

# Definición de particiones difusas condicionadas usando transformadas difusas.

Nicolás Madrid

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Málaga  
Málaga, España  
nicolas.madrid@uma.es

Sergio Díaz-Gómez

Universidad de Málaga  
Málaga, España  
sergiodg96@hotmail.com

**Abstract**—Las particiones difusas pueden definirse de diferentes formas, pero casi siempre, la definición se efectúa atendiendo a las características generales de la totalidad del universo. En este trabajo se presenta un método para definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. En concreto, se muestra cómo definir diferentes particiones difusas atendiendo a las características de diferentes subconjuntos difusos del universo.

## I. INTRODUCTION

Todo sistema difuso consta de tres partes bien conocidas: *fuzzificación*, *inferencia* y *defuzzificación*. En muchos casos, estos tres pasos se apoyan en uno de los conceptos más importantes del paradigma de los sistemas difusos: la partición difusa.

Aunque la definición de partición difusa difiere según diferentes autores (ver [2], [4], [5], [10]), en general la idea es dividir al universo de discurso en una serie de clases difusas (normalmente asociados a etiquetas lingüísticas). Existen multitud de formas de definir particiones difusas sobre un universo  $\mathcal{U}$ . La más conocida, que no necesariamente la más conveniente, es la familia de particiones dadas por expertos. Éste tipo de particiones es útil cuando la partición viene dada por conceptos lingüísticos propios del ser humano sin sustento científico ni definición formal; como pueden ser la división del día en intervalos de tiempo vagos como la mañana, tarde, noche, etc; la división de vegetales en fruta o verdura; o la clasificación de animales en mascotas.

Otra familia de particiones difusas muy utilizada es la constituida por las particiones uniformes. Éstas dividen el universo de manera homogénea en espacio y forma. A pesar de su simplicidad, han mostrado ser de gran utilidad para muchas tareas, como puede comprobarse en el área de procesamiento de imágenes [9].

Con el fin de definir particiones difusas óptimas para ciertas tareas, se han definido algoritmos automatizados para el cálculo de particiones basados en clustering y/o estadística [10], [3]. Sin entrar en detalles, estos algoritmos consideran uno o varios atributos de los elementos del universo y calculan parámetros de referencia (clusters o parámetros estadísticos) que se utilizan para la definición de las clases que definirán la partición. Como ejemplo, las particiones basadas

en clustering han mostrado ser útiles para la obtención de reglas difusas [1], [6].

Independientemente de cómo se defina la partición, es obvio que ésta depende de un contexto. Supongamos que deseamos tener una partición difusa del atributo altura para personas. En este caso, la clase de *personas altas*, que podría ser una clase de dicha partición difusa, depende claramente del contexto: no es lo mismo una persona alta en una liga de baloncesto, en un campeonato de hípica o en un colegio de primaria. En la mayoría de los casos, este contexto está implícito en la tarea a resolver y, aunque no se mencione, se considera en la definición de la partición. Por ejemplo, si el sistema difuso se plantea para clasificar alumnos con sobrepeso de un colegio de primaria, de nada sirve considerar el concepto de altura que pueda derivarse de un contexto de liga profesional de baloncesto.

En este trabajo proponemos posibilitar el uso de diferentes particiones difusas dependiendo del contexto. Siguiendo el ejemplo anterior, si queremos un sistema difuso para clasificar personas con sobrepeso, sería interesante disponer de multitud de particiones difusas acorde al contexto al que dicha persona pertenezca. Así, el sistema utilizaría una partición diferente si la persona es un alumno de primaria, un jugador profesional de baloncesto o un jinete de la carrera Sanlúcar. Cuando el contexto viene dado por una serie de conjuntos crisp, la definición de dichas particiones se reduce al caso clásico. Sin embargo, cuando los conjuntos que definen los diferentes contextos son también difusos, la definición de dichas particiones difusas no es una tarea trivial. Siguiendo el ejemplo, podríamos estar interesados en definir un sistema difuso para detectar sobrepeso en personas con ingresos medios.

En este trabajo presentamos un método para definir particiones difusas para aquellos elementos del universo que tengan cierta propiedad difusa. Dicha partición se definirá mediante el uso de transformadas difusas [8], [7], que pueden entenderse como medias ponderadas por conjuntos difusos. En pos de una mejor comprensión de la metodología, se presenta cómo se definen cinco particiones difusas de un conjunto de muestras de generación energética acorde al momento del día en el que fueron tomadas; i.e., durante la madrugada, la mañana, el mediodía, la tarde o la noche.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. Comen-

zamos presentando ciertos conceptos básicos en la Sección II. En la Sección III presentamos como se definen las F-transformadas directa e inversa. En la Sección IV mostramos cómo definir particiones difusas de tres clases para los elementos del universo que tengan cierto atributo difuso. En esta sección mostraremos además cómo se aplica la metodología al caso de la generación eléctrica condicionada al tramo horario. Finalmente, en la Sección V presentamos las conclusiones y el trabajo futuro.

## II. PRELIMINARIES

El concepto de partición difusa se define de manera general de la siguiente forma.

*Definición 1:* Una partición difusa  $\Delta$  de un universo  $\mathcal{U}$  es un conjunto  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de conjuntos difusos sobre  $\mathcal{U}$  que cumplen la condición de recubrimiento, es decir, para todo  $x \in \mathcal{U}$  existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\Delta_k(x) > 0$ .

En la bibliografía se pueden encontrar una gran cantidad de propiedades adicionales que se imponen sobre las particiones difusas. A continuación enumeramos una serie de propiedades que cumplirán las particiones definidas en este trabajo. Una partición  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  sobre  $[0, 1]$  se define a partir de ciertos nodos  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$  tales que:

- (normalidad)  $\Delta_k(x_k) = 1$ .
- (soporte acotado)  $\Delta_k(x) = 0$  si  $x \notin (x_{k-1}, x_{k+1})$ .
- (continuidad)  $\Delta_k(x)$  es continua.
- (convexidad)
  - $\Delta_k(x)$  es estrictamente creciente en  $(x_{k-1}, x_k)$  y
  - $\Delta_k(x)$  es estrictamente decreciente en  $(x_k, x_{k+1})$ .
- (Ruspini) para todo  $x \in [0, 1]$ :

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k(x) = 1$$

Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos que forman las particiones difusas pueden darse de infinidad de maneras. Por practicidad, suelen elegirse funciones de pertenencia sencillas que se definen a partir de ciertos parámetros. En este trabajo vamos a considerar funciones de pertenencia triangulares y trapezoidales, que se definen sobre el universo de los números reales a partir de tres/cuatro parámetros  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  de la siguiente forma:

$$\text{triangular}(a, b, c)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x \end{cases}$$

$$\text{trapezoidal}(a, b, c, d)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

En algunos casos haremos un pequeño abuso de notación aceptando, en el caso de las funciones de pertenencia trapezoidales, que los parámetros  $a, b$  y  $c, d$  puedan ser  $-\infty$  o  $\infty$ ,

respectivamente. En dichos casos, las funciones de pertenencia refieren a

$$\text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, c, d)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

y

$$\text{trapezoidal}(a, b, \infty, \infty)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

En general, existen multitud de formas de definir particiones difusas en un cierto universo  $\mathcal{U}$ , aunque éstas se pueden clasificar en dos familias: particiones basadas puramente en etiquetas lingüísticas dadas por un experto y particiones definidas a partir de herramientas de clustering o parámetros estadísticos (con o sin supervisión). En el Ejemplo 1 se describe una partición dada por un experto concerniente a los intervalos temporales de un día.

*Ejemplo 1:* El ser humano suele dividir las 24 horas del día en los siguientes cinco intervalos temporales: *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*. Dichos intervalos se pueden modelar como cinco conjuntos difusos trapezoidales de la siguiente manera:

Madrugada = trapezoidal (00, 02, 05, 07)

Mañana = trapezoidal (05, 07, 11, 13)

Mediodía = trapezoidal (11, 13, 14, 15)

Tarde = trapezoidal (14, 15, 18, 20)

Noche = trapezoidal (18, 20, 23, 01)

donde el tiempo viene dado en horas con notación 24h. Las gráficas de los cinco conjuntos difusos que forman esta partición vienen dadas en la Figura 1. Obsérvese que dicha partición satisfacen todas las propiedades adicionales de normalidad, soporte acotado, continuidad, convexidad y Ruspini.  $\square$

Puesto que este trabajo está orientado en el uso de parámetros estadísticos para la definición de particiones difusas, vamos a esbozar a continuación un sencillo algoritmo para definir una posible partición difusa de tres clases a partir de la información de un atributo difuso  $X$ ; es decir, un conjunto difuso  $X: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ . Las tres clases van a representar las etiquetas lingüísticas “atributo  $X$  bajo”, “atributo  $X$  medio” y “atributo  $X$  alto”. Uno de los valores más representativos, si no el que más, de lo que sería un valor “medio” del atributo  $X$  sería la *media* del conjunto de valores  $\{X(u)\}_{u \in \mathcal{U}}$ . De este modo, cuanto más cerca esté el atributo  $X$  de la media, más “medio” será. Modelar este concepto de cercanía se puede hacer a través de múltiples expresiones y un punto clave es determinar qué valores del atributo  $X$  dejan de clasificarse como “medios”. Quizás la forma más natural para hacer esto último es mediante el cálculo de una medida de dispersión sobre el conjunto de valores  $\{X(u)\}_{u \in \mathcal{U}}$ , que determinaría un intervalo para los valores “medios”.

*Ejemplo 2:* Supongamos que queremos realizar una partición sobre los números reales (i.e.,  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ) acorde a cierto atributo  $X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Supongamos que la media y la

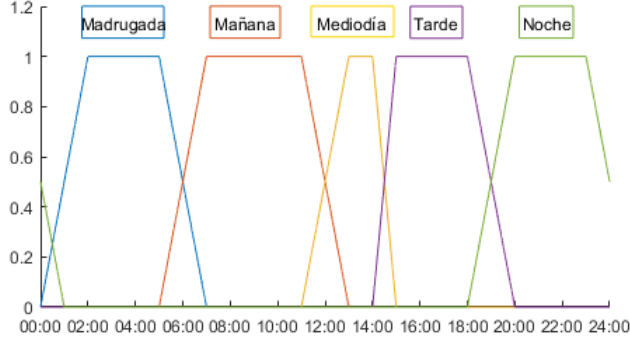


Figure 1. Partición difusa para el día dada por un experto acorde a las etiquetas lingüísticas *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*.

desviación típica de  $\{X(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$  son  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente. Entonces, la partición difusa formada por las siguientes tres clases:

$$\Delta_1 = \text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, \mu - \sigma, \mu)$$

$$\Delta_2 = \text{triangular}(\mu - \sigma, \mu, \mu + \sigma)$$

$$\Delta_3 = \text{trapezoidal}(\mu, \mu + \sigma, \infty, \infty)$$

modeliza los conceptos “*atributo X bajo*”, “*atributo X medio*” y “*atributo X alto*”, respectivamente.

Merece la pena mencionar la existencia de otros métodos para definir particiones difusas basados en cuartiles o clústering [4], [10].

### III. TRANSFORMADAS DIFUSAS

Las transformadas difusas fueron aplicadas en su origen sobre funciones definidas entre el intervalo unidad [8] y recientemente extendidas para ser aplicadas a un conjunto de puntos arbitrario del producto cartesiano  $\mathcal{U} \times [0, 1]$  para  $\mathcal{U}$  un conjunto arbitrario [7].

Las transformadas discretas para datos sin estructura funcional se definen de la siguiente manera.

**Definición 2:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y una partición difusa  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de  $\mathcal{U}$ , decimos que la  $n$ -tupla  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \dots, F_n] \in [0, 1]^n$  es la F-transformada directa de  $\mathbf{T}$  con respecto a  $\Delta$  si se cumple la igualdad

$$F_k = \frac{\sum_{i \in \mathbb{I}} y_i \Delta_k(x_i)}{\sum_{i \in \mathbb{I}} \Delta_k(x_i)} \quad (1)$$

No es difícil comprobar que la definición anterior extiende a la original [8] dada en el contexto de funciones, identificando la función  $f: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$  con el subconjunto  $\mathbf{T}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$ , i.e.,  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}_f] = \mathbf{F}_\Delta[f]$ . El siguiente resultado muestra que las componentes de la F-transformada directa coinciden con la solución de un problema de *mínimos cuadrados* ponderado por las funciones de la partición  $\Delta$ .

**Proposición 1:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y una partición difusa  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de  $\mathcal{U}$ , la  $k$ -ésima componente de la F-transformada coincide con el mínimo de la función

$$\phi(z) = \sum_{i \in \mathbb{I}} (y_i - z)^2 \Delta_k(x_i) \quad (2)$$

A partir de la F-transformada directa, podemos definir la F-transformada inversa como se muestra a continuación.

**Definición 3:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y su F-transformada directa  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \dots, F_n] \in [0, 1]^n$  con respecto a  $\Delta$  se define la F-transformada inversa de  $\mathbf{T}$  con respecto a  $\Delta$  como la función:

$$\mathbf{T}_\Delta^F(x) = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \Delta_k(x)}{\sum_{k=1}^n \Delta_k(x)}. \quad (3)$$

Antes de proseguir, vamos a comentar algunos aspectos de la definición anterior. La F-transformada inversa es una función de  $\mathcal{U}$  a  $[0, 1]$  independientemente de si  $\mathbf{T}$  tiene estructura de función o no (i.e., tiene estructura de función si para todo  $u \in \mathcal{U}$  existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $(u, x) \in \mathbf{T}$  y si además tenemos que dos tuplas  $(u, x)$  y  $(u, y)$  pertenecen a  $\mathbf{T}$ , entonces  $x = y$ ). En segundo lugar, el dominio de la F-transformada inversa es todo  $\mathcal{U}$  independientemente de si para cierto  $u \in \mathcal{U}$  existen o no valores tales que  $(u, y) \in \mathbf{T}$ . Finalmente, como se muestra en el siguiente teorema (Teorema 1), la transformada inversa está estrechamente relacionada con la función que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  el valor medio de los valores  $x_i \in [0, 1]$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ . Formalmente, definimos los conjuntos

$$D_u = \{x \in [0, 1] \mid (u, x) \in \mathbf{T}\} \quad \text{para cada } u \in \mathcal{U} \quad (4)$$

y

$$D_{\mathbf{T}} = \{u \in \mathcal{U} \mid \text{tal que existe } (u, x) \in \mathbf{T}\} \quad (5)$$

Sobre el dominio  $D_{\mathbf{T}}$  definimos la función  $m_{\mathbf{T}}(u)$  que asigna a cada  $u \in D_{\mathbf{T}}$  el valor

$$m_{\mathbf{T}}(u) = \frac{\sum_{x_i \in D_u} x_i}{|D_u|} \quad (6)$$

donde  $|D_u|$  denota la cardinalidad del conjunto  $D_u$ . Observe que  $m_{\mathbf{T}}$  es la función que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  la media de todos los valores  $x_i$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ .

**Teorema 1:** Para todo  $\mathbf{T} = \{(u_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  existe una partición difusa  $\Delta$  tal que

$$\mathbf{T}_\Delta^F(u) = m_{\mathbf{T}}(u),$$

donde  $m_{\mathbf{T}}$  es la función definida en la Ecuación (6).

A partir del teorema anterior, podemos decir que la F-transformada inversa aproxima en cierto modo la función  $m_{\mathbf{T}}$  que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  el valor medio de los valores  $x_i \in [0, 1]$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ .

### IV. DEFINIENDO PARTICIONES CONDICIONADAS

#### A. Descripción del procedimiento

Vamos a considerar un universo  $\mathcal{U}$  junto con dos atributos  $X$  y  $Y$  que poseen los elementos de  $\mathcal{U}$ . En la Sección II hemos visto cómo definir particiones difusas de  $\mathcal{U}$  basándonos en la información de uno de los atributos  $X$  o  $Y$ . En esta sección vamos a presentar un método para definir una partición difusa en  $\mathcal{U}$  basándonos en un atributo  $Y$  condicionado a la información que tenemos sobre otro atributo  $X$ . Por simplicidad en la exposición, vamos a definir particiones difusas con tres

clases, aunque el método puede extenderse fácilmente para el cálculo de particiones difusas con más clases.

Comenzamos asumiendo una partición difusa  $\Delta$  de  $\mathcal{U}$  acorde a los valores que toma el atributo  $X$ . Entonces, la coordenada  $F_k$  de la F-transformada directa de  $\mathbf{T}_X = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  con respecto a  $\Delta$  puede considerarse como la media del atributo  $Y$  para aquellos elementos de  $\mathcal{U}$  que tienen el atributo  $X$  en  $\Delta_k$ . De este modo, si queremos hacer una partición de tres clases para los elementos de  $\mathcal{U}$  que tengan el atributo  $X$  en  $\Delta_k$ ,  $F_k$  es sin duda un buen candidato para ser el núcleo de la clase central, que representa los elementos con atributo  $Y$  medio. Para representar el resto de los valores del atributo  $Y$  que pueden considerarse “medios”, vamos a establecer una estimación, en forma de intervalo, para la dispersión de los datos a partir de la media ponderada dada por  $F_k$ . Los límites de dicho intervalo van a consistir en el cálculo de otras dos F-transformadas directas, una para los valores del atributo  $Y$  que tienen valores superiores a la media  $F_k$ , y otro para los valores inferiores. La interpretación de este intervalo es similar al del rango intercuartílico pero a través de expectiles, en lugar de cuartiles.

Para ser más específicos, el procedimiento que se lleva a cabo para la definición de la partición condicionada es el siguiente:

- 1) Calculamos la F-transformada directa de

$$\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}}$$

con respecto a una partición difusa  $\Delta_X$  definida acorde al atributo  $X$ ;

- 2) Calculamos la F-transformada inversa  $(\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(x)$  de  $\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}}$  con respecto a  $\Delta_X$ ;
- 3) Definimos los siguiente dos conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_Y^{\uparrow} &= \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \geq (\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(u_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \\ \mathbf{T}_Y^{\downarrow} &= \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \leq (\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(u_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \end{aligned}$$

- 4) Calculamos las F-transformadas directas

$$F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\uparrow}] \quad \text{y} \quad F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\downarrow}]$$

de los conjuntos  $\mathbf{T}_Y^{\uparrow}$  y  $\mathbf{T}_Y^{\downarrow}$  respectivamente;

- 5) En pos de una presentación más eficiente, vamos a denotar por

- $F_k^{\uparrow}$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\uparrow}]$ ;
- $F_k^{\downarrow}$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\downarrow}]$ ;
- $F_k^*$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y]$ ;

Para cada  $(\Delta_X)_k$ , definimos la partición difusa  $\Delta_Y \mid X_k$  definida por los siguiente tres conjuntos difusos:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, F_k^{\downarrow}, F_k^*) \\ \Delta_2 &= \text{triangular}(F_k^{\downarrow}, F_k^*, F_k^{\uparrow}) \\ \Delta_3 &= \text{trapezoidal}(F_k^*, F_k^{\uparrow}, \infty, \infty). \end{aligned}$$

### B. Ejemplo: generación de energía

Para mostrar el procedimiento de una forma clara, vamos a definir particiones difusas para la producción de energía condicionadas al momento del día al que dicha energía es generada. Para ello, utilizaremos la división temporal descrita

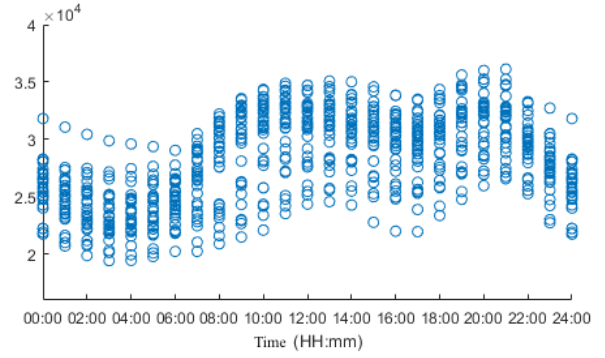


Figure 2. Nube de puntos de la energía generada en la zona peninsular de España durante enero del 2018.

en el Ejemplo 1 para el día; a saber, en *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*. El objetivo es, por lo tanto, definir cinco particiones difusas acorde a la generación de energía teniendo en cuenta de si ésta se ha producido durante la *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* o *noche*.

Para llevar a cabo el ejemplo haremos uso de los datos disponibles en la página web del Ministerio de Energía, Turismo y Agenda Digital ([www.minetad.gob.es](http://www.minetad.gob.es)) para la generación de energía en la zona peninsular de España durante el mes de enero del 2018. La generación viene dada por intervalos de una hora y la nube de puntos asociada a dicha base de datos viene dada en la Figura 2.

Los componentes de la F-transformada directa  $F_{\Delta}[\mathbf{T}]$  son:

$$\begin{aligned} F_1 &= 23891 \text{ MWh} & F_2 &= 28802 \text{ MWh} \\ F_3 &= 30826 \text{ MWh} & F_4 &= 29877 \text{ MWh} \\ F_5 &= 29391 \text{ MWh} \end{aligned}$$

Como ejemplo, para una interpretación más clara de los resultados obtenidos, el valor  $F_2 = 28802 \text{ MWh}$  representa la media de la generación de energía durante *las mañanas* de enero del 2018. La correspondiente F-transformada inversa está dibujada en la Figura 3 junto con la subdivisión de los datos en dos clases: aquellos con valores superiores (azules en la figura y denotados por  $\mathbf{T}^{\uparrow}$ ) e inferiores (rojos en la figura y denotados por  $\mathbf{T}^{\downarrow}$ ) a la media dada por  $F_{\Delta}[\mathbf{T}]$ , respectivamente.

Al calcular las correspondientes F-transformadas directas de  $\mathbf{T}^{\uparrow}$  y de  $\mathbf{T}^{\downarrow}$  obtenemos las componentes:

$$\begin{aligned} F_1^{\uparrow} &= 25834 \text{ MWh} & F_2^{\uparrow} &= 31468 \text{ MWh} \\ F_3^{\uparrow} &= 32550 \text{ MWh} & F_4^{\uparrow} &= 31804 \text{ MWh} \\ F_5^{\uparrow} &= 32105 \text{ MWh} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_1^{\downarrow} &= 22411 \text{ MWh} & F_2^{\downarrow} &= 25027 \text{ MWh} \\ F_3^{\downarrow} &= 27863 \text{ MWh} & F_4^{\downarrow} &= 27129 \text{ MWh} \\ F_5^{\downarrow} &= 26754 \text{ MWh} \end{aligned}$$

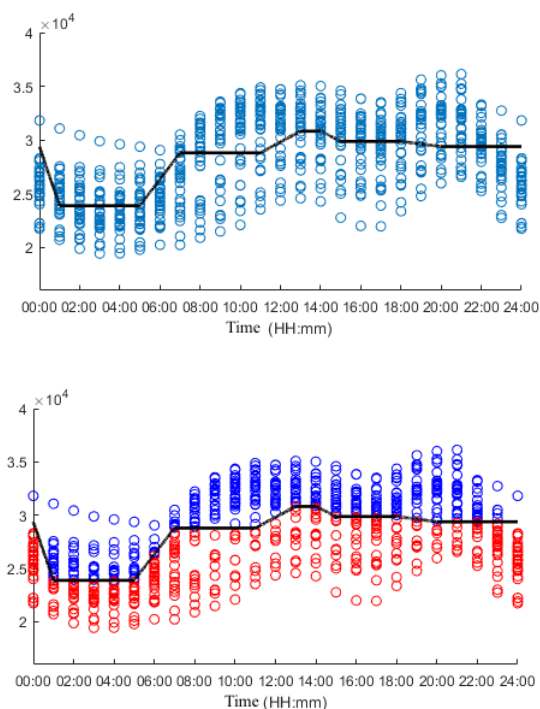


Figure 3. Transformada inversa de los datos de generación eléctrica junto con los dos conjuntos de datos  $\mathbf{T}^\uparrow$  (azul) y  $\mathbf{T}^\downarrow$  (rojo).

Las dos F-transformadas directas dadas justo arriba tienen una interpretación muy similar al rango intercuartílico pero en términos de expectativas. Específicamente, puesto que  $\mathbf{T}^\uparrow$  y  $\mathbf{T}^\downarrow$  representan las medias de los datos por encima y por debajo de la F-transformada inversa, que a su vez representa una media, es esperable que la mitad de los datos se encuentren entre  $\mathbf{T}^\uparrow$  y  $\mathbf{T}^\downarrow$ . En concreto, en este ejemplo, podemos decir que esperamos que en la mayoría de las mañanas ( $\Delta_2$ ), la generación eléctrica se encuentre entre  $F_2^\downarrow = 25027 \text{ MWh}$  y  $F_2^\uparrow = 31468 \text{ MWh}$ . Siguiendo esta línea, durante las mañanas podemos atribuir a los valores de la generación eléctrica menores a  $25027 \text{ MWh}$  (resp. mayores a  $31468 \text{ MWh}$ ) la etiqueta de *generación eléctrica baja* (resp. *generación eléctrica alta*). Tenemos, por lo tanto, cinco particiones difusas, una para cada conjunto de la partición  $\Delta$ , en la que podemos establecer cuándo la generación eléctrica es alta, media o baja, condicionado al momento del día en que se esté considerando: *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* o *noche*. Dichas particiones vienen dadas como sigue:

Madrugadas:

- $\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 22411, 23891)$
- $\Delta_2 = \text{triangular } (22411, 23891, 25834)$
- $\Delta_3 = \text{trapezoidal } (23891, 25834, \infty, \infty)$

Mañanas:

- $\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 25027)$
- $\Delta_2 = \text{triangular } (25027, 28802, 31468)$
- $\Delta_3 = \text{trapezoidal } (28802, 31468, \infty, \infty)$

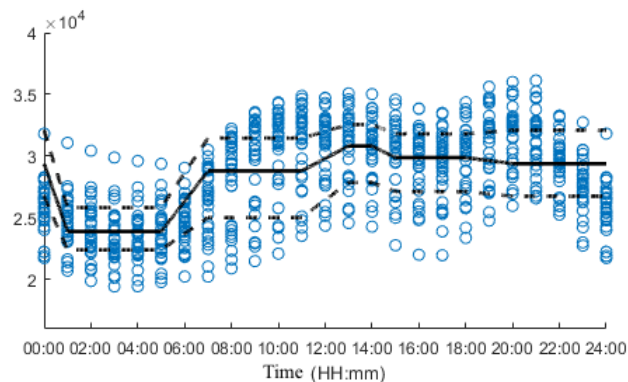


Figure 4. F-transformada inversa de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^\uparrow$  y  $\mathbf{T}^\downarrow$ .

Mediodías:

- $\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 27863)$
- $\Delta_2 = \text{triangular } (27863, 30826, 32550)$
- $\Delta_3 = \text{trapezoidal } (30826, 32550, \infty, \infty)$

Tardes:

- $\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 27129)$
- $\Delta_2 = \text{triangular } (27129, 29877, 31804)$
- $\Delta_3 = \text{trapezoidal } (29877, 31804, \infty, \infty)$

Noches:

- $\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 26754)$
- $\Delta_2 = \text{triangular } (26754, 29391, 32105)$
- $\Delta_3 = \text{trapezoidal } (29391, 32105, \infty, \infty)$

Las gráficas de las particiones difusas descritas arriba se exponen en la Figura 5. Obsérvese que lo que se considera “*generación eléctrica media*” es diferente en cada momento del día; de hecho, lo que se considera *generación eléctrica media* durante las mañanas, es una generación *baja* durante el mediodía. Además, en la Figura 4 mostramos las F-transformadas inversas de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^\uparrow$  y  $\mathbf{T}^\downarrow$ . De este modo se puede apreciar de una manera más directa la relación entre los conjuntos difusos que definen la partición condicionada y los datos de partida.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. Para ello hemos recordado la metodología de las transformadas difusas y hemos mostrado mediante un ejemplo, cómo definir particiones difusas de tres clases en un contexto de la generación de energía.

Como trabajo futuro, sería conveniente estudiar cómo definir particiones difusas siguiendo la idea subyacente de este trabajo para más de tres clases y/o utilizando diferentes metodologías a la transformadas difusas. Con un cariz más aplicado, sería interesante utilizar este tipo de particiones para definir reglas de inferencia.



## REFERENCES

- [1] BACZYASKI, M., BELIAKOV, G., SOLA, H. B., AND PRADERA, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] BEZDEK, J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Functions Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.
- [3] BEZDEK, J. C., EHRLICH, R., AND FULL, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences* 10, 2, 191 – 203, 1984.
- [4] BOUCHON, B. AND COHEN, C. Partitions and fuzziness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 116, 165–183, 1986.
- [5] BUTNARIU, D. Additive fuzzy measures and integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93, 436–452, 1983.
- [6] HOPPNER, F., AND KLAWONN, F. Obtaining interpretable fuzzy models from fuzzy clustering and fuzzy regression. in *Fourth International Conference on Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems and Allied Technologies*, 162–165, 2000.
- [7] MADRID, N. An extension of f-transforms to more general data: Potential applications. *Soft Comput.* 21, 13, 3551–3565, 2017.
- [8] PERFILIEVA, I. Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems* 157, 8, 993 – 1023, 2006.
- [9] PERFILIEVA, I., HURTÍK, P. DI MARTINO, F. AND SESSA, S. Image reduction method based on the F-transform *Soft Computing*, 21(7), 1847 – 1861, 2017.
- [10] RUSPINI, E. H. A new approach to clustering, *Information and Control*, 15, 22–32, 1969.

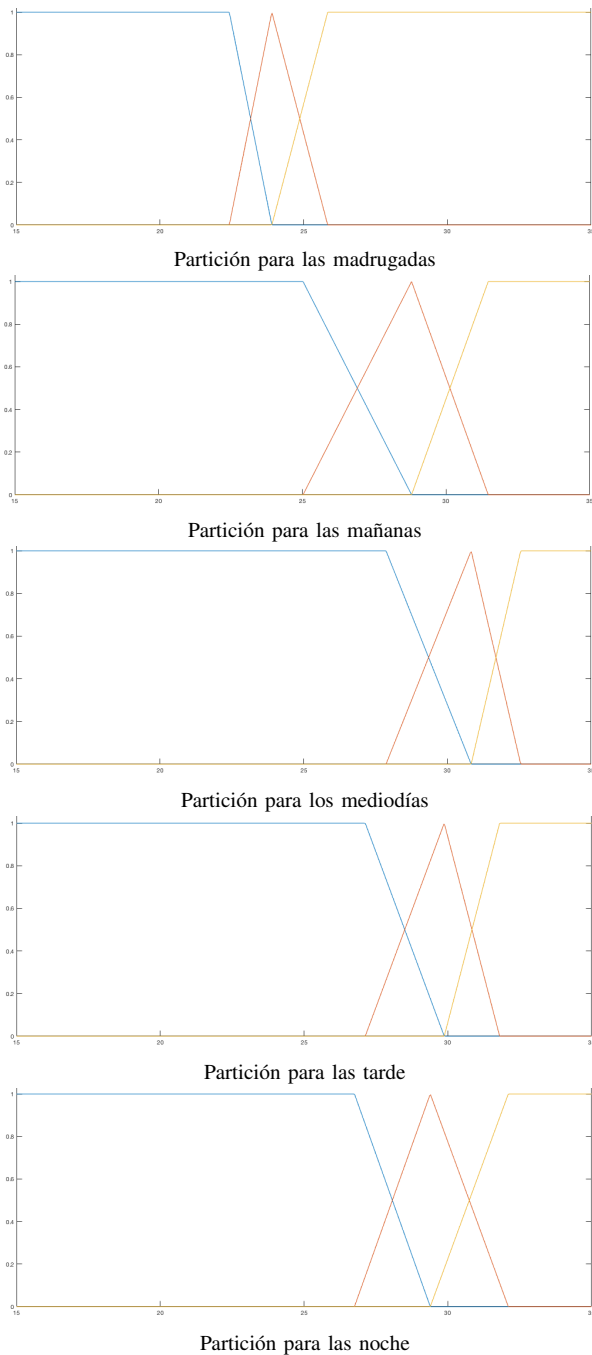


Figure 5. Las gráficas de las cinco particiones difusas de la generación eléctrica condicionadas al momento del día considerado.