

13º Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica

13º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica

Lisboa, Portugal, 23-26 de Outubro de 2017



## MODELADO CON ELEMENTOS FINITOS Y ACTUALIZACIÓN CON ENSAYOS MODALES EXPERIMENTALES DE UN CANTÓN DE CATENARIA RÍGIDA

Simarro, M.<sup>a</sup> – Postigo, S.<sup>a</sup> - Almenara, L.F.<sup>b</sup>, Ania, M.<sup>c</sup> - Simón, A.<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Térmicas y de Fluidos, Escuelas de Ingenierías, Universidad de Málaga.

Emails: [simarro.ing@gmail.com](mailto:simarro.ing@gmail.com) – [spostigo@uma.es](mailto:spostigo@uma.es) – [mata@uma.es](mailto:mata@uma.es)

<sup>b</sup> Adif, Jefe de Proyectos de I+D+i de Línea Aérea de Contacto.

<sup>c</sup> Adif, Jefe de Línea Aérea de Contacto

### Resumen

La catenaria rígida, comúnmente instalada en metropolitanos subterráneos, presenta ciertas ventajas respecto a otros sistemas convencionales de alimentación eléctrica en el transporte ferroviario, como es la catenaria flexible. La catenaria rígida aún se encuentra en fases de desarrollo y mejora de su comportamiento. Con el fin de potenciar sus ventajas y mejorar su funcionamiento, los autores de este trabajo presentan el modelado con elementos finitos de un cantón de catenaria rígida instalado en la red de cercanías de Málaga y su actualización mediante ensayos modales experimentales. La actualización del semi-cantón de entrada en el modelo de elementos finitos presenta un error medio en frecuencia de 1.39 % y una similitud del 91% en las deformadas modales del modelo de elementos finitos respecto a los ensayos. Estos resultados muestran la validez del modelo.

**Palabras claves:** catenaria rígida, elementos finitos, ensayos modales, transporte ferroviario

## 1. Introducción

Uno de los aspectos importantes para garantizar la adecuada funcionalidad del sistema de captación de corriente en un tren es asegurar una adecuada interacción entre el pantógrafo y la catenaria. Las dos formas de transmisión aéreas más comunes de la alimentación eléctrica son la catenaria convencional o flexible y la catenaria rígida. Este trabajo se centra en la catenaria rígida, la cual presenta algunas ventajas sobre la catenaria flexible que la hacen muy interesante. Entre ellas se pueden destacar que permiten un montaje en espacios de gálibo reducido, permiten la disminución de costes de mantenimiento, permite la sustitución rápida del hilo de contacto, etc.

La catenaria convencional es el sistema de alimentación eléctrica más antiguo, el cual ha tenido siempre gran interés, por lo que existe numerosa bibliografía donde se estudia la catenaria convencional y su interacción con el pantógrafo. J. Ambrosio et al. [1,2] presentan la influencia de las características de suspensión de los pantógrafos y el estudio de la interacción pantógrafo-catenaria con múltiples pantógrafos. Andrea Collina et al. [3] estudia la influencia del carbón, material de la mesilla del pantógrafo, en la interacción con el cobre del hilo de contacto. En numerosos estudios se desarrollan técnicas de simulación que permiten estudiar el fenómeno de la interacción pantógrafo-catenaria [4-6]. También se diseñan controladores que permiten reproducir la interacción pantógrafo-catenaria mediante el desplazamiento de la catenaria o el control de la fuerza de contacto del pantógrafo para la realización de ensayos [7,8].

Por otro lado, la catenaria rígida es un sistema de alimentación eléctrica emergente y debido a las ventajas que presenta frente a la convencional, es interesante estudiarla y conocerla mejor. Aún no existen muchos estudios sobre la catenaria rígida y sólo se han encontrado dos referencias. Un estudio realizado por la Universidad Politécnica de Madrid y el CITEF (Centro de investigación en Tecnologías Ferroviarias), en el que se realiza el diseño de un nuevo perfil conductor de aluminio para mejorar el comportamiento dinámico del sistema [9]; y otro estudio realizado por la Universidad de Castilla-La Mancha, donde se estudia la interacción entre pantógrafo-catenaria en la transición entre cantones con diferentes modelos de pantógrafos [10].

La catenaria rígida presenta cuatro elementos principales: perfil de aluminio, hilo de contacto, bridas de unión entre perfiles y sujeciones con los

soportes. Una modelización correcta del sistema catenaria rígida empleando técnicas de elementos finitos requiere la aplicación de hipótesis de simplificación que es necesario validar a partir de ensayos experimentales. Esta actualización del modelo permite obtener resultados fiables del comportamiento del sistema modelado. Por lo que este trabajo se propone como objetivo realizar un modelo de elementos finitos de un cantón del túnel de la Red de Cercanías de Málaga validado con ensayos modales experimentales. El modelo resultante permitirá por tanto analizar el comportamiento dinámico de la catenaria rígida.

## 2. Material y métodos

Las diferentes etapas del trabajo contemplan un premodelado con elementos finitos del cantón de catenaria rígida con la configuración observada en el túnel de Málaga. Este modelo permite obtener una primera aproximación al modelo modal de nuestro sistema (frecuencias y modos) y ayuda a determinar la metodología de ensayo y los puntos de medida necesarios para la caracterización del cantón. Una vez obtenidos experimentalmente las frecuencias y los modos, estos se emplean como referente en la actualización del modelo de elementos finitos final.

### 2.1. Premodelado del cantón de túnel con elementos finitos

De forma general, un cantón de catenaria rígida consta esencialmente de una sucesión de perfiles de aluminio unidos entre si mediante bridas atornilladas que le aportan continuidad. La sección del perfil de aluminio consta de dos alas superiores a partir de las cuales se fija con soportes a la bóveda del túnel. La longitud entre soportes difiere entre unas instalaciones y otras, y forman lo que se denomina vano. Por otro lado la parte inferior de la sección del perfil permite fijar el hilo que contacta con las mesillas del pantógrafo. Con todo lo anterior se compone lo que se denomina cantón mecánico.

En esta primera etapa, se realiza un modelo de elementos finitos bidimensional del cantón en estudio de catenaria rígida empleando el software de elementos finitos Abaqus®. El modelado del perfil se ha realizado con elementos lineales 2D cuyas propiedades equivalentes se han fijado en: sección 2475.39 10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>, inercia de flexión 4.12 10<sup>-6</sup> m<sup>4</sup> y densidad 2943 Kg/m<sup>3</sup>. La unión entre perfiles con la brida se asume continua. Los soportes de la catenaria se modelan mediante la rigidez que éstos introducen en el sistema y que

inicialmente se han fijado en 250.000 N/m. La longitud total, la longitud entre apoyos y la posición de cada brida, se midieron directamente en túnel y se recogen en el anexo A. Se restringe el movimiento longitudinal del cantón mecánico, simulando al punto fijo del cantón. La masa total del modelo es 2844.6 Kg, la longitud del cantón son 390.5 metros y el número de elementos empleados es 2056.

## 2.2. Ensayos modales experimentales del cantón de catenaria rígida

Los ensayos modales experimentales son habitualmente complejos de desarrollar. En este trabajo se dividió la toma de datos del cantón completo (390.5 metros) en dos semi-cantones. Cada semi-cantón se ensayó en noches diferentes por operatividad y además para asegurar que el martillo de impacto aportaba la energía suficiente al sistema. Cada semi-cantón se instrumentó en dos puntos seleccionados en la etapa anterior, con acelerómetros duplicados para minimizar los riesgos de algún mal funcionamiento. El martillo de fuerza se empleó como sistema de excitación y con él se recorrió cada semi-cantón, impactando cada 2 o 3 vanos en el soporte y a dos metros de él. Se capturaron tres impactos válidos por punto de medida. La figura 1 muestra el cantón previamente modelado así como la configuración de los acelerómetros empleados e impactos realizados en los ensayos modales de los dos semi-cantones.

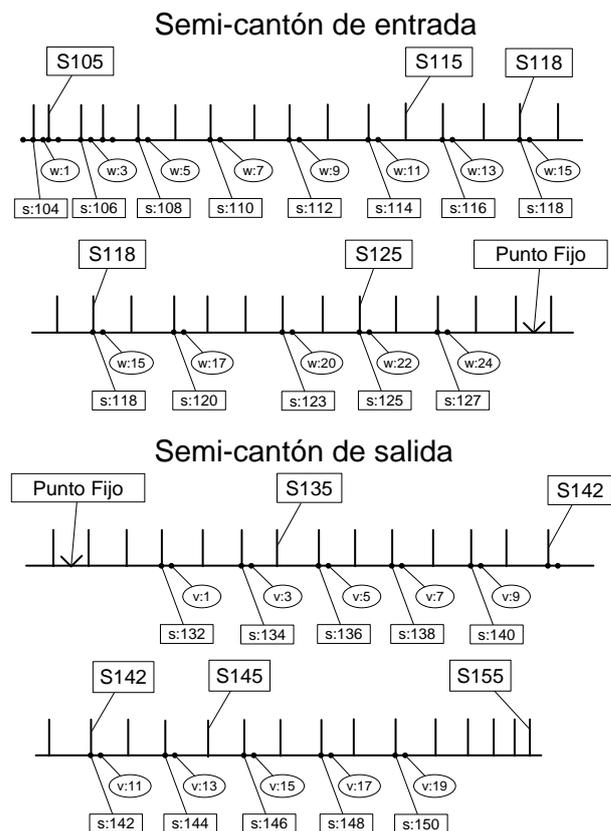
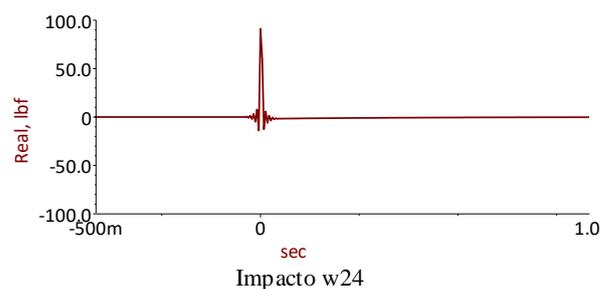


Figura 1: Configuración de acelerómetros e impactos realizados en los ensayos modales del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Para la adquisición de las aceleraciones y fuerzas se emplea un controlador de Data Physics (ABAQUS), una célula de carga (KISTLER modelo 9718250), cuatro acelerómetros (KISTLER modelo 8712A5M1) y el software de adquisición SignalCal 730 Dynamic Signal Analyzer. Los parámetros de adquisición empleados fueron 85.33 segundos de ventana de adquisición a una frecuencia de muestreo de 185 Hz, para contemplar un rango final de 0 a 75 Hz.

Las Funciones de Respuesta en Frecuencia (F.R.F.) se post-procesan con la ayuda del software LMS. Como resultado se obtiene el modelo modal del cantón mecánico, esto es: frecuencias naturales, modos de vibración y amortiguamientos modales. La figura 2 muestra un ejemplo de las señales recogidas durante el ensayo modal del semi-cantón de entrada de Catenaria Rígida.



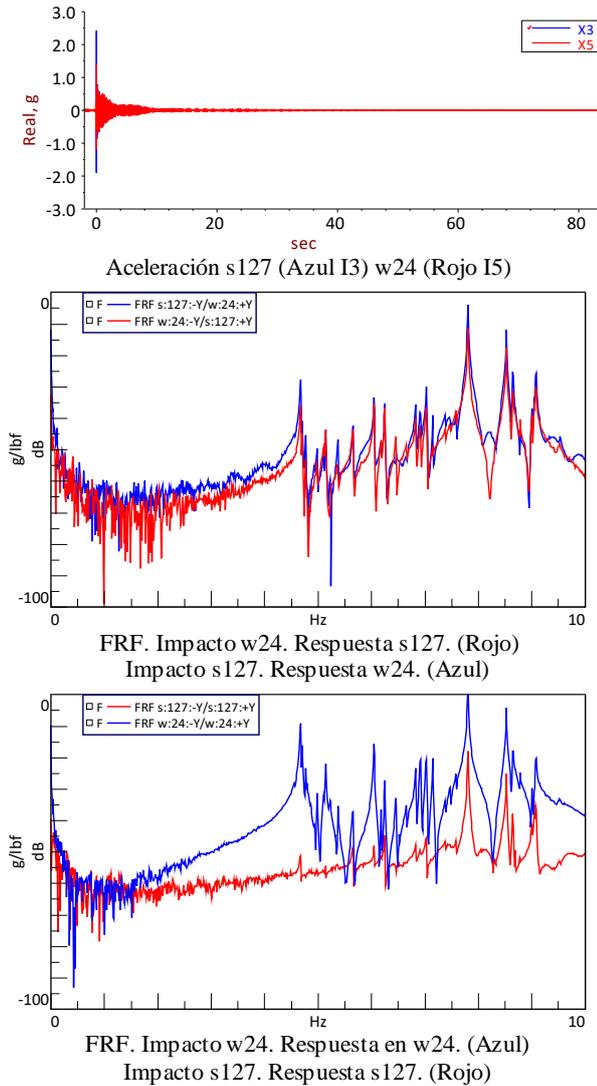


Figura 2: Fuerza, aceleración y transformada de Fourier en el ensayo modal del cantón de catenaria rígida

### 2.3. Actualización del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

A fin de lograr un modelo de elementos finitos dinámico equivalente de la realidad, se pretende actualizar el modelo de elementos finitos inicial con los resultados de ensayos, ajustando algunas de las hipótesis de modelado iniciales. Para asegurar la adecuada actualización, se minimizan los errores relativos en frecuencias y deformadas modales (Criterio de Confianza Modal, M.A.C.), esto es, ecuaciones 1 y 2 respectivamente.

$$Error_{relfr_i} = 100 \frac{fr_{EFi} - fr_{xi}}{fr_{xi}} \quad i = 1, \dots, m$$

fr: frecuencia; EF: elementos finitos; x: experimento; m: número total de modos

$$MAC_{i,j} = \frac{(\phi_{xi}^T \phi_{EFj})^2}{(\phi_{xi}^T \phi_{xi})(\phi_{EFj}^T \phi_{EFj})} \quad i, j = 1 \dots m$$

$\phi$ : vector desplazamiento modal; EF: elementos finitos; x: experiment; m: número total de modos

## 3. Resultados

### 3.1. Resultados de ensayos modales del cantón de catenaria rígida

La tabla 1 y 2 muestra las frecuencias naturales y sus correspondientes amortiguamientos modales, y el anexo C muestra el vector de deformada modal adimensionalizado a magnitud unidad. Los resultados mostrados se corresponden con lo que hemos denominado la primera familia de modos, que para el cantón en estudio se encuentran en el rango de 0 a 10 Hz. Este conjunto de modos se caracteriza por presentar una deformada de vano similar al primer modo de vibración de una viga bi-apoyada. En el ensayo se han registrado un total de 20 modos para el semi-cantón de entrada y 17 para el semi-cantón de salida.

Tabla 1: Semi-cantón de entrada. Resultados de ensayos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Semi-cantón de entrada		
Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
1	4,676	0,17
2	4,984	0,04
3	5,147	0,13
4	5,221	0,18
5	5,373	0,08
6	5,653	0,11
7	6,052	0,05
8	6,186	0,06
9	6,251	0,06
10	6,527	0,07
11	6,917	0,08
12	7,025	0,07
13	7,149	0,09
14	7,473	0,08
15	7,812	0,08
16	8,304	0,12
17	8,528	0,09
18	8,687	0,08
19	9,007	0,04
20	9,083	0,07

Tabla 2: Semi-cantón de salida. Resultados de ensayos de un cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Semi-cantón de salida		
Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
1	4,705	0,15
2	4,760	0,15
3	4,809	0,14
4	4,968	0,18
5	5,155	0,13

Semi-cantón de salida		
Modo	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento (%)
6	5,332	0,10
7	5,505	0,07
8	6,466	0,09
9	6,652	0,12
10	6,834	0,09
11	7,031	0,08
12	7,158	0,07
13	7,388	0,07
14	7,589	0,08
15	8,651	0,10
16	9,090	0,11
17	9,643	0,07

### 3.2. Resultados de la validación del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Para la actualización del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida a partir de los resultados obtenidos de ensayos, ha sido necesario realizar un estudio de la rigidez que los soportes aportan a la estructura, concluyendo que la rigidez que ajusta adecuadamente este tipo de soporte es 400000 N/m.

Tras la actualización del modelo se obtienen nuevamente los modos de vibración con su frecuencia natural asociada en el rango de frecuencia de 0 a 10 Hz. En la **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** se recogen los resultados obtenidos de ensayos y del modelo actualizado, así como el error en frecuencia del modelo actualizado frente a resultados de ensayos. El anexo B muestra la Matriz de Criterio de Confianza modal (MAC) del modelo de Elementos Finitos actualizado.

Tabla 3: Semi-cantón de entrada. Resultados de la validación del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Error en frecuencia semi-cantón de entrada			
Modo	Ensayo	Modelo actualizado	
	Frecuencia (Hz)	Frecuencia (Hz)	Error (%)
1	4,676	4,721	0,967
2	4,984	4,987	0,056
3	5,147	5,125	0,437
4	5,221	5,182	0,755
5	5,373	5,351	0,408
6	5,653	5,556	1,721
7	6,052	6,045	0,124
8	6,186	6,192	0,100
9	6,251	6,225	0,414
10	6,527	6,473	0,827
11	6,917	6,832	1,226
12	7,025	6,948	1,103

Error en frecuencia semi-cantón de entrada			
Modo	Ensayo	Modelo actualizado	
	Frecuencia (Hz)	Frecuencia (Hz)	Error (%)
13	7,149	7,065	1,179
14	7,473	7,314	2,134
15	7,812	7,657	1,982
16	8,304	8,153	1,820
17	8,528	8,365	1,915
18	8,687	8,386	3,466
19	9,007	8,680	3,628
20	9,083	8,758	3,584

## 4. Discusión

Este trabajo presenta, para un cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga, la validación a partir de ensayos modales experimentales de un modelo de elementos finitos. De los 27 modos del semi-cantón de entrada que se estimaban para la primera familia, se han registrado y validado un total de 20. El resto de modos no fue posible medirlos por ser modos locales y escapar de la configuración de acelerómetros seleccionada. La metodología de los ensayos implementada ha aportado la calidad necesaria a los resultados, como se puede observar en la simetría habitual de las F.R.F cruzadas (figura 2-3<sup>a</sup> gráfica). Por otro lado la F.R.F de punto asociada al vano (figura 2-4<sup>a</sup> gráfica azul) muestra una mayor amplitud durante todo el rango de frecuencia (0 a 10 Hz) en comparación con la F.R.F de punto del soporte (figura 2-4<sup>a</sup> gráfica roja). Además, La F.R.F de punto asociada al soporte aumenta su amplitud a partir de los 8 Hz, tal y como se observa en el modelo de elementos finitos, donde la influencia de los soportes en la respuesta es mayor. Los amortiguamientos registrados en el cantón analizado de catenaria rígida presentan amortiguamientos inferiores al 1 %, que los hace comparables a los medidos en catenaria flexible. Con estos datos se ha validado un modelo de elementos finitos con errores relativos de frecuencias menores del 3.6 % y un error medio de 1.39 %. Además, en lo que hemos considerado la primera familia de modos se ha logrado que las deformadas modales del modelo actualizado presenten una similitud media del 91 % respecto a ensayos. Estos resultados indican la validez del modelo en el rango de frecuencias de 0 a 10 Hz.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el soporte recibido por parte de Adif en el Proyecto CARIMA (Nº Contrato: 3.15/49570.003.)

## Referencias

- [1] J. Pombo, J. Ambrosio. Influence of pantograph suspension characteristics on the contact quality with the catenary for high speed trains. *Computers and Structures*; 110-111, 32-42. 2012
- [2] J. Pombo, J. Ambrosio. Environmental and track perturbations on multiple pantograph interaction with catenaries in high-speed trains. *Computers and Structures*. 124, 88-101. 2013
- [3] Giuseppe Bucca, Andrea Collina. Electromechanical interaction between carbon-based pantograph strip and copper contact wire: A heuristic wear model. *Tribology International*, 92, 47-56. 2015
- [4] Yong Hyeon Cho. Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper. *Journal of Sound and Vibration*; 315, 433-454. 2008
- [5] Andrea Collina, Stefano Bruni. Numerical Simulation of Pantograph-Overhead Equipment Interaction. *Vehicle System Dynamics*; 38:4, 261-291. 2010
- [6] Marco Boccione, Giuseppe Bucca, Andrea Collina, Lorenzo Cornolli. Pantograph–catenary monitoring by mean so fibre Bragg grating sensors: Results from tests in an underground line. *Mechanical Systems and Signal Processing*; 41, 226-238. 2013
- [7] A. Facchinetti, S. Bruni. Hardware-in-the-loop hybrid simulation of pantograph–catenary interaction. *Journal of Sound and Vibration*; 331, 2783-2797. 2012
- [8] G. Diana, F. Fossati, F. Resta. High Speed Railway: Collecting Pantographs Active Control and Overhead Lines Diagnostic Solutions. *Vehicle System Dynamics*; 30:1, 69-84. 2010
- [9] C. Vera, B. Suarez, J. Paulin, P. Rodríguez. Simulation model for the study of overhead rail current collector systems dynamics, focused on the design of a new conductor rail. *Vehicle Systems Dynamics*; 44:8, 595-614. 2007
- [10] A. Bautista, J. Montesinos, P. Pintado. Dynamic interaction between pantograph and rigid overhead lines using a coupled FEM — multibody procedure. *Mechanism and Machine Theory*; 97, 100-111. 2016

Tramo	L (mm)
127-128	7993
128-129	8345
129-130	7433
130-131	8071
131-132	7322
132-133	8566
133-134	8064
134-135	7318
135-136	8822
136-137	7591
137-138	7791
138-139*	8496
139-140	7945
140-141	7321
141-142	8843
142-143	7747
143-144	7746
144-145	8903
145-146	7469
146-147	7622
147-148	8534
148-149	6871
149-150	8765
150-151	8412
151-152	6675
152-153	5274
153-154	4386
154-155	3137
155-vol	2620

(\*Punto fijo del cantón mecánico)

## ANEXO A

Tabla a1: Longitudes de vano del cantón mecánico de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga

Tramo	L (mm)
vol- 104	2590
103-105	3060
105-106	6760
106-107	4560
107-108	7340
108-109	7690
109-110	7430
110-111	9140
111-112	7460
112-113	7930
113-114	8580
114-115	7750
115-116	7810
116-117	8590
117-118	7450
118-119	8006
119-120	8961
120-121	7036
121-122	7969
122-123	7724
123-124	8328
124-125	7836
125-126	7577
126-127	8810

Tabla a2: Posicionamiento de brida y descentramiento del cantón mecánico de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga. Las posiciones de brida se definen según el sentido de circulación (desde 104 a 155), al igual que el descentramiento, el lado izquierdo del eje central se considera positivo y el derecho negativo

Soporte	Distancia al soporte (mm)	Descentramiento
vol	-	-
104	-	125
105	-	125
106	-	-10
107	-	-71
108	1970	-22
109	2280	35
110	2860	100
111	1710	120
112	2250	153
113	2360	200
114	1790	220
115	2050	210
116	2250	200
117	1660	210
118	2230	220
119	2182	158
120	1228	198
121	2192	46
122	2239	-3
123	2520	-61

Soporte	Distancia al soporte (mm)	Descentramiento
124	2194	-136
125	2362	-143
126	2790	-171
127	1978	-176
128	1991	-210
129	1648	-214
130	2104	-205
131	2034	-195
132	2714	-192
133	2149	-159
134	2093	-146
135	2781	-116
136	1956	-49
137	2371	-1
138	2581	66
139	2089	106
140	2147	134
141	2827	168
142	1989	160
143	2239	188
144	2495	178
145	1590	167
146	2121	154
147	2505	119
148	1986	104
149	3106	2
150	2344	16
151	1936	-20
152	-	-81
153*	2020*	-111
154	1200	34
155	-	6
vol	-	-

(\*Contrario al sentido de circulación)

17	0,2	0,0	0,2	0,4	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0
18	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,4
19	0,0	0,0	0,2	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
20	0,6	0,2	0,2	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0

Tabla b2: Semi-cantón de entrada. Resultados de la validación del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga II

MAC Semi-cantón de entrada										
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,4	0,1	0,1	0,0	0,0	0,6
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0	0,1
3	0,0	0,1	0,1	0,0	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	0,1
4	0,0	0,0	0,2	0,0	0,3	0,2	0,4	0,0	0,1	0,1
5	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0
6	0,0	0,6	0,7	0,2	0,0	0,4	0,0	0,0	0,0	0,1
7	0,0	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1
8	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
9	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0
10	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0	0,2	0,4	0,0	0,0
11	1,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
12	0,4	0,8	0,4	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0
13	0,0	0,9	0,9	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,1
14	0,1	0,1	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	0,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0
16	0,1	0,2	0,3	0,0	0,0	0,9	0,1	0,0	0,0	0,1
17	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,4	0,6	0,0	0,0	0,0
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,3	0,9	0,0	0,0
19	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8	0,1
20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,9

ANEXO B

Tabla b1: Semi-cantón de entrada. Resultados de la validación del modelo de elementos finitos del cantón de catenaria rígida de la red de cercanías de Málaga I

MAC Semi-cantón de entrada										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,9	1,0	0,0	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0
4	0,0	0,1	0,8	0,9	0,0	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,9	0,4	0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,1	1,0	0,1	0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,6	0,0
9	0,1	0,0	0,1	0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,8	0,2
10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	1,0
11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,1	0,1
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,2	0,0	0,0	0,1
13	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,7	0,1	0,0	0,1	0,1
14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,2	0,2	0,0	0,2	0,1
15	0,3	0,0	0,1	0,2	0,1	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0
16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,2	0,0	0,0	0,0

ANEXO C

Tabla c1: Resultados de ensayo. Deformada modal. Semi-cantón de entrada

Deformada modal. Semi-cantón de entrada							
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Frec.	4,676	4,984	5,147	5,221	5,373	5,653	6,052
Amortig	0,17	0,04	0,13	0,18	0,08	0,11	0,05
w:0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
s:103	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w:1	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00
s:105	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w:2	0,00	0,01	-0,01	0,00	0,00	-0,01	-0,01
s:106	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,01
w:3	-0,01	-0,02	0,01	0,00	-0,01	0,00	0,04
s:107	0,01	0,01	0,00	0,00	0,02	-0,01	-0,05
w:4	0,03	0,06	-0,03	-0,03	0,07	-0,04	-0,16
s:108	0,00	-0,01	0,01	-0,01	-0,03	0,00	0,06
w:5	-0,07	-0,22	0,09	0,07	-0,18	0,06	0,31
s:110	-0,09	-0,12	0,03	0,01	-0,06	-0,01	-0,02
w:7	-0,26	-0,71	0,21	0,16	-0,33	0,04	0,05

s:112	-0,03	0,05	-0,03	-0,03	0,06	-0,02	-0,04	s:127	-0,03	-0,18	-0,04	-0,04	-0,16	-0,03	-0,05	
w:9	-0,22	0,44	-0,25	-0,23	0,59	-0,13	-0,34	w:24	-0,10	-0,42	-0,07	-0,34	-0,54	-0,37	-0,18	
s:114	-0,01	0,10	0,02	0,02	-0,06	0,02	0,07									
w:11	-0,11	1,00	-0,31	-0,21	0,23	0,04	0,27	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	
s:116	0,05	0,11	0,02	0,03	-0,07	0,03	0,05	15	16	17	18	19	20			
w:13	-0,10	0,80	0,14	0,30	-1,00	0,25	0,30	Frec.	7,812	8,304	8,528	8,687	9,007	9,083		
s:118	0,04	-0,02	0,02	0,01	0,04	-0,03	-0,20	Amortig	0,08	0,12	0,09	0,08	0,04	0,07		
w:15	0,16	-0,19	0,36	0,27	-0,02	-0,24	-0,80	w:0	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,05	0,01		
s:120	0,01	-0,02	-0,03	-0,02	0,01	0,04	0,17	s:103	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
w:17	0,17	-0,42	-0,02	-0,09	0,31	0,16	0,77	w:1	0,00	0,00	0,00	0,01	-0,01	0,01		
s:123	-0,05	0,05	0,09	0,07	0,02	0,03	0,16	s:105	0,00	0,00	0,00	0,01	-0,02	0,00		
w:20	-0,45	0,44	1,00	1,00	0,25	-0,59	0,51	w:2	0,00	-0,01	-0,01	0,04	-0,08	0,01		
s:125	-0,18	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03	0,08	-0,16	s:106	0,00	0,01	0,01	-0,02	0,05	-0,01		
w:22	-0,74	0,08	0,20	0,07	0,12	1,00	1,00	w:3	0,01	0,02	0,02	-0,10	0,20	-0,04		
s:127	-0,12	-0,05	-0,04	-0,04	-0,05	-0,14	-0,12	s:107	0,00	-0,02	-0,02	0,07	-0,10	0,02		
w:24	-1,00	-0,18	-0,40	-0,52	-0,10	-0,25	-0,85	w:4	-0,04	-0,10	-0,07	0,34	-0,69	0,15		
								s:108	0,00	-0,02	-0,02	0,08	-0,22	0,04		
	Modo	w:5	0,01	-0,02	-0,03	0,16	-0,57	0,14								
	8	9	10	11	12	13	14	s:110	0,00	0,03	0,02	-0,06	0,06	0,01		
Frec.	6,186	6,251	6,527	6,917	7,025	7,149	7,473	w:7	-0,02	0,06	0,06	-0,29	0,41	-0,04		
Amortig	0,06	0,06	0,07	0,08	0,07	0,09	0,08	s:112	-0,01	0,01	0,02	-0,18	0,35	-0,04		
w:0	-0,01	0,01	-0,01	-0,01	0,01	0,01	-0,01	w:9	0,01	-0,03	0,01	-0,37	1,00	-0,13		
s:103	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	s:114	0,04	-0,08	-0,03	0,36	0,10	-0,05		
w:1	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,01	0,01	0,01	w:11	0,08	-0,26	-0,25	1,00	0,44	-0,20		
s:105	0,01	-0,01	-0,01	0,00	-0,01	-0,01	0,01	s:116	-0,02	0,02	-0,01	0,11	-0,04	-0,03		
w:2	0,03	-0,04	-0,03	0,02	-0,02	-0,01	0,04	w:13	-0,08	0,21	0,10	-0,09	-0,40	-0,04		
s:106	-0,01	0,05	0,01	-0,01	0,00	0,01	-0,02	s:118	0,01	0,03	0,04	-0,11	-0,19	0,01		
w:3	-0,12	0,12	0,10	-0,06	0,06	0,04	-0,11	w:15	0,11	-0,11	0,03	-0,46	-0,35	0,08		
s:107	0,05	0,02	-0,11	0,04	-0,06	-0,05	-0,02	s:120	0,05	-0,18	-0,09	-0,03	0,09	0,07		
w:4	0,58	-0,50	-0,43	0,27	-0,30	-0,18	0,47	w:17	0,21	-0,82	-0,47	0,18	0,50	0,36		
s:108	0,06	0,21	0,12	-0,04	0,03	0,02	0,04	s:123	-0,02	0,27	0,19	0,05	-0,11	-0,14		
	Modo															
	8	9	10	11	12	13	14	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	
Frec.	6,186	6,251	6,527	6,917	7,025	7,149	7,473	15	16	17	18	19	20			
Amortig	0,06	0,06	0,07	0,08	0,07	0,09	0,08	Frec.	7,812	8,304	8,528	8,687	9,007	9,083		
w:5	-1,00	0,92	0,61	-0,26	0,26	0,15	-0,30	Amortig	0,08	0,12	0,09	0,08	0,04	0,07		
s:110	0,11	-0,05	-0,11	0,04	-0,06	0,03	0,07	w:20	0,21	0,49	0,49	0,17	-0,41	-0,51		
w:7	0,13	-0,24	-0,42	0,32	-0,32	-0,21	0,35	s:125	0,10	-0,25	0,03	-0,06	-0,29	-0,30		
s:112	-0,01	0,03	0,09	-0,05	0,03	0,03	-0,01	w:22	0,11	-1,00	-0,16	-0,18	-0,82	-1,00		
w:9	0,29	0,10	1,00	-0,83	0,77	0,51	-0,80	s:127	-0,43	0,03	-0,38	-0,09	-0,06	-0,27		
s:114	-0,02	-0,07	-0,31	0,10	-0,02	0,06	-0,39	w:24	-1,00	0,08	-1,00	-0,28	-0,17	-0,49		
w:11	-0,28	-0,09	-0,95	0,53	-0,35	-0,11	-0,69									
s:116	0,03	0,05	0,08	-0,08	-0,03	-0,04	0,28	Tabla c2: Resultados de ensayo. Deformada modal. Semi-cantón de salida								
w:13	0,11	-0,28	0,21	-0,58	0,50	0,20	0,63	Deformada modal. Semi-cantón de salida								
s:118	0,01	0,18	-0,09	0,18	-0,14	-0,05	-0,20	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	Modo	
w:15	0,10	0,78	0,62	1,00	-1,00	-0,52	-1,00	21	22	23	24	25	26	27		
s:120	-0,01	-0,06	0,03	-0,04	-0,04	-0,08	0,02	Frec.	4,705	4,760	4,809	4,968	5,155	5,332	5,505	
w:17	-0,06	-0,72	-0,17	-0,57	0,25	-0,16	0,39	Amortig	0,15	0,15	0,14	0,18	0,13	0,10	0,07	
s:123	-0,01	-0,04	0,05	-0,07	-0,10	-0,14	-0,08	s:132	0,03	-0,07	-0,02	0,06	-0,10	0,07	0,02	
w:20	-0,08	-1,00	0,01	-0,50	-0,46	-0,91	-0,22	v:1	-0,29	0,76	-0,27	1,00	-1,00	0,49	-0,08	
s:125	-0,01	0,08	0,04	-0,06	0,13	0,18	0,04	s:134	-0,04	-0,09	-0,01	0,01	0,05	-0,08	0,04	
w:22	0,10	0,29	0,20	0,68	0,50	1,00	0,27	v:3	-0,33	0,83	-0,25	0,33	-0,12	-0,33	0,13	
								s:136	-0,04	-0,09	0,00	-0,03	0,03	0,04	-0,02	

