ekonomii”.
- Wraz z powstaniem Wydziału Organizacji i Zarządzania Przemysłem na AGH powierzono Jej funkcję prodziekana, którą pełniła w latach 1980–1981.
- W roku 1981 została pierwszym dziekanem z wyboru Wydziału Organizacji i Zarządzania Przemysłem AGH, którą pełniła do końca kadencji w roku 1984.
- Przez prawie czterdzieści lat — jako członek Senatu AGH — uczestniczyła w pracach różnych komisji senackich, rektorskich. W latach 1968–1971 reprezentowała pomocniczych pracowników nauki, a od roku 1975 do emerytury była reprezentantem samodzielnych pracowników nauki instytutów i Wydziału, na których pracowała.
- W latach 1984–1992 pracowała w Centrum Podstawowych Problemów Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN na stanowisku kierownika Pracowni Analiz i Programowania Rozwoju Gospodarki Surowcami Mineralnymi. Była wieloletnim członkiem Rady Naukowej Centrum.
- W latach dziewięćdziesiątych była członkiem Komitetu Gospodarki Surowcami Mineralnymi PAN.
- Od lat siedemdziesiątych wchodziła w skład Komisji Nauk Ekonomicznych PAN Oddział w Krakowie.
- Sprawowała też funkcję członka Prezydium Komitetu Nauk Ekonomicznych PAN w latach 1986–1988.
- W latach 1973–1979 oraz 1984–1986 uczestniczyła w pracach Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej ds. Kadry Naukowej w zespole ekonomicznym.
- Do Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego należała od roku 1964 przejściowo, pełniąc funkcję skarbnika Prezydium OW w Krakowie.
- Należała też do polskiego zespołu „Man & Biosphere”; International Association for Impact Assessment, a także International Society for Ecological Economics.
- Należała do Polskiego Klubu Ekologicznego od momentu powstania i brała udział w jego działalności naukowej.
- Do Europejskiego Stowarzyszenia Ekonomistów Środowiska i Zasobów Naturalnych Oddział Polski należała od 1991 roku jako współzałożyciel i przewodnicząca (w latach 1994–1998).
- Była członkiem i zastępcą przewodniczącego Rady Programowej Czasopisma „Ekonomia i Środowisko”, wydawanego przez Fundację Ekonomistów Środowiska i Zasobów Naturalnych oraz — również do końca życia — była

członkiem Rady Redakcyjnej kwartalnika „Gospodarka Surowcami Mineralnymi”, organu Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN w Krakowie.

- Prof. A. Jankowska-Kłapkowska posiadała bogate doświadczenie redakcyjne i dorobek edytorski. W latach 1970–1977 pełniła funkcję zastępcy redaktora, a w latach 1978–84 — redaktora „Zeszytów Naukowych Akademii Górniczo-Hutniczej”, serii wydawniczej „Zagadnienia Techniczno-Ekonomiczne”.
- Opracowała redakcyjnie i przygotowała do druku wiele materiałów z organizowanych przez INS, INE oraz KEiGZP konferencji, seminariów i sympozjów naukowych.

W roku 1999 przeszła na emeryturę, ale nadal — do 2001 roku — pracowała na AGH w niepełnym wymiarze etatu. Pod koniec tego okresu prowadziła ponadto zajęcia dydaktyczne na takich uczelniach, jak: Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie, Akademia Polonijna w Częstochowie, Śląska Wyższa Szkoła Zarządzania w Katowicach, Profesjonalna Szkoła Biznesu — Szkoła Wyższa w Krakowie, Wyższa Szkoła Zarządzania i Bankowości w Krakowie oraz Małopolska Wyższa Szkoła Zawodowa w Krakowie.

Na uwagę zasługuje Jej współpraca z uczelniami zagranicznymi. Wyjeżdżała za granicę na staże i konferencje naukowe — swobodnie posługując się trzema językami występowała jako referent i dyskutant. Utrzymywała też stałe kontakty z poznanymi tam osobami. W ramach umów o stałej współpracy odbywała staże w Wyższej Szkole Górniczej w Ostrawie, Uniwersytecie Przemysłu Ciężkiego w Miskolcu, Instytutach Górniczych w Leningradzie i Moskwie, Akademii Górniczej we Freibergu, Uniwersytecie Technicznym w Clausthal, Niemieckiej Akademii Nauk, Ecole des Hautes Études en Sciences Sociales w Paryżu i in.

Prof. dr hab. Anna Jankowska-Kłapkowska niezależnie od pracy zawodowej i związanej z nią przynależności organizacyjnej szeroko udzielała się w pracy społecznej. Do najważniejszych funkcji należy zaliczyć funkcję radnej MRN, którą pełniła przez trzy kadencje. Była też cenionym wykładownicą kursów i szkoleń organizowanych przez Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Towarzystwo Wiedzy Powszechnej oraz stowarzyszeń zrzeszonych w Naczelnej Organizacji Technicznej. Bardzo długo współpracowała z resortami i zjednoczeniami, dla których przygotowywała programy doskonalenia zawodowego kadry kierowniczej. Opracowywała materiały dydaktyczne do wykładów dla Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Przemysłu Naftowego, dla Ośrodka Doskonalenia Kadr Kierowniczych i Specjalistycznych Ministerstwa Hutnictwa w Błachowni, dla Ośrodka Doskonalenia Kadr Ministerstwa Przemysłu Ciężkiego w Chorzowie i in.

Należy wysoko ocenić Jej rolę jako organizatora zespołowych prac naukowych, projektów aktów prawnych oraz rozmaitych programów, wytycznych, instrukcji znajdujących zastosowanie w przemyśle wydobywczym i przetwórczym. Posiadała też uprawnienia eksperta szeregu stowarzyszeń oraz była konsultantem zjednoczeń i przedsiębiorstw przemysłowych. Prof. A. Jankowska-

-Kłapkowska w informacji o swoim dorobku, zamieszczonej w *Wielkiej Księdze 85-lecia Akademii Górniczo-Hutniczej* (wyd. Mastermedia sp. z o.o., Gliwice 2004) podaje 123 publikacje własne (prawdopodobnie było ich więcej), w tym 5 książek. Do tego wykazu należałoby dodać kilkadziesiąt elaboratów niepublikowanych, zawartych w opracowaniach dla zleceniodawców z resortów, zjednoczeń, przedsiębiorstw, różnych instytucji i stowarzyszeń. Po roku 1990 opracowała wiele recenzji prac doktorskich (16) i habilitacyjnych (15), ocen dorobku naukowego i zawodowego do wniosków awansowych o nadanie tytułu profesora (24) oraz obsady stanowisk w niektórych instytucjach, opinii o programach lub wynikach badań zespołowych, ocen dorobku i poziomu naukowego czasopism i zespołów naukowo-badawczych, recenzji wydawniczych (18) itp.

Głównymi dziedzinami Jej zainteresowań była ekonomia i polityka gospodarcza. W ramach teorii ekonomii specjalizowała się w zakresie ekonomii środowiska i zasobów naturalnych, a w ramach polityki gospodarczej koncentrowała się na restrukturalizacji branż przemysłu wydobywczego i rozwoju regionów górniczych. Przenika je problematyka doskonalenia rachunku ekonomicznego w procesie pozyskiwania i zagospodarowania zasobów przyrody, ze szczególnym uwzględnieniem efektywności gospodarowania zasobami mineralnymi. Poza tym obszernym zbiorem publikacji pozostał — równie obszerny — dorobek w postaci opracowań, ekspertyz, opinii pisemnych i wystąpień publicznych nigdzie nie opublikowanych (na ogół bowiem nie dbała o los tego, co nie było przeznaczone do druku), dlatego wymaga on jeszcze zebrania, zinwentaryzowania, dokonania selekcji, analizy i oceny.

W dziedzinie teorii ekonomii prof. A. Jankowska-Kłapkowska jest autorką jednego i współautorką dwóch rozdziałów w podręczniku *Ekonomia polityczna dla wyższych szkół technicznych*, cz. II (PWN 1960, 1961, 1962, 1963). Opublikowała następujące prace:

- *Uwagi na temat wpływu wypadków przy pracy na dochód narodowy* (1961),
- *Fundusz amortyzacji, jako źródło finansowania reprodukcji rozszerzonej* (1964),
- *Ogólna analiza procesu amortyzacji* (1970),
- *Funkcje amortyzacji w zakresie kosztów produkcji* (1970),
- *Funkcje amortyzacji w zakresie funduszu odtworzenia* (1971),
- *Kryteria wyboru w warunkach intensywnego gospodarowania* (1971),
- *Dochód narodowy a poziom płac* (1973),
- *Wielkie organizacje w systemie gospodarki narodowej* (1974),
- *Hierarchizacja celów w procesie podejmowania decyzji* (1974),
- *Ekonomiczna treść kosztu społecznego* (1988),
- *Ekonomiczne problemy rynku pracy* (1997),
- *Wymogi Unii Europejskiej do rynku pracy* (1998).

Przedmiotem Jej zainteresowań był także dorobek naukowy ekonomistów krakowskich, a publikacje na ten temat, podyktowane względami utylitarnymi, wywołały sprzeczne komentarze i dyskusje w środowisku krakowskim. Były to

okolicznościowe artykuły opublikowane w 1975 roku, pt. *Rozwój nauk ekonomicznych w środowisku krakowskim oraz Rozwój teorii ekonomii w środowisku krakowskim w XXX-leciu Polski Ludowej*. Pod koniec życia zamierzała odnieść się do najbardziej aktualnych problemów współczesnej ekonomii, co znalazło wyraz m.in. w publikacjach: *Pragmatyzm teorii trwałego rozwoju* (2000), *Społeczeństwo informacyjne a nowa gospodarka* (2001).

Aktywność publikacyjną w dziedzinie ekonomiki regionów wydobywczych i polityki regionalnej zapoczątkowała artykułem pt. *Efektywność inwestycji kompleksowych w regionie górniczym* (1965). Opublikowała artykuł (1971) a następnie monografię pod tytułem: *Programowanie regionów górniczych* (1975 — PAN KPZK). Do ważniejszych Jej publikacji z tej dziedziny należy zaliczyć: *Kompleksowe zagospodarowanie górniczo-przemysłowego regionu „Białego Zagłębia”* (1973), *Parametry makroekonomiczne w programowaniu rozwoju regionów górniczych* (1974), *Ekonomiczne aspekty ochrony środowiska przyrodniczego w programowaniu rozwoju regionów górniczych* (1980), *Ekonomiczne aspekty ochrony złóż* (1982), *Model ekonomicznej oceny złóż energetycznych surowców lokalnych* (1982), *Warunki ekonomiczne i organizacyjne eksploatacji małych złóż węgla brunatnego na cele lokalne* (1987), *Rozwiązania organizacyjne i prawne eksploatacji małych złóż węgla brunatnego* (1988) oraz *Założenia do badań nad stanem i funkcjonowaniem zagłębi górniczo-przetwórczych* (1990).

Znaczącym wkładem w tę dziedzinę były także Jej publikacje o charakterze aplikacyjnym, do których należy zaliczyć: *Warunki funkcjonowania przedsiębiorstw w programach ekorozwoju* (1994), *Założenia analizy środowiskowych, gospodarczych i społecznych uwarunkowań ekorozwoju badanych gmin na obszarze funkcjonalnym „Zielone Płuca Polski”* (1994 — współautorstwo), *Ogólna charakterystyka wymogów środowiskowych dla wyodrębnionych scenariuszy polityki ekorozwoju obszaru funkcjonalnego „Zielone Płuca Polski”* (1994 — współautorstwo), *Założenia do scenariuszy ekologicznie zrównoważonego rozwoju gospodarki krajowej* (1997), *Ükopolitik in Polen in letzten zehn Jahren* (2002).

Podstawową dziedziną zainteresowań naukowych prof. A. Jankowskiej-Kłapowskiej i Jej prac o charakterze aplikacyjnym była ekonomia zasobów naturalnych i ochrona środowiska. Opublikowała prace: *Ekonomiczna ocena złóż surowców mineralnych* (1969), *Bilansowanie programów rozwoju przemysłu wydobywczego* (1969), *Kryteria ekonomiczne bilansowości złóż* (1969), następnie (jako współautorka) *Ogólne zasady i metodyka określania wartości zasobów kopalin stałych w złożu* (1972) — pracę, która wywołała spory odzew w środowisku geologów, górników i planistów i w ostateczności zdecydowała o zajęciu się tą dziedziną, w której dotąd rachunek ekonomiczny nie odgrywał ważniejszej roli.

Kolejne publikacje, to:

- *Renta górnicza a ceny surowców mineralnych* (1973),
- *Propozycje ekonomicznej oceny zasobów biosfery* (1974),
- *Związki geologii gospodarczej z naukami ekonomicznymi* (1974),

- *Kompleksowe wykorzystanie surowców mineralnych* (1974),
- *Rachunek ekonomiczny w początkowej fazie zagospodarowania złóż* (1976),
- *Warunki ujednoczenia metod ekonomicznej oceny zasobów surowców mineralnych w krajach RWPG* (1976),
- *Die Beziehungen zwischen den geologiach — technischen und den ökonomischen Parametern bei der Einschätzung von Lagerstätten mineralischer Rohstoffe, Zeitschrift Für angewandte Geologie* (1977),
- *Problemy mikroekonomicznej oceny mineralno-syriewoj bazy* (1978),
- *Ochrona środowiska a jej kompleksowa efektywność* (1981),
- *Ekonomiczne aspekty ochrony środowiska* (1981), *Ekonomiczne aspekty ochrony złóż* (1982),
- *Model ekonomicznej oceny złóż energetycznych surowców lokalnych* (1982),
- *Ochrona prirodnej sredy i jejo kompleksnaja efektiwnost* (1983),
- *Gospodarka zasobami mineralnymi a reforma gospodarcza* (1985),
- *Ekonomiczne ograniczenia wariantów bilansu nośników energii w Polsce do roku 2000* (1985),
- *Ekologiczno-ekonomiczna efektywność gospodarowania* (1985),
- *Rachunek ekonomiczny a gospodarka zasobami środowiska* (1986),
- *Rachunek ochrony środowiska w koncepcjach RWPG* (1987),
- *Warunki ekonomiczne i organizacyjne eksploatacji małych złóż węgla brunatnego na cele lokalne* (1987),
- *Ekologiczne udokumentowania zmian struktury produkcji* (1988),
- *Zastosowanie instrumentów finansowych w ochronie zasobów mineralnych* (1988),
- *Rozwiązania organizacyjne i prawne eksploatacji małych złóż węgla brunatnego* (1988),
- *Instruments to Control the Environmental Protection in Fossil Fuels Produktion* (1990),
- *Założenia do badań nad metodyką wyceny surowców mineralnych* (1990).

Za najważniejszą publikację prof. A. Jankowskiej-Kłapkowskię z tej dziedziny należy uznać monografię pt. *Efektywność gospodarowania zasobami mineralnymi* (1992), po której ukazały się jeszcze następujące: *Nieodnawialne zasoby mineralne w ekonomii środowiska przyrodniczego* (1992), *Ekologiczne uwarunkowania rozwoju gospodarczego i społecznego* (1993), *Makroekonomiczny i ekonomiczny rachunek zasobów przyrody w Polsce* (1993), *Metodyka kompleksowego rachunku efektywności gospodarki zasobami mineralnymi* (1993 — współautorstwo), *A macro and micro-economic evolution of the natural resources of Poland* (1993) oraz *Environmental Education for Sustainable development* (1994).

Ostatnią sferą Jej zainteresowań badawczych była problematyka restrukturyzacji gałęzi strategicznych, która — według Jej opinii — była koniecznością i powinna się dokonywać pod kontrolą państwa, przy zachowaniu prymatu interesu narodowego. Wystawienie tych gałęzi na „dziką prywatyzację” uważała za niedopuszczalną, ale też była orędownikiem oparcia systemu zarządzania

przedsiębiorstw na konsekwentnym i zharmonizowanym z rynkiem systemie bodźców ekonomicznych. Problematyce tej poświęciła takie prace, jak:

- *Bilansowanie programów rozwoju przemysłu wydobywczego* (1969),
- *Kryteria wyboru w warunkach intensywnego gospodarowania* (1973),
- *Wpływ hutnictwa na efektywność produktu finalnego* (1974),
- *Optymalizacja produkcji cynku i ołowiu w Polsce* (1975),
- *Metody badań materiałochłonności struktur produkcji w Polsce* (1982),
- *Kierunki badań nad energochłonnością struktur produkcji* (1983),
- *Wpływ postępu technicznego na materiałochłonność i energochłonność struktur produkcji* (1983),
- *Program badań możliwych zmian struktury gospodarki narodowej dla zmniejszenia jej energochłonności i materiałochłonności* (1983),
- *Ekonomiczne ograniczenia wariantów bilansu nośników energii w Polsce do roku 2000* (1985),
- *Ekologiczno-ekonomiczna efektywność gospodarowania* (1985),
- *Ekologiczne udokumentowania zmian struktury produkcji* (1988),
- *Metoda analizy społecznych skutków likwidacji kopalń* (1991),
- *Holdings in polnischen Bergbau* (2002),
- *Besonderheiten der Privatisierung der Bergbauindustrie in Polen am Beispiel des Steinkohlenbergbaus* (2002).

Prof. dr hab. Anna Jankowska-Kłapkowska za swoją działalność została uhonorowana wieloma odznaczeniami, od regionalnych poczynając, takich jak: Złota Odznaka za Pracę Społeczną dla Miasta Krakowa (1959), Złota Odznaka za Zasługi dla Ziemi Krakowskiej (1972). Otrzymała Medal X-lecia Polski Ludowej (1955), Medal XXX-lecia Polski Ludowej (1974), Odznakę 1000-lecia Państwa Polskiego (1966), Medal Edukacji Narodowej (1978). Została odznaczona Złotym Krzyżem Zasługi (1969), Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski (1973) oraz Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski (2001), a ostatnio — Medalem Zasłużony dla Wydziału Zarządzania AGH (2004).

Jej aktywny udział w działalności krakowskiego środowiska ekonomicznego oraz pokaźny dorobek naukowy i dydaktyczno-wychowawczy znalazł oddźwięk w opublikowanych wspomnieniach Jej byłych studentów, pracowników z różnych ośrodków naukowych a także w mowach pogrzebowych przedstawicieli ośrodków akademickich, stowarzyszeń i organizacji.

Pochowana została na Cmentarzu Rakowickim w Krakowie 9 listopada 2004 roku.



80025 75540

