

**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA**

**Estudio de la dinámica de una red neural recurrente  
discreta y su aplicación a la detección de patrones  
en señales biomédicas e identificación de sistemas**

**Autor: Marichal Plasencia, Roberto Luis**

**Director: José Demetrio Piñeiro Vera**

**Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y Sistemas**



D. José Demetrio Piñeiro Vera, Doctor en Informática y Profesor Titular del Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y Sistemas de la Universidad de La Laguna

Para llevar a cabo la realización de un trabajo de la envergadura de una tesis doctoral, hace falta, aparte de un gran esfuerzo, el apoyo de muchas personas sin las cuales sería aún más difícil alcanzar con éxito los objetivos planteados. Me gustaría aprovechar estas líneas para mostrar mi agradecimiento a algunas de estas personas.

En primer lugar, quisiera agradecer al Dr. D. José Demetrio Piñeiro Vera su labor de dirección, su profesionalidad, su rigurosidad y sobre todo su dedicación a este trabajo.

Al Dr. D. Lorenzo Moreno Ruiz, por hacer posible mi carrera universitaria y contribuir a mi formación docente e investigadora.

A la Dra. Dña Soledad Mañas Alcón, por proporcionarnos los datos de los potenciales evocados visuales de distintos pacientes y sus respectivos diagnósticos.

A los miembros del grupo de Computadoras y Control: Dr. D. Leopoldo Acosta Sánchez, Dr. D. José Luis Sánchez de la Rosa, Dr. D. Alberto Hamilton Castro, Dr. D. Juan Albino Méndez, Dr. D. Graciliano Nicolás Marichal Plasencia, Dra. Dña. Rosa María Aguilar China, Dr. D. José Sigut Saavedra, Dr. D. José Ignacio Estévez Damas, Dra. Dña. Marta Sigut Saavedra, D. Juan Julián Merino Rubio, D. Santiago Torres Álvarez, Dra. Dña. Carina Soledad González, D. Evelio José González González, Dña. Silvia Alayón Miranda, D. Héctor Rebozo Morales, D. Sergio Hernández Alonso, D. José Julio Rodríguez Bello, D. Carlos Martín Galán, Dña. Vanesa Muñoz Cruz, D. Jesús M. Torres Jorge, D. Jonay Toledo Carrillo, Jesús Fco. Montañés Tomás, D. Roberto Betancor Bonilla, D. Agustín José Padrón, D. Manuel Fernández Vera.

A Rebeca por apoyarme en todos los años que le he dedicado a este trabajo.

Especialmente, a mis padres y a mi hermano por el ánimo continuo que me han mostrado en todo momento.



**A mi familia,  
y a Rebeca**



# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>xi</b>
<b>Capítulo 1. Redes Neuronales y Técnicas de Optimización para el Entrenamiento .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción Histórica .....	2
1.2 Neurona Artificial.....	3
1.3 Topologías de Redes Neuronales .....	7
1.3.1 Multicapa conectada en alimentación hacia delante.....	8
1.3.2 Capa única, conectada lateralmente .....	8
1.3.3 Bicapa conectada hacia delante y hacia atrás.....	8
1.3.4 Multicapa cooperativa/competitiva .....	8
1.4 Redes Neuronales Estáticas y Dinámicas.....	9
1.4.1 Redes Neuronales Estáticas.....	9
1.4.1.1 Perceptrón Multicapa .....	9
1.4.1.2 Red de Funciones de Base Radial (RBF) .....	10
1.4.2 Redes Neuronales dinámicas .....	11
1.4.2.1 Red neuronal con retardo en el tiempo (TDNN).....	11
1.4.2.2 Redes Neuronales con salida realimentada.....	12
1.4.2.3 Redes con estados realimentados .....	13
1.5 Entrenamiento de las Redes Neuronales.....	18
1.5.1 Backpropagation.....	20
1.5.2 Real Time Recurrent Learning (RTRL).....	23
1.6. Técnicas de Optimización utilizadas en el entrenamiento.....	26
1.6.1 Métodos de optimización multidimensional utilizados .....	27
1.6.1.1 Método del gradiente descendente.....	27
1.6.1.2 Método del gradiente conjugado de Fletcher-Reeves .....	28
1.6.1.3 Métodos Pseudo-Newton.....	29

1.6.2 Métodos de optimización monodimensional.....	32
1.6.2.1 Método de interpolación parabólica.....	32
1.6.2.2 Método de la Sección de Oro .....	33
1.6.2.3 Método de Brent.....	34
<b>Capítulo 2. Sistemas dinámicos .....</b>	<b>37</b>
2.1 Introducción.....	38
2.2 Definición formal de Sistema Dinámico.....	39
2.2.1 Sistemas dinámicos continuos y discretos .....	40
2.3 Conjuntos Invariantes .....	41
2.4 Puntos fijos.....	43
2.4.1 Estabilidad.....	43
2.4.2 Estabilidad de Lyapunov: Estabilidad local y global.....	44
2.4.2.1 Método directo de Lyapunov.....	46
2.4.2.2 Linealización.....	48
2.4.3. Puntos fijos hiperbólicos inestables, estables y de silla .....	50
2.4.3.1 Variedad Estable e Inestable del punto fijo/equilibrio de silla .....	51
2.5 Equivalencia de sistemas dinámicos .....	52
2.6 Teoría de Bifurcaciones .....	54
2.6.1 Bifurcaciones asociadas a puntos fijos no hiperbólicos .....	55
2.6.1.1 Bifurcación tipo de silla-nodo en una dimensión .....	57
2.6.1.2 Bifurcación tipo periodo doble en una dimensión.....	60
2.6.1.3 Bifurcaciones tipo Neimark-Sacker y Hopf.....	64
2.6.2 Teorema de variedad central.....	72
2.6.2.1 Determinación de la variedad central.....	75
2.7 Dinámicas caóticas .....	86
2.7.1 Exponente de Lyapunov .....	86
2.7.1.1 Sistema monodimensional.....	87
2.7.1.2 Sistema multidimensional.....	88
2.7.2 Tipo de caos característico (Smale Horseshoe).....	90
2.7.3 Puntos homoclínicos y heteroclínicos.....	94
2.7.4 Ruta del caos. Fenómeno de Cascada.....	96
<b>Capítulo 3. Estudio dinámico de una red neuronal recurrente discreta.....</b>	<b>99</b>
3.1 Introducción.....	99
3.2 Estudio de la dinámica de una neurona .....	100
3.3 Estudio de la dinámica de dos neuronas.....	106
3.3.1 Determinación del número de puntos fijos y su estabilidad .....	106
3.3.2 Estudio de las bifurcaciones tipo silla-nodo, Pitchfork, y periodo doble .....	110
3.3.2.1 Bifurcaciones tipo silla-nodo y Pitchfork.....	111
3.3.2.2 Bifurcación de periodo doble.....	120
3.3.3 Dinámicas en función de los puntos fijos y ciclos.....	124
3.3.3.1 Resultados previos.....	124
3.3.3.2 Clasificación de las configuraciones dinámicas.....	126
3.3.3.3 Interpretación de las configuraciones dinámicas .....	162
3.3.5 Bifurcación Neimark-Sacker.....	163
3.3.5.1 Determinación de la dirección de la bifurcación .....	173
3.3.5.2 Simulación.....	179
3.3.5.3 Estudio de las lenguas de Arnold .....	180
3.3.6 Estudio del Caos .....	181
3.3.6.1 Caos en la red de dos neuronas: Caso degenerado .....	182
3.3.6.2 Caos en la red de dos neuronas: Caso no degenerado.....	185

3.3.6.3 Análisis del atractor.....	190
3.4 Resultados para n neuronas .....	191
<b>Capítulo 4. Aplicaciones .....</b>	<b>197</b>
4.1 Detección de dos patrones temporales.....	198
4.1.1 Estrategia de Inicialización de pesos.....	202
4.2 Detección de la señal del Potencial evocado .....	206
4.2.1 Morfología del potencial evocado visual.....	207
4.2.2 Entrenamiento para la detección de la componente $P_{100}$ .....	208
4.2.4 Configuración alternativa de las entradas .....	216
4.2.5 Estudio de la dinámica.....	219
4.2.5.1 Configuración con una entrada.....	220
4.2.5.2 Nueva configuración con múltiples entradas desplazadas.....	224
4.2.5.3 Cambio dinámico relacionado con el error.....	227
4.2.6 Estrategia de inicialización de pesos .....	231
4.2.7 Resultados del entrenamiento con diferentes algoritmos de optimización de gradiente.....	234
4.2.8 Resultados de la detección de la $P_{100}$ del P.E.V.....	239
4.3 Identificación de un motor de corriente continua .....	242
4.3.1 Resultados con el modelo lineal del motor .....	245
4.3.1.1 Estudio de la dinámica.....	248
4.3.1.2 Cambio dinámico relacionado con el error.....	249
4.3.1.3 Estrategia de inicialización de pesos.....	250
4.3.2 Resultados del motor CC real.....	252
4.3.2.1 Estudio de la dinámica.....	259
4.3.2.2 Cambio dinámico relacionado con el error.....	261
4.3.2.3 Estrategia de inicialización de pesos.....	263
<b>CONCLUSIONES Y LÍNEAS ABIERTAS .....</b>	<b>267</b>
<b>Apéndice A.....</b>	<b>271</b>
<b>Apéndice B.....</b>	<b>275</b>
<b>Apéndice C.....</b>	<b>279</b>
<b>Apéndice D.....</b>	<b>285</b>
<b>Apéndice E.....</b>	<b>293</b>



# Introducción

Este trabajo se encuadra, de forma genérica, dentro del análisis de sistemas dinámicos no lineales. En particular, se trata de llevar a cabo el estudio de una clase de red neuronal artificial dinámica. El objetivo principal es analizar las posibilidades que ofrecen estas redes neuronales en la solución de problemas en los que intervenga evolución temporal, como identificación, detección de patrones en señales, control y muchos otros.

Las redes neuronales pueden constituir una herramienta importante en la resolución de problemas complejos. Están inspiradas en los sistemas neuronales biológicos y su característica fundamental, heredada de los sistemas naturales que emulan, es incorporar mecanismos de aprendizaje. Estos sistemas poseen la capacidad de aprender a partir de ejemplos concretos, generalizándolos, en lo que se conoce como proceso de entrenamiento. En realidad, los modelos más comunes de neurona artificial están muy lejos de parecerse a las naturales y sus métodos de entrenamiento son muy poco plausibles biológicamente. A pesar de ello, en la práctica este tipo de sistemas ha tenido gran éxito en problemas muy dispares, en donde la complejidad hace que el aprendizaje juegue un papel importante. El inconveniente

fundamental que poseen estos sistemas es la opacidad de las soluciones que encuentran. Precisamente el intentar describir cómo una red neuronal dinámica resuelve un problema es la motivación fundamental de este trabajo. Para ello se intentará analizar la dinámica de una clase particular de red, catalogando en lo posible las diferentes posibilidades y se aprovechará ese conocimiento para la mejora de los métodos de entrenamiento.

El trabajo se divide en dos partes: en la primera se analiza la dinámica de las redes neuronales tipo Williams-Zipser con diferente número de neuronas (por la complejidad, el estudio se reduce fundamentalmente a estudiar una y dos neuronas), y en la segunda se estudian diversos problemas concretos en los que se han aplicado estas redes, para estudiar sus dinámicas y su evolución a lo largo del proceso de entrenamiento. Estos problemas, de muy distinto grado de dificultad y características, sirven de ejemplos sobre los que se aplican los desarrollos previos.

Esta memoria se ha dividido en cuatro capítulos, de los cuales los dos primeros reúnen parte del conocimiento previo necesario y los otros dos describen el trabajo realizado en la tesis. A continuación se resumirá el contenido de esos cuatro capítulos.

En el primer capítulo se hace una breve introducción a las redes neuronales, siguiendo con más detalle las utilizadas en este trabajo. Además, se proporciona una visión general de los algoritmos de optimización tanto multidimensionales como monodimensionales empleados en su entrenamiento.

El siguiente capítulo consiste en una introducción a la teoría de los sistemas no lineales. Se hace especial hincapié en la teoría de bifurcaciones. Éstas determinan las transiciones entre distintas dinámicas equivalentes cuando se varían los parámetros del sistema. También se presentan comportamientos específicos, como la aparición de cuasiórbitas y la dinámica caótica.

En el tercer capítulo se aplica la anterior teoría no lineal a las redes neuronales tipo Williams-Zipser, fundamentalmente. Se examinará por separado el caso de una sola neurona, dos neuronas, y  $n$  neuronas. Para el primer caso se determinarán sistemáticamente todas las dinámicas, en el segundo se hará un análisis de las bifurcaciones, examinando especialmente las dinámicas donde aparecen cuasiórbitas y caos, y en el último caso se recogen resultados parciales sobre condiciones para la estabilidad.

Por último, en el cuarto capítulo, se tratará el comportamiento dinámico de las redes neuronales en diversos problemas. Entre éstos está la detección de dos patrones simples, la caracterización de la señal del potencial evocado visual y el problema de identificación de una planta correspondiente a un motor de corriente continua controlado en el inducido. Se analiza el comportamiento dinámico de la red neuronal a lo largo de cada entrenamiento, estableciendo de esta manera la relación entre las dinámicas y el valor del error. Se plantea una estrategia de inicialización de los pesos con el fin de mejorar los resultados de los entrenamientos.

Finalmente, se extraen las conclusiones finales del trabajo y se proponen una serie de cuestiones a desarrollar en trabajos futuros.



# Capítulo 1. Redes Neuronales y Técnicas de Optimización para el Entrenamiento

En este capítulo se hace una introducción a las redes neuronales y las técnicas de optimización más frecuentemente utilizadas en su entrenamiento. Se comienza con una revisión de los modelos de redes neuronales con importancia histórica, como el perceptrón de Rosenblatt. Se analiza como se organizan dichas neuronas en distintas topologías. Se hace especial hincapié en los tipos de redes neuronales utilizadas, haciéndose una división básica entre las dinámicas y estáticas. A continuación se describe el proceso de entrenamiento de dichas redes, que se enfoca como un problema de optimización basado en el gradiente. Se repasan los algoritmos para el cálculo del gradiente en redes estáticas (*Backpropagation*) y dinámicas (*Backpropagation Through Time* y *Real Time Recurrent Learning*). Por último, se hace una revisión de las técnicas de optimización multidimensionales donde se utiliza la información del gradiente y las de optimización monodimensionales en las que se apoyan las anteriores.

## 1.1 Introducción Histórica

Históricamente la idea de las redes Neuronales artificiales surge del intento de imitar el funcionamiento de las redes neuronales biológicas. Los progresos en neurofisiología y neuroanatomía de la década de los 40 junto con el desarrollo de algunos modelos neuronales permitieron a Warren McCulloch (neurofisiólogo) y John Pitts (matemático lógico) proponer el primer modelo computacional de neurona [McCulloch 43]. Posteriormente, D.O Hebb en 1949 propuso una serie de postulados sobre los mecanismos de aprendizaje de las redes neuronales biológicas y artificiales [Hebb 1949].

Entre la década de los 50 y los 60, un grupo de investigadores biólogos y fisiólogos plantean los primeros modelos de redes neuronales artificiales. Inicialmente, dichos modelos se implementaron mediante circuitos electrónicos, y posteriormente se simularon sobre ordenadores que proporcionaban un medio más flexible para su estudio. Frank Rosenblatt, Bernard Widrow y otros observaron la aplicabilidad de las redes neuronales a problemas prácticos. Más concretamente, el primero que planteó un modelo de red neuronal (denominado Perceptrón) fue Rosenblatt en 1958 [Rosenblatt 1958]. Se observó con este modelo que con problemas sencillos, tales como imitar el comportamiento de la función lógica *O*-Exclusivo no se producían resultados aceptables [Minsky 1969].

Algunos investigadores, como Teuvo Kohonen, Stephen Grossberg y James Anderson continuaron este esfuerzo a pesar del descrédito en que cayeron las redes debido a las dificultades encontradas en el perceptrón.

Desde finales de los 80 y la década de los 90 se ha experimentado un resurgir de las redes neuronales como una técnica general de resolución de problemas. Veamos algunas de las características más relevantes para su éxito:

- Capacidad de Representación. Algunos tipos de redes, como el Perceptrón Multicapa (MLP) [Hush 1993] son capaces de representar cualquier función con la precisión

deseada, superando las dificultades iniciales que se presentaron con los perceptrones monocapa.

- Capacidad de aprendizaje. Presentan la habilidad de ser adaptables y permitir inducir relaciones a partir de ejemplos a través de un proceso de aprendizaje o entrenamiento.
- Capacidad de procesamiento en paralelo. De igual forma que en las redes neuronas biológicas, las redes artificiales están formadas por elementos neuronales simples que pueden funcionar en paralelo. Esto tiene ventajas computacionales frente a los sistemas secuenciales.
- Tolerancia a fallos. Como la información está distribuida en toda la red de forma redundante, al producirse un fallo en un elemento individual, el comportamiento global de red se degrada sólo ligeramente.

Gracias a estas características, las aplicaciones actuales de las Redes Neuronales abarcan campos tan diversos como la medicina, economía, industria, etc.

## 1.2 Neurona Artificial

Se puede considerar la neurona artificial más común (perceptrón), como una función que tiene  $n$  entradas y una sola salida, cuyo funcionamiento consiste en realizar las siguientes operaciones: se realiza una suma ponderada de las entradas mediante unos coeficientes denominados *pesos*, y se le aplica al resultado una función, conocida como función de activación. Este modelo fue propuesto inicialmente por Rosenblatt [Rosenblatt 1958].

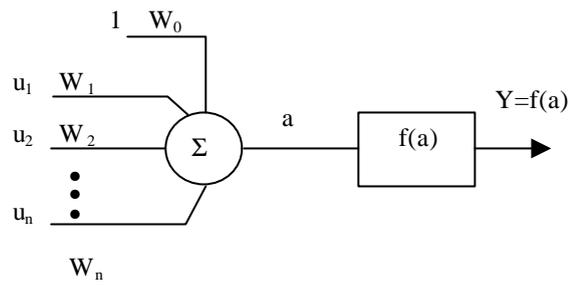


Figura 1.1. Modelo de red Neuronal Artificial tipo Perceptrón.

Como se observa en la figura 1.1, existe una entrada cuyo valor está fijado a la unidad y cuyo peso se suele denominar umbral. La función de activación determina el posible carácter no lineal. En el caso del perceptrón de Rosenblatt dicha función es el escalón unitario:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{Si } a > 0 \\ 0 & \text{Si } a < 0 \end{cases}$$

donde la variable  $a$  es la suma ponderada antes mencionada. De forma que:

$$a = \sum_{i=1}^n w_i u_i + w_0$$

$$Y = f(a)$$

donde:

- $n$  es el número de entradas
- $u_i$  es la entrada  $i$ -ésima
- $w_i$  es el peso que afecta a la entrada  $i$ -ésima
- $w_0$  es el peso umbral
- $f(a)$  es la función de activación
- $Y$  es la salida de la neurona

Como ya se ha comentado, una sola neurona tipo perceptrón de Rosenblatt permite representar una clase restringida de funciones. En particular, la función lógica *O-Exclusiva* no puede ser representada con un perceptrón. La tabla de verdad de la *O-Exclusiva* es:

X	Y	O-Exclusiva
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabla 1.1. Tabla de verdad de la función *O-Exclusiva*.

Si representamos las dos variables independientes en un plano, la función *O-Exclusiva* da valores binarios en cuatro puntos según la tabla anterior. Denominemos con *A* a aquellos puntos que dan un valor 0 y con *B* los que dan un valor 1.

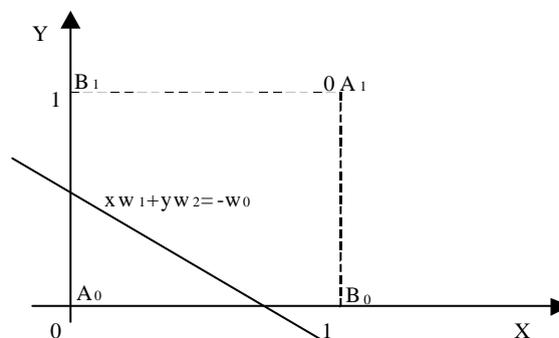


Figura 1.2. Problema de la *O-Exclusiva* como puntos sobre el plano *X-Y*.

El perceptrón permite dividir el plano en dos partes separadas por una recta:

$$w_1x + w_2y = -w_0$$

Como se puede observar en la figura 1.2, no se pueden separar los puntos *A* de los *B* mediante una recta, por lo que el perceptrón no puede representar la función *O-Exclusiva*.

Los únicos problemas que se pueden resolver de forma exacta mediante una capa simple de perceptrones son aquellos en donde los dos tipos de salidas se puedan discriminar en el espacio de las entradas mediante un hiperplano, es decir, sean linealmente separables [James 1991].

Otras funciones de activación son la sigmoide y la tangente hiperbólica, cuyas fórmulas vienen dadas de la siguiente manera:

Tangente hiperbólica:

$$\text{Tanh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sigmoide

$$\text{Sgm}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Cuyas representaciones gráficas se observan en las siguientes figuras.

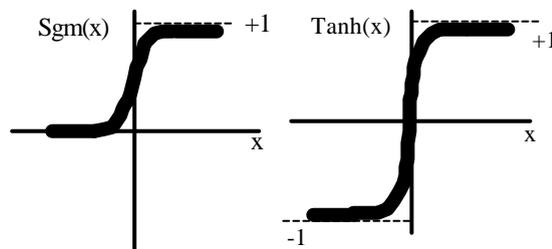


Figura 1.3. Representación de la sigmoide y la tangente hiperbólica.

Las diferencias entre estas funciones de activación y la del Perceptrón de Rosenblatt es que son continuas, y además infinitamente derivables. Esto implica que podemos aplicar métodos de entrenamiento que involucren derivadas de las mismas, como se verá posteriormente.

Otro tipo de neurona de gran aplicación es la utilizada en las redes neuronales de funciones de base radial (RBF) [Chen 1991]. Su salida viene definida de la siguiente manera:

$$u = \exp \left[ -\frac{(x-w)'(x-w)}{2\mathbf{s}^2} \right]$$

donde:

- $u$  es la salida de la neurona
- $w$  es el peso correspondiente a la neurona
- $\mathbf{s}^2$  es el parámetro de normalización de la neurona

Hasta ahora se han considerado modelos de neurona estáticas. Otro tipo de neurona más complejo son las denominadas dinámicas, que tienen un estado interno  $x$  que cambia en el tiempo, determinado por su ecuación de estados.

$$x(k) = G(x(k-1), \dots, x(k-m), u(k), \dots, u(k-n)) \quad \text{ecuación de los estados}$$

$$y_i(k) = F(x(k), x(k-1), \dots, x(k-o), u(k), \dots, u(k-p)) \quad \text{ecuación de las salidas}$$

donde:

- $x$  es el estado interno
- $u$  es la entrada
- $y_i$  es la salida

Estas neuronas se han utilizado para tareas tales como el reconocimiento de fonemas [Wang 2002] o la modelización de sistemas no lineales (dinámica de un robot antropomórfico manipulador [Marichal 1999]), entre otras muchas aplicaciones.

### 1.3 Topologías de Redes Neuronales

La interconectividad de las neuronas determina la topología de las redes, realizándose de tal forma que sea lo más adecuada para el entrenamiento y para el problema específico. En muchas ocasiones, las neuronas se organizan en capas.

Las redes se denominan de alimentación hacia delante si las salidas de una capa conectan con las entradas de la siguiente capa. La interconexión en la misma capa se suele denominar lateral. Si la conectividad entre las neuronas de dos capas incluye a todos los elementos se denomina total o completa y si sólo incluye algunos es parcial. En base a los dos anteriores conceptos, podemos hacer una clasificación de las topologías en cinco grupos [Maren 1990].

### **1.3.1 Multicapa conectada en alimentación hacia delante**

La disposición de las neuronas es por capas y la interconexión de éstas es hacia delante. Este tipo de topología se suele utilizar en reconocimiento de patrones y aproximación de funciones y tiene una característica estática, es decir, ante una entrada fija tendremos una salida fija. Esta estructura es la más frecuente y corresponde a la red denominada perceptrón multicapa (MLP).

### **1.3.2 Capa única, conectada lateralmente**

Esta topología consiste en una única capa con las neuronas conectadas entre sí. Suelen ser dinámicas. La evolución en el tiempo permite aprender patrones temporales o bien los estados finales. Se suelen utilizar para realizar funciones de autoasociación de patrones, debido a esto también se denominan autoasociativas [Kohonen 1989]. De este tipo son las denominadas redes de Hopfield/Tank [Hopfield 1982] y Williams-Zipser [Williams 1989].

### **1.3.3 Bicapa conectada hacia delante y hacia atrás**

Están compuestas por dos capas con conexiones tanto en el sentido de la salida como en realimentación. Se basan en los mismos principios que las autoasociativas de una única capa. Se presentan patrones a la entrada y la red evoluciona hasta llegar a un equilibrio. De este tipo son las de Carpenter [Carpenter 1991] y Grossberg [Grossberg 1988] y la Bidireccional Associative Memory (BAM) de Bart Kosko [Kosko 1987].

### **1.3.4 Multicapa cooperativa/competitiva**

Estas tienen conectividad hacia delante y hacia atrás (realimentación) y poseen además conexiones laterales en cada capa. Estas redes son especialmente empleadas en la modelización de redes biológicas, debido a que las redes naturales poseen esta clase de conectividad. Las conexiones laterales se suelen denominar cooperativas o competitivas

[Kohonen 1990] según tengan la característica de excitar o inhibir a la neurona que recibe dicha conexión como entrada.

## 1.4 Redes Neuronales Estáticas y Dinámicas

Las redes neuronales estáticas son aquellas en que las salidas en un instante determinado sólo dependen de las entradas en dicho instante, con lo que no existe ningún tipo de evolución temporal. Si ocurre que las salidas dependen de las salidas o entradas en instantes diferentes entonces se denominan dinámicas. Aquí habría que distinguir dos subtipos: las redes dinámicas en las que existe una retroalimentación en la red o aquellas en las que podemos describir una dinámica interna de la neurona mediante variables de estado. Estas últimas se denominan localmente recurrentes.

### 1.4.1 Redes Neuronales Estáticas

#### 1.4.1.1 Perceptrón Multicapa

El perceptrón multicapa (MLP) es el tipo de red estática más común. Tiene una topología de alimentación hacia delante totalmente conectada como se aprecia en la siguiente figura.

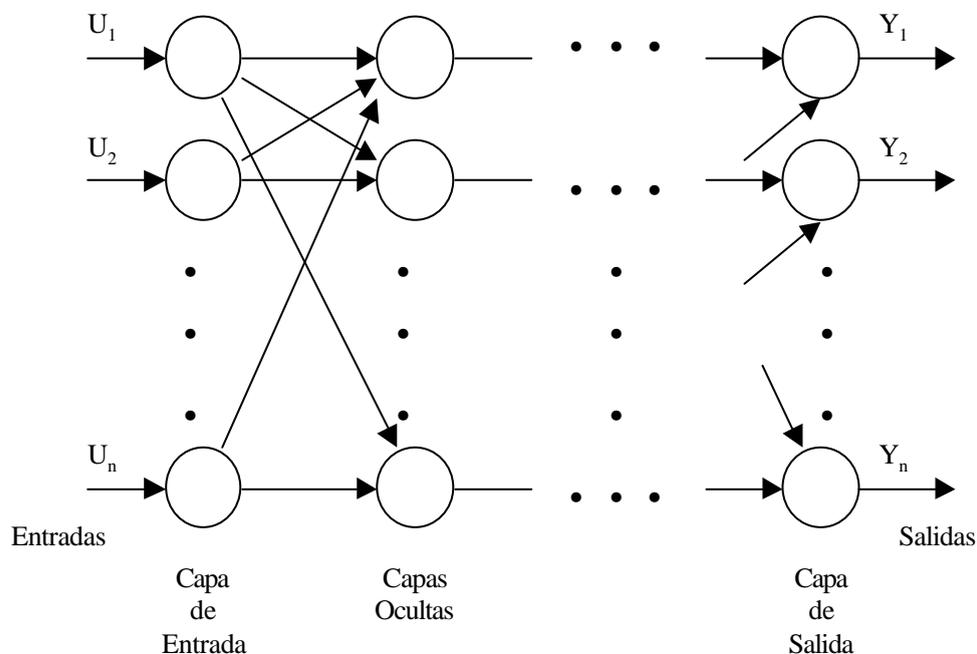


Figura 1.4. Red Neuronal MLP.

Como se puede observar, la salida en un instante determinado no depende de otros instantes, si las neuronas no tienen una dinámica interna.

#### 1.4.1.2 Red de Funciones de Base Radial (RBF)

La red de funciones de base radial (RBF) también es una red estática (véase figura 1.5). Esta formada por dos capas. Una de ellas está compuesta por neuronas con función de activación radial (usualmente gaussianas). Cada neurona posee un peso asociado a cada entrada, determinando la posición o centroide de la gaussiana. El resto de pesos representan las varianzas o dispersiones de cada gaussiana. La salida de cada neurona viene dada por:

$$u_j = \exp\left[-\frac{(x-w_{1j})'(x-w_{1j})}{2\mathbf{s}_j^2}\right] \quad j=1,2,\dots,N_1$$

donde:

- $u_j$  es la salida de la neurona  $j$  de la capa 1
- $w_{1j}$  es el vector de pesos correspondiente a la neurona  $j$  de la capa 1
- $N_1$  es el número de neuronas en la capa 1
- $\mathbf{s}_j^2$  es el parámetro de varianza de la neurona  $j$  de la capa 1

La segunda capa está formada por funciones de activación lineales.

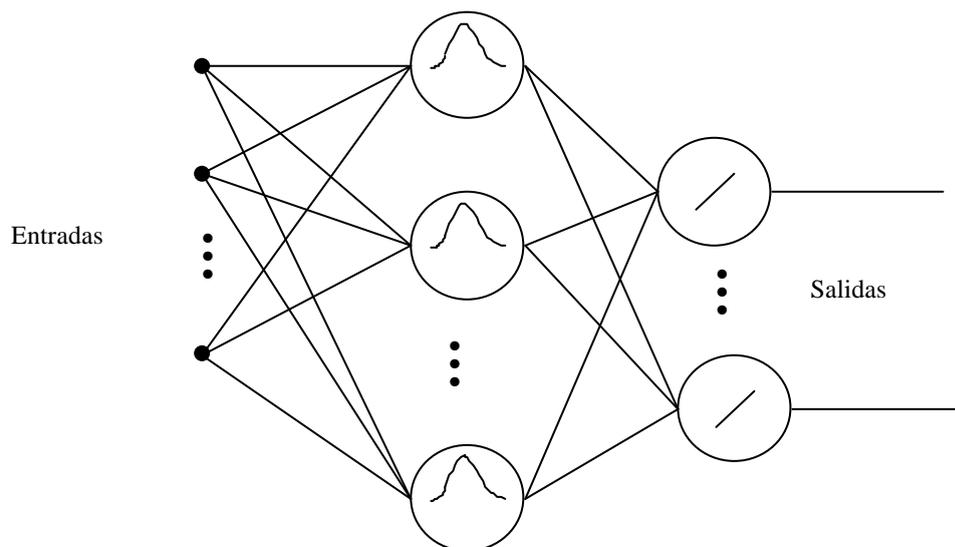


Figura 1.5. Red Neuronal RBF.

Una variación común sobre este modelo es utilizar una función base que incremente su flexibilidad utilizando la distancia Mahalanobis en la gaussiana [Lee 1991]. La función de activación se convierte en:

$$u_{1j} = \exp \left[ -(x - w_{1j})' \Sigma_j^{-1} (x - w_{1j}) \right] \quad j = 1, 2, \dots, N_1$$

donde  $\Sigma_j^{-1}$  es ahora una matriz (matriz de covarianza del nodo  $j$ ).

### 1.4.2 Redes Neuronales dinámicas

En este tipo de redes el funcionamiento se describe mediante ecuaciones en diferencia o diferenciales dependiendo de la naturaleza discreta o continua de las variables. Estas redes son importantes porque muchos de los sistemas que se pueden modelizar en el mundo real tienen características dinámicas.

Veamos a continuación ejemplos de redes neuronales dinámicas.

#### 1.4.2.1 Red neuronal con retardo en el tiempo (TDNN)

Es una red dinámica simple que se puede considerar como una red estática en la que se introducen valores de la entrada en instantes anteriores [Hertz 1991], como aparece en la siguiente figura.

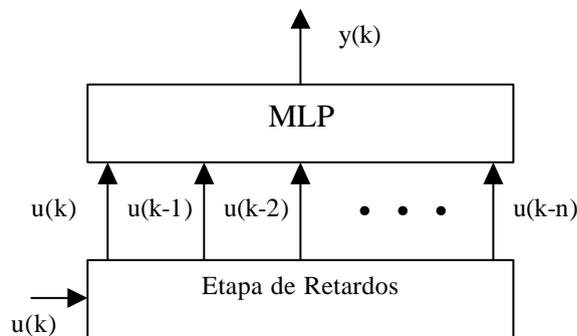


Figura 1.6. Red Neuronal TDNN.

La salida es:

$$y(k) = F(u(k), u(k-1), \dots, u(k-n))$$

donde  $F$  es la actuación de un MLP.

Al no haber realimentación se pueden utilizar los mismos algoritmos que se utilizan en las estáticas.

Es interesante apreciar que cualquier serie temporal se puede modelizar mediante una red neuronal estática, para ello sólo hay que añadir el tiempo como una variable más de entrada. El inconveniente principal que tiene esto es el que las redes neuronales estáticas, al no depender sus salidas de las entradas anteriores no tienen capacidad de memoria, es decir, no son capaces de retener información del pasado. Esto supone un incremento de complejidad en la red, ya que implica aprender la solución de las ecuaciones en diferencia o diferenciales.

Los sistemas dinámicos con realimentación ofrecen ventajas respecto a los puramente alimentados hacia delante, ya que para algunos problemas una red recursiva dinámica con un pequeño número de nodos se comporta igual que las redes puramente alimentadas hacia delante con un número grande de nodos (incluso infinitos).

Los sistemas con realimentación son apropiados para la modelización, identificación, control y aplicación de filtrados. Este tipo de redes se suelen denominar recurrentes, debido a que existe una realimentación que implícitamente involucra recursividad.

#### **1.4.2.2 Redes Neuronales con salida realimentada**

En este tipo de red dinámica además de incluir a su entrada las correspondientes a instantes anteriores, también se incluyen las salidas en instantes anteriores. Este tipo particular de arquitectura fue introducido por Narendra [Narendra 1990] y fue utilizada por primera vez en identificación de sistemas no lineales y en problemas de control [Morgan 1991]. Observemos en la siguiente figura este tipo de red.

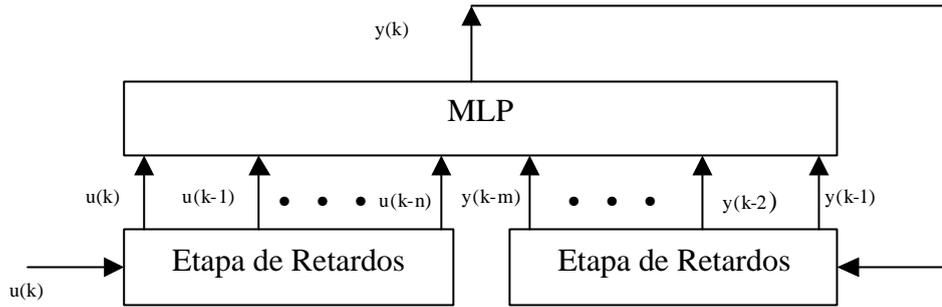


Figura 1.7. Red Neuronal con salidas realimentadas (Narendra).

De esta manera la salida de la red tipo Narendra viene dada por:

$$y(k) = F(u(k), u(k-1), \dots, u(k-n), y(k-1), \dots, y(k-m))$$

donde  $F$  es la actuación de una red MLP.

### 1.4.2.3 Redes con estados realimentados

Este tipo de red incorpora un tipo diferente de realimentación. Estas redes son típicamente de una única capa con realimentación entre nodos. En el caso más general todos los nodos están interconectados, es decir, cada nodo está conectado a todos los demás y también consigo mismo. Esto se observa en la siguiente figura.

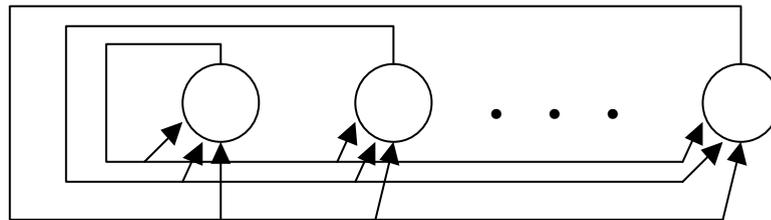


Figura 1.8. Red con estados realimentados.

Por otro lado todas las entradas de la red se conectan con cada nodo individualmente.

Un conjunto de salidas de cada nodo individual constituye la salida global de la red.

En algunas redes de este tipo, las neuronas tienen un estado interno distinto del de la variable de salida. En cambio, en otras la salida en cada nodo coincide con el estado.

Veamos dentro de este tipo de red cuatro ejemplos concretos.

### Red de Hopfield continua

Este tipo de red es de una capa simple y completamente interconectada [Hopfield 1982].

Cada nodo tiene una dinámica interna y viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \tau_i \frac{dx_i}{dt}(t) &= -x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + \sum_{l=0}^m w'_{il} u_l(t) & i = 1, \dots, n \\ y_i(t) &= f(x_i(t)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde:

- $x_i(t)$  es el estado interno de la neurona  $i$
- $y_i(t)$  es la salida de la neurona (estado de salida)
- $w_{ij}$  es el peso que conecta la neurona  $j$ -ésima con la  $i$ -ésima
- $w'_{i,l}$  es el peso correspondiente de la entrada  $l$ -ésima del nodo  $i$ -ésimo
- $u_l(t)$  es la entrada de la neurona  $l$ -ésima en el instante  $t$
- $n$  es el número de neuronas
- $m$  es el número de entradas

La mayoría de las aplicaciones originales de Hopfield requerían que la red funcionara como un sistema dinámico con múltiples puntos de equilibrio asintóticamente estables. Utilizando el segundo método de Lyapunov [Hale 1991] es posible describir las condiciones necesarias para garantizar la estabilidad. En particular, si la matriz de pesos es simétrica entonces todos los puntos de equilibrio son estables.

### Red de Hopfield discreta

Ahora la dinámica de la red se rige por una ecuación en diferencias, que viene dada de la siguiente forma:

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + \sum_{l=0}^m w'_{il} u_l(k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i(k+1) = f_{h1}(x_i(k))$$

Ahora la condición de estabilidad es que la matriz de los pesos  $W$  sea simétrica y definida positiva en el caso de que las actualizaciones de los nodos se hagan simultáneamente. Si las actualizaciones no son simultáneas, la condición se hace menos restrictiva, ya que en lugar de exigir que  $W$  esté definida positiva sólo hay que garantizar que los elementos de la diagonal sean positivos [Bruck 1988].

Una de las aplicaciones originales de las redes de Hopfield es la memoria asociativa. Una memoria asociativa es un dispositivo que acepta un patrón de entrada y produce como salida el patrón almacenado que se le asocia a esa entrada. En la memoria asociativa de Hopfield, los patrones entrada/salida son binarios y se codifican en los pesos de la red. Si a la entrada se le presenta una versión ruidosa o incompleta de un patrón previamente entrenado la red convergerá al patrón original [Hush 1993].

### Redes neuronales recurrentes continuas (RNRC)

Este tipo de red es similar a la red de Hopfield, ya que al igual que ésta es un tipo de red neuronal con una sola capa y los nodos totalmente interconectados [Pineda 1988]. La diferencia estriba en la ecuación diferencial de cada nodo, que en este caso es la siguiente:

$$t_i \frac{dy_i}{dt}(t) = -y_i(t) + f\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + \sum_{l=0}^m w'_{il} u_l(t)\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

donde:

- $y_i(t)$  es la salida del nodo en un instante  $t$
- $w_{ij}$  es el peso que conecta el nodo  $i$ -ésimo con el  $j$ -ésimo
- $w'_{i,l}$  es el peso correspondiente a la entrada  $l$ -ésima del nodo  $i$ -ésimo
- $u_l(t)$  es la entrada  $l$ -ésima al nodo en cuestión en el instante  $t$
- $f(x)$  es la función de activación que suele ser una sigmoide o una tangente hiperbólica

– $n$  es el número total de neuronas

– $m$  es el número de entradas

En este tipo de red los estados coinciden con las salidas de los nodos.

Existe una relación entre la red de Hopfield y la RNRC, ya que haciendo la siguiente transformación afín:

$$y_h(t) = W y_r(t) + u$$

donde:

– $y_h(t)$  hace el papel de variable de estado de la nueva red de Hopfield.

– $y_r(t)$  es la salida de la red RNRC de la que partimos.

Podemos verificar efectivamente que  $y_h(t)$  cumple la ecuación (1.1), siempre y cuando  $W$  sea invertible.

### Redes neuronales recurrentes discretas (RNRD)

Una aproximación en tiempo discreto de la RNRC es precisamente la RNRD o Williams-Zipser [Williams 1989]. En lugar de tener la ecuación diferencial (1.2) se dispone de la ecuación en diferencias siguiente:

$$y_i(k+1) = f\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(k) + \sum_{l=1}^m w'_{il} u_l(k) + w_{i0}\right)$$

Podemos obtener una expresión más compacta introduciendo los vectores entrada y el peso umbral dentro del sumatorio, con el cambio de notación siguiente:

$$y_i(k) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ y_i(k) & i = 1, 2, \dots, n \\ u_{i-n}(k) & i = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

la expresión queda como:

$$y_i(k+1) = f\left(\sum_{j=0}^{n+m} w_{ij} y_j(k)\right) \tag{1.3}$$

donde  $n$  es el número de nodos y  $m$  es el tamaño del vector de entrada. La definición de  $u_0$  viene del hecho de considerar el peso umbral como se especifica en los perceptrones multicapa.

Estas redes son capaces de emular Autómatas Finitos Deterministas (DFA) arbitrarios. Esta característica de las redes recurrentes las hace adecuadas para el reconocimiento de secuencias [Alon 1991].

Es posible asociar la RNRD a una red estática multicapa equivalente a través de un desdoblamiento en el tiempo, como se ilustra en la siguiente figura.

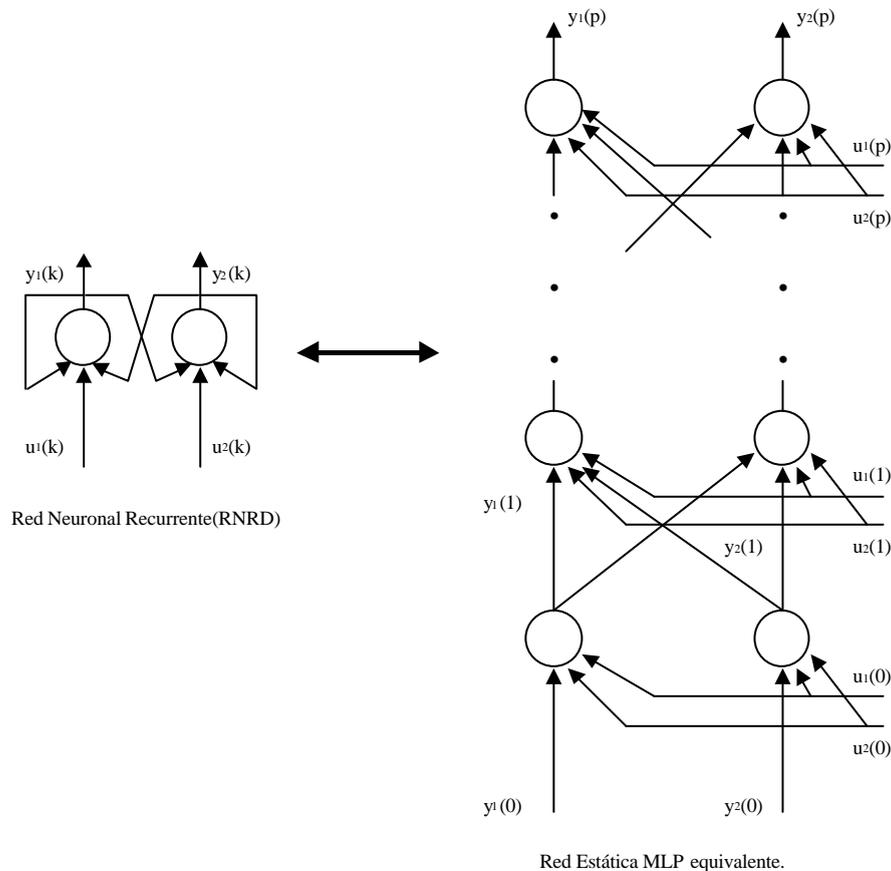


Figura 1.9. Equivalencia entre la red de estados realimentados y la estática.

Se observa que una evolución temporal de  $p$  etapas en la red RNRD es equivalente a una red estática de  $p$  capas, donde todas las capas tienen el mismo conjunto de pesos (el conjunto de pesos original de la RNRD).

Para verificar esto se pueden construir las  $y(i)$  aplicando las ecuaciones de las redes neuronales estáticas. En primer lugar calculemos la salida de la primera capa:

$$y_i(1) = f\left(\sum_{j=0}^n w_{ij} y_j(0) + \sum_{l=0}^m w'_{il} u_l(0)\right)$$

Que corresponde a la primera iteración de la ecuación recurrente (1.3). Teniendo en cuenta que los pesos de las diferentes capas son iguales. Para la capa  $p$  ocurre lo siguiente:

$$y_i(p) = f\left(\sum_{j=0}^n w_{ij} y_j(p-1) + \sum_{l=0}^m w'_{il} u_l(p-1)\right)$$

que corresponde a la iteración  $p-1$  de la ecuación recurrente (1.3). Vemos entonces la equivalencia de las dos redes.

Este resultado es interesante desde el punto de vista del entrenamiento, ya que sugiere la posibilidad de la aplicación de los métodos de entrenamiento de las redes estáticas a la red RNRD.

## 1.5 Entrenamiento de las Redes Neuronales

Se entiende por entrenar una Red Neuronal al proceso de ajuste de los pesos según unos criterios determinados que dependen del algoritmo de aprendizaje.

Los algoritmos de entrenamiento se pueden dividir en dos grandes grupos: los supervisados y los no supervisados. El entrenamiento no supervisado se caracteriza porque no se dispone

de los valores deseados a la salida. La propia red durante el entrenamiento se autoorganiza para identificar similitudes entre el conjunto de entradas.

En los entrenamientos supervisados, se presentan a la entrada unos determinados patrones y se intenta que la salida produzca los patrones deseados correspondientes. Este tipo de enseñanza quizás sea artificial, ya que no existe ningún mecanismo equivalente en los sistemas biológicos. A pesar de esto, estos mecanismos de enseñanza son los más usados.

Generalmente se utiliza una función de coste para indicar lo alejada o cercana que está la salida deseada respecto a la salida de la red. Ésta se suele elegir de tipo cuadrático.

$$J_p(w) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{N_L} (d_j(p) - y_j(p))^2$$

donde:

- $n_p$  es el número de patrones a entrenar
- $d_j(p)$  es la salida deseada  $j$ -ésima correspondiente al patrón  $p$
- $y_j(p)$  es la salida  $j$ -ésima correspondiente al patrón  $p$
- $N_L$  es el número de salidas

El objetivo del entrenamiento consiste en buscar un conjunto de pesos que hagan mínima dicha función. Esta función gráficamente se representa por una hipersuperficie en el caso de tener más de dos pesos. En la figura 1.10 se aprecia lo compleja que puede ser esta superficie en el caso de tener tan sólo dos pesos.

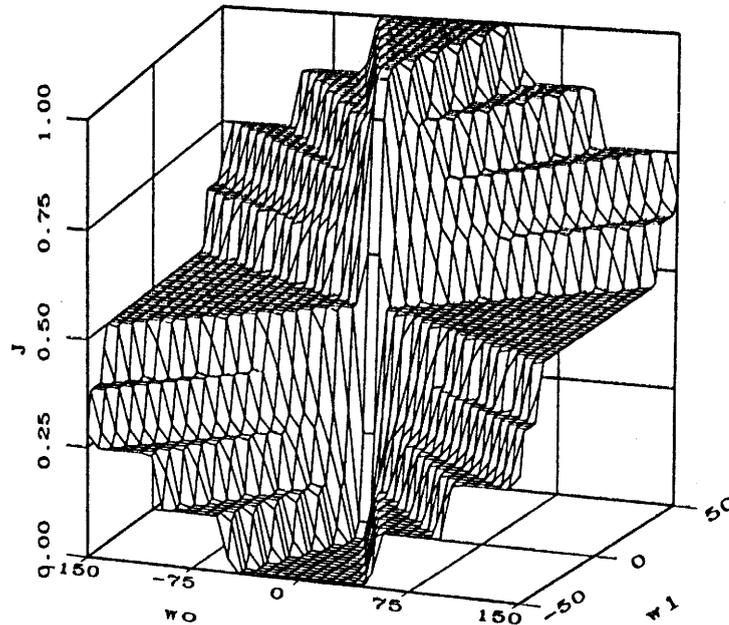


Figura 1.10. Superficie de error de una red estática con función de activación tipo sigmoide.

Este es un problema de optimización sin ligaduras. En muchas técnicas de optimización se utiliza la información sobre el gradiente de la función de coste. El Backpropagation es una técnica que permite determinar el gradiente para las redes estáticas tipo MLP [Hush 1993].

Veamos formas de determinar el gradiente en la red MLP y la RNRD o Williams-Zipser.

### 1.5.1 Backpropagation

Se puede deducir la forma analítica del gradiente en el caso de tener un tipo de red MLP, para ello, en primer lugar podemos aclarar la notación:

- $u_{ij}$  salida del nodo  $j$  en la capa  $l$
- $w_{l,j,i}$  peso que conecta el nodo  $i$  de la capa  $l-1$  al nodo  $j$  de la capa  $l$
- $x_p$  las muestras del patrón  $p$
- $u_{0,i}$  componente  $i$  del vector de entrada
- $d_j(x_p)$  la respuesta deseada del nodo  $j$  de salida para la muestra  $p$  del entrenamiento
- $n_l$  número de nodos en la capa  $l$

- $L$  número de capas
- $p$  indica el patrón
- $n_p$  indica el número de patrones

La capa 0 de la red corresponde a las entradas. Teniendo esto en cuenta cada salida de cada capa se puede expresar como:

$$u_{lj} = f \left( \sum_{i=0}^{n_{l-1}-1} w_{l,j,i} u_{l-1,i} \right) \quad (1.4)$$

donde  $f$  es la función de activación, que suele ser una sigmoide. La derivada de la función de activación en el caso de la sigmoide se puede expresar de la siguiente manera:

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})(1 - f(\mathbf{a}))$$

La optimización consiste en minimizar la siguiente función de coste:

$$J(w) = \sum_{p=1}^{n_p} J_p(w)$$

donde  $J_p$  es la función de coste cuadrática de cada patrón definida de la siguiente manera:

$$J_p(w) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_L} (u_{1q}(x_p) - d_q(x_p))^2$$

Como se puede observar, sólo se tiene en cuenta la salida deseada en la última capa. Las componentes del vector gradiente de la función de coste respecto a los pesos se puede escribir, aplicando la regla de la cadena, como:

$$\frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}w_{l,j,i}} = \frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}u_{l,j}} \frac{\mathcal{J}u_{l,j}}{\mathcal{J}w_{l,j,i}} \quad (1.5)$$

La derivada parcial de las salidas respecto a los pesos se determina mediante (1.5) como:

$$\frac{\mathcal{J}u_{l,j}}{\mathcal{J}w_{l,j,i}} = f' \left( \sum_{m=0}^{N_l-1} w_{l,j,m} u_{l-1,m} \right) u_{l-1,i} \quad (1.6)$$

La derivada parcial del coste respecto a las salidas se denomina sensibilidad, ya que da una idea cualitativa de la variación de la función de coste respecto a la variación de la salida en cada nodo. Utilizando de nuevo la regla de la cadena y suponiendo que la función de activación es una sigmoide se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}u_{l,j}} &= \sum_{m=1}^{N_{l+1}} \frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}u_{l+1,m}} \frac{\mathcal{J}u_{l+1,m}}{\mathcal{J}u_{l,j}} \\ &= \sum_{m=1}^{N_{l+1}} \frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}u_{l+1,m}} u_{l+1,m} (1 - u_{l+1,m}) w_{l+1,m,j} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esta expresión nos permite obtener recursivamente hacia atrás las derivadas respecto a las salidas, ya que si conocemos las salidas de la capa  $l+1$ , y la sensibilidad de los nodos de dicha capa, conoceremos la sensibilidad de la capa anterior. Este proceso recursivo es el que da nombre al algoritmo Backpropagation. Por otro lado, para la última capa, se tiene:

$$\frac{\mathcal{J}J_p(w)}{\mathcal{J}u_{L,j}} = u_{L,j}(x_p) - d_j(x_p) \quad (1.8)$$

Podemos plantear el proceso de determinación del gradiente de la forma siguiente: se calcula la salida de cada capa en un proceso hacia delante a partir de la entrada de la red. A continuación se determina la sensibilidad de la última capa a través de la ecuación (1.8) y mediante la ecuación recurrente (1.7) se calcula el resto de sensibilidades. Por otro lado, se

calculan las derivadas de las salidas de las capas con respecto de los pesos con la ecuación (1.6) y por último se determina el gradiente mediante la ecuación (1.5).

Este tipo de algoritmo no se limita al tipo de red MLP, es posible hacer una generalización a las redes tipo RNRD. Un primer método es hacer una aplicación directa a la red estática equivalente, en cuyo caso se tiene el método denominado Backpropagation Through Time (BPTT) [Werbos 1990]. Un segundo método surge de la aplicación a la red la regla de la cadena de forma diferente a la del Backpropagation y se denomina aprendizaje recurrente en tiempo real. Veamos con más detalle este último algoritmo.

### 1.5.2 Real Time Recurrent Learning (RTRL)

Este algoritmo fue desarrollado por Williams-Zipser [Williams 1989] para las redes recurrentes totalmente conectadas. Veamos a continuación los detalles de dicho método, ya que es el que utilizaremos para entrenar las redes recurrentes.

Como vimos la arquitectura de este tipo de redes tiene la siguiente forma:

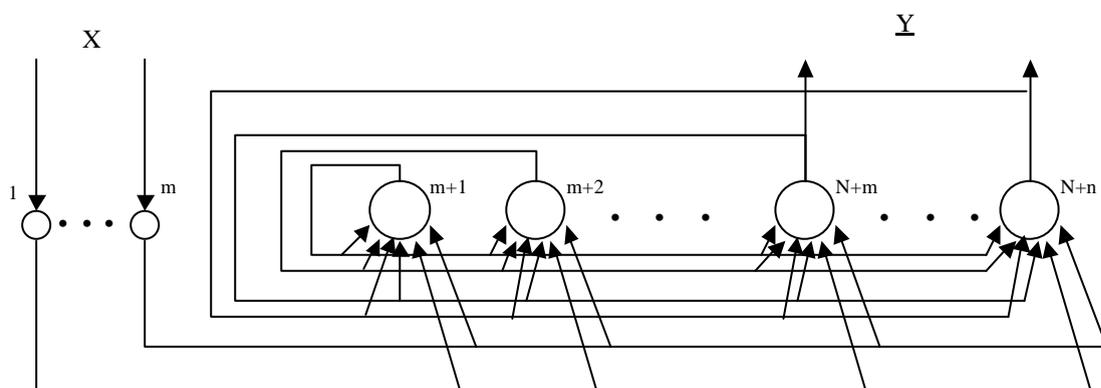


Figura 1.11. Red tipo RNRD o Williams-Zipser.

donde: -  $\underline{X}$  es el vector de entradas de la red

-  $\underline{Y}$  es el vector de salidas de la red

-  $m$  es el número de entradas

-  $n$  es el número de salidas

-  $N$  es el número de entradas + número de neuronas descontando las de salida

En la anterior figura hay que tener en cuenta que los primeros  $m$  nodos son simbólicos, es decir, no les corresponden neuronas. La salida de los últimos  $n$  nodos son las salidas globales de la red.

En este caso la función de coste incluye el error cometido en cada salida para cada etapa de la evolución temporal y para todas las secuencias de entrada. Veamos seguidamente esta función:

$$J(w) = \sum_{p=1}^{n_p} J_p(w)$$

siendo  $J_p$  :

$$J_p(w) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_p} \sum_{j \in \Omega} (d_j(k) - u_j(k))^2$$

donde:

- $k_p$  es la longitud de la secuencia de entrenamiento  $p$ -ésimo
- $\Omega$  representa el conjunto de salida de nodos de la red que son salidas

Las derivadas parciales las podemos poner de la siguiente forma:

$$\frac{\partial J_p(w)}{\partial w_{j,i}} = - \sum_{k=1}^{k_p} \sum_{h \in \Omega} (d_h(k) - u_h(k)) p_{j,i}^h(k)$$

donde la notación  $p_{j,i}^h$  significa:

$$p_{j,i}^h(k) = \frac{\partial u_h(k)}{\partial w_{j,i}}$$

El objetivo para hallar el gradiente es determinar los coeficientes anteriores, en base a la ecuación anterior.

Calculemos la derivada parcial de  $u_h$  respecto a  $w_{ji}$  para determinar  $p_{j,i}^h$ .

$$\begin{aligned} p_{j,i}^h(k) &= \frac{\partial u_h(k)}{\partial w_{j,i}} = f' \left( \sum_{b=1}^{N+n} w_{h,b} u_b(k-1) \right) \left[ \sum_{a=1}^{N+n} \left( \frac{\partial w_{h,a}}{\partial w_{j,i}} u_a(k-1) + w_{h,a} \frac{\partial u_a(k-1)}{\partial w_{j,i}} \right) \right] \\ &= f' \left( \sum_{b=1}^{N+n} w_{h,b} u_b(k-1) \right) \left[ \sum_{a=1}^{N+n} \mathbf{d}_{hj} \mathbf{d}_{ai} u_a(k-1) + \sum_{a=1}^{N+n} w_{h,a} \frac{\partial u_a(k-1)}{\partial w_{j,i}} \right] \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{d}_{hj}$  es la función delta de Kronecker.

Si se tiene en cuenta que el conjunto de entradas (incluyendo la correspondiente al peso umbral) son constantes respecto a los pesos la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} p_{j,i}^h(k) &= f' \left( \sum_{b=1}^{N+n} w_{h,b} u_b(k-1) \right) \left[ \mathbf{d}_{hj} u_i(k-1) + \sum_{a=1}^{N+n-m} w_{h,a} \frac{\partial u_{a+m}(k-1)}{\partial w_{j,i}} \right] \\ &= f' \left( \sum_{b=1}^{N+n} w_{h,b} u_b(k-1) \right) \left[ \mathbf{d}_{hj} u_i(k-1) + \sum_{a=1}^{N+n-m} w_{h,a} p_{j,i}^{a+m}(k-1) \right] \end{aligned}$$

Se comprueba que existe una recurrencia hacia delante en la variable de etapa  $k$ . Esto hace que, a diferencia del backpropagation estático, hay que disponer de condiciones iniciales arbitrarias para inicializar el proceso recursivo (generalmente se supone que los  $p_{ji}^b(0)=0$ ).

Existen varias diferencias entre los algoritmos de entrenamiento de las redes recurrentes BPTT y RTRL. El primero ofrece un coste computacional bastante mayor que el segundo pero este último presenta un requerimiento de espacio mayor. Otra diferencia fundamental es la dirección de los procesos recursivos para determinar el gradiente de cada uno, hacia atrás

en BPTT y hacia delante en RTRL. Esto confiere a este último método ventajas para su implementación en tiempo real.

## 1.6. Técnicas de Optimización utilizadas en el entrenamiento

Como se mencionó anteriormente el proceso de entrenamiento supervisado consiste en encontrar los pesos de la red que minimicen la función de coste para los patrones o series temporales. Formalmente este problema se puede plantear como una optimización sin ligaduras, es decir, se busca un vector de  $n$  dimensiones que cumpla la siguiente condición de punto extremo:

$$X = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}, \dots, w_{n1}, \dots, w_{nn}) \left/ \frac{\partial J(w)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right. \quad (1.9)$$

Siendo  $f(X)$  la función de coste a optimizar y  $X$  el vector de pesos.

Para que el extremo sea un mínimo hay que garantizar que la matriz Hessiana sea definida positiva.

$$H(w) = \left[ \frac{\nabla^2 J}{\nabla x_i \nabla x_j} \right] \text{ definida positiva} \quad (1.10)$$

Tanto la ecuación (1.9) como (1.10) están condicionadas a que la función tenga definidas las derivadas parciales primeras y segundas, al menos en el mínimo. En caso de no estar definidas las derivadas segunda o primera, el objetivo será encontrar un punto  $W$  tal que el valor de  $J(W)$  sea mínimo/máximo. En el problema de optimización que se plantea en el entrenamiento de las redes neuronales la función es infinitamente diferenciable respecto a todos los pesos, debido a que la función de activación elegida es normalmente infinitamente derivable.

Cualquier punto  $X$  se puede poner como:

$$X = X_i + \mathbf{I}_i S_i$$

En muchas de las técnicas de optimización se utiliza para llegar al punto óptimo lo siguiente: se plantea una dirección  $S_i$  y un punto inicial  $X_i$  y se optimiza a lo largo de la línea que parte de  $X_i$  en la dirección  $S_i$ . La variable independiente  $x$  es ahora  $x_i + \mathbf{I}_i S_i$  y la optimización se convierte en monodimensional respecto al parámetro  $\mathbf{I}$ .

Los distintos métodos de optimización sin ligaduras se diferencian en como se varía la dirección  $S_i$ , cuya elección depende de un método de optimización multidimensional, y como se optimiza  $\mathbf{I}$ , que corresponden a diferentes métodos de optimización monodimensionales. El parámetro  $\mathbf{I}$  en el campo de las redes neuronales se suele denominar velocidad de aprendizaje.

## 1.6.1 Métodos de optimización multidimensional utilizados

### 1.6.1.1 Método del gradiente descendente

Este método se basa en la característica principal del gradiente que consiste en que, para un punto del espacio de variables independientes, nos da la dirección en la que la función de coste crece más rápidamente [Rao 1984]. Para minimizar dicha función deberemos seguir la dirección opuesta. Dado que la información del gradiente es estrictamente local se escoge un punto inicial  $X_0$  y se aplica la siguiente expresión iterativa:

$$X_{i+1} = X_i + \mathbf{I}_i^* S_i = X_i - \mathbf{I}_i^* \nabla f_i$$

El asterisco sobre el parámetro  $\mathbf{I}$  indica que este es el valor óptimo (mínimo) de la función de coste en la dirección opuesta al gradiente. Una solución subóptima frecuentemente usada es elegir  $\mathbf{I}$  constante. Este valor debe ser pequeño (idealmente infinitesimal) para asegurar la convergencia, dado el carácter local del gradiente.

Una variante muy común es el método del momento. Las principales ventajas de los métodos del momento son básicamente tres: avanzan más rápidamente en zonas donde la

hipersuperficie es plana, evitan converger en mínimos locales, y por último, aceleran la convergencia hacia un mínimo una vez se ha llegado a un entorno próximo a éste.

Estos métodos se basan en añadir al desplazamiento del punto en una iteración el desplazamiento en la iteración anterior, convenientemente ponderado. Una posibilidad es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta X_{i+1} &= -\mu \nabla f(X_{i+1}) + \alpha \Delta X_i \\ X_{i+1} &= X_i + \Delta X_{i+1}\end{aligned}$$

donde  $\mu$  se denomina coeficiente de momento y está entre 0 y 1. Esto se planteó por Rumelhart, Hinton y Williams [Rumelhart 1986] para el entrenamiento con el algoritmo del Backpropagation.

### 1.6.1.2 Método del gradiente conjugado de Fletcher-Reeves

El método del gradiente conjugado [Fletcher 1964] supera en velocidad de convergencia al método del gradiente descendente en el caso de que la función sea cuadrática [Rao 1984], ya que garantiza la convergencia al mínimo en  $n$  o menos iteraciones, con  $n$  el número de variables independientes de la función (dimensiones del problema de optimización). Esto se suele denominar convergencia cuadrática.

Se extrae este método imponiendo que la dirección de búsqueda sea ortogonal al gradiente de la anterior iteración en caso de una función cuadrática.

Las direcciones vienen dadas por:

$$S_i = -\nabla f_i + \frac{|\nabla f_i|^2}{|\nabla f_{i-1}|^2} S_{i-1}$$

La dirección inicial es

$$S_0 = -\nabla f_0 = -\nabla f(X_0)$$

Este método tiene un mejor comportamiento en el caso de funciones que se aproximan a una función cuadrática. En general, en las cercanías del mínimo funciona bien, ya que cualquier función se aproxima a una función cuadrática. Por otra parte, en este método se tiene en cuenta una mayor información que la correspondiente a la del gradiente descendente, ya que, además del gradiente, aparece ponderada la dirección anterior por la relación de módulos del gradiente actual al anterior, lo que añade información sobre la curvatura local de la superficie.

### 1.6.1.3 Métodos Pseudo-Newton

En primer lugar veamos en que se basa el método de Newton, para obtener el fundamento de los métodos Pseudo-Newton.

Considerando el desarrollo de Taylor hasta el primer orden de la función  $\nabla f$  muy cercana al mínimo se cumple que:

$$S = -H^{-1}\nabla f$$

donde  $H$  corresponde a la Hessiana de la función  $f$ . Por tanto, se puede plantear una ecuación iterativa para que converja al mínimo como:

$$S_{k+1} = -H_{k-1}^{-1}\nabla f_{k-1}$$

Este proceso recurrente basado en la anterior ecuación se denomina método de Newton.

Se puede demostrar que si la función es cuadrática ocurre que la convergencia exacta se realiza en  $n$  pasos, siendo  $n$  el número de variables independientes de la función o lo que es lo mismo, existe la convergencia cuadrática [Rao 1984].

Este método así planteado tiene básicamente dos inconvenientes que es el almacenamiento y cálculo de la Hessiana. Se plantean en su lugar los métodos Pseudo-Newton que estiman la

Hessiana. Veamos a continuación dos métodos muy utilizados que son el DFP [Fletcher 1963] y el BFGS [Broyden 1970], [Fletcher 1970], [Goldfarb 1970] y [Shanno 1970].

### Método de métrica variable DFP (método de Davidon-Fletcher-Powell)

En este método la estimación de la inversa de la Hessiana que se plantea es la siguiente:

$$H_{i+1} = H_i + M_i + N_i$$

donde

$$M_i = -I_i^* \frac{S_i' S_i}{S_i' Q_i} \quad (1.11)$$

$$N_i = -\frac{(H_i Q_i)(H_i Q_i)'}{Q_i' H_i Q_i} \quad (1.12)$$

y

$$Q_i = \nabla f(X_{i+1}) - \nabla f(X_i)$$

Esta particular actualización de la matriz  $H_i$  surge por la necesidad de que la matriz sea simétrica y además definida positiva (para mayor detalle ver la deducción en el apéndice A). Estas dos condiciones se le imponen debido a que ésta tiene que aproximarse a la inversa de la Hessiana y ésta es simétrica (si las derivadas cruzadas son iguales, cosa que ocurre si las derivadas segundas son continuas) y definida positiva, al menos en el mínimo.

Este método garantiza la convergencia cuadrática (como lo hace el método del gradiente conjugado). Además es muy estable y converge hacia el mínimo, incluso cuando la función a optimizar tiene variaciones muy abruptas [Fletcher 1987]. La estabilidad de este método se puede atribuir al hecho de ir añadiendo información de los pasos anteriores a la matriz  $H_i$ . Este método, por otro lado, nos garantiza la definición positiva de la matriz  $H_i$ . Considerando

que  $X_{i+1}$  corresponde al punto extremo y que la derivada direccional en la dirección  $S'_i$  es negativa:

$$S'_i Q_i = S'_i (\nabla f(X_{i+1}) - \nabla f(X_i)) = -S'_i \nabla f_i = \nabla f_i H_i \nabla f_i > 0 \quad (1.13)$$

Puede ocurrir que no se dé la anterior condición, debido a que el método de búsqueda en una dirección no sea lo suficientemente preciso. Ocurrirá entonces que la matriz  $H$  dejará de ser definida positiva. Una manera de solventar este problema es volver a inicializar la matriz  $H$  [Fletcher 1987].

Otro tipo de algoritmo Pseudo-Newton y de métrica variable es el BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), que es ligeramente más robusto desde el punto de vista del cálculo numérico que el DFP [Fletcher 1987].

### **Método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)**

Este método es muy similar al DFP siendo la única diferencia la forma de la actualización del  $H_i$ , que introduce un término adicional:

$$H_{i+1} = H_i + M_i + N_i + U_i$$

$M_i$  y  $N_i$  son las mismas matrices que en las fórmulas (1.11) y (1.12) respectivamente. El término  $U_i$  es:

$$U_i = \left[ Q'_i H_i Q_i \right] u_i u_i^T$$

$$u_i = \frac{\Delta X_i}{\Delta X_i \cdot Q_i} - \frac{H_i \cdot Q_i}{Q'_i H_i Q_i}$$

siendo

$$Q_i = \nabla f(X_{i+1}) - \nabla f(X_i)$$

## 1.6.2 Métodos de optimización monodimensional

En todos los métodos de optimización siempre existe una primera fase que consiste en acotar el intervalo en donde se encuentra el mínimo. Más concretamente, se buscan tres valores de la abscisa,  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que:

$$f(a) > f(b) \quad y \quad f(b) < f(c) \quad (1.14)$$

Con esta condición se garantiza que existe un mínimo en el intervalo abierto  $(a, c)$ , siempre y cuando la función sea continua en el intervalo cerrado  $[a, c]$  [Teukolsky 1992].

Veamos a continuación tres métodos; uno de interpolación, el de la parábola [Rao 1984], otro de eliminación, el de la Sección de Oro [Teukolsky 1992], y por último uno híbrido que utiliza los dos métodos anteriormente mencionados, el de Brent [Brent 1973].

### 1.6.2.1 Método de interpolación parabólica

Se parte de tener tres puntos;  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  que cumplan las condiciones (1.14), se ajusta una parábola y se considera como candidato al mínimo de la parábola así determinada.

Veamos la expresión de la parábola:

$$p(x) = a_1(x - x_0)^2 + b_1(x - x_0) + c_1$$

Siendo  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ;

$$a_1 = \frac{(q-r)}{d}$$

$$b_1 = \frac{((x_0 - x_2)q - (x_0 - x_1)r)}{d}$$

$$c_1 = f(x_0)$$

donde:

$$q = (x_0 - x_2)(f(x_0) - f(x_1))$$

$$r = (x_0 - x_1)(f(x_0) - f(x_2))$$

$$d = (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)$$

y el mínimo de la parábola viene dado por:

$$x = x_0 - \frac{b_1}{2a_1}$$

El mínimo así determinado es una aproximación al mínimo buscado de la función.

### 1.6.2.2 Método de la Sección de Oro

Como en todos estos métodos el objetivo es, a partir de tres puntos que cumplan la condición (1.14), determinar tres nuevos puntos  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  que también cumplan y que acoten mejor el mínimo, tal que:

$$|c' - a'| < |c - a|$$

Lo que diferencia un método de otro es la dependencia de  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  frente a  $a$ ,  $b$  y  $c$ . En el caso del método que nos ocupa se determina un punto intermedio  $x$ , con el que determinaremos los nuevos puntos  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$ . Este punto viene dado de la siguiente manera:

$$x = \begin{cases} b + cte(c - b) & \text{Si } |c - b| > |a - b| \\ b + cte(a - b) & \text{Si } |c - b| < |a - b| \end{cases}$$

Esta constante definida en la expresión anterior se denomina constante de Oro o Sección de Oro, y tiene el siguiente valor:

$$cte = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}$$

En cuanto a la construcción del nuevo trío en función de  $x$  y  $a, b, c$ , se aplica lo siguiente:

- i) Si  $f(b) < f(x)$  y  $x > b$  entonces el trío viene dado por  $(a, b, x)$ .
- ii) Si  $f(b) > f(x)$  y  $x > b$  entonces el trío viene dado por  $(b, x, c)$ .
- iii) Si  $f(b) < f(x)$  y  $x < b$  entonces el trío viene dado por  $(x, b, c)$ .
- iv) Si  $f(b) > f(x)$  y  $x < b$  entonces el trío viene dado por  $(a, x, b)$ .

Esta distinción de cuatro casos se hace para que los nuevos puntos  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  cumplan la condición (1.14).

### 1.6.2.3 Método de Brent

Como ya hemos mencionado el algoritmo de Brent se basa en la combinación adecuada de dos métodos: el de la Sección de Oro y el de interpolación parabólica<sup>1</sup>.

Veamos las condiciones en que será preferible el método de la parábola:

- i) El valor del mínimo de la parábola tiene que pertenecer al intervalo  $(a, c)$ , ya que puede ocurrir que esta parábola tenga el mínimo fuera del mismo. Éste es el caso si los tres puntos a interpolar no cumplen (1.14).

---

<sup>1</sup> En la literatura también se aplica un método de Brent para la búsqueda de raíces, pero a diferencia de la combinación planteada se utiliza el de la bisección y el de interpolación de la secante.

ii) El paso actual debe ser menor que la mitad del paso anterior. Esta condición se impone con el fin de garantizar la convergencia hacia un punto, antes que ocurra que se caiga en algún ciclo límite. Generalmente esta condición es demasiado restrictiva. Se suele suavizar, de forma que en lugar de utilizar el paso anterior se utiliza el paso antepenúltimo.

En definitiva en caso de no fijar los parámetros de la parábola o no ser aceptables, debido a que no cumplan i) y ii), se utiliza el método de Sección de la Oro.



## Capítulo 2. Sistemas dinámicos

En este capítulo se hace una revisión de la teoría de los sistemas no lineales que se aplicará en el estudio de las redes neuronales dinámicas de capítulos posteriores. Este estudio consistirá en determinar las diferentes clases de dinámicas equivalentes que puede realizar la red. Un sistema será equivalente a otro si sus trayectorias tienen el mismo comportamiento cualitativo. Este hecho se hace preciso matemáticamente en la definición de equivalencia topológica.

Las trayectorias más simples son las que están constituidas por puntos fijos o de equilibrio, que no presentan evolución. Su carácter o estabilidad está determinado por el comportamiento local de las trayectorias situadas en su entorno. Un punto fijo puede ser atractor (estable), repulsor (inestable) o tener direcciones de atracción y repulsión (silla). Siguen, en orden de complejidad, las trayectorias periódicas, trayectorias cuasiperiódicas y por último los conjuntos de puntos de dinámica caótica, cada uno con su propia característica de estabilidad.

Cuando se varían los parámetros de un sistema las dinámicas pueden modificarse hasta llegar a una situación crítica. En este punto, el sistema experimenta cambios cualitativos que hacen que deje de ser topológicamente equivalente a la situación anterior. Este proceso constituye una *bifurcación*, a partir de la cual el sistema puede exhibir nuevos comportamientos. El estudio de las bifurcaciones constituye una herramienta útil en la caracterización de la dinámica.

Dentro de las posibles dinámicas encontradas en los sistemas no lineales destacan las dinámicas caóticas. Se suele determinar la existencia de dichas dinámicas mediante el exponente de Lyapunov. Un tipo de caos característico es el que aparece en el mapa Horseshoe.

## 2.1 Introducción

Un sistema dinámico se caracteriza por dos elementos, la ecuación que especifica la dinámica y una condición inicial o estado en el cual empezará la trayectoria que describa el sistema. Las representaciones matemáticas más comunes para describir los fenómenos dinámicos son la ecuación diferencial y la ecuación en diferencias. La mayoría de las teorías físicas están descritas mediante ecuaciones diferenciales.

La teoría de los sistemas dinámicos ha surgido del estudio cualitativo de dichas ecuaciones para entender y predecir diferentes fenómenos como: las órbitas de los planetas, las vibraciones de una cadena, el patrón de evolución atmosférica, etc. Algunos comportamientos dinámicos son regulares y explicados fácilmente, como, por ejemplo, el balanceo de un péndulo simple y otros son irregulares y a priori poco explicables a través de descripciones sencillas, como el problema de los tres cuerpos.

El matemático Henri Poincaré fue el primero en apreciar la verdadera dificultad del problema de los tres cuerpos, que reside, no en la complejidad de las reglas sino en la precisión en la especificación de las condiciones iniciales. Poincaré fue el primero en descubrir la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales reconocida actualmente como característica fundamental de los sistemas dinámicos caóticos. Estos sistemas han sido ampliamente

estudiados en los últimos treinta años. Matemáticos, Físicos, Ingenieros, Biólogos, Meteorólogos y Químicos, han descubierto la existencia de comportamientos caóticos en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales o en diferencias aparentemente simples. En meteorología se describió el primer atractor caótico (atractor de Lorenz [Lorenz 1963]) en un modelo simplificado del comportamiento atmosférico. En Biología se han estudiado los mapas cuadráticos para entender la dinámica de la evolución de las poblaciones (modelo poblacional de Rícher [May 1976]).

La teoría de la dinámica de sistemas incluye la dinámica de los sistemas no lineales y de los lineales. La segunda está mucho más desarrollada que la primera gracias en gran parte a la teoría del control. La diferencia entre un sistema no lineal y lineal se centra principalmente en dos aspectos. El primero es que en el sistema lineal se demuestra que existe dependencia continua respecto a las condiciones iniciales. Esto no ocurre en determinadas dinámicas de un sistema no lineal (dinámicas caóticas) como ya hemos mencionado en párrafos anteriores. La segunda gran diferencia es que en los sistemas no lineales no se cumple el principio de superposición en la solución de las ecuaciones que rigen la dinámica.

Por último es importante indicar que en la mayoría de los sistemas no lineales es muy complicado obtener una expresión analítica de las trayectorias en el espacio fásico. Este es uno de los motivos por el que la teoría de sistemas dinámicos se centra en el estudio cualitativo de las dinámicas.

## 2.2 Definición formal de Sistema Dinámico

Todos los posibles estados del sistema están caracterizados por los puntos de algún conjunto  $X$ . Este conjunto es denominado espacio de estado del sistema. La especificación de un punto  $x \in X$  inicial junto con la ecuación de evolución en el tiempo debe ser suficiente para determinar la evolución temporal de dicho punto.

Veamos a continuación una definición formal del sistema dinámico.

**Definición 2.1.** Un sistema dinámico es una terna  $\{T, X, \mathbf{j}^t\}$ , donde  $T$  es un conjunto de números al que pertenece la variable  $t$ ,  $X$  es un espacio de estado,  $\mathbf{j}^t: X \rightarrow X$  es una familia de operadores de evolución parametrizados por  $t \in T$  tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}^0 &= id \\ \mathbf{j}^{t+s} &= \mathbf{j}^t \circ \mathbf{j}^s\end{aligned}$$

donde  $id$  es el operador identidad

La definición anterior engloba los dos casos de sistemas dinámicos que consideraremos, el sistema continuo y el discreto.

### 2.2.1 Sistemas dinámicos continuos y discretos

El primer tipo de sistema dinámico es el continuo caracterizado porque el elemento  $T$  de la terna, es continuo y coincide con la recta real. La forma más común de definir un sistema dinámico continuo es mediante ecuaciones diferenciales. Supongamos que el espacio de estado  $X \in \mathfrak{R}^n$ , con coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la ley de evolución del sistema se suele dar implícitamente en términos de la derivada de  $x_i$  como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, esto es:

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

o en forma vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

La función  $f$  asigna un vector a cada punto del espacio fásico, constituyendo un campo vectorial. La ecuación (2.1) representa un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales en donde no aparece explícitamente el tiempo (sistema autónomo), cuya abreviatura en inglés es ODE.

En el segundo tipo de sistema dinámico  $T$  es un conjunto discreto de números (enteros). Este tipo de sistema se denomina de tiempo discreto. En este caso la evolución de los estados del sistema se representa mediante ecuaciones en diferencias, esto es:

$$x_i(k+1) \equiv f_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \quad i=1,2,\dots,n$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \quad (2.2)$$

Donde  $k$  es un valor entero. Es interesante indicar que existe formas de obtener sistemas discretos a partir de los continuos que tienen importancia teórica y práctica. Una de ellas es obtener el sistema discreto haciendo que la función  $f$  coincida con el operador de evolución  $\mathbf{j}^1(x)$  del sistema continuo a tiempo unidad (el mapa  $f(x) = \mathbf{j}^1(x)$  se denomina mapa de tiempo unidad). Otra forma es la construcción del llamado mapa de Poincaré [Robinson 1995]. Aquí, los puntos del espacio fásico de dicho sistema discreto se generan mediante las intersecciones de la trayectoria del sistema continuo con una superficie transversal a dicha trayectoria. Una ventaja del sistema discreto es la facilidad para calcular iterativamente su trayectoria. Frecuentemente para obtener numéricamente la trayectoria de un sistema continuo se debe aproximar implícitamente por un sistema discreto.

En la siguiente sección vamos a definir conjuntos de puntos en el espacio fásico interesantes para el análisis del sistema.

## 2.3 Conjuntos Invariantes

Formalmente, un conjunto  $S$  es un conjunto invariante de  $f$  si para cualquier  $x_0 \in S$  tenemos que  $F(x_0, t) \in S$  para todo  $t$ , siendo  $F(x_0, t)$  las coordenadas fásicas de una trayectoria evaluada en el instante  $t$  y que parte del punto fásico  $x(0) = x_0$ .  $S$  es un conjunto invariante en un sistema discreto si para cualquier  $x_0 \in S$ ,  $f^{(n)}(x_0) \in S$  para todo  $n$  número entero, siendo  $f^{(n)}$  el mapa  $f$  iterado  $n$  veces. De igual manera, se puede hablar de positivamente invariante

cuando las definiciones se restringen a  $t$  o  $n$  positivos, es decir, para el sistema inverso o con trayectorias hacia atrás en el tiempo.

Los conjuntos invariantes son importantes porque dan una medida de cómo se fragmenta el espacio de estados, ya que actúan como fronteras, restringiendo las trayectorias a subconjuntos del espacio fásico.

Podemos definir un conjunto adicional asociado a cada conjunto invariante, el dominio de atracción, que está definido por todos los puntos del espacio fásico (que no tienen por qué pertenecer al invariante), que convergen a dicho conjunto. Es decir, para un sistema discreto (o mapa):

$$B(S) = \{x \in X / \text{si existe alguna secuencia } n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } \exists s_0 \in S \text{ y } f^{(n_i)} \rightarrow s_0 \}$$

De manera análoga se puede definir el dominio de atracción para el sistema continuo sustituyendo  $f^{(n_i)}(x)$  por  $F(x_0, t)$  donde  $t \rightarrow \infty$ .

Se puede definir el dominio de atracción de un conjunto (negativamente) del mapa inverso, como los puntos que divergen de dicho conjunto invariante con el mapa directo.

Los puntos de equilibrio en los sistemas continuos, denominados puntos fijos, en los sistemas discretos, y los ciclos son los ejemplos más simples de conjuntos invariantes. Existen otros tipos de conjuntos invariantes. Los conjuntos invariantes que siguen (en orden de complejidad) son las hipersuperficies de dimensión menor que el espacio fásico. Ejemplos de tales variedades son la variedad estable e inestable asociada a un punto de equilibrio/fijo de silla, y el atractor caótico, que aparece en las dinámicas caóticas. Dichas variedades las estudiaremos en secciones posteriores.

Analicemos en primer lugar los puntos fijos (de equilibrio).

## 2.4 Puntos fijos

Un punto fijo de un mapa (2.2) es una órbita que retorna a sí misma después de una iteración, esto es:

$$f^{(1)}(x) = x$$

Un punto de equilibrio de un sistema continuo  $f$  es un punto  $x$  que no cambia con el tiempo, esto es:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$$

Los puntos de equilibrio son también conocidos como puntos fijos o puntos estacionarios.

Generalmente por simplicidad se utiliza la terminología punto fijo cuando se refiere a un mapa y punto de equilibrio cuando se hace referencia a un sistema continuo.

Tanto los puntos fijos como los puntos de equilibrio se clasifican en función del comportamiento del sistema en torno a dichos puntos, es decir, en función de lo que se denomina estabilidad local. Antes de entrar en detalle en esa clasificación hagamos una revisión del concepto de estabilidad.

### 2.4.1 Estabilidad

Al menos existen tres nociones de estabilidad aplicables a un punto fijo: estabilidad local, estabilidad global y estabilidad lineal. La estabilidad lineal muy a menudo, pero no siempre, implica estabilidad local [Hartman 1964]. El ingrediente adicional necesario es la hiperbolicidad, que se verá más adelante.

La noción de la estabilidad local está condicionada por la evolución de la órbita hacia delante en torno a un punto fijo. Un punto fijo es localmente estable si los puntos cercanos a este punto permanecen en un entorno del punto. Si, además,  $x(t) \rightarrow x_{\text{pf}}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces

el punto fijo se denomina asintóticamente estable. Un punto fijo es inestable si no es estable. Dentro de esta categoría se encuentran los puntos de silla, que poseen la cualidad de que sólo en determinadas direcciones, las trayectorias convergen al punto y en las otras divergen, y los puntos inestables propiamente dichos, para los que las trayectorias divergen en todas direcciones. En el caso de los puntos de silla, para una trayectoria genérica, no se llegará a converger en ellos.

En cuanto a la estabilidad global, afecta a todo el espacio fásico, es decir, no es una propiedad local, en torno a un punto fásico particular. Uno de los pocos sistemas en los que coinciden la estabilidad local y la global es en los lineales, debido a que éstos tienen un único punto de equilibrio/fijo en el cero, y éste es, además, el que caracteriza la estabilidad globalmente. Existen algunos teoremas que garantizan la estabilidad global, como el teorema fundamental de Lyapunov [Hale 1991], que inspira un método denominado directo que es capaz de determinar la estabilidad global bajo ciertas condiciones.

La estabilidad lineal está determinada por el desarrollo de Taylor hasta primer orden del mapa  $f$  mediante el denominado proceso de linealización. En general el procedimiento de linealización es usualmente suficiente para analizar la estabilidad de los conjuntos atractivos, sean estos puntos fijos, órbitas periódicas, o atractores caóticos.

Por otro lado, también existe el concepto de estabilidad estructural. Un sistema es estructuralmente estable si ante un pequeño cambio en sus parámetros su dinámica se mantiene cualitativamente igual.

En las siguientes subsecciones haremos referencia de la estabilidad local y global mediante dos teoremas básicos de Lyapunov.

### **2.4.2 Estabilidad de Lyapunov: Estabilidad local y global**

Para entender los teoremas de Lyapunov y su relación con la estabilidad es necesario especificar formalmente las definiciones de estabilidad anteriormente expuestas.

Consideraremos que el punto de equilibrio está situado en el origen, sin pérdida de generalidad.

**Definición 2.2.** Estabilidad local:

El punto de equilibrio  $x=0$  es estable en  $t=t_0$  si para cualquier  $\mathbf{e}>0$  existe un  $\mathbf{d}(t_0, \mathbf{e})>0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \mathbf{d} \Rightarrow \|x(t)\| < \mathbf{e}, \forall t \geq t_0 \quad (2.3)$$

La estabilidad local es un concepto menos restrictivo que la estabilidad asintótica, no requiere que las trayectorias que empiezan cerca del origen tiendan a él asintóticamente. Hay que señalar que este concepto de estabilidad depende del instante inicial.

Cabe distinguir aquí que cuando  $\mathbf{d}$  no depende del instante inicial elegido, la estabilidad se denomina uniforme.

Se puede definir formalmente el concepto de estabilidad asintótica de la siguiente manera:

**Definición 2.3.** Estabilidad Asintótica

Un punto de equilibrio  $x=0$  es asintóticamente estable para  $t=t_0$  si

1.  $x=0$  es localmente estable, y
2.  $x=0$  es localmente atractivo, esto es existe un  $\mathbf{d}(t_0)$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \mathbf{d} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Como se ha dicho en la definición previa, la estabilidad asintótica se define para el tiempo inicial  $t_0$ . Cuando no hay dependencia con el punto inicial se añade el término uniforme.

Las dos definiciones anteriores son definiciones locales, hacen referencia a un comportamiento en torno a un punto de equilibrio. En el caso en que se cumpla la condición

de estabilidad (2.3) para todas las condiciones iniciales  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  se dice que el punto es globalmente estable.

A continuación se describirá el método para determinar los diferentes tipos de estabilidades descritas anteriormente. Uno de los resultados que destacaremos es aquel que hace referencia a la estabilidad global.

### 2.4.2.1 Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov también se denomina segundo método de Lyapunov y permite determinar la estabilidad de un sistema en ausencia de la trayectoria física explícita. El método utiliza una generalización de la idea de “energía del sistema”, y estudia el cambio de esa función energía. Para ser más precisos, es necesario definir exactamente el significado de medida de energía, ésta se cuantifica mediante una función  $V$  denominada de Lyapunov. A continuación se realiza una revisión de las diferentes condiciones que se le imponen a dicha función en el teorema básico de Lyapunov en el que se basa este método.

**Definición 2.4.** Función localmente definida positiva (fldp)

Una función continua  $V: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$  es una función localmente definida positiva (fldp) si para algún  $\varepsilon > 0$  y alguna función continua, estrictamente creciente  $\mathbf{a}: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ , ocurre que

$$V(0,t)=0 \text{ y } V(x,t) \geq \mathbf{a}(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (2.4)$$

donde  $B_\varepsilon = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$ .

Las funciones son globalmente definidas positivas o definidas positivas (fdp) si satisfacen las condiciones (2.4) y se cumple que  $\mathbf{a}(p) \rightarrow \infty$  a medida que  $p \rightarrow \infty$ .

Usando estas definiciones, el siguiente teorema permite determinar la estabilidad para un sistema estudiando la función de Lyapunov apropiada  $V$ . Básicamente este teorema establece que cuando  $V(x,t)$  es una función definida localmente positiva y  $\dot{V}(x,t) \leq 0$  entonces se puede

concluir la estabilidad del punto de equilibrio. La derivada de  $V$  en el tiempo se toma sobre las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}(x, t)|_{\dot{x}=f(x,t)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f$$

Podemos resumir el teorema básico de Lyapunov mediante la siguiente tabla, en donde se expresan de manera resumida las condiciones respecto a  $V$  y  $\dot{V}(x, t)$  y las correspondientes conclusiones garantizadas por el teorema.

Condiciones sobre $V(x,t)$	Condiciones sobre $-\dot{V}(x, t)$	Conclusiones
fldp,decreciente	$\geq 0$ localmente	Localmente unif. estable
fldp,decreciente	fldp	Localmente unif. asintót. estable
fdp, decreciente	fdp	Globalmente unif. asintót. estable

Tabla 2.1. Resumen del teorema básico de Lyapunov.

El teorema anterior da condiciones suficientes para la estabilidad en el origen del sistema. El problema que se plantea en la aplicación del teorema es la falta de una metodología clara para la búsqueda de la función de Lyapunov  $V$ , aunque se suele empezar la búsqueda con funciones cuadráticas. Estas condiciones son necesarias, debido a que no se garantiza unicidad en la determinación de dicha función.

Indicar que aunque hablamos de sistemas continuos, todas las definiciones y el teorema son aplicables a sistemas discretos. La única diferencia es que  $\dot{V}$  se sustituye por

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

Existe otro método de Lyapunov para estudiar la estabilidad, conocido como el método indirecto o primer método. Dicho método utiliza la linealización del sistema para determinar la estabilidad. De aquí en adelante diremos que un punto de equilibrio es estable cuando el punto sea uniformemente asintóticamente estable según la definición de Lyapunov. Veamos con más detalle el proceso de linealización, y como ésta se relaciona con la estabilidad.

### 2.4.2.2 Linealización

Para calcular la estabilidad de un punto fijo  $x_p$  consideremos una pequeña perturbación  $y$  en torno a dicho punto. Esto es

$$x = x_p + y$$

Si consideramos el desarrollo de Taylor del campo vectorial en dicho punto fijo, entonces el sistema queda:

$$\dot{x} = f(x_p) + Df(x_p)y + \text{órdenes superiores} \quad (2.5)$$

donde  $Df(x_p)$  es una matriz que contiene las derivadas primeras del campo vectorial  $f$  evaluadas en el punto  $x_p$  y se suele denominar matriz Jacobiana.

Parece razonable pensar que el movimiento cerca del punto fijo podría estar caracterizado por un sistema lineal, dado que  $\dot{y} = \dot{x}$  y que  $f(x_p)$  es cero en el punto de equilibrio. La evolución temporal de la perturbación queda como:

$$\dot{y} = Df(x_p)y$$

Esto será válido siempre y cuando se puedan despreciar los términos de mayor orden. La solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior viene dada de la siguiente manera

$$y(t) = e^{Df(x_p)t} y_0 \quad (2.6)$$

donde  $\exp[Df(x_p)]$  es el operador evolución para un sistema lineal. Llamando  $A$  a  $Df(x_p)$  (matriz constante  $n \times n$ ), entonces el operador lineal de evolución temporal se define como:

$$\exp[At] = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $n \times n$ .

La estabilidad asintótica del punto fijo está determinada por los autovalores del campo vectorial linealizado  $Df(x)$  en  $x_p$ . En particular, se garantiza que el punto es asintóticamente estable si todas las partes reales de los autovalores de la jacobiana evaluada en el punto de equilibrio del campo vectorial son negativos. Para demostrar esto es necesario observar que descomponiendo la matriz  $Df$  en cajas de Jordan [Bronson 1995] aparecen los autovalores en la diagonal, y si todos tienen sus partes reales negativas entonces las trayectorias perturbadas (2.6) tienden a cero exponencialmente, o lo que es lo mismo, convergen al punto de equilibrio.

Cuando existe algún autovalor igual a cero y todos los demás son menores que cero entonces el sistema lineal equivalente es todavía estable, pero el sistema no lineal original puede no serlo. En este caso, se dice que el punto de equilibrio es no hiperbólico. Por el contrario, si todos los autovalores son distintos de cero entonces el punto de equilibrio (estable o no) es hiperbólico. En los puntos no hiperbólicos es necesario acudir a órdenes superiores en el desarrollo de Taylor (2.5) para determinar la estabilidad del sistema no lineal en torno al punto.

Veamos que ocurre en el caso de un mapa. Al utilizar la aproximación lineal la ecuación queda como:

$$y(k+1) + x_p = f(x_p) + Df(x_p)y(k) + \text{órdenes superiores}$$

considerando que  $x_p$  es un punto fijo la anterior expresión queda:

$$y(k+1) = Df(x_p)y(k) + \text{órdenes superiores}$$

En este caso, la evolución del sistema depende de la acumulación de la matriz jacobiana  $Df^m(x_p)$ . Si planteamos la descomposición de Jordan de la Jacobiana obtenemos productos  $m$ -ésimos de los autovalores. Si son todos menores que uno entonces el sistema converge al punto fijo. El punto fijo es hiperbólico cuando todos los autovalores en valor absoluto son distintos de uno [Robinson 1995]. Hay que acudir a términos de órdenes mayores al primero para determinar la estabilidad si el punto fijo es no hiperbólico (algún autovalor igual a la unidad).

A continuación se planteará una clasificación de los puntos de equilibrio/ fijos hiperbólicos.

### **2.4.3 Puntos fijos hiperbólicos inestables, estables y de silla**

La evolución de las trayectorias en un entorno de un punto fijo/equilibrio hiperbólico está determinada por la aproximación lineal, como se justificó en la sección anterior. Este resultado se expone formalmente en el teorema de Hartman-Grobman [Robinson 1995].

Definamos los diferentes tipos de puntos fijos o equilibrio.

Un punto de equilibrio de un sistema continuo es estable, si todos los autovalores de la matriz asociada a la aproximación lineal o jacobiana en el punto tienen parte real negativa. De forma similar, si todos los autovalores de la jacobiana en módulo son menores que la unidad entonces el punto fijo hiperbólico de un sistema discreto es estable.

Un punto de un campo vectorial es un nodo inestable o inestable, si todos los autovalores de la jacobiana tienen parte real positiva. De forma similar, si todos los autovalores de la jacobiana en módulo son mayores que la unidad entonces el punto fijo hiperbólico de un mapa es inestable.

Por último, si al menos uno de los autovalores del campo vectorial linealizado es menor que cero y si la parte real de al menos otro autovalor es positiva, entonces se dice que el punto de equilibrio es de silla. En el caso de un mapa esta condición se transforma en si existe al menos un autovalor de módulo mayor que uno y otro menor que la unidad. Es importante indicar que cuando el punto fijo/equilibrio es de silla se le pueden asociar dos variedades denominadas estable e inestable. Veamos con más detalle esta cuestión en la siguiente sección.

### 2.4.3.1 Variedad Estable e Inestable del punto fijo/equilibrio de silla

El espacio fásico se puede descomponer en tres subespacios generados por los autovectores generalizados de la jacobiana evaluada en el punto fijo/equilibrio asociados a los diferentes autovalores:

- $E^s$  es el subespacio que tiene como base los autovectores generalizados de  $Df(x)$  con  $Re(\mathbf{I}_i) < 0$  para un campo vectorial o  $|\mathbf{I}_i| < 1$  para un mapa.
- $E^c$  es el subespacio que tiene como base los autovectores generalizados de  $Df(x)$  con  $Re(\mathbf{I}_j) = 0$  para un campo vectorial o  $|\mathbf{I}_j| = 1$  para un mapa.
- $E^u$  es el subespacio que tiene como base los autovectores generalizados de  $Df(x)$  con  $Re(\mathbf{I}_i) > 0$  para un campo vectorial o  $|\mathbf{I}_i| > 1$  para un mapa.

$E^s$  es denominado el espacio estable de dimensión  $n_s$ ,  $E^c$  es el espacio crítico de dimensión  $n_c$ , y  $E^u$  es el espacio inestable de dimensión  $n_u$ . Si la dimensión el espacio fásico es  $n$ , entonces resulta que  $n = n_u + n_s + n_c$ . En el caso de un punto hiperbólico  $n_c$  es cero. Para un punto fijo o equilibrio de silla hiperbólico se puede definir las variedades estable  $W^s(x_p)$  e inestable  $W^u(x_p)$ . En el caso de un mapa:

$$W^s(x_p) = \{x : f^k(x) \rightarrow x_p, k \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(x_p) = \{x : f^k(x) \rightarrow x_p, k \rightarrow -\infty\}$$

Dichas subvariedades  $W^s(x_p)$  y  $W^u(x_p)$  tienen una característica muy importante en torno al punto fijo/equilibrio y es que son tangentes a los subespacios  $E^s$  y  $E^u$  respectivamente correspondientes a dicho punto fijo [Irwin 1980]. Este resultado inspira como calcular numéricamente estas variedades para un mapa. Para calcular los puntos de  $W^u(x_p)$  se parte de puntos suficientemente cercanos a  $x_p$  situados en el autoespacio  $E^u$  y se itera hacia delante. De igual manera se calcula  $W^s(x_p)$  pero con el mapa inverso [Alligood 1996]. Es importante indicar que por la manera en que se definen las variedades, son invariantes, ya que unos puntos se relacionan con otros simplemente iterando en tiempo. En la siguiente figura podemos observar las variedades correspondientes a un punto de silla.

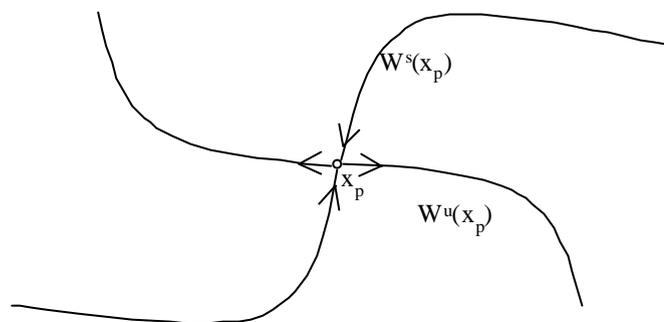


Figura 2.1. Dibujo de las variedades estable e inestable de un punto fijo de silla  $x_p$  con dimensión de espacio fásico igual a dos.

En esta sección se han revisado los diferentes tipos de puntos fijos/equilibrio hiperbólicos. Cabe preguntarse qué ocurre si éstos no son hiperbólicos. En este caso, la estabilidad local no se puede garantizar mediante el método de linealización. Es necesario utilizar términos de órdenes superiores al primero en el desarrollo de Taylor del mapa/campo vectorial, debido a que el sistema deja de ser equivalente desde el punto de vista dinámico al sistema linealizado. Por ello, se hace preciso un estudio más complejo de la dinámica en el entorno de un punto fijo o de equilibrio no hiperbólico. Veamos con más detalle la equivalencia de sistemas dinámicos o equivalencia topológica.

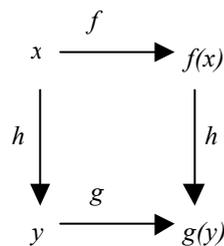
## 2.5 Equivalencia de sistemas dinámicos

La idea es plantear que relación debe existir entre dos sistemas para que tengan un comportamiento dinámico similar. La posición relativa de los conjuntos invariantes y la forma

de las regiones de atracción deben también ser similares en sistemas equivalentes. Definamos esa equivalencia denominada equivalencia topológica desde un punto de vista matemático.

**Definición 2.5.** Se dice que dos sistemas dinámicos  $g$  y  $f$  son topológicamente equivalentes o conjugados si hay un homomorfismo  $h$  (función invertible y continua con inversa continua) que pase del sistema  $g$  al  $f$  preservando la dirección en el tiempo.

Desde el punto de vista matemático, topológicamente equivalente implica que si  $x$  e  $y$  son las variables del espacio fásico de cada sistema, entonces existe la función invertible  $h$  tal que  $y=h(x)$ .



Esto es

$$g(h(x)) = h(f(x))$$

Podemos poner también la anterior relación como:

$$f = h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1}(g(h(x))) \tag{2.7}$$

La relación entre la Jacobiana en un punto fijo  $x_0$  de  $f$  y su correspondiente punto fijo  $y_0=h(x_0)$  de  $g$  es:

$$Df(x_0) = Dh^{-1}(x_0)Dg(y_0)Dh(x_0)$$

Por lo tanto, los polinomios característicos de  $Df(x_0)$  y  $Dg(y_0)$  coinciden. De forma similar se puede demostrar que las órbitas periódicas tienen la misma estabilidad [Allgood 1996].

Veamos un ejemplo de equivalencia en el sistema dinámico de red neuronal recurrente, la equivalencia topológica de la red neuronal de Williams-Zipser y la red discreta de Hopfield.

Ejemplo:

Consideremos que la función  $f$  es el mapa de la red de Hopfield, que describe la evolución temporal de las activaciones de las neuronas, y  $g$  el mapa de la red de Williams-Zipser, que describe la evolución temporal de las salidas de las neuronas. Veamos las funciones  $f$  y  $g$ , además de la transformación  $h$  :

$$\begin{aligned} f(X) &= WTanh(X) \\ g(Y) &= Tanh(WY) \\ Y = h(X) &= W^{-1}X \end{aligned}$$

donde  $W$  es la matriz de pesos y  $W^{-1}$  su inversa, siendo  $W$  no singular.

La relación (2.7) se cumple, como podemos observar a continuación:

$$f = h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1}(g(h(x))) = WTanh(WW^{-1}X) = WTanh(X)$$

La equivalencia topológica puede darse localmente: Dos sistemas son localmente equivalentes topológicamente cerca de un punto fijo/equilibrio si cumple la condición (2.7) en un entorno de dicho punto fijo/equilibrio.

## 2.6 Teoría de Bifurcaciones

Hasta ahora el problema era caracterizar las dinámicas cerca de los puntos de equilibrio/fijos. Ahora se estudian los cambios en los parámetros que hacen que el sistema pase de una situación (una clase topológicamente equivalente) a otra distinta. La aparición de

un sistema no topológicamente equivalente bajo variaciones de los parámetros se denomina bifurcación. Éstas se representan gráficamente mediante los denominados diagramas de bifurcación, que son curvas de las coordenadas de los puntos fijos frente a los parámetros. Sus valores están en torno a la situación en donde el sistema deja de ser topológicamente equivalente [Kuznetsov 1998]. El ejemplo más sencillo de bifurcación es cuando un punto fijo/equilibrio deja de ser hiperbólico. Dentro de las bifurcaciones se pueden distinguir entre locales y globales. Las primeras se denominan también bifurcaciones de puntos de equilibrio o puntos fijos cuando hacen referencia a entornos de puntos fijos o de equilibrio y bifurcaciones de ciclo cuando hacen referencia a ciclos en sistemas discretos o ciclos límites en sistemas continuos. Las bifurcaciones locales no se caracterizan tan sólo por el comportamiento en los puntos fijos/equilibrio sino por la estabilidad en pequeños entornos cerca de dichos puntos. Las bifurcaciones globales son las que no se pueden analizar únicamente mirando los entornos de los puntos fijos o ciclos. Un ejemplo de esto puede ser el cambio de aspecto de variedades estables o inestables asociadas a diferentes puntos de silla. En este capítulo nos centraremos en las bifurcaciones locales de puntos fijo o de equilibrio.

### 2.6.1 Bifurcaciones asociadas a puntos fijos no hiperbólicos

Se distinguen diferentes tipos de bifurcaciones en función de los valores críticos de los autovalores de la Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio.

La idea general es plantear una forma normal asociada a cada bifurcación. Dicha forma normal es un mapa/campo vectorial que satisface la misma condición de bifurcación del mapa/campo vectorial original y que es localmente topológicamente equivalente al mismo en el punto fijo/equilibrio donde se produce la bifurcación.

#### Sistema continuo

Bajo la acción del cambio de un parámetro el autovalor asociado a la aproximación lineal en un punto de equilibrio puede alcanzar el eje imaginario por la recta real o bien que una pareja de autovalores complejos conjugados toquen el eje imaginario en  $\pm iw_0$ . Esto origina dos tipos de bifurcaciones:

- Tipo de silla-nodo (o tangente): Es la bifurcación asociada con la aparición de un autovalor igual a cero ( $\lambda=0$ ).
- Tipo Hopf (o Andronov-Hopf): Es la bifurcación asociada con la presencia de dos autovalores conjugados con parte real nula, esto es  $\lambda_{1,2}=\pm iw_0$ ,  $w_0>0$ .

La bifurcación silla-nodo es posible si  $n\geq 1$ , siendo  $n$  el número de variables de estado, en cambio en la bifurcación tipo Hopf es necesario que  $n\geq 2$ .

### Sistema discreto

En este caso existen tres posibilidades críticas donde la dinámica no se puede determinar mediante la aproximación lineal. Éstas son:

- Tipo de silla-nodo (o tangente): Es la bifurcación asociada con la aparición de un autovalor igual a uno ( $\lambda=1$ ). Esta bifurcación se denomina también punto límite o punto de vuelta.
- Tipo duplicación de periodo o periodo doble: Es la bifurcación que aparece cuando el autovalor del punto fijo es igual a menos uno ( $\lambda=-1$ ).
- Tipo Neimark-Sacker (o *Torus*): Es la bifurcación asociada con la presencia de dos autovalores conjugados de módulo igual a la unidad, esto es,  $\lambda_{1,2}=e^{\pm i\theta}$ ,  $0<\theta<2\pi$ .

Al igual que en el caso del sistema continuo, las bifurcaciones de tipo de silla-nodo y periodo doble son posibles cuando  $n\geq 1$ , en cambio para la Neimark-Sacker es necesario que  $n\geq 2$ .

Si observamos la anterior lista de bifurcaciones, en el sistema discreto discriminamos la bifurcación en donde el autovalor es  $-1$  de aquella en donde es  $1$ , a pesar de tener el mismo valor absoluto. Esas situaciones no son topológicamente equivalentes. Esto es así, ya que no son semejantes desde un punto de vista dinámico. Aunque en ambos casos las trayectorias

tienden a acercarse al punto fijo, en el primer caso lo hacen sólo por un lado, y en el segundo por los dos lados simultáneamente.

La herramienta para el estudio y clasificación de las bifurcaciones es la forma normal. La forma normal consiste en una expresión lo más simple posible (polinómica) que captura la situación de la bifurcación en el punto fásico origen y para el cero del parámetro. Existen otros parámetros que indican la subclase de la bifurcación. Un sistema será localmente equivalente a la forma normal y, por tanto, experimentará la misma bifurcación, si cumple ciertas condiciones de dos tipos diferentes. Las condiciones de no degeneración se aseguran de la equivalencia del sistema a la forma normal. Las condiciones de transversalidad sirven para verificar que la variación del sistema respecto al parámetro no va a ser demasiado particular y exista el mismo tipo de fenómeno que ilustra la forma normal.

Las condiciones de no degeneración se pueden expresar en términos de las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $x$  evaluadas en el punto fijo/equilibrio y con parámetros cero (justo en la bifurcación). Por otra parte, las condiciones de transversalidad están relacionadas con las derivadas de  $f$  con respecto a los parámetros del sistema.

Para observar el comportamiento dinámico en torno a las anteriores bifurcaciones, y el mapa/campo vectorial equivalente, se hará una revisión de dichas bifurcaciones en una sola dimensión, y se generalizarán algunos resultados para varias dimensiones.

### 2.6.1.1 Bifurcación tipo de silla-nodo en una dimensión

En primer lugar, se determinarán las bifurcaciones para un sistema discreto y a continuación se extenderán los argumentos para un sistema continuo.

El sistema discreto con el que vamos a trabajar es el siguiente:

$$\tilde{x} = f(x, \mathbf{a}), \quad x, \tilde{x} \in \mathfrak{R}, \mathbf{a} \in \mathfrak{R} \quad (2.8)$$

donde  $\tilde{x}$  y  $x$  representan el estado en la iteración  $k+1$  y  $k$ , respectivamente, y  $\mu$  el parámetro del sistema.

Por simplicidad, se va a estudiar un sistema con un solo parámetro y estado. En el caso de tener más estados se pueden generalizar los comportamientos dinámicos de la forma normal como se verá en la sección 2.6.2. Si el sistema tiene más de un parámetro se considerará la condición crítica en los autovalores definida por una ecuación de ligadura en los parámetros. El número de ecuaciones de ligadura define lo que se denomina número de codimensión de la bifurcación.

Analicemos la forma normal asociada a la bifurcación silla-nodo. Ésta tiene la siguiente forma:

$$\tilde{x} = \mathbf{a} + x + cx^2, \quad x, \tilde{x} \in \mathfrak{R}, \mathbf{a} \in \mathfrak{R}$$

En este caso el valor  $c$  que hemos definido en la anterior ecuación lo consideramos como positivo o negativo, y como veremos posteriormente, su valor va a depender del sistema, aunque desde el punto de vista de la dinámica lo más significativo es su signo. Comencemos suponiendo que  $c$  es positivo.

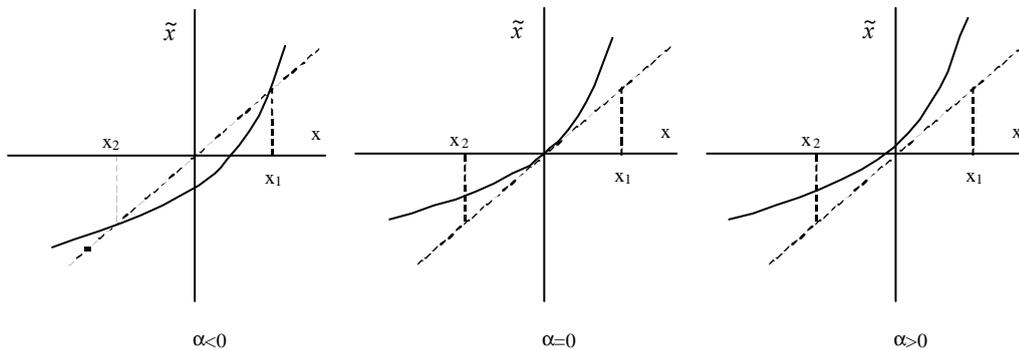


Figura 2.2. Bifurcación de silla-nodo para  $c > 0$ .

El comportamiento del sistema cerca de  $x=0$  para pequeños valores de  $|\mathbf{a}|$  se puede observar en la figura 2.2. Para  $\mathbf{a} < 0$  existen dos puntos fijos en el sistema  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\mathbf{a}}$ , el

punto fijo de la izquierda es estable, en cambio el de la derecha es inestable. Para  $a > 0$  no hay puntos fijos en el sistema. Mientras  $a$  cruza el cero desde valores negativos a positivos los dos puntos fijos (estable e inestable) se unen para  $a = 0$  y desaparecen para  $a > 0$ . Podemos representar la curva denominada diagrama de bifurcación (representación de los puntos fijos respecto al parámetro).

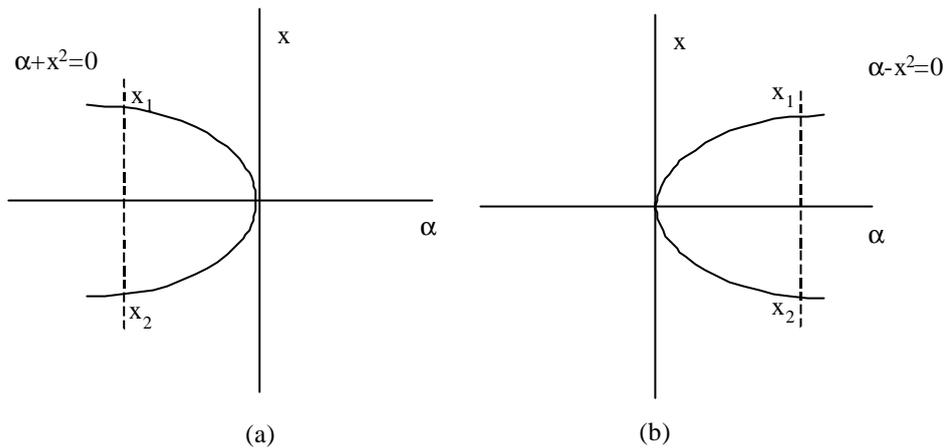


Figura 2.3. Dibujo de la bifurcación a)  $c > 0$  b)  $c < 0$ .

Como vemos, en el caso de que  $c$  sea positivo lo que ocurre es que al cambiar  $a$  de negativo a positivo, el sistema pasa de tener dos puntos fijos (estable e inestable) a no tener ninguno. Cuando  $c$  es negativo ocurre lo contrario, como se observa en la figura 2.3. Indicar que cuando  $a$  es cero se produce en sí la bifurcación de silla-nodo, es decir, el punto fijo cero no es hiperbólico (su autovalor es igual a la unidad).

Formalicemos esto mediante un teorema que nos da la forma normal asociada a la bifurcación de silla-nodo [Arnold 1983] y las condiciones para que se produzca.

**Teorema 2.1.** Dado el sistema discreto unidimensional (2.8), con  $f(x, \mu)$  suave (suficientemente diferenciable), y teniendo un punto fijo en  $x_0 = 0$  para un valor del parámetro  $a = 0$ , con autovalor  $I = f_x(0, 0) = 1$ . Si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $f_{xx}(0, 0) \neq 0$
- ii)  $f_{\alpha}(0, 0) \neq 0$

Entonces existen transformaciones suaves e invertibles en los parámetros y las variables de estado que nos llevan al mapa:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{b} + \mathbf{h} + s\mathbf{h}^2$$

donde el signo del término cuadrático viene definido como:

$$s = \text{signo}(f_{xx}(0,0))$$

Hay que indicar que la condición i) es una condición de no degeneración, y la ii) es una condición de transversalidad.

La relación entre el parámetro  $\mathbf{b}$  de la forma normal y el parámetro  $\alpha$  del mapa viene dada de la siguiente forma (véase apéndice B).

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = |f_{xx}(0,0)|f_a(0,0)\mathbf{a} + O(\mathbf{a}^2)$$

Existe un teorema análogo para el sistema continuo.

Para el caso de los mapas/campos vectoriales simétricos existe un punto fijo/de equilibrio en el origen y no se cumple la condición de no degeneración i) anterior. En este caso la forma normal correspondiente es otra y la bifurcación se denomina tipo Pitchfork. Analizaremos al final de la siguiente sección dicha forma normal.

### 2.6.1.2 Bifurcación tipo periodo doble en una dimensión

Analicemos la forma normal asociada a esta bifurcación.

$$\tilde{x} = -(1 + \mathbf{a})x + cx^3 = g(x, \mathbf{a}) \equiv g_a(x) \quad (2.9)$$

Para explicar las características de esta bifurcación consideremos, de momento, el sistema dado por la segunda iteración del mapa anterior. Si  $y=g_\alpha(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} g_a^{(2)}(x) &= g_a(y) = -(1+a)y + cy^3 \\ &= -(1+a)(-(1+a)x + cx) + c(-(1+a)x + cx)^3 \\ &= (1+a)^2x - [(1+a)(2+2a+a^2)]x^3 + O(x^5) \end{aligned} \tag{2.10}$$

El mapa  $g_a^{(2)}$  tiene un punto fijo en el origen. También tiene otros dos puntos fijos cuando  $a > 0$  si  $c > 0$  ó  $a < 0$  si  $c < 0$ . Estos puntos fijos cumplen:

$$x_{1,2} = g_a^{(2)}(x_{1,2})$$

donde  $x_{1,2} = \pm(\sqrt{a} + O(a))$ . Estos dos puntos son estables y constituyen un ciclo de periodo dos para el mapa original  $g_a$ . Esto significa que

$$x_2 = g_a(x_1), x_1 = g_a(x_2)$$

con  $x_1 \neq x_2$ . Es importante indicar que  $x_0$  es punto fijo del mapa original y no corresponde a un ciclo dos. Veamos la representación de los puntos fijos del mapa  $g_a^{(2)}$  frente al parámetro del sistema.

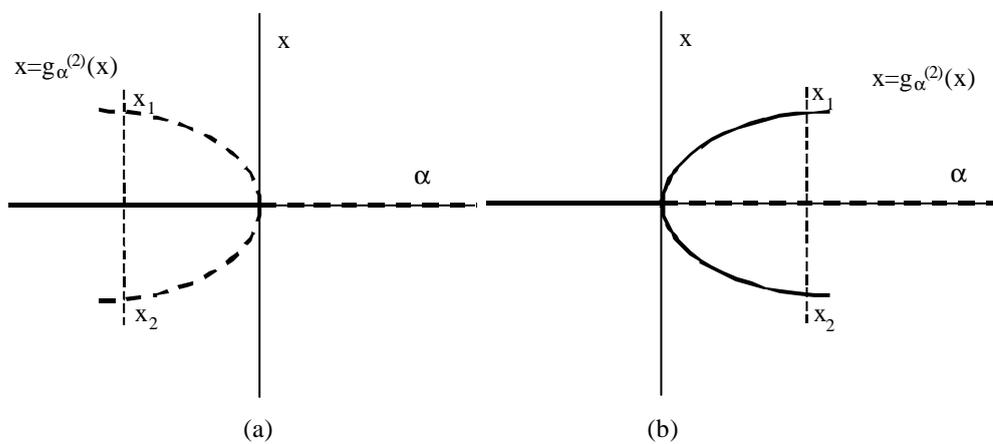


Figura 2.4. Dibujo de la bifurcación del mapa de la iteración segunda a)  $c < 0$  b)  $c > 0$  (trazo discontinuo ciclo/punto fijo inestable, trazo continuo ciclo/punto fijo estable).

En primer lugar, se puede observar que el dibujo de la bifurcación tiene una forma parabólica en torno al parámetro cero. Por otro lado, en la anterior figura se distinguen dos casos a medida que cambiamos el signo de  $\mathbf{a}$ . En el primero, cuando  $c$  es negativo, un punto fijo estable y ciclo dos inestable se convierten en un único punto fijo estable. En el segundo, cuando  $c$  es positivo, un punto fijo inestable se convierte en un punto fijo y en un ciclo dos estables.

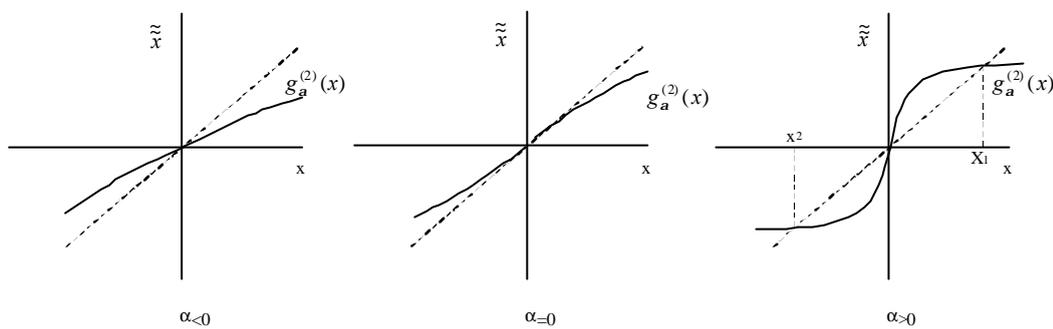


Figura 2.5. Mapa de la segunda iteración (2.9) cerca de la bifurcación de periodo doble. Para el caso  $c > 0$  figura 2.4 (b), el punto fijo es la intersección de la curva  $g_a^{(2)}(x)$  con la recta  $\tilde{x} = x$ . De un punto fijo en el origen se pasa a tener dos más, cambiando la estabilidad del origen.

Formalicemos la relación entre la forma normal asociada a la bifurcación denominada de duplicación de periodo [Arnold 1994] y el mapa  $f$ .

**Teorema 2.2.** Si se supone el sistema (2.8) con  $f$  suave, con un punto fijo  $x_0=0$  para el parámetro  $\mathbf{a}=0$  y además se verifica  $\mathbf{I}=f_x(0,0)=-1$ . Si se cumple:

- i)  $\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0,0) \neq 0$
- ii)  $f_{ax}(0,0) \neq 0$

Entonces hay un cambio suave e invertible de coordenadas que lleva al mapa siguiente

$$\tilde{h} = -(1 + \mathbf{a})h + ch^3$$

donde el signo  $c$  está determinado por

$$c = \text{signo} \left( \frac{1}{4} (f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(0,0) \right)$$

En este caso la condición i) es de no degeneración y la ii) es de transversalidad.

### **Bifurcación Pitchfork**

El mapa de segundo orden (2.10) coincide con la forma normal que caracteriza a la bifurcación tipo Pitchfork. Esto es:

$$\tilde{\eta} = (1 + \alpha)\eta + c\eta^3$$

donde  $c$  corresponde a

$$c = \text{signo}(f_{xxx}(0,0))$$

Cuando  $c$  es negativo, un punto fijo estable (el origen) se convierte en un punto fijo inestable (el origen) y un dos puntos fijos simétricos estables. Por el contrario, cuando  $c$  es positivo, un punto fijo estable (el origen) y dos puntos fijos simétricos inestables se convierten en un único punto fijo inestable (el origen).

En resumen podemos observar las bifurcaciones anteriores en la siguiente tabla.

Bifurcación	Forma Normal	Signo de $c$	$a < 0$	$a > 0$
Silla-Nodo	$\tilde{\eta} = \alpha + \eta + c\eta^2$	$c > 0$	2 ptos. fijos (Estable e Inestable)	Ningún punto fijo
		$c < 0$	Ningún punto fijo	2 ptos. fijos (Estable e Inestable)
Periodo Doble	$\tilde{\eta} = -(1 + \alpha)\eta + c\eta^3$	$c > 0$	Pto. fijo Estable	Pto. fijo Inestable Ciclo dos Estable
		$c < 0$	Pto. fijo Estable Ciclo dos Inestable	Pto. fijo Inestable
Pitchfork	$\tilde{\eta} = (1 + \alpha)\eta + c\eta^3$	$c > 0$	3 Ptos. fijos (Estable, 2 Inestables)	Pto. fijo Inestable
		$c < 0$	Pto. fijo Estable	3 Ptos. fijos (2 Estables, Inestable)

Tabla 2.2. Resumen de las bifurcaciones.

### 2.6.1.3 Bifurcaciones tipo Neimark-Sacker y Hopf

Las bifurcaciones Neimark-Sacker y Hopf se caracterizan porque un par de autovalores complejos conjugados de un punto de equilibrio/fijo atraviesan el eje imaginario y el círculo unidad, en un sistema continuo (Hopf) y en un sistema discreto (Neimark-Sacker) respectivamente.

En este caso, a diferencia de las anteriores bifurcaciones, es necesario que el sistema tenga un espacio fásico de al menos dimensión dos.

#### Bifurcación Neimark-Sacker

En primer lugar vamos a tratar la bifurcación discreta Neimark-Sacker, más adelante se completará el desarrollo para la bifurcación continua tipo Hopf. La forma normal de la bifurcación Neimark-Sacker es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = (1 + \mathbf{a}) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q} & -\sin \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q} & -\sin \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el parámetro;  $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{a})$ ,  $a=a(\mathbf{a})$  y  $b=b(\mathbf{a})$  son funciones suaves; y  $0<\mathbf{q}(0)<\pi$ ,  $a(0)\neq 0$ .

Este sistema tiene un punto fijo  $x_1=x_2=0$  para todo valor de  $\mathbf{a}$ . La matriz Jacobiana en ese punto es:

$$A = (1 + \mathbf{a}) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q} & -\operatorname{sen} \mathbf{q} \\ \operatorname{sen} \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

La matriz tiene de autovalores  $\lambda_{1, 2}=(1+\mathbf{a})e^{\pm i\mathbf{q}}$ . Para valores pequeños de  $\mathbf{a}$ , el cero no es autovalor y por tanto la forma normal (2.11) será invertible. Como se puede observar, el punto fijo del origen es no hiperbólico para  $\mathbf{a}=0$  debido a que el par de autovalores complejos conjugados están situados sobre el círculo unidad del plano complejo en el argumento  $\pm\mathbf{q}$ .

Para reducir la complejidad del desarrollo, crearemos una variable compleja para el estado  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ ,  $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$ , e introduciremos un nuevo parámetro complejo  $d(\mathbf{a}) = a + ib$ . El sistema queda como:

$$\dot{z} = e^{i\mathbf{q}} z(1 + \mathbf{a} + d |z|^2) = \mathbf{I}z + cz |z|^2 \tag{2.12}$$

donde  $\mathbf{I}=\mathbf{I}(\mathbf{a})=(1+\mathbf{a})e^{i\theta(\alpha)}$  y  $c=c(\mathbf{a})=e^{i\theta(\alpha)}d(\mathbf{a})$  son funciones complejas dependientes del parámetro  $\mathbf{a}$ .

Usando la representación en coordenadas polares  $z=r e^{i\phi}$ , con  $r=|z|$ , se obtiene una expresión para la coordenada  $r$  independiente de  $\phi$

$$\dot{r} = r |1 + \mathbf{a} + d(\mathbf{a})r^2|$$

además

$$\begin{aligned} |1 + \mathbf{a} + d(\mathbf{a}) \mathbf{r}^2| &= (1 + \mathbf{a}) \left( 1 + \frac{2a(\mathbf{a})}{1 + \mathbf{a}} \mathbf{r}^2 + \frac{|d(\mathbf{a})|^2}{(1 + \mathbf{a})^2} \mathbf{r}^4 \right)^{1/2} = \\ &= 1 + \mathbf{a} + a(\mathbf{a}) \mathbf{r}^2 + O(\mathbf{r}^3) \end{aligned}$$

Basándonos en lo anterior podemos determinar la forma polar del sistema (2.12):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} \left( 1 + \mathbf{a} + a(\mathbf{a}) \mathbf{r}^2 \right) + \mathbf{r}^4 R_a(\mathbf{r}) \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \mathbf{j} + \mathbf{q}(\mathbf{a}) + \mathbf{r}^2 Q_a(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde  $R$  y  $Q$ , son funciones suaves de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{a}$ .

La primera de las ecuaciones (2.13) define un sistema dinámico unidimensional que tiene un punto fijo en  $\mathbf{r}=0$  para todos los valores de  $\mathbf{a}$ . El punto es estable si  $\mathbf{a}<0$ ; para  $\mathbf{a}>0$  el punto se convierte en linealmente inestable. Para  $\mathbf{a}=0$  hay que usar términos superiores al lineal. Se supone que domina el término cuadrático al resto en las cercanías de  $\mathbf{r}=0$ ; la estabilidad del punto fijo para  $\mathbf{a}=0$  está determinada por el signo de  $a(0)$ . Suponiendo que  $a(0)<0$  el origen es no linealmente estable (entendiendo por no linealmente que no tiende de manera exponencial al punto fijo) estable para  $\mathbf{a}=0$ . El mapa  $\mathbf{r}$  de (2.13) tiene un punto fijo adicional estable para  $\mathbf{a}>0$ . La expresión de dicho punto fijo se puede determinar utilizando el desarrollo de Taylor de  $\mathbf{r}$  de (2.13).

$$\mathbf{r}_0(\mathbf{a}) = \sqrt{-\frac{\mathbf{a}}{a(\mathbf{a})}} + O(\mathbf{a})$$

En este caso el mapa para la coordenada  $\mathbf{j}$  de (2.13) describe una rotación cuyo ángulo depende de  $\mathbf{r}$  y  $\alpha$  aproximadamente igual a  $\mathbf{q}(\mathbf{a})$ . Por superposición de los mapas definidos por (2.13), se obtiene el diagrama de bifurcación para el sistema de dos dimensiones original (2.11), como se puede ver en la figura 2.6. En dicha figura 2.6 se observa como el origen cambia de estabilidad y aparece una curva invariante cerrada estable correspondiente al segundo punto fijo  $\mathbf{r}_0$ .

De forma análoga se puede analizar el caso de que  $a(0) > 0$ . El sistema experimenta la bifurcación Neimark-Sacker para  $a=0$ . Contrariamente a lo considerado anteriormente, existe una curva invariante cerrada inestable que desaparece cuando  $\alpha$  pasa por cero, de valores negativos a positivos, como se ve en la figura 2.7.

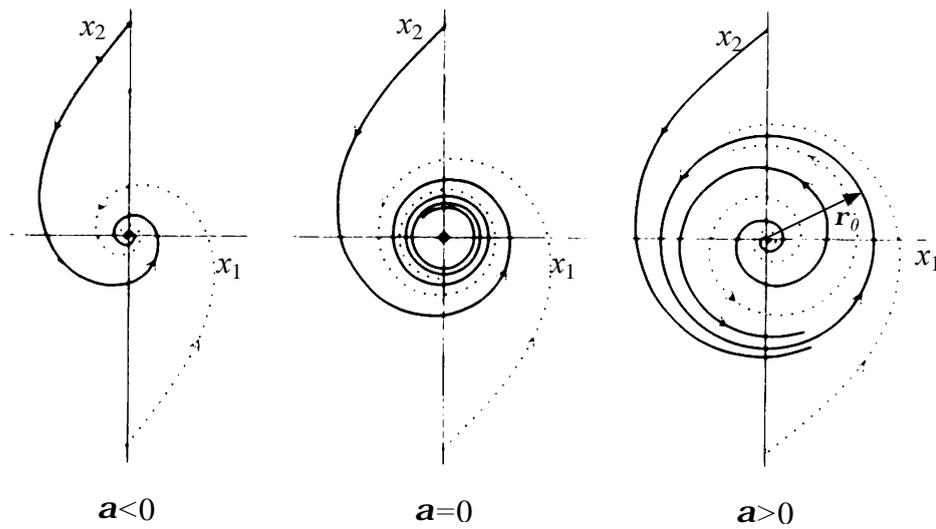


Figura 2.6. Bifurcación Neimark-Sacker supercrítica ( $a(0) < 0$ ).

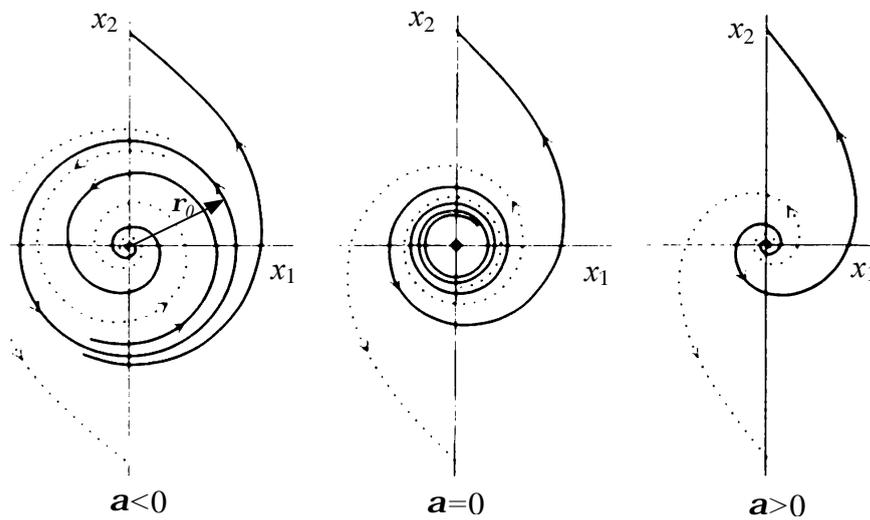


Figura 2.7. Bifurcación Neimark-Sacker subcrítica ( $a(0) > 0$ ).

Cuando se produce la situación de la figura 2.6 la bifurcación se denomina bifurcación supercrítica. En la situación de la figura 2.7 la bifurcación se denomina subcrítica.

La estructura de las órbitas de (2.13) sobre el círculo invariante depende de que la relación entre el ángulo de rotación  $D\mathbf{j} = \mathbf{q}(\mathbf{a}) + \mathbf{r}^2 Q_\alpha(\mathbf{r})$  y  $2\mathbf{p}$  sea racional o irracional. Si es racional, todas las órbitas sobre la curva son periódicas. Esto es, si

$$\frac{\Delta \mathbf{j}}{2\mathbf{p}} = \frac{p}{q}$$

con  $p$  y  $q$  enteros, todos los puntos sobre la curva son ciclos de periodo  $q$  del mapa  $p$ -iterado. Si el cociente es irracional, no existen órbitas periódicas y todas las órbitas son densas en el círculo. En este caso se suelen denominar órbitas cuasiperiódicas.

Podemos plantear qué ocurre si se le añaden términos de orden superior al mapa (2.11). Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} &= (1 + \mathbf{a}) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q} & -\sin \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q} & -\sin \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde el término  $O(\|x\|^4)$  depende de forma suave de  $\alpha$ . El sistema (2.14) no es topológicamente equivalente al (2.11). Los términos de mayor orden afectan al comportamiento de la bifurcación del sistema. Si se reescribe (2.14) en forma polar, el mapa de  $\mathbf{r}$  dependerá de  $\mathbf{j}$ . El sistema se puede representar de forma similar a (2.13) pero con funciones  $R$  y  $Q$   $2\pi$ -periódicas. A pesar de que los sistemas (2.11) y (2.14) no sean topológicamente equivalentes sí que tienen en común la curva invariante cerrada.

Los términos  $O(\|x\|^4)$  no afectan a la bifurcación de la curva cerrada invariante (2.14). Esto es, una curva única localmente invariante se bifurca desde el origen con la misma dirección [Kuznetsov 1998] y estabilidad que el sistema (2.11).

Tal y como se ha visto en las bifurcaciones anteriores existe un teorema que relaciona el anterior sistema (2.14) con el sistema discreto (2.8) cuando se produce la bifurcación dada.

Enunciemos ahora el teorema de la forma normal correspondiente a la bifurcación Neimark-Sacker [Sacker 1965].

**Teorema 2.3.** Supongamos que el siguiente sistema discreto de dos dimensiones

$$\tilde{x} = f(x, \mathbf{a}), x \in \mathfrak{R}^2, \mathbf{a} \in \mathfrak{R}^1$$

con  $f$  suave, tiene para todo  $|\mathbf{a}|$  lo suficientemente pequeño, el punto fijo  $x=0$  con autovalores:

$$\mathbf{l}_{1,2} = r(\mathbf{a})e^{\pm ij(\mathbf{a})} \tag{2.15}$$

donde  $r(0)=1, \mathbf{j}(0)=\mathbf{q}_0$ .

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$(C.1) \quad r'(0) \neq 0$$

$$(C.2) \quad e^{\pm ikq_0} \neq 1 \quad \text{para } k = 1,2,3,4$$

Entonces, hay una transformación invertible de coordenadas y parámetros que transforman el sistema en

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = (1 + \mathbf{b}) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}(\mathbf{b}) & -\text{sen } \mathbf{q}(\mathbf{b}) \\ \text{sen } \mathbf{q}(\mathbf{b}) & \cos \mathbf{q}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}(\mathbf{b}) & -\text{sen } \mathbf{q}(\mathbf{b}) \\ \text{sen } \mathbf{q}(\mathbf{b}) & \cos \mathbf{q}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\mathbf{b}) & -b(\mathbf{b}) \\ b(\mathbf{b}) & a(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

con  $\theta(0) = \theta_0$  y  $a(0) = \text{Real}(e^{-iq_0} c_1(0))$  donde  $c_1(0)$  viene dado por la expresión:

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1-2\mathbf{m}_0)}{2\mathbf{m}_0(\mathbf{m}_0-1)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{(1-\bar{\mathbf{m}}_0)} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mathbf{m}_0^2-\bar{\mathbf{m}}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2}$$

donde  $\mathbf{m}_0 = e^{i\theta_0}$ , y los términos  $g_{ij}(0)$  vienen dados por un desarrollo de Taylor que detallamos a continuación.

Al hacer el cambio de variables  $z = x_1 + ix_2$  en el sistema (2.8) obtenemos un mapa complejo que podemos separar en parte lineal y no lineal. Esto es:

$$\tilde{z} = \mathbf{I}(\mathbf{b})z + g(z, \bar{z}, \mathbf{b}) \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{I}(\mathbf{b})$  coincide con la expresión (2.15). Desarrollando  $g$  en serie de Taylor respecto a  $(z, \bar{z})$  (no contiene términos lineales).

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l, \text{ con } k, l = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

Los  $g_{ij}(0)$  de la fórmula anterior coinciden con los coeficientes correspondientes de Taylor evaluados en  $\mathbf{b}=0$ .

Se puede ver parte de la demostración de este teorema en el apéndice C, aunque la idea básica es ir transformando el sistema (2.16) mediante dos cambios de variables sucesivos en la forma normal (2.14) cuya expresión en variable compleja es

$$\tilde{w} = e^{iq} w(1 + \mathbf{b} + d(\mathbf{b})|w|^2) + o(\|w\|^4)$$

donde  $d(\mathbf{b}) = e^{iq} c_1(\mathbf{b})$  y  $w = y_1 + iy_2$ .

Este teorema indica que si se dan las condiciones (C.1) y (C.2) entonces en función del signo de  $a(0)$  sucede el fenómeno visto en la figura 2.6 (si es negativo) o el de la figura 2.7 (si es positivo). Obviamente habrá que exigir que  $a(0)$  sea diferente de cero. La condición (C.1) corresponde a una condición de transversalidad y la (C.2) a una de no degeneración. Esta última da pie a un tipo de bifurcación nueva en donde se impone una condición más sobre los parámetros, y por tanto, tiene una forma normal distinta bastante más compleja de analizar.

Hay que indicar que estos resultados son generalizables al caso de que el punto fijo no esté situado en el origen, la única variación es que el desarrollo (2.17) se realiza en torno a dicho punto fijo. También, esto se puede generalizar a cuando el sistema tiene varios parámetros. Entonces debemos hacer una transformación de los parámetros, pasando a un sólo parámetro capaz de atravesar la bifurcación al ser variado. Obviamente esto implicará que algunos parámetros originales sean constantes o que tengan ciertas relaciones funcionales entre ellos.

### Bifurcación Hopf

En cuanto al sistema continuo (bifurcación tipo Hopf) ocurre un fenómeno similar, la diferencia es que las condiciones respecto a los autovalores son algo diferentes:

$$l_{1,2}(\mathbf{a}) = m(\mathbf{a}) \pm iw(\mathbf{a}) \quad (2.18)$$

En este caso las condiciones (C.1) y (C.2) en el caso de la bifurcación Hopf quedan como:

(B.1)  $l_1(0) \neq 0$  donde  $l_1$  se denomina primer coeficiente de Lyapunov

(B.2)  $m'(0) \neq 0$

En este caso el papel del coeficiente  $c_1(0)$  para determinar la dirección de transición de la bifurcación lo hace  $l_1(0)$  que viene definido de la siguiente manera:

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0} \operatorname{Re} al(ig_{20}(0)g_{11}(0) + w_0g_{21}(0))$$

donde  $w_0=w(0)$  coincide con la ecuación (2.18) evaluada en cero y  $g_{ij}(0)$  son los coeficientes del desarrollo de Taylor (2.17) correspondiente al nuevo campo vectorial complejo creado mediante el cambio de variable  $z=x_1+i x_2$ .

Por tanto, para el sistema continuo si se cumplen las condiciones (B.1), (B.2) y si el coeficiente  $l_1(0)$  es negativo, entonces, a medida que  $\mathbf{a}$  pasa de un valor negativo a uno positivo aparece un ciclo límite estable (curva cerrada, continua e invariante). Por el contrario, si es positivo desaparece un ciclo límite inestable.

Hasta ahora se han determinado las bifurcaciones en una dimensión o a lo sumo dos. Veamos a continuación la generalización para varias dimensiones, para ello es necesario acudir a la teoría de la variedad central.

### 2.6.2 Teorema de variedad central

En las secciones previas se ha estudiado las bifurcaciones de equilibrio y puntos fijos en sistemas dinámicos de una y dos dimensiones, en esta sección se tratarán tales bifurcaciones para sistemas  $n$ -dimensionales. Se verá que el sistema de  $n$  dimensiones exhibe la correspondiente bifurcación sobre una variedad invariante, denominada variedad central, mientras el comportamiento fuera de dicha variedad es “trivial”, por ejemplo, exponencialmente atractivo.

Vamos a desarrollar estas ideas tanto en el sistema continuo como en el discreto. Empecemos con el sistema continuo.

Se considera un sistema continuo cuya dinámica se define por

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathfrak{R}^n \quad (2.19)$$

donde  $f$  es una función lo suficientemente suave y  $f(0)=0$ . Los autovalores en el punto de equilibrio son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Supongamos que el punto de equilibrio es no hiperbólico, es decir, hay autovalores con parte real igual a cero. Sea  $n_u$  el número de autovalores con

$Re(\mathbf{I}) > 0$  (contando la multiplicidad),  $n_c$  el número de autovalores con  $Re(\mathbf{I}) = 0$ , también denominados críticos, y  $n_s$  el número de autovalores con  $Re(\mathbf{I}) < 0$ . Denominamos  $E^c$  el autoespacio asociado a los autovalores críticos, es decir, el subespacio vectorial generado por los autovectores asociados a estos autovalores. Con estas definiciones podemos enunciar el teorema de la variedad central [Carr 1981] y [Vanderbauwhede 1989].

**Teorema 2.4.** Existe una variedad invariante suave  $W_{loc}^c(0)$  (variedad central) definida localmente de dimensión  $n_c$  de (2.19) que es tangente a  $E^c$  en  $x=0$ .

Es importante indicar que los puntos cercanos al punto de equilibrio y que permanecen en su entorno para  $t \rightarrow \infty$ , ó  $t \rightarrow -\infty$ , tienden a la variedad central. Para que se cumpla que la trayectoria converja al punto de equilibrio por la variedad central se tiene que verificar que  $n_u = 0$ .

Descompongamos el sistema (2.19) en dos conjuntos de variables  $u$  y  $v$ . Los conjuntos de variables  $u$  y  $v$  corresponden a la proyección de  $x$  sobre el autoespacio generado por los autovectores críticos y no críticos respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Bu + g(u, v) \\ \dot{v} &= Cv + h(u, v) \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde  $u \in \mathfrak{R}^{n_c}$ ,  $v \in \mathfrak{R}^{n_u+n_s}$ ,  $B$  es una matriz  $n_c \times n_c$  con todos los  $n_c$  autovalores en el eje imaginario, mientras  $C$  es una matriz  $(n_u+n_s) \times (n_u+n_s)$  con autovalores que no están en el eje imaginario. Las funciones  $g$  y  $h$  tienen un desarrollo de Taylor con términos cuadráticos o superiores. Esta ecuación es una descomposición del sistema (2.19) en el espacio de los autovalores críticos y el espacio formado por los autovectores no críticos. La variedad central  $W_{loc}^c$  del sistema (2.20) puede ser localmente representada como una gráfica de una función suave:

$$W_{loc}^c = \{(u, v) : v = V(u)\} \tag{2.21}$$

donde  $V: \mathfrak{R}^{n_0} \rightarrow \mathfrak{R}^{n_u+n_s}$ , y debido que  $W_{loc}^c$  es tangente al punto de equilibrio  $V(u)=O(\|u\|^2)$ .

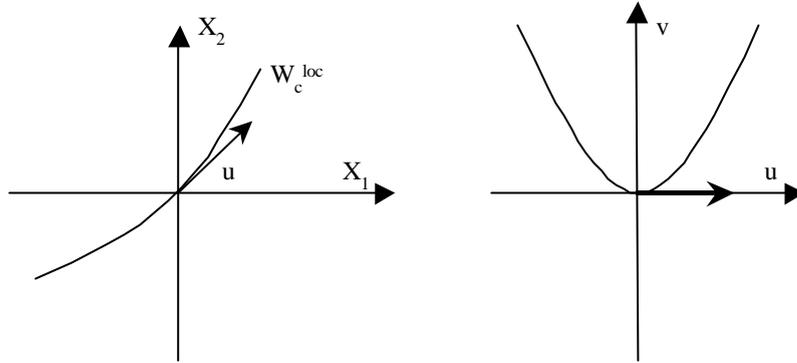


Figura 2.8. a) Variedad central en el espacio fásico tangente al autovector crítico en el punto de equilibrio  
b) Variedad central con ejes correspondientes al conjunto de variables  $u$  y  $v$ .

Basándonos en la expresión de la variedad central (2.21) se puede demostrar, cerca del origen, que (2.20) es localmente topológicamente equivalente al sistema:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= Bu + g(u, V(u)) \\ \dot{v} &= Cv\end{aligned}$$

Éste es el denominado principio de reducción, es decir, la trayectoria de las órbitas en torno al punto de equilibrio se descompone en un movimiento en la variedad central superpuesto por otro lineal del autoespacio complementario. La dinámica en la primera ecuación es la restricción del sistema original a la variedad central y depende de los términos no lineales. La segunda es lineal y no crítica (soluciones exponencialmente crecientes ó decrecientes). Por tanto, para analizar la dinámica es necesario calcular los autovalores no críticos con el fin de determinar la estabilidad en el espacio complementario, y por otro lado, en el autoespacio crítico, es necesario acudir al menos a términos cuadráticos, ya que la aproximación lineal no es válida.

En el caso de un sistema discreto se pueden aplicar las mismas ideas estando los autovalores críticos en el círculo unidad y obteniéndose el siguiente mapa en lugar del campo vectorial (2.19).

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= Bu + g(u, V(u)) \\ \tilde{v} &= Cv\end{aligned}$$

donde los autovalores de la matriz  $B$  están sobre el círculo unidad y los de  $C$  fuera.

### 2.6.2.1 Determinación de la variedad central

En esta sección, en primer lugar nos plantearemos como queda la expresión del mapa o campo vectorial asociado a la variedad central en función de los distintos tipos de bifurcación, tanto en sistemas continuos como en discretos, para ello acudiremos a una aproximación cuadrática de dicha variedad central. Con el fin de determinar la relación entre los coeficientes que aparecen al determinar la forma normal en función del mapa o campo vectorial genérico definido por una función  $f$  se utilizará el método de proyección [Kuznetsov 1998] de la variedad central aplicado a cada tipo de bifurcación.

Básicamente este método consiste en usar los autovectores de la Jacobiana  $A$  y su traspuesta  $A^T$ , evaluadas en el punto fijo y en los parámetros de la bifurcación, para proyectar el sistema en el espacio crítico y su complementario. Este método es válido tanto para sistemas continuos como discretos.

Suponemos que el sistema tanto continuo como discreto consta de dos partes, una lineal y otra con términos de orden cuadrático. En el caso del sistema continuo,

$$\dot{x} = Ax + F(x), x \in \mathfrak{R}^n$$

donde  $F(x) = O(\|x\|^2)$  es una función suave.

#### Bifurcación de silla-nodo

Comencemos describiendo el método para el sistema continuo. En este caso,  $A$  tiene un autovalor  $\lambda_1=0$ , y el correspondiente autoespacio crítico  $E^c$  es unidimensional. Por otro lado, definimos los vectores  $p$  y  $q$  como los autovectores de  $A$  y  $A^T$ , respectivamente. Por tanto,  $p$  y  $q$  cumplen la siguiente ecuación crítica

$$Aq = 0, \quad q \in \mathfrak{R}^n \quad (2.22.a)$$

$$A^T p = 0, \quad p \in \mathfrak{R}^n \quad (2.22.b)$$

Por otra parte consideramos que  $p$  y  $q$  están normalizados de la forma siguiente

$$\langle p, q \rangle = 1 \quad (2.23)$$

donde  $\langle \dots \rangle$  simboliza el producto escalar en  $\mathfrak{R}^n$ .

Podemos descomponer el vector que representa los estados en dos vectores, uno perteneciente al espacio crítico y otro al complementario gracias al siguiente lema.

**Lema 2.1.** Denotamos  $E^{\text{nc}}$  como el autoespacio de dimensión  $n-1$  asociado a todos los autovalores de  $A$  distintos de 0. Entonces  $y \hat{\mathbf{I}} E^{\text{nc}}$  si y sólo si:

$$\langle p, y \rangle = 0 \quad (2.24)$$

La descomposición es

$$x = uq + y$$

donde  $y \hat{\mathbf{I}} E^{\text{nc}}$ ,  $uq \hat{\mathbf{I}} E^{\text{c}}$ , siendo  $u$  un escalar.

Teniendo en cuenta el anterior lema:

$$\begin{aligned} u &= \langle p, x \rangle \\ y &= x - \langle p, x \rangle q \end{aligned}$$

Si consideramos la evolución de las nuevas coordenadas  $u$  e  $y$ , que corresponden a la expresión de la reducción de la variedad central, teniendo en cuenta la condición de

ortogonalidad (2.24), de normalización (2.23) y las expresiones de los autovectores (2.22.a) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \langle p, F(uq + y) \rangle \\ \dot{y} &= Ay + F(uq + y) - \langle p, F(uq + y) \rangle q \end{aligned}$$

Podemos hacer los desarrollos de Taylor de los términos de la izquierda correspondientes a las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} \mathbf{s} u^2 + u \langle b, y \rangle + \frac{1}{6} \mathbf{d} u^3 + \dots \\ \dot{y} &= Ay + \frac{1}{2} a u^2 + \dots \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $a$ , y  $b$  vienen definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \langle p, F(uq) \rangle \right|_{u=0} \\ \mathbf{d} &= \left. \frac{\partial^3}{\partial u^3} \langle p, F(uq) \rangle \right|_{u=0} \\ a &= \left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \langle p, F(uq) \rangle \right|_{u=0} - \mathbf{s} q \\ b_i &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial u} \langle p, F(uq + y) \rangle \right|_{u=0, y=0} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{2.26}$$

Podemos plantear la expresión de la variedad central, donde se establece la dependencia (localmente cuadrática) entre la variable  $u$  e  $y$ .

$$y = V(u) = \frac{1}{2} w_2 u^2 + O(u^3)$$

donde  $w_2 \in E^{nc} \subset \mathfrak{R}^n$ , que es lo mismo que  $\langle p, w_2 \rangle = 0$ . Sustituyendo el desarrollo anterior dentro de la segunda ecuación de (2.25), e igualando los coeficientes de  $u^2$  se obtiene la siguiente relación lineal:

$$Aw_2 + a = 0$$

El objetivo es determinar  $w_2$ . Una de las posibles complicaciones es la no invertibilidad de  $A$ , debido a que tiene un autovalor nulo. Para superar esta dificultad, hay que tener en cuenta que  $\langle p, a \rangle = 0$ . La restricción de la transformación correspondiente a  $A$  en el subespacio  $E^{nc}$  es invertible ( $A^{INV}$ ). Por tanto, podemos determinar  $w_2$  como

$$w_2 = -A^{INV} a$$

donde  $w_2$  se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones invertible

$$\begin{pmatrix} A & q \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternativamente se puede obtener  $A^{INV}$  invirtiendo la matriz anterior, y eliminando la última fila y columna.

Utilizando la ecuación que define la variedad central, la primera ecuación de (2.25) queda de la siguiente manera

$$\dot{u} = \frac{1}{2} \mathbf{s} u^2 + \frac{1}{6} (\mathbf{d} - 3 \langle b, A^{INV} a \rangle) u^3 + O(\|u\|^4) \quad (2.27)$$

Cuando la bifurcación de silla-nodo no es degenerada,  $\mathbf{s} \neq 0$  y sólo es necesario tener en cuenta el término de segundo orden. En caso contrario, habría que determinar el término de tercer orden.

La anterior expresión se puede relacionar más directamente con el desarrollo de Taylor del sistema continuo  $f$ . Considerando dicho desarrollo la  $F$  queda como

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4)$$

donde  $B(x,y)$  y  $C(x,y,z)$  son funciones multilineales. En términos de coordenadas podemos definir las como:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l$$

donde  $i=1,2,\dots,n$ . Entonces el producto escalar  $\langle b, y \rangle$  se puede expresar como,

$$\begin{aligned} \langle b, y \rangle &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial u} \langle p, F(uq + y) \rangle \Big|_{u=0, y=0} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial u} \left( \sum_{m=1}^n p_m F_m(uq + y) \right) \Big|_{u=0, y=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial^2 F(uq + y)}{\partial y_i \partial u} \Big|_{u=0, y=0} \end{aligned}$$

introduciendo una nueva variable vectorial

$$\xi = uq + y$$

aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta la definición de  $\mathbf{x}$  se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial y_i \partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} q_j$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle b, y \rangle &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{m=1}^n p_m \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_m(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi=0} q_j \right) = \\ &= \sum_{m=1}^n p_m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_m(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi=0} y_i q_j = \\ &= \sum_{m=1}^n p_m B_m(q, y) = \langle p, B(q, y) \rangle \end{aligned}$$

la ecuación (2.27) queda de la siguiente forma

$$\dot{u} = \frac{1}{2} \mathbf{s} u^2 + \frac{1}{6} \left( \mathbf{d} - 3 \langle p, B(q, A^{INV} a) \rangle \right) u^3 + O(\|u\|^4) \quad (2.28)$$

donde

$$\mathbf{s} = \langle p, B(q, q) \rangle, \mathbf{d} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, a = B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q \quad (2.29)$$

Indicar que  $\sigma$  y  $\delta$  dados por (2.26) tienen la expresión anterior, ya que la derivada segunda y tercera de  $F(uq)$  respecto a  $u$ , evaluadas en  $u=0$ , coinciden con  $B(q, q)$  y  $C(q, q, q)$ , respectivamente.

En la práctica, lo primero es determinar  $\mathbf{s}$ . Su signo define la dirección de la bifurcación, tal y como se vio en la bifurcación de silla-nodo de un sistema unidimensional. En caso de ser  $\mathbf{s}=0$ , es necesario calcular el coeficiente que acompaña al término cúbico de la expresión anterior. Esto ocurre cuando se trata de un mapa simétrico y se produce la bifurcación en el punto fijo correspondiente al origen (bifurcación tipo pitchfork), como sucede en el mapa correspondiente a la red neuronal recurrente que analizaremos en el siguiente capítulo.

En el caso del sistema discreto se pueden seguir los mismos pasos anteriores y se obtiene una ecuación análoga a (2.28).

$$\tilde{u} = u + \frac{1}{2}\sigma u^2 + \frac{1}{6}\left(\delta - 3\langle p, B(q, (A - E)^{INV} a) \rangle\right)u^3 + O(\|u\|^4)$$

Siendo  $a$ ,  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  los parámetros correspondientes a las ecuaciones (2.29) considerando que  $f$  es un mapa, y  $E$  la matriz identidad  $n \times n$ .

### Bifurcación Periodo doble

La deducción de la ecuación del mapa correspondiente a la variable  $u$  en esta bifurcación es similar a la de la bifurcación tipo silla-nodo. Dicha ecuación viene dada por:

$$\tilde{u} = -u + a(0)u^2 + b(0)u^3 + O(\|u\|^4) \tag{2.30}$$

donde

$$a(0) = \frac{1}{2}\langle p, B(q, q) \rangle$$

y

$$b(0) = \frac{1}{6}\langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{4}(\langle p, B(q, q) \rangle)^2 - \frac{1}{2}\langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle$$

Al ser (2.30) un mapa de una dimensión se transformará en su correspondiente forma normal asociada, como se hizo en la sección que hacia referencia al caso unidimensional.

$$\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + c(0)\mathbf{x}^3 + O(\mathbf{x}^4)$$

donde

$$c(0) = a^2(0) + b(0)$$

El coeficiente  $c(0)$  de la forma normal permite la predicción de la dirección de aparición del ciclo de periodo dos, como se indicó con la bifurcación de periodo doble unidimensional. Este coeficiente se puede expresar con la siguiente fórmula:

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{2} \langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle$$

Es importante indicar que hemos utilizado  $(A - E)^{-1}$  en lugar de  $(A - E)^{\text{INV}}$ , debido a que en esta bifurcación  $A$  tiene un autovalor  $-1$ , distinto de  $1$  con lo que  $(A - E)^{-1}$  es invertible.

### Bifurcaciones Neimark-Sacker y Hopf

El método en este tipo de bifurcaciones varía en el sentido de que el mapa correspondiente al espacio crítico es de dimensión dos y se representa por una variable compleja. En este caso  $x$  se descompone como:

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y$$

donde  $z \in \mathbb{C}^1$ ,  $y, zq + \bar{z}\bar{q} \in E^c$ ,  $y \in E^{nc}$ . La variable compleja  $z$  es una coordenada sobre  $E^c$ .

$$\begin{aligned} z &= \langle p, x \rangle \\ y &= x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q} \end{aligned}$$

Los mapas correspondientes a las expresiones anteriores son

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= e^{iq} z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ \tilde{y} &= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \end{aligned}$$

Utilizando un desarrollo análogo al de la bifurcación de silla-nodo podemos deducir lo siguiente (véase apéndice D).

$$\tilde{z} = e^{iq} z(1 + d(0) |z|^2) + O(|z|^4)$$

La dirección de la bifurcación de la forma normal anterior viene dada por:

$$a(0) = \text{Re}(d(0)) = \frac{1}{2} \text{Re}\{ e^{-iq} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2 \langle p, B(q, (E - A)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle + 2 \langle p, B(\bar{q}, (e^{2iq} E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle] \}$$

Tal y como se puede comprobar en el apéndice D, se tiene que garantizar que

$$e^{ikq} \neq 1, \text{ para } k=1,2,3,4,\dots \quad (2.31)$$

Las situaciones en que se da la igualdad en la expresión anterior se denominan de resonancia.

En el caso del sistema continuo se pueden realizar pasos análogos a los de la bifurcación Neimark-Sacker y obtener la siguiente forma normal.

$$\dot{z} = iw_0 z + l_1(0) |z|^2 + O(|z|^4)$$

donde

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0} \text{Re}\{ e^{-iq} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle + 2 \langle p, B(\bar{q}, (2iw_0 E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle] \}$$

Al igual que la Neimark-Sacker el signo  $l_1(0)$  determina la dirección de la bifurcación Hopf.

### Lenguas de Arnold en la bifurcación Neimark-Sacker

La bifurcación Neimark-Sacker se produce cuando el autovalor atraviesa el círculo unidad  $|\lambda|=1$  a medida que se varían los parámetros del sistema, como se observa en la figura 2.9. Asumiendo que la bifurcación ocurre lejos de las resonancias (se verifica la condición (2.31)) y que es supercrítica, aparece una curva invariante cerrada estable en el espacio fásico para autovalores cercanos al círculo. Se puede definir un parámetro sobre una trayectoria que converja a dicha curva, denominado número de rotación. Éste se define como el límite del ángulo de rotación promedio por iteración:

$$r = \frac{1}{2p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(\mathbf{j}) + a(P(\mathbf{j})) + \dots + a(P^{k-1}(\mathbf{j}))}{k}$$

donde

$$a(\mathbf{j}) = |P(\mathbf{j}) - \mathbf{j}|$$

y  $P^k(\mathbf{j})$  corresponde al ángulo del punto fásico en la iteración  $k$ -ésima.

Si este número es racional ( $p/q$ ) la órbita es periódica. El número de rotación indica entonces que en  $q$  iteraciones el mapa completa  $p$  revoluciones. En caso contrario, se trata de una órbita cuasiperiódica.

Las regiones de parámetros en el plano  $(\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda)$  cuyas trayectorias con número de rotación racional se acercan al círculo unidad en los puntos con autovalor

$$\lambda = e^{i\theta}, \theta = \frac{2\pi p}{q} \text{ con } p \text{ y } q \text{ enteros}$$

formando una especie de lenguas estrechas. Estas regiones son las denominadas lenguas de Arnold [Kuznetsov 1998] (ver figura 2.9). Suponiendo que el sistema dependa de un

parámetro  $\mathbf{a}$  se puede definir una curva en el plano  $\lambda$  trazada por  $\lambda(\mathbf{a})$ , como se puede observar en la figura 2.9. Cerca del círculo unidad, esta curva cruza infinitas lenguas de Arnold caracterizadas cada una de ellas por tener una órbita periódica con una cierta periodicidad y un número de rotación racional distinto [Levi 1981].

Al fenómeno en el que el número de rotación se mantiene constante en las lenguas de Arnold se denomina *phase-locking* [Bak 1986].

Por otra parte, lejos de la bifurcación Neimark-Sacker las lenguas pueden intersectarse. Las fronteras de dichas lenguas, suelen ser bifurcaciones de tipo silla-nodo en el mapa  $i$ -iterado, siendo  $i$  el periodo de la órbita periódica que aparece en la lengua de Arnold. Se pasa de tener dos órbitas periódicas, una tipo silla y otra estable de periodo  $i$ , a tener una órbita cuasiperiódica a medida que se atraviesa la lengua de Arnold. Dichas órbitas periódicas están situadas sobre las curvas invariantes que aparecen en la bifurcación Neimark-Sacker, y la variedad inestable de la órbita tipo silla forma parte de dicha curva invariante. Esta situación se puede observar en la figura 2.10.

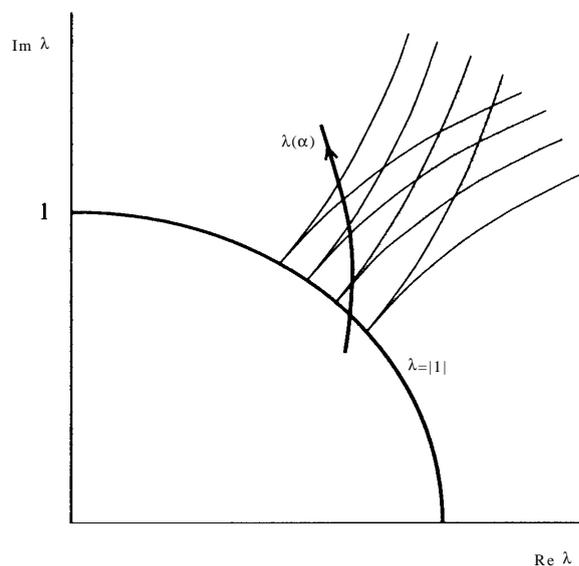


Figura 2.9. Lenguas de Arnold cerca de la bifurcación Neimark-Sacker.

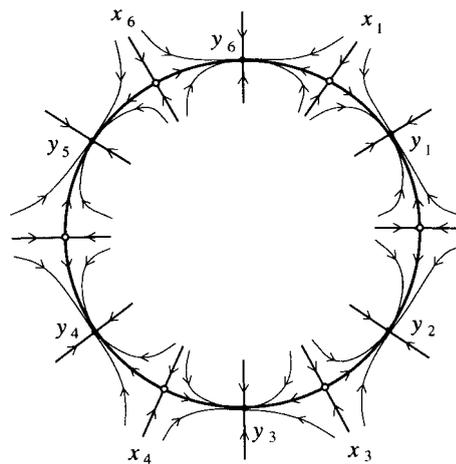


Figura 2.10. Ciclos de periodo seis tipo silla  $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$  y estable  $\{y_1, y_2, \dots, y_6\}$  sobre la curva invariante. La variedad inestable del ciclo seis tipo silla describe la curva invariante.

Por último, otra posible forma de que en un momento determinado las lenguas de Arnold desaparezcan es que se produzca algún tipo de bifurcación de periodo doble en el mapa  $i$ -iterado, apareciendo una órbita periódica de periodo  $2i$ .

## 2.7 Dinámicas caóticas

Las órbitas caóticas son un tipo especial de conjunto invariante. Una característica de las órbitas que pertenecen a este conjunto es que para dos puntos iniciales muy cercanos sus trayectorias divergen muy rápidamente. Esto se denomina dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales. Este comportamiento cualitativo se cuantifica mediante los exponentes de Lyapunov. El exponente de Lyapunov [Alligood 1996] es un promedio del ritmo de cambio exponencial de puntos vecinos en su evolución temporal. En la sección siguiente definiremos más formalmente este concepto.

### 2.7.1 Exponente de Lyapunov

Por simplicidad vamos a definir el exponente de Lyapunov en el caso de un sistema unidimensional y a continuación generalizaremos este concepto para sistemas multidimensionales.

### 2.7.1.1 Sistema monodimensional

Sea  $f$  un mapa suave. El número de Lyapunov  $L(x_1)$  de una órbita  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  se define como

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |f'(x_1)| \dots |f'(x_n)| \right)^{1/n}$$

si este límite existe.

El exponente de Lyapunov  $h(x_1)$  se define como

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)|}{n} \right)$$

si este límite existe. Notemos que  $h$  existe si y sólo si  $L$  existe, y  $h = \ln(L)$ .

Es importante indicar que tanto el número de Lyapunov como el exponente no están definidos para algunas órbitas. En particular, las órbitas que contienen puntos  $x_i$  con  $f'(x_i) = 0$  causan que los exponentes de Lyapunov no estén definidos.

De la anterior definición se deduce que el número de Lyapunov de un punto fijo  $x_1$  es  $|f'(x_1)|$ , o que su exponente de Lyapunov es  $h = \ln |f'(x_1)|$ . En el caso de ser punto fijo estable ( $|f'(x_1)| < 1$ ) este exponente es negativo. Si  $x_1$  es una órbita periódica de periodo  $k$ , entonces el exponente de Lyapunov es

$$h(x) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_k)|}{k}$$

En el caso de ser una órbita periódica estable la anterior expresión es negativa, y la distancia entre dos puntos próximos situados en el dominio de atracción de dicha órbita decaerán exponencialmente como  $e^{h(x)}$ .

Sea  $f$  un mapa, con  $\{x_1, x_2, x_3, \frac{1}{4}\}$  una órbita acotada de  $f$ . La órbita se dice que es caótica si ocurren dos condiciones [Alligood 1996]

- i)  $\{x_1, x_2, x_3, \frac{1}{4}\}$  no es asintóticamente periódica.
- ii) El exponente de Lyapunov  $h(x_1)$  es mayor que cero.

### 2.7.1.2 Sistema multidimensional

**Definición 2.6.** Sea el mapa diferenciable  $f: \hat{\mathbf{A}}^m \otimes \hat{\mathbf{A}}^m$ . Para cada  $x \in \hat{\mathbf{A}}^m$  y  $v \in \hat{\mathbf{A}}^m$  construimos la función

$$I(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left( |Df_x^k v| \right)$$

cuando exista el límite. Se puede demostrar que, para cada  $x$ , existen como máximo  $m$  valores distintos de  $I(x, v)$  y constituyen la generalización de los exponentes de Lyapunov para sistemas multidimensionales.

Los  $m$  exponentes de Lyapunov miden el ritmo de separación de los puntos de la órbita actual a lo largo de  $m$  direcciones ortogonales. Estas direcciones están determinadas por la dinámica del mapa. La primera sería la dirección sobre la cual existe la mayor separación entre puntos vecinos. La segunda dirección es la de mayor separación de entre todas las direcciones perpendiculares a la primera. La tercera será la de mayor separación entre los puntos vecinos entre las direcciones perpendiculares a las anteriores, y así sucesivamente. Los factores de expansión en cada una de las direcciones anteriores son precisamente los exponentes de Lyapunov.

Para ilustrar el concepto podemos estudiar la figura 2.11. Consideramos una esfera de radio muy pequeño centrada sobre un punto inicial  $x_0$  de una trayectoria. Si examinamos la imagen  $f(S)$  de la esfera en una iteración del mapa, se observa que su forma es aproximadamente elipsoidal, con los ejes mayores en las direcciones expansivas del mapa  $f$  y ejes menores sobre las direcciones de contracción.

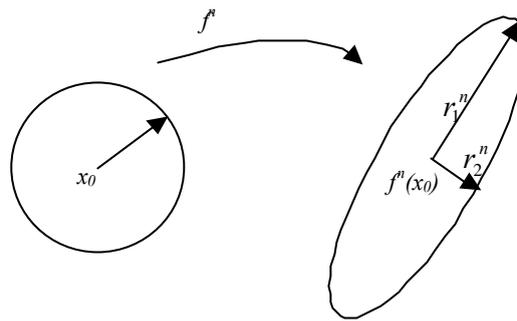


Figura 2.11. Evaluación n-ésima de un disco infinitesimal inicial

Después de  $n$  iteraciones del mapa  $f$  la esfera se habrá trasladado a  $f^n(x_0)$  y se habrá convertido en un elipsoide. El cambio promedio por iteración del tamaño de los ejes del elipsoide son los números de Lyapunov. Al igual que en una dimensión, los exponentes de Lyapunov corresponden al logaritmo natural de los números de Lyapunov.

Para calcular el cambio promedio correspondiente al número de Lyapunov consideremos que la esfera sobre  $x_0$  y el mapa  $f$  se sustituye por una esfera unidad  $U$  y la matriz Jacobiana  $Df(v_0)$ , respectivamente. Estamos interesados en el comportamiento infinitesimal cerca de  $x_0$ . Representando la matriz Jacobiana correspondiente a la iteración  $n$ -ésima de  $f$  en el punto  $x_0$  como  $J_n = Df^n(x_0)$ , entonces  $J_n U$  simboliza el elipsoide imagen. Los ejes mayores que uno corresponderán a las direcciones donde el mapa lineal  $Df^n(x_0)$  es expansivo, y los menores a las direcciones contractivas. Los  $m$  coeficientes de expansión multiplicativos promedio de los  $m$  ejes ortogonales son los números de Lyapunov. Esto es:

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{1/n} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde  $r_k^n$  es la longitud del  $k$ -ésimo eje ortogonal del elipsoide  $J_n U$  para una órbita con punto inicial  $x_0$ . El  $k$ -ésimo exponente de Lyapunov de la órbita que comienza en  $x_0$  es  $h_k = \ln L_k$ . Consecuentemente con la construcción que se ha planteado en párrafos anteriores, empezando por las direcciones más expansivas, ocurre que  $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$  y  $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_m$ .

Las longitudes y direcciones de los ejes del elipsoide imagen  $J_n U$  son las raíces cuadradas de los  $m$  autovalores y autovectores de  $J_n J_n^T$ , respectivamente [Eckmann 1985].

Usando el concepto de exponente de Lyapunov podemos extender la definición de órbita caótica a órbitas de mapas multidimensionales [Alligood 1996].

Sea  $f$  un mapa de  $\mathfrak{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , y siendo  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{1/4}\}$  una órbita acotada de  $f$ . La órbita es caótica si:

- i) No es asintóticamente periódica
- ii) Todos los números de Lyapunov son distintos de uno
- iii)  $L_1(x_0) > 1$  ó  $h_1(x_0) > 0$

Descartamos la posibilidad de considerar como órbita caótica el caso en el que algún exponente de Lyapunov es cero, ya que esto indica que esa órbita es cuasiperiódica.

Hemos visto la definición de exponente de Lyapunov en el caso de un mapa tanto monodimensional como multidimensional. En el caso de un sistema continuo los exponentes y números de Lyapunov se definen como los números/exponentes del mapa de tiempo unidad asociado a dicho sistema continuo.

Una forma habitual para calcular los exponentes de Lyapunov se basa en el método de descomposición  $QR$  [Eckmann 1985], que es el más sencillo y menos costoso computacionalmente. En el apéndice E se describe este método.

### 2.7.2 Tipo de caos característico (Smale Horseshoe)

En primer lugar, veamos como se define el mapa Horseshoe cuyo comportamiento se puede extrapolar a muchos sistemas en los que ocurre el mismo fenómeno.

El mapa Horseshoe lo definió por primera vez S. Smale [Smale 1963], de ahí que se denomine también de Smale. Definió un mapa  $h$  invertible sobre  $\mathfrak{R}^2$  de la siguiente manera. El

mapa transforma el cuadrado  $W=ABCD$  a una imagen con forma de herradura superpuesta sobre  $W$ , como se puede observar en la figura 2.12 (a), con  $h(A)=A^*$ ,  $h(B)=B^*$ ,  $h(C)=C^*$ , y  $h(D)=D^*$ . Asumimos que el mapa transforma  $W$  de tal manera que contrae uniformemente las distancias horizontales y expande uniformemente las distancias verticales. Fuera de la región  $W$ , la única restricción que le imponemos a  $h$  es que sea continuo e invertible.

En nuestro análisis del mapa Horseshoe, nos centraremos en los puntos sobre el plano que pertenecen al rectángulo  $W$  para iteraciones hacia delante y hacia atrás. Estos puntos forman el conjunto invariante  $H$  de  $h$ .

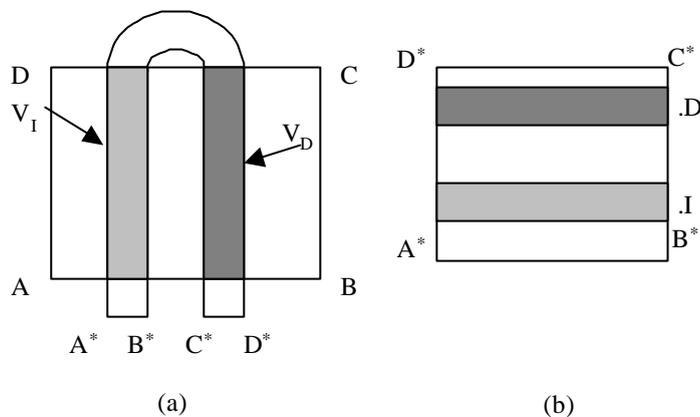


Figura 2.12. El mapa Horseshoe. El mapa convierte el cuadrado  $W=ABCD$  a su imagen  $A^*B^*C^*D^*$ , que tiene una forma como una herradura.  $V_D$  y  $V_I$  generadas por el mapa.

Observemos que cualquier punto de  $H$  debe estar contenido en la rama izquierda  $V_L$  o la rama derecha  $V_R$  definidas por  $W \cap h(W)$ , como puede observar en la figura 2.12 (a). Podemos asignar a estos puntos itinerarios representados por una cadena de símbolos que dependen de si los puntos en cada iteración están en  $V_I$  o  $V_D$  (regiones que varían en cada iteración). Para un punto  $v$  de  $H$ , podemos definir un itinerario  $\tilde{v}$  de  $v$  simbolizado como  $\dots S_{-3}S_{-2}S_{-1}S_0 \cdot S_1S_2 \dots$  de la siguiente manera:

1. Si  $h^i(v)$  pertenece a  $V_I$ , asignamos  $S_i=I$ .
2. Si  $h^i(v)$  pertenece a  $V_D$ , asignamos  $S_i=D$ .

La imagen del Horseshoe es un desdoblamiento sucesivo, se estira en una dirección y se estrecha en la otra, así el cuadrado  $A^* B^* C^* D^*$  se puede colocar en el cuadrado  $ABCD$ . Entonces los puntos correspondientes a  $V_1$  y  $V_D$  forman dos bandas horizontales, etiquetadas  $.I$  y  $.D$  en la figura 2.12 (b). Los puntos en  $I(.D)$  son aquellos que se mapean en  $V_1(V_D)$  y para los cuales  $S_I$  es  $.I(.D)$ .

Para asignar las coordenadas  $S_2$ , desdoblaremos  $h^2(W)$ , como se muestra en la figura 2.13. Los cuatro conjuntos de puntos cuyos itinerarios comienzan por  $S_1 S_2$  forman cuatro bandas horizontales, combinadas en pares dentro de las bandas  $.I$  y  $.D$ . De nuevo, cada vez que especifiquemos una coordenada adicional, doblamos el número de bandas horizontales. Cuando se especifica la secuencia entera  $.S_1 S_2 S_3 \dots$ , el conjunto de puntos representados por dicha secuencia corresponde a un segmento de línea horizontal. La colección de estos segmentos, para todas las posibles secuencias, forman un conjunto de Cantor (conjunto cerrado caracterizado porque todos los puntos pertenecen a su frontera) de segmentos de líneas horizontales.

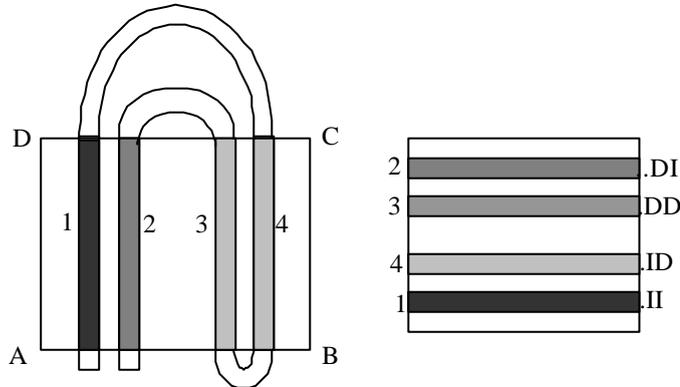


Figura 2.13. Desdoblamiento  $h^2(W)$ , la segunda iteración hacia delante. Se muestran los puntos del cuadrado iterado dos veces.

Veamos a continuación que ocurre con el mapa inverso  $h^{-1}$ . Para empezar, si la iteración inversa de un punto  $v$  en  $W$  permanece en  $W$ ,  $v$  debe estar en  $V_1$  o  $V_D$ . Si se hace el procedimiento inverso de  $h$ , es decir, desdoblar  $h(W)$ , entonces, como se vio previamente, las imágenes inversas de  $V_1$  y  $V_D$  son bandas horizontales  $.I$  y  $.D$ . El conjunto de puntos dentro de  $.I$  que está en  $V_1$  se simboliza como  $II$  en figura 2.14(a); y los de  $V_D$  como  $DI$ . La figura

2.13(b) muestra los puntos  $v$  en  $W$  para los que su itinerario  $\tilde{v}$  tiene  $S_{-1}S_0$  igual a una de las cuatro posibles secuencias parciales:  $II.$ ,  $DI.$ ,  $DD.$ , y  $ID.$  .

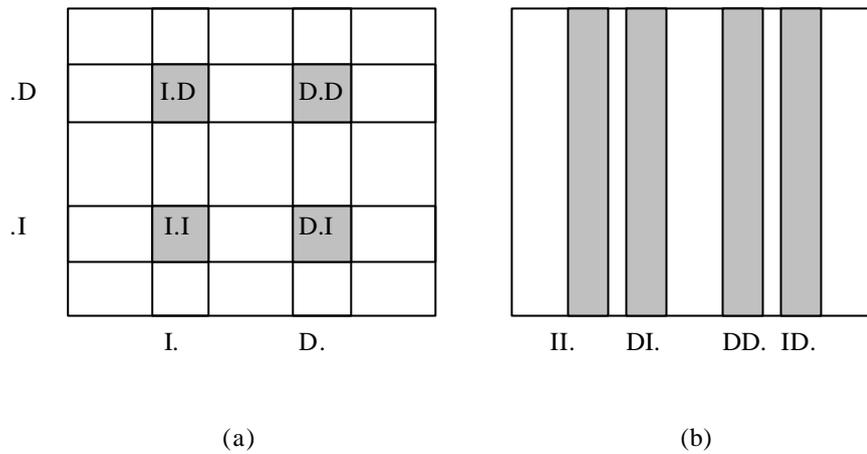


Figura 2.14. Iteraciones del mapa Horseshoe. a) iteraciones a ambos intersectandose las bandas verticales y horizontales. b) Iteraciones hacia atrás correspondientes a bandas verticales.

Especificando la secuencia entera del mapa inverso  $\dots S_{-2}S_{-1}S_0.$ , representamos puntos formando un segmento de línea vertical. La colección de todas las secuencias forman un conjunto de Cantor de segmentos de líneas verticales. Para especificar exactamente un punto en  $H$ , se intersectan el segmento de línea vertical representado por  $\dots S_{-2}S_{-1}S_0.$  y el segmento de línea horizontal especificado por la secuencia  $.S_1S_2S_3\dots$ . Así para cada itinerario de dos extremos  $\dots S_{-2}S_{-1}S_0.$   $S_1S_2S_3\dots$  corresponde a un punto de  $H$ . Notar que la suposición de alargamiento uniforme en una dirección y contracción en otro es necesaria para que la anchura de las bandas verticales y altura de las bandas horizontales tiendan a cero, asegurando una correspondencia biunívoca entre los itinerarios y puntos invariantes.

Por último si asumimos que el mapa Horseshoe se estira y contrae uniformemente en los puntos sobre el conjunto invariante  $H$  y que las direcciones de estiramiento se mapean a direcciones de estiramiento al igual que las de contracción se mapean a direcciones de contracción, entonces cada órbita del conjunto invariante tiene un exponente de Lyapunov positivo. Por ejemplo, asumiendo que la forma del cuadrado en un Horseshoe en la figura 2.12 (a) tiene un ancho  $1/4$  del cuadrado original  $ABCD$ , y una longitud tres veces mayor a la original. Entonces los exponentes de Lyapunov son  $\ln 3$  y  $-\ln 4$ . Basándonos en esto concluimos que el mapa Horseshoe tiene órbitas caóticas.

### 2.7.3 Puntos homoclínicos y heteroclínicos

En primer lugar, definiremos los conceptos de punto homoclínico y punto heteroclínico [Guckenheimer 1980], y a continuación veremos la relación con el mapa Horseshoe.

Sea  $f$  un mapa invertible en  $\mathfrak{R}^n$ , y  $p$  un punto fijo de silla. Un punto diferente de  $p$  que simultáneamente está en las variedades estable e inestable de  $p$ , se denomina punto homoclínico. Si  $x$  es un punto homoclínico, entonces  $f^n(x) \rightarrow p$  y  $f^{-n}(x) \rightarrow p$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otro lado, dados dos puntos de silla  $p$  y  $q$ , un punto que esté situado en la variedad estable de uno de los puntos de silla y en la variedad inestable del otro se denomina punto heteroclínico.

Podemos ver un ejemplo de punto homoclínico en la siguiente figura.

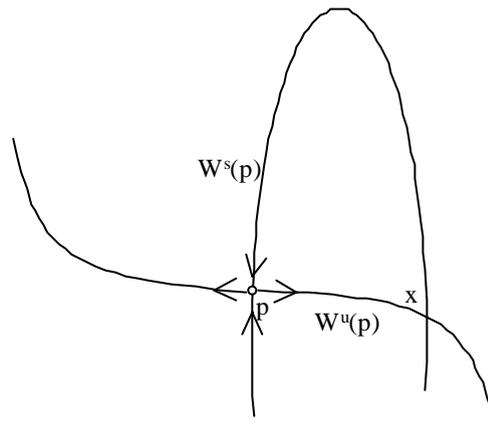


Figura 2.15. Cruce de variedad estable e inestable del punto de silla  $p$  generando un punto homoclínico  $x$ .

Hay que indicar que las imágenes y preimágenes sucesivas de un punto homoclínico son también homoclínicas. Por tanto, a un punto homoclínico se le puede asignar una trayectoria discreta de puntos homoclínicos, denominada órbita homoclínica. El mismo fenómeno ocurre con los puntos heteroclínicos.

La presencia de puntos homoclínicos implica la existencia de un Horseshoe hiperbólico que es topológicamente equivalente al que hemos descrito anteriormente [Robinson 1995].

La construcción de un Horseshoe cerca de una órbita homoclínica se puede observar en la figura 2.16. Empezamos con una caja  $R$  que contiene un punto fijo de silla  $p$  de un mapa invertible  $f$ . Bajo una iteración de  $f$   $R$  se expande a lo largo de la variedad inestable de  $p$ ; y bajo la iteración de  $f^{-1}$ , se estira a lo largo de la variedad estable. En particular, hay un número  $l$  y  $k$  de iteraciones tal que  $f^{-l}(R)$  se extiende sobre la variedad estable incluyendo el punto homoclínico  $x$ , y  $f^k(R)$  se extiende sobre la variedad inestable incluyendo el punto  $x$ , como se observa en la figura 2.16. Esto es,  $f^{k+l}$  es un mapa Horseshoe con dominio  $f^{-l}(R)$  e imagen  $f^k(R)$ . Geométricamente esta construcción es clara. Pero no es tan fácil de ver cuanto de pequeña es la región  $R$  y como de grande debe ser  $k$  y  $l$  para que el Horseshoe hiperbólico tenga una expansión y contracción uniforme.

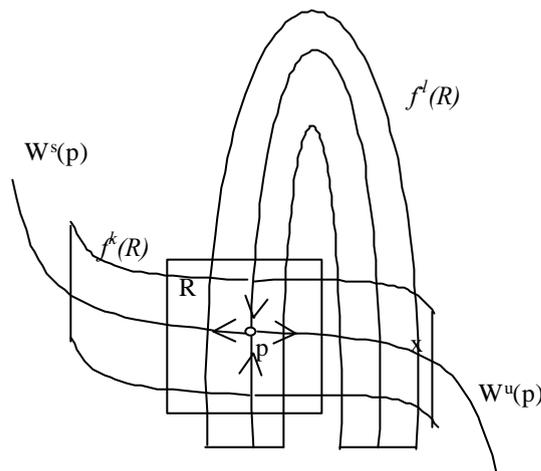


Figura 2.16. Construcción del Horseshoe cerca de un punto homoclínico.

Para que sea válida la construcción de Horseshoe anteriormente expuesta es necesario que los cortes en los puntos homoclínicos y heteroclínicos sean transversales. Esto es, una variedad estable e inestable se dice que se cortan transversalmente si las dos variedades se interceptan con un ángulo positivo entre ellas; si el ángulo entre las líneas tangentes a las dos variedades en el punto de corte es distinto de cero. Si las curvas son tangentes a sus respectivos cruces, entonces los ángulos entre ellos es cero y las curvas no se cortan transversalmente. En la figura 2.17 ilustramos las intersecciones transversales y no transversales.

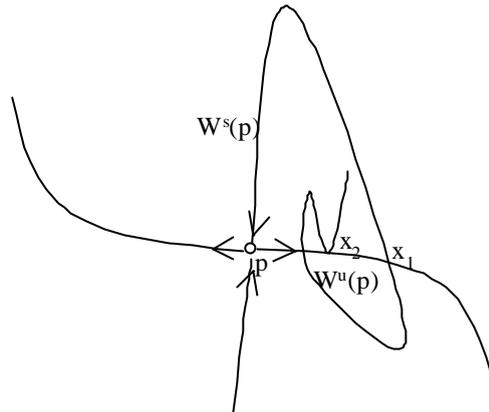


Figura 2.17. Cruce transversal,  $x_1$  y no transversal  $x_2$  de un punto de silla-nodo estable e inestable.

Existe un teorema [Alligood 1996] que nos garantiza que si  $p$  es un punto de silla, y tiene cortes transversales entre la variedad estable e inestable, entonces hay un Horseshoe hiperbólico para alguna iteración de  $f$ . Esto es generalizable a los puntos heteroclinicos [Hale 1991].

#### 2.7.4 Ruta del caos. Fenómeno de Cascada

Una “cascada” aparece como una secuencia infinita de bifurcaciones de periodo-doble [Alligood 1996]. La cascada de las bifurcaciones de periodo-doble se observa en la gran mayoría de sistemas de baja dimensión que exhiben comportamiento caótico.

Una órbita periódica se convierte en inestable a medida que el parámetro del sistema dinámico se incrementa o decrementa y es reemplazado por una órbita estable de periodo doble. Esta órbita se convierte en inestable y es reemplazada a su vez por una nueva órbita estable con un periodo doble de nuevo, y el proceso continúa hasta tener un número infinito de tales bifurcaciones de periodo doble.

Podemos ver en la siguiente figura un ejemplo del efecto cascada, representando los diferentes ciclos estables frente al parámetro del sistema.

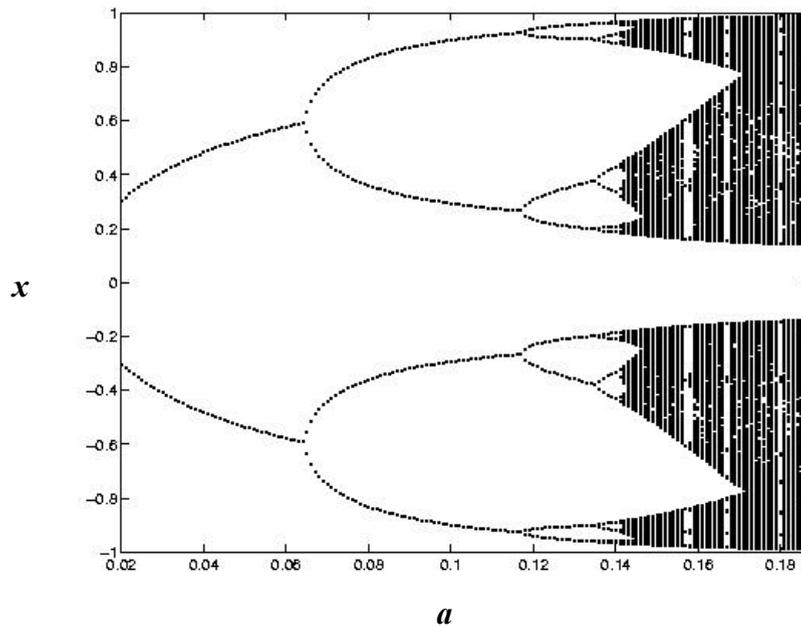


Figura 2.18. Ejemplo de diagrama de bifurcación donde se observa el fenómeno de cascada.

Teóricamente el caos se producirá cuando las líneas sean infinitamente densas. Este es el motivo por el que es difícil determinar en que valor del parámetro se produce el caos. En ocasiones éste se confunde con un periodo muy elevado, esta situación se denomina crisis. Añadido a esto suele ocurrir que aparecen ventanas en la cascada que nos indican que el caos es no robusto, esto es, que ante una pequeña variación del parámetro desaparece o aparece el caos.

Hay que añadir que en el caso de sistemas unidimensionales, bajo ciertas condiciones [Tabor 1989], aparece la constante de Feigenbaum (4.66920109..) [Feigenbaum 1978], se puede asegurar que el límite:

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} = 4.669201609\dots,$$

es una constante universal.

Siendo  $a_i$  el parámetro donde se produce la bifurcación de periodo doble del mapa  $i$ -iterado.

Por último, a modo de ejemplo, podemos ver como se genera el diagrama de cascada basándonos en las bifurcaciones silla-nodo y de periodo doble. Como podemos observar la primera bifurcación genera nuevas ramas y la segunda duplica la periodicidad.

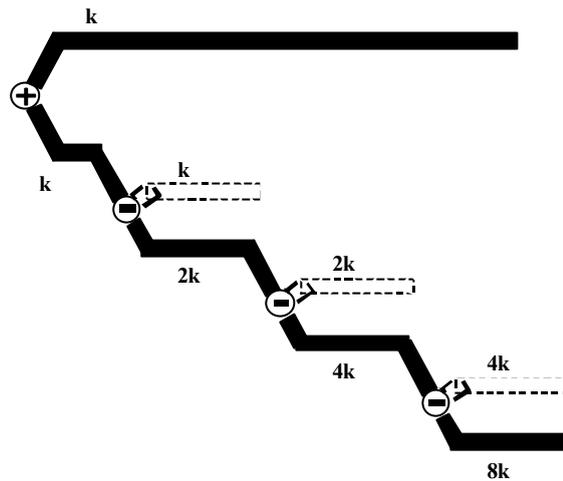


Figura 2.19. Modelo esquemático de un diagrama de bifurcaciones. El símbolo + significa bifurcación de silla-nodo, y el símbolo - significa bifurcación de periodo doble. Las líneas rellenas representan órbitas estables y las discontinuas inestables.

# Capítulo 3. Estudio dinámico de una red neuronal recurrente discreta

El propósito de este capítulo es la presentación de algunos resultados sobre el análisis de las dinámicas de, principalmente, el modelo de red neuronal discreta recurrente de Williams-Zipser. En primer lugar haremos una revisión de los resultados encontrados en la literatura. A continuación, examinaremos el caso de una sola neurona del que, por su simplicidad, se puede hacer un análisis completo. Seguidamente estudiaremos el caso de dos neuronas. Aquí la complejidad impide hacer un análisis exhaustivo. Se expondrán las bifurcaciones que se producen en el mapa, basándonos en la teoría de formas normales. Se hará hincapié en la bifurcación Neimark-Sacker y los fenómenos asociados a ella, como las lenguas de Arnold. Se analizará también la posibilidad de aparición de caos. Por último, se darán algunos resultados parciales correspondientes al caso general de  $n$  neuronas.

## 3.1 Introducción

El resultado más general sobre la estabilidad de este tipo de sistemas se deriva de la aplicación del teorema de Lyapunov [Marcus 1989] y establece, que para una matriz de

pesos simétrica, existen sólo estados de equilibrio correspondientes a puntos fijos y ciclos límites de periodo dos. También se dan las condiciones bajo las cuales sólo hay puntos fijos estables. Recientemente, Cao [Cao 1999] ha propuesto otras condiciones menos restrictivas pero más complejas. En [Wang 1991] se ha estudiado el caos para una red con dos neuronas en una configuración específica de pesos, demostrando su equivalencia topológica con el mapa logístico. Por otra parte, en [Wang 1982] se describe otro tipo interesante de trayectorias, las cuasiperiódicas, junto con algunas conclusiones sobre su estabilidad.

La mayoría de los resultados del análisis de las redes neuronales dinámicas se centran en las de tipo Hopfield continuo [Hopfield 1984] y [Tank 1987], en particular en [Wei 1999] y [Gopalsamy 1998], se muestra la estabilidad de la bifurcación de Hopf. Otros artículos determinan el papel de la auto-conexión en la estabilización de dicha bifurcación [Liao 2001]. Por último, en [Potapov 2000] se ha determinado la robustez del caos en la red neuronal de Hopfield discreta.

### 3.2 Estudio de la dinámica de una neurona

El mapa correspondiente a una neurona en ausencia de peso umbral viene dado por la expresión siguiente

$$x(k+1) = \tanh(wx(k))$$

Analicemos el número de puntos fijos  $x_p$  del sistema. Dichos puntos son las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{atanh}(x_p) = wx_p$$

Como el mapa está acotado, se cumple que  $x_p \in (-1, 1)$ .

Trazando las intersecciones de las funciones correspondientes a cada miembro de la ecuación anterior (representadas en la figura 3.1) se establece gráficamente el número de

puntos fijos en función de  $w$ . Se deduce de la gráfica que cuando el peso  $w$  es mayor que la unidad existen tres cortes, determinando tres puntos fijos diferentes. Si dicho peso es menor que la unidad, sólo existe un único punto fijo correspondiente al origen.

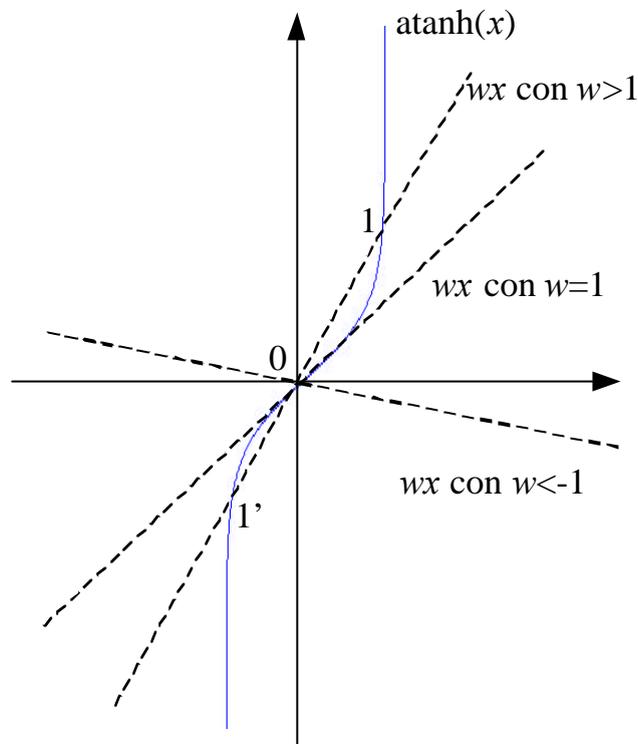


Figura 3.1. Curvas donde se producen los puntos fijos

Para determinar la estabilidad de los puntos fijos  $x_p$  calculemos el autovalor asociado

$$\lambda = w(1 - \tanh^2(wx_p))$$

Por ser  $x_p$  un punto fijo, la anterior ecuación se puede expresar como

$$\lambda = w(1 - x_p^2)$$

El autovalor puede ser mayor o menor a la unidad, siendo el punto fijo inestable o estable, respectivamente. Basándonos en este hecho, podemos analizar las dos posibles dinámicas que se generan.

Supongamos inicialmente que el peso  $w$  es positivo. Entonces se pueden producir las dos configuraciones dinámicas siguientes:

- Si  $w < 1$ , existe un único punto fijo correspondiente al origen, y además es estable, debido a que  $I_0 = w < 1$ .
- Si  $w > 1$ , el punto fijo del origen se convierte en inestable, ya que  $I_0 = w > 1$ , y aparecen dos puntos fijos simétricos  $x_p$  y  $-x_p$  como se puede observar en la figura 3.1. Se deduce que los autovalores tienen el mismo valor y los puntos son equivalentes desde el punto de vista dinámico. La magnitud del autovalor se determina mediante la comparación de la pendiente de la recta  $wx$  y la de la función  $\operatorname{atanh}(x)$  que aparecen en la figura 3.1, dadas por:

$$p_{\text{recta}} = w$$

$$p_{\text{atanh}} = \frac{1}{(1 - \tanh^2(wx_p))} = \frac{1}{1 - x_p^2}$$

En el punto 1 de la figura 3.1 se observa que la pendiente de la recta  $p_{\text{recta}}$  es menor que la pendiente  $p_{\text{atanh}}$  de la función. Esto es

$$w < \frac{1}{(1 - x_p^2)} \Rightarrow \lambda_1 = w(1 - x_p^2) < 1$$

Por tanto, los puntos fijos 1 y 1' en la figura 3.1 son siempre estables.

Al pasar de la configuración dinámica a) a la b) se produce una bifurcación tipo Pitchfork asociada al punto fijo del origen ( $w=1$ ). Para determinar la forma normal asociada a la bifurcación, consideramos el desarrollo de Taylor del mapa hasta el orden tres, ya que el término de segundo orden es cero para  $w=1$

$$\tilde{x} = (1 + \mathbf{a})x + \frac{f_{xx}(0)}{2}x^2 + \frac{f_{xxx}(0)}{6}x^3 + O(|x|^4) \quad (3.1)$$

donde

$$f(x) = \tanh(wx)$$

como

$$f_{xx}(0) = 0$$

entonces

$$\tilde{x} = (1 + \mathbf{a})x + \frac{f_{xxx}(0)}{6}x^3 + O(|x|^4)$$

Esta forma normal corresponde a la bifurcación tipo Pitchfork, vista en el capítulo anterior. El coeficiente de orden tres viene dado por

$$\frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} = -\frac{1}{3} w^3 (1 - 3 \tanh^2(x_p)) (1 - \tanh^2(x_p)) = -\frac{1}{3} \quad (3.2)$$

En el punto fijo correspondiente al origen este término de tercer orden tiene un valor negativo.

Considerando el análisis hecho de la bifurcación de tipo Pitchfork en la sección 2.6.1.2, si el coeficiente que acompaña al término cúbico es negativo, el punto fijo cero estable se convierte en inestable apareciendo dos puntos fijos adicionales estables simétricos.

Supongamos ahora que el peso  $w$  es negativo. En este caso se produce una bifurcación tipo periodo-doble en el origen correspondiente a  $w = -1$ , y por tanto, puede surgir una nueva configuración dinámica. Para determinar la dirección de la bifurcación recordemos que su forma normal asociada es:

$$\dot{\mathbf{h}} = -(1 + \mathbf{a})\mathbf{h} + c\mathbf{h}^3$$

donde

$$c = \text{signo}\left(\frac{1}{4}(f_{xx}(0))^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0)\right)$$

En este caso:

$$c = \text{signo}\left(\frac{1}{6}f_{xxx}(0)\right) = -\frac{1}{3}w^3(1 - 3 \tanh^2(0))(1 - \tanh^2(0)) = \frac{1}{3} \quad (3.3)$$

Al ser positivo este coeficiente ocurre que al pasar el punto fijo origen de estable a inestable aparece un ciclo dos estable.

En la figura 3.2.a se aprecian los puntos fijos y sus respectivos dominios de atracción del mapa con peso  $w < 1$ . Cuando  $w < -1$  surge un ciclo dos estable que, si se considera el mapa iterado dos veces, posee una distribución similar de puntos fijos y dominios de atracción (figura 3.2.b).

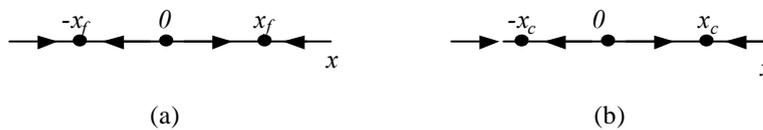


Figura 3.2. a) Puntos fijos y dominios del mapa de una iteración una vez producida la bifurcación de Pitchfork b) Puntos fijos y dominios del mapa de dos iteraciones una vez producida la bifurcación de periodo doble.

El diagrama de bifurcación completo es el siguiente.

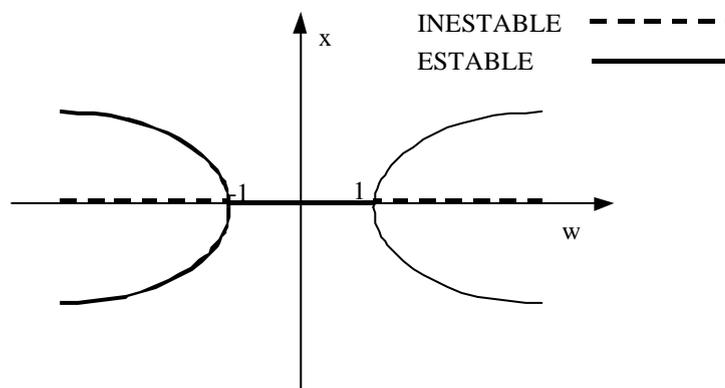


Figura 3.3. Diagrama de bifurcación para el mapa correspondiente a una neurona. El trazado discontinuo indica que el punto fijo es inestable.

Por tanto, para una neurona se pueden producir tres dinámicas: que el punto fijo correspondiente al origen sea único y estable, que sea inestable y aparezcan dos puntos fijos estables o un ciclo dos estable.

Cabe plantearse si se pueden producir otras bifurcaciones. En primer lugar, podemos descartar que se produzcan bifurcaciones tipo silla-nodo asociadas a los puntos fijos 1 y 1' de la figura 3.1, ya que esto provocaría la aparición de más de tres puntos fijos. La única posibilidad se da en los puntos fijos del mapa iterado dos veces, correspondientes a los ciclos dos. La expresión de este mapa es

$$x(k+1) = \tanh(w \tanh(wx(k)))$$

Por tanto, la ecuación de punto fijo viene dada por

$$\operatorname{atanh}(x) = w \tanh(x)$$

Gráficamente, la intersección de las curvas correspondientes a cada miembro de la ecuación anterior determinará el número de puntos fijos (ciclo dos). En la figura 3.4 se pueden observar dichas curvas para  $w < -1$ .

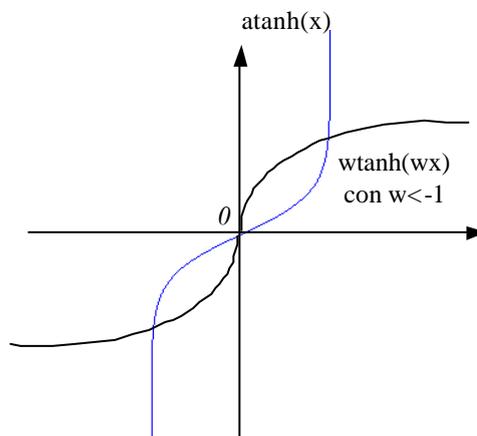


Figura 3.4. Curvas donde se producen los puntos fijos del mapa iterado dos veces.

Analicemos la posibilidad de la aparición de una bifurcación de periodo doble, para ello sólo es necesario calcular el autovalor asociado con el periodo doble, esto es,

$$\lambda_{ciclo} = w^2 (1 - \tanh^2(w \tanh(wx))) (1 - \tanh^2(wx))$$

Se comprueba que el autovalor es siempre positivo, por tanto, nunca puede valer  $-1$ . Una consecuencia de esto es la imposibilidad de generar caos mediante el fenómeno de cascada. Esto es coherente con el hecho de que para un mapa de una sola dimensión, la única posibilidad de dinámica caótica se produce en mapas no invertibles.

Por último, podemos descartar que se produzcan bifurcaciones tipo silla-nodo asociada a los puntos fijos extremos, ya que no pueden aparecer más de tres puntos fijos del mapa dos veces iterado, como se observa en la figura 3.4.

### 3.3 Estudio de la dinámica de dos neuronas

En este sistema aparece una rica variedad de dinámicas [Piñeiro 2000a] y [Piñeiro 2000b]. El propósito de esta sección es determinar las de mayor interés. Una ventaja importante de tener un espacio fásico de dos dimensiones es poder visualizar fácilmente las trayectorias y puntos fijos. Al igual que con una neurona, no se han considerado las entradas. Por otro lado, y sin pérdida de generalidad, se han considerado nulos los pesos umbrales.

Con estas condiciones, la ecuación discreta que determina la evolución del sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tanh(w_{11}x(k) + w_{12}y(k)) \\ y(k+1) &= \tanh(w_{21}x(k) + w_{22}y(k)) \end{aligned}$$

donde  $x(k)$  e  $y(k)$  son las salidas de las neuronas en la iteración  $k$ -ésima.

#### 3.3.1 Determinación del número de puntos fijos y su estabilidad

Los puntos fijos son las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} x_p &= \tanh( w_{11}x_p + w_{12}y_p ) \\ y_p &= \tanh( w_{21}x_p + w_{22}y_p ) \end{aligned} \tag{3.4}$$

El punto (0,0) es siempre un punto fijo, independientemente de la configuración de pesos. El número total de puntos fijos es siempre impar porque, además del origen y debido a la simetría del sistema, si  $(x_p, y_p)$  es punto fijo,  $(-x_p, -y_p)$  lo será también.

Para determinar gráficamente las configuraciones de puntos fijos, redefiniremos las ecuaciones (3.4) como

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{a \tanh( x_p ) - w_{11}x_p}{w_{12}} = F(x_p; w_{11}, w_{12}) \\ x_p &= \frac{a \tanh( y_p ) - w_{22}y_p}{w_{21}} = F(y_p; w_{22}, w_{21}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

La función  $F$  tiene dos comportamientos cualitativos distintos dependiendo del valor de los pesos diagonales  $w_{11}$  y  $w_{22}$ . Se aprecia en la figura 3.5 que la gráfica de la función  $F$  tiene un máximo y un mínimo si  $w_{ii} > 1$ , y si  $w_{ii} < 1$ ,  $F$  es monótonamente creciente.

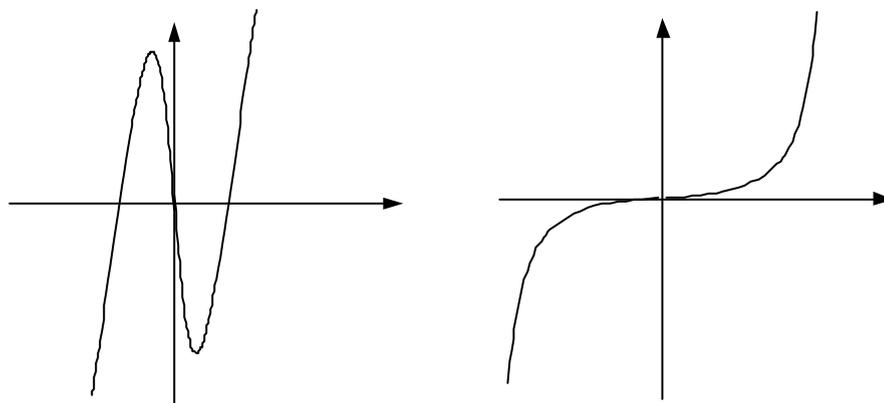


Figura 3.5. Los dos comportamientos posibles de la función  $y = F(x; w_{11}, w_{12})$  y  $x = F(y; w_{22}, w_{21})$ . La figura de la izquierda corresponde a  $w_{ii} > 1$ , y la derecha  $w_{ii} < 1$ .

El número de puntos fijos vendrá determinado por las intersecciones de las curvas definidas en las ecuaciones (3.5). En la figura 3.6 se observa la representación de dichas curvas en el situación donde existe el número máximo de intersecciones (9 puntos fijos). Como se verá en secciones posteriores, también existen otras posibilidades: 7, 5, 3 ó 1 intersección o número de puntos fijos.

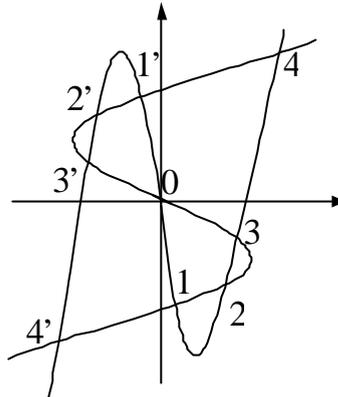


Figura 3.6. Intersección de las funciones  $F$  correspondiente a nueve puntos fijos.

Para especificar el tipo de punto fijo es necesario determinar los autovalores asociados a la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo. La Jacobiana del mapa es

$$A = Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_{11}(1 - \tanh^2(w_{11}x + w_{12}y)) & w_{12}(1 - \tanh^2(w_{11}x + w_{12}y)) \\ w_{21}(1 - \tanh^2(w_{21}x + w_{22}y)) & w_{22}(1 - \tanh^2(w_{21}x + w_{22}y)) \end{bmatrix}$$

evaluada en el punto fijo

$$A = Df(\mathbf{x}_p) = \begin{bmatrix} w_{11}(1 - x_p^2) & w_{12}(1 - x_p^2) \\ w_{21}(1 - y_p^2) & w_{22}(1 - y_p^2) \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$|A - \mathbf{I}\mathbf{I}| = \mathbf{I}^2 - \left[ w_{11}(1 - x_p^2) + w_{22}(1 - y_p^2) \right] \mathbf{I} + |W|(1 - x_p^2)(1 - y_p^2) = 0$$

donde  $|W|$  representa el determinante de la matriz de pesos.

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

Haciendo un cambio de variable para simplificar la discusión,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= w_{11}(1 - x_p^2) + w_{22}(1 - y_p^2) \\ \sigma_2 &= |W|(1 - x_p^2)(1 - y_p^2) \end{aligned}$$

es posible expresar las condiciones analíticas que determinan el carácter de cada punto fijo en función de sus coordenadas y los pesos a través de las nuevas variables

$$\begin{aligned} \sigma_2 > |\sigma_1| - 1 &\begin{cases} \sigma_2 > -|\sigma_1| - 1 & \begin{cases} |\sigma_2| < 1 & \text{Estable} \\ |\sigma_2| > 1 & \text{Inestable} \end{cases} \\ \sigma_2 < -|\sigma_1| - 1 & \text{Silla} \end{cases} \\ \sigma_2 < |\sigma_1| - 1 &\begin{cases} \sigma_2 > -|\sigma_1| - 1 & \text{Silla} \\ \sigma_2 < -|\sigma_1| - 1 & \text{Inestable} \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $||$  representa la función valor absoluto.

Estas relaciones se pueden ilustrar en la figura 3.7, donde se representa las regiones en el espacio de los pesos según el carácter del punto fijo del origen. Las fronteras entre dichas regiones son las bifurcaciones.

En este caso se pueden distinguir tres tipos de bifurcaciones. La bifurcación periodo doble que se produce cuando un autovalor alcanza el valor  $-1$  por la recta real. Esta condición corresponde a la recta de la izquierda  $|W| = -w_{11} - w_{22} - 1$  de la figura 3.7. El segundo tipo es la bifurcación silla-nodo (Pitchfork en el caso del punto fijo del origen), y se produce cuando un autovalor alcanza el valor uno por la recta real. En la figura 3.7 corresponde a la línea de la derecha  $|W| = w_{11} + w_{22} - 1$ . Finalmente, la tercera es la bifurcación Neimark-Sacker, y sucede

cuando los dos autovalores complejos conjugados alcanzan el círculo unidad (magnitud 1) con la excepción de la recta real, representada por la línea  $|W|=1$  en la figura 3.7.

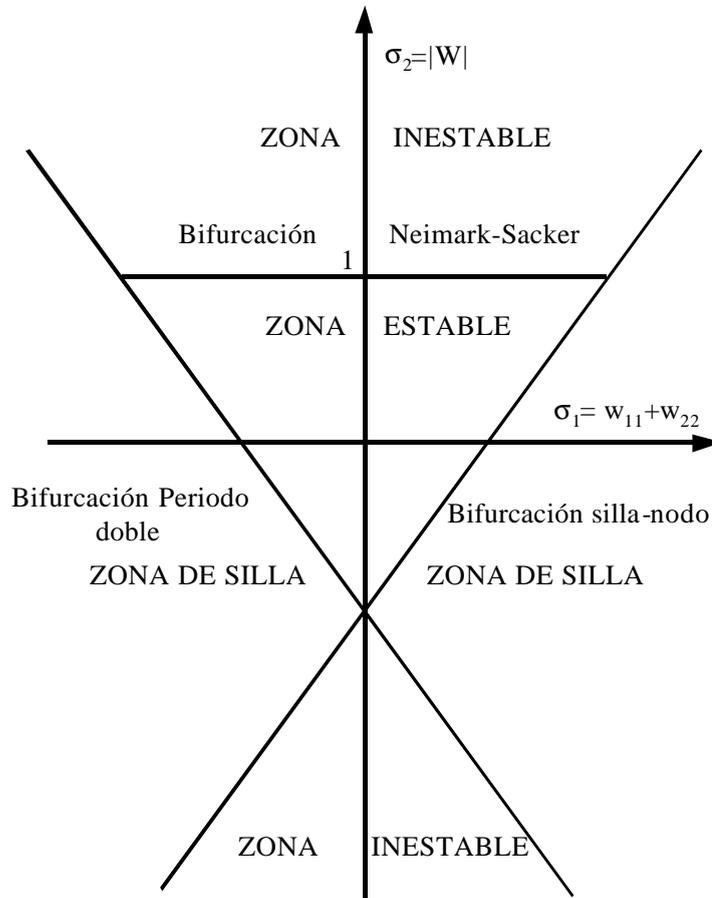


Figura 3.7. Regiones de estabilidad y líneas de bifurcación del punto fijo  $(0, 0)$ .

Comencemos analizando las formas normales de las bifurcaciones tipo silla-nodo, Pitchfork y periodo doble. Estas bifurcaciones están involucradas en la aparición de las transiciones entre distintas dinámicas.

### 3.3.2 Estudio de las bifurcaciones tipo silla-nodo, Pitchfork, y periodo doble

Para determinar la dirección de la bifurcación se calcula el coeficiente asociado a su forma normal. Por otra parte, al ser el sistema de dos dimensiones es necesario tener en cuenta también el autovalor no afectado por la bifurcación (no crítico). En el caso de la bifurcación Neimark-Sacker (autovalores complejos conjugados) esta última consideración no es

necesaria. Podemos ver de nuevo las regiones de estabilidad respecto a los parámetros y la magnitud de los autovalores a lo largo de las rectas que describen las bifurcaciones tipo silla-nodo (pitchfork en el caso del punto fijo origen) y periodo doble.

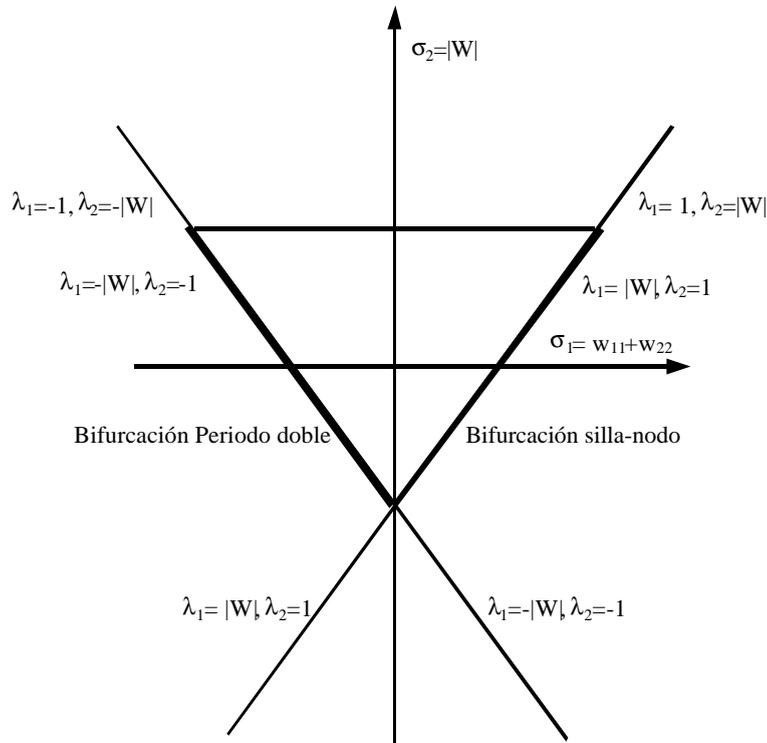


Figura 3.8. Áreas de los parámetros donde se sitúan las bifurcaciones para el punto fijo situado en el origen.

Como podemos observar en la figura anterior, sólo en la zona marcada por trazo grueso el autovalor no crítico  $I_2$  está dentro del círculo unidad y las transiciones de dinámicas sólo dependen del coeficiente asociado a la forma normal. En caso contrario, se pueden generalizar los argumentos de tal forma que cuando se hable de punto fijo estable, se sustituya por punto de silla, y cuando se trate de punto fijo de silla se sustituya por punto fijo inestable. Esto se extiende también a los ciclos de periodo dos.

### 3.3.2.1 Bifurcaciones tipo silla-nodo y Pitchfork

Como se indicó en el capítulo de introducción a sistemas dinámicos, es necesario calcular los coeficientes que aparecen en la forma normal obtenida al aplicar los teoremas de la variedad central (véase sección 2.6.2.1). Éstos son

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle$$

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{2} \langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle$$

donde  $q \in \mathfrak{R}^2$  y  $p \in \mathfrak{R}^2$  corresponden al autovector crítico de la matriz Jacobiana y al de su adjunta, respectivamente.

$$Jq = q \quad J^t p = p$$

Dichos autovectores están normalizados de la forma siguiente:

$$\langle p, q \rangle = 1$$

Recordemos que  $C$  y  $B$  son aplicaciones multilineales cuyos coeficientes corresponden a los coeficientes del desarrollo de Taylor de orden 2 y 3, respectivamente (véase sección 2.6.2.1):

$$B_i(a, b) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} a_j b_k$$

$$C_i(a, b, c) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} a_j b_k c_l$$

En este caso los autovectores  $p$  y  $q$  son

$$q = \frac{d}{e+d} \left\{ \frac{e}{w_{21} Y_0}, -1 \right\} \quad (3.6.a)$$

$$p = \left\{ \frac{e}{w_{12} X_0}, -1 \right\} \quad (3.6.b)$$

donde:

$$d = w_{11} X_0 - 1 \quad (3.7.a)$$

$$e = w_{22} Y_0 - 1 \quad (3.7.b)$$

$$X_0 = 1 - x_0^2 \quad (3.7.c)$$

$$Y_0 = 1 - y_0^2 \quad (3.7.d)$$

Siendo  $x_0$  e  $y_0$  las coordenadas del punto fijo donde se produce la bifurcación.

Con el fin de obtener  $a(0)$  y  $c(0)$  es necesario calcular las derivadas segundas y terceras del mapa. Éstas son:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} = -2x_i(1 - x_i^2)w_{ij}w_{ik}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} = 2(1 - x_i^2)(3x_i^2 - 1)w_{ij}w_{ik}w_{il}$$

Por tanto

$$B_i(a, b) = -2 \sum_{j,k=1}^2 x_i(1 - x_i^2)w_{ij}w_{ik}a_jb_k$$

$$C_i(a, b, c) = 2 \sum_{j,k,l=1}^2 (1 - x_i^2)(3x_i^2 - 1)w_{ij}w_{ik}w_{il}a_jb_kc_l$$

En nuestro caso con el fin de tener una notación compacta, hacemos el cambio que  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ . Entonces la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$C_1(q, q, q) = 2(1 - x_0^2)(3x_0^3 - 1)[w_{11}q_1 + w_{12}q_2]^3$$

$$C_2(q, q, q) = 2(1 - y_0^2)(3y_0^3 - 1)[w_{11}q_1 + w_{12}q_2]^3$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores la expresión del autovector  $q$ , dado por (3.7.a), obtenemos

$$C(q, q, q) = 2 \left[ \frac{2X_0(3x_0^2 - 1)w_{12}^3}{\frac{d^3(1 - 3y_0^2)}{Y_0^2}} \right] \quad (3.8)$$

El término que involucra las derivadas segundas tiene la siguiente expresión

$$B(q, q) = -2 \begin{bmatrix} x_0 X_0 [w_{11}q_1 + w_{12}q_2]^2 \\ y_0 Y_0 [w_{21}q_1 + w_{22}q_2]^2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo el autovector  $q$  la anterior expresión se transforma en

$$B(q, q) = -2 \begin{bmatrix} \frac{x_0 X_0 w_{12}^2}{(e+d)^2} \\ \frac{y_0 Y_0 w_{12}^2}{(e+d)^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Se utilizarán los resultados parciales (3.7.b), (3.8) y (3.9) para determinar por separado los coeficientes de la forma normal de la bifurcación Pitchfork asociada al punto fijo del origen, o la bifurcación silla-nodo asociada a puntos fijos distintos del origen.

### Bifurcación tipo Pitchfork en el origen

Esta bifurcación se produce en el punto fijo situado en el origen. La forma normal correspondiente viene dada por:

$$u(k+1) = u(k) + c(0)u(k)^3 + o(u(k)^4)$$

donde  $c(0)$  está definido en este caso como

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle$$

ya que,

$$B(a, b) \equiv 0$$

Sustituyendo las expresiones de  $C(q, q, q)$ ,  $q$  y  $p$  dadas por las ecuaciones (3.8), (3.7.a) y (3.7.b), respectivamente, y evaluándolas en el origen, el coeficiente anterior queda como

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = \frac{w_{12}^2 (w_{22} - 1) + (w_{11} - 1)^3}{3(1 - w_{11})^2 (2 - w_{11} - w_{22})}$$

Estudiaremos posteriormente las implicaciones que tiene en las dinámicas el signo de este coeficiente, que en principio puede ser negativo o positivo. La expresión anterior no está definida en los siguientes casos:

- a)  $w_{11} = 1$
- b)  $w_{11} + w_{22} = 2$

La condición b) implica que el otro autovalor también está en situación crítica (ambos autovalores valen uno), es decir, la bifurcación es de codimensión dos. Ello implica recalcular la forma normal apropiada para esta bifurcación y no se estudiará este caso tan particular debido a su complejidad.

La condición a) se da cuando alguno de los elementos no diagonales de la matriz de pesos se anula, ya que por la ecuación de ligadura que define la bifurcación, dada por

$$|W| = w_{11} + w_{22} - 1$$

y como  $w_{11}=1$ , se deduce que

$$w_{12}w_{21} = 0$$

### Caso particular en que $w_{21}w_{12}$ es cero

En este caso los dos autovalores de la matriz Jacobiana en el punto fijo son:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= w_{11} \\ \mathbf{I}_2 &= w_{22} \end{aligned}$$

Como el punto fijo es el origen los autovalores corresponden a los pesos diagonales. Esto da una idea de la importancia de los pesos diagonales en la determinación de la dinámica como constataremos en secciones posteriores. Formalmente, para calcular el coeficiente de la forma normal es necesario distinguir qué peso diagonal es el que produce la bifurcación, esto es:

- $w_{11}=1$ . Los autovectores  $q$  y  $p$  correspondientes son:

$$q = \{1, 0\}$$

$$p = \left\{ 1, -\frac{w_{12}}{w_{22} - 1} \right\}$$

y el coeficiente que define el sentido de la bifurcación tipo Pitchfork viene dado por:

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = -\frac{1}{3} w_{11}^3 = -\frac{1}{3} \quad (3.10)$$

- $w_{22}=1$ . Los autovectores  $q$  y  $p$  correspondientes son:

$$q = \left\{ -\frac{w_{12}}{w_{11} - 1}, 1 \right\}$$

$$p = \{0, 1\}$$

El coeficiente que define el sentido de la bifurcación tipo Pitchfork viene dado por:

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = -\frac{1}{3} w_{22}^3 = -\frac{1}{3} \quad (3.11)$$

Por tanto, vemos en este caso particular que el coeficiente de la forma normal  $c(0)$  es negativo, un punto fijo estable (el origen) se convierte en un punto fijo de silla (el origen) a la vez que aparecen dos puntos fijos simétricos estables. Esto ocurre si el autovalor no crítico

está dentro del círculo unidad, en caso contrario, un punto fijo de silla (el origen) se convierte en un punto fijo inestable (el origen) a medida que aparecen dos puntos de silla simétricos.

### Bifurcación tipo silla-nodo en un punto fijo distinto del origen

La forma normal estudiada en este caso (véase sección 2.6.2.1) asumía que el punto fijo era el origen, por tanto, es necesario modificarla. Para ello recordemos que

$$u = \langle p, x \rangle$$

y considerando el desarrollo de Taylor de  $\tilde{x}$  en torno al punto fijo  $x_0$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}_0 + A(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0) + F(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0)$$

entonces

$$u(k+1) = u_0 + [1 + \mathbf{I}](u(k) - u_0) + a(0)(u(k) - u_0)^2 + o((u(k) - u_0)^3) \quad (3.12)$$

donde

$$u_0 = \langle p, \mathbf{x}_0 \rangle = x_0 p_1 + y_0 p_2$$

$$\mathbf{I} = \text{autovalor crítico-1}$$

El mapa anterior es topológicamente equivalente a la forma normal tipo silla-nodo estándar.

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{b} + [1 + \mathbf{I}]\mathbf{h}(k) + a(0)\mathbf{h}(k)^2 + o(\mathbf{h}(k)^3) \quad (3.13)$$

donde si se considera que  $w_{21}$  es el parámetro que se varía para atravesar la bifurcación el coeficiente  $\mathbf{b}$  está definido como (véase apéndice B):

$$\mathbf{b}(w_{21}) = |a(0)| \frac{\partial u_0}{\partial w_{21}} (w_{21} - w_{21}^+) + O(|w_{21} - w_{21}^+|^2) \quad (3.14)$$

$w_{21}^+$  corresponde al valor del parámetro en el que se produce la bifurcación. Para determinar adecuadamente la dirección de variación del parámetro  $\mathbf{b}$  es necesario calcular la derivada parcial que aparece en la parte lineal de la expresión anterior.

$$\frac{\partial u_0}{\partial w_{21}} = -\frac{ex_0}{w_{12}w_{21}X_0}$$

El coeficiente  $a(0)$  de la forma normal (3.13) es

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle = \frac{(d^2 y_0 - ew_{12}x_0 Y_0)}{2(e+d)^2 Y_0}$$

La dirección de la bifurcación respecto a la variación de  $w_{21}$  viene dada por el signo del siguiente coeficiente auxiliar:

$$h = a(0) \frac{\partial u_0}{\partial w_{21}} = \frac{-ex_0 (d^2 x_0 - ew_{12}x_0 Y_0)}{2(e+d)^2 w_{12}w_{21}X_0 Y_0} \quad (3.15)$$

donde recordemos que  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $d$ , y  $e$  vienen dadas por las expresiones (3.7.c), (3.7.d), (3.7.a) y (3.7.b), respectivamente.

En el caso de que  $h$  sea positivo el sistema pasa de tener dos puntos fijos (estable e inestable) a no tener ninguno. Ocurre lo contrario cuando  $h$  es negativo (todo ello considerando el autovalor no crítico está dentro del círculo unidad). En caso de estar el autovalor no crítico fuera del círculo unidad, cuando  $h$  es positivo el sistema pasa de tener dos puntos fijos (silla e inestable) a no tener ninguno, y ocurre lo contrario cuando  $h$  es negativo.

El coeficiente  $h$  diverge en el caso de que  $w_{12}w_{21}$  o  $d+e$  se anulen. La segunda situación corresponde a una bifurcación de codimensión dos (ambos autovalores son iguales a uno). En el caso de que  $w_{12}w_{21}$  se anule, calcularemos  $h$  de forma similar a la deducción de la bifurcación anterior.

**Caso particular en que  $w_{21}w_{12}$  es cero**

La ecuación característica asociada a la Jacobiana en el punto fijo  $(x_0, y_0)$  tiene la siguiente expresión:

$$[I - (1 - w_{11}(1 - x_0^2))] [I - (1 - w_{22}(1 - y_0^2))] = 0$$

Por tanto, los dos autovalores dependen de los elementos diagonales de la Jacobiana, esto es:

$$I_1 = w_{11} (1 - x_0^2) \tag{3.16.a}$$

$$I_2 = w_{22} (1 - y_0^2) \tag{3.16.b}$$

Se considera, sin pérdida de generalidad, que  $I_2$  es el autovalor crítico y que  $w_{21}$  se anula. En este caso los autovectores  $p$  y  $q$  son:

$$q = \left\{ -\frac{w_{12} X_0}{d}, 1 \right\}$$

$$p = \{0, 1\}$$

y

$$B(q, q) = -2 \left[ \frac{w_{12}^2 x_0 X_0}{d^2} \right]$$

Por tanto, el coeficiente de la forma normal es

$$a(0) = \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle = -w_{22}^2 y_0 Y_0$$

Al igual que en el caso genérico es necesario determinar la relación entre el parámetro del sistema y el que aparece en la forma normal (3.13). Se considera, por ejemplo, que el parámetro del sistema que varía para atravesar la bifurcación es  $w_{22}$ . El parámetro de la forma normal que define el sentido de variación es

$$\mathbf{b} = |a(0)| \frac{\partial u_0}{\partial w_{22}} (w_{22} - w_{22}^+)$$

Si se considera que  $w_{21}$  es nulo y la ecuación que define los puntos fijos (3.4), entonces

$$\frac{\partial u_0}{\partial w_{22}} = \frac{\partial y_0}{\partial w_{22}} = \frac{\partial \tanh(w_{22} y_0)}{\partial w_{22}} = y_0 (1 - y_0^2) = y_0 Y_0 \quad (3.17)$$

El parámetro auxiliar  $h$  quedaría como

$$h = -w_{22}^2 y_0^2 Y_0^2$$

En este caso este coeficiente es negativo, salvo que  $y_0$  se anule. Esta situación es la que se va a dar cuando analicemos posteriormente las configuraciones dinámicas con algún elemento no diagonal nulo.

### 3.3.2.2 Bifurcación de periodo doble

El procedimiento para calcular el coeficiente de la forma normal es similar al seguido anteriormente. Los autovectores  $p$ ,  $q$  tienen que cumplir ahora que

$$Jq = -q \quad J'p = -p$$

y vienen dados por

$$q = \left\{ \frac{w_{12} X_0}{d}, -1 \right\}$$

$$p = \frac{d}{e + d} \left\{ \frac{e}{w_{12} X_0}, -1 \right\}$$

donde ahora se redefinen  $d$  y  $e$  de la siguiente manera

$$d = w_{11} X_0 + 1$$

$$e = w_{22} Y_0 + 1$$

En esta bifurcación el coeficiente a determinar es algo más complejo, involucrando tanto términos que afectan a la segunda derivada como a la tercera (véase sección 2.6.2.1).

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{2} \langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle \quad (3.18)$$

Al igual que en las bifurcaciones anteriores habría que distinguir dos casos en función de la posición del punto fijo. Si el punto fijo está situado en el origen:

$$B(a, b) \equiv 0$$

y

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = \frac{w_{12}^2 (w_{22} + 1) + (w_{11} + 1)^3}{3(1 + w_{11})^2 (2 + w_{11} + w_{22})}$$

Por otra parte, para los puntos fijos que no estén situados en el origen es necesario calcular el segundo término de la expresión (3.18), debido a que la segunda derivada del mapa es distinta de cero. En este caso  $B(q, q)$  coincide con la fórmula (3.9). Calculemos en primer lugar

$$(A - E)^{-1} B(q, q) = \frac{1}{Y_0 d^2 (d + e - 2)} \left[ w_{12} X_0 \left( (e - 2) w_{12} x_0 Y_0 - d^2 y_0 \right) \right]$$

$$\left[ d^2 (d - 2) y_0 - w_{12}^2 w_{21} x_0 X_0 Y_0^2 \right]$$

Con la ayuda de la expresión anterior podemos calcular el término de  $c(0)$  que involucra las derivadas segundas:

$$\frac{1}{2} \langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle = - \frac{d^3(2e + d - 2)y_0^2 + e(2d + e - 2)w_{12}^2 x_0^2 Y_0^2 + 2ew_{12}d^2 x_0 y_0 Y_0}{Y_0^2 d^2 (d + e - 2)(d + e)}$$

Por otra parte, el término que contiene derivadas terceras queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = - \frac{w_{12}^2 Y_0^2 e(3x_0^2 - 1) + d^3(3y_0^2 - 1)}{3d^2 Y_0^2}$$

Sumando las dos contribuciones anteriores obtenemos la siguiente expresión:

$$c(0) = \frac{3ed(dy_0 + w_{12}x_0Y_0)^2 + (-2 + d + e)(d^3 + ew_{12}^2Y_0^2)}{3d^2Y_0^2(d + e)(-2 + d + e)}$$

Si consideramos la relación de bifurcación dada por

$$|W|X_0Y_0 = -w_{11}X_0 - w_{22}Y_0 - 1$$

que se puede reescribir como

$$(w_{11}X_0 + 1)(w_{22}Y_0 + 1) = w_{12}w_{21}X_0Y_0$$

o teniendo en cuenta las expresiones de  $d$  y  $e$

$$d = \frac{w_{12}w_{21}X_0Y_0}{e}$$

Por tanto, sustituyendo  $d$  en el denominador del coeficiente de la forma normal  $c(0)$

$$c(0) = \frac{3e^3 d(dy_0 + w_{12}x_0 Y_0)^2 + (-2 + d + e)(d^3 + ew_{12}^2 Y_0^2)}{3(w_{12}w_{21})^2 Y_0^4 X_0^2 (d + e)(-2 + d + e)}$$

De nuevo en esta bifurcación se pueden plantear problemas si  $w_{12}w_{21}$  se anula, el resto de los casos que hacen que  $c(0)$  diverja son de nuevo bifurcaciones de codimensión dos.

**Caso particular en que  $w_{21}w_{12}$  es nulo**

Se supone sin pérdida de generalidad que  $I_2$  correspondiente a la ecuación (3.16.b) vale menos uno y el parámetro  $w_{21}$  se anula. En este caso los autovectores  $p$  y  $q$  vienen dados por:

$$q = \left\{ -\frac{w_{12} X_0}{w_{11} X_0 + 1}, 1 \right\}$$

$$p = \{0, 1\}$$

y el coeficiente de la forma tiene la siguiente expresión

$$c(0) = \frac{1}{3Y_0^2} \left\{ 1 - \frac{3y_0^2}{Y_0} \left[ Y_0 - y_0 \left( -1 + \frac{1}{w_{11}X_0} \right)^2 \right] \right\} \tag{3.19}$$

Si el punto fijo es el origen se realizan cálculos similares a los anteriores. Distinguiendo, de nuevo, qué peso diagonal produce la bifurcación:

- $w_{11} = -1$ . Los autovectores  $q$  y  $p$  correspondientes son:

$$q = \{1, 0\}$$

$$p = \left\{ 1, -\frac{w_{12}}{w_{22} + 1} \right\}$$

y el coeficiente que define el sentido de la bifurcación tipo periodo doble viene definido por:

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = -\frac{1}{3} w_{11}^3 = \frac{1}{3} \quad (3.20)$$

- $w_{22} = -1$ . Los autovectores  $q$  y  $p$  correspondientes son:

$$q = \left\{ -\frac{w_{12}}{w_{11} + 1}, 1 \right\}$$

$$p = \{0, 1\}$$

y coeficiente que define el sentido de la bifurcación de periodo doble:

$$c(0) = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle = -\frac{1}{3} w_{22}^3 = \frac{1}{3} \quad (3.21)$$

Como se puede observar los coeficientes de la forma normal son positivos, esto indica que es la bifurcación el origen como punto fijo estable se convierte en un punto fijo de silla mientras que aparece un ciclo dos estable, siempre y cuando el autovalor no crítico esté dentro del círculo unidad. Si no es así, el origen como punto fijo de silla se convierte en un punto fijo inestable y aparece un ciclo dos de silla.

### 3.3.3 Dinámicas en función de los puntos fijos y ciclos

En esta sección se intentarán catalogar diferentes dinámicas, así como las transiciones entre ellas. Las herramientas a utilizar serán el estudio de la caracterización del número y estabilidad de los puntos fijos y ciclos, junto con el análisis de las bifurcaciones hechos anteriormente. Nos restringiremos a establecer como sistemas equivalentes los que tengan el mismo número y estabilidad de puntos fijos y ciclos (descartando las bifurcaciones globales).

#### 3.3.3.1 Resultados previos

En este apartados derivados algunas relaciones que serán empleadas en los siguientes apartados.

El procedimiento para determinar la estabilidad de los puntos fijos consiste en comparar las pendientes de las funciones  $F$  evaluadas en el punto fijo teniendo en cuenta algunas condiciones obtenidas de la consideración de la forma de la función  $F$  (posición relativa de los puntos singulares de  $F$ ) en cada caso. Para ello recordemos las expresiones de las  $F$

$$F(x; w_{11}, w_{12}) = \frac{\operatorname{atanh}(x) - w_{11}x}{w_{12}} \quad (3.22.a)$$

$$F(y; w_{22}, w_{21}) = \frac{\operatorname{atanh}(y) - w_{22}y}{w_{21}} \quad (3.22.b)$$

cuyas pendientes en un punto fijo genérico son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - w_{11}(1 - x^2)}{w_{12}(1 - x^2)} \quad (3.23.a)$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{w_{21}(1 - y^2)}{1 - w_{22}(1 - y^2)} \quad (3.23.b)$$

Construyamos una función como la diferencia de las pendientes anteriores:

$$D_s(W; x, y) = \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{|W|(1 - x^2)(1 - y^2) - [w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1]}{w_{12}(1 - x^2)[1 - w_{22}(1 - y^2)]} \quad (3.24)$$

El numerador nos indica si el punto está por debajo o por encima de la línea que define la bifurcación tipo silla-nodo, como se puede observar en la figura 3.8. Para el análisis dinámico de las posibles configuraciones se tienen en cuenta los signos de  $D_s$ ,  $w_{12}$  y  $1 - w_{22}(1 - y^2)$ . Esto da una primera información para situar, desde un punto de vista dinámico, el punto fijo a tratar.

Conviene también caracterizar los puntos máximos (véase figura 3.5) de las respectivas funciones  $F$ . Éstos tienen que cumplir las ecuaciones:

$$F'(x; w_{11}, w_{12}) = \frac{\frac{1}{(1-x_{máx}^2)} - w_{11}}{w_{12}} = 0 \Rightarrow (1-x_{máx}^2)w_{11} = 1 \quad (3.25.a)$$

y

$$F'(y; w_{22}, w_{21}) = \frac{\frac{1}{(1-y_{máx}^2)} - w_{22}}{w_{21}} = 0 \Rightarrow (1-y_{máx}^2)w_{22} = 1 \quad (3.25.b)$$

Para el análisis de las configuraciones dinámicas plantearemos dos situaciones diferentes, una en que alguno de los pesos no diagonales se anula (sistema parcialmente desacoplado) y el caso general (sistema genérico).

### 3.3.3.2 Clasificación de las configuraciones dinámicas

#### Sistema desacoplado

Se considerará aquí que alguno de los elementos no diagonales de la matriz de pesos es cero. Los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en el punto fijo  $(x_p, y_p)$  tienen las siguientes expresiones:

$$I_1 = w_{11}(1-x_p^2) \quad (3.26.a)$$

$$I_2 = w_{22}(1-y_p^2) \quad (3.26.b)$$

Desde el punto de vista dinámico podemos analizar las dos neuronas como la superposición del comportamiento de una sola neurona. Empecemos con el caso en que los dos elementos no diagonales sean nulos. Las dos neuronas funcionan totalmente desacopladas. Las ecuaciones que definen los puntos fijos vienen dadas por:

$$x_p = \tanh(w_{11}x_p) \quad (3.27.a)$$

$$y_p = \tanh(w_{22}y_p) \quad (3.27.b)$$

Distingamos ahora dos situaciones en función de que  $w_{11}$  y  $w_{22}$  sean ambos mayores que  $-1$  o no. En el primer caso podemos distinguir tres posibilidades correspondientes a cuatro combinaciones:

- $-1 < w_{11} < 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . Existe un punto fijo estable en el origen, debido a que  $I_1$  y  $I_2$  son menores que la unidad. Esta situación se observa en la figura 3.9 (a).
- $-1 < w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ . Para la coordenada  $x$  sólo  $x=0$  cumple la ecuación (3.27.a). Por el contrario, en la coordenada  $y$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.27.b), estos son:  $\pm y_0$  y  $0$ . Componiendo las dos coordenadas existen tres puntos fijos situados en  $(0, y_0)$ ,  $(0, -y_0)$  y  $(0, 0)$ , los dos primeros son estables y el tercero es de silla. Dicha situación se observa en la figura 3.9 (b).
- $w_{11} > 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . Esta situación es similar a la anterior intercambiando el papel de las dos coordenadas del espacio fásico.
- $w_{11} > 1$  y  $w_{22} > 1$ . Para la coordenada  $x$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.27.a), que son:  $\pm x_0$  y  $0$ . En la coordenada  $y$  también existen tres valores que cumplen la ecuación (3.27.b):  $\pm y_0$  y  $0$ . Componiendo las coordenadas de los puntos fijos se encuentra que existe un punto fijo inestable en  $(0, 0)$ , cuatro puntos fijos estables situados en  $(\pm x_0, \pm y_0)$ , y cuatro puntos de silla situados en  $(\pm x_0, 0)$  y  $(0, \pm y_0)$ . Esto se puede observar en la figura 3.9 (c).

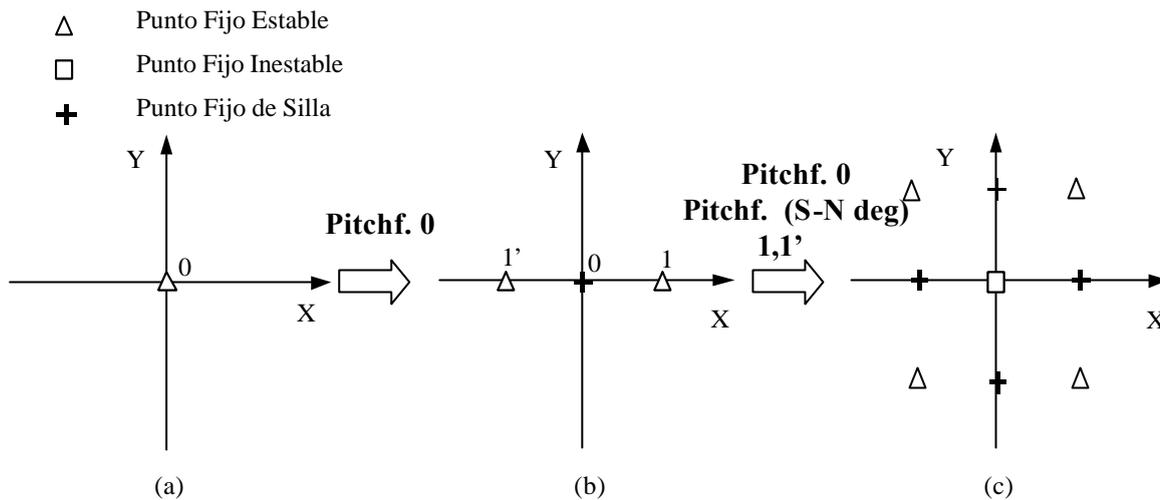


Figura 3.9. Dinámicas posibles cuando los elementos diagonales de la matriz de pesos son cero y los elementos diagonales son positivos, a)  $-1 < w_{11} < 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ , b)  $w_{11} > 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$  y c)  $w_{11} > 1$  y  $w_{22} > 1$ .

En la figura anterior también se puede observar el tipo de bifurcación que se produce entre las diferentes configuraciones. En la transición de la figura 3.9.a y 3.9.b se produce una bifurcación tipo Pitchfork asociada al origen. En este caso el coeficiente de la forma normal es negativo, heredado del de una neurona (véase ecuación (3.2)). Por otra parte, el autovalor no crítico  $\lambda_2$ , que coincide con  $w_{22}$ , es en magnitud menor que la unidad. En la transición entre la figura 3.9.b y 3.9.c, se produce la misma bifurcación Pitchfork en el origen y dos bifurcaciones silla-nodo asociadas con los puntos extremos 1 y 1'. En cuanto al signo del coeficiente de la forma normal de la Pitchfork sigue siendo negativo. Para determinar la forma normal asociada a la bifurcación silla-nodo se puede considerar el mismo desarrollo de Taylor (3.1), pero sobre la coordenada  $y$ . Como  $y_0$  es nulo, el segundo término del desarrollo de Taylor se anula, y por tanto, se deduce que la bifurcación tipo silla-nodo se convierte en tipo Pitchfork con coeficiente de la forma normal negativo (véase 2.6.1.2). El autovalor no crítico es mayor que 1, en el caso de la Pitchfork asociada al origen ( $\lambda_1 = w_{11} > 1$ ) y los autovalores asociados a las bifurcaciones Pitchfork de los puntos fijos extremos son menores que 1 ( $\lambda_1 = w_{11}(1 - x_0^2) < 1$ ).

Por otro lado, existe la posibilidad que uno de los pesos sea menor que  $-1$ , la diferencia respecto al caso anterior es que aparecen ciclos dos. Sin pérdida de generalidad

vamos a suponer que  $w_{11} < -1$ . Para la coordenada  $x$  existe un valor que cumple la ecuación (3.27.a) correspondiente a 0 ( $I_1 > 1$ ), y otros dos valores  $\pm x_0$  correspondientes a las coordenadas del ciclo dos que aparece en el caso de una sola neurona. Para analizar qué ocurre en la coordenada  $y$  es necesario plantear tres situaciones que se relacionan con tres rangos de variación de  $w_{22}$ . Estos son:

- $w_{11} < -1$  y  $w_{22} < -1$ . En la coordenada  $y$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.27.b); 0 ( $I_2 > 1$ ), y un ciclo dos monodimensional situado en  $\pm y_0$ . Combinando todas las coordenadas se determina que existe un punto fijo (0, 0) inestable, dos ciclos dos de silla situados en  $(\pm x_0, 0)$  y  $(0, \pm y_0)$ , y dos ciclos dos estables situados en  $(x_0, y_0)$ ,  $(-x_0, -y_0)$  y en  $(-x_0, y_0)$ ,  $(x_0, -y_0)$ . Esta configuración se puede observar en la figura 3.10 (a).
- $w_{11} < -1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . En la coordenada  $y$  sólo el 0 cumple la ecuación (3.27.b), por tanto existe un ciclo dos estable situado en  $(\pm x_0, 0)$  y un punto de silla en (0, 0). Esto se observa en la figura 3.10 (b).
- $w_{11} < -1$  y  $w_{22} > 1$ . En la coordenada  $y$  también existen tres valores que cumplen la ecuación (3.27.b):  $\pm y_0$  y 0. En esta situación existe un punto fijo inestable en (0, 0), un ciclo dos de silla en  $(\pm x_0, 0)$ , dos puntos fijos de silla en  $(0, \pm y_0)$ , y dos ciclos estables situados en  $(\pm x_0, -y_0)$  y  $(\pm x_0, y_0)$ . Esta situación se puede observar en la figura 3.10.

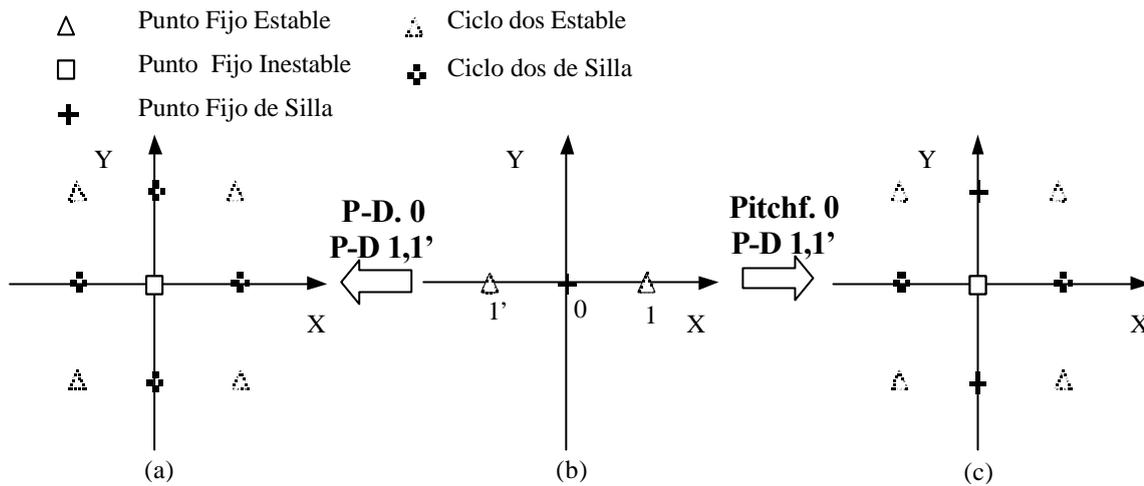


Figura 3.10. Dinámicas posibles cuando los elementos diagonales de la matriz de pesos son cero y los elementos diagonales son positivos. a)  $w_{11} < -1$  y  $w_{22} < -1$ , b)  $w_{11} < -1$  y  $-1 < w_{22} < 1$  y c)  $w_{11} < -1$  y  $w_{22} > 1$ .

En las anteriores figuras podemos analizar las bifurcaciones que aparecen. En el caso de la transición entre la figura 3.10.b y 3.10.a, se producen tres bifurcaciones de periodo doble, cuyos coeficientes asociados a las formas normales son positivos (véase ecuación 3.21). El autovalor no crítico es, en magnitud, menor que 1, en el caso de los puntos fijos extremos, y mayor, en el caso del origen. Por otro lado, la diferencia de la transición entre la figura 3.10.b y 3.10.c respecto a la anterior es que aparece una bifurcación Pitchfork asociada al origen en lugar de la bifurcación periodo doble. El coeficiente de la forma normal de la bifurcación Pitchfork es negativo y el autovalor no crítico es en magnitud mayor a la unidad.

Supongamos que algún elemento no diagonal es distinto de cero. Consideremos, sin pérdida de generalidad, que  $w_{21}$  es nulo y  $w_{12}$  positivo. La ecuación de puntos fijos queda como:

$$x_p = \tanh(w_{11}x_p + w_{12}y_p) \quad (3.28.a)$$

$$y_p = \tanh(w_{22}y_p) \quad (3.28.b)$$

La expresión de los autovalores coincide con los de la ecuación (3.26.a) y (3.26.b).

De la ecuación anterior vemos que no existe influencia de la coordenada  $x$  en la determinación de la ecuación de punto fijo correspondiente a la coordenada  $y$ . Los puntos fijos coinciden con las intersecciones de las curvas  $F$ . En esta situación la función  $F(x; w_{11}, w_{21})$  degenera en una recta horizontal  $y=y_p$ , donde  $y_p$  son las ordenadas de los diferentes puntos fijos. Si se considera que los pesos diagonales son mayores que  $-1$ , se pueden plantear cuatro casos. Estos son:

- $-1 < w_{11} < 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . Existe un único punto fijo estable situado en el origen, debido a que sólo existe un punto de intersección de las curvas  $F$ , como se observa en la siguiente figura.

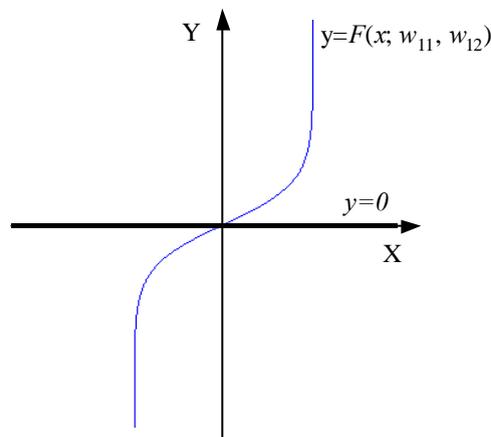


Figura 3.11. Intersección de las curvas que definen los puntos fijos con  $w_{21}$  igual a cero,  $w_{12}$  positivo,  $-1 < w_{11} < 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ .

- $-1 < w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ . Respecto a la coordenada  $y$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.28.b):  $\pm y_0$  ( $I_2 < 1$ ) y  $0$  ( $I_2 > 1$ ). Como se puede observar en la figura 3.12 correspondiente a las intersecciones, existe un punto de silla situado en  $0$ , y dos puntos estables (véase ecuación (3.23.a) correspondiente de la pendiente de  $F(x; w_{11}, w_{12})$ ) situados en  $(x_0, y_0)$  y  $(-x_0, -y_0)$ .

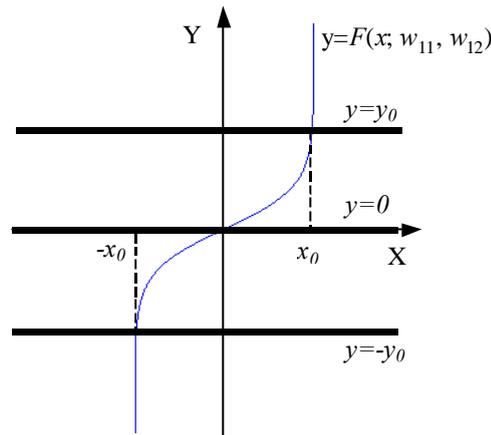


Figura 3.12. Intersección de las curvas que definen los puntos fijos con  $w_{21}$  igual a cero,  $w_{12}$  positivo,  $-1 < w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ .

- $w_{11} > 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . Respecto a la coordenada  $y$  existe un solo valor 0 ( $I_2 < 1$ ). Como se ve en la figura 3.13 existe un punto de silla situado en 0, y dos puntos estables situados en  $(\pm x_0, 0)$  (son estables debido a que  $w_{11}(1 - x_0^2) < w_{11}(1 - x_m^2) = 1$ ).

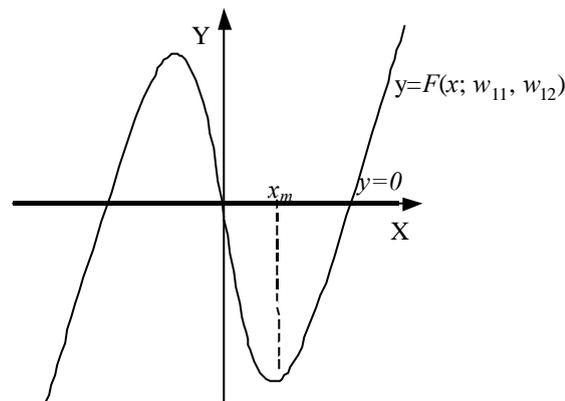


Figura 3.13. Intersección de las curvas que definen los puntos fijos con  $w_{21}$  igual a cero,  $w_{12}$  positivo,  $w_{11} > 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ .

- $w_{11} > 1$  y  $w_{22} > 1$ . Respecto a la coordenada  $y$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.28.b):  $\pm y_0$  ( $I_2 < 1$ ) y 0 ( $I_2 > 1$ ). Como se ve en la figura 3.14 existe un punto fijo inestable situado en  $(0, 0)$ , dos puntos de silla en  $(\pm x_2, 0)$ , cuatro puntos estables  $(x_1, -y_0)$ ,  $(-x_1, y_0)$ ,  $(x_3, y_0)$  y  $(-x_3, -y_0)$ , dos puntos fijos de silla  $(x_0, y_0)$ ,  $(-x_0, -y_0)$  (son de silla debido a que  $w_{11}(1 - x_0^2) > w_{11}(1 - x_m^2) = 1$ ).

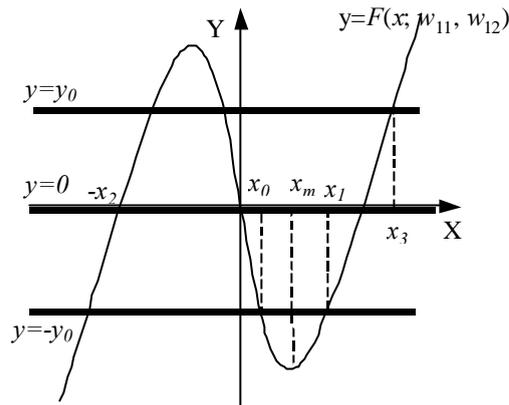


Figura 3.14. Intersección de las curvas que definen los puntos fijos con  $w_{21}$  igual a cero,  $w_{12}$  positivo,  $w_{11}>1$  y  $w_{22}>1$ .

En la figura siguiente se resumen las cuatro configuraciones dinámicas.

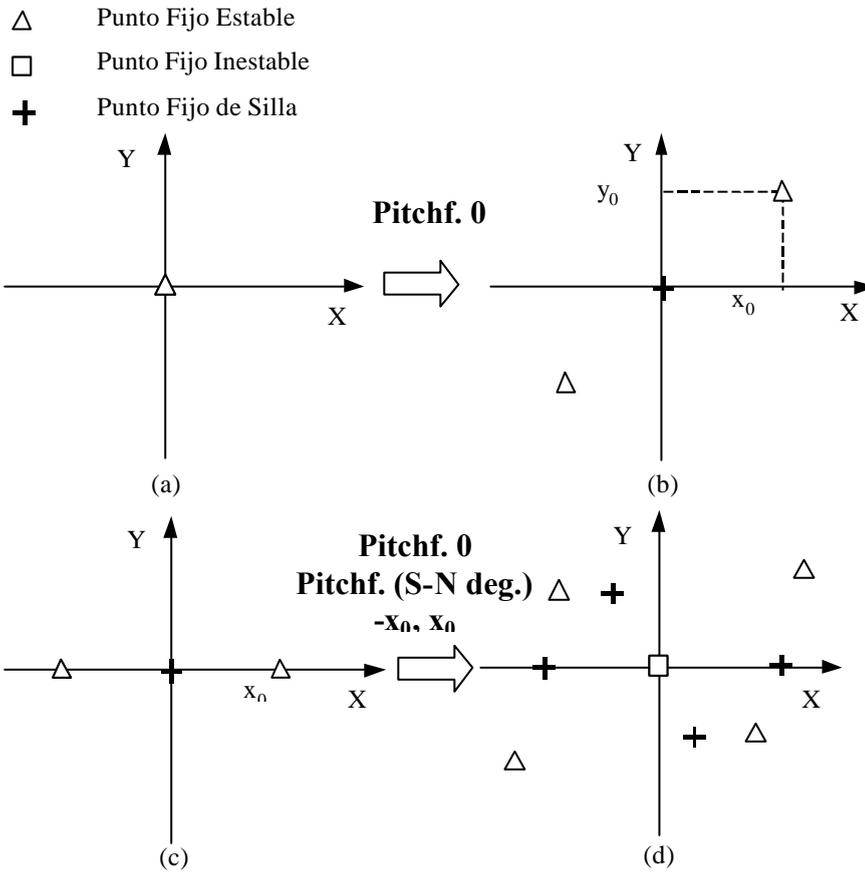


Figura 3.15. Configuración de las posibles dinámicas con  $w_{21}$  igual a cero,  $w_{12}$  positivo, a)  $-1 < w_{11} < 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ , b)  $-1 < w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ , c)  $w_{11} > 1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ , d)  $w_{11} > 1$  y  $w_{22} > 1$ .

En las anteriores figuras podemos analizar las bifurcaciones que aparecen. En el caso de la transición entre la figura 3.10.b y 3.10.a, se produce una bifurcación Pitchfork en punto fijo del origen, cuyo coeficiente asociado a la forma normal es negativo, como se observa en la ecuación (3.10) y (3.11). El autovalor no crítico es menor a la unidad en magnitud ( $\lambda_1 = w_{11} < 1$ ). Por otro lado, en la transición entre la figura 3.10.b y 3.10.c se produce la misma bifurcación Pitchfork, pero en este caso el autovalor no crítico es mayor en magnitud a la unidad. A priori, se debe de producir una bifurcación silla-nodo en los puntos fijos extremos. Analicemos con más detalle esta bifurcación. Como vimos en la ecuación (3.12) el mapa asociada a la coordenada de la variedad central en la bifurcación silla-nodo está definido como:

$$u(k+1) = u_0 + [1 + \mathbf{I}](u(k) - u_0) + a(0)(u(k) - u_0)^2 + o((u(k) - u_0)^3) \quad (3.29)$$

pero en este caso,

$$\begin{aligned} u_0 &= \langle x, p \rangle = 0 \\ a(0) &= -w_{22}^2 y_0 Y_0 = 0 \end{aligned}$$

por tanto, la bifurcación degenera a una bifurcación tipo Pitchfork, de tal forma que (3.29) queda como:

$$u(k+1) = [1 + \mathbf{I}(w_{12})]u(k) + c(0)u^3(k) + o(u^4(k))$$

donde

$$\begin{aligned} c(0) &= \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle - \frac{1}{2} \langle p, B(q, (A - E)^{-1} B(q, q)) \rangle \\ &= -\frac{1}{3} w_{22}^3 Y_0 (-1 + 3y_0^2) \\ &= -\frac{1}{3} w_{22}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso el coeficiente asociado a la forma normal de la bifurcación Pitchfork es negativo. Por otra parte, el autovalor no crítico es menor a la unidad ( $\lambda_1 = w_{11}(1 - x_0^2) < 1$ ). Esto indica que, a medida que aumenta  $w_{22}$ , un punto fijo estable se convierte en un punto fijo de silla, apareciendo dos puntos fijos, estable y silla, respectivamente.

Podemos plantearnos, como se hizo en el caso anterior, qué ocurre cuando los pesos diagonales son menores que -1. Esto produce bifurcaciones de tipo periodo doble. Planteemos los cuatro casos posibles:

- $1 < w_{11} < 1$  y  $w_{22} < -1$ . Existe un único punto fijo de silla situado en el origen, debido a que sólo hay un punto de intersección como se puede observar en la figura 3.16. Para llegar a este caso se puede partir de la configuración a) y disminuir  $w_{22}$  pasando por  $-1$ , con lo cual se produce una bifurcación de periodo doble asociada al punto fijo correspondiente al origen. Como se vio en las ecuaciones (3.20) y (3.21) el coeficiente asociado a la forma normal es positivo y el autovalor no crítico es de magnitud menor a la unidad. Por tanto, aparece un periodo dos estable. Esto se puede observar en la siguiente figura.

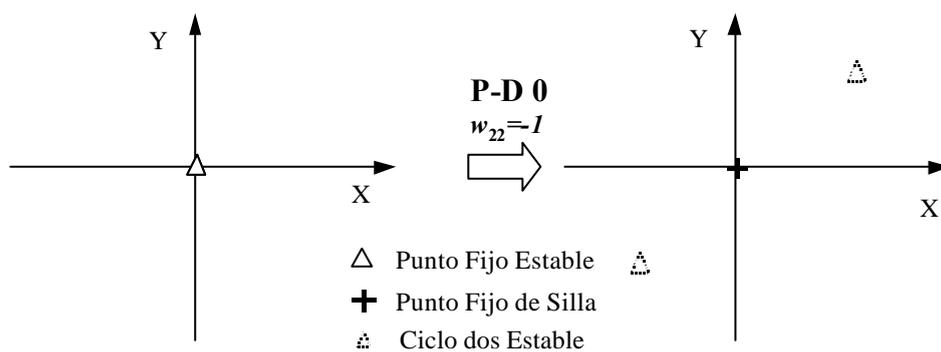


Figura 3.16. Dinámica antes de la bifurcación y después siendo la figura de la derecha la situación descrita en este apartado.

- $w_{11} > 1$  y  $w_{22} < -1$ . Respecto a la coordenada  $y$  existe un solo valor 0 ( $I_2 < 1$ ). Como se ve en la figura 3.17 existe un punto fijo inestable en 0, y dos de silla situados en  $(\pm x_0,$

0). Al igual que el caso anterior se llega a esta configuración partiendo de la situación c) disminuyendo  $w_{22}$ . La diferencia es que en este caso se producen tres bifurcaciones de periodo doble correspondientes a los tres puntos fijos. El origen, como los otros dos puntos fijos, tiene el coeficiente de la forma normal positivo (véase ecuaciones (3.19) considerando  $y_0$  es nulo, (3.20) y (3.21)). La diferencia estriba en que el autovalor no crítico es mayor en magnitud que la unidad en la bifurcación asociada al origen, y, por tanto, aparece un ciclo dos de silla. En los otros dos puntos fijos ocurre lo contrario y aparecen dos ciclos dos estables.

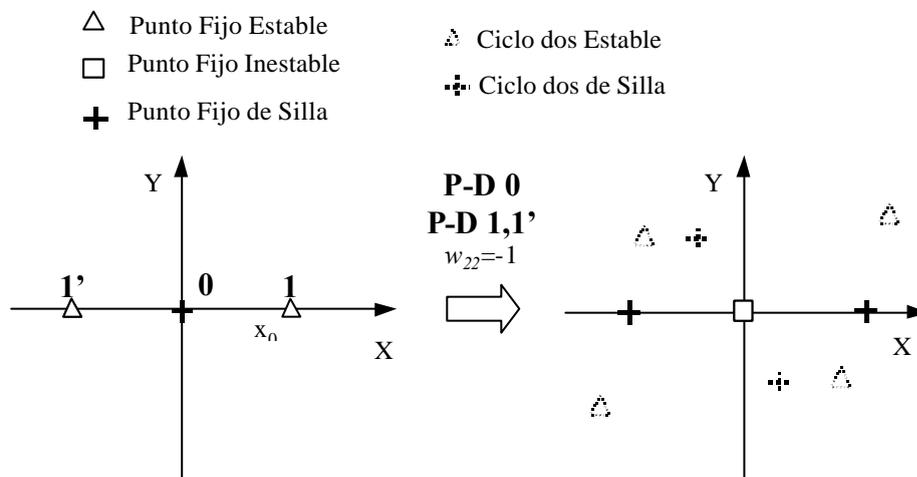


Figura 3.17. Dinámica antes de la bifurcación y después siendo la figura de la derecha la situación descrita en este apartado.

- $w_{11} < -1$  y  $-1 < w_{22} < 1$ . Este caso es análogo al expuesto en el apartado e).
- $w_{11} < -1$  y  $w_{22} > 1$ . Respecto a la coordenada  $y$  existen tres valores que cumplen la ecuación (3.28.b):  $\pm y_0$  ( $I_2 < 1$ ) y  $0$  ( $I_2 > 1$ ). Las intersecciones son similares al caso b) anterior figura 3.18. Existe un punto inestable situado en  $0$ , y dos puntos estables:  $(x_0, y_0)$  y  $(-x_0, -y_0)$ . En este caso se produce una bifurcación de periodo doble en el origen si consideramos como situación de partida la descrita en b) y variamos  $w_{11}$ . Al igual que antes el coeficiente de la forma normal es positivo, y el autovalor no crítico es en

magnitud mayor que uno, por tanto, aparece un ciclo dos de silla. En la siguiente figura se puede observar dicha transición.

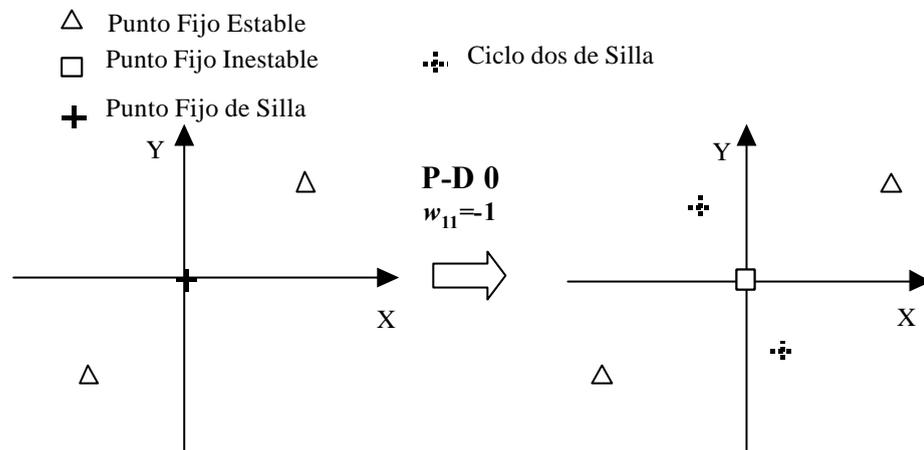


Figura 3.18 Dinámica antes de la bifurcación y después siendo la figura de la derecha la situación descrita en este apartado.

- $w_{11} < -1$  y  $w_{22} < -1$ . En esta situación existe un único punto fijo correspondiente al origen, siendo éste inestable. Podemos llegar a esta situación partiendo de la descrita por e). En este caso se produce una bifurcación de periodo doble asociada al origen. El coeficiente de la forma normal es positivo y el autovalor no crítico es, en magnitud, mayor que la unidad, y por tanto, aparece un ciclo dos de silla. La situación es la descrita a continuación.

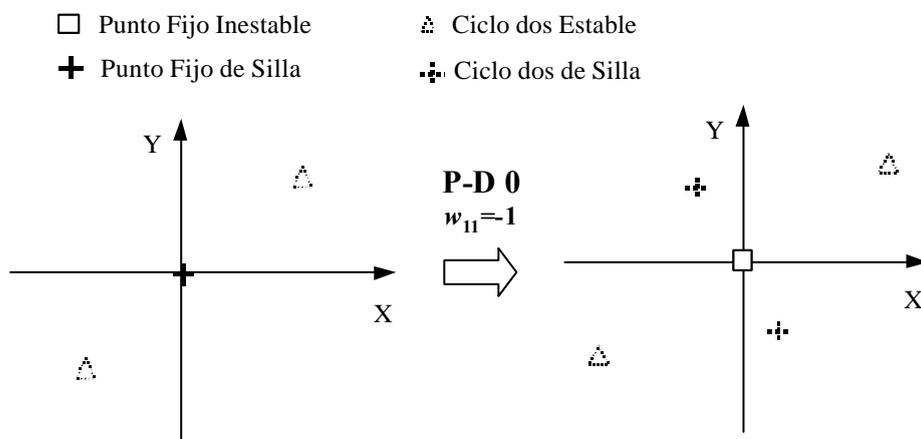


Figura 3.19. Dinámica antes y después de la bifurcación. La figura de la derecha es la situación descrita en este apartado.

### Sistema genérico

En este apartado se establecerán distintas posibles dinámicas sin considerar ninguna restricción en los pesos. Se combina el análisis del número de puntos fijos con las condiciones de estabilidad dadas anteriormente. Se tratarán por separado los casos en los que ambos pesos sean mayores que la unidad (Caso 1), ambos menores que la unidad (Caso 2) y que sea uno mayor que la unidad y el otro menor (Caso 3).

#### Caso 1

En este caso consideremos que

$$\begin{cases} w_{11} > 1 \\ w_{22} > 1 \end{cases}$$

Podemos distinguir dos situaciones atendiendo a las formas de las posibles intersecciones de las curvas  $F$ , esto es, que el producto de los elementos no diagonales sea positivo o negativo. Comencemos suponiendo que el producto es positivo.

En la figura 3.20 se pueden observar las intersecciones posibles cuando  $w_{12} > 0$  y  $w_{21} > 0$  (los resultados posteriores son similares si  $w_{12} < 0$  y  $w_{21} < 0$ ). Las distintas posibilidades son 9, 7, 5 ó 3 puntos fijos.

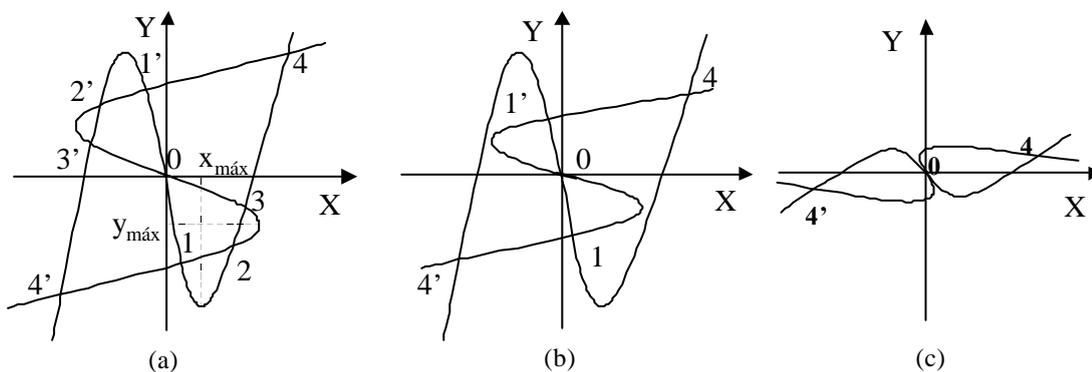


Figura 3.20. Configuración de las curvas dadas por las ecuaciones (3.22) con  $w_{11} > 1$ ,  $w_{22} > 1$ ,  $w_{12} > 0$  y  $w_{21} > 0$ . a) nueve puntos fijos, b) 5 puntos fijos, c) 3 puntos fijos.

Tanto en la situación mostrada en la figura 3.20 (a) como en la 3.20 (b)  $D_s$  (véase ecuación (3.24)) evaluado en el origen está dado por

$$D_s(W;0,0) = \frac{|W| -(w_{11} + w_{22} - 1)}{w_{12}(1 - w_{22})} \quad (3.30)$$

y es negativo. Por otra parte, como  $w_{12}$  es positivo y  $(1-w_{22})$  es negativo, se tiene que

$$w_{11} + w_{22} - 1 < |W|$$

Los elementos diagonales son mayores de la unidad, por tanto, a partir de la anterior expresión se deduce que el determinante de la matriz de pesos es mayor que la unidad. Esto nos indica que el punto fijo 0 es inestable. Esto será así mientras se mantenga el signo de  $D_s(W; 0, 0)$  (véase figura 3.7).

Por otro lado, existe una simetría tanto respecto a la posición de los puntos fijos como a la estabilidad. Esto último se debe a que la ecuación de autovalores es invariante respecto a cambios de signo en las coordenadas de los puntos fijos. Basándonos en esto, sólo es necesario analizar los puntos sin tilde que aparecen en la figura 3.20. Para ello agrupemos los puntos de la figura 3.20 como 1 y 3, por un lado, y por otro, 2 y 4. A continuación se analizará la estabilidad.

- **1 y 3.** Planteemos la estabilidad del punto 1. Considerando que el signo de  $D_s$  es negativo en dicho punto:

$$D_s(W; x, y) = \frac{|W|(1-x^2)(1-y^2) - [w_{11}(1-x^2) + w_{22}(1-y^2) - 1]}{w_{12}(1-x^2)[1-w_{22}(1-y^2)]} < 0$$

además como  $y > y_{\text{máx}}$  (véase figura 3.20.a) y considerando la expresión (3.26.b)

$$w_{22}(1 - y^2) < w_{22}(1 - y_{\max}^2) = 1 \quad (3.31)$$

y como  $w_{12}$  es positivo

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1 > |W| (1 - x^2)(1 - y^2)$$

por otra parte

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) > 0$$

y como  $|W|$ ,  $w_{11}$  y  $w_{22}$  son positivos, entonces

$$-w_{11}(1 - x^2) - w_{22}(1 - y^2) - 1 < |W| (1 - x^2)(1 - y^2)$$

Con las relaciones anteriores se concluye que los dos puntos son de **silla** (véase figura 3.8). De forma análoga se puede deducir que el punto 3 es también de silla.

- **2 y 4** considerando que el signo de  $D_s(W; x, y)$ , dado por 3.24, es positivo, que  $w_{12}$  es positivo y

$$w_{22}(1 - y_0^2) < w_{22}(1 - y_{\max}^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_{22}(1 - y_0^2) < 1$$

entonces

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1 < |W| (1 - x^2)(1 - y^2) \quad (3.32)$$

por otro lado,  $w_{11}(1 - x_0^2)$  es menor que la unidad, ya que

$$w_{11}(1 - x_0^2) < w_{11}(1 - x_{\max}^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_{11}(1 - x_0^2) < 1$$

por tanto

$$0 < w_{11}(1-x^2) + w_{22}(1-y^2) < 2 \quad (3.33.a)$$

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) < \frac{|W|}{w_{11}w_{22}} < 1 \quad (3.33.b)$$

Considerando las relaciones (3.32), (3.33.a) y (3.33.b) (véase figura 3.7) se concluye que los dos puntos son **estables**.

Como se ha visto, los puntos 2 y 3 son estable y de silla, respectivamente, y están relacionados con una bifurcación tipo silla-nodo. La situación posterior a la bifurcación corresponde a la figura 3.20.b. Justo en la situación de la bifurcación las pendientes de  $F$  son iguales, esto es,  $D_s(W; x, y)$ , dado por la ecuación (3.24), se anula y, por tanto, se cumple la condición de ligadura correspondiente a la bifurcación mencionada:

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) = w_{11}(1-x^2) + w_{21}(1-y^2) - 1$$

Analicemos la dirección de dicha bifurcación. Consideremos que al variar el parámetro  $w_{21}$  y dejar constantes el resto de pesos se consigue atravesar la bifurcación. La relación existente entre el sentido de variación de  $w_{21}$  y del coeficiente correspondiente a la forma normal (3.13) viene dada por:

$$\frac{\partial u_0}{\partial w_{21}} = -\frac{ex_0}{w_{12}w_{21}X_0} \quad (3.34)$$

Por otra parte, el coeficiente  $a(0)$  asociado a la forma normal viene dado como

$$a(0) = \frac{(d^2 y_0 - ew_{12}x_0 Y_0)}{(e+d)^2 Y_0}$$

donde

$$\begin{aligned}
 X_0 &= 1 - x_0^2 \\
 Y_0 &= 1 - y_0^2 \\
 d &= w_{11}X_0 - 1 \\
 e &= w_{22}Y_0 - 1
 \end{aligned}$$

Para determinar si el autovalor no crítico es menor o mayor que 1 en magnitud es necesario determinar el signo de  $d$  y  $e$  considerando la relación entre los máximos de las funciones  $F$  y las coordenadas correspondientes al punto fijo en la situación de bifurcación (figura 3.21). Esto es,

$$\begin{aligned}
 w_{11}X_0 < w_{11}(1 - x_{\max}^2) = 1 &\Rightarrow d = w_{11}X_0 - 1 < 0 \\
 w_{22}Y_0 < w_{22}(1 - y_{\max}^2) = 1 &\Rightarrow e = w_{22}Y_0 - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 d &= w_{11}X_0 - 1 > -1 \\
 e &= w_{22}Y_0 - 1 > -1
 \end{aligned}$$

Luego

$$-2 < d + e < 0$$

Se puede observar en la figura 3.8 que esta condición corresponde a que el autovalor no crítico sea menor que la unidad en magnitud.

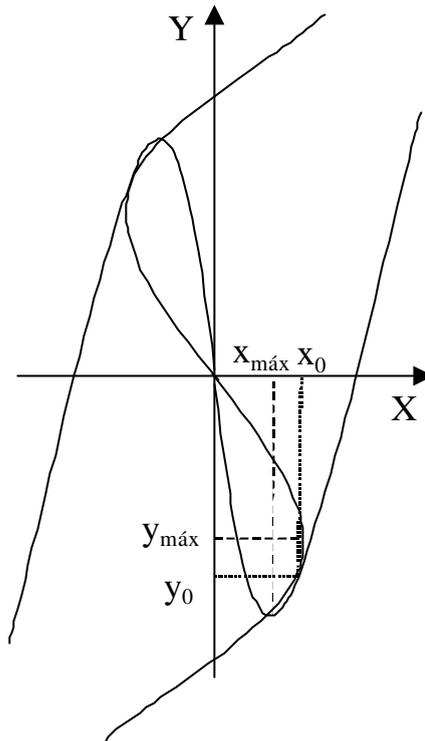


Figura 3.21. Situación límite correspondiente a la bifurcación silla nodo.

La expresión (3.34) es positiva, ya que el parámetro  $e$  es negativo y el producto de pesos no diagonales es positivo. Por tanto, en esta situación ocurre que  $a(0)$  es negativo, y la dirección de variación del parámetro que aparece en la forma normal es la misma que  $w_{21}$ , con lo cual se concluye que a medida que  $w_{21}$  aumenta respecto al parámetro crítico  $w_{21}^*$  (valor de  $w_{21}$  donde se produce la bifurcación) el punto fijo de silla y el punto fijo estable desaparecen. Esta última configuración corresponde a la figura 3.20.b, donde el punto 0 es inestable, el 1 y 1' son de silla, y los puntos 4 y 4' son estables.

En cuanto a la situación descrita por la figura 3.20.c, existen tres intersecciones correspondientes a tres puntos fijos. El único que cambia su estabilidad es el origen, debido a que  $D_s(W;0,0)$  cambia de signo, pasando de ser negativo (figura 3.20.b) a positivo (figura 3.20.c). Por tanto, considerando, además, que  $w_{12}$  es positivo y que  $w_{22}$  es mayor que uno, entonces:

$$w_{11} + w_{22} - 1 > |W|$$

Cuando se pasa de la configuración dinámica correspondiente a la figura 3.20.b a la actualmente mencionada, figura 3.20.c, se produce una bifurcación tipo Pitchfork asociada al punto fijo origen. La dirección de la bifurcación viene dada por el coeficiente asociado a la forma normal, esto es:

$$c(0) = \frac{w_{12}^2(w_{22} - 1) + (w_{11} - 1)^3}{3(1 - w_{11})^2(2 - w_{11} - w_{22})} < 0$$

Este coeficiente es negativo, ya que  $w_{11}$  y  $w_{22}$  son mayores que 1. Por otra parte, el autovalor no crítico es mayor que la unidad debido a que la suma de los pesos diagonales son mayores que dos (véase figura 3.8). Por tanto, un punto de silla y un punto inestable se convierten en un punto fijo de silla a medida que se atraviesa la bifurcación.

Dentro de la configuración de tres intersecciones (véase figura 3.20.c), el origen puede ser un punto de silla o inestable, en función de que se cumpla la siguiente relación o no.

$$-w_{11} - w_{22} - 1 < |W|$$

Cuando el origen pasa de inestable a punto de silla la relación anterior se convierte en una igualdad, y por tanto, se produce una bifurcación de periodo doble (véase figura 3.7).

La dirección de la bifurcación viene definida por el signo del coeficiente de la forma normal, dado por:

$$c(0) = \frac{w_{12}^2(w_{22} + 1) + (w_{11} + 1)^3}{3(1 + w_{11})^2(2 + w_{11} + w_{22})} > 0$$

Éste es positivo, ya que los pesos diagonales son mayores que 1. Por otra parte, el autovalor no crítico es mayor que 1, debido a que la suma de los pesos diagonales es positiva (véase figura 3.8). Por tanto, a medida que el origen pasa de silla a inestable aparece un ciclo dos tipo silla.

En la siguiente figura se recopilan las diferentes configuraciones del caso 1 señalando las bifurcaciones que se producen en las transiciones de las dinámicas.

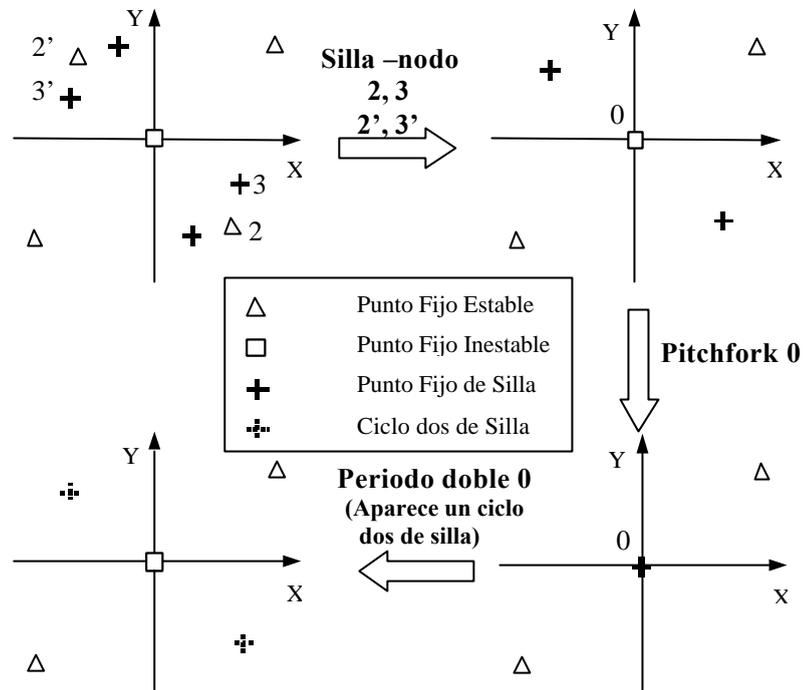


Figura 3.22. Configuraciones dinámicas en el caso  $w_{11} > 1, w_{22} > 1, w_{12} w_{21} > 0$ .

Cuando los signos de los elementos no diagonales son distintos la forma de corte entre las curvas  $F$  es diferente. El número de cortes posibles es 9, 7, 5 y 1, como se puede observar en la siguiente figura.

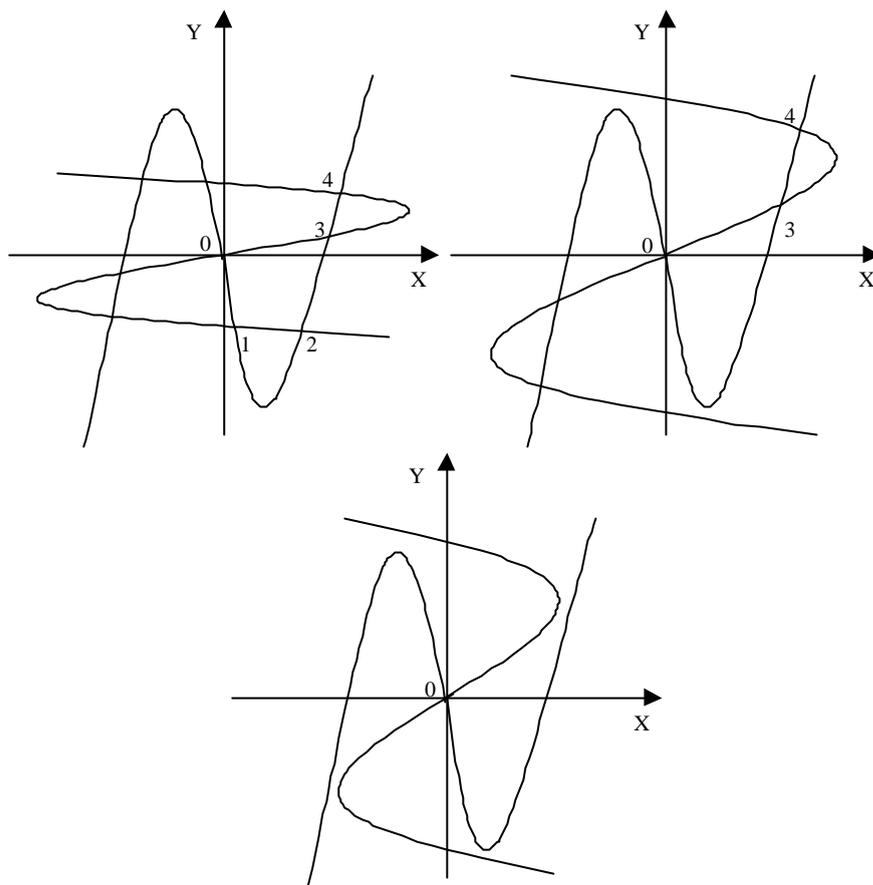


Figura 3.23. Diferentes posibilidades de cortes de  $F$  cuando  $w_{11} > 1$  y  $w_{22} > 1$ .

En esta situación, de forma similar a la anterior, se puede demostrar que el punto 0 es inestable, el 1 y el 3 son puntos de silla, y finalmente los puntos 2 y 4 son estables. Para pasar de una configuración a otra se producen bifurcaciones de tipo silla-nodo al igual que en el caso anterior. Se puede demostrar, igualmente, que el punto fijo correspondiente al origen siempre es inestable.

### Caso 2

En este caso, consideremos que

$$\begin{cases} w_{11} < 1 \\ w_{22} < 1 \end{cases}$$

Las posibilidades respecto al número de puntos fijos son dos: que existan tres puntos fijos o un punto fijo, esto dependerá del signo de  $D_s(W; 0, 0)$  dado por la ecuación (3.30). Observemos en la siguiente figura las dos posibilidades respecto al número de intersecciones.

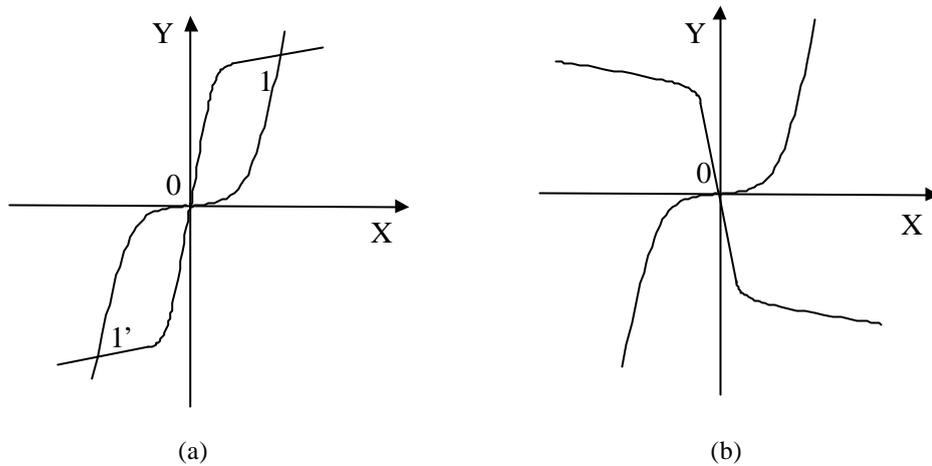


Figura 3.24. Situación de los puntos fijos cuando ambos pesos diagonales son menores que la unidad.a) una intersección, b) tres intersecciones.

En la situación en que existen tres cortes se deduce que  $D_s(W;0,0)$  es negativo, y al ser  $w_{12}$  positivo y  $w_{22}$  menor a la unidad, se cumple que:

$$w_{11} + w_{22} - 1 > |W| \tag{3.35}$$

por otra parte, como

$$w_{11} + w_{22} < 2 \tag{3.36}$$

entonces teniendo en cuenta la relación (3.35)

$$|W| < 1 \tag{3.37}$$

Por tanto, como se puede apreciar en la figura 3.25 donde se visualiza el lugar geométrico de las tres relaciones anteriores (3.35), (3.36) y (3.37), el origen puede ser un punto de silla o inestable en función de que se den las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} |W| > -w_{11} - w_{22} - 1 &\Rightarrow \text{punto fijo silla} \\ |W| < -w_{11} - w_{22} - 1 &\Rightarrow \text{punto fijo inestable} \end{aligned}$$

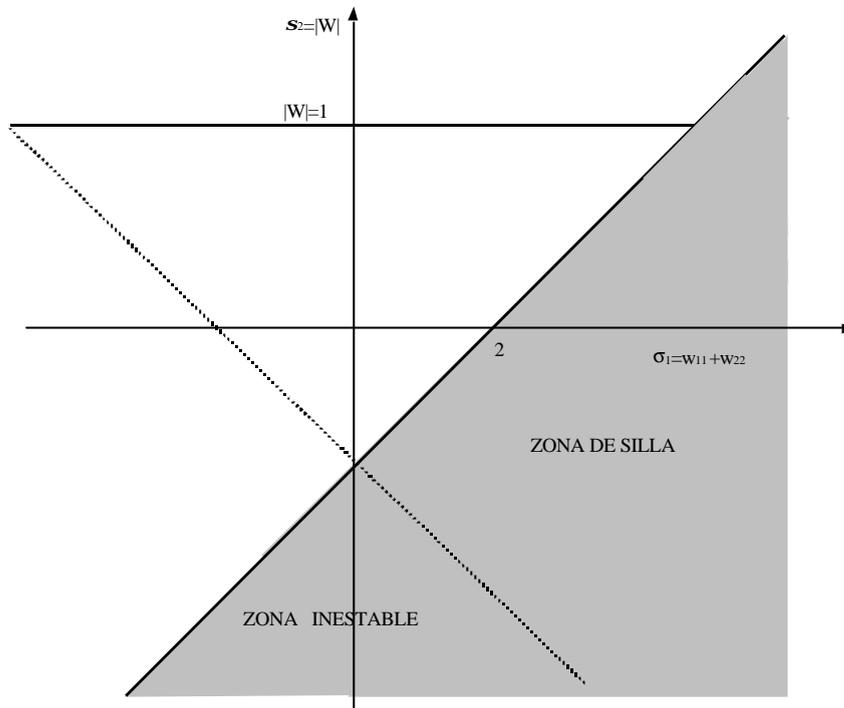


Figura 3.25. Lugar geométrico donde está situado el origen cuando ambos pesos diagonales son menores que la unidad (tres intersecciones).

Viendo las anteriores expresiones, el origen pasa de silla a inestable atravesando una bifurcación de periodo doble. El coeficiente asociado a la forma normal es:

$$c(0) = \frac{w_{12}^2 (w_{22} + 1) + (w_{11} + 1)^3}{3(1 + w_{11})^2 (2 + w_{11} + w_{22})} \quad (3.38)$$

Teniendo en cuenta la relación en la bifurcación

$$|W| = -w_{11} - w_{22} - 1$$

que también se puede expresar como

$$(w_{11} + 1)(w_{22} + 1) = w_{12}w_{21} \Rightarrow w_{22} + 1 = \frac{w_{12}w_{21}}{w_{11} + 1} \quad (3.39)$$

Sustituyendo  $w_{22}+1$  en la expresión de  $c(0)$  se deduce que

$$c(0) = \frac{w_{12}^2 w_{12} w_{21} + (w_{11} + 1)^4}{3(1 + w_{11})^3 (2 + w_{11} + w_{22})}$$

Por otro lado, una condición para que existan tres intersecciones es

$$w_{12} w_{21} > 0 \tag{3.40}$$

y considerando que se trata de la bifurcación periodo doble en la figura 3.25 (línea discontinua) se observa que

$$w_{11} + w_{22} > 0 \tag{3.41}$$

para que sea compatible con la relación (3.40) y con las condiciones de este caso ( $w_{11} < 1$ ,  $w_{22} < 1$ ) se debe cumplir que

$$(w_{11} + 1) > 0 \tag{3.42}$$

Considerando las expresiones (3.40), (3.41) y (3.42) el coeficiente  $c(0)$  es positivo. Por tanto, cuando el punto fijo cero pasa de silla a inestable aparece un ciclo dos tipo silla debido a que el autovalor no crítico es en magnitud mayor que la unidad (se puede observar esto comparando la figura 3.25 con la figura 3.8).

Para los otros dos puntos fijos ( $1$  y  $1'$ ), si se considera que las pendientes (3.23.a) y (3.23.b) son positivas, al igual que los elementos no diagonales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - w_{11}(1 - x^2)}{w_{12}(1 - x^2)} > 0 \Rightarrow w_{11}(1 - x^2) < 1 \tag{3.43.a}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \frac{w_{21}(1-y^2)}{1-w_{22}(1-y^2)} > 0 \Rightarrow w_{22}(1-y^2) < 1 \quad (3.43.b)$$

Considerando la expresión (3.43.b), que el signo de la función  $D_s(W; x, y)$ , (ecuación (3.24)), es positivo, y que  $w_{12}$  es positivo se cumple que:

$$w_{11}(1-x^2) + w_{22}(1-y^2) - 1 < |W|(1-x^2)(1-y^2) \quad (3.44)$$

y al ser el determinante de la matriz de pesos menor (véase ecuación (3.37)) que la unidad además se cumple

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) < 1 \quad (3.45)$$

combinando las dos expresiones se cumple que:

$$w_{11}(1-x^2) + w_{22}(1-y^2) < 2 \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta la relación (3.44), (3.45) y (3.46) el lugar geométrico del plano parametrizado por los pesos diagonales y el determinante indica que estos puntos son estables o de silla, como se puede observar en la siguiente figura.

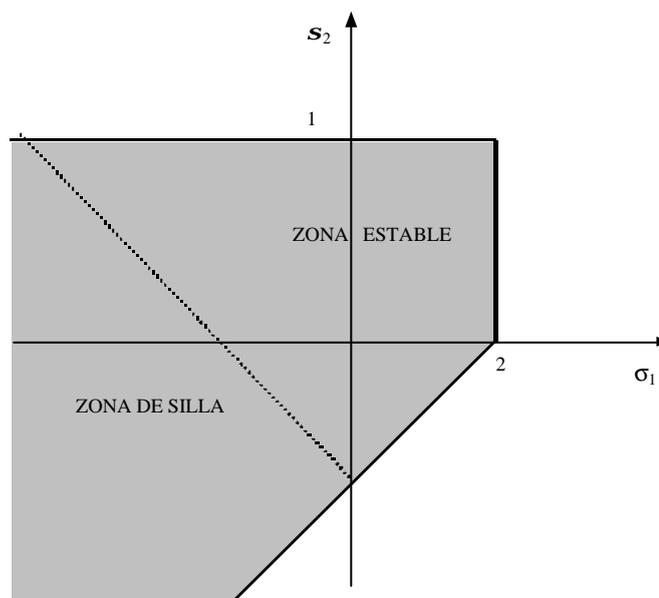


Figura 3.26. Lugar geométrico donde están situados los puntos fijos (1 y 1') desde el punto de vista de su estabilidad cuando ambos pesos diagonales son menores a la unidad.

Cuando el punto fijo pasa de estable a punto de silla se produce una bifurcación tipo periodo doble. El coeficiente asociado a la forma normal viene dado por

$$c(0) = \frac{3ed(dy_0 + w_{12}x_0Y_0)^2 + (-2 + d + e)(d^3 + ew_{12}^2Y_0^2)}{3d^2Y_0^2(d + e)(-2 + d + e)} \quad (3.47)$$

donde

$$\begin{aligned} d &= w_{11}X_0 + 1 \\ e &= w_{22}Y_0 + 1 \end{aligned}$$

Comparando las figuras 3.26 y 3.8 se puede deducir que el autovalor no crítico es menor que la unidad. Por otro lado, el coeficiente dado por (3.47) no tiene un signo definido. Por tanto, cuando los puntos 1 y 1' pasan de estables a puntos de silla aparecen dos ciclos dos estables si el coeficiente (3.47) es positivo o desaparecen dos ciclos dos tipo silla si es negativo.

En cuanto a las configuraciones de un punto fijo, cuando se pasa de tres puntos fijos a un punto fijo se produce una bifurcación tipo Pitchfork en el punto fijo correspondiente al origen. En este caso el coeficiente de la forma normal correspondiente viene dado por:

$$c(0) = \frac{w_{12}^2(1 - w_{22}) + (1 - w_{11})^3}{3(1 - w_{11})^2(2 - w_{11} - w_{22})}$$

La relación de bifurcación es

$$|W| = w_{11} + w_{22} - 1$$

que también se puede expresar como

$$(1 - w_{11})(1 - w_{22}) = w_{12}w_{21} \Rightarrow 1 - w_{22} = \frac{w_{12}w_{21}}{1 - w_{11}}$$

Sustituyendo  $1 - w_{22}$  en la expresión de  $c(0)$  se deduce que

$$c(0) = \frac{w_{12}^2 w_{12} w_{21} + (w_{11} - 1)^4}{3(w_{11} - 1)^3 (2 - w_{11} - w_{22})} \quad (3.48)$$

Este coeficiente es negativo, ya que  $w_{11} + w_{22} < 2$ ,  $w_{11} < 1$  y los elementos no diagonales tienen el mismo signo. Por tanto, las transiciones de las dinámicas dependerán del autovalor no crítico  $I_2$ . Esto es (véase figura 3.8):

- $-1 < I_2 < 1$ . Las condiciones son  $0 < w_{11} + w_{22} < 2$ , ocurre que:

De dos puntos estables y un punto de silla correspondiente al origen se pasa a un único punto estable situado en el origen.

- $\lambda_2 < -1$ . La condición es  $w_{11} + w_{22} < 0$ , ocurre que:

De dos puntos de silla y un punto inestable correspondiente al origen se pasa a un único punto de silla situado en el origen.

Por último si el origen es un único punto fijo ocurre que  $D_s(W; 0, 0)$  cambia de signo respecto a la situación de la figura 3.24.b. Como  $w_{22}$  es menor que la unidad y  $w_{12}$  es positivo, entonces:

$$w_{11} + w_{22} - 1 < |W|$$

Si se observa la figura 3.7, el cero podría ser estable, inestable o de silla. Se restringen más las posibilidades si la suma de pesos diagonales es positiva, ya que sólo puede ser estable o inestable. Cuando cambia de estable a inestable aparece una órbita cuasiperiódica producida por una bifurcación tipo Neimark-Sacker. Veremos posteriormente que esta órbita siempre es

estable. Por otra parte, este único punto fijo puede pasar de ser un punto estable a punto de silla apareciendo un ciclo dos estable, ya que el coeficiente de la forma normal (3.37) es positivo y el autovalor no crítico es menor que la unidad (véase figura 3.8). Por último, este punto fijo puede pasar de inestable a silla, produciéndose una bifurcación tipo periodo doble (véase figura 3.8). En esta situación, el autovalor no crítico es en magnitud mayor a la unidad y el coeficiente  $c(0)$  asociado a la forma normal (véase ecuación 3.37) es positivo. Por tanto, a medida que el punto fijo cero pasa de inestable a silla aparece un ciclo tipo silla.

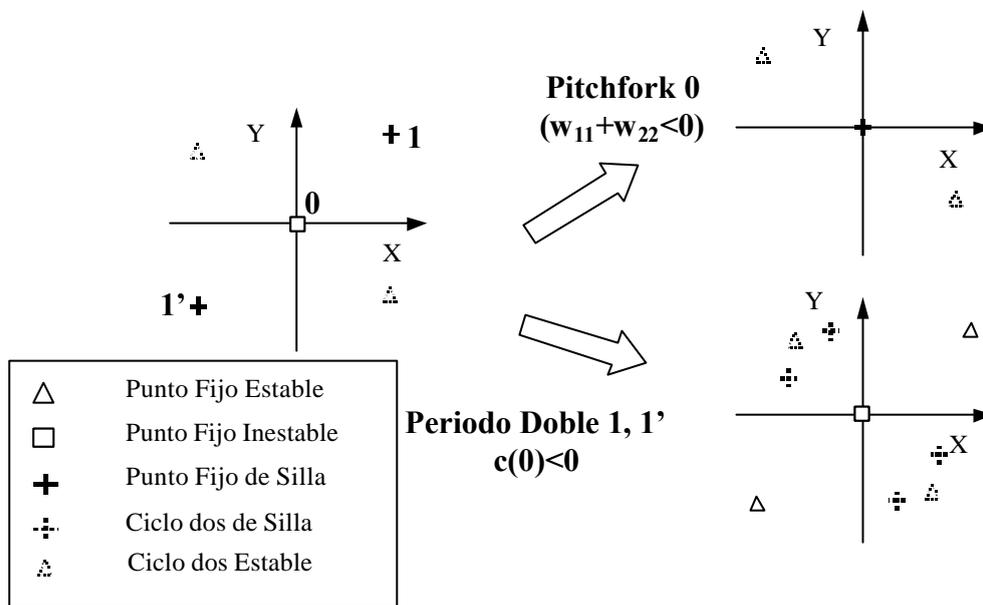


Figura 3.27. Dinámica correspondiente a la situación en que ambos pesos diagonales son menores a la unidad partiendo de una situación correspondiente al Caso 1.

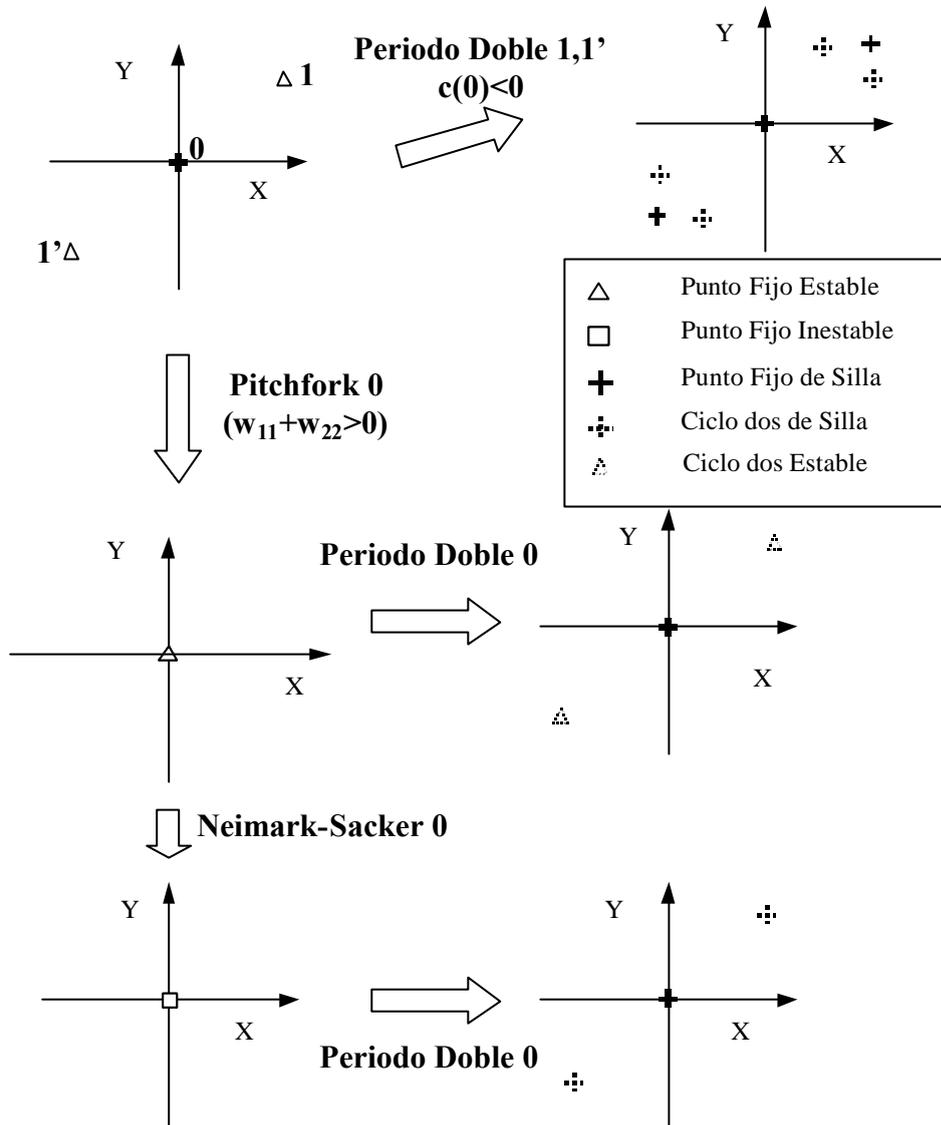


Figura 3.28. Dinámica correspondiente a la situación en que ambos pesos diagonales son menores a la unidad partiendo de otra situación distinta a la de la figura 3.27.

**Caso 3**

En este caso consideremos que

$$\begin{cases} w_{11} < 1 \\ w_{22} > 1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} w_{11} > 1 \\ w_{22} < 1 \end{cases}$$

Supongamos que los signos de los pesos no diagonales son iguales. Con esa suposición existe una única situación correspondiente a tres puntos fijos, como se observa en la siguiente figura.

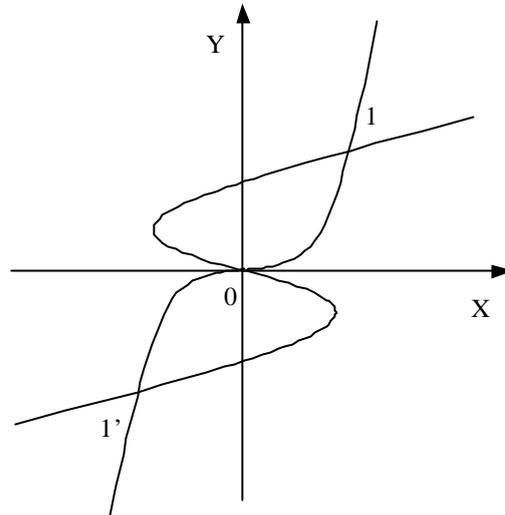


Figura 3.29. Curvas que determinan los puntos fijos cuando  $w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ .

En esta situación el signo de la función  $D_s(W; 0, 0)$ , dado por (3.29), es positivo,  $w_{12}$  es positivo y  $w_{22}$  es mayor que la unidad, por tanto se cumple que:

$$w_{11} + w_{22} - 1 > |W|$$

y el 0 puede ser inestable o de silla (véase figura 3.25).

Teniendo en cuenta que  $D_s(W; x, y)$  evaluado en los otros dos puntos fijos es positivo y considerando que se cumple también que

$$w_{22}(1 - y^2) < 1 \tag{3.49}$$

como además  $w_{12}$  es positivo

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1 < |W|(1 - x^2)(1 - y^2) \tag{3.50}$$

Por otra parte, como la pendiente de  $F(x; w_{11}, w_{12})$  es positiva, esto es

$$F'(x; w_{11}, w_{12}) = \frac{1}{1-x^2} - w_{11} > 0$$

entonces

$$(1-x^2) < \frac{1}{w_{11}} \quad (3.51)$$

combinando las relaciones (3.49), (3.50), (3.51) y considerando que  $w_{12}w_{21}$  es positivo, se deduce que

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) < \frac{|W|}{w_{11}w_{22}} < 1 \quad (3.52.a)$$

$$w_{11}(1-x^2) + w_{22}(1-y^2) < 2 \quad (3.52.b)$$

Considerando las relaciones (3.50), (3.52.a), (3.52.b) estos puntos describen el lugar geométrico que se observa en la figura 3.26. Estos puntos pueden ser de silla o estables. Por tanto, con tres puntos fijos se pueden dar las mismas configuraciones dinámicas que las del caso 2.

Por otra parte, cuando los pesos diagonales no tienen el mismo signo, existen dos situaciones posibles: cinco puntos fijos, tres puntos fijos o un solo punto fijo. En la siguiente figura podemos observar las tres posibles configuraciones.

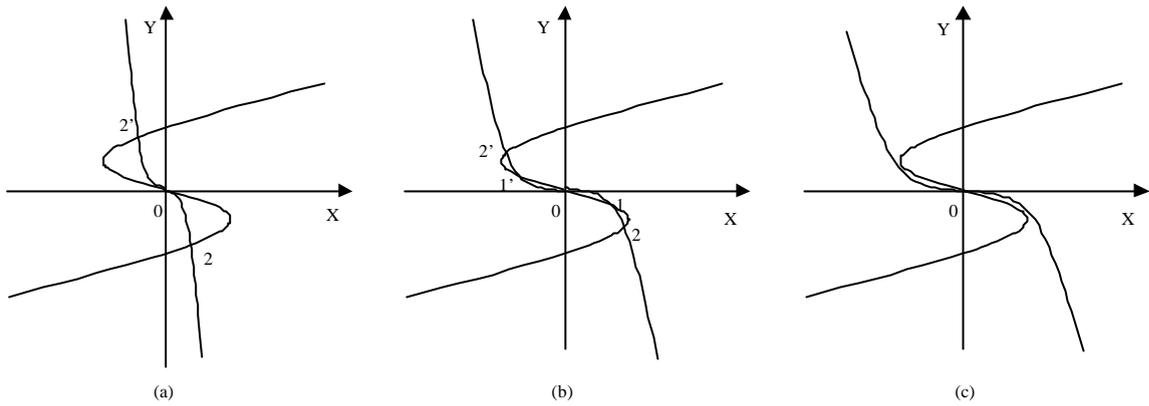


Figura 3.30. Curvas cuando los pesos son  $w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ , a) situación con 3 puntos fijos, b) situación con 5 puntos fijos b) situación con un solo punto fijo.

La configuración de la figura 3.30.a coincide con la configuración 3.29. Por tanto, es necesario analizar las configuraciones de la figura 3.30.b y 3.30.c, como se detalla a continuación.

Aplicando los mismos razonamientos que anteriormente se cumple la relación y teniendo en cuenta que  $D_s(W; 0, 0)$  es negativo

$$w_{11} + w_{22} - 1 < |W|$$

y se puede afirmar que el origen es inestable, estable, o de silla (véase figura 3. 7).

Por otra parte, los puntos 1 y 1' cumplen que

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1 > |W| (1 - x^2)(1 - y^2)$$

y por tanto pueden ser inestables o de silla.

Los puntos 2 y 2' en la figura 3.30.b, pueden ser estables, o silla. Debido a que:

$$w_{11}(1 - x^2) + w_{22}(1 - y^2) - 1 < |W| (1 - x^2)(1 - y^2) \tag{3.53}$$

y

$$\begin{aligned} w_{11}(1-x^2) &< 1 \\ w_{22}(1-y^2) &< 1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Además si consideramos la siguiente figura

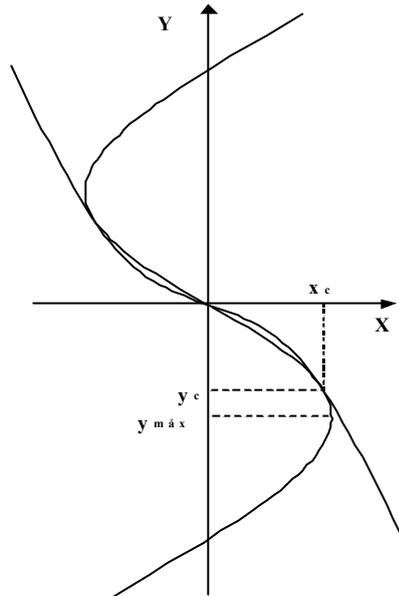


Figura 3.31. Situación crítica de corte entre las curvas  $F$  con  $w_{11} < 1$  y  $w_{22} > 1$ .

teniendo en cuenta que:

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) < |W|(1-x_c^2)(1-y^2)$$

como en la situación crítica de la figura 3.31

$$|W|(1-x_c^2)(1-y_c^2) = w_{11}(1-x_c^2) + w_{22}(1-y_c^2) - 1$$

entonces

$$|W|(1-x_c^2)(1-y_c^2) < \frac{(1-y_c^2)[w_{11}(1-x_c^2) + w_{22}(1-y_c^2) - 1]}{(1-y_c^2)}$$

además

$$w_{11}(1-x_c^2) < 1$$

por tanto

$$|W|(1-x^2)(1-y^2) < w_{22}(1-y^2) < 1 \quad (3.55)$$

Considerando las relaciones (3.53), (3.54) y (3.55) se deduce que los puntos 2 y 2' son estables o de silla (véase figura 3.26).

En esta situación se puede observar que al pasar de la figura 3.30.b a la figura 3.30.c se produce una bifurcación silla-nodo asociada a los puntos 1 y 2. En esta bifurcación no se puede determinar si el autovalor no crítico es mayor o menor que la unidad. Por otra parte, cuando en la transición entre la figura 3.30.b y la figura 3.30.a se produce una bifurcación Pitchfork asociada al origen, en este caso no se puede determinar tanto el signo del coeficiente asociado a la forma normal como si el autovalor no crítico es mayor o menor a la unidad.

Se constata que, en este caso, a diferencia del anterior, es difícil demostrar de una forma analítica los diferentes comportamientos dinámicos. Consideremos ejemplos de transiciones entre diferentes dinámicas (las configuraciones dinámicas se han determinado numéricamente mediante el programa DsTool [Back 1992]).

En el ejemplo de la figura 3.32, se considera la situación en la que cinco puntos fijos, dos de silla, dos estable y el origen inestable, pasan a un solo punto fijo inestable en el origen, apareciendo un ciclo de periodo diez estable adicional. En este caso se producen dos bifurcaciones silla-nodo y han aparecido otras bifurcaciones.

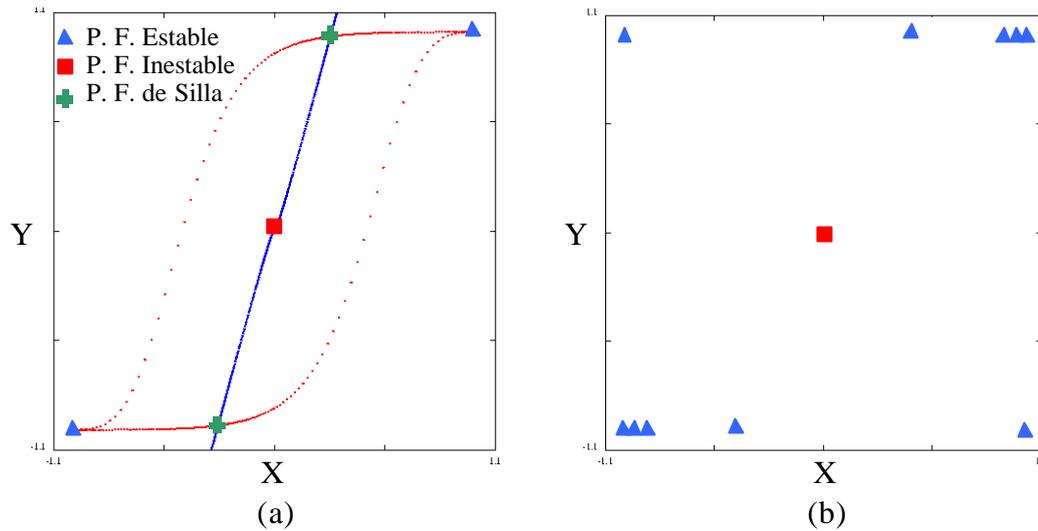


Figura 3.32. a) Configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -4$ ,  $w_{21}=43$  y  $w_{22}= -10$ , b) configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -13$ ,  $w_{21}=43$  y  $w_{22}= -10$ . Las variedades estables e inestables asociadas a los puntos de silla aparecen en línea azul y roja, respectivamente.

En el ejemplo de la figura 3.33 se considera la situación en que cinco puntos fijos, tres de silla, incluido el origen, y dos estables, pasan a tres puntos fijos, siendo el origen inestable y los otros dos estables. En este caso, se produce una bifurcación tipo Pitchfork (desaparecen dos puntos fijos) y una bifurcación periodo doble asociada al origen. Indicar que debido a esta última bifurcación la segunda dinámica tiene un ciclo dos tipo silla.

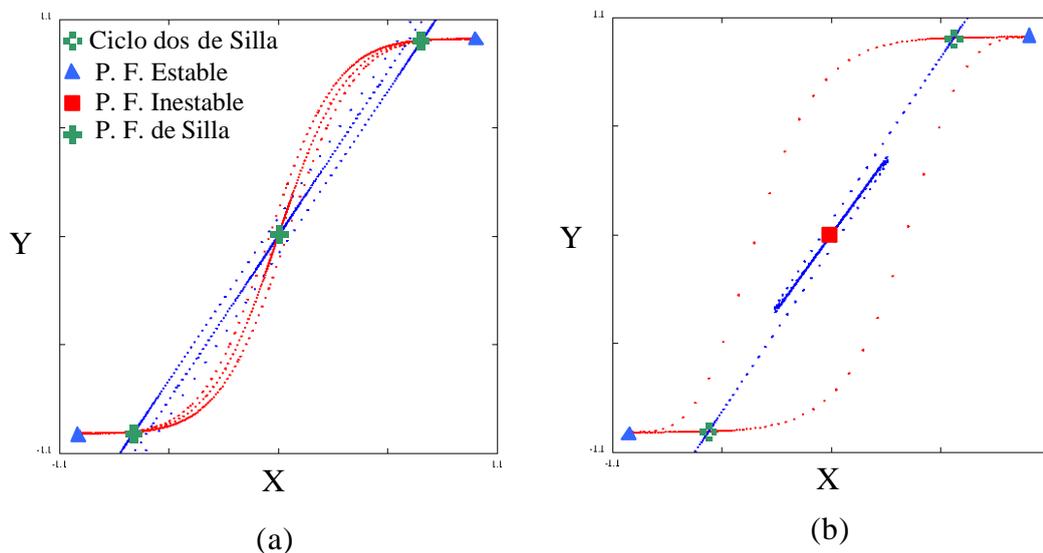


Figura 3.33. a) Configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -10$ ,  $w_{21}=43$  y  $w_{22}= -29.8$ , b) configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -10$ ,  $w_{21}=45.2$  y  $w_{22}= -29.8$ . Las variedades estables e inestables asociadas a los puntos de silla aparecen en línea azul y roja, respectivamente.

En el ejemplo de la figura 3.34 se considera la situación en la que cinco puntos fijos, dos estables, dos inestables y un punto de silla correspondiente al origen, pasan a tres puntos fijos, dos estables y uno inestable en el origen. En este caso se produce una bifurcación tipo silla-nodo. Indicar que en este ejemplo aparece un ciclo dos silla, ya que partimos de la configuración de la figura 3.33.b.

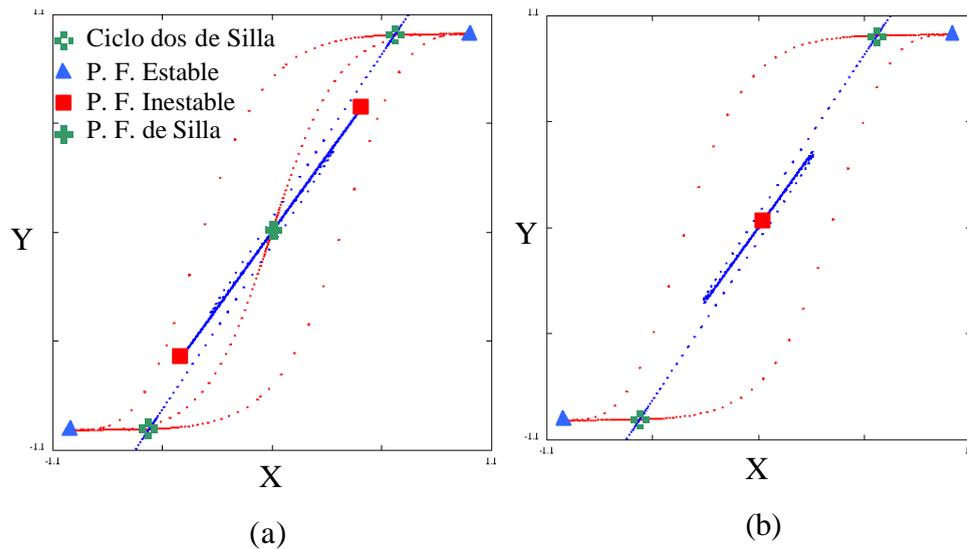


Figura 3.34. a) Configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -10$ ,  $w_{21}=43$  y  $w_{22}= -29.7$ , b) configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=15$ ,  $w_{12}= -10$ ,  $w_{21}=43$  y  $w_{22}= -29.8$ . Las variedades estables e inestables asociadas a los puntos de silla aparecen en línea azul y roja, respectivamente.

En el ejemplo de la figura 3.35 se considera la situación en la que cinco puntos fijos, tres estables incluido el origen y dos de silla, pasan a cinco puntos fijos, pasando el punto fijo origen de estable a inestable. En este caso se produce una bifurcación tipo Neimark-Sacker.

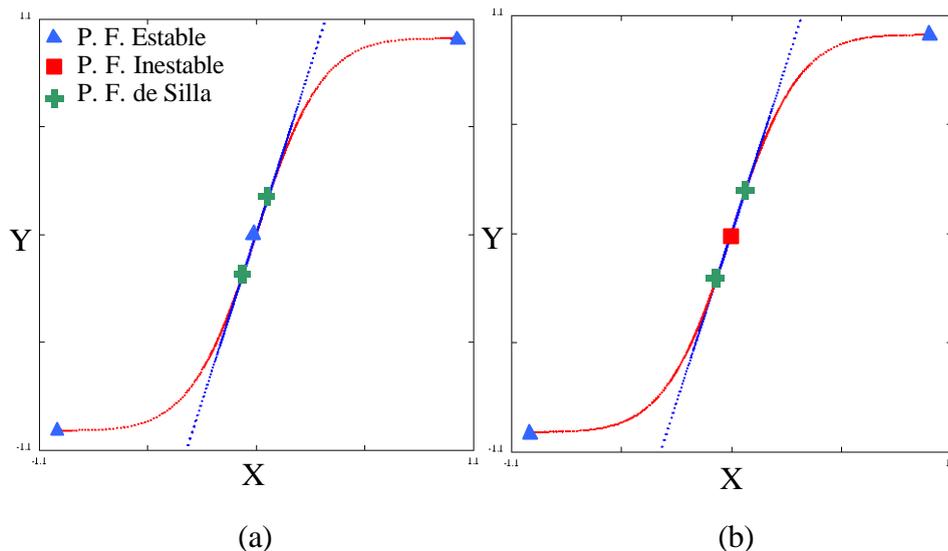


Figura 3.35. a) Configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=31.53$ ,  $w_{12}=-10$ ,  $w_{21}=94.68$  y  $w_{22}=-30$ , b) configuración dinámica correspondiente a  $w_{11}=31.53$ ,  $w_{12}=-10$ ,  $w_{21}=94.7$  y  $w_{22}=-30$ . Las variedades estables e inestables asociadas a los puntos de silla aparecen en línea azul y roja, respectivamente.

Por último, existe la situación de una sola intersección o punto fijo. Este punto fijo puede ser estable, inestable o silla, al igual que en el caso anterior.

### 3.3.3.3 Interpretación de las configuraciones dinámicas

Hasta ahora se ha llevado a cabo una clasificación de las dinámicas en base a la configuración y características de los puntos fijos. Cabe preguntarse si esta es información suficiente para hacerse una idea sobre la forma de las trayectorias fásicas. Lo primero que hay que tener en cuenta es que el espacio fásico está acotado, de forma que las trayectorias deben acabar en los conjuntos invariantes estables, sean éstos puntos fijos simples o ciclos como los estudiados hasta el momento o conjuntos más complejos como órbitas cuasiperiódicas o atractores caóticos. Los distintos dominios de atracción de cada elemento estable indicarán los límites entre trayectorias fásicas muy distintas. Las variedades estables de los puntos de silla constituyen la frontera entre los dominios de atracción, así que su cálculo numérico permite determinarlas. Con todos estos elementos, se pueden elaborar “retratos fásicos” cualitativos veraces sobre la forma de las trayectorias genéricas. Además, como se ha visto, se puede determinar las transiciones entre las dinámicas en una primera aproximación

atendiendo a las bifurcaciones locales en los puntos fijos o los ciclos. En las siguientes secciones se prestará atención a elementos invariantes como órbitas cuasiperiódicas y caóticas, y a las situaciones dinámicas o bifurcaciones que pueden originarlos.

### 3.3.5 Bifurcación Neimark-Sacker

En esta sección el objetivo principal es determinar la estabilidad de la órbita cuasiperiódica que aparece a medida que se atraviesa la bifurcación. En primer lugar, intentaremos generalizar los resultados para una clase de funciones de activación  $f$ . Planteemos un lema que nos determina la forma de la función  $F$ , que considerando una función de activación  $f$  tiene la siguiente expresión

$$F(x; w_{ii}, w_{ij}) = \frac{f^{-1}(x) - w_{ii}x}{w_{ij}}$$

**Lema 3.1.** Si  $f \in C^2$ , monótona y acotada con  $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R} - \{0\}$  entonces  $F$  no tiene un punto singular en dicho conjunto si  $w_{ii}f'(0) \leq 1$ .

Demostración:

Para demostrar el lema es necesario analizar la ecuación que define los puntos críticos de  $F$ . Esto es

$$F'(x; w_{ii}, w_{ij}) = \frac{f^{-1}'(x) - w_{ii}}{w_{ij}} = 0$$

con

$$f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

En primer lugar, verifiquemos que bajo las condiciones del lema se garantiza que sólo existe un punto singular en el intervalo  $(0, \infty)$ . Para ello, utilicemos el teorema de Rolle que indica que si una función  $g \in C^1([a, b])$  con  $g(a)=g(b)=0$  entonces  $g'$  se anula en algún punto perteneciente al intervalo  $(a, b)$ . Veamos por tanto la derivada de la función  $F'$ , esto es:

$$F''(x; w_{ii}, w_{ij}) = -\frac{1}{w_{ij}} \frac{f''(f^{-1}(x))}{f'^3(f^{-1}(x))}$$

La función  $F' \in C^1([f(0), c])$ , considerando  $c$  como la cota superior de  $f$ , ya que  $f'$  no se anula en el intervalo  $[0, \infty)$ . Sabemos que  $F''$  no se anula en dicho intervalo  $(f(0), c)$ , debido a que  $f''$  no se anula en el mismo intervalo  $(0, \infty)$ . Puesto que no se verifica la conclusión del teorema de Rolle [Spivak 1994] entonces algunas de sus premisas fallarán, en este caso no se cumple la existencia de dos ceros en la función  $F'$  en dicho intervalo. Por tanto, a lo sumo  $F'$  tendrá un único cero, esto es  $F$  tendrá un único punto singular.

Veamos a continuación la condición que garantiza la existencia de un punto singular de  $F$  en  $(f(0), c)$ . Apliquemos el teorema de Bolzano-Weierstrass [Spivak 1994] sobre  $F$  en el intervalo  $[f(0), c-d]$  donde  $0 < d < 1$ . Supondremos que  $F'(f(0))$  no se anula, veremos que ocurre con este caso particular. La función  $F'$  es continua en dicho intervalo debido a que  $f^{-1}(x)$  también lo es. Se tiene que cumplir la siguiente desigualdad para que  $F'$  tenga un punto singular:

$$F'(f(0))F'(c-d) = \frac{1}{w_{ij}^2} \left( \frac{1}{f'(0)} - w_{ii} \right) \left( \frac{1}{f'(f^{-1}(c-d))} - w_{ii} \right) < 0$$

y  $f'(c-d)$  es un valor pequeño cuyo signo coincide con el de  $f'(0)$  (debido a que  $f$  es estrictamente monótona). La condición anterior se transforma en

$$1 < w_{ii} f'(0) \tag{3.56}$$

entonces existe un punto singular de la función  $F$  en  $(f(0), c)$ , en caso contrario la función  $F$  no tiene ningún punto singular y es monótona.

En el caso particular en que  $F'(f(0))$  se anule, es decir,  $f'(0)=1/w_{ii}$  se puede verificar que  $F'$  no tiene un punto singular en el intervalo  $(f(0),c)$ . Esto es debido a que la función  $f'$  tiene un único mínimo o máximo en el origen motivado porque  $f$  es monótona, acotada y que  $f''$  no se anula en  $(0,\infty)$ , como se puede observar en la figura 3.36. Por tanto,  $F'$  será positiva o negativa en el intervalo abierto  $(f(0), c)$  si  $f'(0)$  es positiva o negativa, respectivamente.

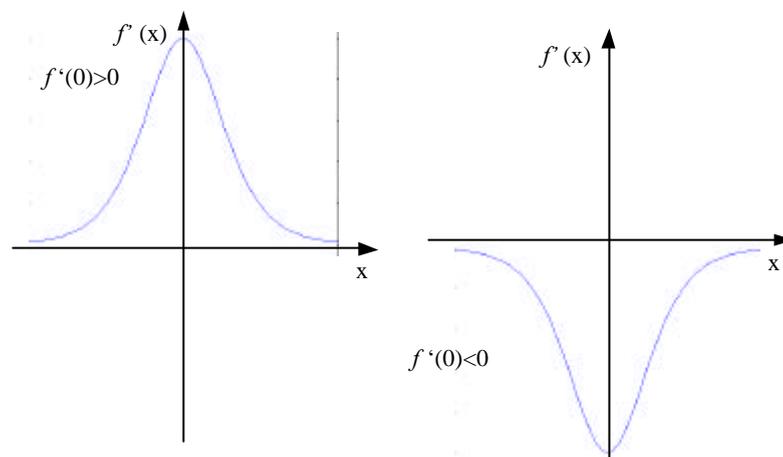


Figura 3.36. Representación de la derivada de la función de activación. a) considerando  $f'(0) > 0$ , b) considerando  $f'(0) < 0$ .

Podemos plantear la misma demostración para el intervalo  $(-\infty,0)$  descubriendo la misma condición para que exista un único punto singular. Como consecuencia si no se da la condición (3.56) se llega a la conclusión del lema .

En la figura 3.37 se puede observar la forma típica de la función  $F$  (considerando  $f'(0) > 0$ ). Esta tiene un mínimo y un máximo cuando  $w_{ii} > 1/f'(0)$  (figura 3.37.a) y es monótonamente creciente en caso contrario (figura 3.37.b), al igual que ocurre con la función de activación tangente hiperbólica.

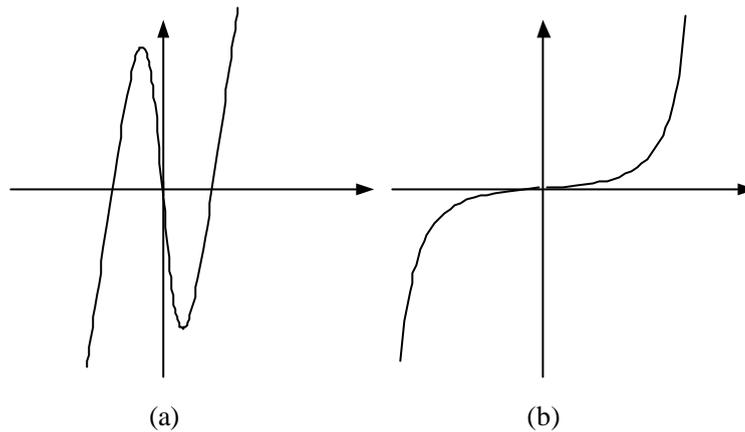


Figura 3.37. Los dos posibles comportamientos de la función  $F$ . a)  $w_{ii}f'(0) > 1$ , b)  $w_{ii}f'(0) \leq 1$ .

Veamos a continuación que la bifurcación Neimark-Sacker sólo se produce en el punto fijo correspondiente al origen, para ello se utilizará el lema anterior.

**Teorema 3.1.** Si  $f \in C^2$ , monótona y acotada con  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R} - \{0\}$  y  $f(0) = 0$  entonces sólo se puede producir la bifurcación tipo Neimark-Sacker en el punto fijo correspondiente al origen.

Demostración:

La metodología a seguir es en primer lugar, demostrar que cuando se produce la bifurcación se deduce una ligadura sobre los pesos no diagonales. A continuación se analizarán las situaciones de corte de la función  $F$  que definen el número de puntos fijos con la condición encontrada inicialmente.

Supongamos que se produce la bifurcación en el punto fijo  $(x_0, y_0)$ . Las coordenadas de este punto fijo satisfacen las siguientes relaciones:

$$|W|X_0Y_0 = 1 \quad (3.57.a)$$

$$-2 < \|w_{11}X_0 + w_{22}Y_0\| < 2 \quad (3.57.b)$$

donde

$|W|$  es el determinante de la matriz de los pesos

$$X_0 = f'(f^{-1}(x_0)) \quad Y_0 = f'(f^{-1}(y_0))$$

Considerando la expresión (3.57.a) y las condiciones límites de la inecuación (3.57.b)

$$Y_{2curva} = \frac{1}{|W|X_0}$$

$$Y_{+2recta} = \frac{2 - w_{11}X_0}{w_{22}}$$

$$Y_{-2recta} = \frac{-2 - w_{11}X_0}{w_{22}}$$

La primera ecuación anterior corresponde a la ecuación (3.57.a) y las dos últimas a las condiciones extremas de la inecuación (3.57.b).

Estas situaciones pueden generar cuatro posibilidades en función de la combinación de signos de  $w_{11}$  y  $w_{22}$ . Trataremos sólo una de dichas combinaciones, ya que el resto son equivalentes. En la siguiente figura se observa una de ellas.

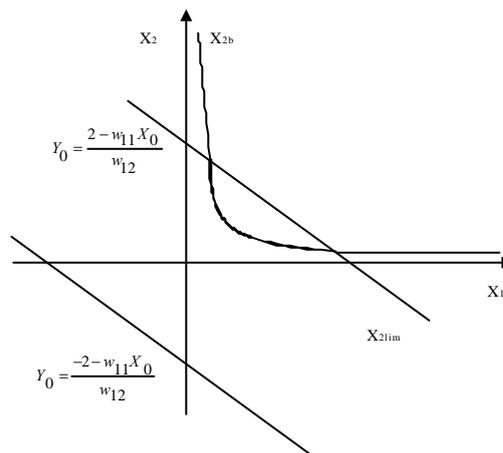


Figura 3.38. Curvas que definen la bifurcación Neimark-Sacker ( $w_{11}>0, w_{22}>0$ ).

Considerando la ecuación 3.31.a, el determinante de los pesos cumple que

$$|W| = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0)) f'(f^{-1}(y_0))}$$

y como la derivada de la función de activación tiene el mismo signo entonces dicho determinante es siempre positivo.

Observando la figura 3.38 la curva superior representa la restricción (3.57.b). El tramo resaltado en dicha curva corresponde a los puntos que verifican la bifurcación. Por tanto, para que exista la bifurcación es necesario que la recta y curva superiores de la figura 3.38 se intersecten. Veamos la ecuación que cumplen dichos puntos de intersección

$$X_0^2 - \frac{2}{w_{11}} X_0 + \frac{w_{22}}{w_{11} |W|} = 0$$

Las soluciones son

$$X_0 = \frac{1}{w_{11}} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{-w_{21}w_{12}}{|W|}} \right)$$

Para que existan dichos cortes tiene que ocurrir que

$$w_{21}w_{12} < 0$$

Por tanto, una condición necesaria para que exista la bifurcación es que los pesos no diagonales tengan signos opuestos.

Veamos en las figuras siguientes las tres posibilidades de corte de la función  $F$ , compatibles con la restricción anterior. Consideraremos, sin pérdida de generalidad, que  $f'(0)$  es positivo y que  $w_{21}$  es positivo.

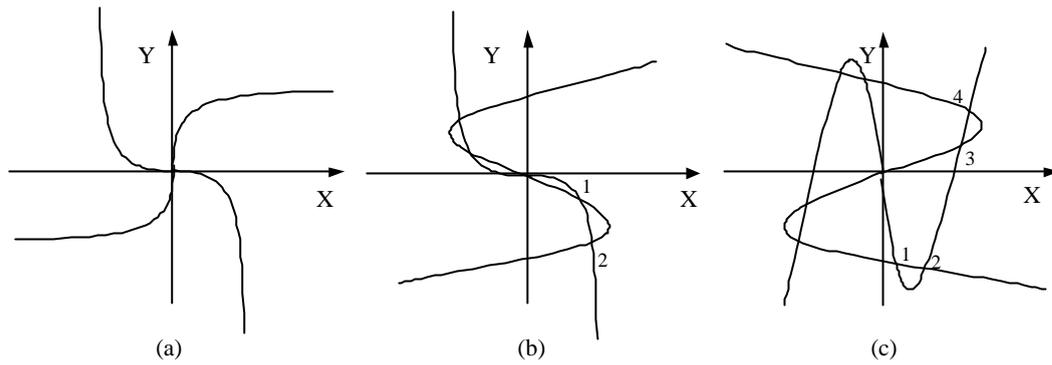


Figura 3.39. Diferentes formas de intersección de  $F(x; w_{11}, w_{12})$  y  $F(y; w_{21}, w_{22})$  considerando  $w_{12} < 0, w_{21} > 0$ . a)  $w_{11} < 1/f'(0)$  y  $w_{22} < 1/f'(0)$ , b)  $w_{11} < 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ , c)  $w_{11} > 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ .

Analicemos con detalle estas tres situaciones:

a) Cuando  $w_{11} < 1/f'(0)$  y  $w_{22} < 1/f'(0)$ .

En este caso solo es necesario demostrar que el cero es el único punto fijo.

Supongamos que  $x_1$  es una coordenada del punto fijo mayor que cero, y  $w_{12} < 0$  ( $w_{21} > 0$ ). La siguiente ecuación define el punto fijo

$$y = \frac{f^{-1}(x) - w_{11}x}{w_{12}} = F(x, w_{11}, w_{12})$$

La coordenada  $y$  es positiva debido a que el numerador y  $w_{12}$  son positivos. Por otro lado se cumple también la ecuación:

$$x = \frac{f^{-1}(y) - w_{22}y}{w_{21}} = F(y, w_{22}, w_{21})$$

La coordenada  $x$  es negativa debido a que el numerador y  $w_{21}$  son negativos. Para evitar esta aparente contradicción tiene que ocurrir que  $x=y=0$ . El único punto fijo que se produce en esta situación es el origen.

b) Cuando  $w_{11} < 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ .

En este caso es posible tener diferentes puntos fijos distintos del origen. La técnica es considerar el signo de  $D_s$  en dichos puntos fijos y concluir que la condición (3.57.b) falla. Refiriéndonos a los nombres dados en la figura 3.39.b se puede analizar los puntos 1 y 2.

• Punto fijo 1

Comparando las pendientes de las funciones  $F$  en dicho punto fijo

$$\frac{1 - w_{11}f'(x_1)}{w_{12}} < \frac{w_{21}}{1 - w_{22}f'(x_2)} \Rightarrow |W| f'(x_1)f'(x_2) < w_{11}f'(x_1) + w_{22}f'(x_2) - 1$$

$$\xrightarrow{|W|f'(x)f'(y)=1} w_{11}f'(x_1) + w_{22}f'(x_2) > 2$$

• Punto fijo 2

Consideremos la siguiente figura límite donde desaparece dicho punto fijo.

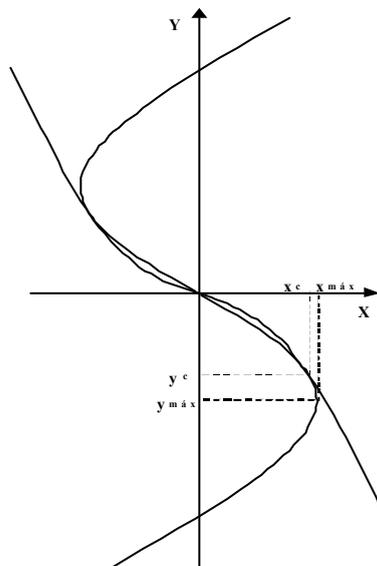


Figura 3.40. Situación crítica de corte entre las curvas  $F$  con  $w_{11} < 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ .

Teniendo en cuenta que la derivada de la función de activación es decreciente ocurre que:

$$|W| f'(x_0) f'(y_0) < |W| f'(x_c) f'(y_0)$$

como en la situación crítica de la figura 3.40

$$|W| f'(x_c) f'(y_c) = w_{11} f'(x_c) + w_{22} f'(y_c) - 1 \quad (3.58)$$

entonces

$$|W| f'(x_0) f'(y_0) < \frac{f'(y_0) (w_{11} f'(x_c) + w_{22} f'(y_c) - 1)}{f'(y_c)}$$

además, como el máximo de la curva  $F$  cumple que:

$$w_{11} f'(x_{\max}) = 1$$

y como la función  $f'$  es decreciente ocurre que

$$w_{11} f'(x_c) < 1$$

por tanto

$$|W| f'(x_0) f'(y_0) < w_{22} f'(y_0)$$

El segundo término de la desigualdad es menor que la unidad, ya que como  $w_{21}$  es positivo entonces, y como se puede observar en la figura 3.40, la derivada de  $F(y_0; w_{22}, w_{21})$  cumple

$$\frac{dF(y_0; w_{22}, w_{21})}{dy} = \frac{w_{22}f'(y_0) - 1}{w_{21}} < 0 \Rightarrow w_{22}f'(y_0) < 1$$

Por tanto, no se cumple la condición de bifurcación (3.58).

c) Cuando  $w_{11} > 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ . Refiriéndonos a los nombres de la figura 3.39.b

• Puntos fijos 1 y 3.

Comparando las pendientes de las funciones  $F$  en dicho punto fijo

$$\frac{1 - w_{11}f'(x_1)}{w_{12}} < \frac{w_{21}}{1 - w_{22}f'(x_2)} \Rightarrow |W| f'(x_1)f'(x_2) < w_{11}f'(x_1) + w_{22}f'(x_2) - 1$$

$$\xrightarrow{|W|f'(x)f'(y)=1} w_{11}f'(x_1) + w_{22}f'(x_2) > 2$$

• Puntos punto 2 y 4.

En este caso se puede considerar la situación crítica correspondiente a la figura 3.41 y plantear similares argumentos que el caso del punto fijo 2 correspondiente al caso anterior, la única diferencia es que se intercambian los papeles jugados por cada coordenada.

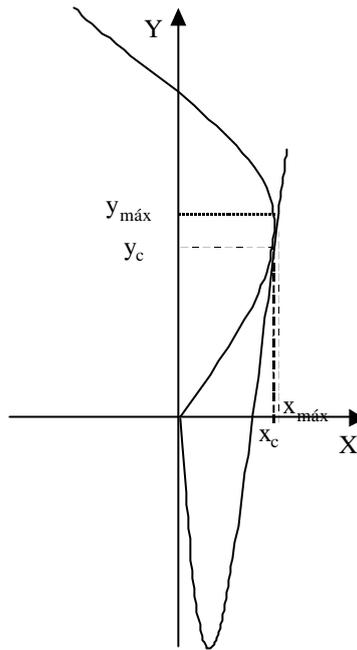


Figura 3.41. Situación crítica de corte entre las curvas  $F$  con  $w_{11} > 1/f'(0)$  y  $w_{22} > 1/f'(0)$ .

### 3.3.5.1 Determinación de la dirección de la bifurcación

Una vez visto que la bifurcación Neimark-Sacker sólo se produce en el punto fijo correspondiente al origen es necesario determinar la estabilidad de la órbita cuasiperiódica. Al ser el sistema de dos dimensiones, no existe autovalor no crítico, es decir, la dinámica esta definida exclusivamente por la variedad central.

Los autovalores complejos conjugados tienen la siguiente expresión:

$$I_{1,2} = e^{\pm iq}, 0 < q < p$$

Como se vio en el capítulo anterior, la forma normal asociada se suele expresar como el mapa complejo

$$\tilde{z} = e^{iq} z(1 + d(0) |z|^2) + O(|z|^4)$$

donde

$$\begin{aligned}
a(0) = \operatorname{Re}(d(0)) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ e^{-iq} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle \\
&+ 2 \langle p, B(q, (E - A)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle \\
&+ 2 \langle p, B(\bar{q}, (e^{2iq} E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle] \}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

El objetivo es calcular el coeficiente  $a(0)$ . El primer paso es obtener la expresión del autovector complejo  $q \in \mathbb{C}^2$  asociado al autovalor  $\mathbf{I}_1$  y el autovector de la Jacobiana adjunta  $p \in \mathbb{C}^2$ , esto es:

$$Jq = e^{iq} q \quad J'p = e^{iq} p$$

y que cumplen la condición de normalización

$$\langle p, q \rangle = 1 \tag{3.60}$$

Los autovectores en este caso tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
q &= \left\{ 1, \frac{e^{iq} - w_{11} f'(0)}{w_{12} f'(0)} \right\} \\
p &= \mathbf{b} \left\{ 1, \frac{e^{-iq} - w_{11} f'(0)}{w_{21} f'(0)} \right\}
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{b}$  se determina a partir de la condición de normalización (3.60) y su valor es

$$\mathbf{b} = \frac{[2 \operatorname{Sen}(\mathbf{q}) + i(w_{11} - w_{22})f'(0)]}{4 \operatorname{Sen}(\mathbf{q})}$$

donde se ha introducido la relación entre el argumento del autovalor complejo conjugado y los parámetros del sistema para simplificar.

$$\text{Sen}^2(\mathbf{q}) = 1 - \left( \frac{f'(0)(w_{22} + w_{11})}{2} \right)^2$$

Las segundas y terceras derivadas del mapa evaluadas en el origen tienen la siguiente expresión:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} = w_{ij} w_{ik} f''(0)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} = w_{ij} w_{ik} w_{il} f'''(0)$$

En este caso:

$$B_i(q, q) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} q_j q_k = f''(0) \sum_{j,k=1}^2 w_{ij} w_{ik} q_j q_k$$

$$C_i(q, q, \bar{q}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} q_j q_k \bar{q}_l = f'''(0) \sum_{j,k,l=1}^2 w_{ij} w_{ik} w_{il} q_j q_k \bar{q}_l$$

Consideremos que la segunda derivada de la función de activación se anula en el origen (caso de la tangente hiperbólica).

$$B \equiv 0$$

El término  $C(q, q, \bar{q})$  viene dado por.

$$e^{-iq} C_1(q, q, \bar{q}) = \frac{f'''(0)}{f'(0)^3}$$

$$e^{-iq} C_2(q, q, \bar{q}) = \frac{f'''(0)(e^{-iq} - f'(0)w_{22})(f'(0)^2 w_{11} w_{22} - 1)}{w_{12}^3 f'(0)^6}$$

Para simplificar  $C_2(q, q, q)$  se ha considerado la condición de ligadura  $|W|=1$ .

Considerando la relación entre los parámetros del sistema en la bifurcación, el coeficiente que determina la estabilidad de la órbita cuasiperiódica queda:

$$a(0) = \operatorname{Re} \left[ \frac{f'''(0)\bar{\beta}}{2w_{12}^2 f'(0)^5} \left\{ \left[ 1 + f'(0)^2 w_{11} w_{22} + w_{12}^2 - f'(0)(w_{22} + w_{11}) \cos(\theta) \right] + i f'(0)(w_{11} - w_{22}) \sin(\theta) \right\} \right]$$

Considerando la relación de los parámetros en la bifurcación y la expresión del  $\cos q$  evaluada en la bifurcación, la relación anterior queda como

$$a(0) = \operatorname{Re} \left[ \frac{f'''(0)\bar{b}}{2w_{12}^2 f'(0)^5} \left\{ \left[ 1 - \frac{f'(0)^2 (w_{11}^2 + w_{22}^2 - 2w_{12}^2)}{2} \right] + i f'(0)(w_{11} - w_{22}) \sin(q) \right\} \right]$$

Sustituyendo  $\bar{b}$  en la expresión anterior

$$a(0) = \frac{f'''(0)}{4w_{12}^2 f'(0)^5} (1 - f'(0)^2 w_{11} w_{22} + w_{12}^2 f'(0)^2)$$

utilizando la relación de ligadura (3.57.a) correspondiente a la bifurcación,  $a(0)$  se puede expresar como

$$a(0) = \frac{f'''(0)}{4f'(0)^3} \left( 1 - \frac{f'(0)^2 w_{21}}{w_{12}} \right) \quad (3.61)$$

Aplicando uno de los resultados obtenidos a lo largo de la demostración del teorema 3.1, que concluye que la condición necesaria para la existencia de la bifurcación Neimark-Sacker es que  $w_{12}w_{21} < 0$ , entonces el término dentro de los paréntesis de la expresión (3.61) es siempre positivo. Por tanto, el signo de  $a(0)$  únicamente depende de la relación entre los signos de la derivada primera y tercera de la función de activación evaluadas en el origen. En el caso de ser la función de activación una tangente hiperbólica esta relación es negativa, con lo cual la bifurcación es supercrítica, esto es, la órbita cuasiperiódica es siempre estable.

Podemos generalizar este resultado a una red discreta de Hopfield de dos neuronas. Recordemos que el mapa de la red discreta de Hopfield sin pesos umbrales es

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{W}f(\mathbf{X}(k))$$

Existe una relación lineal entre el mapa de la red de Williams-Zipser y la de Hopfield, dada por

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{W}\mathbf{X}_{WZ}$$

Por tanto, la red de Hopfield y Williams-Zipser son topológicamente equivalentes y tienen el mismo número de puntos fijos y estabilidad. Como consecuencia la primera condición que extraemos es que en la red de Hopfield sólo se produce la bifurcación Neimark-Sacker en el origen. Por otro lado, podemos calcular el parámetro (3.59), para verificar que la bifurcación tiene la misma dirección. La expresión de los términos  $B$  y  $C$  queda como:

$$\begin{aligned} B_i(q, q) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} q_j q_k \\ &= f''(0) \sum_{j,k=1}^2 \mathbf{d}_{ik} w_{ij} w_{ik} q_j q_k \\ &= f''(0) \sum_{j=1}^2 w_{ij}^2 q_j^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i(q, q, \bar{q}) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} q_j q_k \bar{q}_l \\ &= f'''(0) \sum_{j,k,l=1}^2 \mathbf{d}_{ik} \mathbf{d}_{il} w_{ij} w_{ik} w_{il} q_j q_k \bar{q}_l \\ &= f'''(0) \sum_{j=1}^2 w_{ij}^3 q_j^2 \bar{q}_j \end{aligned}$$

Parte de los términos de  $a(0)$  son:

$$e^{-iq} C_1(q, q, \bar{q}) = \frac{f'''(0)}{f'(0)w_{12}} [-w_{21} + f'(0)w_{11}e^{-iq}(w_{21} + w_{12})]$$

$$e^{-iq} C_2(q, q, \bar{q}) = \frac{f'''(0)w_{21}}{f'(0)w_{12}^2} [-w_{22} + f'(0)e^{-iq}(w_{11}w_{22} + w_{12}^2)]$$

Si consideramos las ligaduras de la bifurcación Neimark-Sacker, que coinciden con las de la red Williams-Zipser (3.57.a) y (3.57.b).

$$a(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [e^{-iq} \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{f'''(0)\bar{b}}{2\mathbf{a}_4} \{ [\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)\cos(\mathbf{q})] - i(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3)\sin(\mathbf{q}) \} \right] =$$

$$= \frac{f'''(0)}{4\mathbf{a}_4} (\mathbf{a}_2 - f'(0)(w_{11}\mathbf{a}_3 - w_{22}\mathbf{a}_2))$$

donde

$$\mathbf{a}_1 = -w_{11}$$

$$\mathbf{a}_2 = f'(0)w_{12}w_{21}(w_{12}^2 + w_{11}w_{22} + \frac{1}{f'(0)^2})$$

$$\mathbf{a}_3 = w_{22}$$

$$\mathbf{a}_4 = f'(0)^2 w_{12}^2$$

Introduciendo los términos  $\mathbf{a}_i$  entonces  $a(0)$  tiene la siguiente expresión

$$a(0) = \frac{f'''(0)}{4f'(0)} \left( 1 + \frac{1 - f'(0)^2 w_{11}w_{22}}{w_{12}^2 f'(0)^2} \right) = \frac{f'''(0)}{4f'(0)} \left( 1 - \frac{f'(0)^2 w_{21}}{w_{12}} \right)$$

Podemos aplicar la relación  $w_{12}w_{21} < 0$  del teorema 3.1 debido a que las condiciones de bifurcación son las mismas que las de la red de Williams-Zipser. Por tanto, la órbita cuasiperiódica es estable si el producto de los signos de la derivada primera y tercera evaluadas en el origen son diferentes. Esto hace que el resultado coincida con el de la red Williams-Zipser, como era de esperar.

### 3.3.5.2 Simulación

Veamos qué ocurre cuando la función de activación es la tangente hiperbólica. Esta función satisface las condiciones impuestas en el apartado anterior: ser continua hasta la segunda derivada, monótonamente creciente, acotada, que su valor en el origen sea cero, y que su derivada segunda sea distinta de cero en cualquier punto que no sea el origen. En este caso la relación de las derivadas tercera y primera de la activación evaluada en el origen es igual a  $-2$ , por tanto, la órbita cuasiperiódica es siempre estable. Podemos visualizar este fenómeno mediante la figura 3.42, donde se trazan dos trayectorias comenzando en dos puntos diferentes, uno, interior a la órbita y otro externo, simbolizados con dos asteriscos. La forma de converger a la órbita cuasiperiódica es en espiral, como se observa en la figura. La órbita esta formada por sucesivas iteraciones no continuas pero, al iterar indefinidamente, se puede conseguir que los puntos estén tan próximos unos a otros como se quiera, dando lugar a una región prácticamente continua.

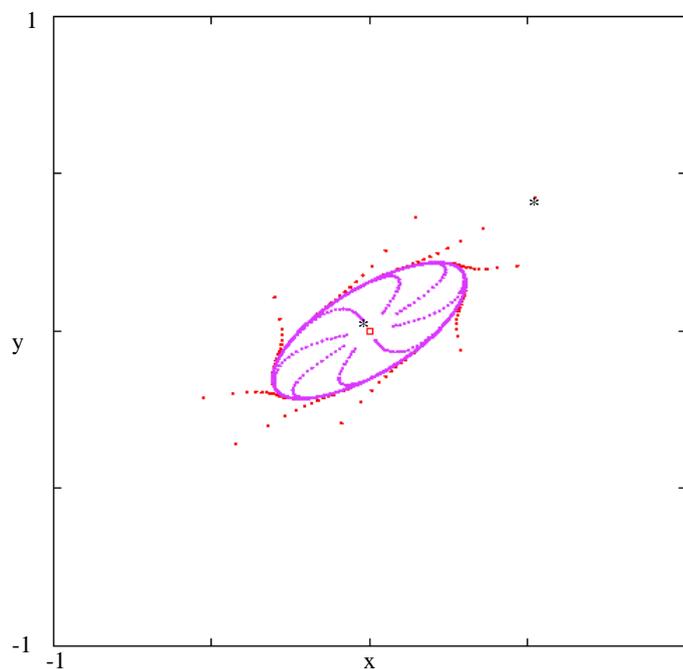


Figura 3.42. La órbita cuasiperiódica con los siguientes parámetros;  $w_{11}=1.44$ ,  $w_{12}=-1.44$ ,  $w_{21}=0.72$ ,  $w_{22}=0$ . El asterisco ‘\*’ indica los puntos iniciales de los que se parte para generar la órbita cuasiperiódica. Las órbitas con el color rojo y magenta representan dos trayectorias que parten de un punto externo e interno, respectivamente.

### 3.3.5.3 Estudio de las lenguas de Arnold

El objetivo de esta sección es estimar las lenguas de Arnold para el mapa correspondiente a dos neuronas con la función tangente hiperbólica como función de activación.

Este sistema tiene cuatro parámetros, con lo cual la idea es fijar dos pesos ( $w_{11}$ ,  $w_{12}$ ) y variar los dos grados de libertad restantes mediante el determinante de la matriz de pesos y la suma de elementos diagonales.

Recordemos la expresión del número de rotación:

$$r = \frac{1}{2p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(\mathbf{j}) + a(P(\mathbf{j})) + \dots + a(P^{k-1}(\mathbf{j}))}{k}$$

donde

$$a(\mathbf{j}) = |P(\mathbf{j}) - \mathbf{j}|$$

y  $P^k(\mathbf{j})$  corresponde al ángulo del punto fásico en la iteración  $k$ -ésima.

Como se puede observar, en la expresión anterior el valor del número de rotación depende del punto de partida. En ocasiones experimentalmente se encuentra más de un número de rotación, ya que ocurre que coexiste más de un punto periódico estable y como consecuencia dicho número depende de que el punto inicial pertenezca al dominio de atracción de un ciclo u otro. Por este motivo, para poder visualizar correctamente las lenguas es necesario calcular la periodicidad experimental haciendo un enrejillado del espacio fásico e iterando hacia delante estos puntos, viendo así la periodicidad asociada a cada punto inicial y discriminando los ciclos diferentes. Con este método sólo se discriminan los ciclos estables. Para ver las fronteras de Arnold sólo se tienen en cuenta las zonas a las que sólo les corresponda una única periodicidad. En la figura 3.43 podemos ver las diferentes formas de las lenguas de Arnold caracterizadas por valores distintos de los parámetros  $w_{11}$  y  $w_{12}$ .

Las configuraciones más comunes de las diferentes periodicidades son las siguientes; dos órbitas de periodo dos (estables), cuatro órbitas de periodo tres (2 estables y 2 de silla), dos órbitas periódicas de periodo cuatro (estables) y dos órbitas periódicas de periodo seis (estable y de silla). También se ha encontrado experimentalmente que coexisten las diferentes órbitas periódicas mencionadas anteriormente.

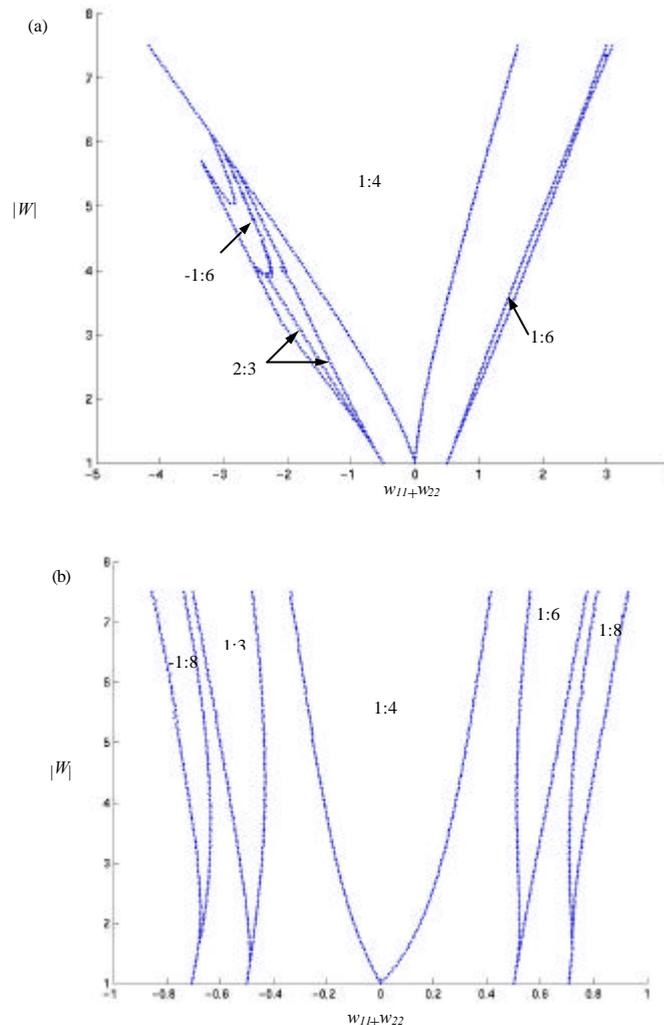


Figura 3.43. Representación de las principales lenguas de Arnold con el correspondiente número de rotación. a)  $w_{11}= 0.217$  y  $w_{12}=0.050$  b)  $w_{11}=0.100$  y  $w_{12}=10.000$ .

### 3.3.6 Estudio del Caos

Una red neuronal con una sola neurona no es capaz de tener un comportamiento de dinámica caótica. Para que exista un comportamiento caótico son necesarias al menos dos neuronas. En [Wang 1991], se ha encontrado caos en una red con dos neuronas con una configuración específica de pesos (cuando el determinante es cero). Se demuestra con estos

valores de pesos que el sistema es equivalente a un sistema caótico de una dimensión (mapa logístico). En base a este hecho vamos a tratar dos casos. En primer lugar, analizaremos el caos en la situación con determinante de la matriz de pesos nulo y que llamaremos degenerado. En segundo lugar, se generalizará este análisis al sistema no degenerado, considerando dos casos particulares correspondientes a que la matriz de pesos sea simétrica o no [Piñeiro 2001].

### 3.3.6.1 Caos en la red de dos neuronas: Caso degenerado

Consideremos el caso en el que el sistema dinámico tiene el determinante de la Jacobiana igual a cero en todos los puntos, para ello es necesario que el determinante de los pesos sea igual a cero. Representemos la matriz de pesos que tiene esta propiedad como:

$$W = \mathbf{m} \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Con estos pesos, se puede ver fácilmente que el sistema discreto de dos neuronas es equivalente al mapa unidimensional  $f$  sobre el intervalo  $[z_0, z_1]$ . Se define como [Wang 1991]

$$f(z_{i+1}) = \tanh(\mathbf{m}z_i) + k \tanh(\mathbf{m}bz_i)$$

donde  $z_0 = -1 - |k|$  y  $z_1 = 1 + |k|$

Se ha demostrado que éste último mapa es topológicamente equivalente a una clase de mapa unimodales bien conocidos (mapa logístico [Robinson 1995]). Con esta equivalencia, es esperable que se encuentre similar comportamiento y, en particular, similar forma de encontrar dinámicas caóticas (“ruta de caos”) variando sus parámetros.

En la figura 3.44 se muestra una de esas rutas caóticas (cascada de periodo doble). Este diagrama se ha obtenido dibujando los puntos finales de muchas simulaciones frente a un parámetro. Se puede observar que existen “ventanas” de periodicidad mezcladas con valores

de parámetros con comportamiento caótico. En muchos casos, ambas dinámicas están densamente mezcladas respecto a los parámetros, o lo que es lo mismo, se destruye la dinámica caótica con pequeños cambios de los parámetros, dando lugar a trayectorias periódicas. En esta situación se habla de dinámica “no robusta”. Cuando pequeños cambios en los parámetros no alteran sustancialmente las dinámicas caóticas, entonces el caos se dice que es robusto. En nuestro caso estamos ante una dinámica del tipo no robusta.

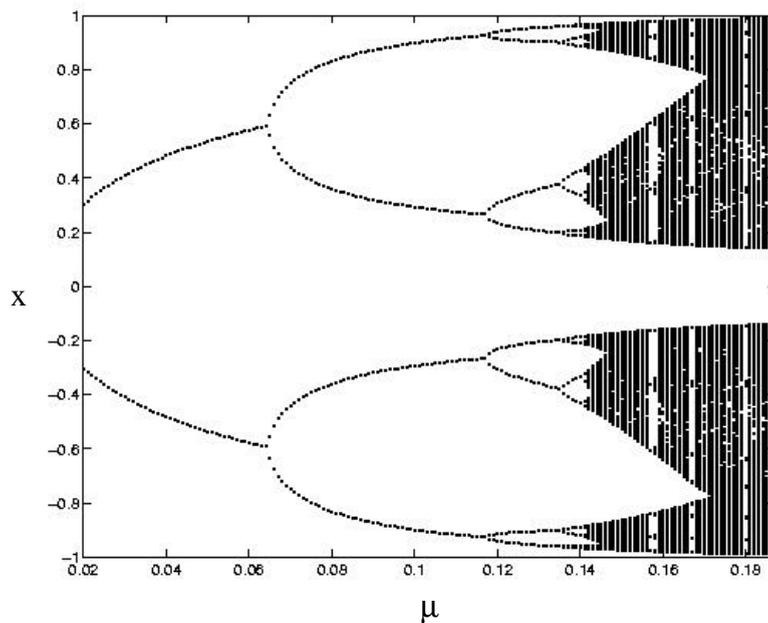


Figura 3.44. Ruta de periodo doble. Dentro de la región de dinámicas caóticas, hay valores de parámetros que dan dinámicas con trayectorias periódicas (ventanas).

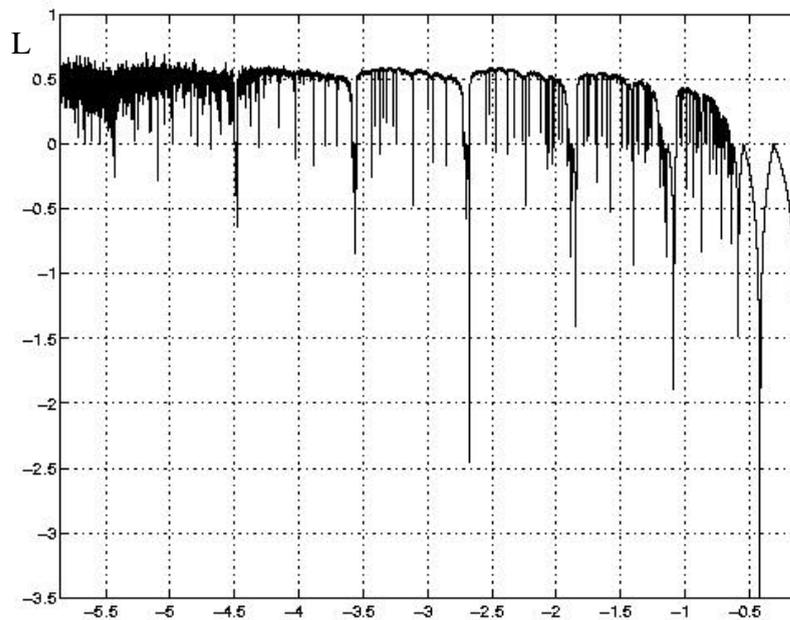
Este resultado coincide con [Potapov 2000] donde se trata una situación más particular en la forma de la matriz de pesos (3.62), asumiendo que los parámetros  $a$  y  $b$  son iguales.

Para determinar la robustez de las dinámicas de este sistema determinaremos la magnitud de los exponentes de Lyapunov. En este caso al ser el sistema  $f$  unidimensional sólo existe un exponente. Cuando tiene un valor positivo el sistema es caótico, como indicamos en el capítulo de sistemas dinámicos. El exponente de Lyapunov tiene la siguiente expresión:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{j=1}^n |f'(z_j)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \sum_{j=1}^n |a(1 - \tanh(az_j)^2) + kb(1 - \tanh(bz_j)^2)| \right)$$

En la figura 3.45 se representa el exponente de Lyapunov frente al parámetro  $a$ . Se puede observar que para muchos valores del parámetro, el exponente alcanza un valor negativo, apareciendo unas trayectorias periódicas estables y desapareciendo el caos. Para ciertos valores del parámetro la derivada es cero, el exponente de Lyapunov no está definido, y aparecen representados como picos abruptos negativos (situación superestable).

Esto corresponde a las denominadas trayectorias superestables. El lugar geométrico en el espacio de los parámetros en donde ocurre esta situación se denomina *spine locus* [Barreto 1997].



a

Figura 3.45. Exponente de Lyapunov ( $L$ ) frente al parámetro  $a$ . Se observan muchos picos que corresponden a dinámicas no caóticas.

Los resultados experimentales obtenidos son coherentes con la conjetura hecha por Barreto en [Barreto 1997]. De acuerdo con ésta, si un atractor caótico tiene  $l$  exponentes de Lyapunov positivos y hay  $n$  parámetros que varían, entonces una variación de los  $n$  parámetros pueden destruir el caos si  $n \geq l$ . Si  $n < l$  entonces el caos no se puede destruir con una variación suave. Como se puede observar para un sistema de una dimensión sólo existe

un exponente de Lyapunov, y el caos se puede destruir variando cualquier parámetro, como se puede observar en la figura 3.45.

### 3.3.6.2 Caos en la red de dos neuronas: Caso no degenerado

En este caso tenemos un verdadero sistema de dos dimensiones (no se puede reducir a un sistema equivalente unidimensional) porque el determinante de la matriz Jacobiana asociada no es idénticamente cero. En principio, el determinante de la matriz de pesos no es cero, pero en la práctica, por la aritmética finita en la determinación de la función tangente hiperbólica se hace cero en las saturaciones. Considerando los efectos de la precisión aritmética, el mapa se hace no invertible en los puntos del espacio fásico situados en las saturaciones (donde su ordenada vale  $\pm 1$ ). Experimentalmente hemos observado (figura 3.46) la existencia de múltiples ramas que surgen de los puntos de silla situados en las saturaciones formando la variedad inestable y a su vez los atractores caóticos.

En primer lugar, se puede observar la forma del atractor en el espacio de dos dimensiones en la figura 3.46. Existen tres puntos de equilibrio de silla, marcados por círculos en la figura. Las líneas rectas representan las variedades estables de cada punto de silla. Las líneas curvas son las variedades inestables de los puntos de silla inferior y superior (mitad inferior y mitad superior respectivamente) y del punto de silla del origen (ambas ramas). Las variedades inestables juegan un papel importante para establecer la existencia de atractores caóticos. Además en estas variedades aparecen cruces transversales, por tanto, este es un tipo de caos de Horseshoe, con cruces homoclínicos y heteroclínicos. Para estas dinámicas, la variedad inestable constituye el atractor caótico. En realidad, en este caso existen dos atractores caóticos que corresponden a la variedad superior e inferior respectivamente.

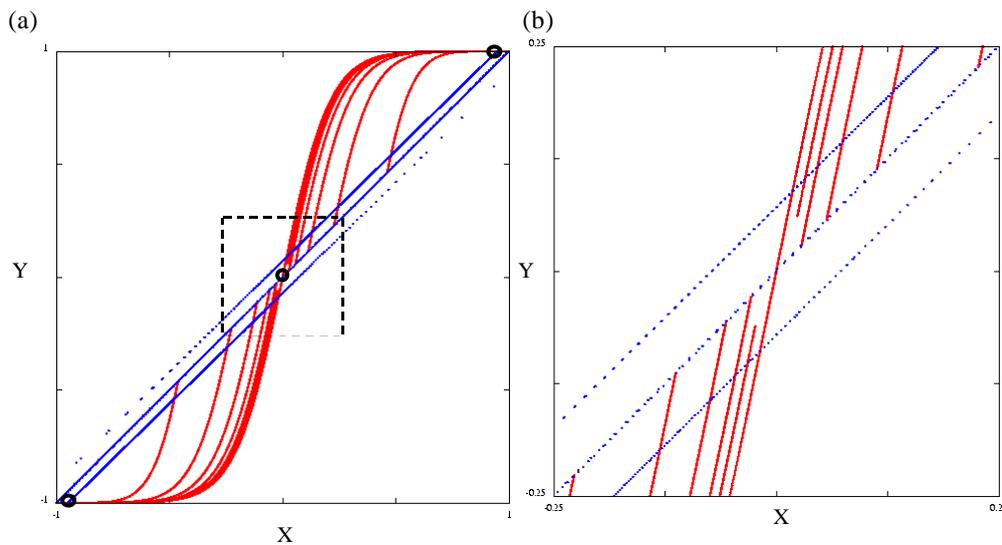


Figura 3.46. Configuración caótica con los parámetros ( $w_{11}=-25$ ,  $w_{12}=25.5$ ,  $w_{21}=-124.5$ ,  $w_{22}=125$ ). Los círculos representan los puntos de silla de las que parten las variedades estables (color azul) e inestables correspondientes (color rojo). La figura a) representa todo el espacio fásico y la b) la parte de las variedades correspondiente a la región del cuadro representado en trazo discontinuo en la figura a).

En la anterior figura se puede observar que los puntos de silla situados en los extremos tienen una de las coordenadas en el espacio fásico (la  $y$ ) saturada, esto hace que la Jacobiana evaluada en dichos puntos sea cero, como se puede observar en la siguiente expresión:

$$|J(x_p, y_p)| = |W|(1-x_p^2)(1-y_p^2) = 0$$

donde  $x_p$ ,  $y_p$  son las coordenadas de los puntos de silla y  $|W|$  es el determinante de la matriz de pesos.

Las condiciones que determinan las dinámicas caóticas particulares son múltiples: es necesaria la existencia de dos puntos de silla y que estén situados en las saturaciones, de tal manera que el mapa no es invertible en dicho puntos.

Dentro de este caso se pueden distinguir dos situaciones distintas atendiendo a la forma de los atractores caóticos sea simétrica o no [Piñeiro 2002]. Veamos con más detalle estas situaciones.

### Caso de atractor simétrico

Este caso se crea por una perturbación suave de la matriz de pesos del caso anterior que la hace no singular, como se observará a continuación.

$$W = \begin{bmatrix} -a & a+k \\ -b & b+k \end{bmatrix}$$

Como podemos observar en la matriz anterior, cuando  $k$  se anula reducimos el sistema al caso degenerado. Por otro lado el determinante depende de este parámetro  $k$  y la diferencia entre  $a$  y  $b$ . El motivo de este tipo de parametrización es observar cuanto de robusto es el caos partiendo de unos parámetros  $a$  y  $b$  donde el sistema degenerado se comporte caóticamente.

Veamos a continuación su robustez. Para ello es necesario determinar los coeficientes de Lyapunov en un sistema de dos dimensiones. En este caso la manera de hacerlo es algo más complicada y es necesario utilizar algoritmos más sofisticados como la descomposición  $QR$ . Es importante señalar que en los puntos de saturación aparece una divergencia respecto a los coeficientes de Lyapunov, con que se ha modificado el cálculo de tal forma que estos puntos no los tenemos en cuenta. En primer lugar, basándonos en estos resultados numéricos, uno de los exponentes de Lyapunov es siempre negativo independientemente del parámetro del sistema. Por otra parte en la figura 3.47 se puede observar que el otro exponente de Lyapunov varía erráticamente de valores positivos a negativos, esto indica que, al igual que en el caso degenerado, el caos tiene falta de robustez.

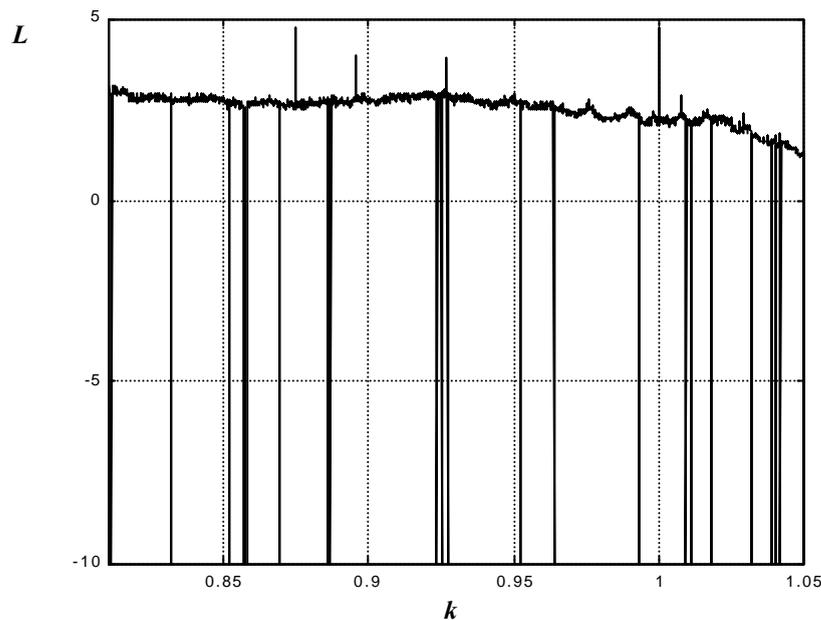


Figura 3.47. Exponente de Lyapunov ( $L$ ) frente a los pesos siendo variados en trayectorias lineales en el espacio de pesos. Aquí las ventanas de estabilidad son más amplias en la figura 3.45.

Al igual que en el sistema singular se verifica la conjetura y el caos es no robusto, ya que el tener sólo un exponente de Lyapunov positivo, independientemente del número de parámetros que se varíe ( $n \geq l$ ).

En la figura 3.48 se pueden observar experimentalmente los atractores encontrados y sus dominios. Las trayectorias observadas numéricamente coinciden con la variedad inestable del punto de silla situado en el origen. Estas trayectorias están realmente compuestas por un par de ciclos simétricos. En otras palabras, hay un ciclo de periodo largo con un dominio de atracción amplio (compuesto por dos zonas) y un ciclo de periodo mucho más pequeño con un dominio de atracción mucho más pequeño que se mezcla con el otro dominio de atracción. De los resultados obtenidos se extrae que existe una gran dependencia respecto a la precisión aritmética utilizada [Piñeiro 2002]. Más específicamente, se ha observado que el factor crítico es la aproximación en el cálculo de la tangente hiperbólica.

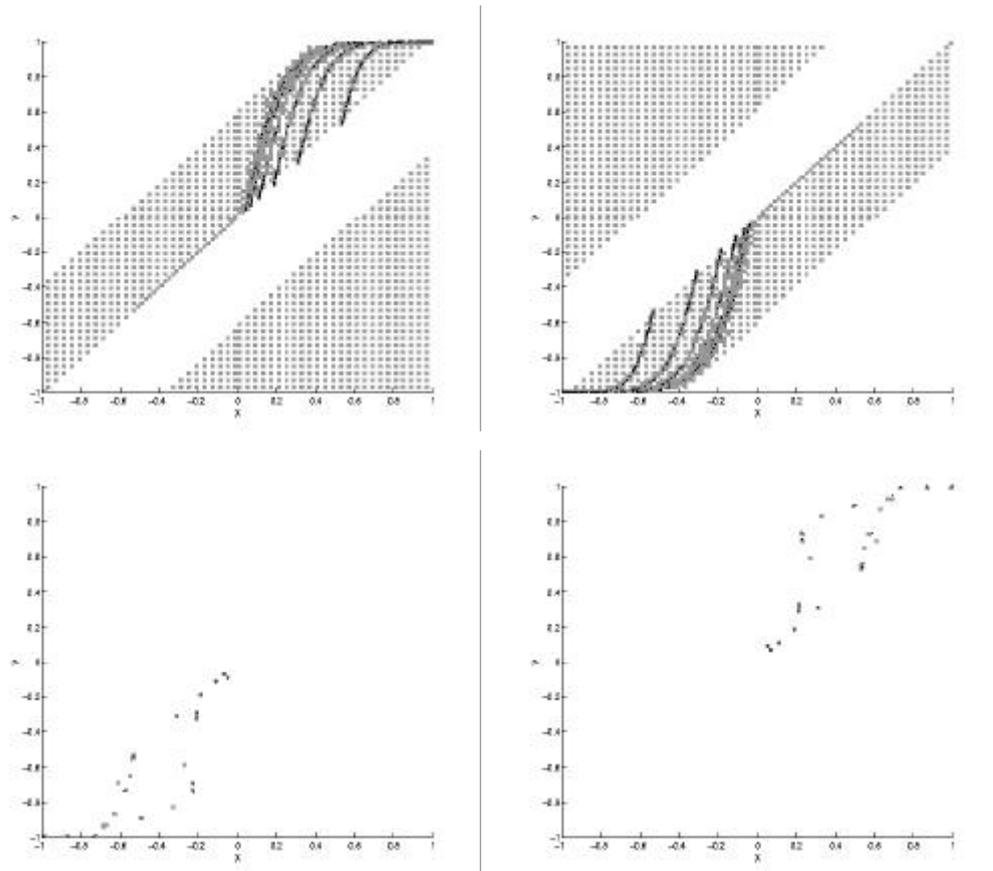


Figura 3.48. Los ciclos simétricos con sus dominios de atracción (color gris). Los ciclos son de periodicidad 1035 y 39.

Por tanto, la falta de precisión numérica hace que no se aprecia un atractor caótico y se tenga un pseudo-caos.

**Caso genérico**

Añadamos una pequeña perturbación respecto al caso anterior que haga que la matriz sea general. Denominando a la perturbación  $\epsilon$  (de orden  $10^{-7}$ ), la matriz de pesos queda como sigue

$$W = \begin{bmatrix} -a & a+k+\epsilon \\ -b & b+k \end{bmatrix}$$

Como se puede observar en la figura 3.49, la principal diferencia con respecto los casos anteriores (con la excepción de los dos partes conectados de los dominios de los atractores principales) es que el espacio de estados esta compuesto por dominios completamente

mezclados correspondiente a los tres atractores encontrados. Para las trayectorias que convergen en estas regiones, una pequeña perturbación puede causar una significativa diferencia en los estados que se visitan.

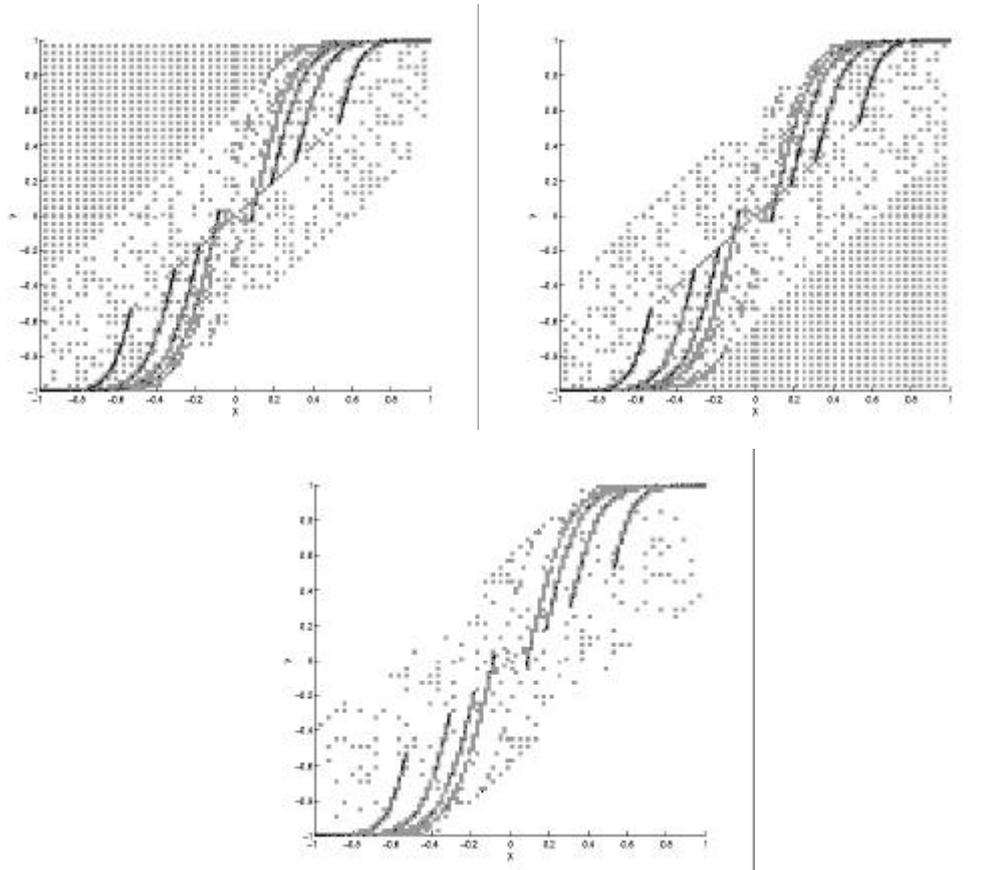


Figura 3.49. Caso genérico con pesos elegidos como una perturbación suave dada por (5) Existen dos atractores grandes y un atractor (ciclo) simétrico todos con dominios entremezclados (color gris) La periodicidad de los ciclos es de 1927, 1927 y 582.

Se puede constatar la falta de robustez en este caso, ya que el anterior caso es un caso particular de este considerando  $\varepsilon$  igual a cero.

### 3.3.6.3 Análisis del atractor

En la figura 3.50 se dibujan las propiedades estadísticas de estos atractores. La coordenada vertical refleja la frecuencia con que cada punto del atractor es visitado. De esta figura, es claro que la mayor frecuencia de puntos visitados está en las regiones de saturación (esquinas inferior izquierda y superior derecha), seguidos por los puntos finales de las ramas que forma cada atractor. Por tanto, los puntos más visitados están situados en los extremos de

las ramas. Estos puntos son las intersecciones de las variedades estables e inestables de los diferentes puntos de silla. Es decir, los puntos heteroclínicos son los más frecuentemente visitados.

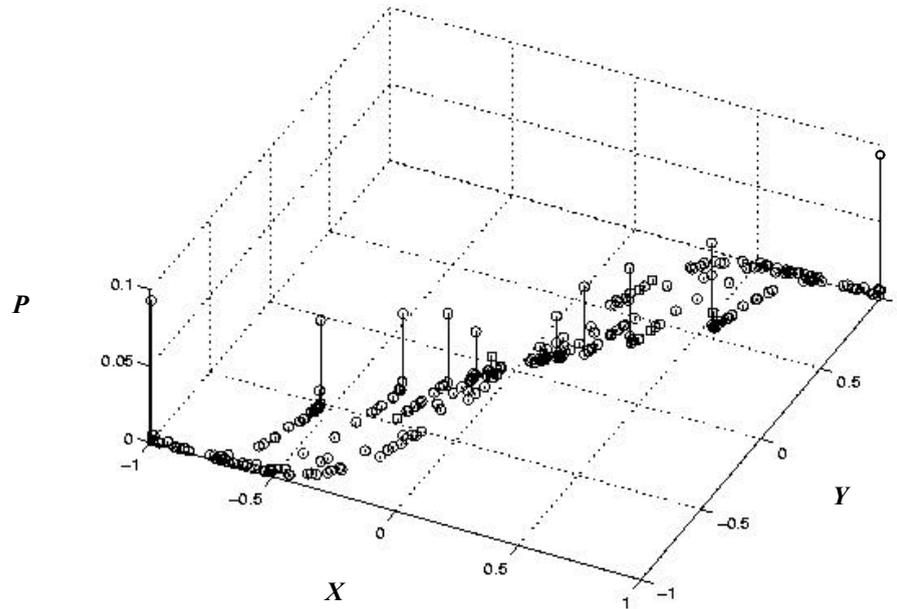


Figura 3.50. Histograma reflejando la frecuencia con que cada punto del atractor es visitado.

### 3.4 Resultados para n neuronas

En este caso el estudio de bifurcaciones y características dinámicas se ve dificultado debido a que no se puede determinar el número de puntos fijos ni sus correspondientes características dinámicas, ya que no existen expresiones analíticas para los autovalores.

Recordemos la forma del mapa para  $n$  dimensiones

$$x_i(k+1) = \tanh\left(\sum_{n=1}^N w_{in} x_n(k) + \sum_{m=1}^M w'_{im} u_m(k) + w'_i\right)$$

donde

$x_i(k)$  es la salida de la neurona  $i$ -ésima.

$u_m(k)$  es la entrada  $m$ -ésima de las neuronas.

$w_{in}, w'_{im}$  son los pesos correspondientes a las salidas realimentadas y las entradas de las neuronas, respectivamente, de la neurona  $i$ -ésima.

$w'_i$  es el peso umbral de la neurona  $i$ -ésima.

En este caso la matriz Jacobiana viene dada por la siguiente expresión:

$$J(x) = G(x)W$$

donde

$W$  es la matriz de pesos,

$$G(x) = \text{diag}(G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x))$$

con

$$G_i(x) = 1 - \tanh^2\left(\sum_{n=1}^N w_{in} x_n(k)\right)$$

En el caso de que  $x$  sea un punto fijo ocurre que:

$$G_i(x) = 1 - x_i^2$$

El determinante de la matriz Jacobiana viene dado por:

$$|J(x)| = |W| \prod_{i=1}^n G_i(x)$$

Es importante introducir la expresión del determinante de la Jacobiana, ya que éste es el producto de los autovalores, al igual que la traza de la Jacobiana coincide con la suma de los autovalores.

Es posible dar una condición suficiente para que los puntos fijos sean estables. Para ello calculemos el determinante de la Jacobiana de esa órbita. Se puede plantear en términos de Lema.

**Lema 3.2.** Suponiendo que el punto fijo estable está situado dentro del hipercubo de lado

$$2\sqrt{1-|W|^{-1/n}}$$

entonces el punto fijo es estable.

Demostración:

Dentro del hipercubo se cumple

$$G_i(x) < |W|^{-1/n} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Sustituyendo en la expresión del determinante:

$$|J(x)| = |W| \prod_{i=1}^n G_i(x) < |W| \prod_{i=1}^n |W|^{-1/n} = 1$$

Como el determinante es menor que la unidad, entonces todos los autovalores son menores que es que la unidad, por tanto, el punto fijo  $x$  es estable .

De igual manera que en el lema anterior se da una condición suficiente para que un punto fijo sea estable, también se puede afirmar que no existe ningún punto fijo inestable que esté dentro de este hipercubo. Estos resultados se pueden completar en el caso de punto fijo de silla añadiendo la condición  $|W| > 1$ , este último caso se analiza con más detalle en [Tiño 2001].

Podemos también determinar otras condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de la red, o lo que es lo mismo, que todos los puntos fijos sean estables, es decir, que todos sus autovalores sean menores que uno. Para ello se puede utilizar el teorema del círculo de Gershgorin [Kincaid 1994]. Este plantea que los autovalores de una matriz  $A$  están en la intersección de los círculos en el plano complejo definidos por:

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \right\}$$

En figura 3.51 se puede observar que si

$$\max_i \{ |r_i| + |d_i| \} < 1 \quad (3.63)$$

entonces se garantiza que los autovalores están dentro del círculo unidad.

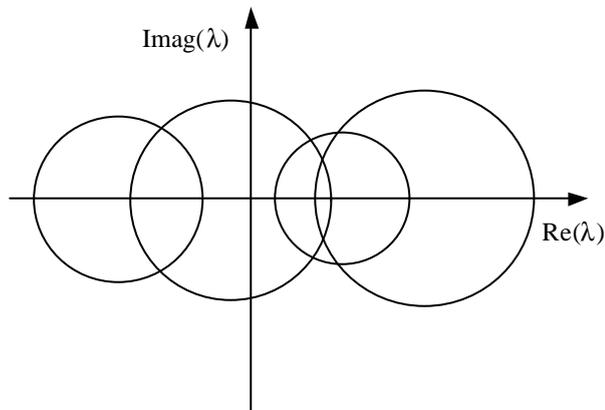


Figura 3.51. Círculos de Gershgorin en el caso de ser una matriz todos los elementos diagonales reales.

En el caso de la red neuronal la condición (3.63) queda de la siguiente manera:

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |w_{ij}| |G_j(x)| \right\} < 1$$

En general podemos plantear una condición más restrictiva para el caso de punto fijo distinto del origen. En el caso del origen esto siempre se cumple.

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^N |w_{ij}| \right\} < 1$$

En conclusión si el máximo de las sumas parciales de las filas de la matriz de pesos, en valor absoluto, no excede de la unidad entonces todos los puntos fijos son estables.



## Capítulo 4. Aplicaciones

En este capítulo se analizará el comportamiento dinámico de las redes neuronales en diversos problemas con diferentes grados de dificultad, entre estos están: la detección de dos patrones simples, la caracterización de potenciales evocados visuales y el problema de identificación de una planta correspondiente a un motor de corriente continua controlado en el inducido.

Se ha estudiado la capacidad de las redes neuronales en resolver los problemas anteriores. Por otra parte, se ha analizado el comportamiento dinámico de la red neuronal a lo largo del entrenamiento, para intentar relacionar la dinámica con el error. Basado en dicho estudio se ha planteado una estrategia de inicialización de los pesos con el fin de mejorar los resultados de los entrenamientos.

## 4.1 Detección de dos patrones temporales

Este problema es interesante, ya que por su simplicidad da una idea clara de la influencia de la dinámica en el funcionamiento deseado de la red neuronal ante las entradas. Este problema consiste en distinguir dos patrones muy simples en una serie temporal.

Se pretende que la red decida al final de la secuencia de entrada cuál de dos posibles patrones ha aparecido en la misma, para ello su salida en el instante final (el único considerado en el error) debe valer 1 o  $-1$  indicando que ha aparecido el primer patrón o el segundo.

Los patrones a entrenar son pulsos de dos clases (positivos y negativos) colocados aleatoriamente en la secuencia temporal. Un ejemplo de pulso positivo se puede observar en la siguiente figura.

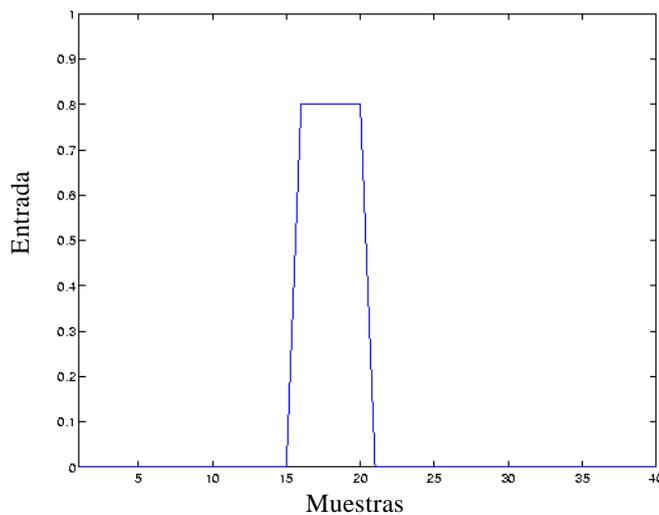


Figura 4.1. Patrón tipo pulso positivo con anchura de 5 muestras.

Se han obtenido buenos resultados con una sola neurona. En la siguiente figura se puede observar la curva de error correspondiente al entrenamiento de 20 patrones con 40 muestras cada uno y con pulsos de 5 muestras de ancho.

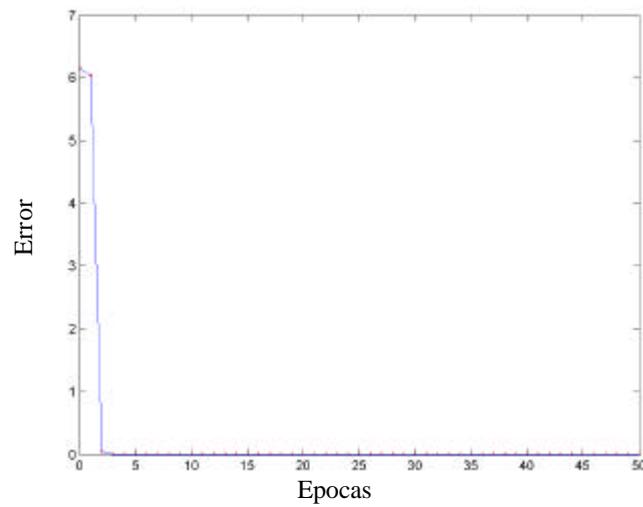


Figura 4.2. Curva de error del entrenamiento con 20 patrones de 40 muestras cada uno y con pulsos 5 muestras de ancho.

En la figura 4.3 se muestra el patrón de entrada, la salida deseada, y la salida que proporciona la red. Se puede observar que la salida deseada y la real se aproximan a partir de la muestra donde comienza el pulso.

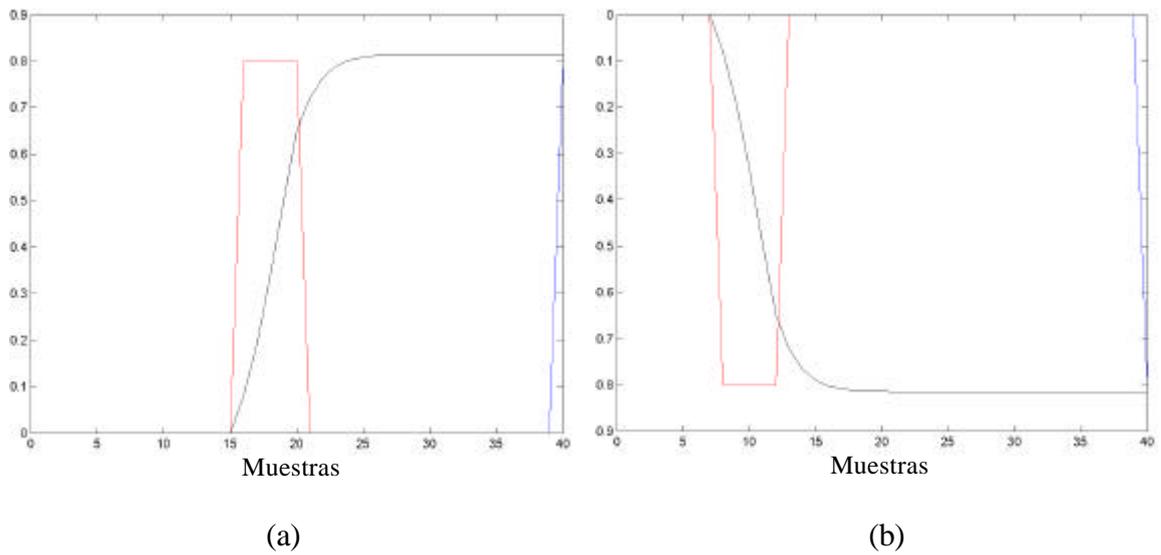


Figura 4.3. Salida de la red (trazado continuo), a) corresponde al pulso positivo y b) corresponde al pulso negativo.

Es interesante ver la relación de la variación de la dinámica propia de la red con el error durante el entrenamiento. El mapa que define la dinámica de una sola neurona (véase sección 3.2) tiene como parámetros dos pesos, el de realimentación y el peso umbral.

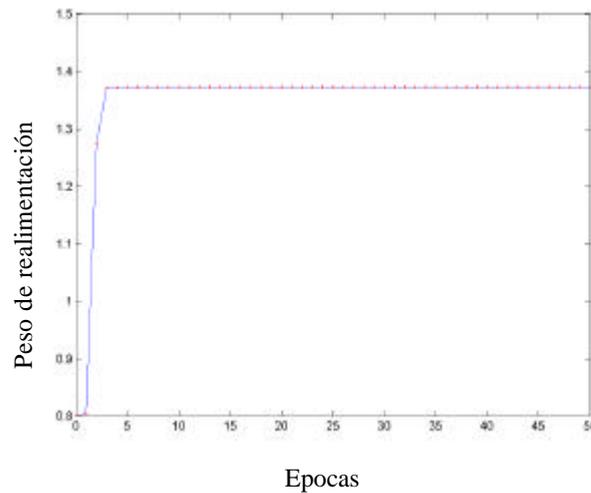


Figura 4.4. Evolución a lo largo del entrenamiento del peso de realimentación correspondiente a una neurona.

El cambio más significativo corresponde al peso de realimentación. En la figura 4.4 se muestra dicho cambio. Si la comparamos con la figura 4.2, se encuentra que el error baja considerablemente cuando el peso supera el valor unidad, es decir, el sistema autónomo (sin considerar entradas) de una neurona pasa de tener un único punto fijo estable (aproximadamente en el origen) a tener dos puntos fijos estables adicionales (bifurcación silla-nodo). Estos últimos puntos están situados casi simétricamente (el origen de la asimetría está en el peso umbral que es del orden de  $10^{-8}$ ). En la figura 4.5 se observa el espacio fásico unidimensional con los tres puntos fijos. Cuando se inicia el pulso positivo el estado se sitúa en el semieje positivo y al terminar dicho pulso el estado converge al punto fijo estable situado en el semieje positivo. Esto se debe a que el dominio de atracción es todo el semieje positivo. Con el pulso negativo ocurre lo contrario, convergiendo el estado al punto fijo estable situado en el semieje negativo.

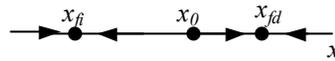


Figura 4.5. Dominios de atracción de los puntos fijos correspondientes a una neurona con peso de realimentación mayor que la unidad y peso umbral prácticamente cero.

Es interesante analizar la trayectoria en ausencia de entrada del sistema entrenado y con estado inicial cero, como se considera en el entrenamiento.

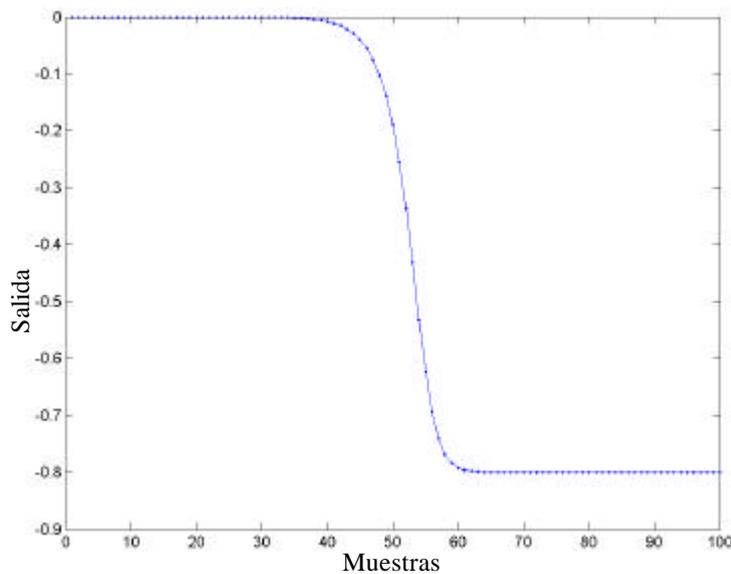


Figura 4.6. Evolución de la salida de la red con entrada nula y estado inicial nulo.

Se puede observar en la figura anterior que el sistema evoluciona hasta terminar en uno de los puntos fijos estables. Este comportamiento se debe a la dinámica propia del sistema, ya que el estado inicial se encuentra dentro del dominio de atracción de uno de los puntos fijos estables (véase figura 4.5). La evolución de la trayectoria dentro de las 40 primeras iteraciones (correspondientes al tamaño de la secuencia utilizada en el entrenamiento) es relativamente lenta. Esto hace posible que un cambio mínimo de la entrada provoque que se salte de un dominio de atracción a otro. A medida que nos alejamos del tamaño de la secuencia entrenada es necesario un valor de la entrada mayor para producir tal transición. Esto refleja la generalización del entrenamiento, ya que para un amplio rango de variaciones en la amplitud y ancho del pulso se sigue discriminando las dos clases de pulso, siempre y cuando se mantenga el tamaño de secuencia entrenada.

Hemos solucionado las dificultades cuando consideramos trayectorias con una longitud de secuencia mayor que la utilizada en el entrenamiento. Planteemos que ocurre en caso contrario, es decir, cuando se considera el error en trayectorias de longitud menor que las entrenadas. En figura 4.7 se observa que no se deja evolucionar la salida red lo suficiente como para llegar al estacionario y dar un valor adecuado en la última iteración.

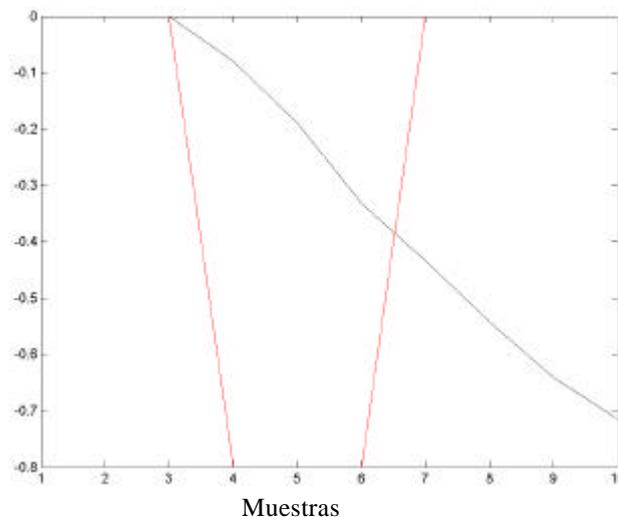


Figura 4.7. Representación de la salida y entrada de la red con trazado negro y rojo, respectivamente.

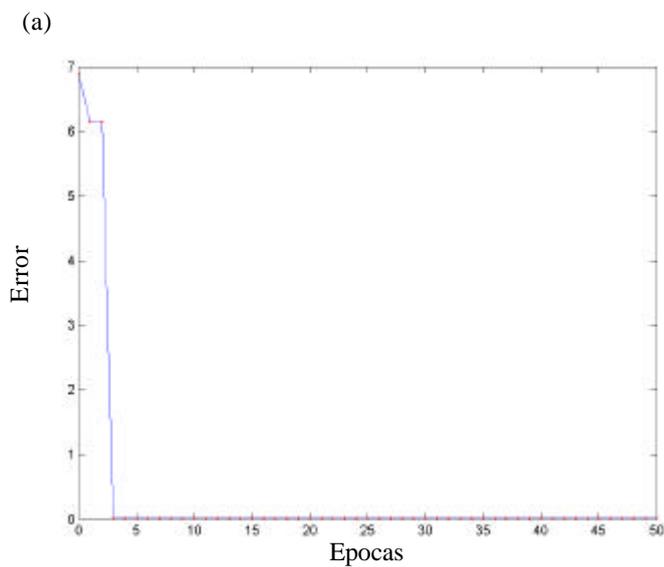
Como se ha visto, en este problema la red funciona de tal manera que cada patrón está asociado a un estado final de equilibrio si el sistema se dejara evolucionar lo suficiente.

#### 4.1.1 Estrategia de Inicialización de pesos

La estrategia clásica de inicialización de pesos heredada de las redes estáticas consiste en escoger los pesos iniciales con valores aleatorios muy pequeños [Thimm 1997]. Esto impide que las neuronas de la red se saturen. La saturación es una situación indeseable, ya que dificulta el entrenamiento mediante *backpropagation* en las redes estáticas o en general la propagación de la derivada de los estados en el tiempo en las dinámicas. Respecto a la dinámica propia (sin pesos umbrales) esto significa que el origen es el único punto fijo y, además, es estable. Si se consideran los pesos umbrales el origen cambia de posición ligeramente, manteniéndose la dinámica, ya que los autovalores estarán lejos del círculo

unidad. De esta manera la red neuronal es topológicamente equivalente a un sistema lineal estable. Vamos a intentar plantear una estrategia alternativa de inicialización de pesos que mejore el entrenamiento.

Para diseñar esta estrategia, consideremos las transiciones entre dinámicas que se pueden dar con una sola neurona. Hemos visto anteriormente que cuando se produce una de estas transiciones, la bifurcación tipo silla-nodo, el valor del error baja considerablemente. Veamos qué ocurre cuando tomamos como situación de partida la que corresponde a la situación crítica de la otra bifurcación (periodo doble). En este caso, el valor del peso de retroalimentación debe ser igual a menos uno. Se puede observar el resultado en las figuras 4.8.a y 4.8.b, donde se visualiza el error y el valor del peso de realimentación, respectivamente. El peso de realimentación tiende a ser mayor que uno, correspondiente con la dinámica de dos puntos fijos estables. Esto es esperable, ya que cuando se produce la bifurcación periodo doble ( $w=-1$ ) aparece un ciclo dos estable, o lo que es lo mismo, la salida de la neurona oscila de un valor positivo a negativo continuamente. Este comportamiento no es el adecuado desde el punto de vista de la salida deseada.



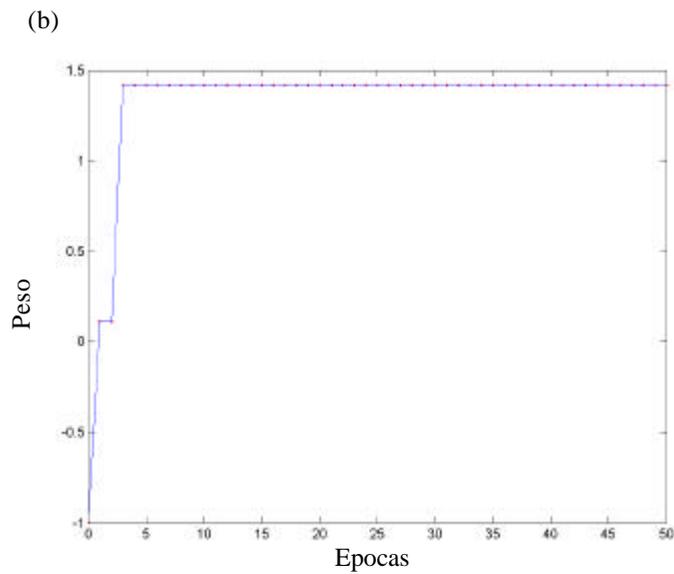


Figura 4.8. Evolución del error (a) y peso (b) a lo largo del entrenamiento comenzando con  $w$  igual a menos uno.

Visto lo anterior se puede plantear comparar tres estrategias de inicialización de pesos diferentes. La primera estrategia es la convencional, es decir, se eligen aleatoriamente con distribución uniforme en un intervalo simétrico respecto al origen. La segunda estrategia consiste en partir de los pesos aleatorios anteriores e imponerles que el peso de realimentación valga uno (bifurcación silla-nodo). La tercera estrategia es similar a la segunda salvo que el peso de realimentación vale menos uno (bifurcación periodo doble).

En la figura 4.9 se puede comparar los resultados entre la situación inicial y final de los tres histogramas de la distribución del error correspondiente a las tres estrategias anteriormente mencionadas. Para realizar dichos histogramas se han considerado 3000 muestras con distribución uniforme en el intervalo  $(-0.01, 0.01)$  (las gráficas de la izquierda corresponden a la distribución de errores iniciales y los de la derecha a los entrenados con 10 épocas). Se puede observar que la mejor estrategia corresponde a comenzar en la bifurcación silla-nodo. La segunda mejor es la que comienza en la bifurcación periodo doble superando incluso la técnica clásica de inicialización de pesos. Este resultado es coherente con lo mostrado en las figuras 4.9 y 4.10. Los histogramas finales están claramente discretizados, esto significa que hay muchas configuraciones de pesos que corresponden aproximadamente a los mismos

valores de error. Esto se debe a la presencia de mínimos locales en la superficie de error donde convergen múltiples entrenamientos.

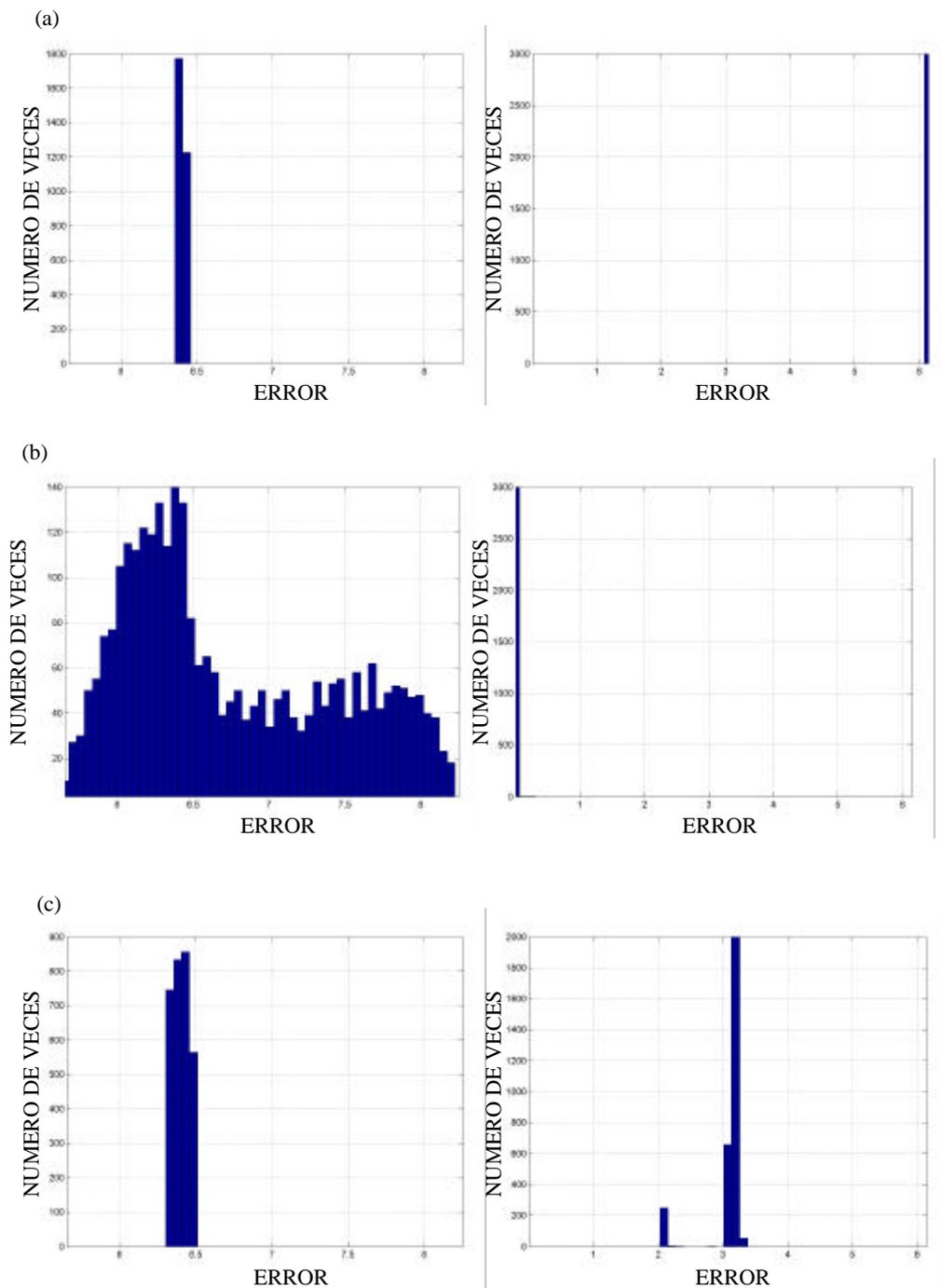


Figura 4.9. Histogramas de la distribución del error al inicio y final del entrenamiento. a) puramente aleatorio, b) imponiendo que se comience en la bifurcación silla-nodo y c) imponiendo que se comience en la bifurcación periodo doble.

En la siguiente figura se puede observar la variación del histograma durante el entrenamiento. En el eje de las Z se representa el porcentaje respecto al número de muestras totales.

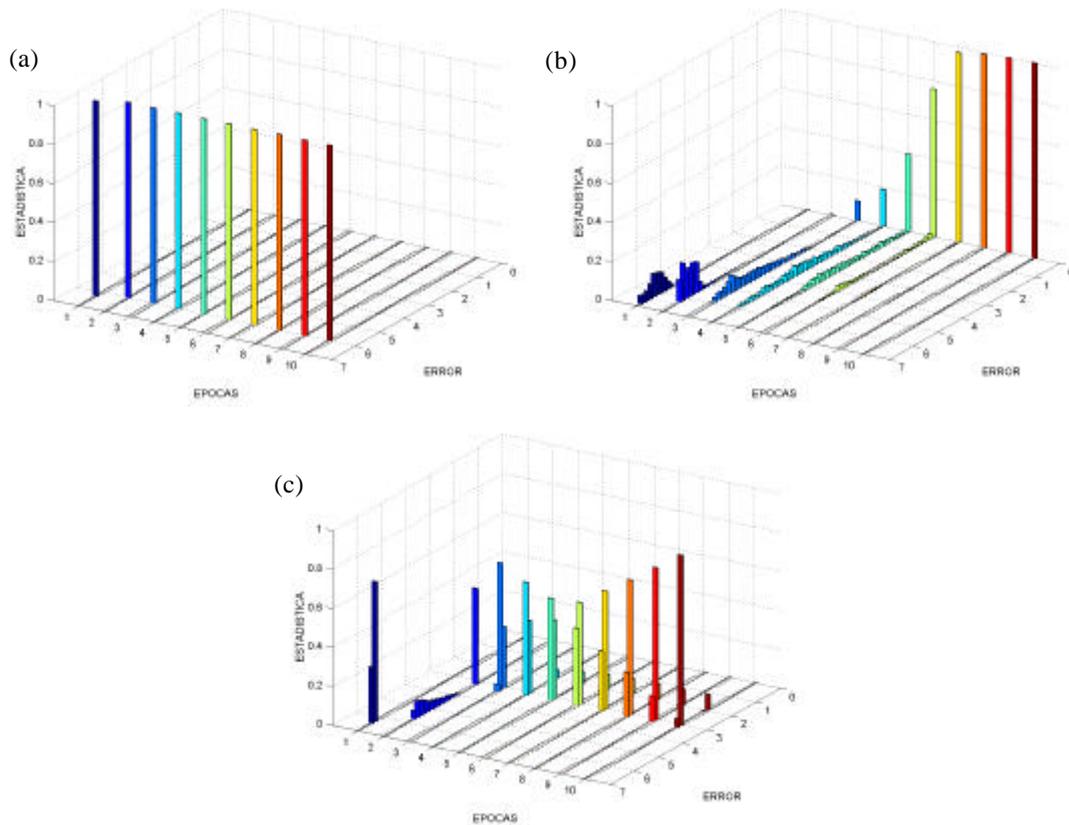


Figura 4.10. Distribución normalizada del error a lo largo de las épocas: a) puramente aleatorio, b) comenzando por la bifurcación silla-nodo, y c) comenzando por la bifurcación periodo doble.

En la figura 4.10.a se observa que los entrenamientos convergen rápidamente a un mínimo con error relativamente alto. En la figura 4.10.b los errores evolucionan a un único mínimo local cercano a cero. En el último caso (figura 4.10.c) convergen a varios mínimos locales de errores superiores al caso anterior.

## 4.2 Detección de la señal del Potencial evocado

El potencial evocado es una respuesta eléctrica del Sistema Nervioso Central que guarda relación temporal, concreta y definida con el estímulo que la ha originado, siendo su principal característica la reproducibilidad. Generalmente este tipo de estímulo es sensorial, cognitivo o

un acto motor. En el caso que el estímulo sea de naturaleza sensorial la respuesta se denomina potencial evocado sensorial: auditivo, visual o somatosensorial [Regan 1989].

Estas respuestas eléctricas se recogen mediante una serie de electrodos situados en la cabeza del sujeto. Esas señales son amplificadas y registradas en un electroencefalógrafo.

Los potenciales evocados están formados por una serie de componentes. Dichas componentes se entienden como aquellos máximos y mínimos que se observan y que caracterizan al potencial evocado. Estas componentes se suelen denominar también puntas y valles del potencial evocado.

A modo de ejemplo, los potenciales evocados visuales se pueden utilizar, desde el punto de vista del diagnóstico, para: observar anomalías en el sistema visual, demostrar alteraciones funcionales en el sistema visual (cuando sólo hay síntomas en otro sistema, como la esclerosis múltiple).

En el problema a tratar nos centraremos en los potenciales evocados visuales, por tanto, se describe a continuación su morfología.

#### **4.2.1 Morfología del potencial evocado visual**

La morfología de los potenciales evocados visuales suele asemejarse a una letra *V* (ver figura 4.11) y con menor frecuencia, a una letra *W*. Los estímulos visuales más usuales son el flash y el damero (este estímulo se produce mostrando en un monitor un patrón de damero y su inversa, es decir, los cuadros blancos pasan a ser negros y viceversa).

Ocurre en este tipo de potenciales que si la luminosidad del estímulo es bastante intensa, empiezan a aparecer picos en torno a los 25 milisegundos, dependiendo su presencia del individuo. Veamos en la siguiente figura un potencial evocado con sus componentes.

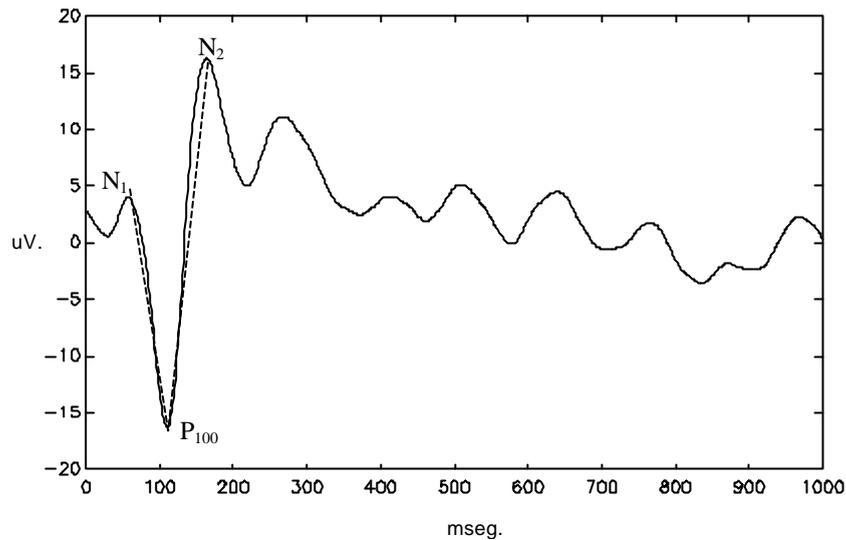


Figura 4.11. Potencial evocado visual.

Se puede observar en la anterior figura que existen tres componentes principales, denominadas  $N_1$ ,  $P_{100}$  y  $N_2$  que delimitan la  $V$ . La notación  $N$  y  $P$  indica polaridades negativas y positivas de las puntas, por tanto, la denominación dependerá de la referencia eléctrica utilizada. Debido al montaje de adquisición, en el caso de la figura, aparecen polaridades inversas.

El problema a resolver es la localización temporal mediante redes neuronales de la componente  $P_{100}$  del potencial evocado visual. Para ello se dispone de un número de registros, junto con la evaluación de un experto neurofisiólogo de la posición temporal de las puntas más significativas ( $N_1$ ,  $P_{100}$  y  $N_2$ ).

#### 4.2.2 Entrenamiento para la detección de la componente $P_{100}$

La determinación de la componente  $P_{100}$  depende del contexto temporal, con lo cual a la red se le exige de alguna manera que tenga capacidad de memoria. Por tanto, analicemos la capacidad de memoria de la red neuronal.

Una medida de la memoria es la relación de la variación del estado final respecto a la del inicial. Formalicemos en primer lugar el concepto de dominio de atracción definido en el capítulo 2.

En el caso del atractor hiperbólico  $X$ , se define su dominio de atracción  $\mathbf{b}(X)$  como el conjunto dado por (véase sección 2.3):

$$\mathbf{b}(X) = \left\{ a : \forall \mathbf{e} > 0, \exists l, \exists x \in X \text{ t.q. } \|f^l(a) - x\| < \mathbf{e} \right\}$$

siendo  $f$  un mapa.

Respecto a la influencia que tiene la entrada frente a las características del sistema autónomo (es decir, sin entrada), veamos la propiedad denominada de *shadowing* [Hale 1991], que indica:

**Definición 4.1.** Un sistema  $f$  posee la propiedad de *shadowing* si  $\forall \mathbf{e} > 0$  existe un  $b > 0$ , tal que para cualquier  $b$ -pseudo-órbita<sup>1</sup> los estados del sistema con entrada ( $x_{na}$ ) cumplen:

$$\|x_{na}(k) - f^k(x(0))\| < \mathbf{e}$$

donde:

$f^k$  es la composición del mapa autónomo  $f$   $k$  veces ( $f^0$  es el mapa identidad)

$x(0)$  es un estado inicial del sistema sin entrada o autónomo

$x_{na}(k)$  estado del sistema con entrada o no autónomo en el instante  $t$

---

<sup>1</sup>  $b$ -pseudo-órbita. Son las trayectorias del sistema no autónomo cuyos estados  $\{x_{na}(t)\}$  verifican:

$$\|f(x_{na}(t)) - x_{na}(t+1)\| < b, \forall t \geq 0$$

donde  $x_{na}$  son los estados del sistema no autónomo (con entrada) y  $f$  es el mapa autónomo.

Se puede demostrar que algunas redes neuronales discretas en el tiempo tienen esta propiedad de *shadowing*. En particular, se verifica para redes con funciones de activación tipo sigmoide, esto es, funciones monótonamente crecientes, acotadas y continuamente diferenciables [Garzon 1994].

Esto garantiza que si fijamos un  $b$  adecuado determinando así la cota de la entrada, para todos los estados  $x_{na}(0)$  (condición inicial del sistema no autónomo) perteneciente a  $\mathbf{b}(X)$  y lo suficientemente alejados de su frontera, los estados generados por el sistema no autónomo permanecen asintóticamente en un entorno  $\epsilon$  de  $f^k(x_{na}(0))$ , y por tanto de los puntos  $X$ . Intuitivamente, esto permite asegurar que acotando convenientemente la entrada nuestro sistema evolucionará de la misma forma que el sistema autónomo.

Consideremos a continuación la definición de dominio de atracción reducido.

**Definición 4.2.** Denominamos  $\mathbf{G}(X)$  el dominio atracción reducido de un atractor hiperbólico  $X$ , el conjunto de los puntos  $y$  en el  $\mathbf{b}(X)$ , tal que  $\forall l \geq 1$ , todos los autovalores  $D^l f(y)$  son menores que uno.

**Definición 4.3.** Se dice que el estado del sistema no autónomo permanece atrapado robustamente en el atractor hiperbólico  $X$  a partir de la iteración  $l$ , si el estado autónomo en la iteración  $l$   $x_a(l)$  está en el dominio de atracción reducido  $\mathbf{G}(X)$ .

Si el sistema está atrapado robustamente la matriz Jacobiana evaluada en el estado  $x_{na}(k-1)$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{na}(k)}{\partial \mathbf{x}_{na}(k-1)} = Df(\mathbf{x}_{na}(k-1))$$

tiene todos sus autovalores dentro del círculo unidad, y como la dependencia del estado  $x_{na}(k)$  respecto a estados pasados viene dado por el producto de las matrices anteriores

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{na}(k)}{\partial \mathbf{x}_{na}(k-n)} = \frac{\partial \mathbf{x}_{na}(k)}{\partial \mathbf{x}_{na}(k-1)} \frac{\partial \mathbf{x}_{na}(k-1)}{\partial \mathbf{x}_{na}(k-2)} \dots \frac{\partial \mathbf{x}_{na}(k-n+1)}{\partial \mathbf{x}_{na}(k-n)}$$

se puede demostrar que este producto tiende a la matriz cero a medida que el número de factores crece (dependencia entre estados más separados en el tiempo).

Esto plantea una dificultad en el aprendizaje cuando existe dependencia de grandes longitudes en el tiempo, y se entrena la red considerando sólo el instante temporal final ( $T$ ) en la función de coste, esto es:

$$J(w) = \frac{1}{2} \sum_p (y_p(T) - d_p(T))^2$$

donde:

$y_p(T)$  es la salida  $p$  de la red en el último instante

$d_p(T)$  es la salida deseada  $p$  en el último instante

Si se calcula el gradiente tendremos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \nabla_w J(w) &= \sum_p (y_p(T) - d_p) \nabla_{x(T)} y_p(T) \nabla_w x(T) \\ &= \sum_p (y_p(T) - d_p) \nabla_{x(T)} y_p(T) \sum_{t=1}^T \nabla_{x(t)} x(T) \nabla_w x(t) \end{aligned}$$

Con la anterior expresión vemos que si ocurre la condición de atrapado a un atractor, las partes del gradiente dependientes de la información en instantes  $t \ll T$  son despreciables frente al valor de las de instantes más cercanos a  $T$ , esto es:

$$\nabla_{x(t)} x(T) = \frac{\partial \mathbf{x}_{na}(T)}{\partial \mathbf{x}_{na}(t)} \rightarrow 0 \text{ con } t \ll T$$

como se vio anteriormente.

Este fenómeno es el problema de anulación del gradiente o comportamiento de olvido [Bengio 1994] y [Lin 1996]. Este problema es una dificultad grave cuando se tienen en cuenta dependencias de largo tiempo.

Basándonos en lo anteriormente mencionado podríamos utilizar una entrada y entrenar teniendo en cuenta sólo el estado final, pero existen dos problemas. En primer lugar, la dificultad de representar el instante temporal de la  $P_{100}$  en la salida final de la red, y por otro lado, el problema del olvido posible debido a que puede existir gran distancia temporal entre el suceso significativo ( $P_{100}$ ) y el instante de la decisión final.

Para evitar estas dificultades recurriremos a ponderar el error en todos los instantes con lo que el problema equivale a especificar una trayectoria deseada completa para la salida. Esta trayectoria es la que aparece en trazo discontinuo en la figura 4.12. Como se aprecia se desea dar una salida significativa justo en el instante en donde se produce la  $P_{100}$ .

Los resultados con esta estrategia fueron negativos apareciendo sólo una ligera respuesta en torno a la  $P_{100}$ , como se ve en el trazo continuo de la figura (este resultado corresponde a un entrenamiento con cuatro neuronas):

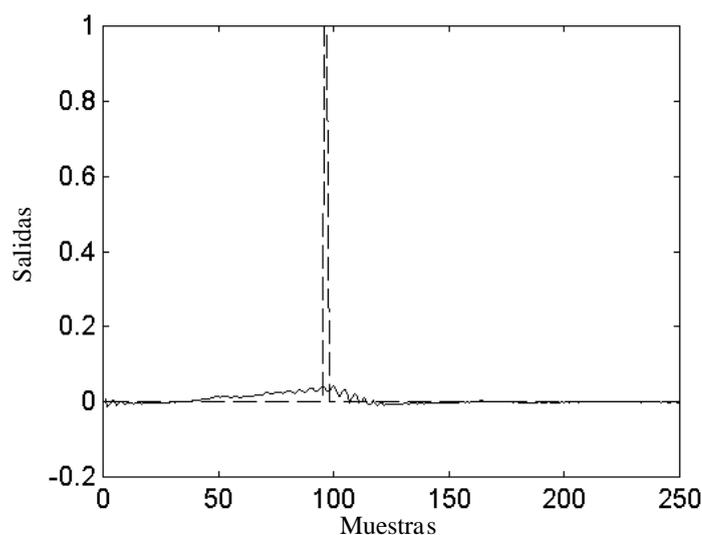


Figura 4.12. Representación de la salida real (trazo continuo) y la salida deseada (trazo discontinuo), utilizando la red Williams-Zipser con 4 neuronas y 1 entrada, y entrenando con 44 patrones.

Este planteamiento tiene una clara desventaja y es que en el momento en donde ocurre la  $P_{100}$  se tiene que producir la decisión de forma instantánea cuando sólo se ha procesado información sobre la entrada hasta ese instante. Es decir, la decisión se toma sin tener en cuenta un contexto temporal completo en torno a la  $P_{100}$ .

Por otro lado, se puede estudiar la influencia de los estados pasados respecto al estado en el último instante para comprobar si se da la condición de olvido. Una magnitud que da idea de la influencia del estado en un instante pasado  $T-\tau$  sobre el estado final en el instante  $T$  es:

$$\mathbf{I}(\mathbf{t}) = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{x}(T-\mathbf{t})} \right|}{\sum_{\mathbf{t}=0}^T \left| \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{x}(T-\mathbf{t})} \right|}$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{x}(T-\mathbf{t})} = Df(T) Df(T-1) \dots Df(T-\mathbf{t}) \tag{4.1}$$

siendo:

$$(Df(T))_{ij} = \frac{\partial x_i(T)}{\partial x_j(T-1)} = w_{ij} \left( 1 - \tanh^2 \left( \sum_{l=1}^n w_{il} x_l(T-1) \right) \right)$$

En la gráfica siguiente representamos el valor  $\mathbf{I}(\mathbf{t})$  considerando sólo la dependencia de la componente del estado correspondiente a la salida de la red neuronal respecto al mismo estado en el pasado.

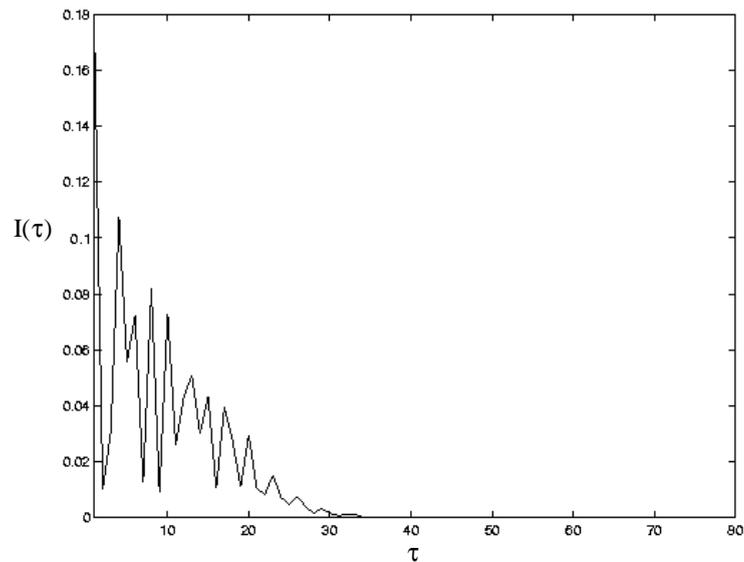


Figura 4.13. Dependencia del estado salida en el último instante respecto a los anteriores.

Se observa que para  $t$  mayores de 30 la influencia del estado inicial es despreciable. Esto es indicativo de que efectivamente ocurre un fenómeno de olvido. Hay que observar que el parámetro  $I$  está relacionado con los coeficientes de Lyapunov, ya que estos últimos son los autovalores de la matriz definida en la ecuación 4.1 considerando que  $T \rightarrow \infty$ .

Veamos en general la dependencia de cada instante respecto a los pasados. Para ello representamos en un gráfico de niveles de gris la magnitud  $\left| \frac{\partial x(T)}{\partial x(T-t)} \right|$  siendo  $x$  el estado correspondiente a la salida de la red. Se considera  $T$  en el eje horizontal y  $t$  en el vertical.

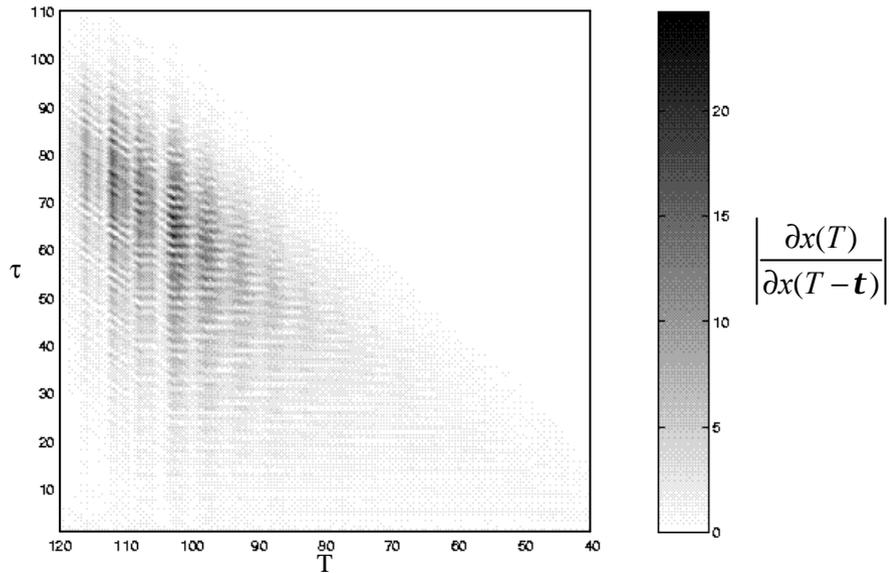


Figura 4.14. Representación de la dependencia del estado de la salida en cada instante respecto a los pasados (con una entrada).

Como se aprecia en este caso los factores más influyentes son los estados en los instantes comprendidos entre 90 y 110 con respecto a los estados de los tiempos entre 30 y 70.

Planteemos un diagrama similar considerando ahora la influencia de las entradas sobre la salida de la red (figura 4.14).

Se observa en primer lugar que la distribución respecto a instantes y retardo es similar a la anterior gráfica pero en una escala diferente. Esto es indicativo de que la influencia mayor es la correspondiente a los estados pasados en lugar de las entradas pasadas.

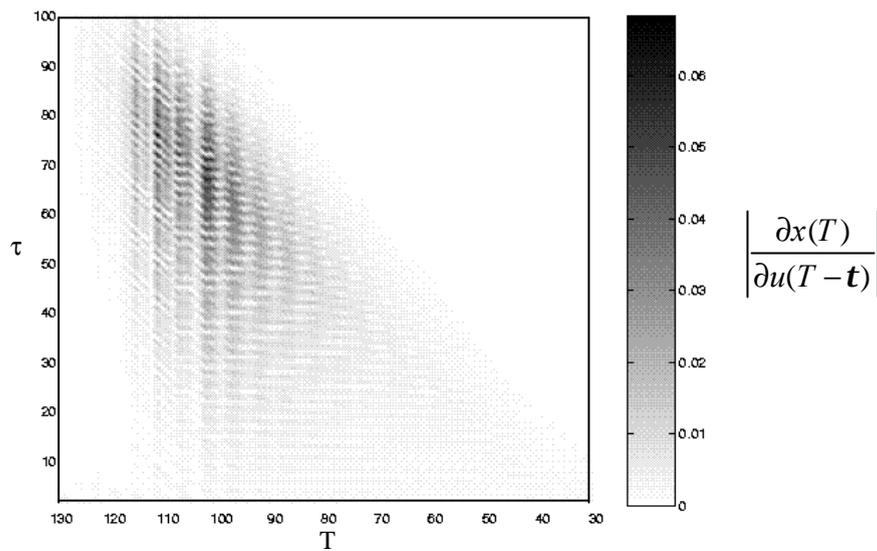


Figura 4.15. Representación de la dependencia del estado de la salida en cada instante respecto a las entradas pasadas una vez entrenada, con cuatro neuronas y una entrada ( $u$ ).

#### 4.2.4 Configuración alternativa de las entradas

Para superar el problema del contexto podemos plantear una configuración diferente de las entradas de la red. Una manera sencilla es considerar como entrada de la red el potencial evocado retrasado y adelantado en el tiempo [Piñeiro 1998], como se aprecia en la siguiente figura:

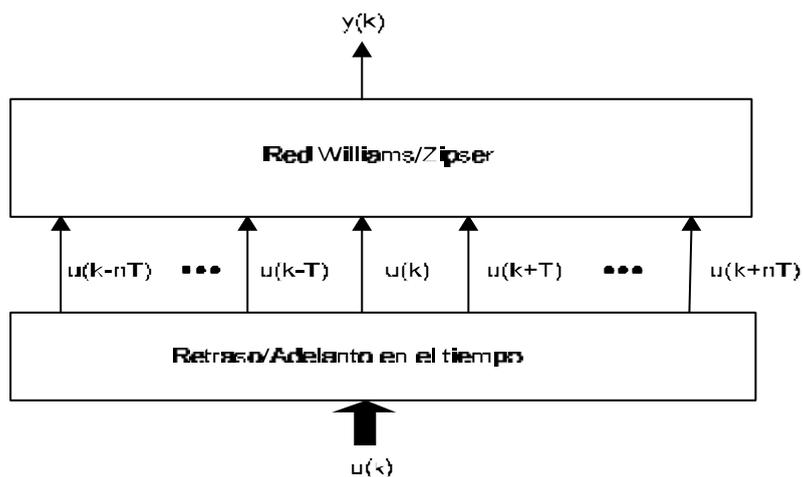


Figura 4.16. Configuración de las entradas a la red Williams -Zipser propuesta.

De esta forma, se le ofrece a la red un contexto temporal más amplio.

Se ha elegido arbitrariamente un desplazamiento  $T=10$  y un  $n=2$ , como se ve en la figura:

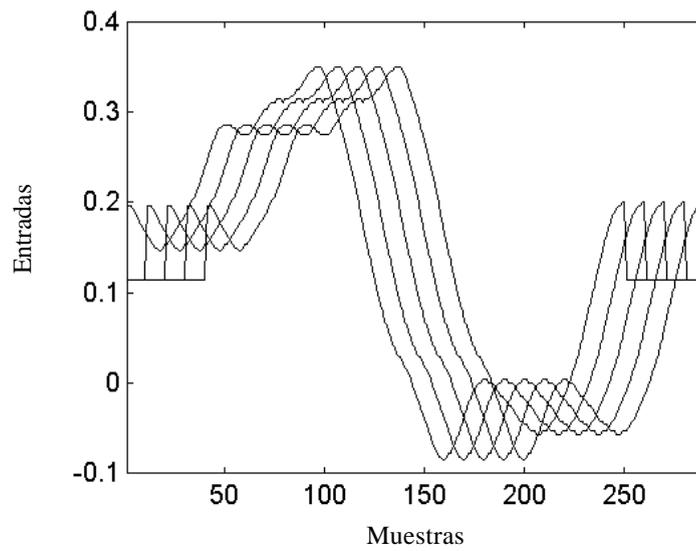


Figura 4.17. Configuración de las entradas a la red con  $T=10$  y  $n=2$ .

Los resultados fueron mucho mejores en esta configuración (utilizando cuatro neuronas), como se observa en la siguiente figura.

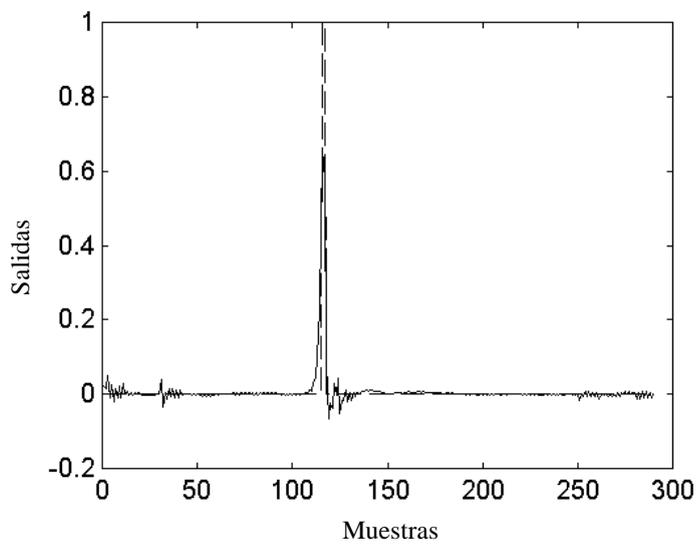


Figura 4.18. Representación de la salida real (trazo continuo) y la salida deseada (trazo discontinuo), utilizando la red Williams-Zipser con 4 neuronas y con las entradas desplazadas, y entrenamiento con 44 patrones.

De igual forma que con una entrada planteemos la magnitud  $I(t)$  frente a  $\tau$ , considerando así la dependencia relativa de la salida en el último instante de la secuencia respecto a instantes anteriores.

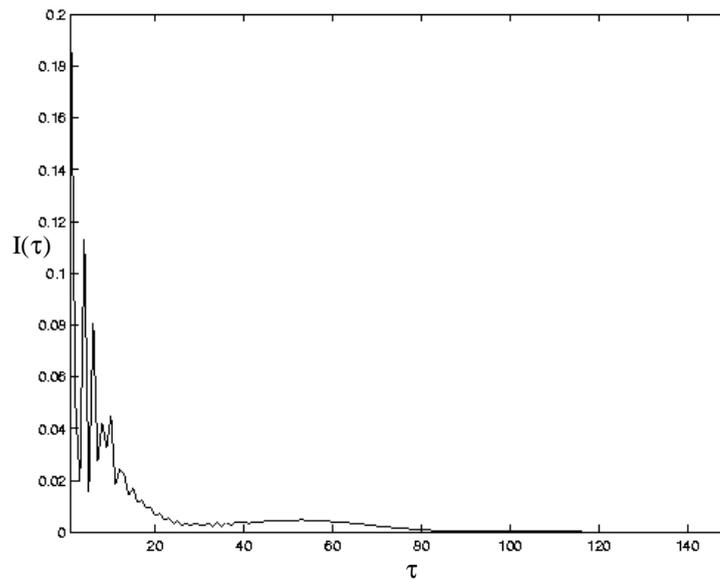


Figura 4.19. Dependencia del estado salida en el último instante respecto a los anteriores (con cinco entradas desplazadas).

Observamos un comportamiento más suave en líneas generales y una influencia residual de bajo valor que se mantiene durante más tiempo. Vemos, por tanto, que para cinco entradas existe el fenómeno de olvido al igual que para una entrada.

De igual forma también es interesante ver la dependencia del estado salida en cada instante respecto a los pasados (figura 4.20).

Se aprecia en la figura 4.20 que existe un máximo claro en el instante donde ocurre la  $P_{100}$  (muestra 119) respecto a puntos retardados entre 10 y 25 etapas anteriores. La intensidad de la influencia es mucho mayor que en el caso de una entrada (escala de niveles de grises).

Por otro lado, se observa una franja oblicua (véase figura 4.20) que indica la importancia del estado salida en el instante donde ocurre la  $P_{100}$  respecto a todos los estados a lo largo del tiempo.

Veamos la dependencia de la salida respecto a la entrada no desplazada ( $n=0$ ) en instantes pasados (Figura 4.21). En la figura existe un comportamiento análogo a la figura 4.19, observándose que la dependencia respecto a entradas pasadas es de mayor magnitud que en el caso de una entrada.

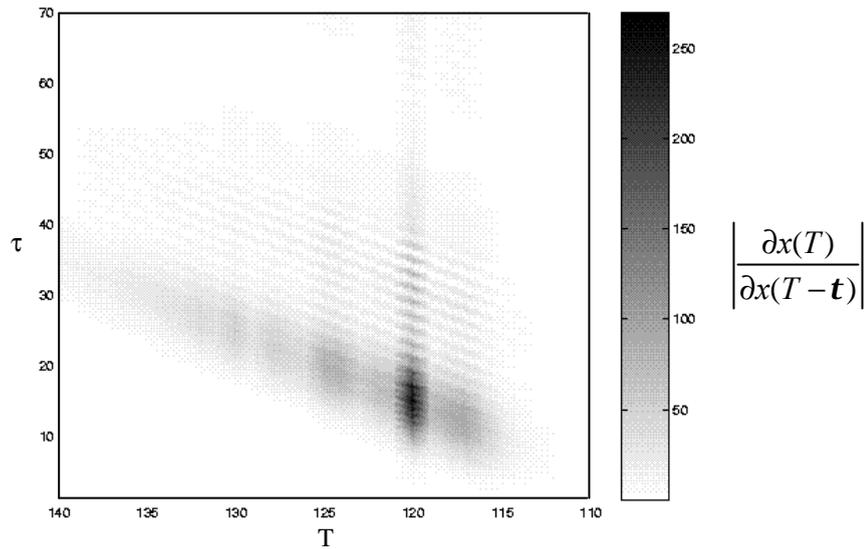


Figura 4.20. Representación de la dependencia del estado salida en cada instante respecto a los pasados (con cinco entradas desplazadas).

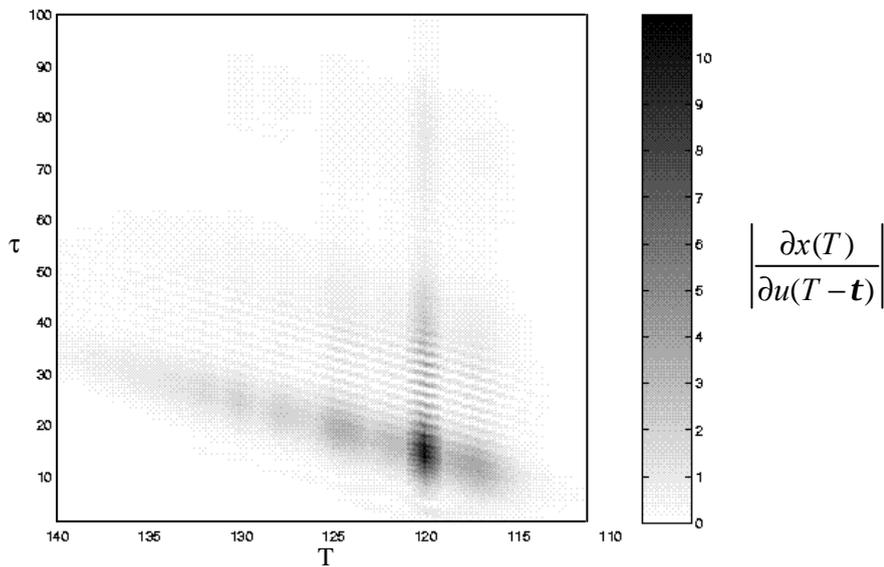


Figura 4.21. Representación de la dependencia del estado de la salida en cada instante respecto a las una de las entradas ( $u(k)$ ) una vez entrenada con cuatro neuronas y cinco entradas desplazadas.

### 4.2.5 Estudio de la dinámica

En esta sección se analizará la configuración dinámica correspondiente a los pesos de los entrenamientos con cuatro neuronas. En primer lugar, se estudiará la dinámica con la

configuración de una entrada, y en segundo lugar, la configuración con múltiple entradas desplazadas en el tiempo.

#### 4.2.5.1 Configuración con una entrada

En este caso la dinámica correspondiente a los pesos entrenados considerando pesos umbrales es de un punto fijo estable y dos ciclos de periodo dos, uno estable y otro de silla. Por tanto, el comportamiento cualitativo lo caracteriza el punto fijo y ciclo de periodo dos estable. En las siguientes figuras podemos observar dicha configuración.

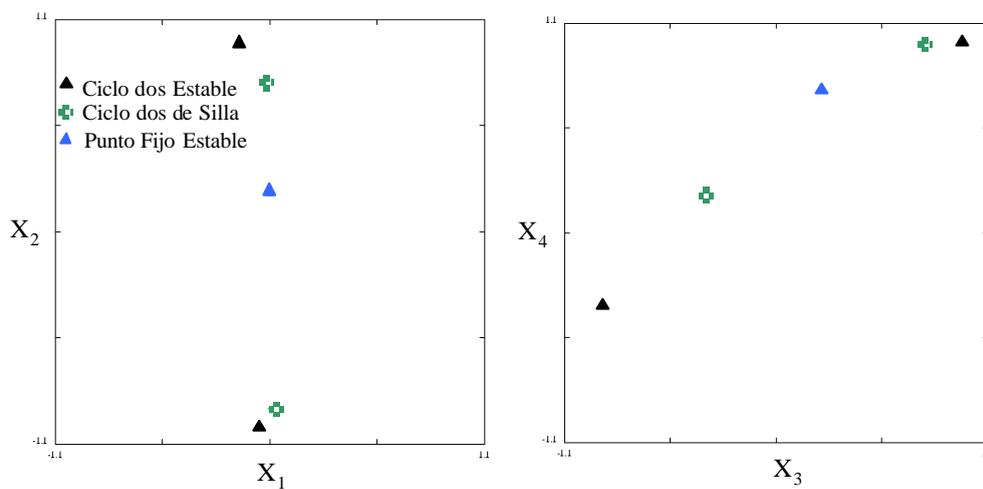


Figura 4.22. Configuración dinámica correspondiente al caso de una sola entrada.

Por otra parte, se ha determinado la pertenencia de los estados generados con el sistema no autónomo (considerando los 44 patrones) a los dos dominios de atracción del ciclo dos y punto fijo estables.

En las siguientes figuras aparecen los valores de los cuatro estados (correspondientes a redes de cuatro neuronas) en dos proyecciones del espacio fásico. Se representa con triángulo negro el ciclo dos estable, con triángulo blanco el punto fijo estable, con puntos azules los estados del sistema no autónomo que pertenecen al dominio de atracción del ciclo dos estable, y por último, con puntos rojos los estados pertenecientes al punto fijo estable.

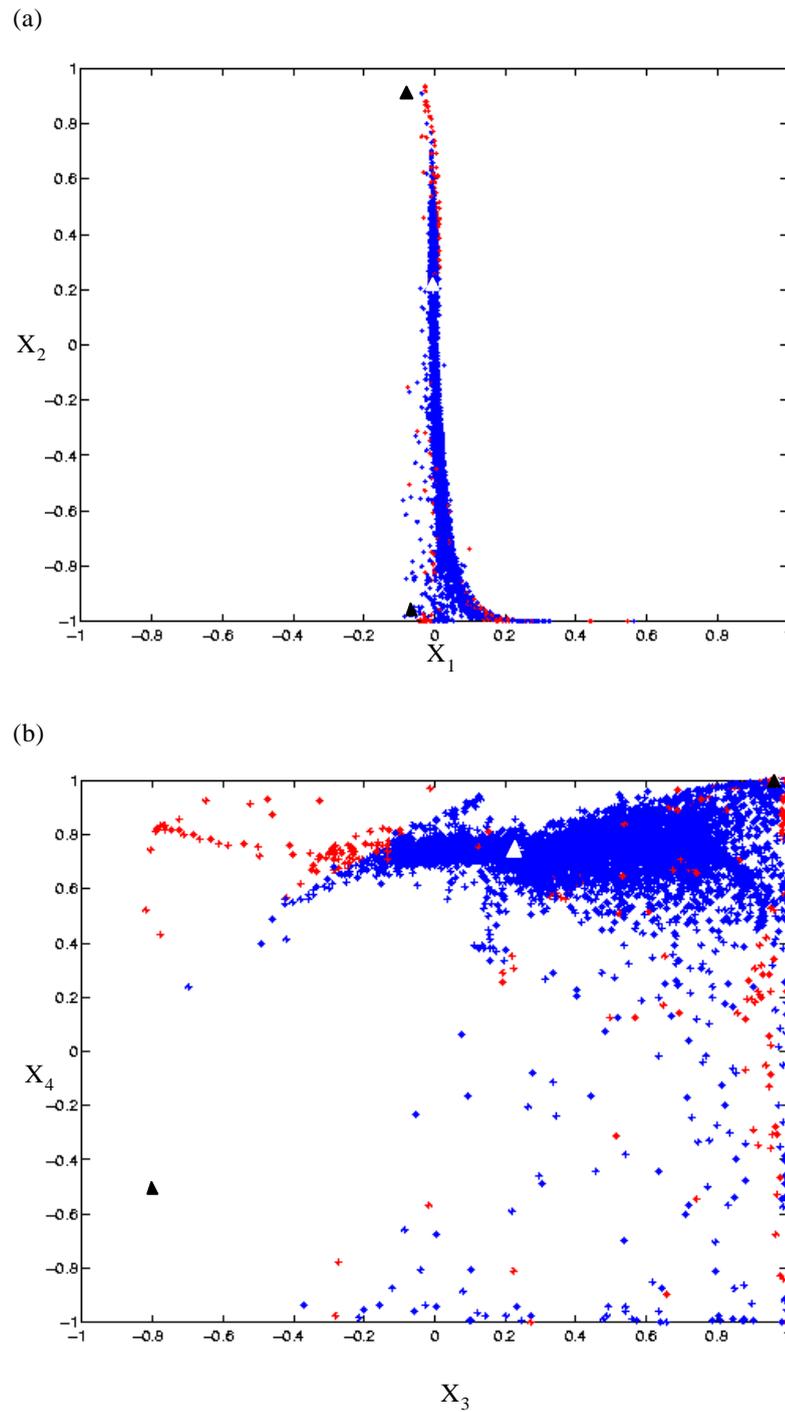


Figura 4.23. (a) Representación de los estados proyectados en el plano  $x_1x_2$ . (b) Representación de los estados proyectados en el plano  $x_3x_4$ .

Observamos en la primera figura 4.23.a que el estado  $x_1$  correspondiente a la salida representa una pequeña variación respecto al resto, debido a que, como se ha visto en otras ocasiones, el estado cero se pondera mucho en el entrenamiento.

A continuación podemos observar las trayectorias considerando los pesos umbrales, como estado inicial el origen y sometidos a la acción de las entradas utilizadas en el entrenamiento (44 patrones). En la figura 4.24, correspondiente a la evolución del estado con una sola entrada, observamos que el estado  $x_1$  (salida de la red) varía en un pequeño rango en torno al origen, mientras que el resto de los estados experimentan oscilaciones de mayor amplitud. Esto se debe a que la salida deseada consiste en un patrón cuyo valor es cero a lo largo del tiempo salvo en el instante donde aparece la  $P_{100}$ . Esto se mantiene en la figura 4.25.

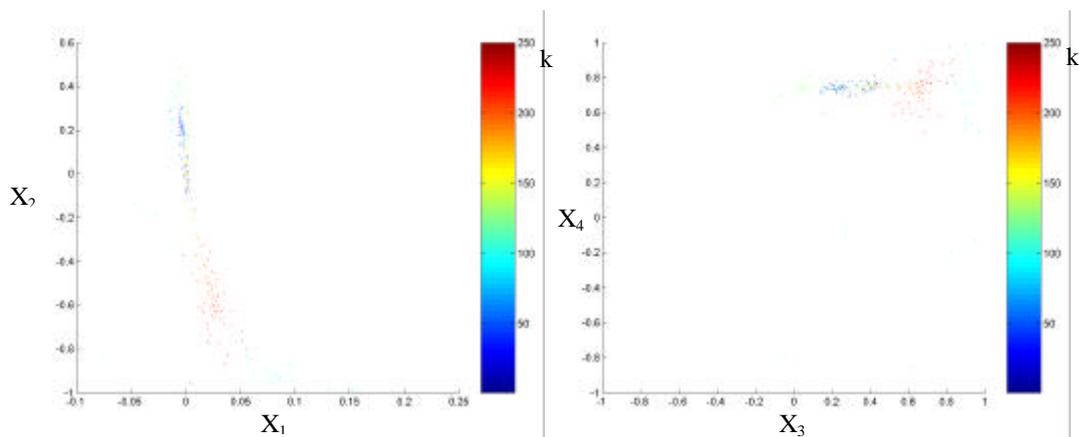


Figura 4.24. Evolución de los estados correspondiente un solo patrón de entrada, el color codifica la iteración ( $k$ ).

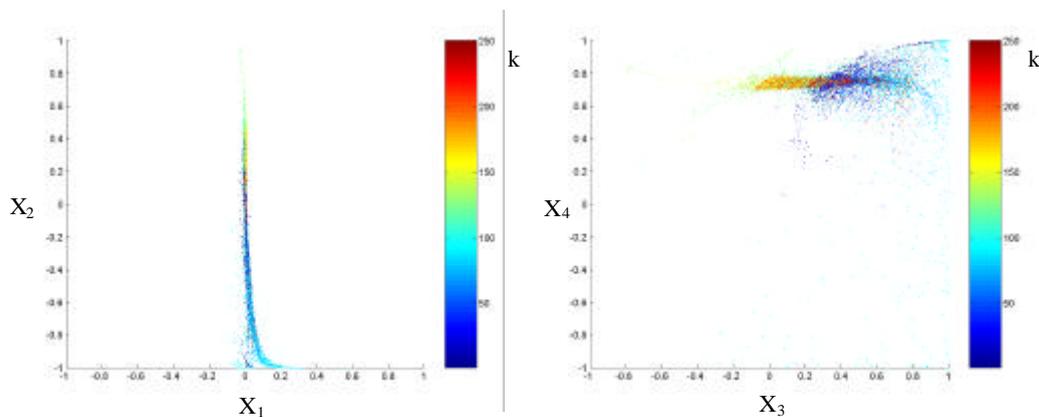


Figura 4.25. Evolución de los estados correspondiente a las trayectorias correspondientes a todos los patrones de entrada, el color codifica la iteración ( $k$ ).

Si se considera cero los pesos umbrales aparece un único punto fijo tipo silla situado en el origen y un atractor caótico. En la siguiente figura se representa dicho atractor caótico. A pesar de ser un movimiento caótico la coordenada  $X_1$ , correspondiente a la salida de la red, permanece en torno a cero en todos los instantes temporales.

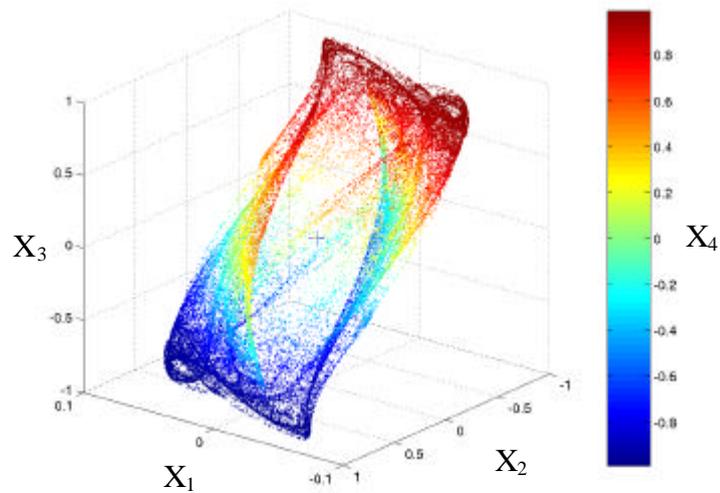


Figura 4.26. Atractor caótico correspondiente a los pesos entrenados sin considerar los pesos umbrales y con la configuración de una entrada.

Para verificar que tenemos realmente un comportamiento caótico podemos calcular los exponentes de Lyapunov. Estos se pueden observar en la siguiente figura donde se calculan de forma iterativa.

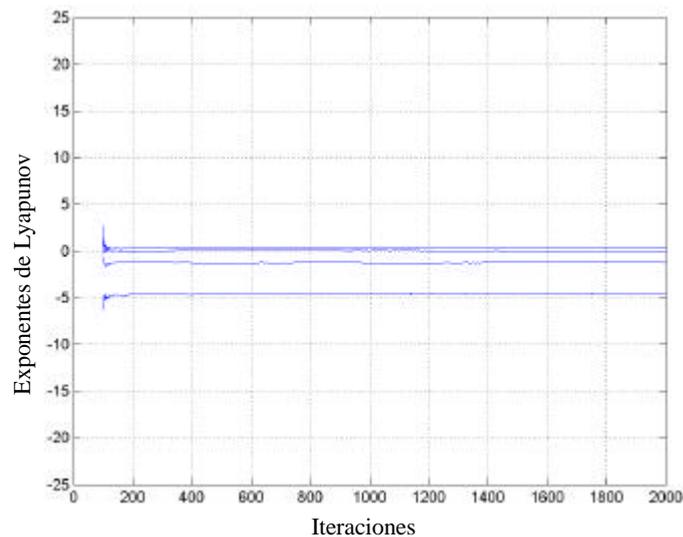


Figura 4.27. Exponentes de Lyapunov correspondientes a la configuración dinámica sin considerar pesos umbrales y con la configuración de una entrada.

En este caso los valores de los exponentes de Lyapunov son 0.2621, -0.0024, -1.2646 y -4.6106. Sólo existe un exponente positivo con lo cual este caos no es robusto. El número de parámetros a variar es menor que el número de exponentes de Lyapunov positivos [Barreto 1997].

#### 4.2.5.2 Nueva configuración con múltiples entradas desplazadas

Analizaremos la configuración dinámica considerándolas entradas desplazadas de los pesos ya entrenados, con pesos umbrales y sin ellos. En el caso de no existir pesos umbrales aparecen cuatro puntos fijos de silla y un ciclo de periodo dos estable, como se observa en la figura 4.28. Por otro lado, con pesos umbrales existen cuatro puntos de silla, un ciclo dos tipo silla y un punto fijo estable, como se observa en la figura 4.29.

Es importante indicar que, a pesar de tener una distribución de número y tipo de punto fijo distinta, el comportamiento dinámico es parecido. En el primer caso las trayectorias decaen al ciclo dos, y en el segundo caso lo hacen en el punto fijo estable, ya que el dominio de atracción de estos atractores estables es todo el espacio fásico en ambas situaciones. Por otra parte, considerando únicamente la componente del estado que corresponde a la salida de la red la situación es todavía más parecida, ya que respecto a esta componente las coordenadas del ciclo dos son prácticamente idénticas, como se observa en la figura 4.28.

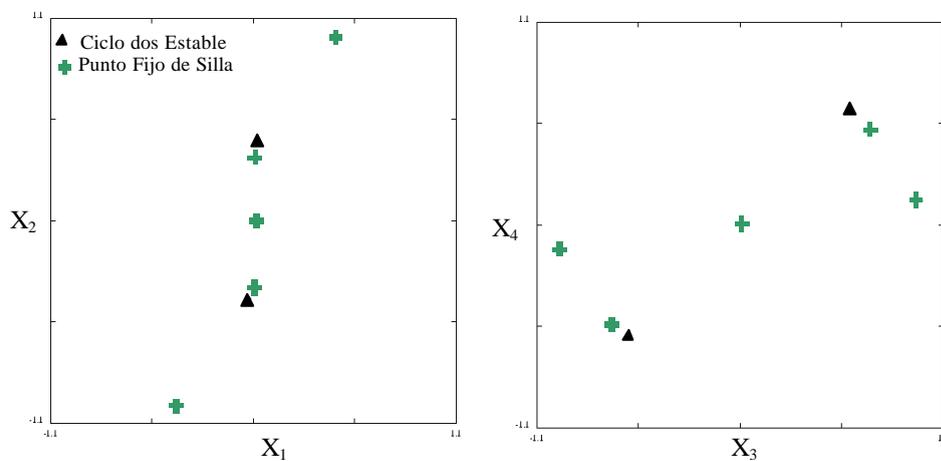


Figura 4.28. Dinámica correspondiente a los pesos entrenados sin considerar pesos umbrales.

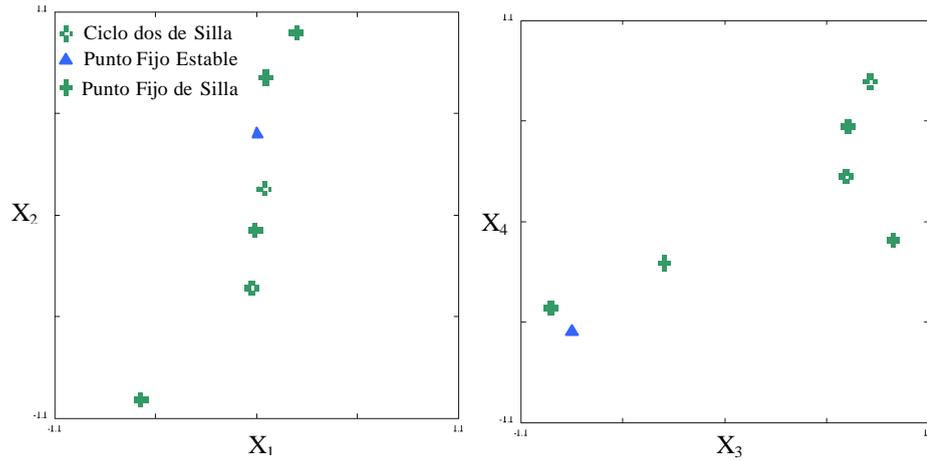


Figura 4.29. Dinámica considerando pesos umbrales.

Se puede analizar la forma de las variedades estables e inestables asociadas a los puntos fijos y ciclos de silla, considerando sin pérdida de generalidad la configuración sin pesos umbrales. En este caso, al tener todos los puntos de silla tres autovalores estables la variedad estable e inestable será de dimensión tres y uno, respectivamente. El cálculo de la variedad estable es complicado, por ello nos restringiremos al aspecto de la variedad inestable. En la siguiente figura podemos apreciar las variedades inestables de los puntos de silla sin considerar peso umbral.

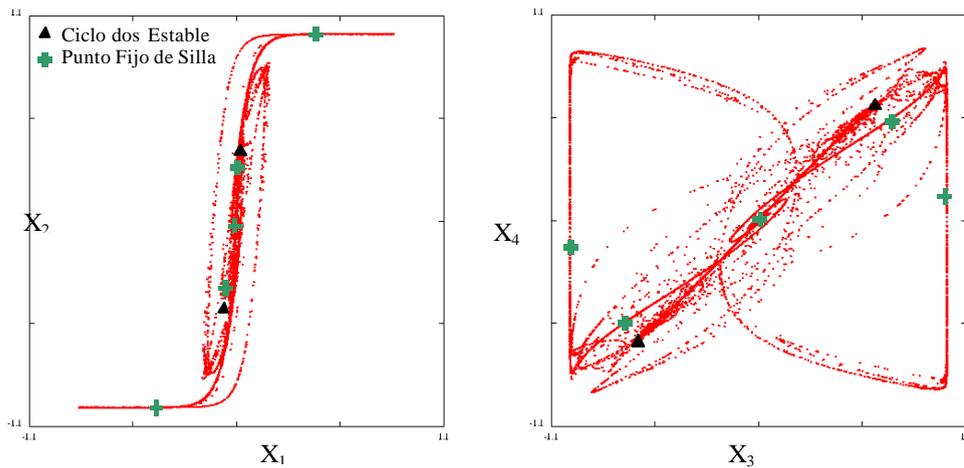


Figura 4.30. Variedades inestables asociadas a los puntos fijos de silla correspondientes a la dinámica sin pesos umbrales.

Como podemos observar, es una variedad bastante compleja. Cabe plantearse la existencia o no de puntos homoclínicos y heteroclínicos. Para descartar la presencia de caos calculamos los exponentes de Lyapunov, estos se representan en la siguiente figura, donde se calcula de forma iterativa el conjunto de exponentes. Se observa que convergen a valores negativos.

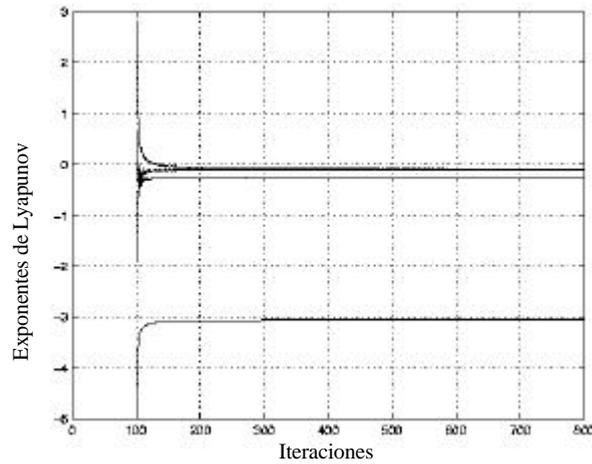


Figura 4.31. Representación de los coeficientes de Lyapunov correspondientes a la dinámica de los pesos entrenados sin considerar pesos umbrales.

Al igual que con la configuración de una entrada se puede determinar la evolución de los estados considerando las entradas y los pesos umbrales, utilizadas en el entrenamiento. En la figura 4.32 se observa la evolución para un solo patrón de entrada. Se puede apreciar que la trayectoria que describe el estado correspondiente a la salida de la red llega a tener un valor próximo a la saturación, convergiendo posteriormente al origen.

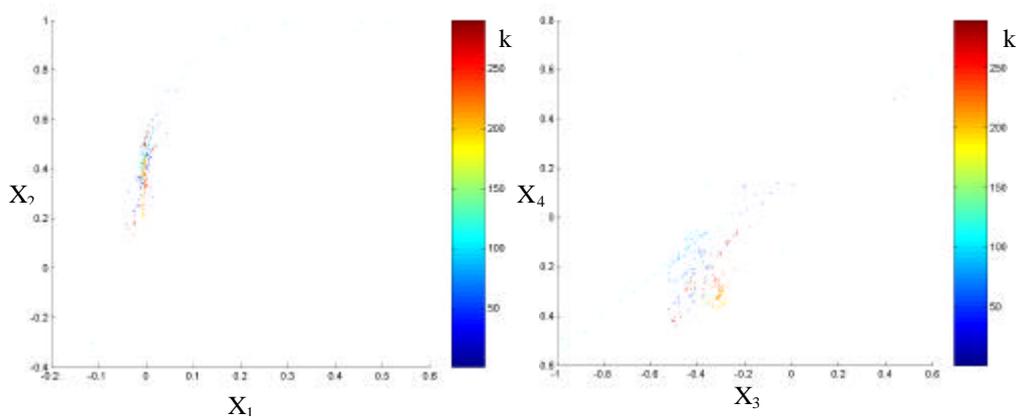


Figura 4.32. Evolución de los estados correspondiente un solo patrón de entrada, el color codifica la iteración ( $k$ ).

En la siguiente figura podemos observar la evolución de los estados para los 44 patrones de entrada.

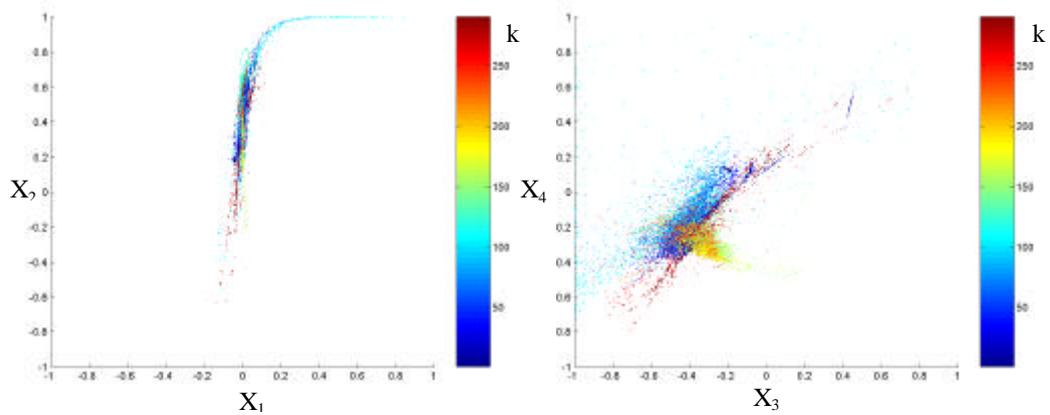


Figura 4.33. Evolución de los estados correspondiente a todos los patrones de entrada utilizados en el entrenamiento, el color codifica la iteración ( $k$ ).

### 4.2.5.3 Cambio dinámico relacionado con el error

Al igual que el problema de detección de dos patrones veamos como se relaciona el error en el entrenamiento con las dinámicas. En la siguiente figura podemos visualizar como el error baja bruscamente en la configuración con entradas desplazadas (figura 4.16).

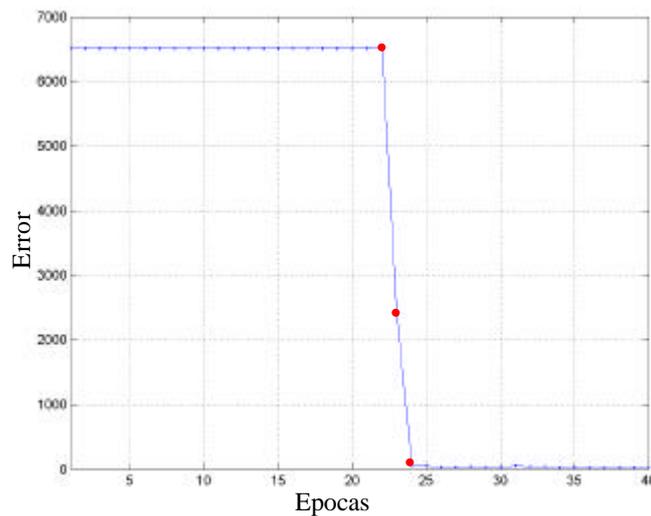


Figura 4.34. Curva de error en un entrenamiento considerando la estrategia de las entradas desplazadas. Los puntos rojos representan la configuración de pesos cuya dinámica es analizada.

Analicemos las dinámicas correspondientes a los tres valores de error representados por puntos rojos en la anterior figura, en orden de mayor a menor valor del error.

- a) Para el error mayor tenemos una dinámica formada por tres puntos fijos, estable, inestable y silla, respectivamente, y tres ciclos de periodo dos, dos de ellos de silla y uno estable. La dinámica esta caracterizada porque tanto el ciclo dos estable como el punto fijo estable están situados en la saturación, es decir, en ausencia de entradas externas los estados tienden a saturarse.

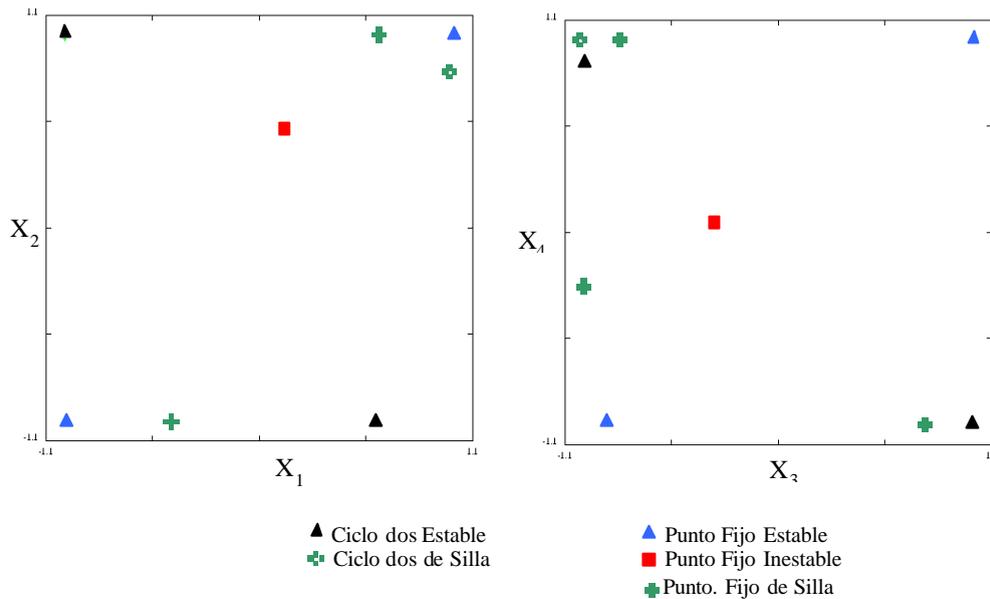


Figura 4.35. Dinámica correspondiente a la configuración del punto rojo de la figura 4.34 (valor de error mayor).

- b) Para el error intermedio se tiene una dinámica formada por un punto fijo de silla, y aparece una órbita cuasiperiódica. Ésta caracteriza dicha dinámica. De hecho el error es grande porque dicha órbita se acerca mucho a la saturación. Esto se puede observar en las siguientes figuras donde se representa la proyección en dos planos.

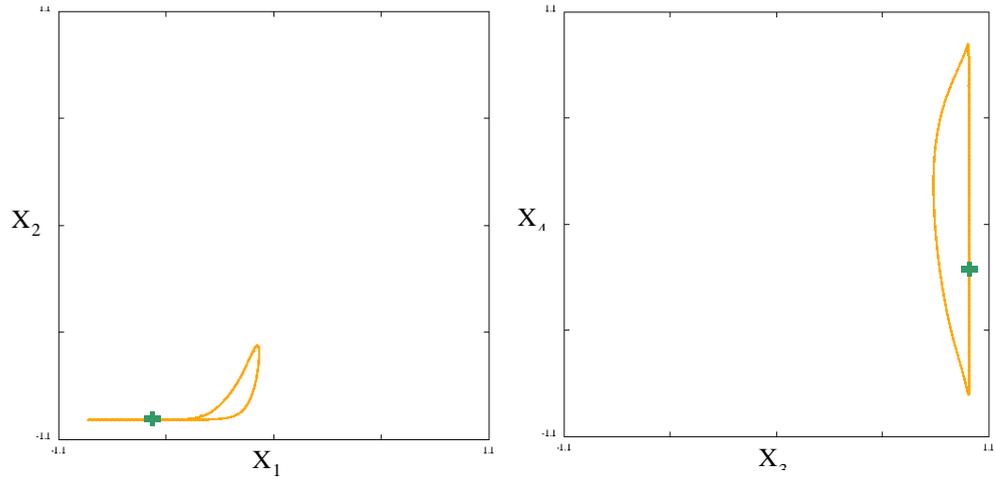


Figura 4.37. Dinámica correspondiente a la configuración del punto rojo de la figura 4.34 (valor de error intermedio). La cruz verde representa el punto fijo de silla.

Podemos apreciar mejor dicha cuasiórbita si la representamos en tres dimensiones y se considera como cuarta dimensión el color, como se hace en la siguiente figura.

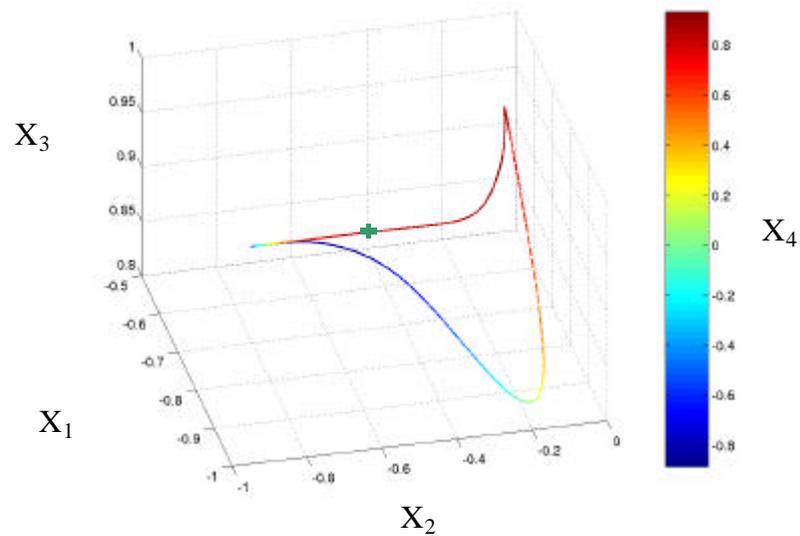


Figura 4.38. Dinámica correspondiente a la configuración del punto rojo de la figura 4.34 (valor de error intermedio). La cruz verde representa el punto fijo de silla. La cuarta coordenada se representa con color.

Resulta interesante analizar la dinámica sin pesos umbrales. Esta configuración dinámica tiene tres puntos fijos tipo silla y un atractor caótico. En figura 4.39 se puede observar una trayectoria caótica, en donde se ha representado la cuarta dimensión con el color. En dicha figura se muestra como el estado correspondiente a la salida de la red

alcanza valores relativamente próximos a la saturación. A pesar de esto, los estados nunca llegan a saturarse totalmente a diferencia del tipo de caos encontrado en dos neuronas.

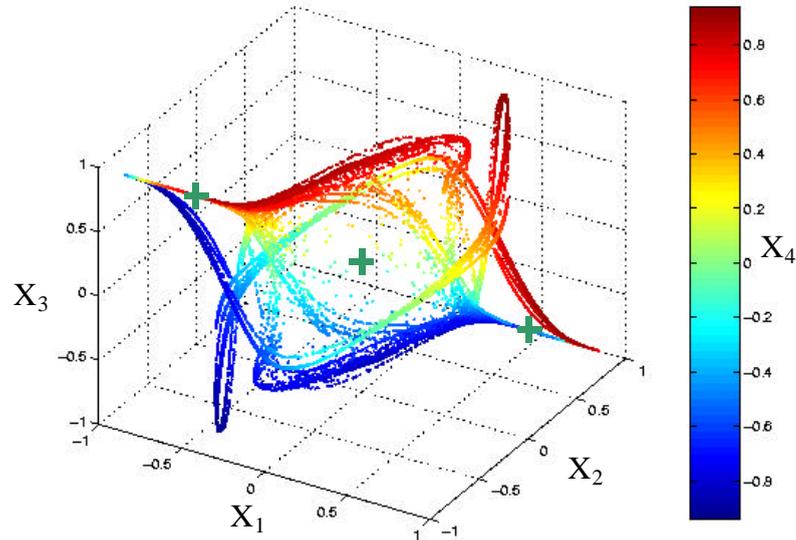


Figura 4.39. Dinámica correspondiente a la configuración del punto rojo de la figura 4.34 cuyo valor error es intermedio (sin considerar pesos umbrales). La cuarta coordenada se representa con falso color. Las cruces verdes representan puntos de silla, cuya cuarta coordenada corresponde a 0.1608,0 y  $-0.1608$ , respectivamente.

Podría ocurrir que esta dinámica caótica fuera en realidad un caso de dinámica pseudo-caótica, es decir, una trayectoria caótica que degenera en una órbita periódica, como ocurre en la red de dos neuronas (ver sección 3.3.5). Para salir de dudas podemos observar en la figura 4.40 los exponentes de Lyapunov. Existen tres de ellos que son positivos y por tanto, hay caos. Además este caos puede ser robusto respecto a una variación de dos parámetros del sistema, ya que el número de exponentes positivos excede de dos (ver sección 3.3.6).

A pesar de que la dinámica con pesos umbrales y sin ellos sea diferente, cualitativamente tienen similitud, ya que el movimiento en el espacio fásico, tanto en la dinámica caótica como en la cuasiperiódica, está caracterizado porque el estado no converge hacia un conjunto finito de puntos, como un punto fijo o ciclo periódico estable.

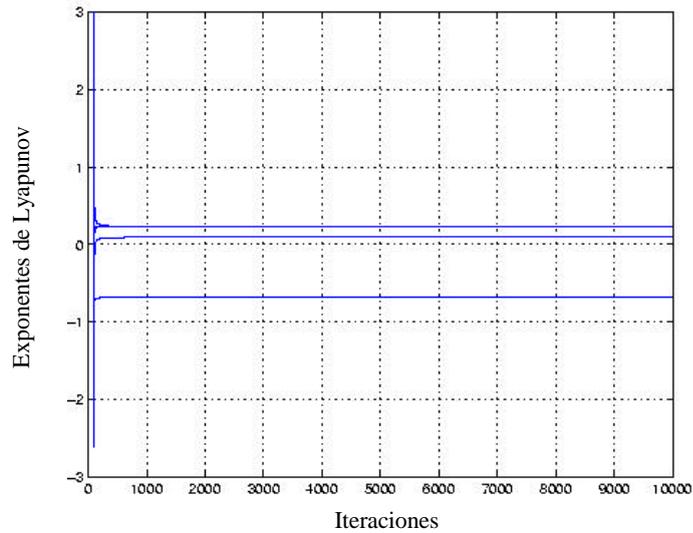


Figura 4.40. Representación de los coeficientes de Lyapunov correspondiente a la dinámica de los pesos entrenados sin considerar pesos umbrales. Los exponentes de Lyapunov convergen a 0.2257, 0.2254, 0.0937 y  $-0.6872$ .

- c) La dinámica que corresponde al error más bajo es la estudiada en la sección anterior (véase figura 4.28).

Observamos, al igual que con el problema anterior, que el error baja a medida que se cambia de dinámica, o lo que es lo mismo, a medida que se atraviesan las bifurcaciones. Esto se pone de manifiesto porque en la dinámica b) anterior aparece una órbita cuasiperiódica debido a que se atraviesa una bifurcación Neimark-Sacker. Basándonos en esto, intentemos generalizar en la siguiente sección la estrategia de inicialización de los pesos en las bifurcaciones para  $n$  neuronas.

#### 4.2.6 Estrategia de inicialización de pesos

En este caso vamos a plantear, de nuevo, que ocurre si consideramos los pesos iniciales no totalmente aleatorios. Esto es:

- Un autovalor igual a uno, situación de bifurcación silla-nodo.
- Un autovalor igual a menos uno, situación de bifurcación periodo doble.
- Dos autovalores complejos conjugados sobre el círculo unidad, situación de bifurcación tipo Neimark-Sacker.

Para construir estas matrices de pesos tan particulares, primero generamos  $n$  valores de una distribución aleatoria uniforme, siendo  $n$  el número de neuronas (en este caso cuatro). A continuación imponemos que el primero de ellos sea igual a 1, para comenzar en la bifurcación tipo silla-nodo o -1, para comenzar en la bifurcación tipo periodo doble. Seguidamente permutamos de forma aleatoria el orden de estos números, para después construir una matriz diagonal  $D$  con estos números. Por último, generamos una matriz  $T$  aleatoria de dimensión  $n \times n$ . Los pesos asociados a la salida de la red quedan definidos como:

$$W_{salida} = T^{-1} D T$$

Los pesos umbrales son nulos y los asociados a las entradas de la red se eligen de una distribución uniforme. En el caso de elegir comenzar por la bifurcación Neimark-Sacker se sigue la misma metodología, salvo que a los números aleatorios iniciales no se les impone nada, y cuando se construye la matriz  $D$  se coloca en una posición aleatoria una matriz de rotación, esto es:

$$D = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \cos(\mathbf{q}) & \text{sen}(\mathbf{q}) & & \vdots \\ \vdots & & -\text{sen}(\mathbf{q}) & \cos(\mathbf{q}) & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & v_n \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{q}$  se elige de forma aleatoria.

En las siguientes figuras se puede observar como la estrategia nueva supera a la aleatoria uniforme. Las figuras representan histogramas de 3000 muestras, las gráficas de la izquierda corresponden a la distribución de errores iniciales y las de la derecha a la distribución del error después de 10 épocas de entrenamiento.

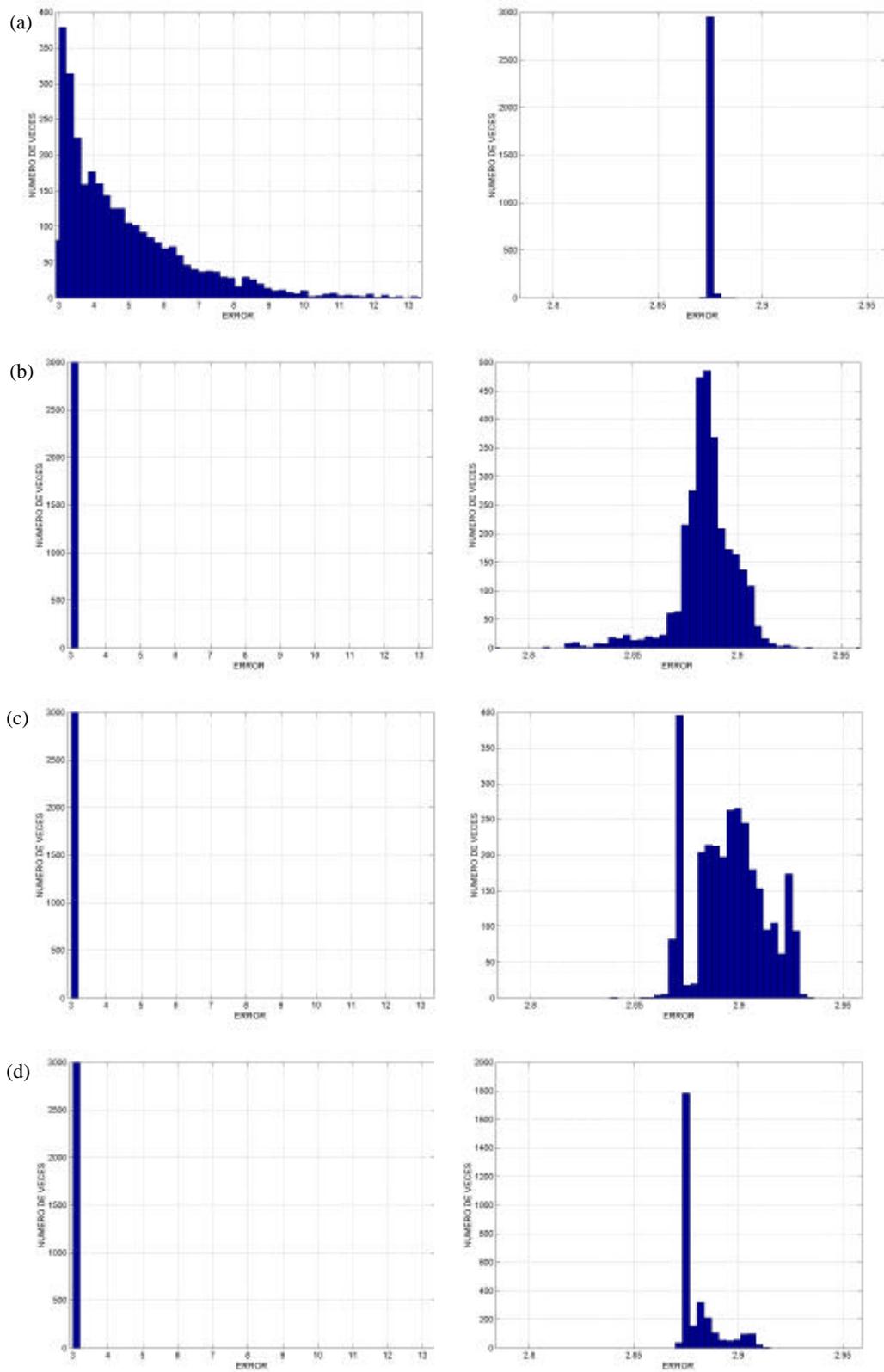


Figura 4.41. Histogramas de la distribución de error al inicio y final del entrenamiento: a) aleatoria, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo, d) comenzando por la bifurcación periodo doble.

En las siguientes figuras se representa la evolución de los histogramas a lo largo de las épocas de entrenamiento(en el eje de las Z se representa el porcentaje de muestras normalizadas). Las estrategias donde se comienza por las bifurcaciones tienen mejor distribución de error en las primeras épocas.

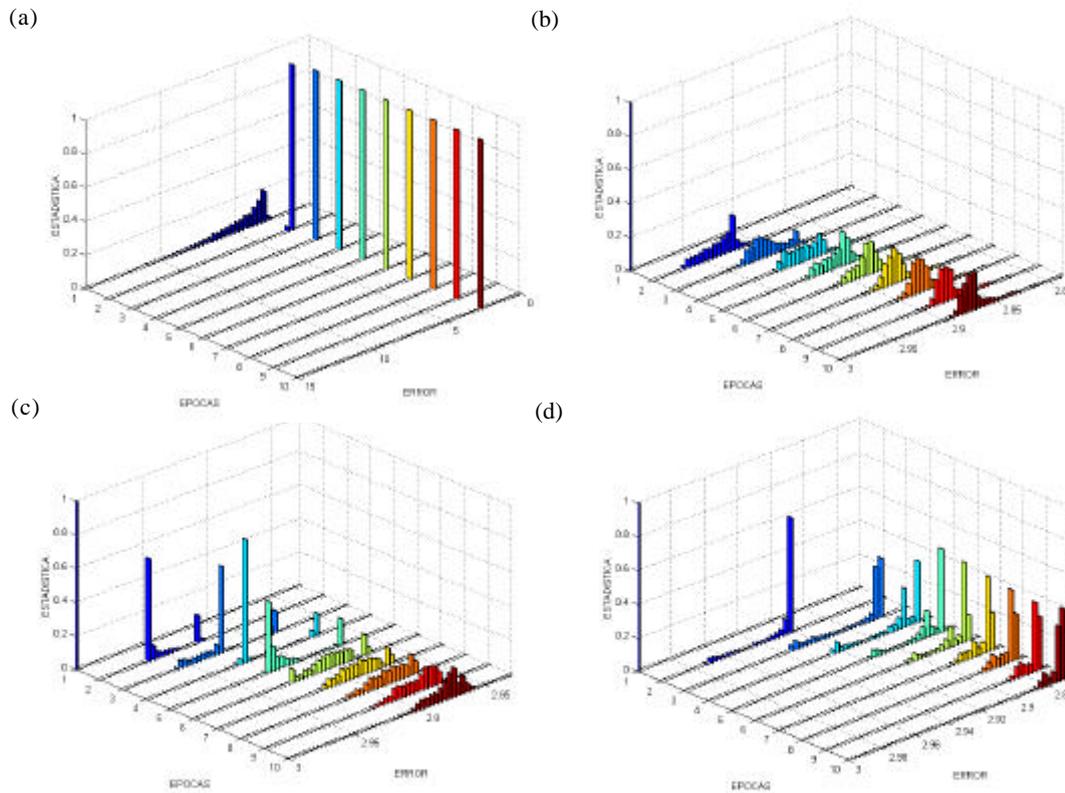


Figura 4.42. Distribución normalizada del error a lo largo de las épocas: a) aleatorio uniforme, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo, y d) comenzando por la bifurcación periodo doble.

#### 4.2.7 Resultados del entrenamiento con diferentes algoritmos de optimización de gradiente

Para apreciar la dificultad del entrenamiento en las redes tipo Williams-Zipser, y como consecuencia, la ventaja de las estrategias nuevas de inicialización resulta interesante visualizar la superficie de error correspondiente a este problema de detección de la  $P_{100}$ . Para poder observar esto consideraremos la dependencia del error respecto a dos pesos considerando el resto constante en las cercanías de un mínimo.

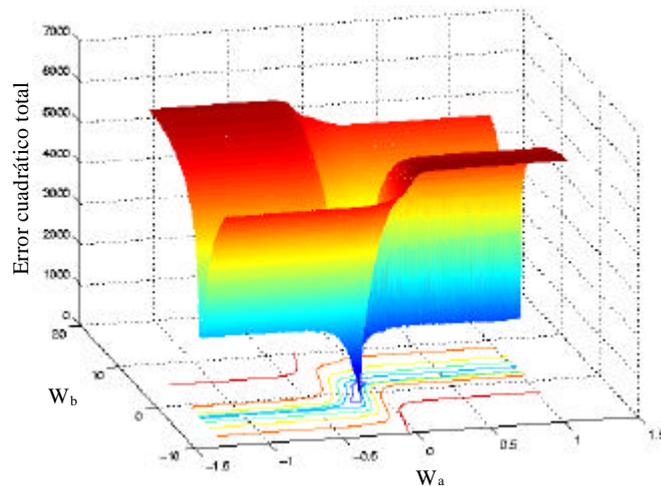


Figura 4.43. Superficie de error de la red Williams-Zipser con cuatro neuronas y cinco entradas desplazadas.

Como se aprecia en la gráfica la superficie de error es compleja, ya que está compuesta de valles estrechos entrelazados dificultando el entrenamiento por métodos de optimización simples como el método del gradiente descendente.

Vista la complejidad de este tipo de entrenamiento es mejor utilizar algoritmos de aprendizaje o métodos de optimización multidimensionales un tanto más elaborados y a la vez más complejos para garantizar una mejor convergencia. Es indicado utilizar métodos que recojan la información que aporta el gradiente y que estimen la curvatura local de la superficie como los métodos del gradiente conjugado o los métodos Pseudo-Newton (véase sección 1.6.1.3).

Es interesante comparar los resultados del entrenamiento con diferentes métodos de optimización. Para ello planteamos la siguiente prueba: se va a entrenar con 44 patrones de entrada, 4 neuronas, con pesos iniciales iguales en todos los métodos, y con el mismo número de iteraciones (1000 iteraciones).

Los métodos a comparar en la prueba serán el gradiente descendente simple con optimización lineal en la dirección del gradiente, gradiente conjugado (Fletcher-Reeves), DFP y BFGS (véase sección 1.6.1.3).

Respecto a los requerimientos computacionales de estos métodos, el DFP y el BFGS requieren un almacenamiento de  $o(n^2)$ , siendo  $n$  el número de pesos, y de  $o(n)$  el gradiente conjugado y gradiente descendente. En cuanto al número de operaciones por iteración el gradiente descendente tiene un menor número que el gradiente conjugado, y a su vez éste tiene un menor costo computacional por iteración que los métodos DFP y BFGS.

Merece la pena detenerse en los resultados obtenidos con el método DFP. Las primeras pruebas realizadas con este método no convergían, mostrando inestabilidades. El análisis de las condiciones bajo las que se daba este problema reveló que no se verifica la condición (1.13):

$$S_i' \nabla f_{i+1} - S_i' \nabla f_i > 0 \quad (4.2)$$

que preserva la definición positiva de la matriz que aproxima la Hessiana. Esto es debido a que el método de búsqueda lineal no reunía las elevadas condiciones de precisión necesarias para el DFP. Este método era inicialmente el de interpolación parabólica, combinado con el método de búsqueda inicial ya comentado para localizar el intervalo que contiene al mínimo. Veamos las derivadas direccionales en la expresión anterior en dos iteraciones, con el método de búsqueda lineal ya comentado.

$S_i \cdot \nabla f_i$	$S_i \cdot \nabla f_{i+1}$
$3.2283 \cdot 10^3$	$-1.8978 \cdot 10^8$
$-1.1256 \cdot 10^3$	$-59.3581$

Tabla 4.1. Datos correspondientes a la búsqueda lineal mediante el método de interpolación parabólica.

Como se puede observar, a partir de cierta iteración se deja de verificar la condición (4.2) con lo que la matriz  $H_{i+1}$  deja de ser definida positiva. Esto produce que en la búsqueda lineal del  $I$  óptimo, éste se divida progresivamente hasta hacerlo cero. Como consecuencia de esto

en la siguiente iteración  $\nabla f_{i+1} = \nabla f_i$  y causa un problema en el cálculo de la matriz  $H$  de la siguiente iteración.

Veamos la gráfica del error respecto al parámetro.

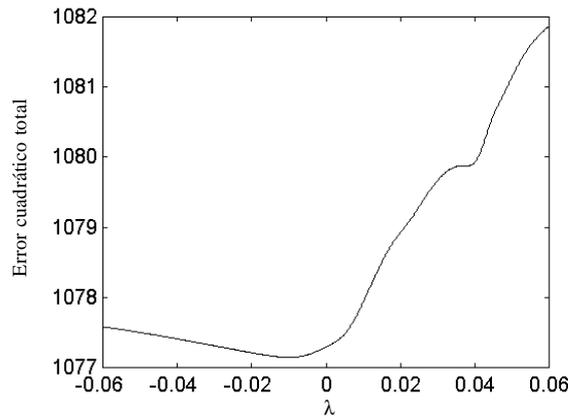


Figura 4.44. Curva del error en una dirección de búsqueda correspondiente a un entrenamiento de una red Williams-Zipser con 4 neuronas y cinco entradas desplazadas, utilizando el algoritmo DFP.

Podemos analizar con más detalle por qué el punto con  $\mathbf{I}$  cero tiene pendiente positiva en la anterior gráfica. Al dejar de ser  $H_i$  definida positiva, la derivada direccional en el punto  $X_i$  en la dirección  $S_i$  es positiva, esto es lo mismo que decir que la derivada que se plantea en las búsquedas lineales en el origen es positiva (el error crece). Analíticamente, se puede ver de la siguiente manera:

$$S_i \nabla f_i = (-H_i \nabla f_i)' \nabla f_i = -\nabla f_i' H_i \nabla f_i > 0 \tag{4.3}$$

La última expresión es mayor de cero precisamente debido a que  $H_i$  deja de ser definida positiva.

Estos datos dan cuenta de la importancia de utilizar métodos de búsqueda lineal precisos como el algoritmo de Brent visto en la sección 1.6.2.3. Por tanto, interesa un método que en las búsquedas lineales se aproxime al mínimo monodimensional con una mayor precisión. Para

ver el mejor funcionamiento en las búsquedas del método de Brent, planteemos el mismo entrenamiento anterior.

$S_i \cdot \nabla f_i$	$S_i \cdot \nabla f_{i+1}$
$1.8978 \cdot 10^8$	-5.5911
$2.0752 \cdot 10^4$	0.0079
$1.4900 \cdot 10^4$	$2.9546 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4.2. Datos correspondientes a la búsqueda lineal mediante el método de Brent.

Vemos claramente de los datos anteriores que se preserva la condición (4.2) con un gran margen de seguridad, lo que implica la definición positiva de la matriz que aproxima la Hessiana.

A pesar de lo anterior en algunos entrenamientos, hubo problemas de violación de la condición (4.3) para un número de iteraciones elevadas. Una alternativa es exigirle una mayor precisión al método de Brent en el criterio de parada. Otra alternativa es reinicializar el valor de la matriz  $H$  a la identidad si se detecta que falla la condición (4.3). Si la condición persiste, en el peor de los casos, este método se comportará, por tanto, como un gradiente descendente.

Debido a estas dificultades es aconsejable utilizar métodos menos sensibles a la exactitud de la búsqueda lineal. El método Pseudo-Newton recomendado en la literatura es el BFGS.

Es interesante comparar la evolución del error en el entrenamiento de los métodos de optimización utilizados: gradiente descendente, gradiente conjugado, y los métodos Pseudo-Newton (el DFP y el BFGS), siempre utilizando los mismos pesos iniciales en todos los algoritmos, y el mismo método de búsqueda lineal (método de Brent).

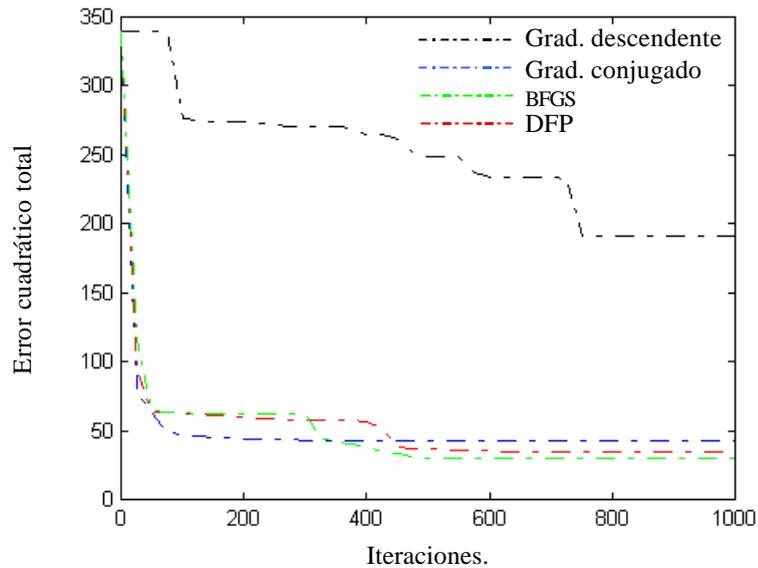


Figura 4.45. Curvas de error en una red Williams-Zipser con 4 neuronas y 5 entradas desplazadas correspondiente a los algoritmos: gradiente descendente, gradiente conjugado, DFP y BFGS. Se utiliza el algoritmo de búsqueda lineal de Brent.

Vemos, en primer lugar, que existe una gran diferencia entre el método del gradiente descendente respecto a los demás, esto es razonable debido a la mayor sofisticación de los demás métodos, que a partir de los gradientes intentan determinar mayor información de la hypersuperficie de error. En segundo lugar, la diferencia entre estos últimos es relativamente reducida apreciándose ventajas en el BFGS.

Para un número mayor de iteraciones el BFGS fue el único método que llegó a un mínimo, considerando como tal aquel punto donde el módulo del gradiente es aproximadamente cero.

#### 4.2.8 Resultados de la detección de la $P_{100}$ del P.E.V

En las condiciones adoptadas consecuentemente con los resultados de los apartados anteriores, en cuanto a la selección de entradas y de los métodos de entrenamiento, se comprobó la capacidad de la red de detectar la  $P_{100}$ .

El criterio elegido para determinar la posición de la  $P_{100}$  a partir de la salida de la red consistió en fijarla en donde la salida fuera máxima. Veamos en la siguiente figura el

histograma donde se representa la diferencia entre el valor determinado por el especialista y el de la red para los 44 patrones de entrenamiento.

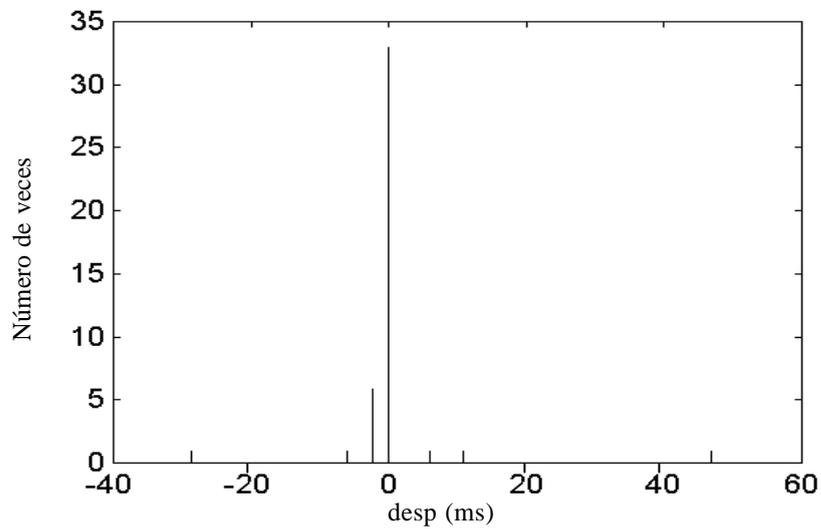


Figura 4.46. Estadística de predicción de los 44 potenciales evocados utilizados en el entrenamiento (BFGS-Brent) de la red Williams-Zipser con 4 neuronas y 5 entradas desplazadas.

Se observa en la gráfica que a excepción de dos patrones el resto presenta una diferencia de un valor absoluto menor de 10 milisegundos.

Es interesante analizar los patrones con mayor error.

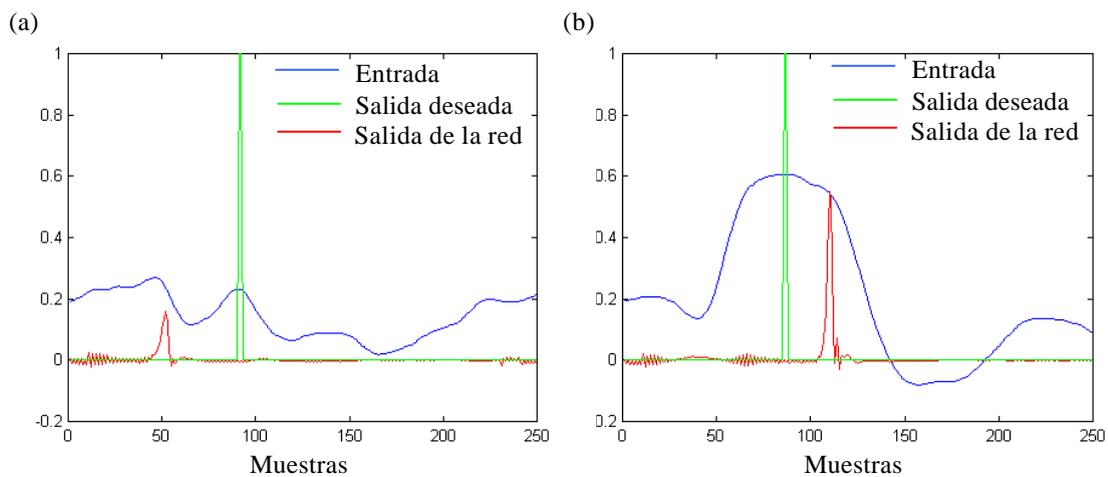


Figura 4.47. a) y b) potenciales evocados donde la red Williams-Zipser da un error de predicción mayor.

Se aprecia que estos potenciales evocados no corresponden a la forma estándar del potencial, en particular el segundo tiene una morfología que induce a pensar que ha sido incorrectamente capturado.

Se debe analizar la capacidad de generalización de la red para medir la capacidad de predecir la  $P_{100}$  en potenciales evocados no entrenados. Para ello se han utilizado 22 patrones distintos de los usados en el entrenamiento.

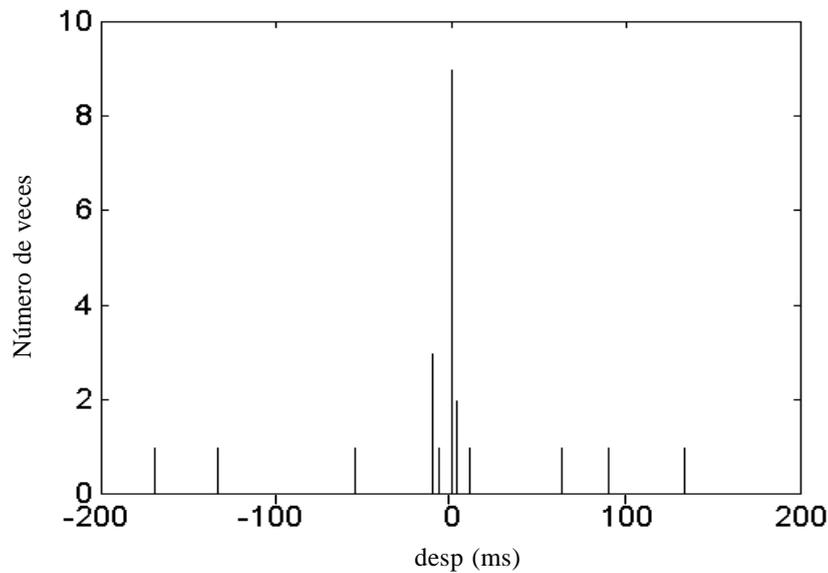


Figura 4.48. Estadística de predicción de los 22 potenciales evocados no utilizados en el entrenamiento de la red Williams-Zipser con 4 neuronas y 5 entradas desplazadas.

Vemos que los resultados no son tan buenos como los del entrenamiento, pero esto es común en los entrenamientos de las redes neuronales con algoritmos de entrenamiento supervisados. A pesar de esto, sólo 6 patrones quedan fuera del margen de una diferencia menor en valor absoluto a los 10 milisegundos [Moreno 2001].

Hay que considerar que no se ha considerado ningún método que propicie la generalización (parada temprana, término de regularización del error,...).

### 4.3 Identificación de un motor de corriente continua

En esta sección se plantea identificar un motor de corriente continua controlado en el inducido [Ogata 1998]. En este caso, la salida será el movimiento del eje, descrito mediante la velocidad o la posición angulares, y la entrada la tensión de control en el inducido.

Consideremos el circuito equivalente de un motor con una cierta carga aplicada, cuyo esquema viene descrito en la siguiente figura.

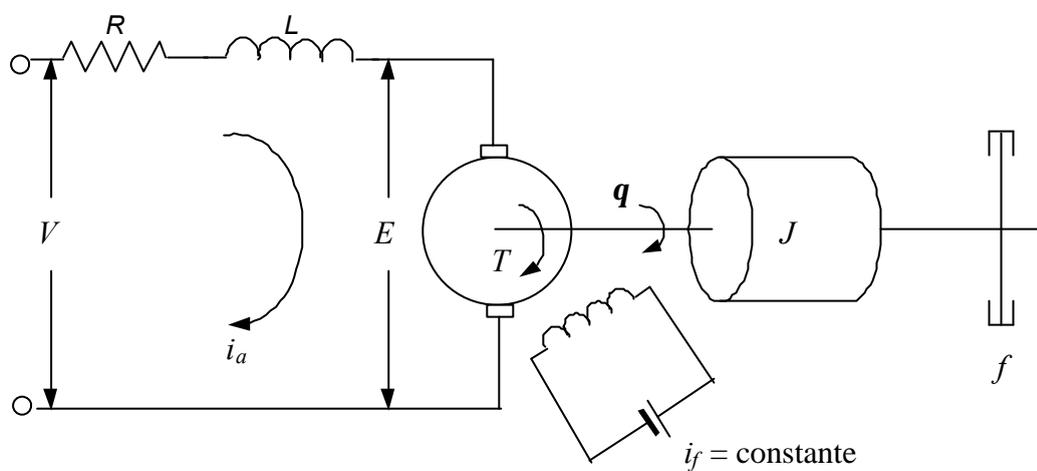


Figura 4.49. Diagrama esquemático de un motor de cc controlado en el inducido.

donde

$R$  es la resistencia del inducido

$L$  es la inductancia del inducido

$i_a$  es la intensidad del inducido

$i_f$  es la intensidad de campo

$V$  es la tensión aplicada al inducido

$E$  fuerza contraelectromotriz

$q$  es el desplazamiento angular del eje

$w$  es la velocidad angular del eje

$T$  es el par desarrollado por el motor

$J$  momento de inercia del motor y carga referidos al eje del motor

$f$  es el coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y carga referidos al eje del motor

Consideremos que  $V$  y  $\mathbf{q}$  son la entrada y la salida, respectivamente. Para ello planteemos algunas relaciones intermedias.

El par  $T$  desarrollado por el motor es proporcional al producto de la corriente del inducido  $i_a$  y la corriente de campo  $i_f$ . Si mantenemos  $i_f$  constante.

$$T = K_1 i_a$$

El par producido por la corriente del inducido se aplica a la inercia y fricción

$$T = K_1 i_a = J \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + f \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

Cuando el inducido está en rotación, se induce en éste una tensión proporcional al producto de la corriente de campo y la velocidad angular. Si mantenemos  $i_f$  constante.

$$E = K_2 \omega = K_2 \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

Por último, la ecuación general del inducido es:

$$V = R i_a + L \frac{di_a}{dt} + E$$

Suponiendo las condiciones iniciales nulas y tomando la transformada de Laplace de estas tres ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}T(s) &= \mathbf{q}(s)(Js^2 + fs) = K_1 I_a(s) \\E(s) &= K_2 s \mathbf{q}(s) = K_2 W(s) \\V(s) &= E(s) + I_a(s)(Ls + R)\end{aligned}$$

Por tanto, la función de transferencia viene dada de la siguiente forma

$$\frac{\mathbf{q}(s)}{V(s)} = \frac{K_1}{s[JLs^2 + (Lf + RJ)s + Rf + K_1K_2]}$$

Si consideremos que la inductancia del inducido  $L$  es pequeña:

$$\frac{\mathbf{q}(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[T_d s + 1]}$$

donde

$$\begin{aligned}K &= \frac{K_1}{Rf + K_1K_2} = \text{constante de ganancia del motor} \\T_d &= \frac{RJ}{Rf + K_1K_2} = \text{constante de tiempo del motor}\end{aligned}$$

Si se considera como salida la velocidad angular la función de transferencia es un sistema de primer orden:

$$\frac{W(s)}{V(s)} = \frac{K}{T_d s + 1} \quad (4.4)$$

Como se puede observar en la anterior función de transferencia el denominador tiene un polo en el semiplano izquierdo del plano complejo, esto desde el punto de vista dinámico indica que el único punto de equilibrio correspondiente al cero es estable [Ogata 1998].

En este problema se ha planteado utilizar la red neuronal como modelo del motor considerando como salida la velocidad angular. En primer lugar, se intenta entrenar la red con

el modelo lineal descrito en la expresión (4.4), y en segundo lugar un motor real con presencia de no linealidades.

### 4.3.1 Resultados con el modelo lineal del motor

La idea es plantear un sistema continuo correspondiente al modelo del motor (4.4) que describe la velocidad angular en función del voltaje que se le aplica. Hemos considerado una elección de los parámetros para el modelo lineal que aproxima el comportamiento del motor real con el que trabajaremos posteriormente. Estos son:

$$K = 20$$
$$T_d = 0.25 \text{ seg}$$

El primer paso es discretizar el sistema utilizando el método más sencillo correspondiente al retenedor de orden cero en la entrada [Ogata 1998]. Con el fin de reproducir el comportamiento del sistema continuo con mayor fidelidad mediante el sistema discreto equivalente se ha supuesto la componente de frecuencia máxima dos décadas por arriba de la frecuencia de codo del diagrama de Bode (atenuación de 40 decibelios respecto a la ganancia unidad). Se muestrea al doble de dicha frecuencia (teorema de Shannon [Ogata 1995]). El tiempo de muestreo correspondiente es:

$$T = \frac{pT_d}{100} = 79 \text{ ms}$$

Los patrones de entrenamiento son parejas de secuencias entrada/salida obtenidas del modelo lineal discreto. Las entradas son elegidas entre funciones escalón y sinusoidales con amplitudes y frecuencias aleatorias. En la siguiente figura podemos observar un ejemplo de cada tipo de entrada (figuras de la izquierda) y la correspondiente salida (figuras de la derecha).

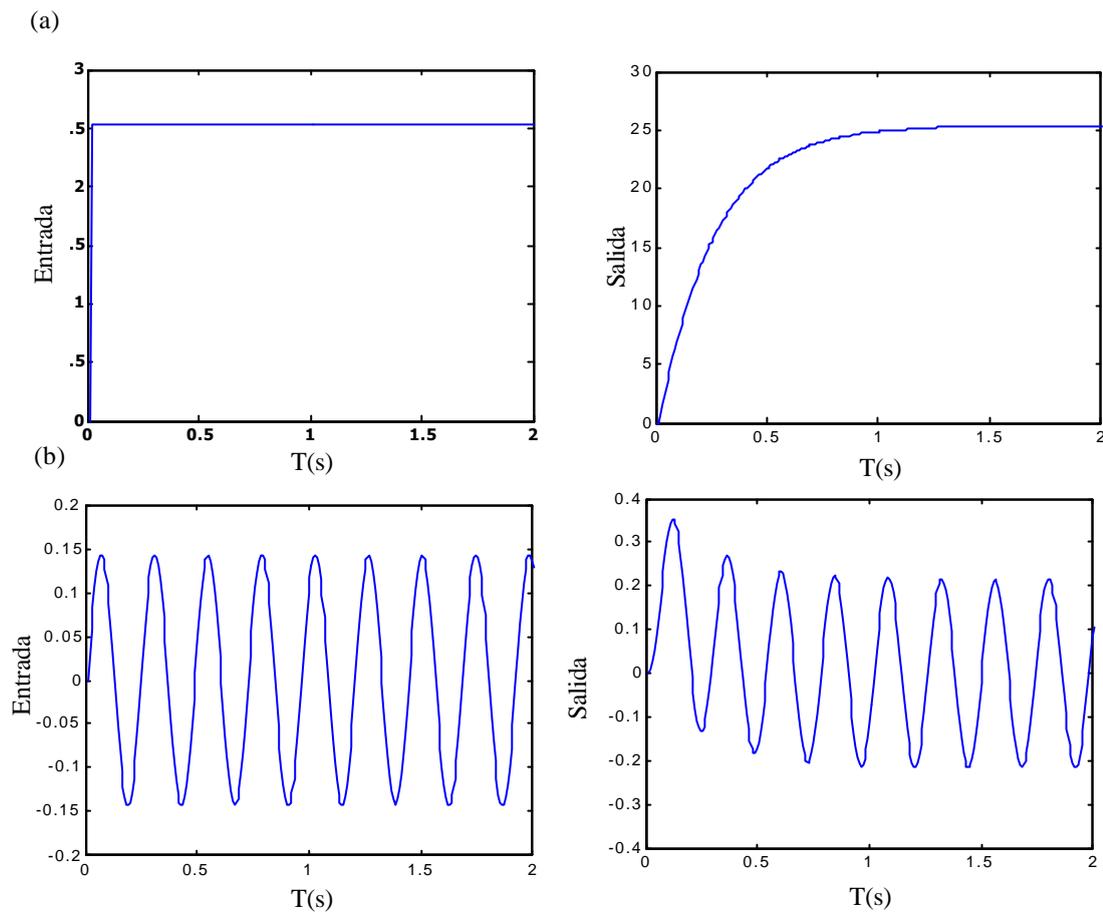


Figura 4.50. Entradas y salidas para el modelo (4.4). a) escalón, y b) señal sinusoidal.

Con los datos generados las amplitudes de la salida exceden del rango de variación de salida de las neuronas, para evitar este inconveniente se suele escalar tanto la entrada como la salida.

Para hacer el entrenamiento se han considerado 15 patrones tipo escalón y otros 15 tipo sinusoidal obteniéndose buenos resultados con una red de dos neuronas y un error relativamente bajo. En la siguiente figura podemos observar las entradas y salidas tanto deseadas como reales, viendo así la bondad del entrenamiento.

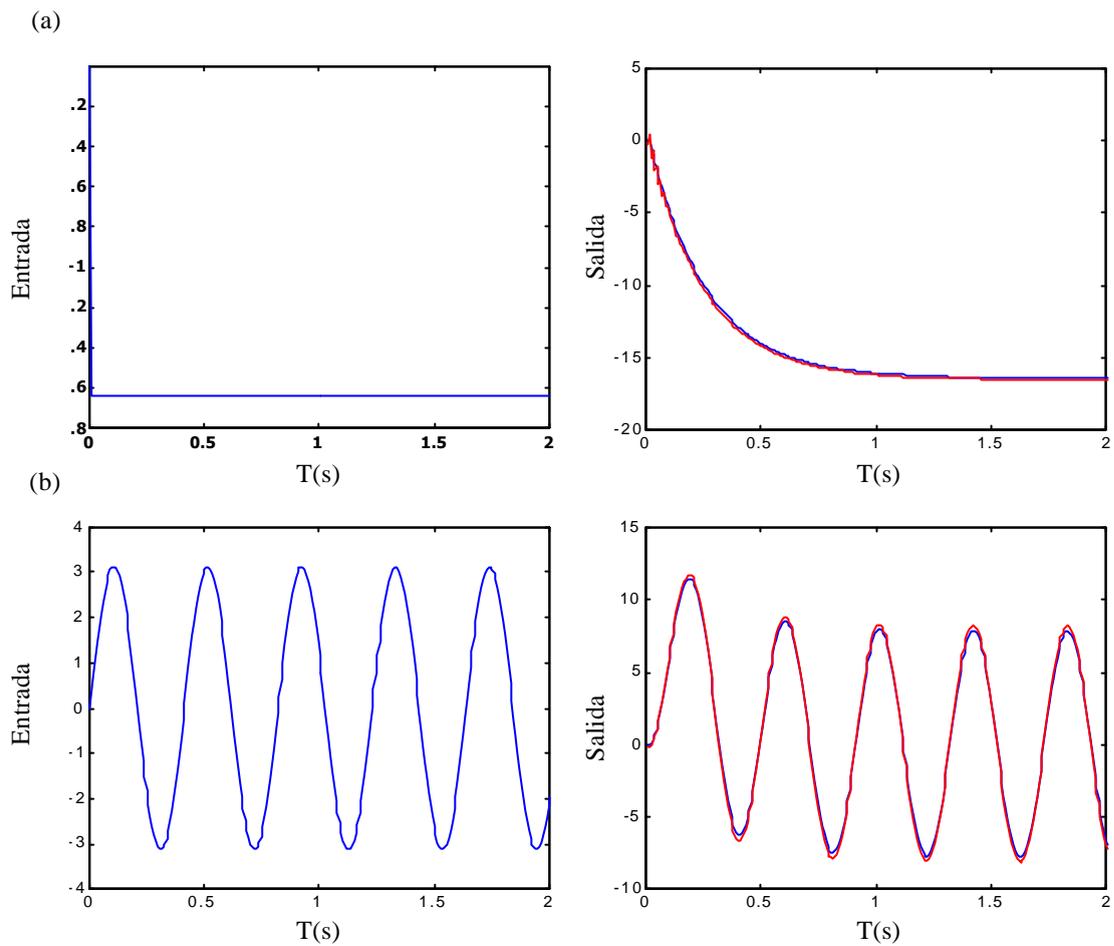


Figura 4.51. Entradas (figuras de la izquierda) y salidas (figuras de la derecha) tanto real como deseada: a) escalón, y b) tipo seno. Entrenamiento con 15 patrones tipo escalón y 15 patrones tipo seno. El error de entrenamiento es de 0.1476. En azul se representa la salida de la red y en rojo la deseada.

Como ya se ha indicado es necesario determinar el grado de generalización de la red. Para ello se han utilizado 10 patrones nuevos de tipo escalón y 20 de tipo sinusoidal. El error cometido sigue siendo bajo y el comportamiento de la salida real y la deseada es similar, como se puede observar en la siguiente figura (salvo factores de escala).

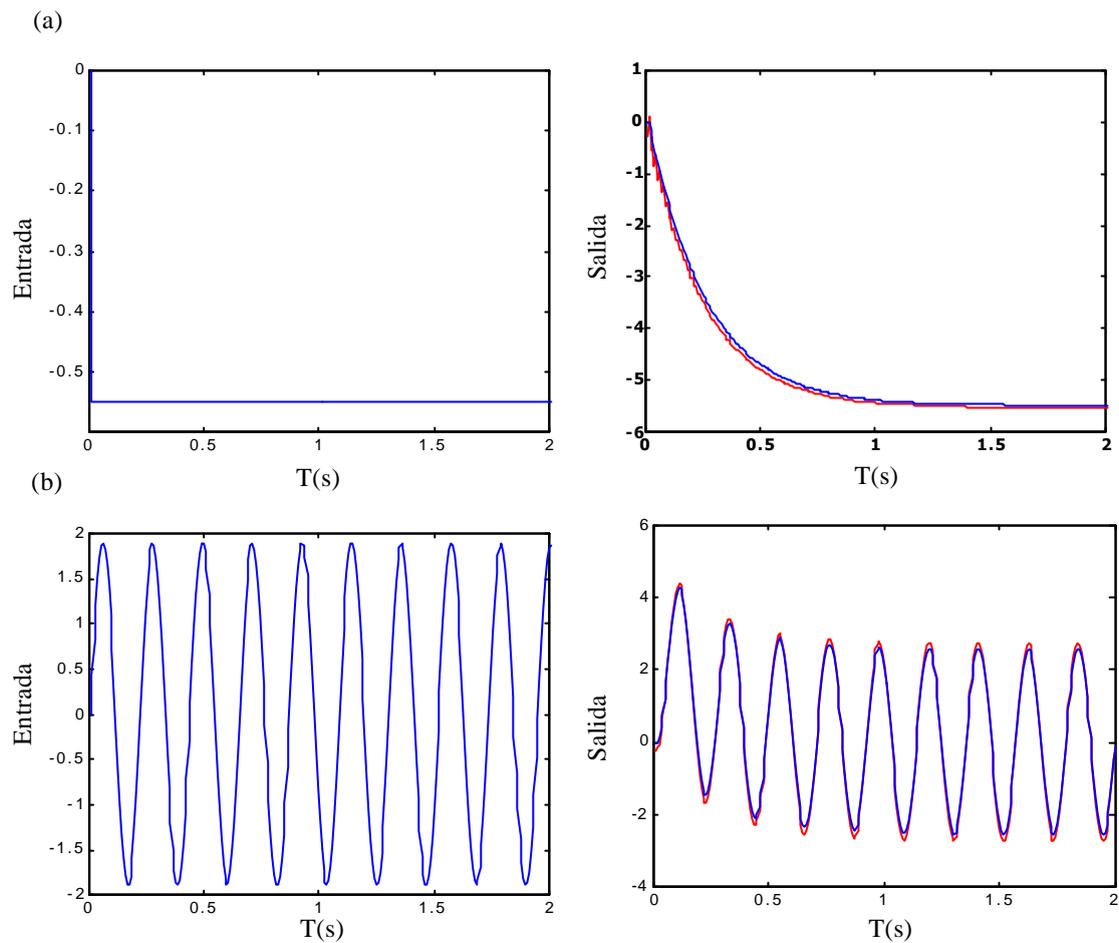


Figura 4.52. Entradas (figuras de la izquierda) y salidas (figuras de la derecha) tanto reales como deseadas: a) escalón, y b) tipo seno. Error 0.2761 considerando 10 patrones tipo escalón y 20 patrones tipo seno. En azul se representa la salida de la red y en rojo la deseada.

#### 4.3.1.1 Estudio de la dinámica

Analizando la dinámica correspondiente a los pesos entrenados observamos que existe un único punto fijo estable (esta configuración coincide tanto si consideramos pesos umbrales como si no). En la siguiente figura podemos observar dicha configuración dinámica. Era esperable esta dinámica, ya que es la que corresponde a un modelo lineal del que se han generado las salidas.

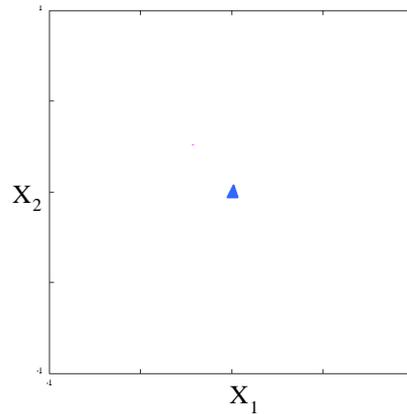


Figura 4.53. Configuración dinámica correspondiente a los pesos entrenados.

#### 4.3.1.2 Cambio dinámico relacionado con el error

Veamos como se transforma la dinámica de la red a medida que cambian los pesos. En este caso las dinámicas con peso umbral y sin él coinciden, por tanto, nos restringiremos al sistema sin pesos umbrales. En la figura 4.54.a podemos observar la curva de error. La configuración dinámica correspondiente a los dos primeros puntos marcados sobre la curva de error esta formada por dos puntos fijos estables y un punto fijo de silla (figuras 4.54.b y 4.54.c). Por otro lado, la configuración dinámica del tercer punto marcado en la curva de error, está formada por un único punto fijo estable (figura 4.54.d). Por tanto, a medida que el error disminuye, se produce una bifurcación silla-nodo.

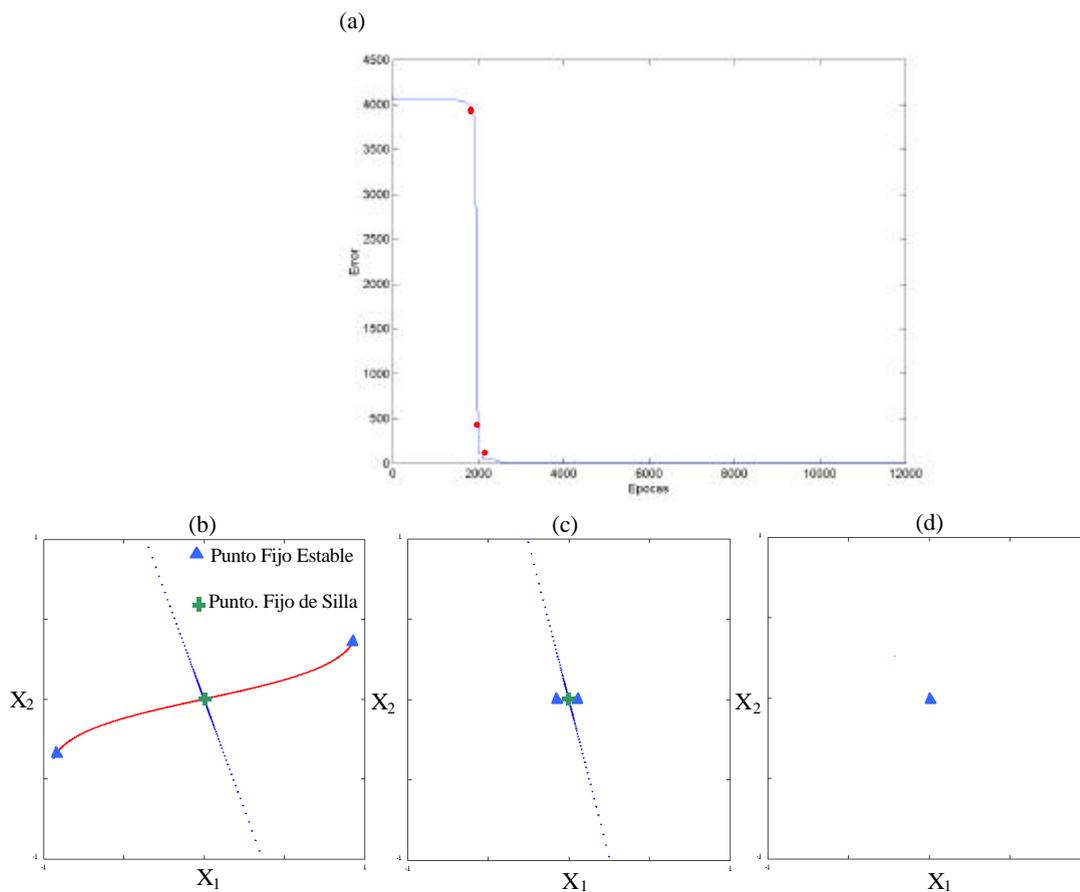


Figura 4.54. a) Representación del error a lo largo del entrenamiento. b), c) y d) configuraciones dinámicas correspondientes a los puntos rojos de la curva de error según el error va de mayor a menor valor.

#### 4.3.1.3 Estrategia de inicialización de pesos

En la figura 4.55 podemos ver la comparación entre la situación inicial y final de los cuatro histogramas de la distribución del error correspondientes a las cuatro posibles estrategias de inicialización descritas anteriormente. Se han construido los histogramas con 3000 muestras del error en el entrenamiento.

Podemos ver la evolución de los histogramas a lo largo del entrenamiento en la figura 4.56. Se observa en dichas figuras que las tres estrategias que comienzan en las bifurcaciones son similares respecto a la estrategia aleatoria uniforme en todas las épocas, incluso en las que ya se converge al mínimo. No existen ventajas significativas en las inicializaciones alternativas a la tradicional, ya que la inicialización aleatoria uniforme con pesos pequeños determina la dinámica ideal en este caso (lineal, un único punto fijo estable en el origen).

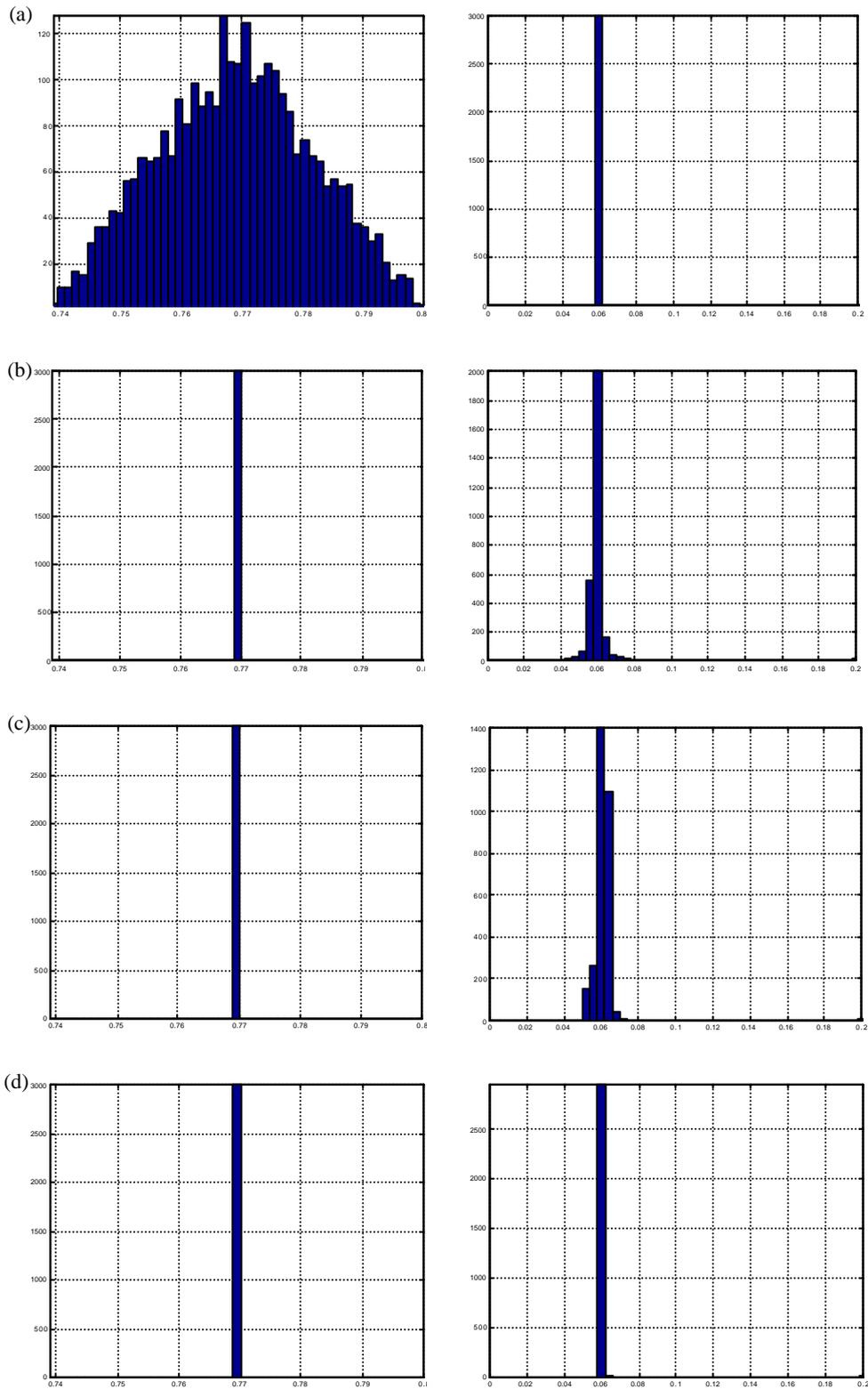


Figura 4.55. Histogramas de la distribución de error al inicio y final del entrenamiento: a) puramente aleatorio, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo y d) comenzando por la bifurcación periodo periodo doble.

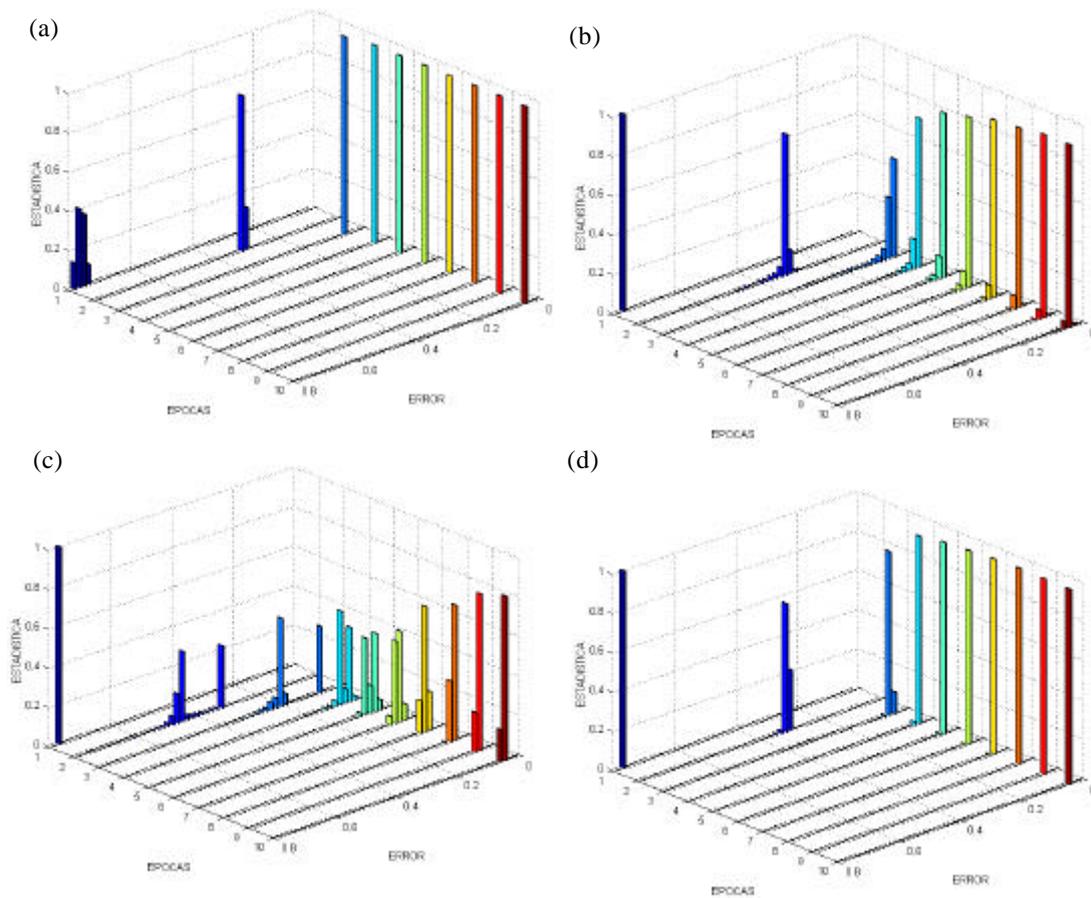


Figura 4.56. Distribución normalizada del error a lo largo de las épocas: a) aleatoria uniforme, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo, y d) comenzando por la bifurcación periodo doble.

### 4.3.2 Resultados del motor CC real

Este es un motor SAD-100 de la casa ALECOP. Veamos a continuación de forma resumida sus características técnicas:

- Un motor excitado en media por un campo magnético permanente (250 W de potencia suponiendo condiciones óptimas).
- Tensión en el inducido y excitación de 100 V y 200 V, respectivamente.
- Velocidad máxima de 1500 rpm.
- Momento de inercia  $J= 11.6 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2$ .

- Un regulador de potencia. Suministra el voltaje necesario para atacar el motor. La acción sobre el motor se efectúa aplicando un voltaje de  $\pm 10$  V a la entrada del amplificador.

Este motor tiene dos sensores que son:

- Tacodinamo. Produce un voltaje proporcional a la velocidad del motor.
- Potenciómetro. En la salida da un voltaje proporcional a la posición angular del eje del motor. El voltaje va desde  $-15$  V a  $+15$  V según esté la posición angular del rotor entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ .

Tanto el voltaje que proporciona la tacodinamo como el potenciómetro se pasa por un partidor de tensión para ajustar los niveles de tensión para su adquisición con un conversor A/D.

El esquema de adquisición de datos es el siguiente:

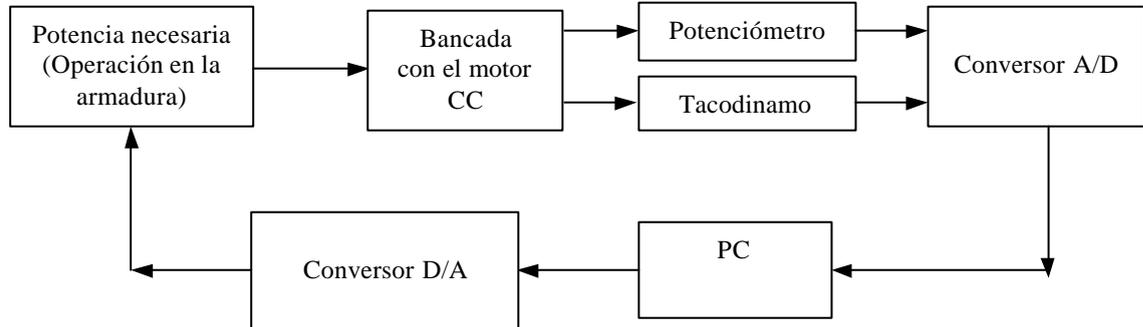


Figura 4.57. Esquema de adquisición de datos del motor.

En la siguiente figura podemos ver el motor real.

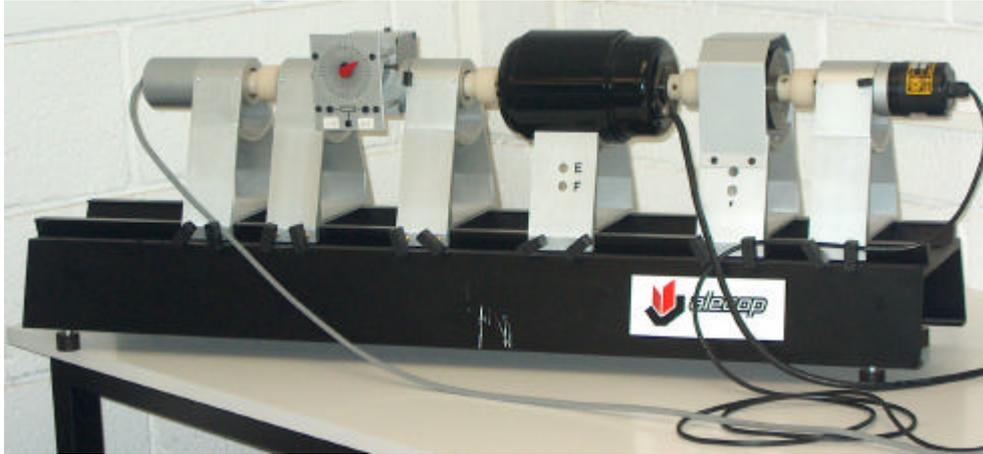
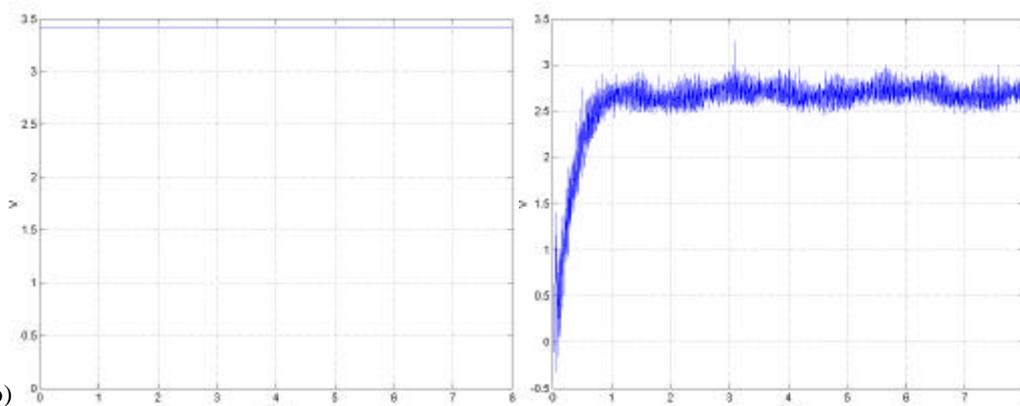


Figura 4.58. Fotografía del motor.

A continuación se pueden observar algunos ejemplos de captura correspondientes a una entrada escalón y a una entrada tipo sinusoidal.

(a)



(b)

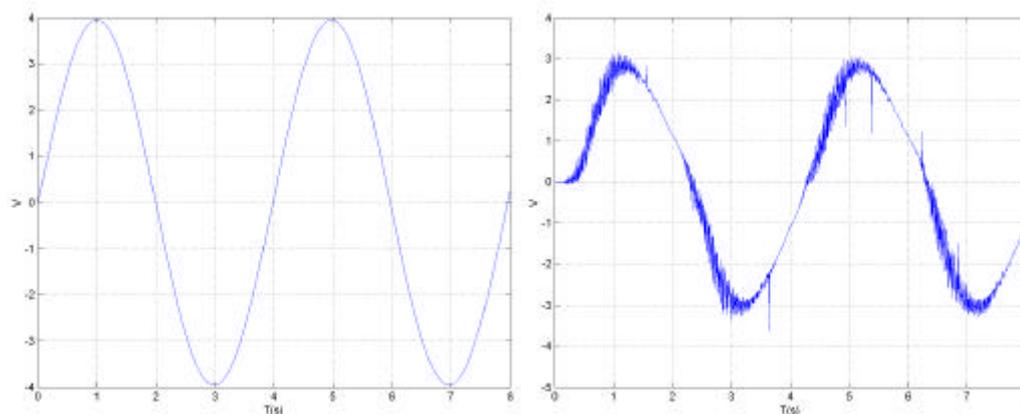


Figura 4.59. Entradas (figuras de la izquierda) y salidas (figuras de la derecha) para el motor de CC. a) entrada y salida correspondientes a un escalón, b) entrada y salida correspondientes a una señal sinusoidal.

Se observa en las figuras 4.60 que existe un ruido de cierta intensidad en la salida. Analizaremos posteriormente su origen y como evitarlo mediante filtrado. Por otro lado, las respuestas siguen lo esperado, ya que se ajustan al modelo lineal de primer orden del motor. La diferencia principal que se aprecia es un retraso inicial en la respuesta (retardo), esto se puede observar mejor en la respuesta sinusoidal. Existe otro fenómeno no lineal, el de zona muerta. Es necesario suministrar un voltaje umbral para que el motor se pueda mover. Dicha respuesta se observa en la siguiente figura.

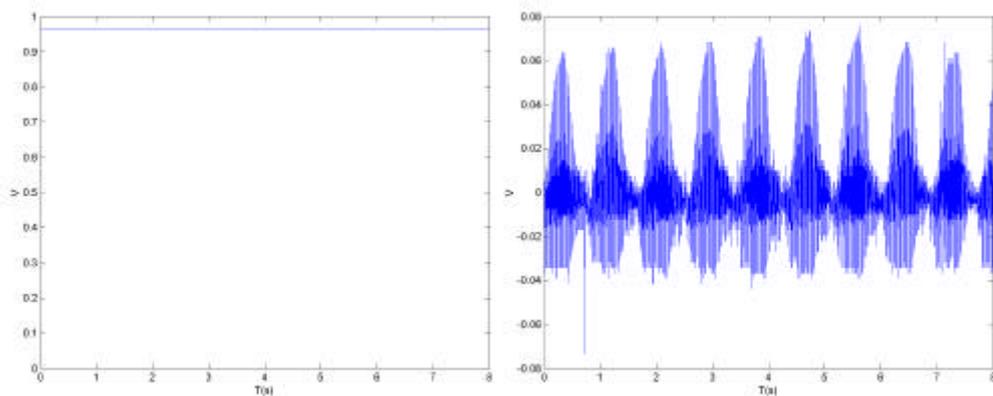


Figura 4.60. Respuesta correspondiente a la zona muerta.

Antes de entrenar la red neuronal es necesario analizar y filtrar el ruido que aparece. Veamos, en primer lugar, el origen de dicho ruido, para ello analicemos el espectro correspondiente a una señal de respuesta. Éste se muestra en la figura 4.61. Se puede observar que el ruido es más significativo en  $50\text{ Hz}$  y en sus armónicos. Esta frecuencia corresponde precisamente a la de la corriente alterna de la red eléctrica, por tanto, podemos deducir que dicha señal se introduce en los circuitos del motor alterando la medida. Los picos más importantes son los de  $50\text{ Hz}$  y  $100\text{ Hz}$ . En base a esto podemos llegar a un compromiso para una frecuencia de muestreo que evita fenómenos de *aliasing* [Oppenheim 1997] de  $200\text{ Hz}$ .

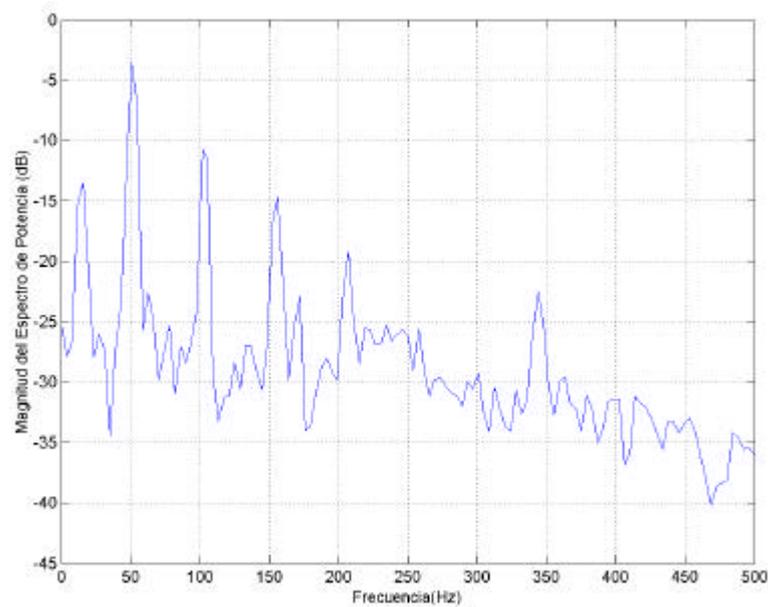


Figura 4.61. Espectro correspondiente al ruido.

Para eliminar el ruido en las señales hemos considerado un filtro pasa baja cuya frecuencia de corte está muy por debajo de la frecuencia correspondiente a  $50\text{ Hz}$  ( $2\text{ Hz}$  y  $10\text{ Hz}$  para la entrada tipo escalón y sinusoidal, respectivamente). Para evitar cualquier tipo de distorsión en la fase y, por tanto, en posibles desplazamientos temporales iniciales se ha aplicado un filtrado no causal [Antoniou 1993]. En la siguiente gráfica podemos ver el resultado del filtro con una entrada sinusoidal y escalón.

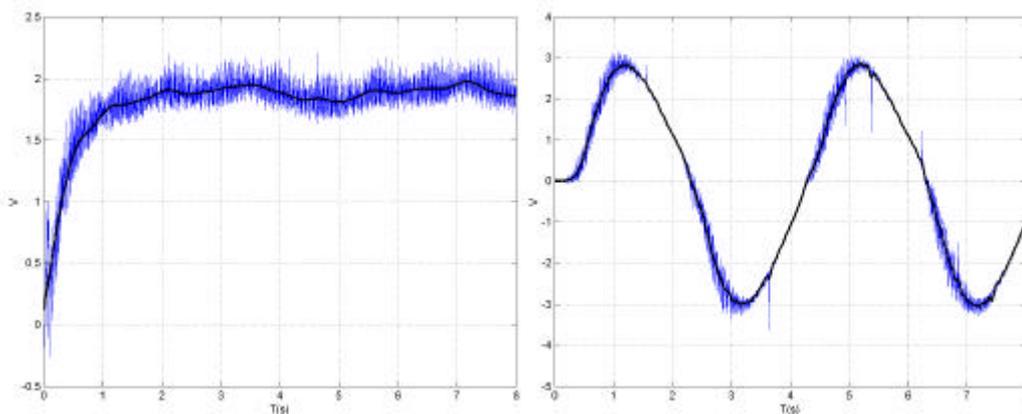


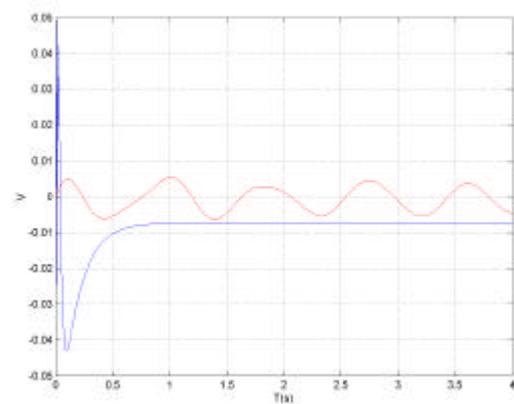
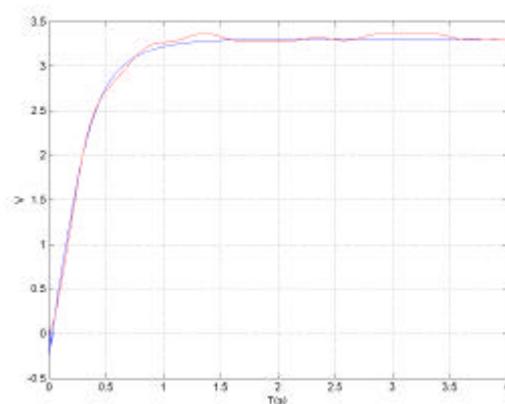
Figura 4.62. Señal filtrada, en azul se representa la señal con ruido y en negro la señal filtrada. La figura de la izquierda corresponden a la respuesta a la señal tipo escalón y la de la derecha a la del tipo sinusoidal.

Para entrenar la red se considerarán patrones de entrada sinusoidales y escalón, siendo las respuestas filtradas del motor real serán las salidas deseadas (convenientemente escaladas).

Para entrenar el motor se han considerado 36 patrones, divididos equitativamente en tres tipos de señales: entradas sinusoidales (frecuencias bajas de  $0.25\text{ Hz}$  a  $1\text{ Hz}$ ), función escalón negativo y función escalón positivo. De esta manera barremos frecuencias bajas con las señales sinusoidales y altas con las de tipo escalón. Por otra parte, dentro de los patrones correspondientes a un mismo tipo de entrada, se incluyen la mitad de respuestas donde se aprecia la zona muerta como las de la figura 4.60, y la otra mitad de respuestas donde dicho efecto no es aparente (figura 4.59).

Para poder entrenar la red neuronal se ha tenido que utilizar un número relativamente alto de neuronas (9). En la figura 4.62 podemos observar el resultado para las señales tipo sinusoidal y escalón. Vemos que las respuestas sin zona muerta aparente son seguidas de forma correcta. En cambio, las respuestas con zona muerta no son seguidas con tanta precisión. Esto es lógico, ya que en la función de error se ponderan mucho más los primeros patrones que los segundos debido a que tienen una amplitud mucho mayor. A pesar de esto, hay que indicar que la salida de la red con el segundo tipo de patrón no reproduce linealmente la salida deseada pero su amplitud está en el mismo rango que el de la respuesta del motor (que es muy baja).

(a)



(b)

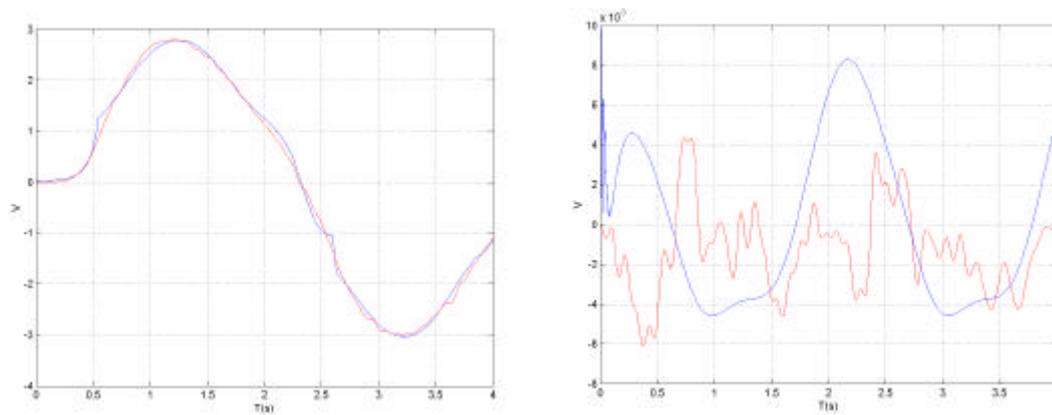


Figura 4.63. Salidas reales y deseadas sin zona muerta (figuras de la izquierda) y con zona muerta (figuras de la derecha) presencia de zona muerta frente a las entradas, a) escalón, y b) tipo seno. Con error de entrenamiento por patrón de 0.06. En azul se representa la salida de la red y en rojo la deseada.

Para ver los resultados en la generalización se han utilizado 114 patrones ponderando las diferentes entradas, tipo sinusoidal, escalón negativo y positivo, como en el entrenamiento. Aunque el error cometido es mayor el seguimiento de la red es cualitativamente similar, como se puede observar en las siguientes figuras.

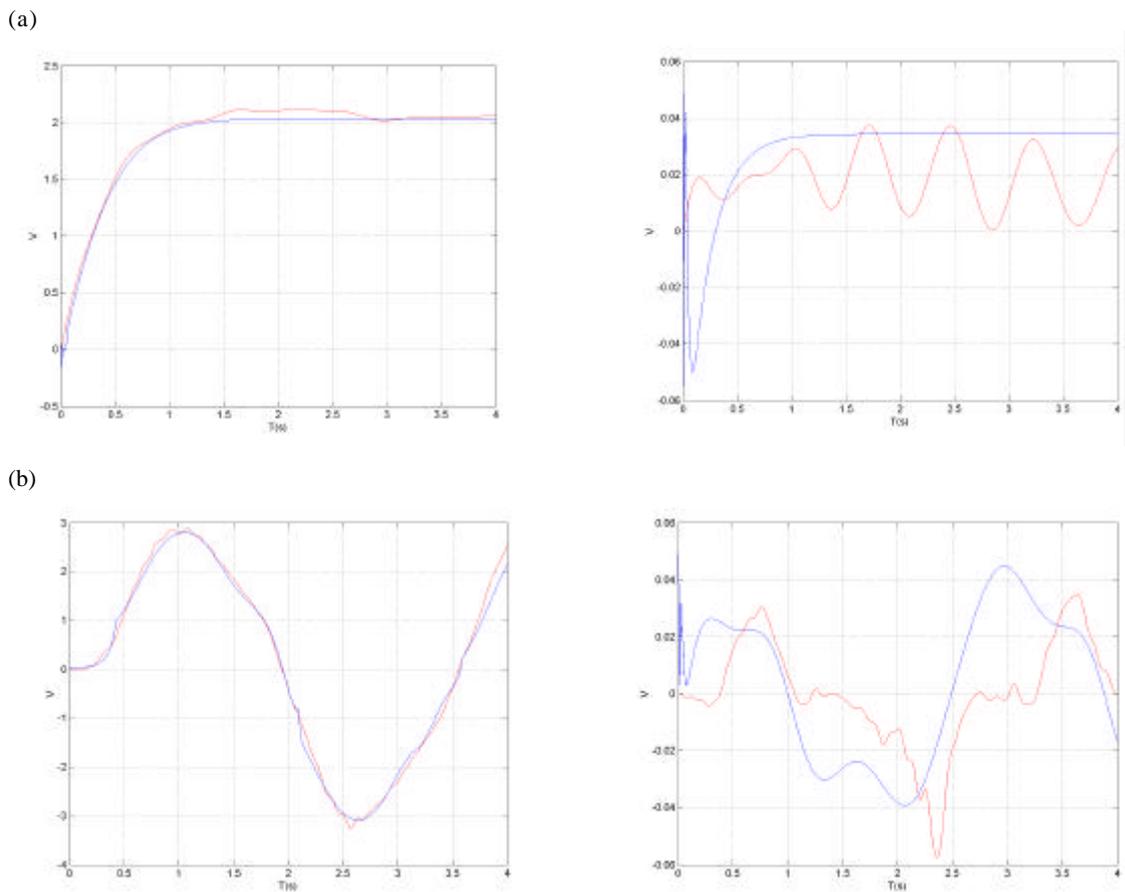


Figura 4.64. Salidas reales y deseadas sin zona muerta (figuras de la izquierda) y con zona muerta (figuras de la derecha) presencia de zona muerta frente a las entradas, a) escalón, y c) tipo seno. Error por patrón de 0.5400 considerando 114 patrones en total. En azul se representa la salida de la red y en rojo la deseada.

### 4.3.2.1 Estudio de la dinámica

Analizando la dinámica correspondiente a los pesos entrenados observamos que existe un punto fijo tipo silla y dos puntos fijos estables (esta configuración se mantiene tanto si se consideran los pesos umbrales como si no). En la siguiente figura se puede observar la configuración considerando una proyección.

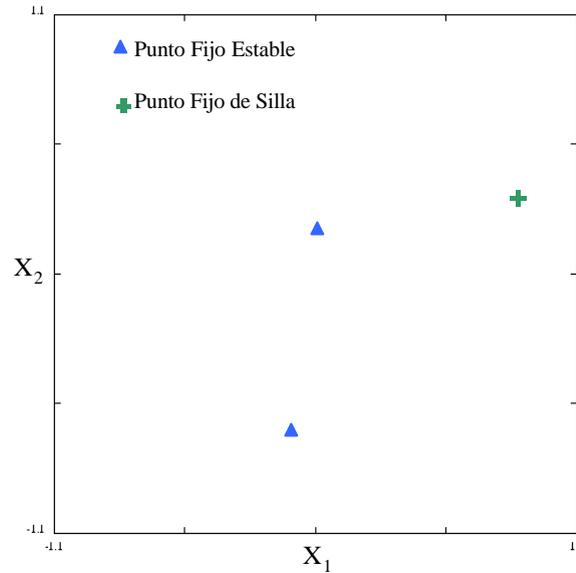


Figura 4.65. Configuración dinámica correspondiente a los pesos entrenados.

Podemos ver las coordenadas de dichos puntos fijos en la siguiente tabla.

Coordenada	Punto fijo Estable 1	Punto fijo Estable 2	Punto de Silla
$X_1$	0.0026	-0.09454	0.8448
$X_2$	0.1714	-0.6630	0.3192
$X_3$	-0.0161	-0.2381	0.3310
$X_4$	-0.9828	0.9889	0.0461
$X_5$	-0.8264	-0.9920	-0.9774
$X_6$	0.2377	0.9236	0.4559
$X_7$	0.4021	-0.5023	0.0449
$X_8$	-0.2864	-0.6761	0.8479
$X_9$	-0.8140	-0.4475	-0.7895

Tabla 4.3. Coordenadas los puntos fijos correspondientes a la figura 6.64.

El hecho de que existan dos puntos estables explica porque la salida de la red es de un tipo cuando se trata del patrón donde se manifiesta la zona muerta del motor u otro donde no se aprecia dicha zona muerta. Es más, cuando la entrada no supera un umbral correspondiente a la zona muerta, los estados están en el dominio de atracción del punto fijo estable denominado 1 en la tabla anterior y, cuando supera dicho umbral, los estados están situados en el dominio de atracción del otro punto fijo estable. Esto se puede observar más claramente si se

consideran las entradas tipo escalón con distintas amplitudes, de tal forma que en una vez llegado al estacionario donde llega a uno de los dos dominios de atracción se deja de suministrar dicha entrada y, por tanto, el estado cae en uno de los dos puntos fijos estables. En la siguiente figura se representa el valor de la amplitud del escalón frente a la salida de la red en la última iteración. En dicha gráfica se observa como los dos valores a los que tiende la salida coinciden con las primeras componentes de los puntos fijos estables dados en la tabla 4.3.

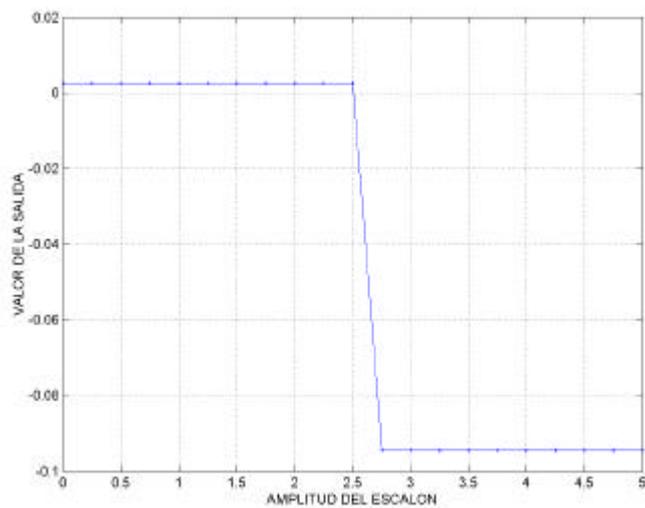


Figura 4.66. Representación de la salida de la red neuronal en el instante final considerando distintas amplitudes de entrada escalón.

#### 4.3.2.2 Cambio dinámico relacionado con el error

Al igual que el problema anterior veamos como se relaciona el error en el entrenamiento con las dinámicas. En la siguiente figura podemos visualizar como el error baja bruscamente de un valor alto a uno bajo.

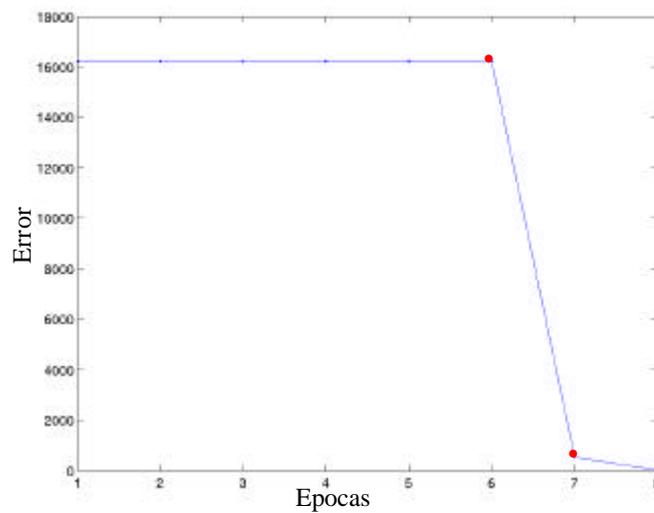


Figura 4.67. Curva de error en un entrenamiento considerando la estrategia de las entradas desplazadas. Los puntos rojos representan la configuración de pesos cuya dinámica es analizada.

En este caso existen dos dinámicas. La dinámica que corresponde al mayor error en la figura anterior es la de un punto fijo estable cuya coordenada, que coincide con la salida de la red  $X_1$ , está saturada, al igual que otras coordenadas como se puede observar en la tabla 4.4. En cuanto a la dinámica con menor error corresponde a la analizada en la sección anterior.

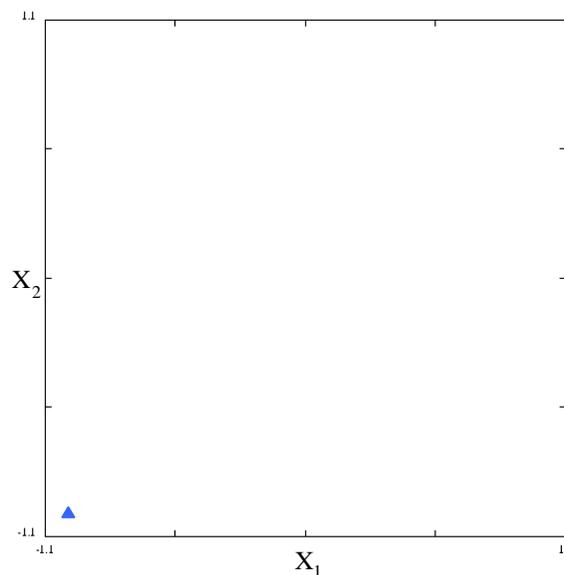


Figura 4.68. Dinámica correspondiente a los pesos con el error menor de los puntos representados en la figura 4.67.

Coordenada	Punto fijo Estable
$X_1$	-0.9998
$X_2$	-1
$X_3$	-1.0
$X_4$	-1.0
$X_5$	0.7700
$X_6$	-0.9998
$X_7$	1.0
$X_8$	-0.9838
$X_9$	0.6100

Tabla 4.4. Coordenadas del punto fijo correspondiente a la figura 4.68.

#### 4.3.2.3 Estrategia de inicialización de pesos

En la figura 4.69 podemos ver la comparación entre la situación inicial y final de los cuatro histogramas de la distribución del error correspondientes a las cuatro posibles estrategias de inicialización descritas anteriormente, donde se comienza con valores aleatorios, en una bifurcación Neimark-Sacker, bifurcación tipo silla-nodo y bifurcación periodo doble. Dichos histogramas se han construido con 3000 muestras del error en entrenamiento. Se puede observar que la mejor estrategia corresponde a comenzar en la bifurcación silla-nodo.

Podemos ver, también, en la figura 4.70 la evolución de los histogramas a lo largo del entrenamiento. Se observa en dichas figuras que las tres estrategias que arrancan de las bifurcaciones mejoran bastante respecto a la estrategia aleatoria uniforme en las primeras épocas. Una vez avanzado el entrenamiento los histogramas se asemejan. Esto indica que con las nuevas estrategias se converge más rápidamente a los mismos mínimos locales.

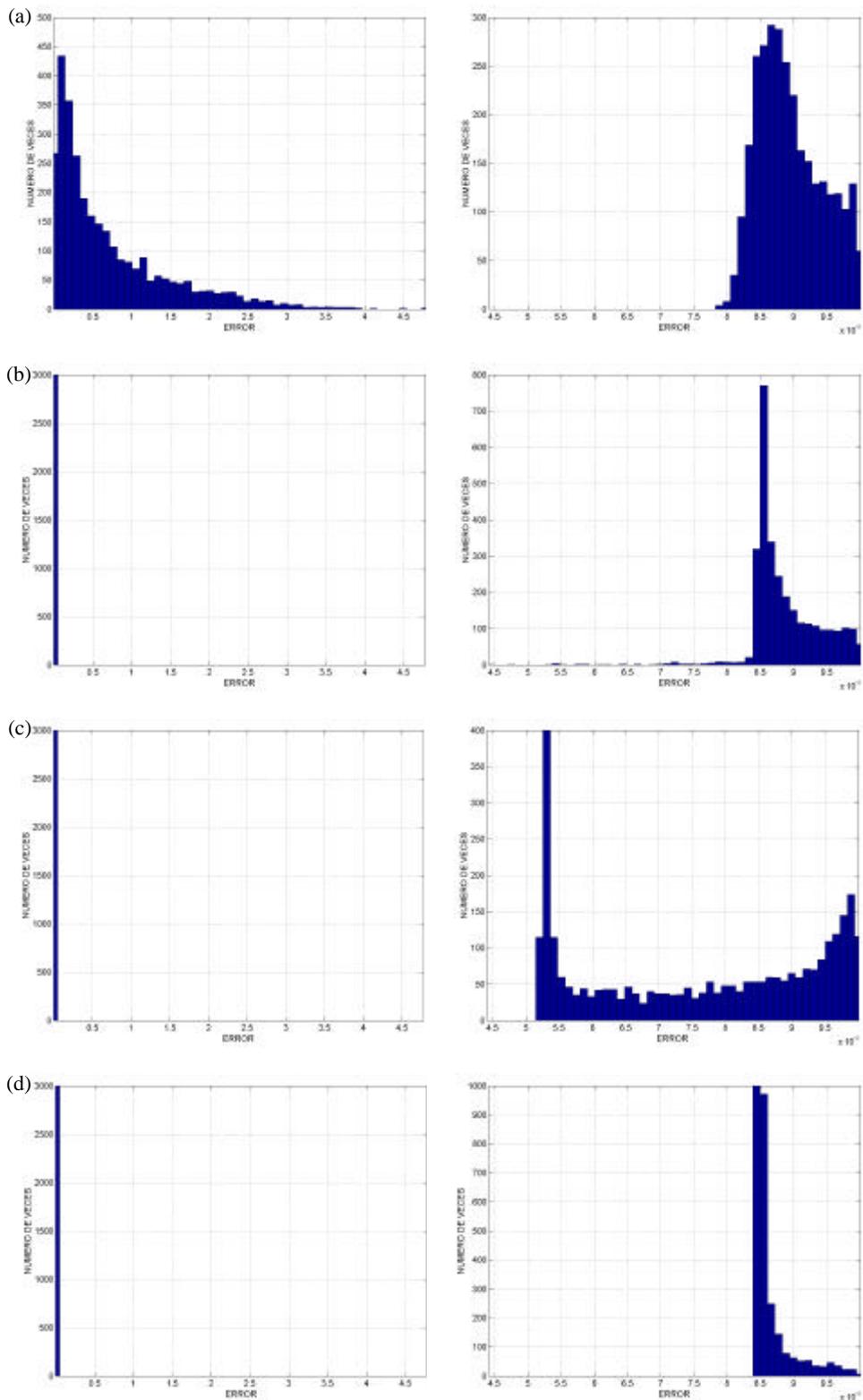


Figura 4.69. Histogramas de la distribución de error al inicio y final del entrenamiento: a) puramente aleatorio, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo y d) comenzando por la bifurcación periodo doble.

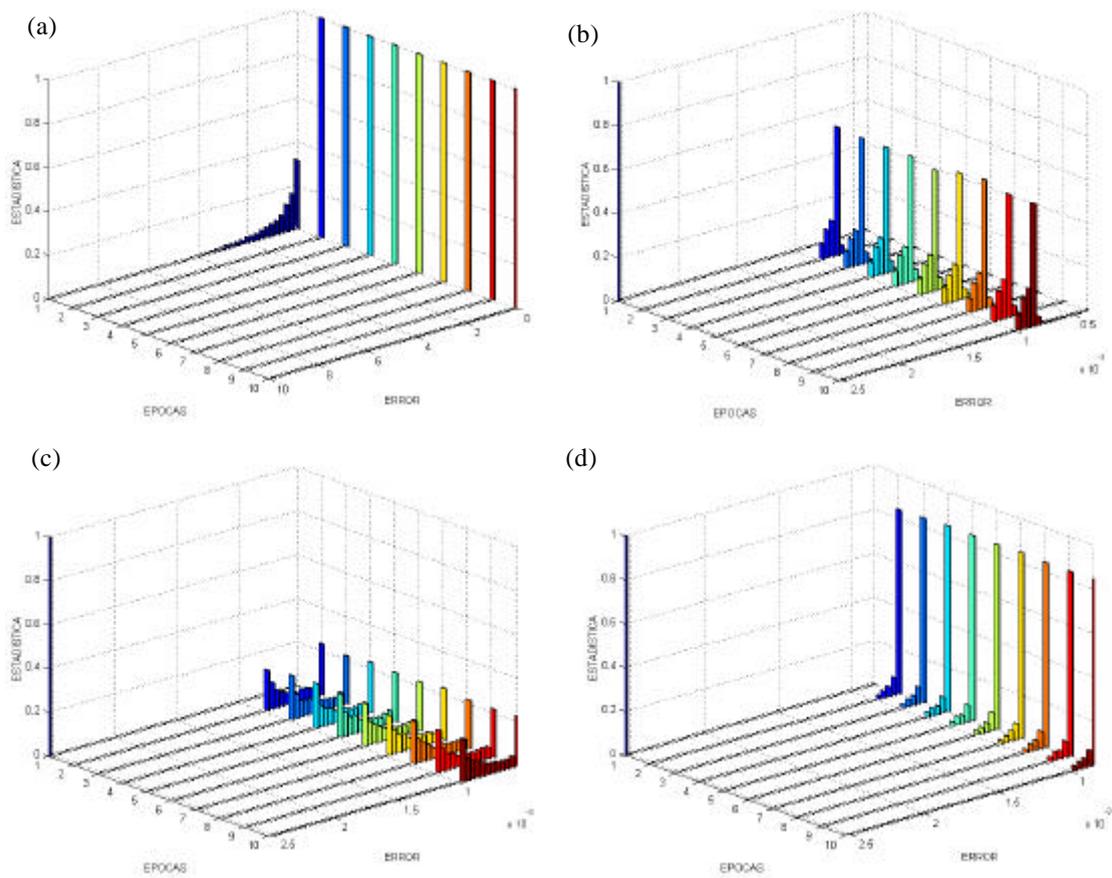


Figura 4.70. Distribución normalizada del error a lo largo de las épocas: a) puramente aleatorio, b) comenzando por la bifurcación Neimark-Sacker, c) comenzando por la bifurcación silla-nodo y d) comenzando por la bifurcación periodo doble.



# CONCLUSIONES Y LÍNEAS ABIERTAS

## Conclusiones

En este trabajo se ha planteado el objetivo de hacer menos opaca la representación interna de una clase particular de redes neuronales dinámicas, mediante el análisis de las dinámicas no lineales posibles. Dada la capacidad de representación de una red de este tipo, capaz de emular casi cualquier sistema dinámico, el llevar a cabo esta tarea por completo resulta imposible. Por ello, se han fijado como objeto de análisis sistemas sencillos de una y dos neuronas (espacios fásicos de una y dos dimensiones). Aun así, en el sistema de dos neuronas se encuentran dinámicas tan complejas como caos, órbitas cuasiperiódicas y configuraciones con múltiples puntos fijos. Cada una de estas dinámicas, así como las transiciones entre ellas (bifurcaciones) han sido objeto de estudio. Además de hacer explícito el funcionamiento de las redes, se pretendía también utilizar ese conocimiento en el problema del entrenamiento, que en este tipo de sistemas es muy complejo y constituye uno de los problemas prácticos fundamentales.

Se ha intentado elaborar un catálogo con las bifurcaciones presentes en el sistema, tarea necesariamente incompleta debido a su complejidad, salvo en el caso simple de una sola neurona. Aquí la herramienta fundamental es la formal normal, que permite determinar las condiciones para la aparición de cada bifurcación. Se han interpretado las dinámicas en términos de la forma de las trayectorias más comunes, así como los de los dominios de atracción de los conjuntos invariantes que las determinan. Se ha prestado especial atención a las trayectorias cuasiperiódicas y las bifurcaciones que las originan, estableciendo condiciones sobre su estabilidad. Las configuraciones caóticas también han sido objeto de estudio especial, intentando caracterizar la aparición y forma de los atractores.

Desde el punto de vista experimental se han tratado diferentes problemas, al objeto de estudiar las dinámicas de las redes que una vez entrenadas, los resolvían, así como de obtener conclusiones sobre los métodos de entrenamiento. Los tres principales problemas tratados han sido la detección de dos patrones temporales simples, la caracterización de la señal de un tipo de potencial evocado visual y el problema de identificación de una planta correspondiente a un motor de corriente continua controlado en el inducido.

En el primer problema, por su sencillez, se ha observado claramente como la dinámica determina el adecuado funcionamiento de la red. Esto es debido a que los puntos fijos estables son capaces de codificar cada patrón, siendo aconsejable tener dos puntos fijos.

Respecto al segundo problema, la detección automática de una componente del potencial evocado ( $P_{100}$ ), se ha hecho un análisis de la dinámica en este sistema mutidimensional. Se ha determinado una configuración alternativa en las entradas, así como la dependencia de los estados/salidas en cada instante respecto a los anteriores. Se comprobó que el estado de la red está robustamente atrapado, o lo que es lo mismo, que la red no tiene memoria a largo plazo. A pesar de ello, esto no es un inconveniente en el entrenamiento si se plantea el problema como un seguimiento de trayectorias, en donde la salida se activa en el momento de la  $P_{100}$ , en lugar de plantear dicho tiempo, codificado adecuadamente, al final de la evolución temporal en la salida.

En cuanto al problema de identificación de un motor de CC, en primer lugar, se ha entrenado la red para el caso del modelo lineal del motor equivalente, donde se ha visto que la red adquiere una dinámica equivalente a un sistema lineal. Por otro lado, se ha entrenado la red para que aprenda pares entrada/salida de un motor real. Previamente ha sido necesario filtrar las señales, debido al ruido de la red eléctrica. Los efectos no lineales apreciados en la planta son retardo y zona muerta. Se ha analizado la dinámica, y se ha visto como la red modeliza la zona muerta con dos puntos fijos estables, uno de ellos asociado al comportamiento sin presencia de zona muerta y el otro con ella.

Por último, en todos los anteriores problemas se ha visto como al atravesar una bifurcación en el entrenamiento el error varía significativamente. Esto ha inspirado un nuevo método de inicialización de pesos, que ha consistido en la inicialización aleatoria en dichas bifurcaciones. Se ha visto el resultado satisfactorio en los problemas planteados.

## Líneas Abiertas

En cuanto a las líneas abiertas, está claro que queda mucho camino por recorrer, del que este trabajo es sólo un primer paso. Algunas de las posibilidades son

- Intentar extrapolar más resultados a la red general de  $n$  neuronas. Estudiar en particular como se puede extender el resultado de la estabilidad de la cuasiórbita para dos neuronas, así como las condiciones en las que surgen atractores caóticos y su distribución de probabilidad.
- Correlar la evolución del error durante el entrenamiento con las bifurcaciones en la dinámica, para crear nuevos algoritmos de entrenamiento.
- Suponer otros modelos de red, manteniendo las características dinámicas de la red, pero reduciendo la complejidad (modelos polinómicos).
- Automatizar en lo posible el análisis de las redes entrenadas.
- Estudiar las nuevas estrategias de inicialización de pesos para más clases de problemas.
- Crear otro tipo de algoritmo de entrenamiento aprovechando el conocimiento sobre las características dinámicas de la red neuronal. Por ejemplo, diseñar un algoritmo de

entrenamiento constructivo que a partir de especificar las posiciones y características de los puntos fijos determine los pesos correspondientes.

- Plantear un controlador para el motor de CC basado en la red neuronal como modelo ideal mejorado respecto al lineal, comparando previamente la identificación de la red neuronal con otro tipo de métodos.

# Apéndice A

## Justificación de las fórmulas iterativas de los algoritmos de optimización DFP y BFGS

Para deducir las fórmulas iterativas de los algoritmos DFP y BFGS es necesario partir de una expresión iterativa:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + E^{(k)} = H^{(k)} + \alpha u u' \quad (\text{A.1})$$

Esta forma particular de actualizar  $H^{(k+1)}$  está motivado porque debe ser una matriz simétrica, ya que la Hessiana lo es y  $H$  aproxima a la Hessiana inversa.

Los métodos Pseudo-Newton verifican:

$$H^{(k+1)} \Delta g(k) = \Delta x(k)$$

donde:

$$\mathbf{D}x(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$\mathbf{D}g(k) = g(k+1) - g(k)$$

Imponiendo a la expresión (A.1) la condición de método Pseudo-Newton y además encontrando un  $a$  que cumpla que  $au' \Delta g = 1$ , la expresión (A.1) se transforma en:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \frac{(\Delta x - H^{(k)} \Delta g)(\Delta x - H^{(k)} \Delta g)'}{(\Delta x - H^{(k)} \Delta g)' \Delta g}$$

Con esta actualización se puede demostrar que si  $\mathbf{D}x(1), \mathbf{D}x(2), \dots, \mathbf{D}x(n)$  son independientes, entonces el método aplicado sobre una función cuadrática termina al menos en la  $n+1$  búsqueda y además ocurre que  $H^{(n+1)} = G^{-1}$  siendo  $G$  la Hessiana de la función.

Para garantizar la definición positiva de la matriz  $H$  se propone una segunda fórmula iterativa alternativa a la anterior, esto es:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + E^{(k)} = H^{(k)} + auu' + bvv'$$

Si le imponemos la condición de los métodos Pseudo-Newton y consideramos los  $a$  y los  $b$  tales que se cumpla que  $au' \mathbf{D}g = 1$  y  $bv' \mathbf{D}g = -1$  entonces se deduce la siguiente expresión iterativa:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \frac{\Delta x(k) \Delta x(k)'}{\Delta x(k)' \Delta g(k)} - \frac{H^{(k)} \Delta g(k) \Delta g(k)' H^{(k)}}{\Delta g(k)' H^{(k)} \Delta g(k)} \quad (\text{A.2})$$

Esta es la fórmula iterativa del método de Davidon- Fletcher-Powell (DFP).

En cuanto al método BFGS, su motivación es la siguiente. Si expresamos la fórmula iterativa del método como:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \left( 1 + \frac{\Delta g(k)' H^{(k)} \Delta g(k)}{\Delta x(k)' \Delta g(k)} \right) \frac{\Delta x(k) \Delta x(k)'}{\Delta x(k)' \Delta g(k)} - \frac{(\Delta x(k) \Delta g(k)' H^{(k)} + H^{(k)} \Delta g(k) \Delta x(k)')}{\Delta x(k)' \Delta g(k)}$$

Si llamamos  $A$  a  $H^1$ , con lo que  $A^{(k)}$  será una aproximación a la Hessiana y no a su inversa, y si en la fórmula anterior se intercambian el papel  $H$  y  $A$ , por un lado, y  $\Delta x$  y  $\Delta g$  por otro, se puede verificar que se obtiene una expresión análoga a la DFP (A.2), salvo que  $A \leftrightarrow H$  y  $\Delta x \leftrightarrow \Delta g$ .

En definitiva, podemos ver el método BFGS como una aplicación de la fórmula (A.2) para la condición Pseudo-Newton, en lugar de intentar hacer una aproximación de la Hessiana inversa se hace de la propia Hessiana. De esta manera la condición Pseudo-Newton nos determina dos fórmulas duales.

Por último es posible elaborar una fórmula híbrida entre el BFGS y el DFP, cuya fórmula es:

$$H_k^{(k)} = (1-k) H_{DFP}^{(k)} + k H_{BFGS}^{(k)}$$

Donde el parámetro  $k$ , cuyo valor está entre 0 y 1, nos determina a que método nos referimos dentro de la familia (DFP, BFGS o su combinación).



## Apéndice B

### Relación entre el parámetro $\mathbf{b}$ y el parámetro $\mathbf{a}$

En este apéndice determinaremos la relación entre el parámetro  $\mathbf{b}$  que aparece en la forma normal de la bifurcación silla-nodo y el parámetro  $\mathbf{a}$  del mapa (véase sección 2.6.1.1). Para ello vamos a demostrar cómo partiendo de una mapa que tiene un punto fijo  $x_0$ , donde uno de los autovalores es igual a la unidad, se llega a la forma normal de la bifurcación de silla-nodo:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{b} + \mathbf{h} + s\mathbf{h}^2 + O(\mathbf{h}^3) \quad (\text{B.1})$$

Consideremos que el desarrollo de Taylor del mapa monodimensional en torno al punto fijo es

$$f(x, \mathbf{a}) = f_0(\mathbf{a}) + f_1(\mathbf{a})(x - x_0) + f_2(\mathbf{a})(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \quad (\text{B.2})$$

En este caso se cumplen dos condiciones:  $f_0(0)=x_0$  (condición del punto fijo) y  $f_1(0)=f_x(x_0,0)=1$  (condición de bifurcación tipo silla-nodo). Podemos escribir el anterior desarrollo como:

$$f(x, \mathbf{a}) = f_0(\mathbf{a}) + [1 + g(\mathbf{a})](x - x_0) + f_2(\mathbf{a})(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

donde  $g(\mathbf{a})$  es una función diferenciable y  $g(0)=0$ .

Para llegar al mapa (B.1) podemos plantear el siguiente cambio de variable correspondiente a un cambio de origen:

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}) = x - x_0 + \mathbf{d}(\mathbf{a})$$

El nuevo mapa en términos de la nueva variable queda como:

$$\tilde{\xi} = \tilde{x} - x_0 + \delta(\alpha) = f(x, \alpha) - x_0 + \delta(\alpha) = f(\xi + x_0 - \delta(\alpha), \alpha) - x_0 + \delta(\alpha)$$

por tanto, considerando el desarrollo de Taylor (B.2) y agrupando los términos en potencias de  $\xi$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} = & [f_0(\alpha) - x_0 - g(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ & + \xi + [g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ & + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La condición para que el términos lineal distinto de la unidad de la anterior expresión se anule es

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \equiv g(\mathbf{a}) - 2f_2(\mathbf{a})\mathbf{d} + \mathbf{d}^2 \mathbf{j}(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = 0$$

siendo  $\mathbf{j}$  una función diferenciable. Para garantizar que la anterior expresión se anule es necesario garantizar que una función  $\mathbf{d}(\mathbf{a})$  la cumpla al menos cuando  $\mathbf{a}$  sea nulo, es decir en la bifurcación. Teniendo:

$$F(0,0) = 0, \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}} \right|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0, \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \right|_{(0,0)} = \mathbf{g}'(0)$$

que implica (localmente) la existencia y unicidad de un función diferenciable  $\mathbf{d}=\mathbf{d}(\mathbf{a})$  tal que  $0=\mathbf{d}(0)$  y  $F(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{a}))=0$ . Por tanto, considerando el desarrollo de Taylor de la función  $\mathbf{d}(\mathbf{a})$  en términos de las potencias de  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{g}'(0)}{2f_2(0)}\mathbf{a} + O(\mathbf{a}^2)$$

Se ha asumido que  $f_2(0)$  es distinto de cero, que es la condición de no degeneración de la bifurcación silla-nodo.

El mapa (B.3) se puede escribir en términos de  $\mathbf{x}$  de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[ f_0'(0)\mathbf{a} + \mathbf{a}^2\mathbf{y}(\mathbf{a}) \right] + \mathbf{x} + [f_2(0) + O(\mathbf{a})]\mathbf{x}^2 + O(\mathbf{x}^3) \quad (\text{B.4})$$

donde  $\mathbf{y}$  es una función diferenciable.

Consideramos un nuevo parámetro  $\mathbf{m}=\mathbf{m}(\mathbf{a})$  como el término constante (el que no depende de  $\mathbf{x}$ ) de la expresión anterior (B.4):

$$\mathbf{m} = f_0'(0)\mathbf{a} + \mathbf{a}^2\mathbf{y}(\mathbf{a})$$

donde

a)  $\mathbf{m}(0) = 0$

b)  $\mathbf{m}'(0) = f'_0(0) = f'_a(x_0, 0)$

Si asumimos la condición de transversalidad

$$f'_a(x_0, 0) \neq 0$$

entonces el teorema de la función implícita implica la existencia y unicidad de la función inversa diferenciable  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{m})$  con  $\mathbf{a}(\mathbf{m}) = 0$ . Por tanto, la ecuación (B.4) queda como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{m} + \mathbf{x} + a(\mathbf{m})\mathbf{x}^2 + O(\mathbf{x}^3)$$

donde  $a(\mathbf{m})$  es una función diferenciable con  $a(0) = f_2(0) \neq 0$  debido a la condición de no degeneración.

Si consideramos  $\mathbf{h} = |a(\mathbf{m})|\mathbf{x}$  y  $\mathbf{b} = |a(\mathbf{m})|\mathbf{m}$  Entonces tenemos la forma normal buscada

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{b} + \mathbf{h} + s\mathbf{h}^2 + O(\mathbf{h}^3)$$

donde  $s = \text{signo}(a(0))$  y

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}) = |f_2(0)|f'_0(0)\mathbf{a} + O(\mathbf{a}^2)$$

## Apéndice C

### Forma normal asociada a la bifurcación Neimark-Sacker de un mapa bidimensional

En este apéndice se trata de ver como partiendo del mapa complejo (equivalente a un mapa bidimensional real)

$$\tilde{z} = I(\mathbf{b})z + g(z, \bar{z}, \mathbf{b}) \quad (\text{C.1})$$

siendo  $g$  los términos del desarrollo de Taylor

$$g(z, \bar{z}, \mathbf{b}) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\mathbf{b}) z^k \bar{z}^l, \text{ con } k, l = 0, 1, \dots$$

descrito en la sección 2.6.1.3 donde se trataba la bifurcación Neimark-Sacker en mapas, y se llega a la forma normal siguiente:

$$\tilde{w} = e^{iq} w(1 + \mathbf{b} + d(\mathbf{b})|w|^2) + o(\|w\|^4) = \mathbf{I}(\mathbf{b})w + c_1 w^2 \bar{w} + o(\|w\|^4)$$

donde  $d(\mathbf{b}) = e^{iq} c_1(\mathbf{b})$ .

La idea general es considerar el mapa (C.1) e intentar plantear un nuevo mapa topológicamente equivalente que tenga el menor número posible de términos cuadráticos y cúbicos en su desarrollo de Taylor. Con el siguiente lema se pueden eliminar los términos cuadráticos. Se eligen los términos adecuados en una función  $h$ , que permitirá pasar del mapa original al topológicamente equivalente.

**Lema C.1.**

El mapa

$$\tilde{z} = \mathbf{I}(\mathbf{b})z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

Se puede transformar mediante la siguiente transformación por un cambio invertible

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

para todo valor pequeño de  $|\mathbf{b}|$ , en el mapa en términos cuadráticos:

$$\tilde{w} = e^{iq} (1 + \mathbf{b})w + o(\|w\|^3)$$

suponiendo que

$$e^{iq} \neq 1 \text{ y } e^{3iq} \neq 1$$

Demostración.

El cambio inverso de las variables esta dado por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3)$$

Por tanto, en la nueva coordenada  $w$ , el mapa (C.1) tiene la forma

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \mathbf{I}(\mathbf{b})z + \frac{1}{2} \left( g_{20} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \mathbf{I}(\mathbf{b})^2) h_{20} \right) w^2 \\ &+ \left( g_{11} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - |\mathbf{I}(\mathbf{b})|^2) h_{11} \right) w\bar{w} \\ &+ \frac{1}{2} \left( g_{02} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{b})^2) h_{02} \right) \bar{w}^2 \\ &+ O(|w|^3) \end{aligned} \tag{C.2}$$

Podemos elegir

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mathbf{I}(\mathbf{b})^2 - \mathbf{I}(\mathbf{b})}, h_{11} = \frac{g_{11}}{|\mathbf{I}(\mathbf{b})|^2 - \mathbf{I}(\mathbf{b})}, h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mathbf{I}}(\mathbf{b})^2 - \mathbf{I}(\mathbf{b})}$$

Haciendo la anterior elección se anulan los términos cuadráticos de (C.2). Estas sustituciones son válidas si los denominadores son distintos de cero para valores suficientemente pequeños de  $|\mathbf{b}|$  incluyendo  $\mathbf{b}=0$ . Esto es así en este caso, ya que se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(0)^2 - \mathbf{I}(0) &= e^{iq} (e^{iq} - 1) \neq 0 \\ |\mathbf{I}(0)|^2 - \mathbf{I}(0) &= 1 - e^{iq} \neq 0 \\ \bar{\mathbf{I}}(0)^2 - \mathbf{I}(0) &= e^{iq} (1 - e^{-3iq} - 1) \neq 0 \end{aligned}$$

debido a las restricciones que hemos supuesto sobre  $\mathbf{q}$ .

Asumiendo que se han anulado los términos cuadráticos, se puede intentar eliminar los términos cúbicos utilizando el siguiente lema.

**Lema C.2.**

El mapa

$$\tilde{z} = \mathbf{I}(\mathbf{b})z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

se puede transformar con el siguiente cambio de variable

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3 + O(|w|^4)$$

un  $|\mathbf{b}|$  lo suficientemente pequeño, en el mapa con únicamente un término cúbico:

$$\tilde{w} = \mathbf{I}(\mathbf{b})w + c_1w^2\bar{w} + o(\|w\|^4)$$

supuesto que

$$e^{2iq} \neq 1 \text{ y } e^{4iq} \neq 1$$

Demostración.

La transformación inversa es

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \mathbf{I}(\mathbf{b})w + \frac{1}{6}(g_{30} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \mathbf{I}(\mathbf{b})^3)h_{30})w^3 + \frac{1}{2}(g_{21} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \mathbf{I}(\mathbf{b})|\mathbf{I}(\mathbf{b})|^2)h_{21})w^2\bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_{12} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{b})|\mathbf{I}(\mathbf{b})|^2)h_{12})w\bar{w}^2 + \frac{1}{6}(g_{03} + (\mathbf{I}(\mathbf{b}) - \bar{\mathbf{I}}(\mathbf{b})^3)h_{03})\bar{w}^3 + O(|w|^4) \end{aligned}$$

Eligiendo

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{\mathbf{l}(\mathbf{b})^3 - \mathbf{l}(\mathbf{b})}, h_{12} = \frac{g_{12}}{\overline{\mathbf{l}}(\mathbf{b})|\mathbf{l}(\mathbf{b})|^2 - \mathbf{l}(\mathbf{b})}, h_{03} = \frac{g_{03}}{\overline{\mathbf{l}}(\mathbf{b})^3 - \mathbf{l}(\mathbf{b})}$$

se pueden anular todos los términos cúbicos excepto el que corresponde a  $w^2\bar{w}$ , que se debe tratar separadamente. Este término se denomina resonante. Las sustituciones son válidas debido a que los denominadores son distintos de cero para pequeños valores de  $|\mathbf{b}|$ , debido a las condiciones supuestas en este lema.

Se podría, en principio, intentar eliminar el término resonante haciendo la siguiente elección

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\mathbf{l}(\mathbf{b})(1 - |\mathbf{l}(\mathbf{b})|^2)}$$

pero es posible sólo para  $\mathbf{b} \neq 0$ , ya que cuando vale cero el denominador siempre se anula para todo  $q_0$  y en consecuencia, no se puede eliminar ese término. Podemos elegir entonces, por simplicidad,  $h_{21}=0$ . Bajo esta condición el coeficiente que acompaña al término resonante será

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

Combinando los dos lemas anteriores podemos plantear la forma normal de la bifurcación Neimark-Sacker.

**Lema C.3.** Forma normal para la bifurcación Neimark-Sacker

El mapa

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & \mathbf{l}(\mathbf{b})z + \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 \\ & + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 \\ & + O(|z|^4) \end{aligned}$$

Tal que

$$e^{ik\theta} \neq 1 \quad k=1,2,3,4$$

utilizando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} z = & w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \\ & + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 \\ & + O(|w|^4) \end{aligned}$$

y para valores suficientemente pequeños de  $\|\mathbf{b}\|$ , entonces se llega al mapa con un único término cúbico

$$\tilde{w} = \mathbf{I}(\mathbf{b})w + c_1 w^2 \bar{w} + o(\|w\|^4)$$

La superposición truncada de las transformaciones definidas en los lemas C.1 y C.2 dan el cambio de coordenada requerido descrito en este lema. Primero se anulan los términos cuadráticos con el cambio de variable y elección de los coeficientes  $h_{ij}$  propuestos en el lema C.1. El nuevo mapa tendrá coeficientes de los términos cúbicos distintos al del mapa original (C.1). Seguidamente se hace el cambio de variable propuesto con el lema C.2. En este caso sólo quedará el coeficiente que acompaña al término resonante, que denominaremos  $1/2 g^a_{12}$ , distinto de  $1/2 g_{12}$ . Esto es, para calcular  $c_1$  es necesario calcular el coeficiente  $1/2 g^a_{12}$  del término resonante. El resultado es el siguiente cuando  $\mathbf{b}=0$

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1-2\mathbf{m}_0)}{2\mathbf{m}_0(\mathbf{m}_0-1)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{(1-\bar{\mathbf{m}}_0)} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mathbf{m}_0^2-\bar{\mathbf{m}}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2}$$

donde

$$\mu_0 = e^{i\theta_0}$$

## Apéndice D

### Forma normal asociada a la bifurcación Neimark-Sacker de un mapa multidimensional (Variedad central)

En este apéndice se analizará como se llega a la forma normal que describe la bifurcación Neimark-Sacker en varias dimensiones (véase sección 2.6.2.1), dada por

$$\tilde{z} = e^{iq} z(1 + d(0) |z|^2) + O(|z|^4)$$

Comencemos considerando que la variable  $x$  que describe los estados de un mapa se puede descomponer como

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y$$

donde  $z \in \mathbb{C}^1$ ,  $zq + \bar{z}\bar{q} \in E^c$ ,  $y \in E^{nc}$ . y  $q$  es el autovector complejo de la matriz Jacobiana del mapa asociado al autovalor crítico

$$Aq = e^{i\theta_0} q$$

La variable  $z$  es una coordenada compleja sobre  $E^c$ .  $E^c$  es el espacio que contiene la variedad central (la dimensión es dos).  $E^{nc}$  es el hiperespacio complementario (la dimensión es la dimensión del mapa  $f$  menos dos).

Al igual que en la bifurcación silla-nodo, si se considera que  $p$  es el vector que verifica

$$A^T p = e^{-i\theta_0} p$$

y está normalizado de forma que

$$\langle p, q \rangle = 1$$

se puede deducir la expresión de  $z$  e  $y$  de la siguiente manera [Kuznetsov 1998]. Considerando que

$$\langle p, y \rangle = 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} z &= \langle p, x \rangle \\ y &= x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q} \end{aligned}$$

Podemos escribir el mapa como

$$\tilde{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n \tag{D.1}$$

entonces, en las coordenadas  $z$  e  $y$  el mapa toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= e^{iq} z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ \tilde{y} &= Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \end{aligned}$$

Los anteriores mapas se pueda escribir

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= e^{iq} z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 \bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \dots \\ \tilde{y} &= Ay + \frac{1}{2} H_{20} z^2 + H_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} H_{02} \bar{z}^2 + \dots \end{aligned} \quad (D.2)$$

donde  $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}^1$ ;  $G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$ ; y se ha usado el producto escalar en  $\mathbb{C}^n$ .

Los números complejos y vectores que aparecen en las fórmulas anteriores se pueden calcular con

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \right|_{z=0}, \quad i + j \geq 2 \\ \bar{G}_{10,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{z=0, y=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{G}_{01,i} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \right|_{z=0, y=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ H_{ij} &= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \right|_{z=0} - G_{ij} q - \bar{G}_{ji} \bar{q}, \quad i + j = 2 \end{aligned} \quad (D.3)$$

La variedad central tiene la siguiente expresión genérica

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} w_{20} z^2 + w_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} w_{02} \bar{z}^2 + O(|z|^3) \quad (D.4)$$

Sustituyendo la  $y$  de la variedad central (D.4) en la segunda ecuación de (D.2) e identificando términos aparece un conjunto de ecuaciones lineales que permite calcular los vectores  $w_{ij}$ . Estas ecuaciones lineales son:

$$\begin{aligned}(e^{2iq} E - A)w_{20} &= H_{20} \\ (E - A)w_{11} &= H_{11} \\ (e^{-2iq} E - A)w_{02} &= H_{02}\end{aligned}$$

donde  $E$  es la matriz identidad.

Estas ecuaciones tienen solución única, siempre y cuando las matrices que multiplican a los vectores  $w_{ij}$  sean invertibles. La matriz  $(E-A)$  es invertible porque 1 no es un autovalor de  $A$  ( $e^{iq} \neq 1$ ).

Si

$$e^{3iq} \neq 1$$

las matrices  $(e^{\pm 2iq} E - A)$  son también invertibles porque  $e^{\pm 2iq}$  no son autovalores de  $A$ .

Sustituyendo la expresión de  $y$  dada por (D.4) en la primera ecuación de (D.2) el mapa restringido a la variedad central se puede expresar como

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= iwz + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} + 2\langle G_{10}, (E - A)^{-1}H_{11} \rangle) \\ &+ \langle G_{01}, (e^{2iq} E - A)^{-1}H_{20} \rangle z^2 \bar{z} + \dots\end{aligned}\quad (D.5)$$

El término que contiene los elementos no lineales del desarrollo de Taylor del mapa dado por (D.1) tiene la siguiente expresión:

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4) \quad (D.6)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de (D.3) y el anterior desarrollo de Taylor se deduce que:

$$\langle G_{10}, y \rangle = \langle p, B(q, y) \rangle, \langle G_{01}, y \rangle = \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle$$

por tanto, la expresión del mapa asociado a la variedad central (D.5) tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & iwz + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} + 2\langle p, B(q, (E - A)^{-1}H_{11}) \rangle \\ & + \langle p, B(\bar{q}, (e^{2iq}E - A)^{-1}H_{20}) \rangle)z^2\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (D.7)$$

teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor (D.6) y la expresión de los coeficientes (D.3) entonces:

$$G_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, G_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$$

y

$$\begin{aligned} H_{20} &= B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q} \\ H_{11} &= B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q} \end{aligned}$$

Por otro lado, sustituyendo las anteriores expresiones en (D.7) y teniendo en cuenta las identidades siguientes

$$\begin{aligned} (E - A)^{-1}q &= \frac{1}{1 - e^{iq}}q, (e^{2iq}E - A)^{-1}q = \frac{e^{-iq}}{e^{iq} - 1}q \\ (E - A)^{-1}\bar{q} &= \frac{1}{1 - e^{-iq}}\bar{q}, (e^{2iq}E - A)^{-1}\bar{q} = \frac{e^{-iq}}{e^{3iq} - 1}\bar{q} \end{aligned}$$

entonces

$$\tilde{z} = e^{iq} z + \frac{1}{2} g_{20} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} g_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} g_{21} z^2 \bar{z} + \dots$$

donde

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle, g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \\ g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2 \langle p, B(q, (E - A)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle \\ &+ \langle p, B(\bar{q}, (e^{2iq} E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle + \frac{e^{-iq} (1 - 2e^{iq})}{1 - e^{iq}} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle - \\ &- \frac{2}{1 - e^{-iq}} \left| \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \right|^2 - \frac{e^{iq}}{e^{3iq} - 1} \left| \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (D.8)$$

En ausencia de resonancias fuertes, esto es

$$e^{ikq} \neq 1, \text{ para } k=1,2,3,4,\dots$$

el mapa  $z$  se transforma, utilizando los resultados de la bifurcación Neimark-Sacker en el caso complejo monodimensional (véase apéndice C), en

$$\tilde{z} = e^{iq} z (1 + d(0) |z|^2) + O(|z|^4)$$

donde el signo del número real  $a(0) = \operatorname{Re} d(0)$  determina la dirección de la bifurcación de la curva invariante cerrada y se puede calcular mediante la siguiente fórmula

$$a(0) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-iq} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left( \frac{(1 - 2e^{iq}) e^{-2iq}}{2(1 - e^{iq})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{02}|^2$$

Usando la definición de coeficientes (D.8) deducimos que

$$a(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ e^{-iq} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2 \langle p, B(q, (E - A)^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle + 2 \langle p, B(\bar{q}, (e^{2iq} E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle] \}$$



# Apéndice E

## Cálculo de los exponentes de Lyapunov (Método QR)

En este apéndice describiremos el método  $QR$  mencionado en la sección 2.7.1, y que se utiliza para calcular los exponentes de Lyapunov en el caso multidimensional.

El objetivo es determinar los autovalores de la matriz construida como el producto de las Jacobianas evaluadas en una trayectoria fásica:

$$A_n(x) = J(f^{n-1}(x)) \cdots J(f(x))J(x)$$

donde  $J$  simboliza la Jacobiana del mapa. De forma más precisa, los coeficientes de Lyapunov son los autovalores de la anterior matriz, divididos por  $n$  y considerando el límite  $n \rightarrow \infty$ .

El procedimiento a seguir con este método es hacer una descomposición  $QR$  [Teukolsky 1992] de la Jacobiana en cada iteración. Esto es,  $J(x)$  queda como:

$$J(x) = Q_1 R_1$$

con  $Q_1$  es una matriz ortogonal y  $R_1$  es una matriz triangular superior con elementos diagonales no negativos. Si  $J(x)$  es invertible, dicha descomposición es única. Entonces se inicia un proceso iterativo para  $k=2,3,4$ , donde en la etapa  $k$  se construye la matriz auxiliar  $J'_k(x)$

$$J'_k(x) = J(f^{k-1}(x))Q_{k-1}$$

a continuación se hace la factorización  $QR$ , dada por

$$J'_k(x) = Q_k R_k \tag{E.1}$$

La  $Q_k$  se usará en la iteración siguiente y las  $R_k$  se acumulan de tal forma que

$$A_n(x) = Q_n R_n R_{n-1} \cdots R_1$$

Para iniciar el proceso se puede tomar  $J'_1(x)$  en el paso inicial como  $J(x)Q_0$ , con  $Q_0$  la matriz identidad.

Si se consideran  $I_{ii}^{(n)}$  como los elementos diagonales de la matriz  $R_n R_{n-1} \cdots R_1$ , entonces se puede demostrar [Eckmann 1985] que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_{ii}^{(n)} = I_i$$

siendo  $I_i$  los exponentes de Lyapunov.

Por tanto, la estrategia es descomponer la matriz extraída de la ecuación (E.1), e ir multiplicando las  $R_i$ , de tal forma que se determinan sus elementos diagonales y se calcula los límites correspondientes a la expresión anterior. Este procedimiento se continua hasta que el valor sea prácticamente constante, indicando de esta manera que dicho límite ha convergido.



# Bibliografía

- [Alligood 1996] K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. Chaos. An Introduction to Dynamical System. Springer-Verlag. New York Inc. 1996
- [Alon 1991] N. Alon, A.K. Dewdney , T.J. Ott. Efficient simulation of finite automata by neural nets. Journal of the Association of Computing Machinery, volume 38(2), pp: 495-514, 1991
- [Antoniou 1993] A. Antoniou. Digital Filters: Analysis, Design, and Applications. Second Edition, McGraw-Hill, Inc. 1993
- [Arnold 1983] V. Arnold. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983
- [Arnold 1994] V. Arnold, V. Afraimovich, Y. Il'yashenko, L Shil'nikov. Bifurcation theory, in ed. V. Arnold. Dynamical Systems V. Encyclopaedia of Mathematical Science. Springer-Verlag. New York. 1994

- [Back 1992] A.Back, J. Guckenheimer, M.R. Myers, F.J. Wicklin and P.A. Worfolk. DsTool: Computer assisted exploration of dynamical systems. *Notices Amer. Math. Soc.* Volume 39 (4), pp: 303-309. 1992
- [Bak 1986] P. Bak. The Devil's staircase. *Physics Today*, volume 39 (12). pp: 38-45, 1986
- [Barreto 1997] E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, J. A. Yorke: From High Dimensional Chaos to Stable Periodic Orbits: The Structure of Parameter Space. *Phys. Rev. Lett.* , volume 78, pp: 4561-4564, 1997
- [Bengio 1994] Y. Bengio, P. Simard, P. Frasconi: Learning Long-Term Dependences with Gradient Descent is Difficult. *IEEE Trans. on Neural Networks*, volume 5 pp:157-166, 1994
- [Brent 1973] R.P. Brent. *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Englewood Cliffs, N. J:Prentice-Hall, 1973
- [Bronson 1995] R. Bronson. *Linear Algebra: an Introduction*. Academic Press, INC. 1995
- [Broyden 1970] C. G. Broyden. The convergence of a class of double rank minimization algorithm, part I and II. *J. Inst. Maths. Applns.* volume 6, pp: 76-90 y 222-231, 1970
- [Bruck 1988] J. Bruck, J. W. Goodman. A generalized convergence theorem for neural networks. *IEEE Transaction on Information Theory*, volume 34. pp: 1089-1092, 1988
- [Cao 1999] Jine Cao. On stability of delayed cellular neural networks. *Physics Letters A*, volume 261, n° 5-6. pp. 303-308, 1999
- [Carpenter 1991] G. A. Carpenter, S. Grossberg., J. Reynolds. ARTMAP: A self-organizing neural network architecture for fast supervised learning and pattern recognition. In *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks*, volume. 1, pp: 863-868, Seattle.. 1991.
- [Carr 1981] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York. 1981

- [Chen 1991] Chen, S., C. F. N. Cowan, and P. M. Grant. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, volume 2 (2), pp. 302-309, 1991.
- [Donchin 1976] E. Donchin, P. Tueting, W. Riter, M. Kutas, E. Heffley. On the independence of the CNV and the P300 components of the human averaged evoked potentials. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1976
- [Eckmann 1985] J. P. Eckmann, Ruelle, D.: Ergodic Theory of Chaos. *Rev. Mod. Phys.* , volume 57, pp: 617-655, 1985
- [Feigenbaum 1978] M. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Statist. Phys.*, volume 19, pp:25-52, 1978
- [Fletcher 1963] R. Fletcher, M. J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, volume 6, pp: 163-168, 1963
- [Fletcher 1964] R. Fletcher, C. M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *Computer Journal*, volume 7 (2), pp:149-154, 1964
- [Fletcher 1970] R. Fletcher. A new approach to variable metric algorithms, *Computer Journal*, volume 13, pp: 317-322, 1970
- [Fletcher 1987] R.Fletcher: *Practical Methods of Optimization*. Second Edition. John Wiley & Sons. 1987
- [Fowler 1994] C. F. Fowler, J. D. Durrant. The effects of peripheral hearing loss on the auditory brainstem response. In *Principles & Applications in Auditory Evoked Potentials*, J. T. Jacobson, ed. Allyn and Bacon: Boston pp: 237-250, 1994
- [Garmon 1994] M. Garmon and F. Botelho. Observability of neural networks behavior. In J.D. Cowen, G. Tesauro, and J. Alspector editors. *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 6. pp: 455-462. Morgan Kaufmann. 1994
- [Goldfarb 1970] D. Goldfarb. A family of variable metric methods derived by variational means. *Maths. Computer*, volume 24, pp: 23-26, 1970

- [Gopalsamy 1998] K. Gopalsamy, I. Leung, P. Liu. Global Hopf-bifurcation in a neural network. *Appl. Math. Comput.*, volume 94, pp: 171-192, 1998
- [Grossberg 1988] S. Grossberg. Nonlinear neural networks: principles, mechanisms, and architectures. *Neural Networks*. volume 1, pp:17-61, 1988
- [Guckenheimer 1980] J. Guckenheimer, J. Moser, S. NewHouse. *Dynamical Systems. Progress in Mathematics*, volume 8. Birkhäuser: Boston, Massachusetts, 1980
- [Hale 1991] J. Hale, H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York Inc., 1991
- [Hartman 1964] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Wiley. New York. 1964
- [Hebb 1949] D. O. Hebb. *The Organization of Behavior*. Wiley, 1949
- [Hertz 1991] J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer. *Introduction to the theory of Neural Computation*. Addison-Wesley. Redwood City, CA, 1991
- [Hopfield 1982] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academia of Sciences USA*, volume 81, Biophysics, pp. 3088-3092, 1982
- [Hopfield 1984] J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academia of Sciences USA*, volume 81, pp: 3088-3092, 1984
- [Hush 1993] R. Hush, G.B. Horne: Progress in supervised Neural Networks What's New Since Lippmann?. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp: 8-39, 1993
- [Irwin 1980] M. C. Irwin. *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press: New York, 1980
- [James 1991] J. A. Freeman, D. M. Skapura. *Redes neuronales. Algoritmos, Aplicaciones y técnicas de programación*. Addison-Wesley/ Diaz Santos, 1991

- [Kincaid 1994] Kincaid D. and W. Cheney. Análisis Numérico. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994
- [Kohonen 1989] T. Kohonen, Self-Organization and Associative Memory. Springer-Verlag, 1989
- [Kohonen 1990] T. Kohonen, The self-organizing map. Proc. of the IEEE, volume 78(9), 1990
- [Kosko 1987] B. Kosko. Competitive adaptive bi-directional associative memories. In Proceedings of the IEEE First International Conference on Neural Networks, eds. M. Caudill and C. Butler, volume. 2, San Diego, CA: SOS Printing, pp. 759-766, 1987
- [Kuznetsov 1998] Y. A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences, volume 112. Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1998
- [Lee 1991] S. Lee, R. M. Kil. A gaussian potential function network with hierarchically self-organizing learning. Neural Networks, volume 4, pp. 207-224, 1991
- [Levi 1981] M. Levi. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. Mem. AMS., volume 214, pp: 1-147, 1981
- [Liao 1998] X. Liao, J. Yu., Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay. IEEE Transaction on Neural Networks, volume 9 (5), pp: 1042-1046, 1998
- [Liao 2001] X. Liao, K. Wong, Z. Wu. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays. Physica D, volume 149, pp: 123-141, 2001
- [Lin 1996] T. Lin, B.G. Horne, P. Tino and C.L. Giles. Learning Long-Term Dependencies in NARX Recurrent Neural Networks. IEEE Trans. on Neural Networks, volume 7(6), pp: 1329-1338, 1996
- [Lorenz 1963] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. Journal Atmospheric Scientific, volume 20, pp:130-141, 1963

- [Marcus 1989] C. M. Marcus and R. M. Westervelt. Dynamics of Iterated-Map Neural Networks. *Physical Review A*, volume 14(1), 1989
- [Maren 1990] A. J. Maren, C. T. Harston, R. M. Pap. *Handbook of Neural Computing Applications*. Academic Press. 1990
- [Marichal 1994] G.N. Marichal. Diseño de políticas de identificación y control de robots basadas en redes neuronales y sistemas neuro-fuzzy. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. 1999
- [May 1976] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, volume 261, pp: 459-467, 1976
- [McCulloch 1943] W. S. McCulloch, W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, volume 5, pp. 115-137. 1943
- [Minsky 1969] M. Minsky; S. Papert. *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. MIT Press: Cambridge, MA. 1969
- [Moreno 2001] L. Moreno, J.L. Sánchez, S. Mañas, J.D. Piñeiro, J.J. Merino, J. Sigut, R.M. Aguilar, J.I. Estévez, R. Marichal. Tools for Acquisition, Processing and Knowledge-Based Diagnostic of the Electroencephalogram and Visual Evoked Potentials. *Journal of Medical Systems*, volume 25, pp:177-194, 2001
- [Morgan 1991] D. P. Morgan, C.L. Scofield. *Neural Networks and Speech Processing*. Kluwer Academic Publishers, 1991
- [Narendra 1990] K. S. Narendra, K. Parthasarathy. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, volume 1, pp: 4-27. Marzo 1990
- [Ogata 1995] K. Ogata, *Discrete-time Control System*. Prentice-Hall, Second Edition, 1995
- [Ogata 1998] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna* Editores: Prentice-Hall, México, 3<sup>er</sup> edition. , 1998

- [Oppenheim 1997] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab. Señales y Sistemas. Segunda Edición. Pearson Prentice-Hall, 1997
- [Pineda 1988] F. J. Pineda. Dynamics and architecture for neural computation. Journal of Complexity, volume 4, pp: 216-245, 1988
- [Piñeiro 1998] J. D. Piñeiro, R. L. Marichal., L. Moreno, J. Sigut, I. Estévez, R. Aguilar., J. L. Sánchez., J. Merino. Evoked Potential Feature Detection with Recurrent Dynamic Neural Networks. International ICSC/IFAC Symposium on Neural Computation 98, Viena. Septiembre 1998
- [Piñeiro 2000 a] J.D. Piñeiro, R. L. Marichal, L. Moreno, J. Sigut, I. Estévez., R. Aguilar. Dynamics of a Small Discrete Recurrent Neural Network. 2<sup>nd</sup> ICSC Symposium on Neural Computation 2000, Berlin. Mayo 2000
- [Piñeiro 2000 b] J. D. Piñeiro, R. L. Marichal, J. F. Sigut, J.I. Estévez, E J. González, R. M. Aguilar. Dinámica de una Red Neuronal Recurrente Discreta de Baja Dimensión XXI Jornadas de Automática. Sevilla. Septiembre 2000
- [Piñeiro 2001] J. D. Piñeiro, R. L. Marichal, L. Moreno, J. F. Sigut, E. J. González. Study of Chaos in a Simple Discrete Recurrence Neural Network. 2084. 579-585. Springer-Verlag, New York. Eds. J. Mira, A. Prieto. Connectionist Models of Neurons, Learning Processes, and Artificial Intelligence. Lecture Notes in Artificial Intelligence. 2001
- [Piñeiro 2002] J. D. Piñeiro, R. L. Marichal, J. F. Sigut, J.I. Estévez, E J. González, R. M. Aguilar. Analysis of Pseudo-Chaotic Orbits in a Simple Discrete Recurrent Neural Network. International Symposium on Engineering of Intelligent Systems. EIS'2002. Malaga. Septiembre 2002.
- [Potapov 2000] A. Potapov, M.K. Ali: Robust Chaos in Neural Networks. Physics Letters A, volume 277. pp: 310-322, 2000
- [Rao 1984] S.S. Rao. Optimization theory and applications. Second Edition. Wiley Eastern. 1984
- [Regan 1989] D. Regan. Human Brain Electrophysiology. Evoked Potentials and Evoked Magnetic Fields in Science and Medicine. Elsevier, 1989

- [Robinson 1995] C. Robinson: *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, 1995
- [Rosenblatt 1958] F. Rosenblatt. The Perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, volume 65, pp. 386-408, 1958
- [Rumelhart 1986] Rumelhart D. E., Hinton G. E., R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In *Parallel distributed processing*, volume 1, pp:318-362, Cambridge, MA: MIT Press. , 1986
- [Sacker 1965] R. Sacker. A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces. *Communications Pure App. Math.*, volume 18, pp:717-732, 1965
- [Shannon 1970] D. F. Shanno. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Maths. Comp.*, volume 24, pp: 647-656, 1970
- [Smale 1963] S. Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In ed S. Carins., *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press, Princeton, New York, pp: 63-80, 1963
- [Spivak 1994] M. Spivak. *Cálculo Infinitesimal*. Ed. Reverte, 2<sup>a</sup> Edición, Barcelona, 1994.
- [Tabor 1989] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*. New York: Wiley, 1989
- [Tank 1987] D. W. Tank, J.J. Hopfield. Neural computation by concentrating information in time. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, volume 84, pp: 1896-1991, 1987
- [Teukolsky 1992] W.H. Press/S.A. Teukolsky/W.T. Vetterling/B.P.Flannery. *Numerical Recipes in C (Second Edition)*. Cambridge University Press., 1992.
- [Thimm 1997] G. Thimm, E. Fiesler. High-order and multilayer perceptron initialization ; *Neural Networks, IEEE Transactions on* , volume: 8 (2), pp: 349-359, 1997

- [Tiño 2001] P. Tiño, B. G. Horne and C. L. Giles. Attractive Periodic Sets in Discrete Time Recurrent Networks (with Emphasis on Fixed Point Stability and Bifurcations in Two-Neuron Networks). *Neural Computation*, Volume 13(6), pp. 1379-1414, 2001.
- [Vanderbauwhede 1989] A. Vanderbauwhede. Centre manifold, normal forms and elementary bifurcations. *Dynamics Reported* 2, pp:89-169, 1989
- [Wang 1991] X. Wang: Period-Doublings to Chaos in a Simple Neural Network: An Analytical Proof. *Complex Systems*, volume 5, pp: 425-441, 1991
- [Wang 1992] X. Wang, Discrete-Time Dynamics of Coupled Quasi-Periodic and Chaotic Neural Network Oscillators. *International Joint Conference on Neural Networks*, 1992
- [Wang 2002] Lan Wang, K. Chen, C. Huisheng. Interspeaker Information with a Neural Network for Speaker Identification. *IEEE Transactions on Neural Networks*, volume 13(2), pp: 436-445, 2002
- [Wei 1999] J. Wei, S. Ruan, Stability and bifurcation in a neural network model with two delays. *Physica D*, volume 130, pp: 255-272, 1999
- [Werbos 1990] Paul J. Werbos. Backpropagation Through time: What is Does and How to do it. *Proceedings of the IEEE*, volume 78 (10), 1990
- [Williams 1989] R. J. Williams and D. Zipser. A learning algorithm for continually running fully recurrent neural network. *Neural Computation*, volume 1(2), pp:270-280, 1989
- [Williams 1990] R. J. Williams and D. Zipser. Gradient-based learning algorithms for recurrent connectionist networks. Technical Report NU-CCS-90-9. College of Computer Science, Northeastern University, 1990

