Curso 2005/06
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/2
I.S.B.N.: 84-7756-679-8

ALEJANDRO SANTIAGO GONZÁLEZ-MARTÍN

La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje

Director
MATÍAS CAMACHO MARTÍN

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

Este trabajo ha sido cofinanciado por:

- La Beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (ref. AP2000-2106),
- Las ayudas para la realización de Tesis Doctorales de la Universidad de La Laguna (conv. 2004),
- El proyecto de investigación "*Las calculadoras simbólicas en el aprendizaje del Análisis Matemático. Procesos de enseñanza y aprendizaje*" de la Universidad de La Laguna (ref. 1802010402),
- El proyecto de investigación "*Pensamiento matemático avanzado: procesos cognitivos de aprendizaje y fenómenos de enseñanza*" del Plan I+D (ref. BXX2000-0069).

A LOS ESTUDIANTES PARTICIPANTES EN ESTE TRABAJO
Y
A TODAS LAS PERSONAS QUE LO HAN HECHO POSIBLE

AGRADECIMIENTOS / REMERCIEMENTS / ACKNOWLEDGEMENTS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a las siguientes personas por su ayuda, directa o indirecta, en la realización de esta Tesis Doctoral:

En primer lugar, a Matías Camacho Machín por darme la posibilidad de realizar esta Tesis Doctoral. Gracias también por sus comentarios, que han enriquecido la redacción de esta Memoria de Tesis Doctoral.

À Michèle Artigue (Université Paris 7) de toute son aide, ses commentaires et ses suggestions qui, sans doute, m'ont beaucoup orienté à développer cette recherche. Aussi de m'avoir fait mieux comprendre les fondements didactiques que j'ai utilisés. Bien sûr, toute erreur que j'aie commise sera due à une mauvaise interprétation de ma part.

À Jean Dhombres (CNRS Paris) de son aide précieuse et experte, qui m'a aidé à changer le point de vue de l'analyse épistémologique et à mieux justifier mes choix didactiques.

A Pablo González-Vera por su colaboración y su interés en este trabajo.

A los estudiantes participantes en la investigación por su buena acogida y su implicación.

A Carlos Correia de Sá (Universidade do Porto) por su revisión del Capítulo 3 y sus comentarios. Gracias también por todos los ánimos.

À Louise Poirier (Université de Montréal) de son soutien et de son amitié.

To Arthur B. Powell (Rutgers, the State University of New Jersey) for his support and his kindness, besides his interest in my professional future. Thanks for his concern about the finalisation of this Thesis.

À Philippe R. Richard (Université de Montréal) de ses explications sur l'inférence figurale.

À tout le monde à l'IREM de Paris de m'avoir aussi bien accueilli. En particulier, à Martine, Nadine, Nicole, Annie, Shu, William et Maurice de leur gentillesse.

A los miembros de la Secretaría de la Facultad de Matemáticas por su ayuda en la consulta de los programas y a Pablo Lorenzo por su ayuda en cuestiones técnicas y administrativas.

A los miembros del Departamento de Análisis Matemático, y en particular del Área de Didáctica de la Matemática, que se han interesado por este trabajo y han aportado ideas para mejorarlo.

À Nicolas Violi de ses commentaires sur la version en français et sur le format définitif de la Thèse. Merci de toutes les choses que l'on a partagées ces derniers mois et de son soutien pendant les moments les plus durs.

A Vanesa, Coqui, Kalala, Leyla, Pedro y Mireia por su presencia en el día a día.

A Olga, Encarna, Betlem, Amaya, Susana Espada, Antonio Morgado, José Miguel Soriano, Susana Ruiz, Joaquín e Ivonne por los mails, las llamadas, el apoyo, las canciones, los abordajes, la música y mucho más.

A Isabel Bermejo por su apoyo constante a lo largo de estos años.

A mis amigos Cristina Beltrametti, María Gloria Ramírez, Jorge López, Rubén Cerutti, Julio Maiz y Walter Mencia (Universidad Nacional del Nordeste – Argentina) por su apoyo e interés.

En definitiva, a todos los que se alegran de la realización de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta en esta Memoria se desarrolló en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de Integral Impropia en los primeros cursos universitarios y las posibles formas de mejorar su comprensión por parte de los estudiantes.

La elección de este tópico no es casual. Una de las primeras extensiones de la integral de Riemann que los estudiantes encuentran al ingresar en la Universidad es el concepto de integral impropia. Las integrales impropias o generalizadas se definen cuando falla una (o ambas) de las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann:

1) Intervalo de integración cerrado y acotado;
2) Función a integrar acotada en el intervalo de integración.

Este concepto se vuelve de gran importancia para los estudiantes de Matemáticas, Física e Ingenierías por sus múltiples aplicaciones, ya sea para el cálculo de probabilidades, para definir normas funcionales, en el cálculo de transformadas integrales (como las de Laplace y Fourier) y muchos cálculos físicos (trabajo, energía... en determinadas circunstancias).

Sin embargo, la experiencia muestra que los estudiantes no alcanzan a comprender este concepto de forma adecuada ni a relacionarlo con otros conocimientos previamente estudiados (como sucesiones, series e integrales definidas) en su primer año en la Universidad. Las herramientas y conceptos referentes a la integración impropia se aprenden en general descontextualizados y desvinculados de otros contenidos y los estudiantes se limitan a memorizar un conjunto de criterios y técnicas que, de estar contextualizados, tendrían mucho más significado. Desde principios de los años 80, Orton (1983) mostró que los estudiantes participantes en su investigación poseían un razonable dominio del álgebra algorítmica en el desarrollo de cálculos de derivadas e integrales; sin embargo, presentaban dificultades significativas en la conceptualización de los procesos límite subyacentes a las nociones de derivada e integral, además de registrar dificultades asociadas a la utilización de representaciones gráficas relevantes y la ausencia de significado asociado a los símbolos que se utilizan. Otros estudios más recientes (Calvo, 1997; Turégano, 1998) señalan la tendencia de muchos estudiantes a considerar la integral siempre como un área, por lo que debe tener signo positivo.

Otras investigaciones han mostrado también las discrepancias existentes entre las definiciones formales que los estudiantes son capaces de citar y los criterios que utilizan realmente en el trabajo práctico, además de las dificultades con el razonamiento lógico y las demostraciones, las representaciones gráficas y la conexión del trabajo algebraico y gráfico de una forma flexible (ver Tall, 1991a).

Por otro lado, muchos estudiantes indican que en el Cálculo es más seguro funcionar mecánicamente que intentar comprender, lo que constituye uno de los efectos que produce una instrucción inadecuada, lo que pone al descubierto las formas económicas de adaptación que los estudiantes desarrollan ante prácticas educativas no del todo adecuadas (Artigue, 1999).

El propósito principal de nuestra investigación consiste en, por una parte, analizar los procesos del pensamiento matemático avanzado involucrados en el aprendizaje y manipulación de las integrales impropias consideradas como generalización de las integrales definidas, además de indagar en los obstáculos, dificultades y errores más comunes que surgen en este contexto, y por otra parte, desarrollar en el aula posteriormente una secuencia de enseñanza previamente diseñada que promueva un aprendizaje más significativo. Nuestra propuesta se caracteriza, principalmente, por conjugar de forma más equilibrada los registros gráfico y algebraico, utilizando de forma activa ejemplos y contraejemplos que enriquezcan las experiencias de los estudiantes, y por recurrir al uso del CAS (*Computer Algebra System*) *Maple V* para promover la visualización y la operacionalización de algunos resultados teóricos.

El marco de trabajo que hemos elegido para desarrollar nuestra metodología proviene de la Teoría de las Situaciones Didácticas y su utilización para el diseño de Ingenierías Didácticas. En nuestro caso, nuestra Ingeniería tiene un claro carácter de diagnóstico y su implementación trata también de analizar las condiciones de implementación de tal diseño.

Como marco teórico de la comprensión de los objetos matemáticos, hemos adoptado la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1993), quien afirma que "*no hay conocimiento sin representación*". De este modo, reconocer la importancia que tienen las diversas representaciones de los objetos matemáticos es el primer paso para elaborar actividades que permitan la puesta en marcha de diferentes representaciones en paralelo para alcanzar un aprendizaje conceptual más rico. No sólo son importantes las tareas de transformación dentro de un registro o de conversión entre registros, hay otras actividades que promueven estas acciones y ponen en juego el conocimiento del individuo. Por esta razón, damos un papel privilegiado a las tareas de construcción de ejemplos y contraejemplos y a la resolución de problemas no rutinarios, con la intención de promover las actividades de transferencia.

Nuestra investigación se sitúa en una perspectiva de Ingeniería Didáctica clásica, por lo que hemos considerado un punto del sistema didáctico cuyo funcionamiento se muestra, por razones de naturaleza diversa, poco satisfactorio. Se desarrolló un análisis de tres dimensiones de la integral impropia para permitirnos analizar este concepto exteriormente, pues nuestra experiencia con las Matemáticas en el mundo educativo tiende a reducirlas a los objetos enseñados y a darles forma para que sean compatibles con la forma en que viven en el mundo educativo:

- Dimensión epistemológica: relativa a las características y evolución del saber en juego.
- Dimensión didáctica: relativa a las características de funcionamiento del sistema de enseñanza.
- Dimensión cognitiva: relativa a las características cognitivas de los individuos hacia los que se dirige la enseñanza

El análisis realizado nos ayudó a comprender cómo se ha desarrollado la enseñanza de la integral impropia en el edificio matemático y en nuestra institución, además de las dificultades y obstáculos que su aprendizaje genera. Tomando en cuenta estas dimensiones, nos propusimos buscar las condiciones de existencia de un punto de funcionamiento más satisfactorio, cara a la evolución científica y tecnológica.

Para nuestro análisis, usando como referencia la noción de registro de representación semiótica, distinguimos tres registros para el estudio de las integrales impropias: el registro algebraico, el registro numérico y el registro gráfico.

Históricamente, los aspectos teóricos propios de las integrales impropias fueron desarrollados inicialmente en los registros gráfico y algebraico, siendo las consideraciones geométricas las que motivaron los primeros desarrollos. Pero también es cierto que el registro algebraico ha dominado durante varios siglos este campo (a partir del siglo XVIII) y que las consideraciones geométricas no vuelven a aparecer de forma importante hasta el siglo XIX (con la definición de Riemann) y el XX (con la integral de Lebesgue), pero esta vez revestidas del formalismo matemático. El desarrollo de los medios informáticos en los últimos treinta años ha ayudado también a considerar los registros gráfico y numérico.

De nuestra revisión histórica se desprenden algunos factores que pueden explicar la forma actual en la que se enseña la integral impropia:

- La larga dominación del registro algebraico en el desarrollo histórico, a pesar de las consideraciones geométricas que le dieron origen.
- El cambio de punto de vista que se produce en el siglo XVIII provoca cambios entre consideraciones locales (intervalos infinitos – el comportamiento local en un entorno del infinito determina el carácter de la integral) y globales (intervalos finitos – son las características globales de la función las que se toman en cuenta), que pueden haber contribuido a la separación en la enseñanza en "primera especie" y "segunda especie".
- Los enfoques numéricos no aparecen en los comienzos de la integración de figuras no acotadas y, cuando Cauchy formaliza la notación de las integrales impropias, se reduce al registro algebraico.

En cuanto a la dimensión didáctica, nuestro análisis de los programas, los libros de texto y la bibliografía existente nos conducen a señalar más factores que determinan su enseñanza:

- La tentación de la reducción algorítmica (más cómoda para el profesor y el estudiante).
- El estatus infra-matemático del registro gráfico (véase, por ejemplo, Eisenberg y Dreyfus, 1991).
- El poco tiempo dedicado a la enseñanza de la integral impropia no da lugar a una aproximación numérica.
- La existencia de *mitos* en la cultura matemática universitaria (Alsina, 2001).

La dimensión cognitiva arroja también elementos que dificultan un aprendizaje no algorítmico, generando en el sistema educativo conductas de evasión que ayudan a encontrar un equilibrio:

- Las dificultades en la coordinación entre registros (Duval, 1993, 2004; González-Martín, 2002).
- El nivel de conocimientos necesarios y las transferencias a realizar para desarrollar una aproximación que relacione la integral impropia con otros conceptos (integral definida, series) que permitan la construcción de ejemplos y contraejemplos adecuados para evitar la *sobre-generalización*.

Todos estos factores nos llevaron a tomar unas elecciones macro-didácticas esenciales que guiarían la construcción de nuestra secuencia de enseñanza que formaría parte de nuestra investigación:

- La legitimación del registro gráfico y su articulación con el algebraico, abordando así las limitaciones cognitivas y didácticas ligadas al estatus del registro gráfico.
- Una presentación de la integral impropia que facilite una reconstrucción del conocimiento y el establecimiento de relaciones explícitas con conocimientos previos.
- Apoyar la complejidad de las técnicas ligadas a la ausencia de una primitiva de la función a integrar, así como a la visualización de funciones no elementales, utilizando la asistencia de un *software* informático.
- Abordar las limitaciones de tiempo mediante una reducción del contenido en la resolución algebraica, originando un cambio en el estatus privilegiado dado a la resolución directa.
- Reparto de responsabilidades que permita una implicación mayor del estudiante en el proceso de reconstrucción.

Dado que el problema general que se trata de resolver con nuestra Ingeniería es el de la generalización de un concepto, hemos planteado, para su desarrollo, la hipótesis de que, en la resolución de este problema de generalización, se puede dar una responsabilidad real a los estudiantes y, en consecuencia, uno de los objetivos del trabajo de Ingeniería ha sido el de verificar esta hipótesis mediante la construcción de un escenario de enseñanza en el que las responsabilidades sean *a priori* compartidas de forma optimal entre el profesor y los estudiantes, y la confrontación de esta construcción con los datos obtenidos de la contingencia (a saber, la experimentación).

Como en todo proceso de generalización, la extensión del concepto de partida de integral definida sobre un intervalo compacto necesita de una reconstrucción de este concepto inicial, esto es, éste ha tenido que posicionarse ocupando su lugar en un edificio matemático más amplio. También hemos tenido en cuenta los resultados de las investigaciones que han mostrado que la generalización se acompaña (de manera natural) de procesos de *sobre-generalización*. Esta *sobre-generalización* consiste en que un cierto número de propiedades que se han vinculado explícitamente (y también implícitamente) al concepto de integral (y también a los conceptos de área y de serie) son objeto de una tendencia natural a atribuirlos automáticamente al concepto extendido. Las investigaciones indican también que la enseñanza, preocupada por establecer continuidades y vínculos entre los conceptos, resulta ser generalmente poco sensible a estos fenómenos, lo que puede ser una fuente de errores resistentes.

Nuestra Ingeniería Didáctica ha prestado, por tanto, atención a estas necesidades de reconstrucción, poniendo en escena, según los diferentes momentos, situaciones donde esta tendencia a la *sobre-generalización* sea previsible, con lo que los conflictos cognitivos que puedan surgir ayuden a trabajarla explícitamente.

Igualmente, nuestra Ingeniería se planteó como un medio de contribuir a reforzar y profundizar en los conocimientos sobre la integral definida de los estudiantes, aún muy frágiles (como se recoge en González-Martín, 2002). En particular, uno de sus propósitos consistió en ayudar a los estudiantes a hacer interactuar mejor los registros de representación semióticos en los que se ejerce el trabajo sobre la integración y desarrollar articulaciones entre el registro algebraico y el gráfico.

En la resolución de un problema de Ingeniería, el primer nivel de análisis, sin embargo, no es el del funcionamiento cognitivo de los sujetos, sino el nivel del análisis matemático y epistemológico. Nuestro estudio mostró que la generalización de la integral definida no parece haber jugado un papel fundamental en la evolución de las problemáticas a propósito de la integración. La necesidad de esta generalización puede ser motivada fácilmente, en el registro gráfico, planteando la cuestión de la evaluación del área de formas geométricas no acotadas, volviendo de este modo a las raíces históricas del concepto. Pensar que el área de una porción no acotada del plano puede ser finita no es automático. Resulta importante señalar que esta cuestión se opone a la asimilación “formas-magnitudes geométricas”, cuya fuerza ha sido puesta en evidencia por numerosas investigaciones, desde la escuela elemental a la Universidad (véase, por ejemplo, Schneider, 1991). En un grupo de estudiantes de tamaño razonable podemos esperar encontrar, sobre este tema, opiniones divididas que sólo el cálculo permitido por una definición precisa permitirá zanjar.

El hecho de plantear este problema de generalización en un contexto geométrico (el de las áreas), nos ha permitido articular este registro gráfico con el algebraico en la emergencia de una definición razonable y un cuestionamiento sobre el sentido de esta definición a partir de ejemplos simples, donde el cálculo es posible, o en los que la representación gráfica permite mostrar la divergencia.

Una vez que se ha producido una definición que generaliza la anterior, el trabajo matemático alrededor de las integrales impropias se organiza, al principio, esencialmente alrededor de un tipo de tarea: estudio de la convergencia de integrales impropias dadas y, eventualmente, calcularlas de forma exacta o aproximada.

Para conducir el desarrollo matemático, si nos referimos a la perspectiva antropológica de Chevallard (1991), nos planteamos en qué tipo de praxeologías se inscribiría esta tarea, interrogándonos, pues, sobre las técnicas que permiten resolverla, las tecnologías y hasta las teorías subyacentes. La tarea prototípica es el estudio de la convergencia.

La primera técnica interna al campo de la integración que surge, de forma natural, consiste, cuando es posible, en calcular la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y determinar si tiene o no límite en $+\infty$. Esta técnica permitirá constituir un primer “repertorio” a partir de las funciones usuales y de construir tablas de referencia. También facilitará la obtención de algunos resultados generales, por ejemplo sobre las integrales de funciones polinomiales y racionales. A través de este trabajo, se puede llevar a cabo, más allá del estudio de casos particulares, una primera exploración del concepto de integral impropia, generando una serie de ideas que serán formalizadas posteriormente. Se observa que la tecnología subyacente es la que se usa para el cálculo exacto de integrales y el cálculo de límites de las funciones elementales (en el sentido matemático del término).

Esta primera técnica tiene, sin embargo, un campo de acción muy limitado, pues las integrales calculables exactamente sólo son una minoría. Hay que desarrollar otras técnicas, que van a hacer intervenir el pensamiento en Cálculo de forma más sustancial. Como en el caso de las series, las técnicas más accesibles son las que conciernen las funciones positivas o, más generalmente, las de signo constante en un entorno de $+\infty$. En el caso de una función positiva, en efecto, siendo la función $F(x)$ creciente, no hay sino dos comportamientos posibles: o está acotada y tiene límite finito, o no lo está y tiene por límite $+\infty$. A partir de este resultado simple, pero fundamental, se deducen diversas técnicas de comparación que conducen a reconsiderar el estatus de las familias de referencia y los ejemplos previamente considerados.

Estos resultados ofrecen la ocasión de trabajar en la articulación forma-área y ayudan a desprenderse de evidencias gráficas falaces:

- no es porque una forma sea no-acotada que le corresponde un área infinita;
- no es porque una representación gráfica se aplaste contra el eje de las x que la integral correspondiente es convergente.

Además, el registro gráfico está por completo adaptado para visualizar el hecho de que la integral de una función positiva de límite $l > 0$ en $+\infty$ no puede converger y sostener la prueba de este resultado.

Esta situación particular, la de las funciones positivas, no agota el tema y es fácil probar que una vez que abandonamos esta categoría, las formas de divergencia se vuelven más sutiles. Nuevamente, como en el caso de las series, hay que distinguir entre la convergencia absoluta y la convergencia condicional y desarrollar ciertas técnicas específicas para el estudio de la convergencia condicional.

En la secuencia de enseñanza experimentada no nos limitamos solamente a las técnicas internas del campo de la integración. También hay otras técnicas que se desarrollarán, que asocian series e integrales.

De lo que se ha descrito en cuanto a la organización de la Ingeniería, con este problema de Ingeniería nos posicionamos en una situación que nos permitió desarrollar una organización del problema inicial en una sucesión motivada de sub-problemas que serían generados progresivamente el uno por el otro.

Tal como se mencionó anteriormente, una de nuestras elecciones consistió en el recurso a un entorno informático para operacionalizar algunos resultados institucionalizados y para enriquecer las experiencias de los estudiantes trabajando con funciones no prototípicas, que ayudó a conformar la dimensión instrumental de nuestra investigación.

Se desarrollaron dos sesiones de trabajo con *Maple V* en el laboratorio de ordenadores y para el diseño de las sesiones, se tuvieron en cuenta algunas de las cuestiones que la investigación sobre el uso de las tecnologías en la enseñanza plantea, así como sus potencialidades (véase Lagrange *et al*, 2001; King *et al*, 2001; Drijvers, 2003). A la luz de la *Transposición Informática* (Balacheff, 1994) y de la *teoría de la instrumentación* (Trouche, 2000b), nos planteamos observar las interacciones entre los estudiantes y la herramienta tecnológica en el desarrollo de las sesiones de laboratorio, relacionando, en la medida de lo posible, obstáculos técnicos con dificultades conceptuales.

Se diseñó, además, un dispositivo que combinase el recurso a la máquina con el recurso a la teoría y que facilitase un rediseño de las condiciones ecológicas para favorecer la socialización de la *génesis instrumental*. En el diseño de las sesiones se tomaron en cuenta las restricciones internas del CAS *Maple V*, siendo uno de los objetivos superar estas restricciones mediante el recurso a los resultados teóricos.

Consideramos que nuestra investigación, como toda investigación en el área de Didáctica de la Matemática, tiene como objetivo último el de mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, lo cual implica mejorar su enseñanza y, por tanto, aportar elementos teóricos y prácticos que permitan incrementar la eficacia de una formación inicial de los estudiantes universitarios que les facilite su desarrollo profesional.

Y, al igual que Artigue (2001), creemos que la investigación en Didáctica de la Matemática puede ser de gran ayuda en la actualidad si hacemos sus resultados accesibles a un gran público y si llevamos a cabo los esfuerzos necesarios para relacionar mejor la investigación y la práctica. Nuestro trabajo se adhiere a este principio y es por ello que se ha tratado en todo momento que surjan retroacciones entre el dominio de la investigación y el terreno de la práctica.

Los contenidos de la Tesis Doctoral que se presenta se organizan de la forma que precisamos a continuación:

El CAPÍTULO 1 se divide en dos partes bien diferenciadas. En la primera parte, tras situarnos en el conjunto de investigaciones desarrolladas en el nivel universitario, se presenta el problema general de investigación y las diversas acotaciones que determinaron su planteamiento definitivo. Finaliza esta parte con el establecimiento de las hipótesis y los objetivos generales de nuestra investigación, a los que intentaremos dar respuesta.

En la segunda parte se desarrolla la revisión bibliográfica de los resultados de investigación relacionados con nuestra investigación que nos permite situar nuestros resultados en un contexto más amplio de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático. En esta revisión se mencionan resultados relevantes sobre el aprendizaje de la integral definida y la impropia, las dificultades que aparecen para desarrollar actividades de visualización y razonamiento gráfico, el uso de problemas no rutinarios y relaciones entre series e integrales, principalmente.

En el CAPÍTULO 2 se muestran y organizan los elementos que sirven de base a nuestro marco teórico. Los registros de representación semiótica de Duval forman la parte central de nuestra modelización del aprendizaje. Para promover en los estudiantes los procesos que define Duval tomamos en cuenta también la noción de transferencia, el uso de problemas no rutinarios y la construcción de ejemplos y contraejemplos.

Posteriormente organizamos los elementos de la Teoría de Situaciones, que dan soporte teórico al diseño de nuestra Ingeniería Didáctica. En esta parte se incluyen también los principales conceptos que introduce Brousseau y destacamos las interacciones entre los niveles a-didáctico y didáctico y la importancia del *medio*, que constituye uno de los pricipales elementos que se ha tomado en cuenta en la elaboración de las sesiones de nuestra Ingeniería.

El CAPÍTULO 3 recoge el análisis de las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva del objeto “integral impropia”, con el objetivo principal de explicitar la distinción entre la integral impropia como objeto de enseñanza y como objeto matemático.

Este análisis muestra que los primeros cálculos de magnitudes de figuras de aspecto infinito están ligados al uso de consideraciones geométricas (sin una sistematización clara de técnicas), que ceden el paso posteriormente al formalismo y la axiomática en el registro algebraico, lo que puede haber sido el principal motivo para la adopción de este enfoque en la institución universitaria. Los análisis didáctico y cognitivo estudian la evolución de los programas de la Titulación en Matemáticas de nuestra Universidad y el aprendizaje de los estudiantes de este concepto, revelando algunas dificultades, obstáculos y errores que surgen.

El análisis de estas tres dimensiones y las conclusiones que se obtienen justifican el diseño y organización de nuestra Ingeniería Didáctica, que se presenta en el CAPÍTULO 4. La primera parte de este capítulo recoge una breve exposición de los fundamentos teóricos sobre el diseño de ingenierías didácticas y de la implementación de debates científicos en el aula, evidenciando algunas dificultades metodológicas e institucionales que conlleva la implementación de ambos elementos.

En la segunda parte se muestran las líneas generales que rigen el diseño de nuestra Ingeniería, especificando el contexto en que se desarrolla, las restricciones particulares de éste y las elecciones macro-didácticas tomadas. Se concluye con el análisis *a priori* de las sesiones diseñadas.

La descripción del desarrollo de las sesiones de nuestra experimentación y el análisis *a posteriori* de cada una de ellas son el objeto del CAPÍTULO 5. Tras una breve descripción de las condiciones en que se desarrolla la Ingeniería y de los instrumentos de evaluación utilizados, pasamos al análisis *a posteriori* de cada una de las sesiones, dividiéndolas en episodios y separando diversos objetivos.

Se presenta también en este capítulo el análisis e interpretación de los demás instrumentos de análisis: los materiales recogidos durante la puesta en escena, así como los análisis de las respuestas a un test de contenidos, uno de opinión y otro sobre el uso de contraejemplos, que forma parte de un estudio internacional. Los resultados de todos estos análisis nos facilitan la presentación posterior de las conclusiones.

El CAPÍTULO 6 se dedica por entero a la descripción y análisis de la parte instrumental de nuestra investigación. Después de presentar un breve resumen de los orígenes de las investigaciones sobre el uso de las tecnologías y las líneas y cuestiones que plantean algunas investigaciones actuales, se exponen los elementos teóricos que se utilizan en el diseño de nuestras actividades con el CAS *Maple V*: la teoría de la *Transposición Informática* y la *teoría de la instrumentación*.

La segunda parte de este capítulo presenta el diseño de las sesiones desarrolladas con *Maple V*, así como una descripción del contexto y las restricciones presentes, que condicionan las elecciones globales tomadas. Finalmente, se muestra el análisis e interpretación de estas sesiones, así como el análisis de las respuestas de los estudiantes a un test de opinión sobre estas sesiones y el uso de la tecnología en el aprendizaje de las Matemáticas.

Finalmente, en el CAPÍTULO 7 se presentan las aportaciones de nuestra investigación, detallando las conclusiones que hemos establecido a partir del análisis de los datos que aportan nuestros instrumentos de investigación, haciendo referencia a los objetivos planteados al comienzo de ésta. Se presentan también algunas implicaciones de nuestra investigación, en especial respecto a la viabilidad del uso de una secuencia de enseñanza como la que proponemos, y algunas preguntas que quedan abiertas para futuras investigaciones.

Esta Memoria se cierra con las REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS de los textos utilizados para su elaboración, un resumen en francés de esta Tesis Doctoral y un ANEXO con material empleado durante las sesiones de Ingeniería.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo se organiza en dos partes. La primera presenta algunas cuestiones que dirigen la elección de nuestro problema de investigación y las aportaciones de nuestra propuesta, posicionándonos entre otros resultados obtenidos de la investigación en el nivel universitario. Esta parte presenta también la organización que nuestra investigación ha seguido, las acotaciones impuestas y los objetivos e hipótesis generales que guían nuestro trabajo.

La segunda parte recoge los resultados de otras investigaciones relevantes sobre los conceptos de integral definida e integral impropia. Sin embargo, como nuestro diseño recoge más aspectos, revisamos también otros trabajos sobre la visualización, el uso de debates científicos, el aprendizaje algorítmico, relaciones entre series e integrales y el concepto de función. Nuestros propios resultados sobre el aprendizaje de los estudiantes de los conceptos y técnicas relativos a la integración impropia se presentan en el Capítulo 3, pues sustentan nuestro estudio sobre la dimensión cognitiva de la integral impropia.

1.1. LA INVESTIGACIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES GENERALES

Al realizar la Tesina *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia* (González-Martín, 2002) se aclaró que en ese trabajo sólo se abordaba la problemática del aprendizaje del concepto de integral impropia. En consecuencia, una de las preguntas abiertas que quedaba pendiente era la siguiente:

> Una vez planteados diversos obstáculos y dificultades que los alumnos presentan al aprender las herramientas de la integración impropia y presentado un primer análisis de su nivel de comprensión de estas herramientas, nos parece que llega el momento de plantearse qué hacer en la práctica al respecto.
> La labor de diseñar una secuencia de enseñanza-aprendizaje donde se explicite el uso de los distintos registros y se trabaje con ejemplos y contraejemplos se presenta no sólo interesante, sino también importante.
> ¿Sería factible que esta secuencia estuviera basada en el uso de un CAS (*Computer Algebra System*)?
>
> González-Martín (2002), pág. 177

En esta Memoria de Tesis Doctoral se abordan, fundamentalmente, estas dos últimas cuestiones, además de tener en cuenta otras de las preguntas que quedaron abiertas en su momento.

Uno de los resultados obtenidos, por otra parte, fue:

> Tras el análisis de los cuestionarios nos quedaba bastante claro que los alumnos prefieren trabajar en el registro algebraico, que les resulta, muchas veces, mucho más algorítmico. Todo ello a pesar de las deficiencias que muchos ofrecen en este registro. [...] Una pregunta que requiere trabajar explícitamente en un registro distinto del algebraico es dejada en blanco por un gran número de alumnos.
> A lo largo de las entrevistas, vimos cómo el empleo de gráficas para ayudarse en sus razonamientos no es una herramienta demasiado habitual en los alumnos. Además, en algunas ocasiones los alumnos no quisieron dibujar.

> [...] Por otra parte, tal como se ha visto en el análisis de nuestras entrevistas, algunos alumnos ni siquiera reconocen el registro gráfico como un registro de trabajo matemático. Algunos, por su incapacidad para trabajar en él, y otros por su clara predilección por el registro algebraico. Insistimos en que el uso de este registro de forma más activa durante la instrucción y en los ejercicios y problemas propuestos a los alumnos podría paliar este tipo de carencias.
>
> González-Martín (2002), pp. 171-172

Estos resultados son acordes con lo indicado por Eisenberg y Dreyfus (1991)[1], que enumeran tres razones para que lo visual quede en un segundo plano en la enseñanza:

- Cognitiva: lo visual es más difícil.
- Sociológica: lo visual es más difícil de enseñar.
- Creencias acerca de la naturaleza de las Matemáticas: lo visual no es matemático.

En esta dirección, considerando que para comprender un concepto matemático hay que coordinar al menos dos de sus distintas representaciones[2] y conscientes de las carencias que nuestros estudiantes muestran en el uso del registro gráfico (incluso en su aceptación), una tarea pendiente consistía en la construcción de una secuencia de enseñanza donde el registro gráfico tuviera un rol más activo y se combinara con el registro algebraico.

En consecuencia, el propósito principal de esta investigación es analizar los procesos de pensamiento matemático avanzado involucrados en el desarrollo y manipulación de integrales impropias consideradas como generalización de las integrales definidas, además de indagar en los obstáculos, dificultades y errores más comunes que surgen en este contexto, para desarrollar posteriormente una secuencia de enseñanza que haga uso de las nuevas tecnologías, modificando con ello el esquema de enseñanza que se desarrolla habitualmente en el primer curso de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas de nuestra Universidad. Las principales aportaciones de nuestra propuesta de enseñanza consisten en:

- El uso sistemático de ejemplos y contraejemplos,
- La conjugación de los registros de representación gráfico y algebraico,
- El recurso explícito a los conocimientos sobre series e integrales definidas,
- La dotación del alumno de mayor responsabilidad en su proceso de aprendizaje,
- El uso del programa de cálculo simbólico *Maple V*.

Gutiérrez (1991) distingue tres tipos diferentes de trabajo en Didáctica de la Matemática:

- Trabajo de elaboración de teorías de enseñanza o aprendizaje de la Matemática. Abordan las diferentes componentes matemáticas, psicológicas y pedagógicas que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de la Matemática.
- Trabajo de aquellos profesores que deciden completar o sustituir el contenido del libro de texto y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria con los que intentan mejorar la eficacia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus alumnos. No siempre podemos hablar de una actividad de investigación, sino de *innovación* o *experimentación didáctica*, pues faltan algunas componentes importantes de la actividad investigadora: una planificación cuidadosa que tenga en cuenta los conocimientos

[1] Que se retoma y amplía en González-Martín y Camacho (2004c y 2004d).

[2] Es una consecuencia de la adopción de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1993), que afirma que las representaciones de un objeto matemático sólo son parciales, por lo que es necesario coordinar al menos dos para lograr la comprensión de este objeto (ver Sección 2.2.).

disponibles sobre el tema y no sólo la experiencia personal acumulada; la inclusión del trabajo a realizar dentro de un marco conceptual concreto que permita analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema; un amplio conocimiento (didáctico y matemático) del tema de estudio, para identificar los orígenes de las dificultades de aprendizaje; una verificación objetiva de los logros alcanzados, más allá de la intuición personal o los resultados de los exámenes.

- Actividad que realizan la mayoría de los investigadores, que consiste en estudiar alguna parcela de la enseñanza o el aprendizaje de la Matemática, haciendo un análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de conceptos o las dificultades que encuentran, desarrollar métodos de enseñanza, etc.

Sin embargo, no todos estos trabajos constituyen "investigación". Tomamos como punto de partida la idea de que una investigación es "*un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema*".

Schoenfeld (2001) señala dos propósitos principales de lo que constituye la investigación en educación matemática:

> - Puro (Ciencia Básica): comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje.
> - Aplicado (Ingeniería): utilizar esta comprensión para mejorar la instrucción matemática.
>
> Ambos están profundamente entrelazados, siendo el primero, al menos, tan importante como el segundo.
> [...]
> ¿A qué tipo de preguntas puede referirse la investigación en educación matemática? Sostendría que algunas de las contribuciones fundamentales de la investigación en educación matemática son las siguientes:
>
> - Perspectivas teóricas para comprender el pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza;
> - Descripciones de aspectos de la cognición [...];
> - Pruebas de existencia (evidencia de casos en los que los estudiantes pueden aprender a resolver problemas, inducción, teoría de grupos; evidencia de la viabilidad de varios tipos de instrucción);
> - Descripciones de consecuencias (positivas y negativas) de varias formas de instrucción.

Schoenfeld (2001), pp. 222 y 224

Nuestra investigación se enmarca en el tercero de los puntos señalados por Gutiérrez y aporta elementos en las líneas de investigación señaladas por Schoenfeld. El marco de trabajo que hemos elegido para desarrollar nuestra metodología proviene de la Teoría de las Situaciones Didácticas y su utilización para el diseño de Ingenierías Didácticas. Este marco de trabajo se conforma a la vez como una metodología de investigación y como el diseño alternativo de una secuencia de enseñanza-aprendizaje; utiliza métodos cualitativos de investigación y se basa en una perspectiva teórica muy específica.

El diseño de una Ingeniería distingue tres fases bien diferenciadas: un análisis preliminar (que involucra tres componentes: epistemológica, didáctica y cognitiva), el diseño de la ingeniería y la puesta en escena y análisis de resultados.

Para el desarrollo de la primera fase se han tomado datos provenientes de fuentes sobre el desarrollo histórico del concepto bajo estudio, además del análisis de currículos en nuestra Universidad y de los resultados mostrados en la Tesina *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia* (González-Martín, 2002), cuyo marco teórico proviene de tres bases: los estadios del desarrollo cognitivo, la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica (con algunos añadidos posteriores de autores como Hitt, 2000a,

2001) y el papel de los errores en la teoría de representaciones[3]. Estos resultados nos posibilitan abordar el desarrollo de la segunda fase, organizando actividades y *situaciones* que permitan tratar de disminuir el efecto de ciertas dificultades y obstáculos, algunos profundamente ligados al concepto de integral impropia. Finalmente, una vez desarrollada nuestra Ingeniería, se realiza el análisis *a posteriori*, analizando también los materiales recogidos durante el desarrollo de la misma.

Por otro lado, para el diseño de las sesiones con el ordenador se consideran las aportaciones de los trabajos sobre la *génesis instrumental*, donde se distingue entre un artefacto tecnológico (herramienta objetiva) y el instrumento (construcción mental hecha por el usuario de la herramienta) que un ser humano es capaz de construir a partir de él. El instrumento no viene dado con el artefacto: se construye mediante un proceso complejo denominado *génesis instrumental*, que da forma a la actividad y el pensamiento matemáticos.

Cabe señalar que la investigación en Didáctica de la Matemática se ha ocupado del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario desde hace apenas más de 20 años, intentando mejorar nuestra comprensión de las dificultades que los estudiantes encuentran y las disfunciones del sistema educativo. Las investigaciones comenzaron estudiando el conocimiento de los estudiantes en áreas específicas de las Matemáticas, con énfasis particular en el Cálculo, un área percibida como fuente principal del fracaso en el nivel universitario (Artigue, 2001). A pesar de la aparente "facilidad" para enseñar a calcular derivadas y primitivas de funciones de forma más o menos mecánica, se encontraron grandes dificultades para lograr una verdadera entrada de los estudiantes en el campo del Cálculo y hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo. Cara a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y, en particular, la universitaria, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, así como a evaluar en esencia las competencias adquiridas en estas actividades (Artigue, 1995a). Algunos de los resultados más relevantes obtenidos hasta los años 1990, y que aparecen recogidos en Tall (1991a) son:

- A comienzos de los años 1980, Orton, en su Tesis Doctoral[4], mostró el razonable dominio que los estudiantes ingleses tenían de lo que podemos catalogar como "Cálculo meramente algebraico", a saber: cálculo de derivadas y primitivas (anti-derivadas), pero la dificultad significativa que tenían para conceptualizar los procesos límite subyacentes a las nociones de derivada e integral.
- Aproximadamente al mismo tiempo, Tall y Vinner[5] destacaban la discrepancia entre las definiciones formales que los estudiantes eran capaces de citar y los criterios que utilizaban para comprobar algunas propiedades, tales como la de ser función, la continuidad y la derivabilidad. Esta discrepancia les llevó a introducir las nociones de *concept definition* y *concept image* para analizar las concepciones de los estudiantes.
- Muy pronto, varios autores documentaron las dificultades de los estudiantes con el razonamiento lógico y las demostraciones, con las representaciones gráficas y, de forma especial, con la conexión del trabajo analítico y gráfico de forma flexible.

[3] Véase también Socas (2001) para más detalles.

[4] Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*, Tesis Doctoral, University of Leeds, Inglaterra.

[5] Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), pp. 151-169.

A lo largo de esta Memoria mostramos que algunas de estas dificultades siguen presentes en nuestros estudiantes, por lo que la secuencia de enseñanza diseñada intenta disminuir el efecto de algunas de ellas. Artigue (2001) señala que la investigación que se ha venido desarrollando en los últimos años puede ayudarnos considerablemente en la actualidad si hacemos sus resultados accesibles a un gran público y si llevamos a cabo los esfuerzos necesarios para relacionar mejor la investigación y la práctica[6]. En su revisión de trabajos, Artigue indica además, como aspecto importante, que la investigación existente no sólo muestra resultados negativos, sino que también muestra que se pueden desarrollar estrategias de enseñanza alternativas con resultados fructíferos. Éste es también uno de los propósitos de nuestro trabajo.

En la actualidad, algunas preguntas que dirigen la investigación en la Enseñanza Superior son las siguientes: ¿Cómo se puede cambiar la cultura de las clases de forma que los estudiantes perciban las Matemáticas no como un conocimiento que se recibe pasivamente, sino como un conocimiento construido activamente?, ¿Cómo se puede reestructurar un currículum completo para lograr este efecto?, ¿Cuáles son los efectos de varias estrategias de aprendizaje cooperativo en el aprendizaje de los estudiantes?, ¿Qué tipo de interacciones son más productivas?, ¿Se ven algunos estudiantes favorecidos (y otros desfavorecidos) con la introducción de un aprendizaje cooperativo?, ¿Qué estudiantes tienen éxito en Matemáticas?, ¿Qué estudiantes continúan aprendiendo Matemáticas y por qué?, ¿Ayudaría la visualización a los estudiantes de Cálculo a construir demostraciones?, etc. (Selden y Selden, 2001).

Para ofrecer algunas respuestas, las investigaciones desarrolladas en el nivel universitario han intentado entender mejor las dificultades de aprendizaje que nuestros estudiantes tienen que afrontar, mostrando la resistencia sorprendente de algunas de ellas, y las limitaciones y disfunciones de algunas prácticas de enseñanza[7]. Además, en varios casos, la investigación ha conducido a la producción de diseños de instrucción que han mostrado ser efectivos, al menos en entornos experimentales, aunque no sea fácil mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Artigue (1999, 2001) señala que esto puede deberse, entre otras causas, a que hasta ahora se han concentrado muchos esfuerzos en unos pocos dominios de los que se enseñan en el nivel universitario. Es necesario, pues, diversificar los temas de estudio en la investigación a nivel universitario.

De forma complementaria, la mayoría de los diseños basados en la investigación requieren de una mayor implicación y dominio por parte de los profesores, así como de cambios significativos en sus prácticas. Lo que tiene que reorganizarse no es solamente el contenido de la enseñanza (no es suficiente con escribir o adoptar nuevos libros de texto), sino cuestiones más globales, tales como las formas de trabajo de los estudiantes, los modos de interacción entre estudiantes y profesores, y las formas y contenidos de la evaluación.

Uno de los efectos de una instrucción inadecuada (Artigue, 1999) lo definen muchos estudiantes (incluidos estudiantes de alto nivel) al declarar que en el Cálculo es más seguro funcionar mecánicamente que intentar comprender. Con esto, observamos las formas económicas de adaptación que desarrollan nuestros estudiantes al ser expuestos a prácticas educativas inadecuadas. Algunas de estas prácticas se basan en los hábitos y la automatización y necesitan ser renovadas y refrescadas para liberar su potencial, mientras que otras obstruyen inintencionadamente el aprendizaje de los estudiantes (Mason, 2001). También es necesario la toma de elecciones locales en la preparación de detalles, como la elección de ejemplos, el orden de presentación y los modos de interacción a utilizar.

[6] Mostrar estas relaciones es, precisamente, el objeto de González-Martín y Camacho (2004e).

[7] En González-Martín (2002) se abordaron estas cuestiones en relación con la integral impropia. Esta Memoria completa el estudio ahí realizado.

También, dentro del área del Cálculo, se han desarrollado diversas investigaciones que muestran que la tecnología informática puede jugar un papel decisivo en el desarrollo de una articulación flexible entre los registros algebraico y gráfico y puede hacer de esta articulación un instrumento eficiente de la actividad matemática (Artigue, 1999). Estos enfoques, sin duda alguna, pueden proveer al estudiante de una familiaridad y un contacto enriquecedor con un cierto número de fenómenos o de objetos relevantes en el campo del Cálculo.

Ahora bien, es importante reflexionar cuidadosamente sobre el uso de la tecnología. En 1985 se desarrolló un *ICMI Study* (*The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*) en el que se afirmaba que, a pesar de la abundancia de experiencias interesantes, el impacto de la tecnología en la enseñanza era aún débil y que la introducción de ordenadores en el aula no llevaba necesariamente a una mejora en el aprendizaje (King *et al*, 2001).

Obviamente, la viabilidad de estas nuevas estrategias de enseñanza requiere de cambios importantes en el estatus del registro gráfico. De hecho, con principiantes, esta viabilidad requiere de la aceptación de demostraciones cualitativas basadas en argumentos gráficos específicos.

ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación se ha desarrollado en cinco fases. Mostramos a continuación un resumen que muestra las diferentes fases en que se ha estructurado el desarrollo de nuestro trabajo de investigación:

Enero 2001-Marzo 2002

FASE I: **Dimensión cognitiva**

- Elección de la integración impropia como campo de trabajo. Definición del problema de estudio para el trabajo preliminar.
- Configuración de un marco teórico basado, principalmente, en las ideas de Duval, para analizar cómo los estudiantes aprenden el concepto de integral impropia.
- Diseño de un cuestionario e implementación del mismo en la última semana del curso 2000-2001 (junio 2001). Análisis preliminar de las respuestas al cuestionario y diseño del protocolo de entrevistas. Selección de los estudiantes a entrevistar y realización de las entrevistas.
- Julio-septiembre 2001: Estancia de dos meses en el CINVESTAV-IPN de México bajo la dirección del Doctor Fernando Hitt Espinosa.
- Septiembre 2001-marzo 2002: Análisis de datos y redacción de la Tesina titulada *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia*, defendida en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

Marzo 2002-Marzo 2003	*FASE II:* **Definición de la investigación**	• Se decide diseñar una secuencia didáctica para mejorar el aprendizaje de la integral impropia. Se escoge como metodología el diseño de una Ingeniería Didáctica, marcada por los análisis desarrollados en la fase anterior. • Ampliación del marco teórico del estudio inicial con elementos de la Teoría de Situaciones. • Marzo-junio 2002: Estancia de tres meses y medio en el IREM de París bajo la dirección de la Doctora Michèle Artigue. • Análisis de textos relacionados con la *génesis instrumental*. Diseño de las sesiones con *Maple V*.
Marzo 2003-Diciembre 2003	*FASE III:* **Diseño e implementación de la Ingeniería Didáctica**	• Marzo-mayo 2003: Estancia de dos meses en el IREM de París bajo la dirección de la Doctora Michèle Artigue. Revisión y estructuración definitiva de la Ingeniería Didáctica a desarrollar, guiada por el estudio de las componentes cognitivas, didáctica y epistemológica desarrolladas previamente, y de las sesiones en el aula de ordenadores. Análisis de trabajos relacionados con la importancia del *medio* en el diseño de ingenierías didácticas. • Desde el lunes 19 de mayo al martes 10 de junio se desarrolla la Ingeniería Didáctica diseñada y las sesiones en el aula de ordenadores. • Recolección de material audiovisual y material escrito de los estudiantes. Primeros análisis *a posteriori* y análisis del material recogido.
Enero-Diciembre 2004	*FASE IV*: **Análisis a posteriori**	• Desarrollo de los análisis *a posteriori* de las sesiones videograbadas. • Abril-julio 2004: Estancia de tres meses en el IREM de París bajo la dirección de la Doctora Michèle Artigue. Aprendizaje de las técnicas de análisis *a posteriori*. Revisión de los primeros análisis realizados. • Análisis de las sesiones realizadas con *Maple V*. • Análisis cualitativo del material recogido.
Enero-Abril 2005	*FASE V:* **Redacción de la Memoria**	• Finalización del análisis de los resultados y establecimiento de las conclusiones. • Redacción de la Memoria de la Tesis Doctoral. • Revisión de la Memoria y posterior edición.

1.2. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

En líneas generales, nuestro trabajo se caracteriza por la elaboración y experimentación de una ingeniería didáctica, más acorde con la epistemología del concepto “integral impropia” por medio de la integración en la enseñanza de enfoques gráficos y cualitativos, y el estudio de las condiciones de viabilidad de un producto de tal naturaleza en el transcurso de nuestra experimentación.

Existen algunos *mitos* de la educación universitaria que, en muchas ocasiones, se acentúan en los profesores de Matemáticas. Alsina (2001) señala algunos de estos *mitos* indicando que los profesores del nivel superior, para romperlos, necesitan dar algunos pasos hacia una forma diferente de enseñar:

- *Contenido universal libre de contexto*, que justifica el contenido de muchos cursos como "habilidades básicas y resultados que todos los estudiantes del curso deben aprender" y ha generado muchos cursos clásicos en los primeros años de estudios científicos o tecnológicos. En particular, justifica la idea de que la enseñanza no depende del contexto y es independiente de los intereses personales, del entrenamiento personal o profesional específico, del entorno cultural o de circunstancias sociales. Sin embargo, opinamos que los contenidos deben tener relación con su interés, las necesidades especiales, el contexto, la formación previa, etcétera.
- *Organización deductiva*: la "enseñanza" se concibe asimilable gracias a representaciones de pensamiento deductivo. Los temas se presentan linealmente y las definiciones-teoremas-demostraciones se enuncian secuencialmente en su forma más general. En particular, esta presentación conlleva la necesidad constante de demostraciones (mientras más formales, mejor) y deja poco espacio para la discusión o detalles históricos. En nuestro caso, prima la construcción de conceptos por parte de los estudiantes y el razonamiento, previos a la institucionalización, de forma que el aprendizaje sea más significativo.
- *La presentación de una teoría perfecta* da a los estudiantes la impresión de que la Matemática está casi completa, que la demostración de teoremas es simplemente un juego deductivo y que los errores y ensayos fallidos, cruciales en la vida humana, no tienen lugar en el mundo matemático. Paradójicamente, esta presentación implica sólo una comprensión instrumental, en lugar de relacional. Nuestro diseño tiene esto en cuenta, dando a los estudiantes la oportunidad de argumentar y errar, de forma que la interacción global propicie las condiciones para la institucionalización.
- *El paradigma de la "master class"* muestra que la enseñanza, frecuentemente, se ha orientado hacia la "comunicación" del conocimiento matemático. Típicamente, una clase en la Universidad consiste en un gran grupo de estudiantes sentados, escuchando y tomando notas en un aula donde el profesor desarrolla varias horas semanales de presentación hablada-escrita frente a una pizarra. Esto se opone con nuestra concepción de la importancia de dar al estudiante un papel activo en la construcción de su conocimiento mediante alteraciones del *contrato didáctico* usual[8].
- *La evaluación individual-escrita rutinaria* presenta el examen final (mezcla de preguntas y ejercicios) como un método ideal de calificación e interpretación de si los estudiantes dominan el contenido desarrollado en las clases. Se centra en el trabajo individual y cierra las puertas a actividades en grupo, cuestiones abiertas, etcétera. Por el contrario, nuestro diseño organiza diversos momentos de trabajo grupal y presenta a los estudiantes varias cuestiones abiertas que fomenten el debate. Además, los análisis *a posteriori* nos ayudan a hacer un seguimiento de los estudiantes, y no reducir su actividad al desempeño en un examen.

El diseño de nuestra Ingeniería Didáctica trata de romper algunos de estos mitos. Para ello, en primer lugar, hubo de identificarse y delimitar el problema de investigación. Selden y

[8] Alsina (2001) afirma que un hecho probado en la investigación es que las personas aprenden más hablando y escribiendo que escuchando.

Selden (2001) señalan que en cualquier investigación *real* (en particular, en educación matemática) una cuestión crucial es la identificación del problema (preferentemente, problemas difíciles y significativos, en los que se puede hacer algún progreso). También es importante situar los estudios en el cuerpo ya establecido de la investigación.

En un primer momento nos planteamos un trabajo de las siguientes características generales:

- Estudio del aprendizaje de los estudiantes del concepto de integral impropia y de su trabajo en los registros algebraico, numérico y gráfico.
- Diseño de una secuencia de aprendizaje que tuviera en cuenta los datos obtenidos previamente y que conjugara, de forma equilibrada, los registros algebraico, numérico y gráfico. Esta secuencia abordaría los elementos básicos de la teoría de integración impropia, sus aplicaciones fundamentales y el estudio de las funciones eulerianas Beta y Gamma.
- Diseño de sesiones en entornos computacionales donde se utilizase el *software* como mediador y productor de conocimientos matemáticos susceptibles de institucionalización.

Sin embargo, durante el desarrollo de la investigación nos encontramos las siguientes limitaciones, que nos llevan a acotar nuestra problemática como se muestra más adelante:

- Durante el diseño del estudio sobre la dimensión cognitiva pudimos comprobar que hay una gran ausencia de trabajos de investigación centrados en el concepto de integral impropia. Por razones de tiempo se decidió centrar el estudio en las coordinaciones entre los registros algebraico y gráfico.
- A la hora de diseñar nuestra Ingeniería Didáctica no encontramos resultados relevantes sobre el registro numérico en el aprendizaje de la integración impropia, además de su ausencia en la génesis histórica del concepto. Aunque se podía haber incluido situaciones para promover el uso de este registro, los análisis *a priori* habrían sido más difíciles, al no contar con resultados previos.
- Las cuestiones de tiempo nos impidieron también incluir las funciones eulerianas tanto en el análisis de la dimensión cognitiva como en el diseño de nuestra Ingeniería. Por otro lado, su inclusión habría alargado considerablemente la experimentación (consideramos que el refuerzo de las concepciones de función de nuestros estudiantes sería una tarea laboriosa), lo que no era posible desde el punto de vista institucional.
- A pesar de la cantidad de trabajos que aparecen recientemente investigando el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza (y usando, en particular, nuestra perspectiva, *la génesis instrumental*), la mayoría se centran en el uso de calculadoras simbólicas y no en el uso de programas informáticos. El diseño de las condiciones ecológicas se revelaba más laborioso de lo esperado. Además, los resultados sobre la socialización de la *génesis instrumental*, en su mayoría, aparecen en contextos de calculadoras simbólicas.

Estos elementos, conjuntamente con las restricciones propias de nuestro entorno de trabajo, nos llevan a acotar y delimitar los objetivos de nuestra investigación.

De esta forma, el trabajo que en esta Memoria se presenta está guiado por los siguientes objetivos generales:

1. Generar una propuesta de enseñanza del concepto de integral impropia que incorpore los sistemas de representación gráfico y algebraico. Esta propuesta se complementa con sesiones en un entorno computacional para reforzar los contenidos.
    a. Nuestra propuesta conjuga de forma más equilibrada los registros gráfico y algebraico.
    b. Se recurre de forma activa al uso de ejemplos y contraejemplos, en especial los que promueven la utilización del registro gráfico.
    c. Los dos elementos anteriores inducen el empleo de problemas no rutinarios para mejorar la significatividad del aprendizaje.
    d. Se recurre al *software* matemático *Maple V* para reforzar los contenidos y favorecer la coordinación entre registros.
2. Identificar los obstáculos, dificultades y errores ligados al concepto en cuestión que se muestran más resistentes.
3. Estudiar hasta qué punto las modificaciones en el *contrato didáctico* cambian la actitud de los estudiantes en el aprendizaje de las integrales impropias.
4. Analizar si el uso activo de ejemplos y contraejemplos en la enseñanza, así como el uso del registro gráfico como registro de trabajo matemático válido, producen mejoras en el aprendizaje de los estudiantes.
5. Analizar si es posible adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la *génesis instrumental* a un contexto de aprendizaje con ordenadores.
6. Analizar la viabilidad para la observación de *génesis instrumentales* y la posibilidad de generalizar algunos obstáculos observados en entornos de calculadoras gráficas en un contexto de aprendizaje con ordenadores.

Nuestra investigación, como toda investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas, tiene como objetivo último el de mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, lo cual implica mejorar su enseñanza y, por tanto, aportar elementos teóricos y prácticos que permitan incrementar la eficacia de una formación inicial de los estudiantes universitarios que les facilite su desarrollo profesional.

Además, esta investigación pretende aportar nuevas ideas para el currículum de Matemáticas en los primeros cursos de Universidad.

Por último, desde esta línea de investigación se pueden aportar materiales didácticos variados para los estudiantes y, en particular, conocer mejor las ventajas e inconvenientes de la utilización de las nuevas tecnologías para su formación y su posterior uso en las labores profesionales.

El diseño de nuestro trabajo se ha realizado tomando en consideración las siguientes hipótesis, de acuerdo con los trabajos que se están realizando actualmente y la bibliografía que conocemos en relación a los procesos de pensamiento matemático avanzado:

1. Es posible mejorar el aprendizaje de los estudiantes si entienden los conceptos en estudio, los objetivos y cómo serán evaluados.
2. La educación y ejercitación de un pensamiento matemático complejo y flexible requiere el desarrollo de la capacidad de utilizar al menos dos representaciones en paralelo.
3. La visualización juega un papel fundamental en la actividad matemática y es un proceso mediante el cual las representaciones mentales se pueden hacer presentes.

4. Las variaciones en el *contrato didáctico* usual y la explotación del *medio* pueden provocar una mejora en la actitud de los estudiantes e incentivar un aprendizaje más activo.
5. El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquece las experiencias de los estudiantes y los prepara para tareas no rutinarias.
6. Es posible transmitir a los estudiantes de Universidad una visión de las Matemáticas como una ciencia que permite la observación, la experimentación y el descubrimiento.
7. Un uso *responsable* de los ordenadores puede contribuir a una mejora de la significatividad del aprendizaje.

1.3. ANTECEDENTES

Una de las razones que nos llevan a delimitar nuestra investigación es la poca presencia de trabajos de investigación centrados en el concepto de integral impropia[9], donde se aborde de forma directa este concepto. Por este motivo, aunque mencionamos algunas investigaciones relevantes en este campo, en esta sección se resumen más investigaciones sobre otros elementos empleados en nuestro diseño instruccional, en particular sobre el concepto de integral definida, que es también uno de los conceptos fundamentales de nuestro estudio. A lo largo de esta revisión constatamos una vez más que el aprendizaje del Cálculo es difícil para los estudiantes, independientemente de en qué país vivan (Robert y Speer, 2001).

Nuestros propios resultados sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de los conceptos y técnicas relativos a la integración impropia se presentan en la Sección 3.3, pues sustentan nuestro estudio sobre la dimensión cognitiva de la integral impropia.

1.3.1. LA INTEGRAL DEFINIDA

Los conceptos del Cálculo que primero se abordaron en las investigaciones fueron los relativos a límites y funciones y, posteriormente, los relacionados con integrales, derivadas y áreas. Estas investigaciones se completan, en la actualidad, con la gran cantidad de trabajos sobre el uso de la tecnología en el aprendizaje del Cálculo (Robert y Speer, 2001).

Uno de los trabajos pioneros sobre el aprendizaje del concepto de integral definida es el de Orton (1983), que plantea como uno de sus objetivos investigar la comprensión de los estudiantes sobre la integración y la diferenciación. En los resultados del trabajo se evidencia el dominio del modo algebraico sobre el gráfico y algunas carencias de significado en límites y aproximaciones.

El estudio se basa en entrevistas individuales a 110 estudiantes (55 chicos y 55 chicas) con edades comprendidas entre los 16 y 22 años; todos ellos cursaban Matemáticas como una de las materias principales de su curso. Sesenta alumnos fueron seleccionados del nivel académico conocido como *Sixth Form* (16-18 años) de cuatro escuelas diferentes; los otros cincuenta (18-22 años) eran estudiantes de dos *colleges*[10] de Educación Superior que se preparaban para ser profesores de Matemáticas.

---

[9] Ver Sección 1.2.

[10] En Estados Unidos un *college* es una Universidad o una Facultad. En el Reino Unido, se considera como un colegio universitario o, incluso, como una escuela de educación superior o enseñanza vocacional (*vocational training*).

En el estudio se consideraron 38 ítem, de los que 18 eran relativos a la integración, y los ítem considerados clave para evaluar la comprensión de la integración fueron los siguientes:

- Límite de una sucesión igual al área bajo una gráfica.
- Límite a partir de una sucesión de fracciones y a partir de un término general.

ya que, en su opinión, los límites son importantes para una comprensión real de la integración y la diferenciación, aunque por lo general no se les dedica mucho tiempo lectivo para su aprendizaje antes de que sean necesarios para el Cálculo.

En los análisis de los cuestionarios se detectaron muchos errores con el manejo del símbolo "∞", además de errores con el manejo del álgebra necesaria para resolver las cuestiones. Parece claro que la introducción de la integración se ve oscurecida, para muchos estudiantes, por la manipulación algebraica.

En su estudio de Tesis de Maestría, Calvo (1997) afirma que el tiempo de clase no alcanza al estudiante para asimilar todos los nuevos conceptos que se le muestran; además, los contenidos se presentan formalmente antes de que los estudiantes se hayan familiarizado, al menos informalmente, con ellos (coincidiendo con la afirmación de Orton (1983) de que no se dedica tiempo al aprendizaje de los límites hasta que son necesarios para el Cálculo, por lo que su introducción es directamente formal). Uno de los hechos didácticos que destaca es que, al ilustrar la definición de integral definida, se suele presentar una curva sin patologías, un intervalo positivo, se usa un número razonable de rectángulos... (Figura 1.1) Pero no se insiste en cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no.

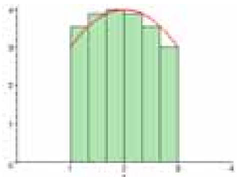


Figura 1.1.

Advierte también del riesgo de identificar la integral como un área, que puede dar lugar a falsas adscripciones de significado; la integral de una función que toma valores negativos *no* es el área de la región comprendida entre el gráfico y el eje de abscisas. Esto se relaciona con el error localizado por Bezuidenhout y Olivier (2000), que creen que esta concepción puede deberse a una abstracción insuficiente de las imágenes del concepto de integral, ligadas al área como contexto.

Calvo también detecta en las respuestas a su cuestionario el hecho de que algunos estudiantes cambien el signo del resultado de una integral para que ésta represente un área[11].

De acuerdo con estos resultados, el estudio realizado por Turégano[12] destaca, después de aplicar un cuestionario, que el nombre "área bajo la curva" resultó conflictivo cuando la función toma valores negativos. Además, en este estudio se hace la siguiente clasificación de perfiles conceptuales en relación a la integral:

[11] Que se reproduce en algunos estudiantes que tomaron parte en nuestro estudio de la dimensión cognitiva (Sección 3.3.4. y González-Martín, 2002, pág. 260).

[12] En su Tesis Doctoral (1993), *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, Universidad de Valencia. Citada en Calvo (1997), pág. 37.

> Un estudiante sería **primitivo** respecto al concepto de integral si la interpreta simplemente como una fórmula que le permite calcular áreas de figuras "raras", sería **operativo** si construye una imagen mental de integral como sinónimo de área sin tener en cuenta el signo de la función y sería **descriptivo** si logra dar una descripción verbal precisa de integral y de sus propiedades incluyendo componentes geométricas y numéricas.

El trabajo de Turégano parte de la hipótesis de que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos del Cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las habilidades algorítmicas usuales, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de *integral definida* y a sus propiedades mediante la idea de *área bajo una curva*. Ella defiende que para iniciar al estudiante en el estudio del Cálculo Infinitesimal sería más adecuado utilizar una secuencia del currículum del Cálculo y un enfoque de la integración de acuerdo con su génesis histórica. Para ello, propone comenzar con la integral definida, independientemente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de límite. Añade:

> La integral es una continuación de la idea de *área*, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela y, como decía Lebesgue: ¿No entenderían los estudiantes más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado sino el lenguaje, que era más geométrico antes, pero más analítico después?
>
> Turégano (1998), pág. 236

Otro trabajo que aborda el concepto de integral definida es el de Rasslan y Tall (2002), que diseñan un cuestionario para explorar los esquemas cognitivos que utilizan los estudiantes de nivel preuniversitario para el concepto de integral definida. Sus preguntas de investigación son las siguientes:

- ¿Qué definiciones de la integral definida dan los estudiantes de Bachillerato[13]?
- ¿Qué imágenes de la integral definida usan los estudiantes en diferentes tipos de problemas?
- ¿Qué ideas equivocadas muestran en lo referente a la integral definida?

Ellos parten en su estudio de la premisa de que los estudiantes no necesariamente utilizan la definición para decidir si una idea dada es o no un ejemplo de un concepto dado. En la mayoría de los casos, opinan, el estudiante decide basándose en su imagen del concepto (*concept image*)[14].

Su cuestionario se aplicó a 41 estudiantes de último año de Bachillerato[15], que ya conocían todos los conceptos presentados en el test; el tiempo máximo que tuvieron fue de cincuenta minutos. En la pregunta sobre la definición de la integral definida, formulada como sigue:

> En tu opinión, ¿qué es $\int_a^b f(x)dx$ (la integral definida de la función *f* en el intervalo [*a, b*])?

---

[13] De forma casual, la pregunta de su cuestionario que pide una definición para la integral definida coincide con la primera pregunta de los cuestionarios y del protocolo de entrevistas usado en nuestro estudio sobre la dimensión cognitiva (González-Martín, 2002) previo al diseño de nuestra Ingeniería. Posteriormente, en el test de contenidos pasado a los estudiantes participantes en nuestra Ingeniería vuelve a aparecer (ver Sección 5.3.3.).

[14] Que se define como todas los imágenes mentales, propiedades y procesos asociados con el concepto en la mente de una persona. Consultar Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991).

[15] Estudiantes del *upper sixth form* de la *high school* inglesa.

obtuvieron las siguientes categorías de respuestas:

Categoría	**Descripción**	**Estudiantes**
I	El área entre la gráfica y el eje x entre $x = a$ y $x = b$.	4/41
II	Un procedimiento de cálculo; $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	3/41
III	Sustituye una fórmula concreta en el integrando y escribe su integral.	3/41
IV	Respuestas basadas en un modo pseudo-conceptual de pensar o incorrectas.	5/41
V	Sin respuesta.	26/41

En su análisis de este ítem concluyen que sólo siete estudiantes de los 41 dieron una definición del concepto de integral definida. Se cuenta en este grupo a los estudiantes de las *Categorías I* y *II*; sin embargo, nosotros no creemos que la respuesta de la segunda categoría pueda ser considerada como una buena definición de integral, ya que se restringe a una concepción meramente operativa, de procedimiento. Por otro lado, la respuesta de la *Categoría I* obvia el signo de la función, error del que ya hemos hablado en esta misma Sección.

Afirman también que los tres estudiantes de la Categoría *III* muestran que pueden *utilizar* el concepto de integración en casos particulares.

Señalan, además, que los estudiantes participantes no han sido obligados a memorizar definiciones durante el curso y que la gran mayoría no es capaz de explicar la definición de integral definida.

También plantean la siguiente pregunta:

Halla el área encerrada entre la función $y = \sin x$ y el eje x en el intervalo $[0, 2\pi]$.

que pretende averiguar si los estudiantes entienden el concepto de integral cuando la función cambia de signo. Las respuestas se distribuyeron de la siguiente forma:

Categoría	**Respuesta**	**Estudiantes**
I	El área viene dada por la integral definida. Separa la integral para sumar las dos áreas que se forman[16].	5/41
II	Respuesta sin presentar cálculos ni argumentaciones.	1/41
III	Consideran el signo de la función y concluyen que el área es nula.	11/41
IV	El área es la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, sin tener en cuenta los signos de la función[17].	15/41
V	Respuestas pseudo-conceptuales o aparentemente sin sentido.	3/41
VI	Sin respuesta	6/41

Los autores concluyen que sólo los cinco estudiantes de la Categoría *I* han comprendido el concepto de integral definida y los 35 estudiantes de las Categorías *II* a *VI* cometen errores o no responden[18].

[16] Sin embargo, escriben que el área es: $\text{\textit{área}} = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4$, en donde hay un error obvio en los signos de las integrales.

[17] Y, nuevamente, ponen como ejemplo un cálculo erróneo: $\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos 2\pi] - [\cos 0] = 2.$

[18] Pero los ejemplos de “cálculos correctos” que dan son erróneos, como se ha mostrado. Algunas conclusiones de este trabajo no nos quedan, pues, claras.

En otras preguntas se dan funciones que no vienen expresadas por una fórmula sencilla, pero cuya integral se calcula sencillamente por métodos geométricos[19]. Con ellas se contrasta si los estudiantes son capaces de ver la integral como *el valor preciso del área bajo la gráfica*, tal como se define en los textos que usan, o si sienten la necesidad de desarrollar una integración simbólica tratando de extender las técnicas de las que disponen. Muy pocos estudiantes responden adecuadamente a estas preguntas o las resuelven utilizando las formas de las funciones. Los autores sugieren que los elementos del Cálculo avanzado (integrales definidas e impropias, funciones generales, etc.) deben introducirse tratando de generalizar las experiencias previas de los estudiantes. Mencionan también que el *School Mathematics Project* introduce ideas conceptuales a través de la discusión en clase, dando a los estudiantes cierta experiencia en su uso.

Un trabajo más reciente para mejorar la comprensión de la integral definida, usando esta vez la ayuda de un *software* con 31 estudiantes de primer curso de Ingeniería, es el de Camacho, Depool y Santos-Trigo (2004)[20]. Un objetivo de este trabajo era que los estudiantes pudieran desarrollar una comprensión conceptual de los procesos de integración, y conceptos como los de partición, refinamiento, límite y aproximación fueron importantes durante el trabajo con el *software*. Su trabajo se interesa en analizar qué tipo de representaciones usan los estudiantes para comprender y resolver diversos problemas que implicaban el concepto de área e integral definida. Algunas preguntas de investigación fueron:

- ¿Hasta qué punto establecen los estudiantes relaciones entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica en la resolución de problemas?
- ¿Qué tipo de dificultades experimentan como resultado del uso de *DERIVE* y el fichero de utilidades que se proporcionó[21]?
- ¿Hasta qué punto les ayuda el uso de *DERIVE* a comprender los conceptos implicados en el estudio de la integral definida?
- ¿Qué tipo de representaciones muestran los estudiantes para comprender y resolver problemas no rutinarios relativos a este campo?

A partir del análisis de los recursos y estrategias básicos que utilizan los estudiantes para abordar una representación concreta del problema (y hasta qué punto son capaces de realizar la transición de una representación de un tipo a otra de otro tipo), se identifican tres perfiles en los estudiantes participantes: 1) los que confiaron en el uso de la tecnología como un medio de validar su trabajo en lápiz-papel, sin incluir la aproximación gráfica; 2) los que usaron el *software* para representar gráficamente y calcular las áreas aproximadas; 3) los que combinaron el trabajo lápiz-papel y el uso del *software* para resolver los problemas, aunque solían equivocarse al conectar los conceptos que aparecían sobre integración definida con ideas y procedimientos básicos aprendidos previamente (cálculo de áreas de figuras simples). Estos últimos aplicaron la idea de aproximación correctamente para determinar las áreas de regiones acotadas y mostraron facilidad no sólo para decidir qué tipo de partición tomar en el intervalo, sino utilizando las herramientas algebraicas para desarrollar los cálculos de las áreas pedidas.

---

[19] Como $f(x) = 1 - |x - 1|$ o $f(x) = x - [x]$. Plantean las preguntas en el registro algebraico, sin añadir ninguna gráfica.

[20] Véase, también, Camacho, Depool y González-Martín (2002, 2004).

[21] Se diseñó un "fichero de utilidades" con la idea de que los estudiantes lo pudieran utilizar como ayuda para calcular un conjunto de integrales definidas cuyas primitivas no pudieran ser expresadas con funciones elementales. Así, este fichero podría ayudar a los estudiantes a desarrollar una imagen de los procesos de integración y su relación con el concepto de área.

1.3.2. INTEGRALES IMPROPIAS

Una de las tareas que Orton (1983) propone a los estudiantes de su investigación consiste en calcular la integral de la función $1/x^2$ en el intervalo [-1, 2]; además, se adjunta la gráfica de esta función:

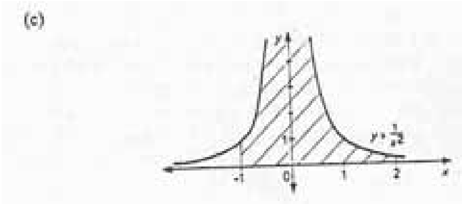


Figura 1.2

Esta pregunta ofreció especiales dificultades a los estudiantes participantes, aunque debemos señalar que éstos sólo tenían conocimientos elementales sobre la integración. Las respuestas de 25 estudiantes de los 110 participantes no fueron válidas porque intentaron calcular directamente la integral, aunque siete de ellos añadieron que su método debía ser incorrecto y quizá el área no pudiera ser calculada. Los estudiantes que estaban convencidos de que el área no podía ser calculada integrando en el intervalo no pudieron explicar correctamente por qué. Esto parece estar de acuerdo con la idea de que no se enseña qué condiciones son necesarias para definir el concepto de integral (Calvo, 1997; González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2004a, 2004f, 2005a).

Calvo (1997) detecta que cuando los estudiantes se habitúan a estimar el área bajo una curva mediante el área de rectángulos apropiados, el hecho de hacer variar uno de los extremos del intervalo puede dar lugar a dificultades, pues es preciso encapsular el proceso del cálculo del área en un objeto[22]. Este resultado concuerda con Artigue (1995a), que señala que los estudiantes que llegan a la Universidad no son vírgenes en el campo de la integración, sino que tienen una concepción de la integral como operación inversa a la derivación y asociada a la imagen de área bajo una curva. Por ello, la enseñanza en este nivel debe dar un sentido a la noción de *procedimiento integral*.

El proceso de encapsulación de la integral se aborda explícitamente en Dubinsky *et al* (1995), que plantean la introducción de la función logaritmo por medio de una integral con límite superior variable (abordando así directamente el problema general de definir una función utilizando una integral). Recordemos que, implícitamente, el procedimiento de calcular una integral en un intervalo infinito mediante un paso al límite implica este proceso. En el mismo texto plantean "*cómo extender la idea de integral definida de dos formas diferentes. Estos dos tipos extendidos de integral, llamadas* ***integrales impropias****, permiten extender la definición de integral definida a casos donde el intervalo de integración es infinito y a casos donde el integrando no está acotado*" (pág. 358). Eligen, igual que nosotros, el camino de la generalización, para el cual es fundamental la concepción de integral como proceso dinámico y la función integral: $f(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Hemos observado también en nuestros estudiantes dificultades para asimilar este proceso de tipo dinámico (González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2004f, 2005a), pareciendo que muchos no han conseguido dar el salto del proceso del cálculo por

[22] La *encapsulación* se produce cuando se reflexiona sobre las acciones aplicadas a procesos particulares; se percibe el proceso como un todo y uno se puede dar cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre él y puede construir tales transformaciones. El proceso se ha reconstruido en un *objeto* cognitivo. Consultar Asiala *et al* (1996) y Dubinsky (1994).

aproximaciones de un área al objeto que éste origina. Esto se agrava con el hecho de que, como la mayoría de investigaciones afirman (Robert y Speer, 2001), los principales constructos intelectuales y dificultades que los estudiantes encuentran en el campo del Cálculo, implícita o explícitamente, se relacionan con los conceptos de aproximación y convergencia.

Rasslan y Tall (2002), además de la pregunta sobre la definición de integral definida, ya mencionada, presentan integrales impropias en algunas preguntas. En particular, en la primera pregunta:

Calcula, si puedes: (a) $\int_0^6 \frac{1}{(x-4)^{2/3}}dx$ (b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^4}dx$

Si puedes, explica el signo de la respuesta.

cuyo propósito era examinar cómo aplican los estudiantes lo que entienden por integral definida al cálculo de integrales cuando el integrando se vuelve infinito. En el enunciado de la prueba no aparecía ninguna gráfica.

Las respuestas obtenidas fueron agrupadas en las siguientes categorías:

Categoría	Explicación
"*cero*"	Alumnos con teoría correcta.
I	La integral definida es el área entre la función y el eje *x* en [*a*, *b*].
I_a	Igual que arriba y calcula correctamente la integral definida[23].
I_b	Igual que arriba, pero dando sólo el valor numérico sin mostrar ningún cálculo.
I_c	Igual que arriba, pero con cálculo erróneo de la integral definida.
II	Respuestas dadas sin explicación: la integral definida es un procedimiento de cálculo.
II_a	Igual que arriba, pero con el cálculo correcto del valor de la integral[24].
II_b	Igual que arriba, pero con cálculo erróneo. Uso incorrecto de algoritmos.
III	Explicaciones erróneas, basadas en un modo pseudo-conceptual de pensamiento.
IV	En blanco.

En la siguiente tabla mostramos los resultados para ambas integrales de los estudiantes participantes:

CATEGORÍA	"*cero*"	I_a	I_b	I_c	II_a	II_b	*III*	*IV*
Resultados (*a*)	0	3	3	1	8	19	2	5
Resultados (*b*)	0	0	0	5	0	26	4	6

Los autores concluyen que sólo 3 estudiantes de los 41 (Categoría I_a) muestran evidencia de que entienden el concepto de integral definida, aunque luego no resuelven correctamente la cuestión (*b*). Opinan que esto puede indicar que simplemente ignoraron la cuestión de convergencia en ambos casos.

Para la primera integral hay once estudiantes (Categorías I_b y II_a) de los que no se puede decir si entienden o no el concepto de integral definida. Los demás no parecen ser capaces de manejar el concepto cuando aparecen discontinuidades infinitas. También observan que ninguno de los estudiantes de la muestra sabía la teoría correcta de las integrales impropias.

[23] Los autores consideran correcto el cálculo del valor de la integral aplicando directamente la regla de Barrow, sin separar la integral, algo que nos parece discutible.

[24] Hacemos aquí la misma observación que en la categoría I_a.

La naturaleza del estudio de Camacho y Aguirre (2001) es sustancialmente distinta a la nuestra; su objetivo es diseñar una situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en un curso universitario de Matemáticas en el que los estudiantes manifestaban concepciones dudosas en el uso algorítmico de expresiones en las que subyace la división por cero. En una parte de sus cuestionarios plantean, tanto a los estudiantes como a cuatro profesores, el cálculo de cuatro integrales impropias. Esta parte del cuestionario se aplicó a 145 estudiantes de primer año de universidad, que ya tenían experiencia en el cálculo de integrales definidas y áreas bajo curvas. Para la resolución de las integrales se les permitió el uso de tablas o formularios y calculadoras sencillas. Las integrales a calcular fueron:

$$1)\ \int_{-b}^{0}\frac{a^3}{(b+x)^2}dx,\ \text{siendo } a,b\in\ \mathbb{R} \qquad 2)\ \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$3)\ \int_{0}^{1}-\frac{1}{x^2}.\sin\frac{1}{x}\,dx \qquad 4)\ \int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$$

Se constata que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para calcular el valor de las integrales, y muchos ni siquiera supieron calcular las primitivas, o se perdieron en los cálculos algebraicos, cuestión que no se había previsto.

También se observa que tanto los estudiantes como los profesores tienden a sustituir los valores extremos de la integral una vez calculada una primitiva y se afirma que hay paralelismos en el modo de proceder de los docentes y los alumnos, que no calcularon las integrales utilizando procesos límite, sino usando *una concepción equivocada* consistente en generalizar la regla de Barrow y sustituir directamente los extremos de la integral en la variable, aún cuando uno de los extremos sea infinito (pág. 261).

1.3.3. LA RESISTENCIA A VISUALIZAR

Artigue[25] señala que los estudiantes suelen encontrar diversas dificultades cognitivas ligadas a los marcos de interpretación y de predicción. En el marco de la demostración, las dificultades cognitivas son más restrictivas y ha de legitimarse algún tipo de demostración geométrica para poder vencer estas dificultades. Por otro lado, diversas investigaciones han mostrado que, si bien es posible superar las dificultades cognitivas encontradas al trabajar con el registro gráfico (concerniendo esencialmente la validación) construyendo instrumentos de prueba específicos del registro gráfico, ha sido más difícil resolver los problemas institucionales planteados por la legitimación de tales instrumentos de prueba, teniendo en cuenta el estatus usual de las representaciones gráficas en el nivel universitario[26]. El trabajo de Neria y Amit (2004) sugiere que los estudiantes de Secundaria prefieren otros modos de comunicación frente al algebraico. Se basan en que la comunicación matemática está fuertemente relacionada con la resolución de problemas (que depende de las habilidades de representación de problemas, que incluyen la construcción y utilización de representaciones matemáticas en palabras, gráficos, tablas y ecuaciones, la resolución y la manipulación de símbolos) y el razonamiento; sin embargo, en la institución universitaria (e, incluso en los últimos años de la enseñanza pre-

[25] Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices, en *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (Harel, G. y Dubinsky, E., eds.), MAA Notes vol. 28, Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 109-132. Citado en Robert y Speer (2001).

[26] Ídem. Citado en Maschietto (2001).

universitaria), el único medio de comunicación “válido” es el algebraico, lo que provoca que los estudiantes anulen los otros medios y sólo los buenos estudiantes consigan comunicarse correctamente.

Una de las principales razones que muchos autores encuentran para la falta de comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes es la ausencia de conexiones explícitas y detalladas entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y procedimientos a aprender. Como ya hemos mencionado[27], Eisenberg y Dreyfus (1991) mencionan como una de las causas por las que los estudiantes evitan la visualización el hecho de que ésta exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente. Por otro lado, generalmente, los aspectos visuales de un concepto suelen ser considerados como secundarios al concepto mismo. En resumen, enumeran las siguientes tres razones para que lo visual quede en segundo plano:

- Cognitiva: lo visual es más difícil.
- Sociológica: lo visual es más difícil de enseñar.
- Creencias acerca de la naturaleza de las Matemáticas: lo visual no es matemático[28].

En su artículo hacen un breve compendio de trabajos de varios investigadores sobre cuestiones relacionadas con la visualización y comentan trabajos de otros investigadores, como Monk, Swan y Vinner[29], donde se refuerza su hipótesis de que los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar algebraicamente más que visualmente, incluso cuando se les empuja hacia el pensamiento visual.

Los autores opinan que muchas de las dificultades del Cálculo podrían ser evadidas si a los estudiantes se les enseñara a interiorizar las connotaciones visuales de los conceptos del Cálculo. Respecto a esto, Hitt (1998) argumenta que los estudiantes de primer año universitario no logran crear articulaciones coherentes entre varios sistemas de representación ligados a conceptos de ese nivel.

Otro de los resultados que mencionan, debido a Mundy[30], es que los estudiantes frecuentemente tienen solamente una comprensión mecánica de conceptos básicos de cálculo debido a que no han alcanzado una comprensión visual de las nociones básicas subyacentes. En particular, Mundy pidió calcular la integral $\int_{-3}^{3} |x+2|dx$ a un conjunto de 973 estudiantes de un curso de Cálculo, dando a elegir a los estudiantes entre las siguientes respuestas: 0, 9, 12, 13 y 14. Tan sólo el 5’4% de los participantes respondió correctamente la cuestión (24% respondió 0,

[27] Ver Sección 1.1.

[28] Artigue (1992; ver nota 25) afirma que las creencias y hábitos sobre el estatus y el papel del registro gráfico actúan como obstáculos didácticos y han de ser explícitamente cuestionados para conseguir los cambios epistemológicos necesarios tanto en los profesores como en los estudiantes.

[29] Los trabajos que citan son los siguientes:
Monk, G. S. (1988). Students’ Understanding of Functions in Calculus Courses, en *Humanistic Mathematics Network Newsletter* (White, A., ed.), nº 2, Dep. of Math. Harvey Mudd College.
Swan, M. (1988). *On Reading Graphs*, Presentación en el ICME6, Budapest (Hungría).
Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students, *Focus: On Learning Problems in Mathematics*, 11, pp. 149-156.

[30] Mundy, J. (1987). Analysis of Errors of First Year Calculus Students, en *Theory, Research and Practice in Mathematics Education* (Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J., ed.), *Proceedings of the 5th International Congress on Mathematics Education* (ICME5), Adelaida (Australia), pp. 170-172.

22% respondió 9 y 48% respondió 12)[31]. Mundy concluyó que los estudiantes no tenían una comprensión visual de que las integrales de funciones positivas pueden ser pensadas en términos de área bajo una curva. Sin embargo, los estudiantes no tuvieron problemas para calcular el área entre dos curvas "bonitas" que se intersectaban.

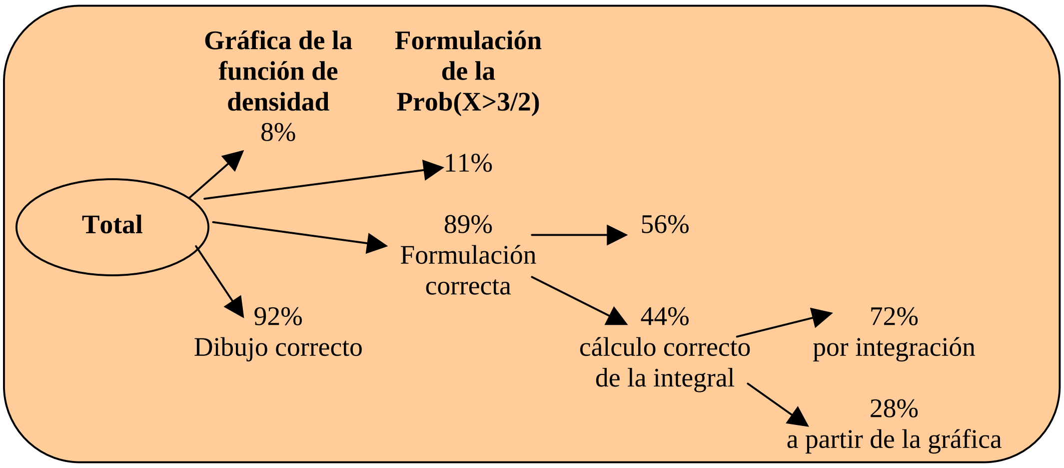
A partir de los hallazgos de Mundy, Dick[32] diseñó un estudio evaluando si los estudiantes que podían dibujar correctamente la gráfica de ciertas funciones usarían la gráfica para comprobar los cálculos simbólicos. Propuso a estudiantes que finalizaban su semestre en Probabilidades y Estadística la siguiente pregunta:

Sea la función $f(x) = |x - 2|$ cuando $1 < x < 3$ y que vale 0 fuera de este intervalo.
a) Dibuja la gráfica de $f(x)$.
b) Calcula la Prob(X > 3/2), siendo X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por $f(x)$.

Examinó tres partes del trabajo de los estudiantes participantes:

1) Gráfica de $f(x)$ correcta.
2) La formulación de la Prob(X > 3/2) como $\int_{3/2}^{3} |x-2|\,dx$.
3) Cálculo de Prob(X > 3/2) a partir del análisis directo de la gráfica o del cálculo $\int_{3/2}^{2} (-(x-2))dx + \int_{2}^{3} (x-2)dx$.

El 92% de los participantes dibujó correctamente la función de densidad de probabilidad y el 89% también dio una formulación correcta de la Prob(X > 3/2); pero de éstos, sólo el 44% calculó correctamente la integral (72% por integración y 28% a partir de la gráfica):



Dick concluyó que "*no hay evidencias de interpretación gráfica de ningún tipo... incluso se puede esperar de estudiantes preuniversitarios con un entrenamiento matemático relativamente avanzado que ignoren el uso de sus propias gráficas, aún cuando son producidas*

[31] La suma de estas cifras no da 100, sino 99'4. Probablemente el resto sea debido a abstenciones.

[32] *Student Use of Graphical Information to Monitor Symbolic Calculations*, artículo disponible en la Universidad del Estado de Oregón.

inmediatamente antes de un problema de cálculo para el que podrían ser utilizadas” (Eisenberg y Dreyfus, 1991, pág. 28).

Tall (1992b) afirma que es necesario dotar a los estudiantes de la experiencia en la cual los conceptos se fundan para introducirlos en el mundo de los matemáticos profesionales. La persistencia de ciertas intuiciones o experiencias previas puede producir una amplia gama de conflictos cognitivos que pueden actuar como un obstáculo para el aprendizaje.

En el trabajo sobre funciones, identifica que algunas dificultades asociadas al concepto de función pueden deberse a la gran variedad de representaciones que éste tiene (gráfica, diagrama de flechas, fórmula, tabla, descripción verbal...) y las relaciones entre ellas. Sin embargo, el hecho de visualizar e integrar diferentes representaciones de un concepto no es algo que el estudiante realice automáticamente, sino que debe ser enseñado explícitamente. Calvo (1997) obtiene en su estudio que, al plantear algunos ítem equivalentes matemáticamente en distintos lenguajes, los estudiantes se comportaban de forma muy distinta ante uno u otro de los lenguajes utilizados.

Maschietto (2001) señala que pocas investigaciones sobre el papel de las representaciones de objetos matemáticos parecen haber abordado dominios matemáticos avanzados y desarrolla un análisis *a priori* de los posibles papeles del registro gráfico que se contrasta con las producciones de un grupo de estudiantes italianos. Sus resultados muestran la necesidad de ampliar las categorías consideradas inicialmente para tomar en cuenta de modo eficaz el papel potencial del registro gráfico en la resolución de los problemas propuestos.

Desde una perspectiva antropológica, que revela relaciones institucionales hacia lo gráfico que darán forma a las relaciones personales de los sujetos sometidos a tal o cual institución, aparecen las siguientes preguntas:

- ¿Cómo toma en cuenta la institución universitaria las funcionalidades que se pueden suponer a priori del registro gráfico en el trabajo en Cálculo?
- ¿De qué legitimidad son dotadas en la Universidad?
- ¿Cómo se reparten las responsabilidades respectivas de los profesores y los estudiantes?
- ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias con las respuestas a cuestiones análogas sobre la Enseñanza Secundaria?

La perspectiva antropológica también destaca el papel de los *ostensibles*, dotados de valencias instrumentales y semióticas, en el trabajo matemático y la dialéctica compleja que en él se teje entre *ostensibles* y *no-ostensibles*[33].

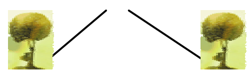
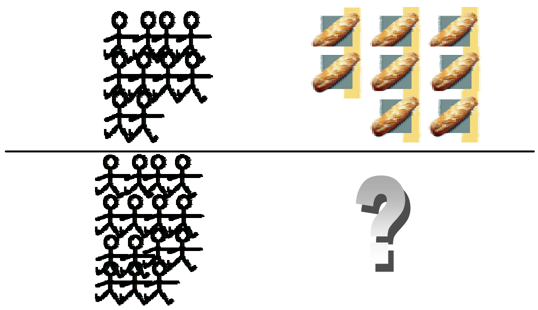
También se utiliza, de forma más local, la Teoría de las Situaciones Didácticas, particularmente útil para el análisis fino de las variables de los problemas propuestos a los estudiantes y de la economía del funcionamiento de lo gráfico en las situaciones experimentales. En cuanto a lo cognitivo, utiliza la teoría de Duval (1995), que permite precisar las características de los registros de representación y de los modos de tratamiento semiótico asociados, y que también ha puesto en evidencia los problemas cognitivos que provoca la

[33] Siendo un *ostensible* todo objeto de una naturaleza sensible, una cierta materialidad y que, por ésta, adquiere por el ser humano una realidad perceptible. Los *no-ostensibles* serían los “objetos” que, como las ideas, las instituciones o los conceptos, existen institucionalmente, sin ser, sin embargo, vistos, dichos, oídos, percibidos o mostrados por sí mismos; sólo pueden ser *invocados* o *evocados* por la manipulación adecuada de ciertos objetos *ostensibles* asociados (una palabra, una frase, un gráfico...). Véase Bosch y Chevallard (1999).

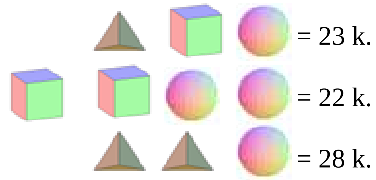
conversión entre el registro gráfico y los otros registros semióticos usuales del trabajo matemático (lengua natural, registro simbólico, etc.)[34].

Entre otros resultados, encuentra que las representaciones gráficas son, casi siempre, un mero objeto a producir durante un ejercicio o como consecuencia del estudio de una función (a menos que sirvan para ilustrar, durante las clases, las funciones "usuales"). Se asocian, por tanto, a funciones particulares dadas por una expresión algebraica y acompañadas de tablas de variación. En ciertos manuales, se encuentran igualmente las representaciones gráficas relacionadas con actividades específicas, como en el estudio local de funciones (en relación con los extremos y los puntos de inflexión). También se encuentran representaciones gráficas para representar funciones prototípicas. En las soluciones redactadas de los ejercicios propuestos en los manuales, las gráficas aparecen muy raramente, lo que hace pensar que fuera de las tareas estereotípicas que piden la representación gráfica de tal o cual función, el recurso a lo gráfico en Cálculo y su operacionalización en el nivel universitario se dejan para el trabajo privado del estudiante.

Otro trabajo más reciente es el de Elia y Philippou (2004) sobre el uso de dibujos en la resolución de problemas con estudiantes de *Grado 6* (Enseñanza Primaria). Ellos distinguen cuatro funciones principales de los dibujos:

Función	Descripción	Ejemplo
DECORATIVA	No da ninguna información real sobre la solución del problema	*Mrs. Brown dividió a sus estudiantes en grupos de 5, con 3 chicas en cada grupo. Si Mrs. Brown tiene 25 niños en su clase, ¿cuántos chicos y cuántas chicas hay?* 
REPRESENTATIVA	Representan el total o una parte del contenido del problema	*Un hombre plantó un árbol a cada lado de un camino recto. Posteriormente, plantó un árbol cada 2 m. a lo largo del camino. La longitud del camino es de 10 m. ¿Cuántos árboles se plantaron en el camino en total?* 
ORGANIZATIVA	Ofrece direcciones para dibujar o para el trabajo escrito que favorecen el proceso de resolución	*La semana pasada 10 excursionistas acamparon en la montaña. Cada día disponían de 8 pedazos de pan para comer. Esta semana, 15 excursionistas acamparon en la montaña. ¿Cuántos pedazos de pan habrá cada día?* 

[34] Esto se desarrolla en la Sección 2.2.

INFORMATIVA	Dan información esencial para la solución del problema; el problema se basa en el dibujo	*Encuentra los pesos de los siguientes tres objetos: un tetraedro, una esfera y un cubo, basándote en la información mostrada en el dibujo.* 

e investigan los efectos de los dibujos, según su función, en la resolución de problemas. Afirman que una resolución de problemas efectiva, haciendo uso de dibujos, depende de la relación entre el dibujo y el problema y del conocimiento y habilidades previos de los estudiantes. Por tanto, sería importante que los profesores seleccionasen dibujos atendiendo a su función para la resolución del problema, además de tener en cuenta los métodos que usan los estudiantes para favorecer el desarrollo de las estrategias en las que no son suficientemente competentes. Sus preguntas de investigación principales son:

- ¿Cuál es el efecto de cada categoría de dibujo en el desempeño de los estudiantes al resolver problemas?
- ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes para resolver un problema acompañado de un dibujo de cada categoría?
- ¿Cuál es el efecto de cada categoría en la comunicación entre estudiantes durante la resolución de problemas?[35]

Para determinar el efecto de cada dibujo se tomaron en cuenta los siguientes criterios:

- Los estudiantes utilizan el dibujo mediante acción u observación para resolver el problema.
- Los estudiantes se enfrentan a conflictos internos por el uso del dibujo.
- Qué método (visual, analítico o ambos) utilizan los estudiantes para la solución de cada problema.

Concluyen que todas las funciones, menos la decorativa (los propios estudiantes reconocen que no ayuda en nada), conducen a la resolución de problemas y al proceso de comunicación. Todos los estudiantes reconocieron que el dibujo representativo tiene un papel de apoyo en sus procesos de resolución. En concreto, los comentarios de los investigadores sobre cada función fueron los siguientes:

Decorativa	Efecto insignificante en la resolución de problemas, pues no ofrece ninguna información ni *feed-back* para la solución del problema.
Representativa	Utilizada de forma activa por todos los estudiantes en la resolución de problemas[36]. Todos los estudiantes utilizaron métodos visuales recurriendo al dibujo dado, lo que en la mayoría de los casos produjo conflictos internos. Su efecto positivo se hizo evidente en la comunicación entre los estudiantes.

[35] Para ello, se seleccionaron ocho estudiantes que se agruparon en parejas. Se escogieron cuatro problemas (cada uno con un dibujo de cada categoría) y se repitió cada entrevista cuatro veces. Uno de los objetivos era determinar si los estudiantes resuelven y comunican su procedimiento utilizando el dibujo asociado.

[36] Lo que los autores atribuyen a la habilidad espacial esencial para la comprensión y resolución del problema propuesto.

Organizativa	Papel importante en la resolución de problemas. Por otro lado, los estudiantes que tuvieron conflictos internos hicieron uso, en su mayoría, de métodos visuales para la resolución del problema propuesto.
Informativa	Efecto fundamental en la resolución de problemas, pues consiste en todos los datos necesarios para la solución del problema. Fue utilizada por todos los estudiantes[37].

Su trabajo destaca el papel de los dibujos como ayuda para la reflexión y como medio de comunicación de las ideas matemáticas. Además, el proceso de visualización aparece como indispensable en el aprendizaje matemático y, más concretamente, en la resolución de problemas[38]. De las dos formas consideradas de interacción con una representación (observación y acción), consideran que el uso activo de dibujos en el proceso de resolución de problemas puede llevar al estudiante a conflictos internos, que pueden ser significativos y beneficiosos en el intento de solución (y a la hora de encontrar soluciones correctas). Estos conflictos aparecen, por ejemplo, cuando el texto del problema matemático lleva a un procedimiento de resolución distinto del que se deriva del uso del dibujo asociado al problema. La mayoría de las estrategias de los estudiantes implicaron el uso de métodos visuales o analíticos, dependiendo del método que mejor encajaba con sus propias habilidades y con el problema o dibujo. Las relaciones interactivas dependen de las preferencias de los estudiantes y de sus habilidades espaciales y de visualización[39].

Sin embargo, señalan también que el uso de dibujos, imágenes o diagramas puede tener efectos negativos debido a las dificultades que puede crear (como los originados por la selección de algún aspecto del dibujo en detrimento de otros aspectos, el énfasis en detalles irrelevantes o lo inapropiado de la distribución espacial, que puede originar malentendidos).

Una experiencia reciente sobre el razonamiento visual en entornos informáticos[40] es la de Leung y Wah Chan (2004). Proponen a varios estudiantes actividades de exploración de dibujos de gráficas en un entorno informático y, posteriormente, entrevistan a un estudiante que ha formulado dos *leyes empíricas* a partir de sus observaciones. Su trabajo se enmarca dentro de un conjunto de investigaciones que pretenden utilizar la visualización virtual como medio de construcción de conocimiento matemático y significados.

El estudiante entrevistado, Kelvin, fue seleccionado por su construcción, a partir de la sola observación e investigación en el ordenador, de dos *leyes empíricas* que facilitan el dibujo de polinomios de la forma $y = (x + a)^m (x + b)^n (x + c)^p$, con m, n y p enteros positivos y a, b y c números reales. Sus leyes no fueron fruto de un riguroso análisis matemático, sino de la observación; además, fue capaz de aplicar sus leyes al dibujo de gráficas de la forma $y = (x+a)^{\frac{m}{n}}(x+b)^{\frac{p}{q}}(x+c)^{\frac{r}{s}}$.

Las tareas propuestas a los estudiantes (que trabajaban en pares) para su exploración con el *software* (se utilizaron *Graphmatica* y *Winplot*) fueron las siguientes:

---

[37] Aunque, por ejemplo, el estudiante S2 sólo utilizó el dibujo para recoger los datos necesarios para la solución y no como un medio de representación, o *feed-back*, para el proceso de resolución, como el resto de los estudiantes.

[38] En el contexto de la resolución de problemas, la visualización remite a la comprensión del problema con la construcción y/o uso de un diagrama o dibujo que ayude a obtener la solución.

[39] Lo que Bishop (1989, Review of research on visualization in Mathematics Education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), pp. 7-15) denomina "*su competencia para recordar, generar, elegir y operar apropiadamente con la visualización*".

[40] En el Capítulo 6, Sección 6.3., comentaremos otras experiencias en entornos informáticos.

A	**1**	Investiga la familia de gráficas de la forma $y = x^n$, con n un entero positivo
	2	Investiga la familia de gráficas de la forma $y = (x + a)^n$, con n un entero positivo y a un número real.
	3	Investiga la familia de gráficas de la forma $y = (x + a)^m (x + b)^n (x + c)^p$, con m, n y p enteros positivos y a, b y c números reales.
B	**1**	Investiga la familia de gráficas de la forma $y = x^{\frac{m}{n}}$, donde m y n son enteros positivos.
	2	Investiga la familia de gráficas de la forma $y=(x+a)^{\frac{m}{n}}(x+b)^{\frac{p}{q}}(x+c)^{\frac{r}{s}}$, donde m, n, p, q, r y s son enteros positivos y a, b y c son números reales.

El estudiante Kelvin ya conocía la forma de $y = x^2$ e $y = x^3$ antes de esta exploración, pero fue el ordenador quien le ayudó a descubrir la forma general. Su regla fue:

"*Cuando el índice es impar, la forma es así:* 

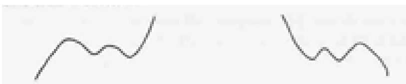
Cuando el índice es par, la forma es así:  ".

y afirmó que no conocía este resultado anteriormente y que lo aprendió durante las tareas de exploración. Obviamente, su conocimiento previo sobre $y = x^2$ e $y = x^3$ jugó un papel de pivote en su proceso de generalización, ya que éstas son las dos gráficas de las que Kelvin tenía una comprensión analítica y este conocimiento pareció *concordar visualmente* con el caso general. Los autores afirman que se dio un proceso de intercambio de significado entre las representaciones simbólicas y la imagen visual generada por ordenador: los cambios en el índice de x se convirtieron en formas gráficas.

Kelvin fue más allá y enunció las dos *leyes* siguientes:

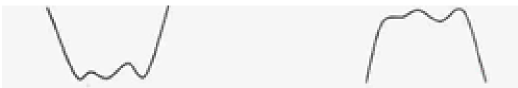
Ley de combinación para $y = (x + a)^m (x + b)^n (x + c)^p$:

(A) (i) Cuando la suma de los índices de los factores es impar, entonces la forma general de la curva será así:



Coeficiente director positivo Coeficiente director negativo

(ii) Cuando la suma de los índices de los factores es par, entonces la forma general de la curva parecerá una $\cup$ o una $\cap$, con algunas "montañas" y "valles":



Coeficiente director positivo Coeficiente director negativo

(B) Los factores de la función se consideran independientemente. Las gráficas de los factores se dibujan primero de forma individual y luego se combinan por reflexiones (cuando sea necesario) de ambos extremos de las gráficas alrededor del eje OX.

Ley de Continuidad:

Durante la combinación de las curvas separadas de los factores se debe mantener la continuidad de la curva.

Mediante estas acciones, Kelvin pareció experimentar un proceso de descubrimiento de características globales vía propiedades locales. Incluso fue capaz de obtener reglas que le permitieron dibujar $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{2}{3}}.(x-3)^{\frac{1}{3}}$:

Cada factor por separado   Curva continua "total" dibujada

Kelvin fue capaz de aplicar sus leyes en diferentes contextos y probaron ser, aunque heurísticas, operacionalmente efectivas. Posteriormente será necesario un análisis matemático para verificarlas y afinarlas. Los autores concluyen que sus leyes eran ricas en contenido matemático, aunque Kelvin no hubiera trabajado en una demostración y que su razonamiento se basaba principalmente en la intuición y la observación. Las características de estos entornos computacionales parecen jugar un papel de pivote en el proceso de razonamiento visual. En su opinión, las imágenes visuales variables que ofrecen estos entornos pueden estimular la intuición del estudiante sobre comportamientos matemáticos que pueden contribuir significativamente en el proceso de razonamiento visual.

1.3.4. EL DEBATE CIENTÍFICO[41]

En su artículo *Analysis*, Michèle Artigue (1991) hace una revisión de las investigaciones más relevantes realizadas hasta el momento sobre el aprendizaje del Cálculo en los primeros niveles universitarios. Uno de los trabajos que menciona en este artículo es el de Legrand, realizado en la Universidad de Grenoble (Francia)[42]. Esta experiencia se dio en un contexto en el que se animaba a los estudiantes a conjeturar y debatir ideas en grupos dentro de la clase; los argumentos de cada grupo eran expuestos a los otros estudiantes, en vez de al profesor. Este método de enseñanza fue denominado *Debate científico.*

Alibert y Thomas (1991) discuten otras experiencias desarrolladas en Grenoble usando el debate científico, mostrando que su uso ayuda a saber qué piensan los estudiantes sobre un concepto dado en un momento concreto del curso y que también ayuda a los estudiantes a convencerse de falsas concepciones que podrían tener sobre los conceptos; la experiencia les enseña que la demostración es realmente una herramienta que se puede usar para mejorar las ideas y separarlas de la falsa intuición.

[41] La Sección 4.2. explica los fundamentos de esta metodología.

[42] También citado en Artigue (1995a, 1999, 2001).

Uno de los conceptos que se estudió en profundidad durante la investigación de Legrand es el de integral. La ingeniería didáctica[43] asociada se desarrolló con estudiantes de primer año de Universidad que ya sabían calcular primitivas sencillas y conocían las concepciones de la integral como la inversa de la diferenciación y como el área bajo una curva, lo que está de acuerdo con la afirmación de Artigue (1995a) de que los estudiantes no llegan a la Universidad vírgenes en el campo de la integración. El nuevo currículo se diseñó para enriquecer las concepciones de los estudiantes y dar un significado a la noción de proceso integral.

A través de un problema de tipo físico se pretendía desarrollar un debate científico para resolverlo. En un problema de atracción de masas entre una barra y una partícula puntual (Figura 1.3) se hace ver a los estudiantes que el hecho de considerar la masa de la barra concentrada en su centro de gravedad no es suficiente para obtener la solución al problema. Otra opción planteada fue cortar la barra en dos y aplicar esta suposición a ambas partes, pero este procedimiento lleva a una contradicción con el principio del centro de gravedad.

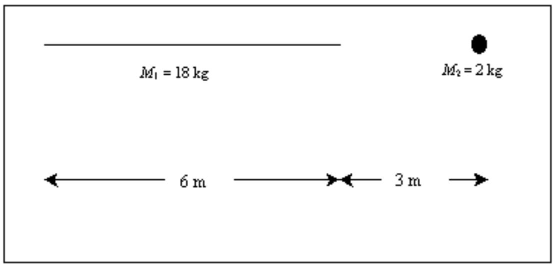


Figura 1.3

De esta forma, aparece la idea de suponer la masa concentrada en cada uno de los extremos de la barra y obtener desigualdades para la fuerza real que se obtiene, por exceso y por defecto. A partir de aquí, surge de forma natural la idea de ir dividiendo la barra en mitades, cuartos, etc. para ir encajando cada vez más las desigualdades y obtener una acotación más precisa de la fuerza real; el paso al límite proporcionará el valor real de esta fuerza.

Esta situación ha resultado ser efectiva en varios experimentos en distintos contextos[44]. Artigue (2001) hace una análisis didáctico de las razones de esta efectividad:

- Cuando se plantea esta situación sin ninguna pista lingüística, los estudiantes de primer año no la reconocen como un problema a resolver utilizando integrales.
- Los estudiantes no se quedan desprovistos de recursos, ya que cuentan con estrategias provenientes de la Física. También habrá estudiantes con dudas, lo que favorece el debate.
- Se puede comprobar la validez del principio del centro de gravedad (la estrategia más recurrida) simplemente aplicándolo de otra forma. Normalmente se sugiere cortar la barra en dos mitades, lo que produce un resultado diferente al que se obtiene si se considera la masa de la barra concentrada en su centro.
- Esta respuesta negativa hace destacar un hecho esencial: la contribución de un trozo de la barra a la fuerza de atracción depende de su distancia a la masa M_2, lo que permite a los estudiantes proponer cotas superiores e inferiores para la fuerza requerida.

[43] De esta metodología, fruto de la Didáctica francesa, nos ocuparemos en la Sección 4.1.

[44] Aunque, como razonablemente se podría esperar, dado el lugar asignado a la construcción del concepto de integral en esta enseñanza, el lugar que se le otorga a las técnicas de cálculo explícito de primitivas se reduce bastante.

- La técnica base del proceso de invalidación permite un refinamiento progresivo de la barra, que lleva a los estudiantes a la convicción de que la fuerza puede aproximarse con tanta precisión como se desee. Subyacente se encuentra el proceso integral fundamental.

Éste es justamente el punto de partida de Legrand. Los estudiantes han de trabajar distintas situaciones y contextos que requieran del mismo proceso de solución para, posteriormente, buscar y discutir las analogías entre las soluciones con el objetivo de convertir el proceso integral en una herramienta explícita. En este punto el profesor universitario conecta el trabajo desarrollado con la teoría de las integrales de Riemann y presenta la noción de integral como un objeto matemático que será reutilizado posteriormente en situaciones más complejas.

Artigue (1999) señala que es la discusión grupal la que revela que la estrategia inicial es errónea; el juego colectivo permite encontrar alguna solución en un tiempo razonable. Además, el trabajo conjunto promueve las regularidades en la dinámica de la situación que podrían no estar presentes si los estudiantes tuvieran que resolver el problema individualmente o en grupos pequeños.

Legrand (1997) enmarca esta experiencia dentro de la *Teoría de Situaciones*[45]. Desde esta visión, enseñar las Matemáticas consiste en introducir a los estudiantes en una problemática de cuestionamiento, de clarificación de problemas y de verificación de soluciones. Aprender Matemáticas consiste en adquirir una actitud de plantearse ciertas preguntas, de transformarlas en problemas y dotarse de herramientas de razonamiento que permitan seleccionar de las respuestas posibles aquéllas que sean suficientemente precisas, eficaces y ciertas para ser consideradas como soluciones.

Otros problemas fueron propuestos para que los estudiantes captaran la esencia del proceso integral a partir de nuevas situaciones. El estudio de las propiedades matemáticas de la integral se realizó sólo después de resolver estos problemas.

Los autores consideraron que la gran mayoría de los estudiantes había adquirido un nivel satisfactorio de comprensión del concepto de integral introducido por el método del debate científico.

Investigaciones más recientes utilizando modalidades del debate científico (Hitt y Borbón, 2004), basadas en el papel de las representaciones en la construcción del conocimiento matemático, muestran su gran efectividad para hacer ver a los sujetos en estudios las falsas concepciones que han desarrollado y a superarlas gracias a la discusión global y el conflicto socio-cognitivo.

1.3.5. APRENDIZAJE ALGORÍTMICO

Tall (1992a) identifica dos formas de actuar frente a los conflictos que surgen en el aprendizaje:

- Reconciliar el [conocimiento] nuevo y el antiguo mediante una re-construcción de una nueva estructura coherente de conocimiento.
- Mantener los elementos conflictivos en compartimientos separados y no dejar que sean evocados simultáneamente en la mente consciente.

Tall (1992a), pág. 2

[45] Cuyos fundamentos se describen en la Sección 2.3.

En el caso del Cálculo, el estudiante prefiere ejecutar ejercicios más relacionados con el álgebra y las rutinas fáciles de memorizar en lo relativo a la diferenciación e integración. Además, los ejemplos concretos dominan el aprendizaje y los estudiantes suelen usar argumentos que son útiles para casos particulares, pero no manejan argumentos globales.

Otras dificultades que lista son: imágenes mentales restringidas de funciones, dificultades al seleccionar y utilizar representaciones apropiadas y preferencia de los estudiantes por los métodos procedimentales frente al aprendizaje conceptual. Schoenfeld[46] también documenta el hecho de que, frente a tareas no rutinarias, los estudiantes (incluso los aparentemente brillantes) son incapaces de utilizar de forma eficiente sus recursos matemáticos.

Con respecto a los problemas no rutinarios, Vinner (1991) comenta:

> Cuando se propone a un estudiante una tarea en relación a un concepto matemático, muy a menudo el profesor supone que la definición es activada. Sin embargo, ésa no es la situación que se da en la práctica; usualmente el estudiante ignora la definición y responde de acuerdo a su esquema conceptual. Esta conducta muy a menudo conduce a la respuesta correcta; sólo los problemas no rutinarios motivan al individuo a tomar en cuenta algo más que su esquema conceptual y a apreciar que el uso de los hábitos de la vida diaria en contextos técnicos no es siempre apropiado.

Vinner (1991)

Benbachir y Zaki (2001) desarrollan una investigación con el objetivo de identificar los procedimientos que estudiantes en cursos de aprendizaje del Cálculo ponen en marcha en tareas de construcción de ejemplos y contraejemplos.

Tras desarrollar un estudio histórico, suponen que la construcción de ejemplos y contraejemplos permite una apropiación más fina y rica del concepto de función que la resultante de una enseñanza habitual. Esta construcción no sólo permite agrandar el campo de conocimientos sobre las funciones, sino también inducir una influencia en los razonamientos de los estudiantes sobre el análisis matemático de las funciones. Además, citan también el trabajo de Legrand[47] con el *debate científico*, que muestra bien el papel importante que juega la producción de contraejemplos en la construcción de un saber[48].

Su estudio se centra, esencialmente, en la identificación de los pasos que dan los estudiantes en situación de producción de ejemplos o contraejemplos. En los pasos esperados, además de los cambios de registros, interviene una variedad de actividades matemáticas que están lejos de movilizar solamente el conocimiento sobre el objeto "función" en juego en sus preguntas. Debido a que estos pasos no son generalmente identificables en producciones acabadas o en borradores, se decide colocar a los estudiantes en binomios (participan seis voluntarios durante el segundo semestre de Primer Curso universitario. La elección temporal pretende asegurar que los estudiantes han recibido una enseñanza suficiente para tratar las cuestiones propuestas), con el fin de favorecer los efectos de interacción y comunicación que permiten recoger mayores respuestas. El observador proponía a los dos miembros de cada binomio las preguntas una a una, precisando que cada una se daría por terminada cuando ambos se pusieran de acuerdo sobre la respuesta. Las intervenciones del observador pretenden evitar que éste pueda ser utilizado como fuente de saber.

Entre sus resultados destacamos la afirmación de que el recurso al registro gráfico ha podido representar un obstáculo en la resolución de algunos problemas. Sin embargo, aseveran que la construcción de contraejemplos puede venir favorecida por un cambio de registros.

---

46 En Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press. Citado en Artigue (2001).

47 Ver, en este mismo capítulo, la Sección 1.3.4.

48 Como ya se ha expuesto, en este tipo de enseñanza se cuestiona constantemente la veracidad de las conjeturas y el contraejemplo se convierte en un medio eficaz para refutar las que son falsas.

También proponen, en la enseñanza de conceptos ligados a las funciones reales de una variable real, el trabajo en grupo para la producción de contraejemplos a ciertas proposiciones falsas, fuentes de errores frecuentes. Su experimentación confirma que la petición de un contraejemplo para una proposición que los estudiantes consideran verdadera puede desencadenar una forma de conflicto favorable a un proceso de aprendizaje.

Más recientemente, Alcock (2004) desarrolla un estudio sobre el uso de ejemplos en la demostración. Su motivación parte de la situación generalmente reconocida de que los estudiantes a veces intentan probar un enunciado general por medios empíricos, comprobando un número de ejemplos para dar evidencia de su veracidad, en lugar de buscar una demostración deductiva. La caracterización que ofrece deriva de los análisis de entrevistas con matemáticos experimentados en la enseñanza de un curso llamado "*Introducción al Razonamiento Matemático*", diseñado para dar a los estudiantes una base antes de tomar los cursos sobre Análisis real y Álgebra abstracta. Como resultado de estos análisis se identificaron tres usos de objetos matemáticos como ejemplos en el razonamiento de los matemáticos, siendo frecuente la ausencia de su uso en los estudiantes:

- Comprensión de un enunciado: utilidad de utilizar objetos concretos para obtener una comprensión importante de un enunciado. Esta actividad, para comprender una definición, por ejemplo, no es típica del comportamiento de los estudiantes.
- Generación de un argumento: se utilizan objetos conocidos para crear otros nuevos o para generar una demostración. Se puede crear un ejemplo para mostrar que un enunciado es cierto en un caso particular, con la esperanza de encontrar ideas que sirvan en la demostración general, o usar un proceso menos heurístico mediante una versión informal de la argumentación indirecta usada en la demostración por contradicción (no se busca un contraejemplo, sino la razón por la que no se puede construir uno).
- Comprobación de un argumento: se usan objetos concretos para comprobar la corrección de deducciones particulares. El no empleo de este uso genera que muchos estudiantes regularmente escriban enunciados que son "obviamente erróneos", en el sentido de que podrían ser fácilmente refutados mediante estas comprobaciones.

Finalmente, se apuntan dos razones posibles por las que los estudiantes no usan ejemplos efectivamente en la construcción y evaluación de demostraciones. Una es la diferencia clave entre estudiantes novatos y sus profesores, que tienen acceso a una mayor experiencia con el uso de ejemplos. La otra es que los estudiantes pueden no estar habituados a pensar en los objetos a los que se aplican los enunciados, sino que generalmente piensan en las Matemáticas (incluida la demostración) como una tarea procedural en donde los enunciados algebraicos se disponen y manipulan según ciertas reglas.

Teniendo esto en cuenta, sería útil para los estudiantes mejorar su conocimiento sobre los ejemplos y para los profesores pensar en usos específicos de los ejemplos y enseñar a los estudiantes a utilizarlos más eficientemente.

Para finalizar esta Sección, conviene citar que recientemente muchos trabajos se preocupan de relacionar el trabajo matemático de los estudiantes con su dominio afectivo. Schloeglmann (2004), tras observar que muchos estudiantes que desarrollan tareas no rutinarias se equivocan en pasos "rutinarios", afirma que todos los procesos de resolución de problemas no rutinarios utilizan rutinas como constituyentes importantes (siendo muchas veces esenciales estas rutinas en la resolución general). Sin embargo, al ser las partes no rutinarias las más "desafiantes" y nuevas, atraen fuertemente la atención del resolutor sobre esta parte de la tarea.

Sin embargo, las partes rutinarias se evalúan como familiares y se destinan pocos recursos para ejecutarlas, lo que ocasiona con frecuencia errores. Este autor conjetura que, al contrario de lo que sucede con las tareas rutinarias en la vida cotidiana (se necesita muy poca atención para ejecutarlas libres de errores), parece que los algoritmos matemáticos y las rutinas cognitivas necesitan de más atención para ser ejecutadas libres de errores.

Furinghetti y Morselli (2004) analizan las respuestas de una estudiante universitaria a una cuestión algebraica en función no sólo de aptitudes cognitivas, sino también de sus emociones y creencias sobre la actividad matemática y de la forma en que las tres interactúan. En el caso de tareas no rutinarias, el estudiante ha de recorrer dos caminos: el cognitivo y el afectivo. El proceso de prueba es más complejo y el estudiante ha de controlar y movilizar unidades cognitivas, y conjeturan que el papel de las creencias puede ser un factor más importante en la ejecución de los estudiantes, más enraizadas que las emociones y actitudes. En muchas ocasiones, por ejemplo, los estudiantes, al enfrentarse a tareas no rutinarias, dan por hecho que tendrán dificultades y, en lugar de esforzarse en comprender el problema, parecen buscar estas dificultades; analizan el problema palabra a palabra, perdiendo el sentido general de la tarea. De este modo, el factor afectivo (baja confianza en uno mismo) se vuelve un factor cognitivo, pues influye en la forma en que se lee el texto. Estas actitudes tienden a anular la creatividad y a promover la reproducción de pasos aprendidos, que no suele ser suficiente para resolver este tipo de cuestiones.

1.3.6. RELACIONES ENTRE SERIES E INTEGRALES

El propósito del estudio de Bezuidenhout y Olivier (2000) consiste en obtener mayor información sobre la comprensión de los estudiantes de los conceptos fundamentales del Cálculo después de haberlos manejado en cursos de primer año. Estos dos autores llegaron a la conclusión, tras realizar su estudio, de que muchos estudiantes carecían de apropiadas concepciones de la integral.

En su trabajo parten de la premisa de que para comprender el concepto de integral son necesarios vínculos entre el conocimiento procedural y el conceptual relacionados con este concepto. Por ello, en su trabajo se centran en la comprensión de algunos aspectos conceptuales y procedimentales del concepto de integral.

En las preguntas de su cuestionario, entre otros, aparecen relacionadas las integrales definidas con la suma de series. Según ellos, el cálculo de una integral definida determinada requiere una concepción a nivel de objeto que permita al estudiante interpretar el límite de la suma de Riemann adecuada como dicha integral. En sus palabras:

> Ésta es una construcción que permite al estudiante pensar en la “*integral*” como un proceso límite y, por otro lado, tratar ese tipo de procesos límite como fundamentales para el concepto de integral. Comprender el significado de $\int_0^1 f(t)dt$ significa ser capaz de volver al proceso a partir del cual la concepción del objeto se origina.

Bezuidenhout y Olivier (2000), pág. 75

Su trabajo localiza e identifica algunos errores típicos debidos a falsas concepciones, o *misconceptions*, de estudiantes de primer curso de Universidad. Uno de estos errores se relaciona con el hecho de que los estudiantes no recibieron una instrucción formal en la interpretación y el uso de las sumas de Riemann; en algunos casos, utilizaban procesos incorrectos o generalizaciones inapropiadas para evaluar el límite de una suma de Riemann. Una de sus conclusiones en este aspecto es que los estudiantes carecían de concepciones apropiadas para abordar la expresión $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).\frac{1}{n}$, fundamental para la relación entre series e integrales en su propuesta.

1.3.7. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Durante los análisis de nuestras sesiones aparecen muchas dificultades de los estudiantes participantes con el concepto de función, lo que nos lleva a incluir esta sección. Gran parte de la comunidad de investigación educativa acepta que la comprensión de los estudiantes de un concepto influye su aprendizaje y comprensión de otros conceptos relacionados (Robert y Speer, 2001), por lo que un aprendizaje pobre del concepto de función afectará dramáticamente a los aprendizajes posteriores. Diversas investigaciones han mostrado también que lo que podrían parecer debilidades en la comprensión de conceptos del Cálculo pueden ser en realidad meras manifestaciones de concepciones preexistentes de conceptos relacionados.

Artigue (1995a) señala que se han detectado dificultades en los estudiantes para identificar lo que en realidad es una función. Las primeras investigaciones mostraron la ruptura entre las definiciones dadas por los estudiantes, por un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no-funciones dadas en registros diferentes. Estos criterios traducían una concepción de la noción de función que no se organizaba en torno a la definición, sino en relación con prototipos comunes encontrados (como la continuidad), de la asociación entre función y fórmula o de la asociación función-curva regular. Estos criterios conducían a rechazar ciertas funciones y a admitir objetos no funcionales. Además, tampoco había coherencia global, porque los criterios dependían fuertemente del registro de representación utilizado[49].

Sierpinska[50] también afirma que "*puede ser difícil para un individuo cuya experiencia sobre funciones se encuentra en términos de fórmulas y cálculos aceptar una definición que no implica estos atributos*".

Evangelidou *et al* (2004) realizan un estudio sobre las concepciones de estudiantes universitarios acerca del concepto de función, afirmando que muchos estudiantes no lo comprenden suficientemente. Afirman, además, que es necesario desarrollar más investigaciones sobre la comprensión y uso de funciones por los estudiantes universitarios, tratando de identificar sus dificultades y concepciones erróneas. Su trabajo considera tres aspectos diferentes para la metáfora didáctica empleada:

- La dimensión epistemológica, tal como se expresa en los textos históricos,
- La visión y creencias de los profesores de Matemáticas sobre lo que es una función,
- La dimensión didáctica, que trata del conocimiento de los estudiantes y las restricciones impuestas por el sistema educativo.

La consideración de estos aspectos hace que parezca natural que los estudiantes de la Educación Secundaria tengan dificultades conceptualizando la noción de función.

[49] Por ejemplo, la función $y = 4$ sería fácilmente rechazada si se presentaba en su forma algebraica debido a la asociación entre función y fórmula dependiente de x. Sin embargo, si se presentaba en su forma gráfica, era generalmente aceptada (por la asociación *recta* $\Rightarrow$ *función*).

[50] Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept, en *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (Harel, G. y Dubinsky, E., eds.), MAA nº25, The Mathematical Association of America, Washington, pp. 23-58 (citado en Robert y Speer, 2001).

Por un lado, el recorrido histórico hasta su formalización (y abstracción) ha presentado dificultades. Por otro lado, su comprensión no parece ser fácil debido a la diversidad de representaciones asociadas a este concepto y a las dificultades presentes en el proceso de articulación de sistemas de representación adecuados para la resolución de problemas. Sus preguntas de investigación principales son:

- ¿Cómo conciben y utilizan los estudiantes el concepto de función?
- ¿Cómo reconocen los estudiantes funciones en sus múltiples representaciones?

Utilizan un cuestionario que rellenan 154 estudiantes de Segundo Curso del Departamento de Educación y 10 estudiantes de Cuarto Curso del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chipre. En el cuestionario tuvieron que responder preguntas sobre reconocimiento de funciones dadas en varias representaciones (expresiones verbales, gráficas, diagramas, expresiones algebraicas) y se utilizaron funciones lineales, cuadráticas, discontinuas, a trozos y constantes. Además, se les pidió proporcionar una definición de función y dos ejemplos verbales de aplicaciones en situaciones de la vida real. Las tres tendencias que descubren sobre las ideas de los estudiantes del concepto "función" son:

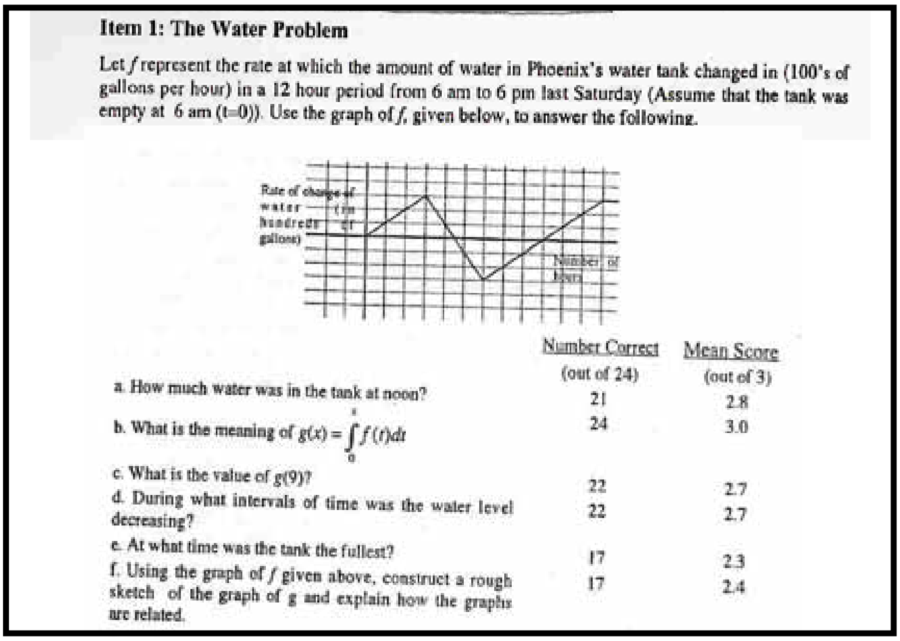
- Un gran porcentaje de estudiantes identificó una función con el concepto específico de "*función uno a uno*". Esta idea de unicidad es fuerte y se convierte en un obstáculo para comprender el concepto de función como algo más amplio.
- Relación analítica entre dos variables (tal como sucedió históricamente, inicialmente con Bernouilli y más claramente con Euler), evidente en la forma en que los estudiantes definen funciones y los ejemplos que dan.
- Se conecta la noción de "función" con un tipo de diagrama (cartesiano o una aplicación).

Por el contrario, al enfrentarse a expresiones algebraicas, no aparece una clara comprensión de la definición de función. De sus análisis afirman que la mayoría de los estudiantes parecen identificar las formas estereotípicas familiares de la enseñanza preuniversitaria como funciones. Esto provoca que se reconozca como función expresiones como $x^2 + y^2 = 25$ o que las gráficas de $y = 4/3$ y de $x = -3/2$ sean tratadas de la misma forma.

Una visión tan pobre del concepto de función (e, incluso, de tasa de variación) puede producir dificultades a los estudiantes en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (Carlson, Persson y Smith, 2003). Estos autores afirman que razonar sobre y con el Teorema Fundamental del Cálculo requiere acciones mentales de coordinación de la tasa de variación con la acumulación de la variable independiente de la función. Una de las habilidades de razonamiento fundamentales que destacan es la habilidad para ver una función como una entidad que acepta una entrada y produce una salida. También consideran de importancia la comprensión de que $F(x) = \int_a^x f(t).dt$ representa el área acumulada bajo la curva $f(x)$, si es positiva, desde a hasta x y de que el valor de $F(x)$ representa la variación total de F desde a hasta x.

Se preparó un diseño instruccional para mejorar la comprensión del Teorema Fundamental, con un pre-test (por medio de entrevistas) antes de la instrucción y un post-test después. Durante la instrucción se favoreció la discusión entre toda la clase, el trabajo en grupos y la exposición por parte del profesor. En el pre-test se desarrollaron ocho entrevistas clínicas por pares, en las que las preguntas pretendían explicitar el pensamiento de los estudiantes participantes. Una vez finalizada la instrucción, el post-test sugiere que la mayoría de los estudiantes desarrolló habilidades de razonamiento y una mayor comprensión de los aspectos notacionales sobre acumulación.

Entre los participantes del post-test, un 70% de los estudiantes respondió correctamente al ítem 1 (Figura 1.4), sugiriendo competencia en la coordinación entre la acumulación de la entrada de una función y la acumulación de la tasa de variación instantánea de la función una vez fijado el punto inicial *a* (en varias situaciones contextualizadas). Un 90% de estos estudiantes también dio respuestas correctas a los puntos que evaluaban la comprensión de los aspectos notacionales del Teorema Fundamental. Sin embargo, en general, los resultados correctos sobre la comprensión del enunciado del Teorema y sus relaciones apenas superan el 50%.



Item 1: The Water Problem

Let f represent the rate at which the amount of water in Phoenix's water tank changed in (100's of gallons per hour) in a 12 hour period from 6 am to 6 pm last Saturday (Assume that the tank was empty at 6 am (t=0)). Use the graph of f, given below, to answer the following.

	Number Correct (out of 24)	Mean Score (out of 3)
a. How much water was in the tank at noon?	21	2.8
b. What is the meaning of $g(x)=\int_0^x f(t)dt$	24	3.0
c. What is the value of $g(9)$?	22	2.7
d. During what intervals of time was the water level decreasing?	22	2.7
e. At what time was the tank the fullest?	17	2.3
f. Using the graph of f given above, construct a rough sketch of the graph of g and explain how the graphs are related.	17	2.4

Figura 1.4.

1.3.8. Conclusiones

Hemos realizado en este capítulo una revisión de algunos resultados “clásicos” y de otros recientes relativos a la visualización en el aprendizaje, a dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo y también algunas investigaciones donde se muestran resultados concernientes a la comprensión de la integral definida y la impropia por parte de los estudiantes.

A lo largo de nuestra Memoria rescataremos algunas de las observaciones aquí recogidas y trataremos también de relacionar nuestras conclusiones con los trabajos previos de otros autores, en particular los aquí mencionados.

Las características de nuestra investigación nos impiden ser más exhaustivos en nuestro análisis y recopilación de trabajos previos, aunque esperamos haber aportado una visión general del tipo de investigaciones que se han desarrollado hasta la actualidad sobre el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

Whatever topic and point of view may be, research in mathematics education entails theoretical and methodological choices on some core problems about the nature of mathematical knowledge with regard to all other kinds of knowledge.

Duval (2000), pág. 55

Este capítulo recoge los fundamentos teóricos bajo los que se realiza nuestra investigación.

En primer lugar, presentamos las bases de la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica y el papel que en esta teoría tienen el uso de ejemplos y contraejemplos, la transferencia y la resolución de problemas y cómo se interpretan los errores desde esta perspectiva.

Posteriormente, se describen los fundamentos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y los distintos niveles que ésta distingue (a-didáctico y didáctico), señalando la importancia del medio como componente interna esencial de la relación didáctica.

2.1. LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Concebimos el proceso de comprensión como un proceso que ocurre en la mente del estudiante y que se forma a partir de una secuencia de actividades de aprendizaje, que conllevan a su vez varios procesos mentales. Para entender mejor qué sucede exactamente es necesario un mayor conocimiento teórico de lo que ocurre en la mente del estudiante, además de provocar ciertas reacciones en él.

Los conceptos de esquema y representaciones externas e internas los podemos encontrar analizados y relacionados en la actualidad con aspectos teóricos como los sistemas semióticos de representación y sus implicaciones en la articulación entre representaciones internas. Una primera aclaración necesaria es la distinción entre distintos tipos de objetos. Duval (2004) señala los siguientes:

- Objetos físicos (podemos tocarlos, actuar en ellos).
- Objetos fenomenológicos (tamaño, color... No se pueden tocar, separar).
- Objetos del conocimiento (caracterizados por invariantes. Los hay en Física, Biología, Matemáticas...).

Duval (2000) afirma que "*no hay conocimiento sin representación*". Sin embargo, hay una brecha importante entre el conocimiento matemático y el conocimiento en otras ciencias (como pueden ser la Astronomía, la Física, la Biología o la Botánica). Los objetos de las Matemáticas **son** objetos del conocimiento (no tenemos ningún acceso perceptivo o instrumental a los objetos matemáticos, ni siquiera los más elementales. No podemos verlos, ni estudiarlos a través de un microscopio, ni tomar una fotografía de ellos) y, tal y como señala Duval (1993, 1995), consideramos que la distinción entre un objeto matemático y su representación es fundamental para la comprensión de las Matemáticas[51], pues los objetos del conocimiento no son accesibles a través de datos físicos ni evidencias sensoriales o instrumentales (Duval, 2004; Artigue, 1999). Por tanto, el uso de las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático es absolutamente necesario para conseguir obtener una comprensión de las Matemáticas. Pero los registros semióticos no tienen una mera función de exteriorización o comunicación de las representaciones mentales: son fundamentales para el funcionamiento cognitivo, para la conceptualización. Sin embargo, la enseñanza tiende a reducirlos al rol de exteriorización y comunicación[52].

Como consecuencia de lo anterior, una de las formas que existen de explicar la construcción de los conceptos matemáticos consiste en hacer uso de los registros de representación y promover las articulaciones entre las representaciones de esos registros, pues una de las ideas fundamentales es que las representaciones de los objetos matemáticos son parciales con respecto a lo que representan. Por tanto, contar con actividades de conversión en por lo menos dos registros de representación se vuelve una tarea fundamental para que las representaciones en juego, que por su naturaleza son complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión.

Desde el punto de vista de la resolución de problemas, cobra nuevamente una importancia enorme la construcción de una red de conocimiento que pueda permitir a los estudiantes interaccionar entre su conocimiento conceptual y el procedimental. Aquí, no estamos pensando en el camino directo que generalmente se sigue al resolver un ejercicio, sino en las características señaladas por los investigadores del *problem solving*. Por ejemplo, un aspecto que todavía está en desarrollo es el papel de la idea de transferencia en la resolución de problemas.

Además, en el nivel universitario se espera de los estudiantes la elaboración de pruebas no triviales y es necesario el uso de cierto formalismo para progresar. Recordemos, por otro lado, que en este nivel se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas que no son meras copias de los problemas que se les ha mostrado (Robert y Speer, 2001).

Interesados en los fenómenos ligados al aprendizaje de las Matemáticas, somos conscientes de la importancia y necesidad de apoyarnos en una teoría del aprendizaje para explicar estos fenómenos. En lo que sigue, expondremos la teoría del aprendizaje bajo la cual se ha realizado nuestra investigación.

[51] Lo cual da lugar a la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. En consecuencia: ¿cómo no van a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas los sujetos que están en el proceso de aprendizaje, si sólo se enfrentan a las representaciones semióticas? (Duval, 1993, 2004) Como ejemplo, Duval señala que estos conflictos comienzan temprano con los números, que acaban siendo identificados con dígitos y los sistemas numéricos utilizados (Duval, 2000).

[52] Las investigaciones, de hecho, tienden a mostrar que la enseñanza, cuando quiere ser sensible a la dimensión semiótica del trabajo matemático, permite superar dificultades, no importa cuán resistentes parezcan ser.

2.2. TEORÍA DE DUVAL SOBRE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

> *The main question about mathematics learning is: does mathematics understanding require specific ways of cognitive working in comparison with the other fields of knowledge? Or, from a phenomenological point of view, do visualization, language and conceptualisation work in mathematics in the same way as in other situations? If it is not the case, what kind of cognitive working is required in order to understand mathematical objects and processes, in order to become equally able to apply them, and how can any student master it?*
>
> Duval (2000), pág. 55

Cada vez más, las investigaciones muestran que el aprendizaje descansa, de forma decisiva, en la flexibilidad del funcionamiento matemático por medio de *articulaciones*[53] de puntos de vista, ya sea por medio de "registros de representación" o por "marcos de funcionamiento matemático". La conceptualización también aparece más dependiente de las herramientas concretas y simbólicas del trabajo matemático (Artigue, 1999). Duval (2000) afirma que para estudiar la complejidad del aprendizaje matemático hay que tener en cuenta también a los estudiantes y no solamente la complejidad epistemológica de los conceptos.

Antes de describir el marco teórico que diseña Duval (1993, 1995) mencionamos, en primer lugar, el trabajo de Skemp (1980) sobre la formación de conceptos. Aceptando que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y que para la formación de un concepto es necesario un cierto número de experiencias que compartan elementos comunes, pues solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a estos objetos, Skemp analiza el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático:

> ... Consideraremos cómo los conceptos se disponen reunidos para formar estructuras conceptuales, denominadas esquemas...
> [...]
> **Abstrayendo y clasificando**. [...] A un nivel más bajo, clasificamos cada vez que reconocemos un objeto como "uno que hemos visto antes". [...] Desde estas diversas entradas, abstraemos ciertas propiedades *in*variantes que persisten en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular presentación del objeto.
> [...] *Abstraer* es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes (en el sentido cotidiano, no en el matemático) entre nuestras experiencias. *Clasificar* significa reunir nuestras experiencias sobre la base de estas similitudes. [...]
> Un concepto requiere para su formación un cierto número de experiencias que tengan algo en común. [...]
> Un concepto es una idea [un objeto puramente mental].
>
> Skemp (1980), pp. 23-27

> Cada uno de éstos [conceptos], por su verdadera naturaleza, está incorporado en una estructura de otros conceptos. Cada uno de ellos [...] se deduce de otros conceptos, y contribuye a la formación de otros; por tanto, es parte de una jerarquía. [...]
> Un esquema tiene dos funciones principales. Integra conocimiento existente y es un instrumento mental para la adquisición de nuevo conocimiento. [...]
> *Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema apropiado.*
>
> Skemp (1980), pp. 41-50

[53] Este término se refiere a las conexiones entre una parte y el todo, o entre una parte y otra parte. A la vez, hace pensar tanto en el cambio para pasar de una parte a otra como en los medios técnicos que permiten hacer estas conexiones (Artigue, 1999, pág. 1379).

Sabiendo que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos, sino a través de sus representaciones semióticas, queda claro que es importante analizar el papel que juegan estas representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Con esta idea, las operaciones de clasificar y abstraer se realizarán a través de la manipulación de las representaciones semióticas del objeto matemático.

Es importante precisar que, aunque no exista una distinción clara entre muchos procesos de pensamiento matemático elemental y avanzado, quizá nos sirva como distintivo su complejidad y la forma de enfrentarse a ésta; las dos formas más importantes de enfrentarse a esta complejidad serían la representación y la abstracción (Dreyfus, 1991). En este sentido, es importante que las concepciones de los estudiantes integren diferentes representaciones (como la gráfica, numérica y algebraica). El estado ideal es que estas representaciones se complementen entre sí, integrando una sola representación del concepto, con lo que se llega a la abstracción; la no complementariedad de éstas puede ocasionar conflictos, como veremos más adelante en esta Sección y en la Sección 2.2.4.

Hiebert y Carpenter[54] profundizan en el fenómeno de la comprensión utilizando la idea de red, transformando así la idea de esquema de Piaget y Skemp:

> Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones.

Duval se ha interesado por los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y sobre los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, generando una nueva noción, que es la de **Registro de representación**. En primer lugar, Duval (2000) señala que cuando hablamos de "*representaciones*" es necesario considerar los siguientes cuatro aspectos:

1. *El sistema por el cual se produce la representación.* Cualquier representación se produce a través de un sistema particular. El contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación que se utiliza para su producción. El pensamiento humano requiere la movilización de varios sistemas de representación de producción y su coordinación.	Aparato físico (como una cámara).
	Una organización mental (como las imágenes visuales de la memoria).
	Un sistema semiótico (como varios lenguajes).
2. *La relación entre la representación y el objeto representado.* Hay dos tipos de sistemas de representación de producción.	Aparatos físicos y organizaciones *neurónicas* (imágenes físicas y mentales). La relación se basa en la acción de un objeto sobre el sistema (causalidad)
	Sistemas semióticos (palabras, símbolos, dibujos). La relación es sólo de denotación.

[54] En su artículo Learning and teaching with understanding (1992), en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grows, D., ed.), MacMillan Publishing Company, New York, pp. 65-97. Citado en Hitt (2001), pág. 169.

3. *La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica*. Hay dos tipos de representaciones.	Las que son una evocación de lo que ha sido realmente percibido, o podría serlo, y sus representaciones
	Las que lo son de objetos que no pueden ser percibidos (como los objetos matemáticos).
4. *La razón por la que el uso de la representación es necesario*.	Principalmente para comunicación.
	Para procesamiento (cómputo o expansión discursiva, anamorfosis, etc.).

Una definición de lo que entendemos por las representaciones semióticas, distinguiéndolas de las representaciones mentales, nos la da Duval (1993):

> Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado.
> Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento.
> Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

No se puede, sin embargo, proceder como si las representaciones semióticas estuvieran simplemente subordinadas a las representaciones mentales, ya que el desarrollo de las últimas depende de una interiorización de las primeras y que sólo las representaciones semióticas permiten realizar ciertas funciones cognitivas esenciales, como la de tratamiento[55]. El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación. Las actividades de semiosis y noesis aparecen como fundamentales desde su punto de vista[56]:

> Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis.
> [...] No hay noesis sin semiosis [...]. En la actividad matemática es esencial ya sea poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) en el transcurso de una misma gestión, o poder escoger un registro en lugar de otro. E, independientemente de la conveniencia del tratamiento, este recurso a varios registros parece incluso una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas. La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones.

Duval (1993)

Duval continúa profundizando sobre esta idea hasta llegar a caracterizar un registro de representación de la forma que sigue[57]:

[55] Que se define en las páginas siguientes.

[56] Toda semiosis puede ser considerada como una abstracción, al igual que la noesis. Para ciertos aspectos, se podría aceptar el término de "conceptualización".

[57] Duval (2004) afirma que hay dos tipos de transformaciones de representaciones en cualquier actividad matemática: las realizadas en el mismo registro (*tratamiento*) y las realizadas cambiando de registro (*conversión*). Puntualiza que ambas son fuentes distintas de incomprensiones en el aprendizaje de las Matemáticas (ver Sección 2.2.4.). Pero las más profundas y recurrentes en cada nivel del currículum vienen producidas en las actividades de conversión.

> Un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:
>
> 1) **La formación de una representación identificable** como una representación de un registro dado. [...] Esta formación implica una *selección* de rasgos y de datos en el contenido por representar. La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. [...] Esta formación debe respetar las reglas [...]. La función de estas reglas es asegurar, en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los tratamientos. *Son reglas de conformidad, no son reglas de producción efectiva de un sujeto*. Ello quiere decir que el conocimiento de reglas de conformidad no implica la competencia en la formación de representaciones, sino sólo en reconocerlas.
> 2) **El tratamiento** de una representación, que es la **transformación** de la representación **en el mismo registro donde ha sido formada**. El tratamiento es una transformación interna a un registro. [...] Existen reglas de tratamiento propias de cada registro.
> 3) **La conversión** de una representación, que es la **transformación** de la representación en una representación **de otro registro** en la que se conserva la totalidad o solamente una parte del significado de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida[58]. [...] *La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente de la del tratamiento.*
>
> Duval (1993)

Es claro que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, pues éstos no son directamente accesibles por la percepción o una experiencia intuitiva inmediata. Además, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizado. Duval enuncia que, al ser cada representación parcial con respecto a lo que representa, se debe considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto. Por otro lado, la adquisición del concepto en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático[59]. Desde este punto de vista, el concepto siempre estará en construcción.

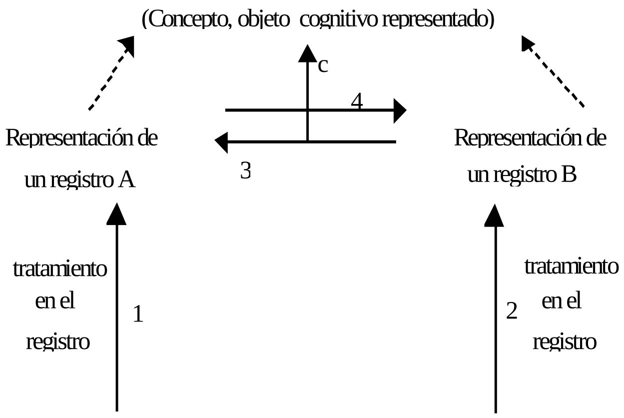
En forma esquemática, la caracterización de un registro de representación la podríamos representar como sigue:

[58] Como ejemplos, Duval plantea la ilustración (conversión de una representación lingüística en una figural), la traducción (conversión de una representación lingüística en una lengua dada en una representación lingüística de otra lengua) y la descripción (conversión de una representación no verbal en una representación lingüística). Además, señala, por ejemplo, que la escritura decimal, la escritura fraccionaria y la escritura con exponentes constituyen tres registros diferentes de representación de números.

[59] En concreto, en Duval (2000) aparecen las definiciones siguientes:

- *registro multifuncional*: utilizados en todos los campos de la cultura. Se utilizan también con motivos de comunicación y de procesamiento. Ofrecen un amplio rango de procesamientos variados. Así, el lenguaje natural se usa necesariamente en Matemáticas, pero no con el mismo funcionamiento que en la vida cotidiana. Dentro de estos registros, los procesamientos no se pueden realizar o cambiar de forma algorítmica.
- *registro monofuncional*: desarrollados para un tipo específico de procesamiento, con el propósito de realizar ejecuciones más potentes y menos costosas que las de los registros mutifuncionales. El procesamiento se vuelve técnico y el uso de signos y expresiones depende primero de su forma. El procesamiento técnico es formal, lo que explica por qué el procesamiento se puede expandir como algoritmos.

Duval afirma que la comprensión en Matemáticas requiere de la coordinación de al menos dos registros, de los que uno es multifuncional y el otro es monofuncional. Aprender Matemáticas implica tanto la incorporación de registros monofuncionales como la distinción de las posibles formas diferentes de trabajar en los registros multifuncionales. Pero esto no es todo: aprender Matemáticas implica su coordinación, o su descompartimentalización. De otro modo, la conversión entre representaciones no-congruentes se inhibe.



Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha *C* corresponde a lo que se denomina *comprensión integradora de una representación*: supone una coordinación entre dos registros. Las flechas discontinuas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

El aprendizaje matemático no consiste, pues, en una construcción de conceptos por los estudiantes, sino en la construcción de la arquitectura cognitiva del objeto epistémico. Lo que está en juego en la educación matemática a través de adquisiciones particulares de conceptos es la construcción de esta arquitectura, ya que crea futuras habilidades para posteriores aprendizajes y para mayor entendimiento global. Pero este aspecto no siempre se logra, pues la conciencia individual del estudiante, con sus creencias, evidencias e intereses, a menudo se ve confundida con el trabajo en procesos de pensamiento. Duval señala que de las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, sólo las dos primeras (formación y tratamiento) son tomadas en cuenta en la enseñanza tradicional, tanto en la organización de secuencias de aprendizaje como en la construcción de cuestionarios de evaluación. Algunas consideraciones generales en la enseñanza tradicional, según él, son que:

- La conversión de las representaciones resultaría por sí misma desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre las representaciones[60] (por ejemplo, construir una gráfica o escribir una ecuación y sustituir en ella los valores numéricos de las variables).
- La conversión no tiene importancia real alguna para la comprensión de los objetos o de los contenidos conceptuales representados, puesto que su resultado se limita a un cambio de registro.

Sin embargo, en una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización. De este modo, si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, los aprendizajes básicos en la Matemática no pueden apostar sólo por la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino que también deben apostar por la coordinación de los diferentes registros de representación movilizados de manera necesaria para estos tratamientos o para esta comprensión. En general, la enseñanza de las Matemáticas se organiza como si la coordinación de los diferentes registros de representaciones introducidos o utilizados se efectuara rápida y espontáneamente, como si los problemas y los costos ligados no existieran. Esto a pesar de que varias investigaciones enfatizan la importancia

[60] Sin embargo, como se señala en la Sección 1.3.3., Calvo (1997) afirma que la habilidad de visualizar y representar diferentes representaciones de un concepto no es algo que el estudiante realice automáticamente, sino que debe ser enseñado.

del cambio de registros en el aprendizaje de nociones tales como funciones o números reales. Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los estudiantes organizar mejor su conocimiento. Esto se considera una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje (Robert y Speer, 2001).

Además, aparecen motivos más profundos para la no comprensión (Duval, 2000). Cuando se cambia de sistema semiótico, el contenido de la representación cambia, mientras que el objeto denotado permanece invariante. Pero, como los objetos matemáticos no pueden ser identificados con ninguna de sus representaciones, muchos estudiantes no pueden discriminar entre el contenido de la representación y el objeto representado: para ellos ¡los objetos cambian cuando se cambia la representación![61]

Es evidente que esta falta de consideración de la coordinación de registros no es por azar o por negligencia. La casi ausencia de reglas que pudieran favorecer la actividad cognitiva de conversión podría bastar para explicarlo. Además, no es seguro que proponer ejercicios locales de conversión permita favorecer esta coordinación. Por tanto, un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis debe colocar a los estudiantes en condiciones que permitan esta toma de conciencia más global y, para ello, se les debe presentar tareas específicas.

En esta perspectiva, tres tipos de tareas extremadamente diferentes parecen imponerse: el primer tipo concierne a la aprehensión de las representaciones semióticas; el segundo, al aprendizaje de los tratamientos propios de una cierta categoría de registros; y el tercero se refiere al modo de producción de representaciones complejas.

Citamos, por último, el trabajo de Richard (2004) sobre el uso del registro gráfico para el razonamiento de los estudiantes[62]. En particular, su trabajo plantea la cuestión de la legitimización del razonamiento matemático en la expresión escrita que considera conjuntamente las palabras, las notaciones algebraicas y, particularmente, el empleo de otros registros de representación semiótica en Matemáticas[63]; se funda en la constitución *multirregistro* de la representación y en la integración del razonamiento en la actividad cognitiva que se desarrolla al realizar una tarea coordinando sistemas de representación complementarios. Su trabajo se apoya en la afirmación de que el uso conjunto de varios registros en clase de Matemáticas no es un artificio pedagógico desligado del cuadro epistemológico que les ha dado origen.

Este trabajo toma en cuenta la idea de *expansión gráfica*, que no se contradice con la de *aprehensión operatoria*, sino que es complementaria en el sentido de que si, generalmente, es necesario introducir una situación de resolución de problemas o de validación con la ayuda de un texto (que puede incluir grafías algebraicas), es porque el registro figural no es una lengua; contrariamente a lo que sucede con los enunciados completos del discurso, el registro figural no permite los pasos de la narración, los comentarios o la argumentación.

[61] Duval señala que, en cualquier nivel y entre muchos estudiantes, se puede observar la inhabilidad de convertir una representación de un sistema semiótico en una representación del mismo objeto en otro sistema, como si las dos representaciones se refirieran a dos objetos distintos. Esta dificultad subyace a las dificultades de transferencia de conocimiento y también a las dificultades para traducir enunciados verbales de un problema en datos numéricos o simbólicos relevantes para la resolución de problemas.

[62] Su trabajo admite la pluralidad del proceso cognitivo por el que se forma un concepto (reconocida por Gray y Tall), lo que le lleva a considerar los conceptos figurales como *proceptos* geométricos. Incluso si un *procepto* geométrico es coherente en relación a la situación en la que interviene, puede no tener coherencia global en la estructura cognitiva de la persona que lo pone en funcionamiento.

[63] Añade, por otro lado, que las nuevas posibilidades de representación generadas por las calculadoras gráficas y los programas de geometría dinámica, principalmente con la interacción y la representación del movimiento, reclaman una revisión de las relaciones tradicionales entre los registros gráficos y el razonamiento.

De esta forma, cuando un estudiante pasa de un enunciado a un dibujo, o de un dibujo a un texto, la coordinación entre los registros discursivo y figural supone una actividad cognitiva de conversión que remite al mismo objeto. Richard muestra que para suscitar o justificar ciertos pasos de su razonamiento, un estudiante puede introducir un dibujo o una tira dibujada en la estructura discursiva de su prueba. De forma general, un estudiante procede en tres fases: construcción de un dibujo en un borrador, establecimiento de una conjetura y posterior redacción de una prueba en limpio. La problemática de la construcción es a la vez semiótica y cognitiva. A este problema de tratamiento semiótico y cognitivo para establecer una conjetura se añade el de encontrar un medio de comunicar esta conjetura y de explicarla en la redacción en limpio. La prueba escrita definitiva no permite, por tanto, examinar las relaciones sostenidas entre los distintos registros movilizados y el razonamiento subyacente.

Mediante ejemplos de trabajos de estudiantes, muestra los beneficios estructurales y funcionales que ofrecen los registros gráficos en la constitución de auténticos pasos de razonamiento, aunque a veces comporte riesgos en la comunicación *autor* $\rightarrow$ *lector*. La *inferencia figural* sería, entonces, el paso de razonamiento discursivo-gráfico que modifica el valor epistémico, semántico o teórico de la consecuencia discursiva en un razanomiento; la *inferencia figural* fuerza la coordinación entre registros en la realización de un paso de razonamiento estructurado que no necesita, además, movilizar toda la artillería de la notación asociada a los procesos subyacentes a las cuestiones planteadas.

2.2.1. IMPORTANCIA DEL USO DE EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

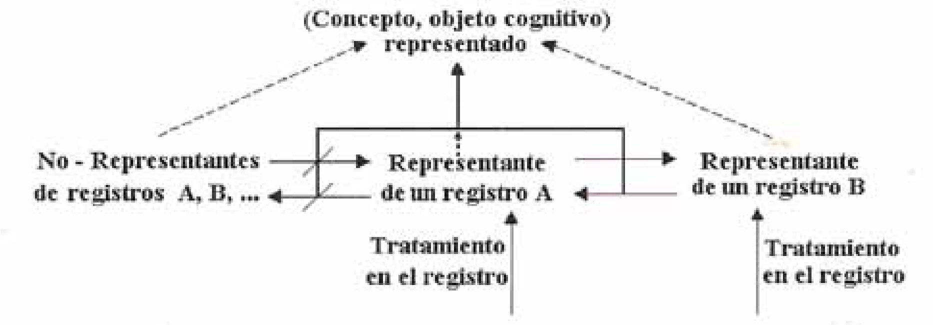
La historia de las Matemáticas muestra que los contraejemplos han jugado un papel importante en la construcción misma de conceptos ligados a las funciones. De este hecho, la construcción de ejemplos y contraejemplos es una forma de actividad que conviene desarrollar en la enseñanza del Cálculo en los primeros ciclos universitarios (Benbachir y Zaki, 2001).

Analizando el trabajo de Duval, Hitt (2000a, 2000b) considera que no sólo son importantes las tareas de transformación dentro de un registro de representación y los de conversión entre registros, sino que también aparece como importante la confrontación entre ejemplos y contraejemplos[64]. Selden y Selden (1998) afirman, por su parte, que el examen de ejemplos y no-ejemplos puede ayudar a los estudiantes a comprender las definiciones[65]. Para ayudar al aprendiz en la abstracción de un concepto más general tratado a través de ejemplos son necesarios unos "*organizadores genéricos*"; por lo general, el estudiante tiende a construir *prototipos* de los conceptos a los que se enfrenta durante su aprendizaje. Es en este sentido que se debe tomar en cuenta el uso de ejemplos y contraejemplos en el aprendizaje de los conceptos. Un diagrama que integra lo anterior sería el siguiente:

---

[64] Apoyándose en los trabajos de Tall y Thomas (1989). Versatile Learning and the Computer. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (2), pp. 117-125. y de Bakar y Tall (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs, *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME15), Assisi (Italia), vol. 1, pp. 104-111.

[65] En esta dirección, Skemp (1980) afirma que "*los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos*" (pág. 36). Sin embargo, la mayoría de los libros de texto violan este principio y los nuevos temas se introducen no a base de ejemplos, sino por definiciones "*de la más admirada brevedad y exactitud para el profesor (que ya posee los conceptos a los cuales se refieren), pero ininteligibles para el estudiante*". Bajo esta visión, un buen profesor ha de ayudar intuitivamente a construir y comprender una definición con ejemplos (tarea ardua, pues los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman el concepto, pero no otras).



Una gran proporción de los estudiantes parece capaz de encontrar soluciones correctas a preguntas de test y exámenes recurriendo para ello a pasos y procedimientos familiares; sin embargo, no tienen una comprensión conceptual profunda de los teoremas subyacentes y, a menudo, tienen concepciones erróneas.

La creación de ejemplos y contraejemplos no es ni algorítmica ni procedural y requiere de un pensamiento matemático más flexible y dinámico que, a menudo, no se enseña en las escuelas. El hecho de que se pregunte a un estudiante por un ejemplo puede ser desconcertante; los estudiantes no han aprendido previamente algoritmos para ello. La mayoría de los estudiantes están acostumbrados a concentrarse en técnicas, manipulaciones y procedimientos familiares[66] y no ponen mucha atención a los conceptos, condiciones de los teoremas, propiedades de las funciones, al razonamiento y la justificación, están acostumbrados a confiar en la tecnología ("*lo dice la calculadora*") y a veces carecen de un pensamiento lógico y una comprensión conceptual. De hecho, la táctica general para generar ejemplos consiste en "ensayo y error" y muchos encuentran muy difícil el hacer las elecciones necesarias. Por otro lado, muy pocos estudiantes producen "ejemplos triviales"[67].

Sin embargo, la responsabilidad de esta situación no recae únicamente en los estudiantes. Muchas veces, los cursos de Matemáticas, especialmente en niveles pre-universitarios, se desarrollan de forma que los casos especiales se evitan y los estudiantes sólo manejan funciones "bonitas" y "buenos" ejemplos. Esta tendencia puede crear muchas falsas concepciones[68] que se pueden explicar por medio del *principio de extensión* de Tall (1991b): "*Si un individuo trabaja en un contexto restringido en el que todos los ejemplos que se consideran tienen una cierta propiedad, entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asume las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos*".

Watson y Mason (2002) también afirman que el aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas (de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse). Informan que la solicitud de ejemplos que satisfagan ciertas restricciones puede alentar a los estudiantes a extender su pensamiento más allá de los ejemplos "típicos". Se ve una gran fuerza en su efectividad como estrategia de enseñanza cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva definición. Además,

---

[66] Ver los comentarios de Tall (1992a) en la Sección 1.3.5.

[67] Selden y Selden (1998) citan el caso del número 170000 como ejemplo trivial de número de 6 cifras divisible por 17 o la función $y = -2$ como una función que pase por (3, -2). Muy pocos estudiantes piensan en estos ejemplos cuando se les pregunta. Esto puede deberse a que estos ejemplos no se ven como prototípicos (pues se espera de una función que contenga también a la variable "*x*" y de un número de 6 cifras que tenga una variedad de dígitos).

[68] Desafortunadamente, algunas veces estas concepciones erróneas vienen provocadas por errores e imprecisiones matemáticas en los mismos libros de texto (Klymchuk, 2001).

proponen grupos de tareas que requieran que los estudiantes generen ejemplos con combinaciones dadas de propiedades. Otra posibilidad implicaría dar una lista de objetos y propiedades y preguntar a los estudiantes que decidan qué propiedades aplicar a cada objeto.

Dahlberg y Housman (citado en Selden y Selden, 1998) sugieren que puede ser beneficioso para los estudiantes el hecho de presentarles los nuevos conceptos pidiéndoles que sean ellos los que generen sus propios ejemplos, o pidiéndoles que decidan si los candidatos ofrecidos por el profesor son ejemplos o no-ejemplos, antes de enseñarles con ejemplos y explicaciones. Sin embargo, algunos estudiantes se resistieron a implicarse tanto en la generación de ejemplos como en su uso (algo no muy extraño, pues la mayoría de trabajos de investigación señala que los estudiantes encuentran muy distintas de sus clases usuales aquéllas en las que se dan ejemplos y explicaciones). Esto muestra que muchos estudiantes muestran incertidumbre a la hora de proceder cuando se les piden ejemplos y experimentan problemas a la hora de tomar elecciones en Matemáticas. Una posible medida para aliviar esto podría ser que los profesores de todos los niveles asignaran más problemas del tipo "*dame un ejemplo*".

En un estudio donde participaron más de 600 estudiantes de 10 universidades de diferentes países[69], se les preguntó sobre sus actitudes hacia el método del uso de contraejemplos para eliminar concepciones erróneas y obtener una comprensión conceptual más profunda. El principal objetivo del estudio era comprobar las suposiciones de los investigadores sobre cuán efectivo es el uso de contraejemplos para una comprensión conceptual más profunda, eliminando con ellos algunas falsas concepciones de los estudiantes y desarrollando un entorno de aprendizaje creativo en la enseñanza del Cálculo a nivel universitario. Su marco teórico se basó en la noción de Piaget de conflicto cognitivo y algunos trabajos de otros autores que mostraban que el conflicto puede ser más efectivo que la instrucción directa. La gran mayoría de los participantes contestó que el método es muy efectivo e hizo el aprendizaje de las matemáticas más estimulante, interesante y creativo. Comentaron también que el uso de contraejemplos ayuda a comprender mejor los conceptos, prevenir errores en el futuro, desarrollar un pensamiento lógico y crítico y a hacer más activa su participación en las lecciones.

Durante la instrucción, fueron los propios estudiantes, y *no* los profesores, quienes debían crear y mostrar contraejemplos a falsos enunciados. Para la mayoría de estudiantes este tipo de actividad era completamente nueva, estimulante e incluso creó incomodidad psicológica y conflictos. Al principio, algunos estudiantes no podían ver la diferencia entre "probar" que un enunciado es correcto por un ejemplo[70] y probar su falsedad con un contraejemplo, lo que está de acuerdo con lo expresado por Selden y Selden (1998): "*Los estudiantes bastante a menudo no pueden ver un simple contraejemplo como prueba de la falsedad de una conjetura. Esto puede suceder cuando un contraejemplo se percibe como 'el único' que existe, en vez de ser visto como genérico*[71]". Por esta razón, los autores del estudio consideran más productivo en la enseñanza no usar casos patológicos, sino utilizar enunciados falsos dentro del conocimiento de los estudiantes y relacionados, a menudo, con sus concepciones incorrectas más comunes.

En nuestra situación, tal como se ha explicado, nos preocupamos por las tareas de transformación y de conversión entre los registros algebraico y gráfico, ya que estamos

[69] En este estudio participaron nuestros estudiantes, evaluando el uso de ejemplos y contraejemplos en el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica. Véase Gruenwald y Klymchuk (2002, 2003). Las respuestas de nuestros estudiantes se analizan en la Sección 5.4.2. de esta Memoria.

[70] Véase Alcock (2004), citada en la Sección 1.3.5.

[71] Por ejemplo, a veces el número $\sqrt{2}$ se considera el único número irracional, o $|x|$ se percibe como la única función continua y no derivable.

preocupados por la falta de interpretación visual de muchas cuestiones relativas a las integrales impropias. También hemos presentado a los estudiantes algunos ejemplos paradójicos y contraejemplos de algunas situaciones intuitivas.

Tenemos en cuenta que, tal como señala Maschietto (2001), el recurso a una gráfica a menudo no se considera como una prueba de pleno derecho; el estatus institucional de las gráficas obliga a completar, generalmente, un contraejemplo gráfico con una prueba analítica, por lo que se tratará de devolver su estatus matemático al registro gráfico.

2.2.2. EL PAPEL DE LA TRANSFERENCIA

Entre las aportaciones que se han hecho a la teoría de Duval mencionamos las de Hiebert y Lefevre[72], que definen las nociones de *conocimiento conceptual y procedimental*:

> Conocimiento conceptual es caracterizado claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento.
> Conocimiento procedimental es construido por dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico, de las matemáticas. La otra parte consiste de algoritmos, o reglas, para completar tareas matemáticas... En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste de reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

El conocimiento conceptual no puede aprenderse sin significado. Sin embargo, el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Ambos conocimientos están relacionados, de forma tal que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que:

a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan,
b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas,
c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente.

Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otro lado, también el conocimiento conceptual se beneficia del procedimental, ya que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y el uso de procedimientos puede promover el enriquecimiento de los conceptos que se estén desarrollando.

A pesar de la importancia de estos conocimientos, los primeros trabajos de Duval no mencionan los aspectos relativos al papel de las representaciones en la resolución de problemas. Bajo estos aspectos teóricos, cobra gran importancia la noción de transferencia, que se muestra esencial en el terreno de la resolución de problemas, pues "*las situaciones de cada problema en*

[72] En su trabajo Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis (1986), en *Conceptual and Procedural Knowledge. The Case of Mathematics* (Hiebert, J., ed.), Lawrence Erlbaum, Associates Publishers, pp. 1-28. Citado en Hitt (2000a).

las que los estudiantes se comprometen influyen en la naturaleza de las representaciones internas y sus conexiones a otras representaciones" (Hiebert y Carpenter[73]).

Sobre este punto, Schoenfeld[74] se plantea cómo encontrar sentido a las maneras en las que la gente usa su conocimiento en circunstancias diferentes de aquéllas en que éste fue adquirido. Él plantea que las transferencias son indispensables en nuestra vida, que necesitamos adaptar lo que sabemos a circunstancias diferentes a las que originaron este conocimiento:

> La transferencia está en todos lados (es *ubiquitous*). No podríamos sobrevivir si no fuéramos capaces de adaptar lo que sabemos a circunstancias que difieren, al menos en cierto grado, de las circunstancias en las que se aprendió... El punto clave es deducir qué transferencias se dieron, sobre qué base y cómo y por qué esas conexiones a veces son productivas.

Para esta tarea, y enriquecer el aprendizaje, ideamos algunas preguntas donde se utilizan expresamente conocimientos anteriores, pero en un contexto nuevo. También pensamos que el uso de transferencias, además de conjugar al menos dos sistemas de representación, es imprescindible para que el estudiante llegue a comprender los conceptos relativos a la integración impropia. Ya sabemos de algunas dificultades, obstáculos y errores asociados a la noción de límite[75]; creemos que algunos de éstos se hacen presentes cuando el estudiante maneja integrales impropias y que sólo llega, en general, a concebir este proceso como un ente estático. Quizá por eso, recurrir al conocimiento relativo a series pueda ser de ayuda para dinamizar estas concepciones.

Poirier (2001) señala que algunas teorías conductistas del aprendizaje sostienen que el aprendizaje es el resultado de una interacción entre el sujeto que aprende y su entorno (lo que sostiene una visión absoluta de la Matemática y no toma en cuenta las concepciones previas de los estudiantes). Algunas limitaciones de esta concepción son que el estudiante que logra resolver todas las tareas intermedias de un problema no sabrá, necesariamente, resolver la totalidad de la tarea. E, incluso si lo consigue, no habrá comprendido, necesariamente, la materia en estudio. Esta laguna será perceptible, entre otras, en el momento de la transferencia o de la generalización en otros contextos.

2.2.3. La resolución de problemas

Como consecuencia de lo anterior, no basta con proponer actividades de conversión para pasar de una representación de un sistema de representación a otra representación de otro sistema para que un estudiante, de manera natural, construya ese puente (articulación) entre representaciones. Sin embargo, la habilidad de cambiar de registro es fundamental en situaciones de resolución de problemas, ya sea porque otra presentación de los datos encaja mejor con un modelo ya conocido, o porque se deben poner en juego dos registros, como figuras y lengua materna.

En cuanto al aprendizaje de la demostración, Duval (2000) afirma que es aquí donde aparece claramente la alternativa entre los objetos y conceptos matemáticos y los procesos de pensamiento implicados, siendo la demostración uno de los tópicos más difíciles en la educación matemática. Esto se debe en gran medida a que las formas de mostrar por qué una proposición es

---

[73] De nuevo en su artículo *Learning and teaching with understanding* (1992), véase la nota 54. Citado en Hitt (2001).

[74] En Schoenfeld, A. (1999). Looking Towards the 21st Century: Challenges of Educational Theory and Practice. *Educational Researcher,* 28 (7), pp. 4-14. Citado en Hitt (2001).

[75] Consultar, por ejemplo, Tall (1992a y 1992b).

cierta no son las mismas para los teoremas matemáticos que para las sentencias sobre fenómenos del mundo externo. Se podría enfatizar la necesidad de proveer no uno, sino varios métodos de prueba, o de confrontar a los estudiantes con contextos ricos epistemológicamente (como problemas físicos). Pero lo que realmente importa no es sólo llegar a comprender por qué tal proposición puede ser cierta, sino comprender cómo funciona la demostración en Matemáticas y obtener los procesos de pensamiento implicados en la demostración.

Un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones. Desde nuestra orientación teórica, el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, las representaciones están en el corazón mismo de la actividad matemática. Además, la articulación de diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones tiene que ver con la transferencia. La estructura de redes internas de conocimiento es quien define el potencial para realizar transferencias.

Es por esto que Hitt (2000a) afirma que es en la resolución de problemas donde se pone a prueba todo el conocimiento del estudiante. Por ejemplo, es posible que éste haya construido dos esquemas que son incompatibles y cuando esté frente a una tarea compleja, resurjan esas concepciones mal formadas produciendo un mal desempeño. En este sentido, la instrucción jugará un papel importante en la construcción de un esquema más apropiado.

Las incoherencias existentes entre un esquema y el otro son conflictos internos al individuo que tendrá que resolver poco a poco. Algunos esquemas que tienen que ver con la noción de obstáculo epistemológico y que permitan sobrepasarlo serán más difíciles de construir. Una construcción correcta conlleva una red de conocimientos más amplia y coherente que opaca la vieja construcción (en el sentido de que esta nueva construcción puede ser más fácil de recordar por la amplitud de su red). Tal amplitud tendrá que ver también con la articulación entre representaciones de un concepto. Sin embargo, esto no quiere decir que el otro esquema desaparezca totalmente. Además, no es fácil poder detectar cuándo un individuo se ha percatado de una incoherencia y la ha resuelto adecuadamente.

En nuestra aproximación teórica se reconoce el papel activo jugado por el estudiante en su aprendizaje. El estudiante que toma una parte activa en su aprendizaje decodifica y analiza una situación a partir de las representaciones, concepciones y modelos que ha desarrollado previamente. Estas representaciones desarrolladas por el estudiante se forman de imágenes mentales, de técnicas de resolución, de procedimientos y de algoritmos que provienen, en parte, de los aprendizajes anteriores. Así, si el aprendizaje reposa sobre conocimientos anteriores, puede darse que una concepción dada sea insuficiente o inadecuada en un nuevo contexto. En este sentido, Bachelard[76] afirma: "*Error, no eres un mal* [...]. *Conocemos contra un conocimiento anterior*".

Según lo expuesto, el conocimiento pasa de un estado de equilibrio a otro a través de unas fases transitorias en el curso de las cuales los conocimientos anteriores son cuestionados, lo que provoca un estado de desequilibrio. ¿Pero qué actividades plantear para provocar estas fases de desequilibrio? Se podrá, por ejemplo, presentar al estudiante problemas que le colocarán delante de un conflicto. Para ello, se elegirán problemas para los cuales los conocimientos del estudiante sean insuficientes, o se recurrirá al conflicto cognitivo: se le presentará problemas cuyas soluciones entren en contradicción con su anticipación del resultado, basada en sus

[76] Bachelard, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique,* Paris, Librairie philosophique J. Vrin. Citado en Poirier (2001).

concepciones. Las situaciones que favorecen un conflicto tal se denominan "situaciones-problemas".

Poirier (2001) plantea realizar estas actividades reconociendo la importancia de las interacciones en la clase, es decir, con una perspectiva socioconstructivista[77]. De esta forma, "*el estudiante es llevado a ajustar su forma de proceder a la del otro, durante la misma realización de la tarea, así como a explicar su forma de actuar o su estrategia, lo que le lleva a precisar su pensamiento. Confrontado a diversas formas de proceder, reestructura progresivamente su pensamiento y refina sus métodos de trabajo*". Obviamente, la cuestión que se plantea entonces para el enseñante es la de saber cómo llevar al estudiante a pasar de una concepción inicial a una nueva concepción sobre una noción dada.

Pian[78] explora las relaciones entre la naturaleza de las tareas propuestas a los estudiantes y el éxito de éstos en su resolución. Define para ello tres niveles de tareas:

Técnico	Se refiere a situaciones donde se pide a los estudiantes aplicar definiciones, propiedades y teoremas directamente. Las tareas en este nivel también implican el uso de lenguaje formal hasta el grado apropiado al nivel escolar del estudiante.	Para $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y $x \geq 0$, sea $u_p(x) = x.e^{-px}$. Probar que $\Sigma u_p(x)$ converge puntualmente para todo $x \in [0, +\infty)$.
Movilizable	Se refiere a una forma más amplia de aplicar conocimiento matemático. La tarea no es de aplicación directa: se necesitan varios pasos, o hay que transformar o reconocer algo para aplicar la propiedad o teorema necesarios.	En el ejercicio anterior, probar que $\forall\ a > 0$, $\Sigma u_p(x)$ converge uniformemente en $[a, +\infty)$.
Disponible	Se refiere a la habilidad de resolver problemas sin pistas o contextos, dar contraejemplos, cambiar métodos, utilizar conocimiento de otros campos matemáticos.	Estudiar (sin utilizar la integral de Lebesgue): $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left({}^{2}\!/_{x} + 1 \right)^n dx$.

Por supuesto, estos niveles están relacionados: dependen del nivel de estudio y también de la experiencia de los estudiantes. Pian concluye que si es necesaria alguna adaptación de una tarea para resolverla (esto es, si la tarea se presenta en el nivel movilizable o disponible, en lugar del nivel técnico), más de la mitad de los estudiantes no podrá resolverla. Esto es consistente con una percepción general por parte de las Facultades de Matemáticas de que los estudiantes, a menudo, son capaces de resolver ejercicios "imitativos", pero no problemas que requieran transformación y reformulación.

Para construir nuevos conocimientos, es necesario volver a poner en duda el saber adquirido. El estudiante debe darse cuenta de que sus conocimientos iniciales son insuficientes. Y una de las mejores formas de llegar a la puesta en duda del saber adquirido es la resolución de problemas:

---

[77] Artigue (1999 y 2001), después de analizar la actividad de Debate Científico que describimos en la Sección 1.3.4., remarca que la eficiencia de la actividad no sólo está ligada a las características del problema elegido, sino que depende enormemente del tipo de escenario desarrollado para organizar el encuentro de los estudiantes con esta nueva faceta del concepto de integral. De forma crucial, este escenario participa del carácter social de los procesos de aprendizaje. Es a través de la discusión grupal que la estrategia inicial se invalida y es el juego colectivo el que permite encontrar una solución en un tiempo razonable y el que promueve algunas regularidades en la dinámica de la situación, que no se podrían asegurar si los estudiantes se enfrentaran al mismo problema de forma individual o en pequeños grupos. Tampoco queda duda de que el efecto sería distinto si el profesor simplemente presentara este ejemplo particular durante una sesión de clase.

[78] Citado en Robert y Speer (2001). Sin embargo, no aparece en las referencias de su artículo.

> Si no hay problema a resolver, desafío a superar, no habrá ninguna motivación para construir nuevos conocimientos.

Poirier (2001), pág. 5

Si la resolución de problemas se encuentra en el núcleo de la actividad de los matemáticos, ha de ser también central en el aprendizaje y constituye una competencia importante a desarrollar.

Sin embargo, es obvio que a través de prácticas docentes estándar, los estudiantes obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar (Artigue, 2001), pero nada más. Por ejemplo, si se plantea a los estudiantes cuestiones de modelización para que decidan por sí mismos si un problema requiere un proceso integral para su resolución, se quedan estancados por completo o basan sus respuestas en "pistas" lingüísticas, en caso de haberlas, que han aprendido a percibir en las versiones estándar de tales tareas. La mayoría de los estudiantes piensa que la forma más segura de enfrentarse con éxito al Cálculo no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. No hay que interpretar esto como una especie de fatalidad cognitiva; simplemente se observan las formas económicas de adaptación de nuestros estudiantes a prácticas docentes inadecuadas.

Las características de un "buen" problema (Poirier, 2001) son que, para empezar, hay un objetivo a lograr, una solución que encontrar, pero esta solución no se encuentra directamente; ésta no fluye de la aplicación de una técnica o de un simple extensor, sino de una búsqueda de la solución. Detrás de esta idea se esconde la de un desafío razonable: para despertar el interés de los estudiantes, el problema a resolver debe presentar un desafío ni demasiado simple ni demasiado complejo[79]:

> Es necesario poner al estudiante en una situación problema a la vez accesible y difícil, que pueda llevar a término sin conocer de entrada el recorrido ni disponer por adelantado de la solución. Es cuando el estudiante experimenta el sentimiento de que puede llegar, que entrevé una hipótesis pero que no alcanza la solución aún y que queda algo por hacer, que se pone en camino para abrir el secreto.

Meirieu, P. (1991). *Apprendre... oui, mais comment*, col. "Pédagogies", Paris, ESF Éditeur, pág. 93. Citado en Poirier (2001)

Estas definiciones que damos hacen aparecer la naturaleza no rutinaria de la resolución de problemas, así como la relatividad del problema (pues no para todos los estudiantes es igual el grado de dificultad). En González-Martín y Camacho (2004a) mencionamos que no hemos encontrado una definición precisa de '*pregunta no rutinaria*' en la literatura. En Selden *et al* (1989) se hace una distinción entre problemas y ejercicios y se identifican los problemas '*cognitivamente no-triviales*' como aquellos donde "*el resolutor no comienza conociendo un método de solución*" y se añade que este tipo de problemas no pueden ser resueltos dos veces por el mismo individuo, pues la segunda vez éste conocería el método de resolución (pp. 45-46)[80]. Una primera definición que se podría dar de '*pregunta rutinaria*' aparece en Monaghan *et al* (1999):

> Las preguntas rutinarias pueden ser vistas como aquéllas para las que se espera que los estudiantes ejecuten un procedimiento ensayado que consiste en un número limitado de pasos.

Pág. 105

[79] Éstas son las características de los problemas presentados en González-Martín (2005d). El lector sólo debe conocer las cuatro operaciones básicas para enfrentarse a los problemas propuestos, cuyo tema central son operaciones con dinero (un tema de atractivo universal), y ejercitar un pensamiento flexible.

[80] Citado también en Selden *et al* (1999).

También ofrecen una distinción entre preguntas procedurales (las que pueden ser contestadas mediante el simple ensayo de una regla, método o fórmula) y preguntas conceptuales (las que requieren del uso del pensamiento y donde las reglas o métodos confiados a la memoria durante las clases podrían no ser de gran ayuda) (pág. 110). De acuerdo con estas definiciones, aparece en Hitt (2000b) una caracterización de una pregunta como no rutinaria cuando "*no se tiene un proceso conocido* [*para resolverla*]" y esto motiva "*el uso de diferentes representaciones del objeto matemático en consideración*". De esta forma, nosotros utilizaremos el término '*pregunta no rutinaria*' para referirnos a preguntas que no son rutinarias (en el sentido recién explicado) y que podrían ser consideradas como cognitivamente no triviales[81].

Un "buen" problema promueve diversas actividades por parte del resolutor: invertir un saber antiguo, tomar conciencia de este saber (que estará a veces adaptado a la situación-problema y a veces no), verificar la pertinencia de sus conocimientos y construir otros nuevos. Régine Douady[82] presenta las características de una situación-problema de la forma siguiente:

1. La situación debe permitir un arranque; el estudiante debe poder comprometerse en la resolución del problema. Esta concepción viene a dar con la idea de desafío razonable.
2. Si la resolución del problema necesita de una reinversión de los conocimientos anteriores, es necesario asegurarse de que los conocimientos del estudiante son suficientes. Éste es el caso, habitualmente, de los problemas situados al final de capítulo en los manuales escolares, que abordan las nociones matemáticas tratadas. Señalamos aquí los problemas escritos para los cuales el estudiante conoce el camino a seguir sin poner en movimiento todo el proceso de resolución de problemas. Si estos problemas necesitan de la adquisición de nuevos conocimientos, el estudiante no estará provisto para resolverlos inmediatamente; se encontrará entonces en un callejón sin salida y confrontado a una verdadera situación de resolución de problemas.
3. La situación-problema debe permitir al estudiante decidir si la solución que ha encontrado es adecuada o no. Si no, continuará utilizando el mismo procedimiento cuando éste sea inapropiado. El enseñante llevará al estudiante a discutir sobre su solución y otras posibles con los demás. El proceso de resolución de problemas enfatiza el desarrollo del juicio, del sentido crítico y del razonamiento del estudiante por medio de las interacciones sociales. La comunicación es, por tanto, primordial en todo proceso de resolución de problemas.
4. El conocimiento a adquirir debe ser la herramienta mejor adaptada a la resolución de un problema. Por tanto, es esencial analizar el problema antes de proponerlo a los estudiantes, con el fin de prever los procedimientos y dificultades de los estudiantes.

Vista desde este ángulo, la resolución de problemas se convierte en un proceso, más que en un producto o un contenido a enseñar.

Fuglestad (2004) señala también que la motivación es un punto crucial para conseguir que los estudiantes se metan en un problema. Ha registrado variaciones en el desempeño de estudiantes en tareas donde se necesita ver que hay un problema de interés. Los desafíos parecen más interesantes que las rutinas y las tareas con soluciones fáciles. Las situaciones de conflicto cognitivo y los resultados sorprendentes pueden ser utilizados para motivar.

2.2.4. EL PAPEL DE LOS ERRORES EN LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES

Tal como se ha mencionado, no sólo basta con lograr actividades de conversión para pasar de una representación de un sistema de representación a otra representación de otro sistema para que un estudiante construya de manera natural la articulación entre representaciones.

[81] Obviamente, hay que tener en cuenta la relatividad de un problema. Selden *et al* (1999) señalan que los profesores experimentados a menudo pueden predecir qué tareas particulares serán problemas para la mayoría de sus estudiantes de un curso en concreto, y que muchas tareas que sean sólo un poco distintas de los ejercicios tradicionales de los manuales pueden convertirse en problemas.

[82] Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2). Citado en Poirier (2001).

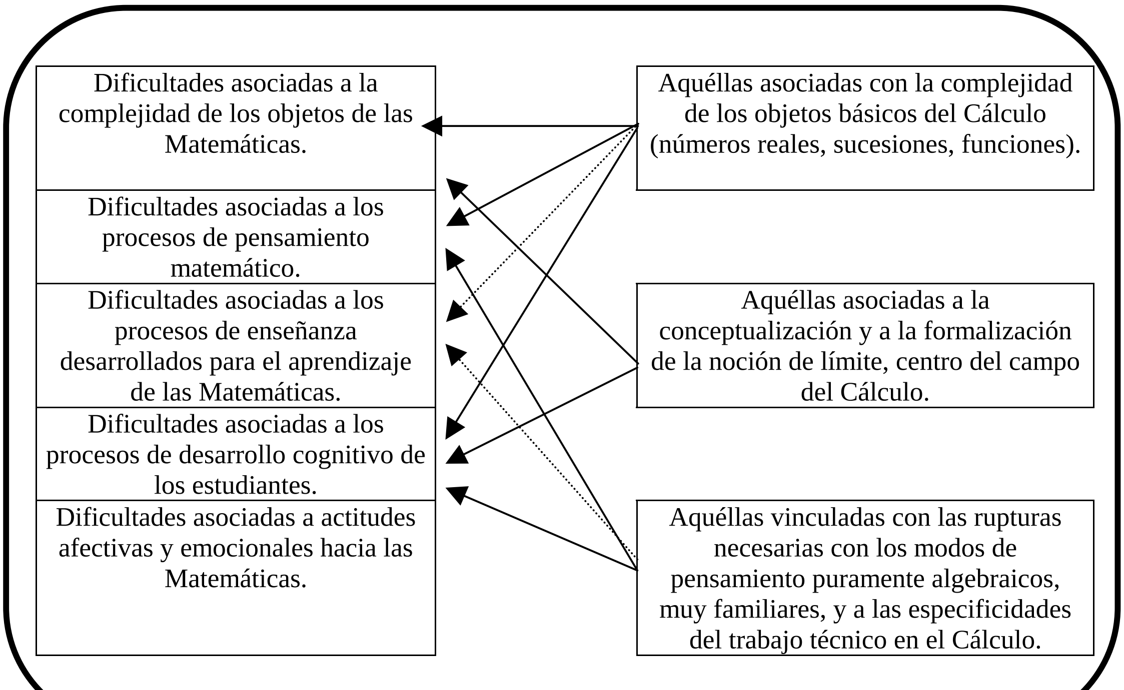
Recordemos que Bachelard resalta que es en el acto del conocimiento cuando aparecen de forma necesaria los retrocesos y problemas que van en contra de un conocimiento anterior.

Una organización de las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, que presenta Socas (1997), es la siguiente:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En cuanto a las dificultades de acceso al Cálculo (que son diversas y se refuerzan mutuamente en redes complejas), Artigue (1995a) las agrupa en tres grandes categorías:

- Aquéllas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del Cálculo (números reales, sucesiones, funciones).
- Aquéllas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del Cálculo.
- Aquéllas vinculadas con las rupturas necesarias con los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el Cálculo.



Relación entre las dificultades descritas

Relacionadas con el concepto de función, por ejemplo, Artigue (1995a) cita también que se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función:

> Una vez más los trabajos son muchos y los resultados concordantes. Junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro, o en el trabajo dentro de un mismo registro, por ejemplo en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información (informaciones sobre la función y su derivada), estas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que en ella se le otorga al registro algebraico y el status infra-matemático que se le da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel.
>
> Artigue (1995a), pp. 110-111

Todas estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Bachelard, en su obra de 1938 "*La formation de l'esprit scientifique*", señala varias causas que originan la formación de obstáculos:

- La tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas.
- La tendencia a generalizar; esto puede ocultar la particularidad de la situación.
- El lenguaje natural.

Es en esta obra donde Bachelard introduce la noción de *obstáculo epistemológico*, que sería importada a la investigación educativa por Brousseau. La teoría de los obstáculos epistemológicos propone una aproximación complementaria a la evolución cognitiva, centrándose en sus rupturas necesarias. El principio fundamental de esta teoría es que el conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento: los llamados *obstáculos epistemológicos*. Los investigadores que utilizan esta teoría formulan la hipótesis de que algunas dificultades en el aprendizaje, generalmente las más resistentes, provienen de formas de conocimiento que son coherentes y han sido efectivas por un tiempo en contextos sociales y/o educativos. También se formula la hipótesis de que los obstáculos epistemológicos tienen algún tipo de universalidad y, por tanto, se puede seguir su pista en el desarrollo histórico de los conceptos correspondientes.

Se ve que el concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Es aquí donde resulta importante tener en cuenta que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo, sino que necesita de algunos momentos de ruptura con los conocimientos anteriores. De esta forma, por ejemplo, la entrada en el dominio matemático del pensamiento sobre funciones requiere que uno se libere de la concepción "estática" de las Matemáticas griegas que apartan de su propósito aquello que es susceptible de cambio, de variación. Los conocimientos aprendidos en la escuela pueden también transformarse en obstáculos. Así, en la extensión sucesiva de los dominios numéricos, los estudiantes generalizan espontáneamente las propiedades anteriores a los objetos nuevos, y les es muy difícil liberarse de eso. Por ejemplo, a través de la relativización de los conocimientos construidos sobre las relaciones entre orden y operaciones, les es difícil encontrar "natural" que el cuadrado de un número pueda ser inferior al número mismo, o que una división pueda producir un número más grande que el dividendo (Artigue, 1995a, pág. 112).

De lo dicho anteriormente, se puede obtener una clasificación de los obstáculos (Selden y Selden, 2001) en:

Epistemológicos	Surgen a partir de la naturaleza de aspectos particulares del conocimiento matemático.
Cognitivos	Surgen de la cognición de un individuo sobre un tópico matemático concreto.
Didácticos	Surgen a partir de características particulares de la enseñanza de las Matemáticas.

En el nivel universitario, esta aproximación ha sido utilizada fructíferamente en la investigación relativa al concepto de límite. Investigadores como Sierpinska, Cornu y Schneider (1991) nos ofrecen evidencia histórica y empírica de la existencia de obstáculos epistemológicos, principalmente las siguientes:

- El significado cotidiano de la palabra "límite", que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona;
- La sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz;
- La fuerza de la geometría de las formas, que impide a los estudiantes identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su topología subyacente. Esto hace que para los estudiantes sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numérico y geométrico en el proceso de límite.

Socas (1997) proporciona algunas características de los obstáculos[83]:

a) Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento.
b) Tiene un dominio de eficacia. El estudiante lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto.
c) Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas.
d) Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
e) Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose esporádicamente.

Entre los tipos más frecuentes de error podemos mencionar los producidos por la enseñanza o la forma en que se enseña y los de corte epistemológico. Con frecuencia los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el algebraico. Otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático. También, como señala Duval (1993), muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles de su currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación. Duval (2004), en trabajos más recientes, habla del obstáculo de la conversión:

> [...] La conversión puede ser requerida explícitamente en la resolución de problemas, pero también se requiere implícitamente cuando dos registros deben ser movilizados juntos de forma interactiva o paralela. [...] Los datos empíricos muestran que hay dos factores principales que determinan el obstáculo de la conversión. El primero es la no-congruencia entre dos contenidos de representación del mismo objeto:

[83] Ver también Ruiz (2003), pág. 53.

> ambos son más o menos opacos para el otro[84]. El segundo es la no-reversibilidad de la conversión. Sólo tenemos que invertir la dirección del cambio de registro para ver a los que aprenden dejar de reconocer los objetos representados. Esto excluye cualquier explicación del obstáculo de la conversión como debido a una carencia de conceptos matemáticos.
>
> Duval (2004)

Como hemos mencionado ya, la construcción inadecuada de un concepto se puede deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación. También creemos que muchos malentendidos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas están relacionados con la falta de estructuras cognitivas que le permitan realizar las conexiones necesarias en la resolución de un problema o para ir más allá de un problema resuelto.

Un obstáculo cognitivo se produce frecuentemente cuando un sujeto, al enfrentarse a un problema, evoca representaciones contradictorias del concepto en cuestión, posiblemente a causa de ideas intuitivas erróneas, en muchos casos incluso necesarias, construidas en el proceso de formación del concepto.

Desde esta perspectiva, la instrucción deberá promover mejores conexiones (articulaciones) entre representaciones de tal forma que la red interna que se esté formando en el sujeto le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado e identificado como obstáculo epistemológico.

2.3. La Teoría de las Situaciones Didácticas

> *Nous dirons que la didactique étudie l'évolution des interactions entre un savoir d'ailleurs toujours en voie de constitution, un système éducatif et des élèves et que cette étude a pour but d'optimaliser les modes d'appropriation par le sujet de ce savoir*.
>
> Brousseau[85]

Como producto de la Didáctica francesa, el nacimiento y desarrollo de ingenierías didácticas se basó en sus marcos teóricos. En particular, se apoya en la Teoría de las Situaciones Didácticas iniciada por Brousseau y su evolución se ha visto caracterizada por la evolución de esta teoría. La teoría de Chevallard (1998) muestra que el aprendizaje que normalmente analizamos en nuestros estudiantes es un aprendizaje constreñido por la institución. La Teoría de las Situaciones Didácticas puede verse como una teoría que coloca esta cuestión en una posición central[86]. La misión de la enseñanza escolar ha de ser permitir al estudiante construir un conocimiento que pueda funcionar y existir fuera de la institución. De este modo, la institución escolar debe permitir al estudiante olvidar en algunos momentos que se trata de una institución didáctica.

Brousseau (2004) narra cómo nace su motivación para crear la Teoría de las Situaciones Didácticas:

> El deseo de ofrecerles [a las personas que querían dar a los estudiantes el placer de maravillarse al enfrentar una cuestión matemática, de impresionarse por una idea, de ser cautivados por un conocimiento que quieren

[84] Duval afirma que sin la coordinación entre varios sistemas de representación, solamente tenemos dos representaciones diferentes que significan dos objetos distintos.

[85] Brousseau, G. (1975). Présentation du colloque Inter-IREM "Analyse de la didactique des mathématiques". *Compte-rendu du colloque "L'Analyse de la didactique des mathématiques"*, Talence: IREM de Bordeaux.

[86] De hecho, Brousseau insiste en que la escuela es una institución necesariamente transitoria.

aprender, de comprender, poseer y, recíprocamente, excitarse con la idea de compartir este placer] este placer me llevó a imaginar situaciones específicas, provocaciones didácticas que pudieran ser implementadas hábilmente si las disfrutaban. Y siempre tuve curiosidad por saber qué iban a decir sobre ello o hacer con ellas sus estudiantes.
Estas tres claves me llevaron a:

- considerar el aprendizaje matemático y las condiciones de enseñanza – incluso las aparentemente modestas – como sistemas, que yo denomino situaciones, e intentar anticipar su evolución,
- determinar las condiciones de observación científica de las actividades didácticas, ya sean espontáneas o sugeridas, mientras se respeta no sólo a las personas sino también a sus funciones,
- ser cauto con los efectos que un uso directo y casi mágico del conocimiento generado a partir de otros dominios científicos puede tener en la enseñanza.

Brousseau (2004)

Artigue (1999) describe de la siguiente forma las bases de esta teoría:

En la teoría de las situaciones didácticas, el aprendizaje, de hecho, se ve como un proceso de adaptación, pero se reconoce que los procesos de adaptación utilizados por el estudiante en una situación de enseñanza dada no son todos de naturaleza matemática. El estudiante se adapta apoyándose en conocimiento matemático, pero también se adapta apoyándose en conocimientos sobre el sistema educativo, sus normas y costumbres, y adivina las expectativas del profesor – lo que Brousseau aisló y definió como el "contrato didáctico". Un buen número de estudiantes bien adaptados escolásticamente aprueban, incluso en la universidad, más a través del aprendizaje de cómo decodificar los términos del contrato didáctico y cumpliéndolo que a través de un verdadero aprendizaje matemático. Debido a los fuertes efectos del contrato didáctico, no es fácil construir situaciones de aprendizaje donde se pueda asegurar que el éxito del estudiante implica un verdadero compromiso matemático. La evaluación en estas circunstancias es incluso más difícil, como han mostrado varios trabajos. La teoría de las situaciones didácticas ha desarrollado un conjunto de herramientas conceptuales y de técnicas para analizar las situaciones de enseñanza desde este punto de vista y para guiar su construcción y optimizar las relaciones entre la actividad matemática del profesor y las actividades que pueden ser de la responsabilidad del estudiante.

Artigue (1999), pág. 1378

Dicho con otras palabras, Brousseau nos recuerda que mientras más precisamente el profesor indique el comportamiento perseguido en los estudiantes (por ejemplo, en los exámenes), más fácil será para los estudiantes mostrar este comportamiento sin generarlo realmente. El entrenamiento en el comportamiento puede no estar mal, pero tiende a ser inflexible. Mientras las preguntas de los exámenes sean idénticas a los ejercicios de entrenamiento, los estudiantes sobrevivirán. Pero si se quiere que los estudiantes aprecien las Matemáticas, piensen matemáticamente y puedan arreglárselas con problemas inusuales o variados, entonces su conciencia ha de ser educada también. Hay que llamarlos al trabajo matemático y no al mero trabajo a través de ejercicios rutinarios. De esta forma, pronto los estudiantes comenzarán a disfrutar y apreciar trabajar sobre ideas matemáticas en vez de simplemente trabajar a través de ellas.

En el análisis de Brousseau es esencial que, independientemente de lo explícito que uno sea con los estudiantes sobre la forma de trabajar y las ideas que se trabajarán, el *contrato didáctico* debe conservar un nivel implícito, pues de otra forma puede fallar. Se diferencia de una actividad su aspecto externo o explícito (lo que se pide hacer, lo que se hace para responder a lo que se interpreta) de su aspecto interno o implícito (lo que es probable encontrar en la forma de detalles del tópico, procesos matemáticos, heurísticos y propensiones personales que se revelan). Si el aspecto interno se vuelve externo, entonces la naturaleza y propósito de la tarea se pierden, de la misma forma que sucede cuando uno va a trabajar en un problema y alguien arroja una pista o da la respuesta y uno se siente desilusionado y desinteresado para continuar.

En Artigue (2000) encontramos un breve resumen de las características más destacadas de la Teoría de las Situaciones Didácticas:

1. Fue inicialmente inspirada por el constructivismo y la epistemología de Piaget: el aprendizaje resulta en una adaptación (en algún sentido biológico) a “situaciones problemáticas”. En este sentido, es una **teoría constructivista**.
2. **No se trata de una teoría cognitiva**. Su objeto central no es el sujeto cognoscente, sino la situación didáctica: un constructo que denota el conjunto complejo de interacciones entre estudiantes, profesores y matemáticas en juego en situaciones de aula. La situación didáctica da forma y constriñe los procesos adaptativos que los estudiantes pueden desarrollar y, así, el conocimiento matemático que puede ser construido. Una suposición esencial es que, **sin entender la situación, no se puede interpretar el comportamiento de los estudiantes en términos cognitivos**.
3. El propósito de la teoría es **comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje y las formas en que interactúan**; pero más allá de esto, la teoría también pretende **desarrollar medios racionales de controlar y optimizar tales situaciones didácticas**.

La ambición de lo que se acabaría convirtiendo en la Teoría de las Situaciones era la de abarcar el conjunto de “hechos” de enseñanza de las Matemáticas y el conjunto de actividades y de relaciones mutuas de los actores presentes: saberes, sistema enseñante, estudiantes[87]. Dentro de esta enorme perspectiva, Brousseau dividió varios dominios que modelizó para hacer de ellos objetos de estudio. El objeto fundador, que da su nombre a la teoría, es el de “situación” y la herramienta de base es la teoría de juegos. Una de las preocupaciones de Brousseau era que los dispositivos creados por los psicólogos de la escuela piagetiana estaban *destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños y las etapas de su desarrollo*, pero no buscaban explicitar la relación entre este dispositivo y la noción matemática cuya adquisición se estudiaba.

En 1997 Brousseau da la siguiente definición de lo que se entiende por “situación”[88] y los distintos puntos de vista para referirse a este término:

> Une situation est l’ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l’unissent à son *milieu*[89]. Prendre comme objet d’études les circonstances qui président à la diffusion et à l’acquisition des connaissances conduit donc à s’intéresser aux situations. Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner.
> Deux points de vue s’opposent alors:
> Selon le premier, la situation est l’environnement de l’élève mis en œuvre et manipulé par l’enseignant ou l’éducateur qui la considère comme un outil[90].

[87] De hecho, Brousseau (2004) explica que la Didáctica estudia las relaciones entre: 1) aprendiz; 2) algo que necesita ser aprendido; 3) un ‘*medio*’ que produce aprendizaje: entornos materiales, profesor con un proyecto didáctico...; 4) observador.

[88] Bloch (2002) afirma que las características de una “situación fundamental” son: 1) engendra el campo matemático pretendido (dimensión matemática / epistemológica); 2) es genérica del conocimiento y utiliza conocimientos anteriores de los estudiantes (dimensión cognitiva en una situación de acción / formulación / validación); 3) es enseñable (dimensión didáctica), o se puede considerar su enseñanza (lo que no quiere decir que pueda ser traspasada como tal al aula, sino que se puede imaginar un juego efectivo de un actor que juega la situación para adquirir el saber pretendido).
La situación fundamental debe predecir explícitamente todos los elementos materiales del juego, el desarrollo teórico (lo que está a cargo del jugador, lo que está a cargo del *medio* antagonista), las variables de dirección, los conocimientos susceptibles de aparecer o de dificultar el juego (obstáculos), las condiciones del desarrollo de las distintas fases de la situación; si no, no se podrá definir los *observables* y confrontarlos con los hechos.

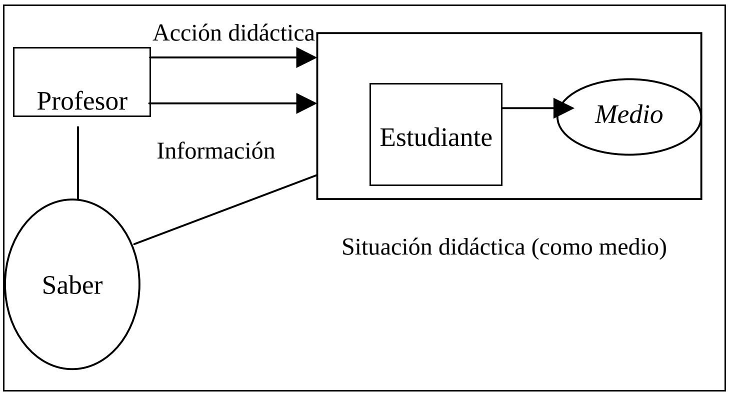
[89] Bloch (2002) distingue un *medio teórico*, que tiene como función permitir el análisis del saber y buscar la construcción de situaciones fundamentales.

[90] Esta definición “habitual” de *medio* aparece también en Bloch (2002), pág. 1.

Selon le second, la situation didactique est l'environnement tout entier de l'élève, l'enseignant et le système éducatif lui même y compris.

Salin (2002), pág. 3

Estas dos perspectivas podrían representarse de la siguiente forma:



Situación didáctica (como entorno)

De estos dos puntos de vista, señala Salin (2002), ha sido el primero el que se ha utilizado en el origen de la Teoría de las Situaciones, y al que se asocia la expresión "*situación de uso didáctico*". En cuanto a la adquisición y manifestación de los conocimientos, Brousseau sitúa como motor de la modelización de las situaciones de uso didáctico dos ideas fundamentales:

- Les connaissances se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle des situations.
- Une conception piagétienne de l'apprentissage:

  L'élève apprend en s'adaptant à un *milieu* qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage[91].

Brousseau (1998), pág. 59

Con esta concepción, la acción didáctica del profesor tiene dos finalidades:

- Provocar en el estudiante las adaptaciones deseadas a través de una elección juiciosa de los "problemas" que propone[92].
- La finalidad de la enseñanza: provocar en el estudiante la adquisición de un saber cuyo sentido y funcionamiento sean satisfactorios.

En la Teoría de las Situaciones Didácticas, las situaciones del aula se modelizan en distintos niveles, distinguiéndose fundamentalmente los niveles a-didáctico y didáctico (ver Sección 2.3.1.).

Hay que señalar que, en cada nivel de relaciones, los saberes y conocimientos del enseñante y del enseñado son distintos, incluso cuando se trata de la misma noción matemática. Con este modelo, se puede prever y explicar:

[91] Un desarrollo simplificado de este texto se puede encontrar en Ruiz (2003), pp. 47-49.

[92] De hecho, una gran parte de la Teoría de las Situaciones se centra en esta cuestión. Los problemas propuestos a los estudiantes se toman con el sentido de "situaciones problemáticas" a proponer, en donde la interacción del estudiante con el *medio* tenga por finalidad un objetivo esperado. En este sentido, "elegir buenos problemas" sería determinar los *medios* con los cuales el estudiante debe interactuar para poder aprender Matemáticas.

- Los tipos de situaciones no didácticas adaptadas a los diversos funcionamientos del conocimiento y las condiciones que desencadenan las transferencias de responsabilidad en el estudiante.
- En consecuencia, las formas de provocar adquisiciones, entre otras por la manipulación de las relaciones sociales.
- La transposición didáctica y los cambios de significado que acompañan a estas transferencias y que acentúan la dialéctica útil-objeto.
- Las modalidades de transferencia de responsabilidades en el interior del sistema didáctico: devolución e institucionalización.

También permite:

- Representar desarrollos efectivos de lecciones.
- Concebir situaciones efectivamente realizables.
- Dar cuenta de las transformaciones observables del saber (en el curso de un aprendizaje local o de una génesis histórica).
- Estudiar las condiciones teóricas del funcionamiento de un saber.

2.3.1. LOS DISTINTOS NIVELES: A-DIDÁCTICO, DIDÁCTICO E INTERACCIONES

EL NIVEL A-DIDÁCTICO

Como ya se ha dicho, Brousseau propone que la institución permita al estudiante olvidar en determinados momentos que se trata de una institución didáctica. Para lograr esto, Brousseau introduce la noción de situación a-didáctica. En estas situaciones, los mecanismos de adaptación al ***medio***[93] activan procesos a-didácticos de adaptación (ligados únicamente a las relaciones de los estudiantes con el conjunto de problemas) y no los típicos procesos didácticos de adaptación[94]. La **devolución** modelizará, en la situación didáctica global, el proceso por el que el profesor negocia con el alumno la entrada en este funcionamiento a-didáctico y lo mantiene[95] y la **institucionalización** será el proceso en el que el funcionamiento didáctico vuelve a actuar, descontextualizando el conocimiento de la fase a-didáctica y ligándolo al conocimiento institucional.

[93] Del que hablamos en la Sección 2.3.2. Debido a la frecuencia con que aparece la palabra "medio" en el lenguaje español, se escribirá en cursiva cuando nos refiramos al término que se utiliza en la Teoría de las Situaciones.

[94] Como ya se ha visto (al principio de la Sección 2.3. y se muestra en la Sección 3.1.1.), Chevallard hace la distinción entre lo que significa aprender dentro de una institución y lo que significa realmente aprender. En muchos casos, el alumno se adapta repitiendo los procesos que ve en el aula o en el profesor, sin aprender realmente, anticipándose a las expectativas del profesor o reproduciendo los hábitos de la clase, fijos en el contrato didáctico habitual.

[95] Obviamente, el estudiante no experimentado en este funcionamiento ha de ser preparado poco a poco. Los estudiantes tienen interés en escapar de las situaciones complicadas y utilizar en su beneficio la maquinaria didáctica debido a las facilidades que ésta puede procurar. Por tanto, es indispensable que el enseñante prepare al estudiante para este funcionamiento a-didáctico integrándolo en las fases didácticas: el estudiante no puede aprender sino produciendo, haciendo funcionar y haciendo evolucionar los (sus) conocimientos en condiciones "parecidas" (o "asintóticamente parecidas") a aquéllas que encontrará en el futuro.
En consecuencia, para implicar al estudiante, éste no debe saber de antemano la respuesta esperada. Para permitir el funcionamiento citado, el profesor no puede decir, adelantar, al alumno exactamente qué respuesta espera; debe arreglárselas para que el estudiante acepte la responsabilidad de buscar una resolución a los problemas o ejercicios de los que ignora la respuesta.

En el '*proceso de* ***devolución***'el profesor intenta dar a sus alumnos una responsabilidad matemática y les deja olvidar, al menos por un momento, que la tarea dada tiene un propósito de aprendizaje específico. Para ello, las presiones del contrato didáctico se minimizan y el profesor tiene que mantener, a través de decisiones y mediaciones adecuadas (que pueden diferir de un grupo de estudiantes a otro) esta devolución de responsabilidad. Con esto, se define la **devolución** como el acto por el cual el enseñante hace aceptar al estudiante la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta las consecuencias de esta transferencia.

De forma natural surge una paradoja: el maestro no quiere que el estudiante obtenga la respuesta sino por sí mismo, pero a la vez quiere que el estudiante dé la buena respuesta. Por tanto, debe comunicar este saber sin tender a desvelarlo, lo que es incompatible con una relación contractual.

En este nivel, los estudiantes se modelizan como **sujetos cognitivos** y se enfoca la interacción estudiantes / Matemáticas.

Uno de los objetos centrales es la noción de ***medio***, presentado por Brousseau como un sistema que reacciona ante las acciones de los estudiantes, tanto de forma colaborativa como antagonista. Este *medio* se define en términos de objetos materiales, pero también en términos de conocimientos: el conocimiento en el *medio* se trata de un conocimiento ya establecido, asegurando la familiaridad requerida con los objetos matemáticos en juego, y que da cierta realidad al mundo matemático. Cuando los estudiantes no trabajan de forma individual, puede integrarse en el *medio* también las posibles acciones y reacciones de los demás. Generalmente, el *medio* debe contener también herramientas para un proceso de validación del trabajo realizado en él. En una situación de validación de un saber, el *medio* es además el lugar de funcionamiento y la referencia, implícita o explícita, de los conocimientos correspondientes. Por tanto, el *medio* juega un rol importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto debe desarrollar para controlar una situación de acción. En consecuencia, una parte importante de la enseñanza aparece como la reorganización de un *medio* favorable a las adaptaciones a-didácticas.

El modelo a-didáctico trata de dar cuenta de las posibles acciones (de los estudiantes), de su costo respectivo tanto cognitivo como técnico, del *feed-back* que los estudiantes pueden recibir del *medio*, y de las formas asociadas de control y auto-validación que se inducen.

Se toma como variables didácticas aquéllas que cambian la economía de la interacción. En este nivel, inicialmente, el profesor no se introduce en el modelo, aunque ciertas acciones del profesor puedan ser modelizadas en términos de enriquecimiento de las retroacciones naturales provistas por el *medio*, o en términos de añadido de nuevas piezas de conocimiento en el *medio*.

Una de las hipótesis que subyace a esta modelización es que para comprender el comportamiento de los estudiantes hay que **entender su economía** y partir del principio de que las prácticas más económicas son las más probables en aparecer.

Aunque tal tipo de modelización es limitado, sabemos que hasta los modelos más simplistas pueden resultar muy productivos.

EL NIVEL DIDÁCTICO

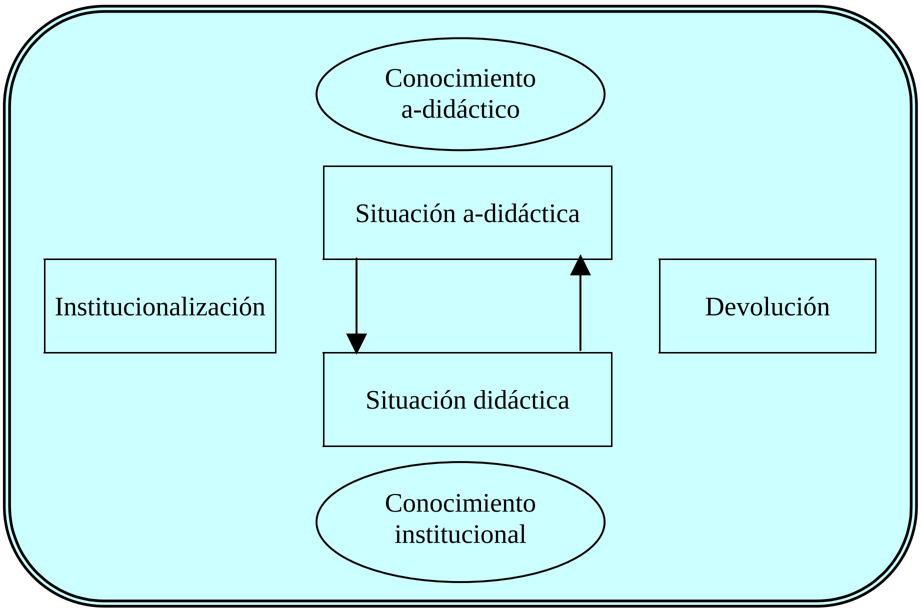
En este nivel, los estudiantes son modelizados también como **sujetos institucionales**. Su adaptación es constreñida no sólo por las características de la situación matemática y la forma en que se ha organizado la interacción, sino por su propio conocimiento de las normas institucionales que fijan las posiciones y roles respectivos de profesores y estudiantes. El concepto de **contrato didáctico**, en cuanto al contenido matemático, es una herramienta esencial para el análisis didáctico. En este nivel, por tanto, el profesor se vuelve una pieza esencial del modelo.

De hecho, los procesos adaptativos desarrollados por los estudiantes son una mezcla sutil de procesos a-didácticos y didácticos. Por ejemplo, a través de una adaptación meramente institucional, los estudiantes pueden aprender a comportarse como buenos sujetos institucionales sin aprender realmente las matemáticas que se enseñan. Comprender esta sutileza es esencial para comprender, e incluso para controlar, lo que se puede aprender en una situación determinada.

INTERACCIÓN ENTRE SITUACIÓN A-DIDÁCTICA Y DIDÁCTICA

Una **suposición fundamental** de la Teoría de las Situaciones Didácticas es que para el aprendizaje matemático es necesario cierto nivel de a-didacticismo.

Sin embargo, las fases a-didácticas producen conocimiento matemático, pero que depende fuertemente de acciones particulares y de contextos ligados a la situación a-didáctica. Por tanto, un papel fundamental del profesor es ayudar a los estudiantes a relacionar lo que han producido durante el trabajo a-didáctico a formas más institucionalizadas de conocimiento, los propuestos como objetivos por la institución didáctica. Así, la necesidad del proceso de **institucionalización** puede ser vista como el proceso inverso del proceso de devolución. La devolución y la institucionalización, en una situación determinada, organizan las relaciones entre los dos niveles introducidos, siguiendo el siguiente esquema (Artigue, 2000):



Comprender, a priori, el potencial matemático de una situación diseñada o, a posteriori, la vida matemática de una situación observada, requiere comprender este complejo juego entre las responsabilidades respectivas de profesor y estudiantes, entre las dos capas en la modelización de la situación.

Esto explica por qué el proceso de validación de una ingeniería didáctica no puede basarse en la comparación estadística entre el desempeño de un grupo experimental y uno de control. La validación, necesariamente, ha de ser de naturaleza interna y referirse al análisis y control interno del diseño de la ingeniería. Por tanto, se basa principalmente en la confrontación entre lo que se llama *análisis a priori* del diseño y el *análisis a posteriori* basado en los datos recogidos durante la experimentación o tras ella.

De este modo, de forma global, las distintas fases del trabajo de ingeniería deben reflejar estos aspectos teóricos: análisis preliminar, diseño del proyecto de ingeniería con especificación tanto de las opciones de macro-nivel y de micro-nivel y las variables asociadas, análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori*.

2.3.2. EL *MEDIO*

En realidad, tenemos múltiples ejemplos de situaciones que, para un observador externo, parecen apoyarse en la "intervención" de un "medio" del que se espera que se manifieste por ciertas propiedades (por ejemplo, físicas) independientes del conocimiento de los protagonistas. Por ejemplo, citamos el puzzle, la reproducción de figuras, los *tangram*...

El *medio*, ya sea físico, social, cultural o de otro tipo, juega un papel en el empleo y el aprendizaje de conocimientos por el enseñante y el estudiante, que se le solicitan o no durante la relación didáctica. Esta razón semejaría ser suficiente para que su modelización pareciera útil al estudio de la comunicación de los saberes. Sin embargo, en la Teoría de las Situaciones, no se toma como objeto "*medio*" el universo en su conjunto; solamente se modeliza el entorno específico de un saber o de uno de sus aspectos. El *medio* se trata como una componente interna esencial de la relación didáctica y, además, se considera que lo que se devuelve se relaciona con un *medio*. La teoría de Brousseau defiende el funcionamiento de la noción de *medio* a-didáctico y la necesidad de construir este *medio* como objeto de saber para el estudiante.

Además, defiende que la modelización de un *medio* como sistema antagonista del estudiante para simular el funcionamiento del conocimiento puede permitir, a la vez, el análisis teórico, la ingeniería, la conducción y la observación de secuencias didácticas.

El concepto de *medio*, dentro de la Teoría de las Situaciones, ha ido evolucionando. Este término puede tener varios significados que podrían caracterizar las relaciones entre los estudiantes, los elementos de conocimiento y las situaciones, pero (en escritos de mayor complejidad) también entre los elementos de conocimiento en sí mismos o incluso entre las situaciones (Salin, 2002).

Los desarrollos con respecto al *medio* son cada vez más importantes y el término mismo se ha vuelto insalvable en la descripción de situaciones didácticas, sea cual sea el paradigma teórico desde el que se analizan (Salin, 2002). Brousseau (1988) señala que, normalmente, la relación didáctica se muestra habitualmente como una relación entre dos, el profesor y el estudiante, con un saber. Sin embargo, el intento de evitar el *medio* (para comprobar si es realmente necesario) conduce a problemas e incongruencias, justificando así su inclusión necesaria en el modelo. Su "demostración" comienza así:

> L'enseignant et l'élève peuvent être identifiés comme des systèmes (sous-systèmes du système fondamental). Leurs relations au savoir seront déterminées par leurs interactions. Question : faut-il modéliser aussi l'environnement ? et faut-il le faire sous forme d'un autre sous-système : le *milieu* (ou sous forme de plusieurs sous-systèmes : le milieu de l'élève, celui de l'enseignant, etc). Dans un premier temps essayons de l'éviter.

Brousseau (1988), pág. 313

El *medio*, señala Brousseau, es una parte de la situación, ya que la situación no es solamente el cuadro de acción del sujeto; también es la condición de la acción y está, por tanto, estrechamente asociado a los conocimientos en juego.

Brousseau define la situación didáctica y el *medio* como sigue:

> La situation didactique est, **pour l'observateur**, la modélisation de l'environnement dans lequel est plongé un joueur, la situation d'action, d'apprentissage ou d'enseignement pour l'élève, le cadre de l'enseignement pour l'enseignant. Le système antagoniste du joueur dans une situation est **pour le joueur** comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les inter-actions qu'elle détermine.

> C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler ***milieu***. Il joue donc un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémologique (Définition : le *milieu* est un jeu ou une partie de jeu qui se comporte comme un système non finalisé).
>
> Brousseau (1988), pp. 320-321

Y vuelve a precisar que el *medio* es un concepto no contingente, sino necesario[96], en la Teoría de las Situaciones; se introduce en la teoría no porque describa un observable cómodo, sino porque es indispensable en la especificación de la relación didáctica.

El *medio*, para poder efectivamente jugar su papel, está sometido a tres restricciones principales que lo caracterizan a su vez:

Restricciones del ***medio***

ANTAGONISMO	• Debe ser factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios y, por tanto, de adaptación para el estudiante. Este papel es el que lo caracteriza como *antagonista* del sujeto (para que las interacciones con el *medio* sean fuente de desequilibrios y productoras de nuevos conocimientos, es necesario que el estudiante pueda utilizar los conocimientos de los que dispone para intentar controlar este *medio*, pero también que reciba retroacciones de él que le muestren la insuficiencia de sus medios de control).
AUTONOMÍA	• Debe permitir el funcionamiento "autónomo" del estudiante. Esto se relaciona directamente con la concepción del aprendizaje con el fin de permitir el funcionamiento autónomo del estudiante en las situaciones no didácticas que hacen referencia al saber enseñado. Para preparar al estudiante a afrontar los medios no didácticos, el *medio* a-didáctico debe "representar" al medio no didáctico y permitir el funcionamiento del conocimiento como producción libre del estudiante; también debe permitir al estudiante experimentar con el saber anteriormente adquirido, movilizándolo como conocimientos operativos en la situación. Este punto se relaciona con la *devolución*, pues el estudiante debe aceptar esta responsabilidad y, en cierta manera, sentirse responsable de su aprendizaje.
FUENTE DE SABER	• Debe conducir al dominio de saber matemático identificado como tal, y no solamente de conocimientos. Se ha de tener en cuenta que las interacciones sujeto-*medio* son productoras de conocimientos, mientras que una institución enseñante designa los saberes a enseñar. Por tanto, una de las tareas del enseñante (o del didacta) es la de determinar la(s) situación(es) y los medios correspondientes que van a permitir al estudiante hacer funcionar este saber bajo la forma de conocimientos y hacer posible su institucionalización. Se trata, por tanto, *de asociar al saber los conocimientos correspondientes*.

EL *MEDIO* EN EL CONTRATO DIDÁCTICO

Como ya se ha explicado, las relaciones del enseñante y del estudiante están condicionadas por un proyecto social exterior que se impone tanto a uno como al otro. En este contexto, el *medio* no es sólo una imagen del juego de cada actor, es una necesidad del contrato didáctico (Brousseau, 1988). La intervención del enseñante modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el estudiante debe aprender. No olvidemos que el objetivo final del aprendizaje es que el estudiante pueda hacer

[96] Margolinas (1998) muestra también que los conceptos de *medio* y contrato son importantes para la construcción y análisis de situaciones de enseñanza. Ambos conceptos, aunque centrales y necesarios para una buena interpretación de las nociones de situación didáctica y a-didáctica, a veces no son bien conocidos.

funcionar este saber en situaciones donde el enseñante haya desaparecido[97]; de ahí la distinción de un funcionamiento *didáctico* y de un funcionamiento *a-didáctico* del alumno en la clase.

Es necesario dotar al estudiante de cierta autonomía. Los conocimientos enseñados y los saberes comunicados deben permitir al estudiante entrar en todas las situaciones y prácticas sociales no didácticas como sujeto mayor y no como estudiante. Esto implica, por un lado, que el profesor despeje progresivamente de sus presupuestos didácticos las situaciones que propone al estudiante alrededor de una noción y, por otro lado, que reconozca este *medio* a-didáctico como un territorio de referencia cultural y de funcionamiento del saber que enseña.

En la enseñanza tradicional los profesores presentan el saber que quieren enseñar como respuesta a ciertas *preguntas*, quizá para evitar el dogmatismo. Sin embargo, se centran habitualmente en la enseñanza de *respuestas*, por lo que las cuestiones no están presentes sino para introducirlas y justificarlas. Lo que Brousseau propone es la ambición de hacer pasar las preguntas del dominio del profesor al del estudiante, de enseñar tanto las preguntas como las respuestas y, en la medida de lo posible, de enseñar los conocimientos con su sentido.

En particular, se supone que la relación privada del profesor con el saber sirve de base a la constitución de las relaciones privadas (en particular en las situaciones a-didácticas) y públicas (institucionalización) del saber del estudiante. Es la devolución la que permite la entrada (didáctica y personal) del sujeto en el juego. Por tanto, una cuestión fundamental es *¿cómo puede el profesor obtener esta entrada, supuestamente dependiente esencialmente de las motivaciones de la persona-estudiante, por la manipulación del medio didáctico?*

Como posible respuesta se encuentran las ingenierías didácticas. Si aceptamos que la enseñanza consiste en provocar en el alumno los aprendizajes proyectados situándolo en situaciones apropiadas a las que responderá "espontáneamente" por adaptación, se trata entonces de determinar cuáles son las adaptaciones que corresponden al saber y a los conocimientos previstos, y a qué circunstancias responden.

Y es innegable que se ha mostrado en la Didáctica moderna la importancia del rol jugado en el proceso de enseñanza por las fases de aprendizaje en las que el estudiante trabaja de forma casi aislada sobre un problema o en una situación en los que asume el máximo de responsabilidad. Es en este marco donde se desarrollan investigaciones que consisten, para el profesor, en deshacerse de toda o parte de su responsabilidad y hacérsela aceptar a los estudiantes.

2.4. CONCLUSIONES

Los fundamentos teóricos mostrados en este capítulo justifican las opciones que se han tomado en el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica, así como algunas de las características de nuestra propuesta (uso sistemático de ejemplos y contraejemplos, conjugación de los registros gráfico y algebraico, recurso explícito a los conocimientos anteriores, mayor responsabilidad en el estudiante y uso de un *software* que permita la visualización), pues éstas intentan promover la adquisición de un conocimiento más estable según nuestros supuestos teóricos.

Por otro lado, los elementos de la Teoría de Situaciones nos permiten construir *medios* adecuados en las situaciones de nuestra Ingeniería para promover la apropiación del estudiante de las tareas propuestas (desafíos, pero no fuera de su alcance) y el juego colectivo para encontrar soluciones en tiempos razonables, así como retroacciones que permitan la reconstrucción del conocimiento.

[97] He aquí una de las características paradójicas del sistema de enseñanza, pues su finalidad es la de desaparecer: a la salida de la escuela, el antiguo alumno debe ser capaz de utilizar sus conocimientos en situaciones *no didácticas* (no construidas especialmente para hacerle adquirir o evaluar un conocmiento) (Margolinas, 1998).

Pero la construcción de nuestra Ingeniería y las actividades diseñadas no sólo se guían por nuestros referentes teóricos, sino también por el análisis de las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva del concepto de integral impropia, que se muestra en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 3
DIMENSIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Este capítulo recoge los análisis realizados de las tres dimensiones de la integral impropia: epistemológica, didáctica y cognitiva.

El análisis epistemológico muestra una breve revisión histórica de la evolución de la integral impropia que nos permite tener en cuenta los registros en que se ha producido, principalmente, esta evolución. La dimensión didáctica muestra la evolución de los programas de Matemáticas y las principales fuentes que se han utilizado para su enseñanza. En la dimensión cognitiva se presentan los principales elementos que han caracterizado el aprendizaje de la integral impropia, así como algunas dificultades, obstáculos y errores que aparecen en él.

3.1. DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

3.1.1. INTRODUCCIÓN

Aunque la Didáctica de la Matemática sea una disciplina científica autónoma, es esencial para ella el establecimiento de relaciones con otras áreas de conocimiento, ya sean consideradas disciplinas científicas o no. En particular, el uso de la epistemología resulta de gran utilidad. En nuestra investigación, la epistemología se utiliza como reflexión sobre la esencia de los conceptos matemáticos, los procesos y condiciones que han provocado su desarrollo, las características de la actividad matemática tanto presente como pasada y lo que constituye la naturaleza específica de un dominio matemático u otro (Artigue, 1995b). Las razones más importantes que motivan esta reflexión y que permiten mirar al mundo educativo desde el exterior, son:

- Nuestro trabajo en educación está gobernado (implícita o explícitamente) por nuestras representaciones epistemológicas[98] y tenemos que ser tan claros como sea posible respecto a ellas.
- Nuestra experiencia con las Matemáticas en el mundo educativo tiende a reducirlas a los objetos enseñados, a darles forma para que sean compatibles con la forma en que viven en el mundo educativo.

De esta forma, el uso de la epistemología nos ayuda a mantener una visión extrínseca de los objetos enseñados (devolviendo una historicidad[99] tanto a estos objetos, pues la enseñanza tradicional tiende a presentarlos como objetos universales, como a ciertas nociones matemáticas, como la de rigor, presentada también habitualmente como eterno y perfecto) y a no sólo considerarlos en la forma en que son presentados a los estudiantes. El análisis epistemológico ayuda a la Didáctica a desprenderse de la ilusión de transparencia de los objetos que manipula a

[98] Se usa la noción de “representación epistemológica” para designar las concepciones que un individuo se forja a través de su propia vivencia matemática. Éstas constituyen una de las componentes de las representaciones metacognitivas (Artigue, 1990).

[99] Sin embargo, el desarrollo de los conceptos matemáticos en el aula no puede ser paralelo en general al desarrollo histórico (lo que hace necesario un proceso de transposición), aunque a veces se sigan, voluntariamente (incluso en la transposición didáctica), “etapas” del proceso histórico, al desarrollo histórico.

nivel de saber y ayuda al didacta a librarse de las representaciones epistemológicas erróneas que tiende a inducir su práctica de enseñante. Además, es claro que, para el trabajo en Didáctica, el trabajo epistemológico, en general, aunque importante, es sólo una herramienta[100]; aún siendo una guía importante, no puede ser un sustituto de aquél. Por otro lado, aún cuando normalmente el análisis epistemológico emerge del histórico, no está necesariamente subordinado a éste.

El uso de la epistemología aparece pronto en la disciplina. Brousseau introdujo en 1976 en la Didáctica de la Matemática el concepto de *obstáculo epistemológico*, definido por Bachelard en 1938. Decía que:

> ...un obstáculo epistemológico está ligado al conocimiento, una forma o principio de conocimiento que, efectivo y de campo no restringido de validez, es capaz de establecerse y reforzarse durante el desarrollo de una noción, pero que en cierto nivel de este desarrollo se vuelve un factor de bloqueo y es generalmente una fuente fuerte y duradera de error. Sigue apareciendo de forma recurrente incluso cuando uno cree que ha sido erradicado[101].

Citado en Artigue (1992a), pág. 197

Con esta definición, se aceptaba que el nuevo conocimiento se fundamenta, en cierta medida, en un proceso de rechazo, contradiciendo al modelo de enseñanza que concibe el aprendizaje de una forma lineal, añadiendo nuevos conocimientos a los antiguos. Por el contrario, la teoría de los obstáculos epistemológicos se basa en el hecho de que la presencia de rupturas en el aprendizaje es normal[102]; no se puede aprender formas definitivas de conocimiento, siempre hay que volver atrás, y el progreso en el aprendizaje requiere necesariamente de algún tipo de rechazo de lo que ha sido temporalmente un motor de progreso. A pesar de las diferencias entre el desarrollo histórico de los conceptos y su aprendizaje[103] en las instituciones escolares actuales, la enseñanza no puede deshacerse de estos obstáculos totalmente; son pasajes reiterativos en el camino al conocimiento, pues forman parte de él.

Esta aproximación en términos de obstáculos epistemológicos se suele asociar con una búsqueda en la historia de las Matemáticas, en busca de problemas significativos y fundamentales que permitan una organización del proceso de enseñanza epistemológicamente más adecuada que las usuales. Como se aclara en la Sección 3.1.3., nuestro análisis epistemológico-histórico fundamenta algunos aspectos de nuestro diseño.

En nuestra opinión, es importante promover la construcción del conocimiento sobre las integrales impropias y las técnicas utilizadas para el estudio de su convergencia tanto a partir como en contra del conocimiento algebraico previo de los estudiantes[104], lo que justifica algunas de las actividades diseñadas y el uso de contraejemplos que evidencien las falacias de la sobre-

[100] Aunque cabe precisar que existe también una epistemología de la Didáctica.

[101] Ha de tenerse en cuenta también que los obstáculos epistemológicos identificados en la historia han de ser considerados como candidatos a obstáculos en el análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje. Para considerarlos auténticos obstáculos epistemológicos de la enseñanza ha de probarse su resistencia ante intervenciones didácticas apropiadas. Así, una cuestión importante es la de si los obstáculos epistemológicos de tipo histórico son del mismo género que los encontrados durante el aprendizaje escolar. En sentido contrario, se puede localizar en la actualidad formas de conocimiento que actúan como obstáculos en nuestros estudiantes y que no se localizan en el devenir histórico. Véase más sobre los obstáculos en las Secciones 2.2.4 y 3.3.2.

[102] Ver, a este respecto, las Secciones 2.2.3. y 2.2.4.

[103] Entre otros motivos, debido a la transposición didáctica.

[104] Aunque el cálculo integral no se limita a su componente algebraica-algorítmica, la concepción que tienen nuestros estudiantes de éste sí se limita a este registro, como se muestra en la Sección 3.3.4. Obsérvese que tampoco se menciona el registro gráfico, pues nuestros estudiantes no cuentan con él en su trabajo.

generalización; de este modo, se favorecen las rupturas y reconstrucciones necesarias. Una de nuestras elecciones más importantes es la de construir el nuevo conocimiento a partir del de integral definida (justificada por el análisis histórico-epistemológico desarrollado), mostrando el carácter generalizador de la integral impropia; también son necesarias algunas rupturas con el conocimiento anterior, pues no se conservan todas las propiedades.

Tendremos también en cuenta en el diseño de nuestra secuencia (Secciones 2.3., 4.1. y 4.3.), elementos de la aproximación antropológica de Chevallard (1991), que se adapta a la perspectiva institucional, y distingue dos tipos fundamentales de relaciones con el objeto a aprender: las relaciones personales de los estudiantes y también las relaciones institucionales que condicionan estas relaciones personales y su evolución. De este modo, la pregunta

1) *¿qué es aprender el concepto de integral impropia?*

se puede transformar en la pregunta

2) *¿qué puede significar "aprender el concepto*[105] *de integral impropia" en la institución universitaria?*

Por esta razón, se desarrolla posteriormente (Sección 3.2.) un análisis de la dimensión didáctica de este concepto. No debemos olvidar que, usualmente, el funcionamiento cognitivo de los estudiantes cuyo aprendizaje estudiamos está constreñido por la institución. Para tratar de aliviar este influjo hemos recurrido a la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y en nuestra propuesta intentamos desarrollar respuestas a la pregunta (1) en vez de a (2).

3.1.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

A lo largo de esta breve revisión histórica, constatamos (una vez más) que lo operacional suele preceder históricamente a lo estructural. De forma natural, nos podemos plantear si este fenómeno se da también en nuestros estudiantes. Algunos elementos para responder a esta pregunta se exponen en la Sección 3.3.

Uno de los primeros cálculos de integrales en intervalos infinitos aparece en el siglo XVII. Durante este siglo el enfoque utilizado tiene un carácter de tipo más geométrico, como mostramos inmediatamente. Se podría decir que es un enfoque "tipo Lebesgue". El primero en tratar las integrales impropias de forma explícita es Grégoire de Saint-Vincent, que obtiene sus resultados antes que Fermat. Su motivación era puramente la de investigar, buscar y generalizar resultados. Vemos, entonces, que la integral impropia aparece en el escenario matemático de forma natural, como una generalización.

Los resultados de Saint-Vincent se inscriben, en general, en el espacio (rotaciones); éstos son mostrados en los trabajos de Guldin (de forma un poco subrepticia) y de forma neta por Tacquet (discípulo de Saint-Vincent), en una obra en latín sobre los toros (1654) [GA2]. Es de destacar que en todos los casos conocidos del siglo XVII, el interés se sitúa sobre las funciones potenciales (integrales de la forma $\int x^n.dx$), salvo cuando se considera la función logaritmo

[105] Aunque desde el punto de vista histórico la existencia de tal "concepto" no sea tan clara, en particular, con el nacimiento en el siglo XX de las integrales singulares. Nosotros usamos aquí el término "concepto" en el sentido de "contenido matemático en los programas a enseñar".

(introducida en la escena geométrica en los trabajos de Saint-Vincent y de Beaune[106]. Es aquí donde podríamos encontrar cuestiones interesantes con interrogaciones sobre la convergencia).

Saint-Vincent estudia las secciones cónicas y da una expresión para el área bajo la hipérbola $y = 1/x$. En un manuscrito de 1625, publicado en Amberes en 1647[107] muestra de dos formas distintas[108] que si en la Figura 3.1. la relación de las longitudes sucesivas es constante, esto es, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3}$ [109], entonces las áreas I, II, III, ... son iguales. En concreto, demuestra que si se disponen puntos según una progresión geométrica sobre una de las asíntotas de una hipérbola, las áreas cortadas bajo la curva por paralelas a la otra asíntota son iguales; ésta es la Proposición 109 del libro VI de *Opus geometricum*: las áreas de los trapecios curvilíneos $A_1A_2B_2B_1$; $A_2A_3B_3B_2$, ... son iguales cuando las longitudes AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, ... están en progresión geométrica[110]. Por tanto, estudia en términos de áreas los valores de la función $F(x) = \int_a^x f(t).dt$. De aquí se deduce, en lenguaje moderno, que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$. Este trabajo de Saint-Vincent sirve como una *caja de cuadraturas*, aunque no se constituye en una teoría de la cuadratura (Dhombres, 1995b).

Mucho más tarde, Wallis y Leibniz atribuyen a Gregory la demostración del hecho de que la primitiva de la función $y = 1/x$ es la función logarítmica.

---

[106] Florimond de Beaune (Blois, Francia: 1601-1652) produjo la primera introducción importante a la geometría analítica de Descartes [GA1]. Escribió *Notes brièves*, que se publicaron en 1649 como parte de la primera edición en latín de la *Géométrie* (1637) de Descartes, quien, en esta obra, identifica toda ecuación de segundo grado en x e y como una cónica. Sin embargo, en una carta enviada a de Beaune en 1639, reconoce haber omitido el estudio de algunas formas cuadráticas degeneradas (coeficiente de y^2 nulo) (Dhombres, 2000). Entre otros resultados, de Beaune probó que las ecuaciones $y^2 = xy + bx$, $y^2 = -dy + bx$, $y^2 = bx - x^2$ representan hipérbolas, parábolas y elipses, respectivamente. De Beaune, conocido como discípulo de Descartes, es el primero en estudiar en cierto modo una ecuación diferencial de la que la función logaritmo es justamente la solución. En una época en la que el concepto de derivada no se puede imaginar, ni el de primitiva, calcular una derivada se convierte en trazar una tangente a una curva. Este problema podría haberse introducido por poco en el sistema cartesiano, que no quería sino conocer las curvas algebraicas. Se ve, en este problema, un bosquejo muy tímido del cálculo integral [VU].

[107] A pesar de sus aportaciones, este libro, *Opus geometricum*, que contiene más de 1200 páginas, nunca fue republicado. En esta obra anunciaba haber realizado la cuadratura del círculo. Pero, en poco tiempo, Descartes descubrió el error, pero dejó a Huygens anunciarlo (Dhombres, 1995a). En 1651, siendo su primera publicación de joven, Christiaan Huygens mostró el error en la Proposición 39 del Libro X, pág. 1121, lo que dio al libro una mala reputación. Sin embargo, Huygens lo recomendó en 1672 a Leibniz, quien posteriormente agradece a Saint-Vincent sus numerosas y brillantes invenciones (Dhombres, 1993a).

[108] En el Libro VI de su obra. Dhombres (1995b) muestra el enunciado original y en Dhombres (1993a) se dan los detalles de las demostraciones.

[109] De hecho, es Alfonso de Sarasa quien enuncia este resultado en 1649, pero a partir de los cálculos de Grégoire de Saint-Vincent.

[110] Este resultado indica que las áreas hiperbólicas transforman una progresión geométrica en una progresión aritmética: una de las progresiones recae sobre las longitudes y la otra sobre las áreas. Con este hecho, la función logarítmica, nacida en el siglo XVII de los esfuerzos de Neper y apartada del escenario matemático, aparece en la geometría culta. Por otro lado, cabe destacar que esta *cuadratura* de la hipérbola rebasa las cuadraturas antiguas (ya que ningún área rectangular es asignada por igualdad al área de un trapecio hiperbólico), pues concibe una figura de bordes curvilíneos como una infinitud de figuras rectilíneas que la rellenan exhaustivamente, mientras que precedentemente se aproximaba las figuras con la ayuda de polígonos inscritos o circunscritos cuyo número de lados aumentaba infinitamente. De esta forma, Saint-Vincent entra en el cálculo integral y *de las cuadraturas pasa a la integración* (Dhombres, 1993b).

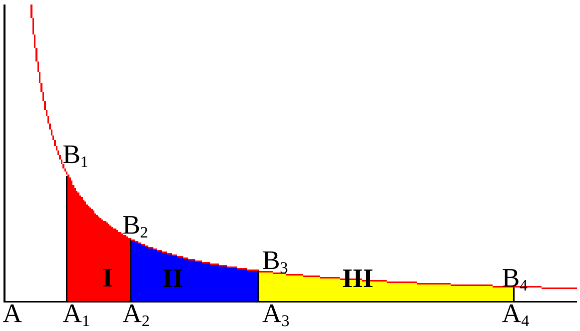


Figura 3.1

Con estos cálculos, Saint-Vincent abría una nueva puerta que daría lugar posteriormente a la integración:

> Le problème général des aires détermines par des courbes ne pouvait plus être envisagé comme une simple réduction à des aires rectilignes. L'hyperbole témoignait que la considération des aires constituait en soi un monde mathématique, doté tout autant que la géométrie classique d'égalités, de proportions, bref de l'arsenal des comparaisons et de toute la kyrielle des manipulations algébriques permises par les proportions. Ce monde était *nouveau*. L'aire en tant que telle, indépendamment de son mode de calcul qui en donnerait une valeur explicite, soulevait des problèmes neufs et qui ne pouvaient trouver une cohérence qu'une fois insérés dans un cadre nouveau.
> Nous savons que ces problèmes allaient effacer les quadratures, ou plutôt que l'expression « quadrature » perdrait progressivement son sens géométrique – celui de trouver un équivalent carré – au profit d'une investigation des comportements analytiques des aires. La quadrature deviendrait une intégration.
> […] Il a seulement manqué d'outils adéquats pour explorer le monde neuf qu'il mettait à jour. En somme, si l'œuvre de Grégoire appelle le calcul intégral, elle en est cependant très éloignée. Cette œuvre n'a pu favoriser le développement du Calcul que dans la mesure où elle justifiait d'avance la forme nouvelle donnée aux résultats de ce dernier.

Dhombres (1995b), pág. 73

También encontramos en el trabajo de Cavalieri *Geometria indivisibilibus* (*Géometrie par les indivisibles*, escrita e impresa por etapas entre 1620 y 1635) reflexiones sobre la generación de figuras geométricas. El cilindro se genera por un paralelogramo y el cono por un triángulo; mientras el área superficial del cilindro es doble que la del cono, el volumen es el triple. Cavalieri considera una figura plana como compuesta del conjunto de sus *líneas* y el sólido como constituido de un número indefinido de fragmentos planos paralelos (mientras que en la actualidad parece más natural considerar los sólidos *de revolución* como la resultante del giro de una lámina plana). Con el fin de evitar sumar *indivisibles*, determina en su lugar las proporciones o relaciones (Pier, 1996).

Vemos aquí un tipo de razonamiento aún presente en nuestros estudiantes, que consideran una figura como compuesta de infinitas de una dimensión menor (lo que, en algunos casos, puede producir errores posteriormente, al realizar una transferencia de las propiedades de las figuras componentes a la figura resultante, como la infinitud de sus dimensiones[111]):

> Este análisis tiende a probar que la percepción de superficies (respectivamente, volúmenes) como el apilamiento de segmentos (respectivamente, superficies), similar a lo desarrollado por Cavalieri y otros en el siglo diecisiete, aunque no se enseña explícitamente, está presente en las representaciones mentales y la cultura matemática informal de los estudiantes de hoy en día. Schneider[112] probó que este hecho puede explicar algunos errores frecuentes y persistentes en el cálculo de áreas y volúmenes, así como algunas dificultades en la comprensión del proceso moderno de integración.

Artigue (1995b), pág. 9

[111] Véase el *obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones*, en la Sección 3.3.4.

[112] Consultar Schneider (1991).

Posteriormente, otro autor que hace cálculos de magnitudes relativas a figuras infinitas (volúmenes, en particular) es Torricelli. Estudiando el problema de tangentes para describir la velocidad, entrevé que, en situaciones particulares, se trata del problema inverso al de áreas. En particular, estudia el semi-hiperboloide de revolución que viene engendrado por una semi-hipérbola ($2x.y = a^2$, $x > 0$, $y > 0$) que gira alrededor de un eje. Observa que los rectángulos inscritos señalados en la Figura 4.2. tienen por área a^2:

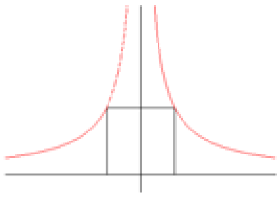


Figura 3.2.

En lenguaje moderno, sus cálculos llevan a que

$$2\pi.\int_0^C xydx = \pi.a^2.C$$

En este caso, el autor sí muestra su entusiasmo al calcular el volumen de una figura de aspecto infinito:

> Incredibile vederi potest, cum solidum hoc infinitam longitudinem habeat, nullam tamen ex illis superficiebus cylindricis quas nos consideramus, infinitam longitudinem habere; sed unamquamque esse terminatam[113].
>
> Torricelli (1644). *Opera geometrica*. Citado en Pier (1996), pág. 17

Con un texto como éste, se podría pensar que la paradoja de una figura de longitud infinita encerrando un volumen finito sorprendió a Torricelli. Sin embargo, el encabezado (*Incredibile vederi potest*) se trata de una fórmula retórica, habitual en la época, para atraer el interés del lector.

Como se ve, el cálculo de áreas y volúmenes de figuras infinitas aparece en el devenir histórico de forma natural, en un afán de investigar y generalizar resultados.

Un autor que desarrolla el cálculo de ciertas integrales importantes es Fermat. Es él quien trata completamente el problema de una curva que va hasta el infinito cuya área es finita (con funciones potenciales); esto fue redactado hacia el 1655, pero se publicó más tarde (1668)[114]. En la primera parte de este texto se tratan las series geométricas (es de destacar que la suma de series geométricas será instrumentalizada como método para el cálculo de áreas de figuras infinitas). En particular, la suma S de una progresión infinita de primer término a y de razón x ($x < 1$) se expresa como (en nuestra notación actual):

---

[113] "Puede parecer increíble que, teniendo por asentado esto de la infinita longitud, sin embargo ninguna de aquellas superficies cilíndricas que nosotros consideramos tiene infinita longitud, sino que cada una es delimitada".

[114] El título es largo y aclara que toma el nuevo problema de cálculo de áreas usando un problema antiguo: las progresiones. La obra se titula *« Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes, et en même temps sur l'emploi de la PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini »* (Dhombres, 1995a).

$$S = \frac{a}{1-x}.$$

La suma infinita será para Fermat un punto de partida para las cuadraturas. En esta obra aborda las curvas para las cuales es clara la presencia de un producto, o un cociente, de una potencia de la abscisa por una potencia de la ordenada:

siendo α y β números positivos, $AG^{\alpha}.EG^{\beta} = cte$ o $\frac{AG^{\alpha}}{EG^{\beta}} = cte$ [115]

El carácter "impropio" de las áreas calculadas está remarcablemente bien señalado y el área bajo la hipérbola se demuestra infinita. Parece ser que, desde 1636, Fermat conocía que (en notación actual):

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

para todo racional n distinto de –1. En su obra de 1668 desarrolla el cálculo de la integral de las "parábolas generalizadas":

$$\int_0^a x^{\alpha} dx, \quad \alpha < 0 \qquad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ (problema parecido al anterior),}$$

para lo que utiliza técnicas parecidas a las sumas de Riemann (siendo, por tanto, una aproximación geométrica). Por otro lado, si consideramos la hipérbola generalizada, $x^{\alpha}.y^{\beta} = a$ (donde el caso $\alpha = \beta = 1$ corresponde a la hipérbola de Apolonio), Fermat aborda el caso $\alpha = 2$, $\beta = 1$ obteniendo el resultado (siendo $a = 1$ y $x_0 > 0$):

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = x_0.\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_0}.$$

De forma general, y en notación moderna, Fermat muestra que para una "hipérbola" del tipo $x^{\alpha}.y^{\beta} = a$, con $\alpha > \beta > 0$, se tiene como área:

$$I = a^{1/\beta}.\int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha/\beta}} = \frac{a^{1/\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}.\frac{x}{x^{\alpha/\beta}} = \frac{x.y}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}.$$

Este trabajo tiende a la generalidad: utilizando el mismo método y utilizando convenientemente series geométricas, da la cuadratura de familias de curvas cuyos *trozos* varían hasta el infinito. Es de destacar que Fermat da este valor en términos de áreas. Sin embargo, no tenemos constancia de que muestre entusiasmo al obtener un valor finito para el área de una

[115] Fermat no aborda curvas más generales porque las que utiliza conservan las progresiones geométricas; es decir, toda progresión geométrica en las abscisas, por correspondencia de la curva, da de nuevo una progresión geométrica en la ordenada (criterio que también usó Saint-Vincent para estudiar la hipérbola. Véase Dhombres, 1995b). En Dhombres (1995a) se dan ejemplos de cómo se calculaban las áreas.

figura infinita. Sí añade que, con un método absolutamente idéntico, se pueden cuadrar parábolas e hipérbolas (Pier, 1996)[116].

Subrayamos el hecho de que, igual que hace Grégoire de Saint-Vincent, Fermat geometriza todas sus construcciones: las series auxiliares son visualizadas por segmentos, las medias geométricas son construidas, etc.. La geometría está omnipresente: no es solamente un enfoque.

Citamos también el caso de que a mediados del siglo XVII el matemático John Wallis y el filósofo Thomas Hobbes escenificaron varias controversias alrededor de temas matemáticos, entre ellas una sobre la naturaleza de la trompeta hiperbólica infinita. Esta trompeta se construye a partir del gráfico de la hipérbola $y = 1/x$, para valores de x mayores que 1, si lo hacemos girar alrededor del eje OX (Figura 3.3):

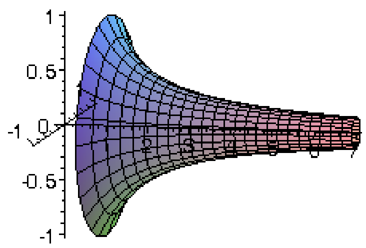


Figura 3.3

Es fácil comprobar que el área superficial de la trompeta es infinita (esto es, a medida que recorremos la trompeta hacia la derecha, su área superficial crece sin límite); sin embargo, su volumen interior es finito (de hecho, vale π). Aparte de esta característica, esta trompeta tiene otras igualmente sorprendentes: no tiene boquilla (no hay dónde ponerla) y tampoco tiene centro de gravedad. Propiedades como éstas resultaban irritantes a un filósofo social como Hobbes, quien así se lo hizo saber al matemático Wallis, ofreciéndole éste la aclaración siguiente:

> Un sólido, o superficie, puede suponerse constituido de tal manera que es infinitamente largo, pero finitamente grande y no tener centro de gravedad... como sucede con los descubiertos por Wallis (yo), Fermat y otros. Pero entenderlo requiere de más conocimientos de geometría y lógica de los que dispone el señor Hobbes.

Imaz (2001), pág. 307

La respuesta de Hobbes fue ciertamente digna de la aclaración ofrecida:

> ... No se requiere (para entenderlo) que el hombre sea un geómetra o un lógico, pero sí que esté loco.

Ídem

En lo único que coincidieron fue en la necesidad de cualidades especiales para entender esta figura. Lo que, en realidad, Hobbes planteaba era la manera de darle “existencia” a “objetos” como la trompeta hiperbólica o a la expresión decimal 0’9999... Pero vemos que, ya históricamente, estas paradojas eran fruto de discusiones. No es de extrañar que, en la actualidad, los estudiantes de Cálculo sigan teniendo problemas para imaginar estas figuras[117].

[116] En Dhombres (1993b), pp. 90-96, se muestra el método geométrico que sigue Fermat para obtener sus resultados, que obviamos aquí por razones de espacio. Es interesante ver cómo Fermat utiliza una progresión geométrica en el eje de abscisas, obteniendo paralelogramos cuyas áreas forman otra progresión geométrica con suma calculable.

[117] En la Sección 3.3.4. citamos los obstáculos de *homogeneizar dimensiones* y de *ligación a la compacidad*, directamente relacionados con estas figuras.

El nuevo enfoque del siglo XVIII es el de sustituir la integral por un desarrollo en series. Como en este siglo no se escriben los extremos de integración de una función (la notación es inventada por Fourier), la integral impropia no aparece como tal. Sin embargo, está implícita y todos los métodos asintóticos (fórmula de sumación de MacLaurin, etc.) se relacionan con ella. Así, las integrales de la ley normal y de sus momentos no plantean ningún problema, salvo para el cálculo explícito. De hecho, es en el marco de un análisis numérico (aceleración de la convergencia) que encontramos más a menudo las integrales impropias durante el siglo XVIII. Además, sin que esté bien visto, la convolución aparece en el escenario matemático, lo que implica el cálculo de una integral sobre un intervalo infinito.

Este nuevo enfoque aparece durante el desarrollo de los trabajos de Newton y Leibniz. Para ellos, la aproximación ya no es geométrica, sino formal (lo que implica la desaparición de muchos problemas, pues ya no hay integrales impropias como tales). Así, se contempla la integral como una anti-derivada y esto implica la existencia de la función. Si, en notación moderna, se escribe:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right),$$

esto quiere decir que la función que se deriva está bien definida, luego no hay problemas entre los extremos de integración.

Para ellos, el problema principal consiste en el desarrollo asintótico de la función $\int_a^x f(t)dt$ (esto es: $\int_0^x f(t).dt = x^n + ...$), lo que puede ser considerado como una variante de la integración impropia. Por tanto, las cuestiones que se plantean hacen referencia a la buena definición de la función (más en relación con las integrales impropias de segunda especie).

Leibniz se interesó por el cálculo de los desarrollos de integrales impropias usando series alternadas, del tipo

$$\sum \frac{(-1)^n.a_n}{n} \approx \int_a^{x_0} f(t)dt \ ,$$

de los que Bernouilli estudia más tarde su convergencia.

Hay que remarcar aquí que, con esta formulación, se centra la atención en la función y su buena definición en el intervalo. Mientras que antes el problema se planteaba sobre el intervalo (Primera Especie), aquí se mira más bien la función (Segunda Especie).

Conjetura: La tendencia actual de separar el estudio de las integrales impropias en primera y segunda especie (cuando la mayoría de los resultados son parecidos) puede tener razones históricas (ya que, al principio, los autores sólo se preocuparon por problemas geométricos y de intervalos infinitos).

Todo este trabajo de desarrollos en series llega hasta el cálculo de una fórmula para $n!$ por Stirling, que proviene de una integral impropia:

$$n! \underset{\text{cuando } n\to\infty}{\approx} \sqrt{2\pi n}.n^n.e^{-n},$$

donde se utiliza que

$$\frac{1}{2}\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n = \int_1^n \ln x.dx - E + o(1)$$

Otra evidencia del cambio de punto de vista, que elimina los problemas sobre la elección de un intervalo finito o infinito, es la ausencia de un tratamiento de las integrales impropias en *Introductio in analysin infinitorum* de Euler (1748)[118]. Euler compara la integral de una función con su serie asociada:

> Euler choisit la notation $\int X.dx$; il adopte les techniques de Newton, notamment l'intégration terme à terme. Toutefois, il lui arrive d'utiliser un processus d'exhaustion notamment en vue de l'approximation des intégrales par le calcul; cette procédure annonce la méthode qui sera suivie par Cauchy. Pour une fonction positive décroissante *f*, Euler compare $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ à $\int_1^n f(t)dt$; à titre d'exemple, il considère $\int \frac{dx}{x^n}$.
>
> Pier (1996), pág. 49

Euler utiliza ya el Criterio Integral[119] y reintroduce consideraciones geométricas. Así, parece que históricamente el desarrollo de comparaciones entre la integral y la serie asociada a una función fue tardío, aunque ya Fermat había usado series para calcular integrales. Euler define también una transformada integral por una fórmula del tipo

$$F(p) = \int_a^b \Phi(t,p).dt,$$

siendo *F* una función desconocida, y hace uso de ellas en su búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden. También vemos en Euler el cálculo de la integral impropia siguiente, resuelto de forma general por Lagrange (1775), en un excelente ejemplo de cálculo que permite evitar el paso al límite:

> En 1775, dans une lettre transmise par Formey, Euler soumet à Lagrange le problème de la détermination de $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}dx = \log 2$. Lagrange lui répond promptement. Sa réponse se base sur le calcul général
>
> $$\int_a^b \frac{x^m - x^n}{\log x}dx = \int_a^b \left(\int_n^m x^y dy\right)dx =$$
> $$= \int_n^m \left(\int_a^b x^y dx\right)dy = \int_n^m \left(\frac{b^{y+1}}{y+1} - \frac{a^{y+1}}{y+1}\right)dy.$$
>
> En posant $a = 0$, $b = 1$, il obtient

[118] Y en *Opera Omnia*, compilación de los trabajos de Euler que se comenzó a publicar en el siglo XX.

[119] Ver enunciado en la Sección 3.2.2.

$$\int_n^m \frac{dy}{y+1} = \log\frac{1+m}{1+n}\,,$$

d'où, pour $m = 1$ et $n = 0$, la valeur log2.

Pier (1996), pág. 58

En este momento el cálculo de integrales impropias está completamente normalizado, pues en 1782 Laplace ya define su transformada:

$$s \mapsto \int_0^\infty e^{-sx}.\varphi(x)dx$$

y comienza su memoria de la siguiente forma:

On est souvent conduit dans l'Analyse, et principalement dans celle des hasards, à des formules dont l'usage devient impossible lorsqu'on y substitue des nombres considérables.

Laplace (1782). *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres*. Citado en Pier (1996), pág. 60

En su *Mémoire sur les intégrales définies* (1811), Poisson combina métodos de resolución de ecuaciones diferenciales y de diferenciación y llega a una igualdad del tipo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx}\cos ax.x^{n-1}dx = \frac{\cos nt}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty} e^{-\theta}.\theta^{n-1}d\theta$$

con $t = \operatorname{arctg}(b/a)$. Poisson envía al lector al tomo IV del *Cálculo integral* de Euler:

Ces formules sont dues à Euler, qui les a trouvées par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réelles aux imaginaires ; induction qu'on peut bien employer comme un moyen de découverte, mais dont les résultats ont besoin d'être confirmés par des méthodes directes et rigoureuses[120].

Poisson (1813). Mémoire sur les intégrales définies, *Journal de l'École polytechnique*, (XVI). Citado en Pier (1996), pág. 62

En 1812, en su *Théorie analytique des probabilités*, Laplace determina el valor de una integral definida de primera importancia. Él considera

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ds\,dx\,e^{-s(1+x^n)}$$

e, integrando con respecto a s, obtiene $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$ [121], integral que consigue llegar a escribir de

[120] Aunque aparece una integral euleriana, este texto, más que a las integrales impropias, hace referencia al uso de la integral sobre un camino complejo. Aunque es cierto que el cálculo de residuos permite la resolución de integrales impropias, lo hace por medio de integrales bien definidas.

[121] Al ser $\int e^{-s(1+x^n)}ds = \frac{-e^{-s(1+x^n)}}{1+x^n}$.

la siguiente forma: $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$ [122]. Por otro lado, escribiendo $s^{\frac{1}{n}}x = t$, obtiene

$$\int_0^\infty \frac{ds\,e^{-s}}{s^{\frac{1}{n}}}\int_0^\infty dt\,e^{-t^n}\ .$$

Haciendo $s = u^n$, llega a que

$$n\int_0^\infty du\,e^{-u^n}\int_0^\infty u^{n-2}dt\,e^{-t^n} = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}\ .$$

El caso particular $n = 2$ expresa que

$$2.\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{2}\ ,$$

luego

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

Gauss, en 1814, da una resolución en funciones continuas de la expresión

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$$

para $\alpha > -1$ y, en 1842, de Morgan proporcionará las series convergentes que representan a la integral $\int_u^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ para $u > 0$ arbitrario. Legendre organiza el estudio de las integrales elípticas en un tratado (1825), donde estudia en profundidad las integrales eulerianas:

> Quoique le nom d'Euler soit attaché à presque toutes les théories importantes du Calcul intégral, cependant j'ai cru qu'il me serait permis de donner plus spécialement le nom d'Intégrales Eulériennes, à deux sortes de transcendantes dont les propriétés ont fait le sujet de plusieurs beaux Mémoires d'Euler, et forment la théorie la plus complète que l'on connaisse jusqu'à présent sur les intégrales définies.
>
> La première est l'intégrale $\int \dfrac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{\left(1-x^n\right)^{n-q}}}$ qu'on suppose prise entre les limites $x = 0$, $x = 1$ […].

---

[122] Considérese que $\int_0^\infty \dfrac{1}{1+x^n}dx = \dfrac{\pi.\mathrm{cosec}(\pi/n)}{n}$. Por ejemplo, para los valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5$, los valores de esta expresión (y de la integral) son: ∞, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2.\pi.\sqrt{3}}{9}$, $\frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$ y $\frac{1}{5}.\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$, respectivamente.

La seconde est l'intégrale $\int dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise de même entre les limites $x = 0$, $x = 1$ […] dans laquelle Euler suppose que a est égal à une fraction rationnelle quelconque $\frac{p}{q}$.

Legendre (1825-1828). *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*; 3 tomes. Citado en Pier (1996), pág. 60

Bertrand señalará en el año 1870 que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ ha sido denominada por Legendre 'integral euleriana de segunda especie' y que su notación $\Gamma(n)$ ha sido adoptada casi unánimemente, a pesar de que, en una de sus memorias, Gauss la haya designado como $\Pi(n-1)$.

De hecho, la Memoria de Poisson de 1823 comienza así:

Le petit nombre des intégrales que l'on sait déterminer exactement rend très-précieuse cette branche de l'analyse qui a pour objet de comparer et de réduire les unes aux autres, et qui est due, pour la plus grande partie, aux travaux d'Euler. Les deux classes d'intégrales dont il s'est le plus occupé, ont été nommées pour cette raison, par M. Legendre, intégrales eulériennes de la première et de la seconde espèce. J'ai déjà eu l'occasion de remarquer que l'on parvient très-simplement aux principales formules qu'il a données pour leur réduction, par la considération des intégrales doubles ; considération dont M. Laplace a le premier fait usage, pour parvenir à des réductions d'intégrales simples : c'est cette manière de démontrer les formules d'Euler que nous allons exposer.

Poisson (1823). Suite du mémoire sur les intégrales définies, *Journal de l'École polytechnique*, (XIX). Citado en Pier (1996), pág. 64

En la notación

$$\Gamma(p)=\int_0^1\left(\mathrm{Log}\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx,$$

con **Re**$p > 0$, debida a Legendre, Poisson reemplaza x por e^x, obteniendo:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx.$$

También, Poisson considera la expresión $\Gamma(p)\Gamma(q)$ y observa que:

$$\int_0^1(1-x)^{p-1}.x^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Posteriormente, desde 1832, Liouville hará uso de la función gamma para introducir el cálculo de diferenciales con índice cualquiera, llegando hasta el cálculo integral fraccionario.

Poisson, en 1820, aborda la resolución de una integral impropia mediante extensión al plano complejo. En concreto, escribe:

Dans l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$, prise […] depuis x = -1 jusqu'à x = +1, les éléments passent du positif au négatif, et les parties infinies peuvent se détruire ; mais alors il semblerait que l'intégrale devrait être nulle, et au contraire, elle est égale à la quantité imaginaire – log(-1) : ce logarithme a, comme on sait, une infinité de valeurs comprises sous la forme $(2n + 1)\pi\sqrt{-1}$, n étant un nombre entier positif ou négatif […] ; or, on ne

voit pas d'abord comment la somme des éléments de l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, qui sont tous réels, peut avoir plusieurs valeurs, et encore moins comment ces valeurs sont imaginaires.
[…]
Nous allons maintenant faire voir qu'on peut encore ramener ces cas d'exception à la notion ordinaire des intégrales, regardées comme les sommes de leurs éléments[123] ; ce qui fera disparaître l'espèce d'anomalie qu'ils présentent.
Il suffit pour cela de faire en sorte que la variable x passe de la limite a à la limite b, par une série de valeurs imaginaires ; alors fx ne deviendra plus infinie pour aucune de ces valeurs intermédiaires[124], et l'intégrale définie reprendra sa signification ordinaire : ainsi, relativement à l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, je fais

$$x = -\left[\cos z + \sin z\sqrt{-1}\,\right],$$

et j'intègre par rapport à z depuis $z = 0$ jusqu'à $z = (2n + 1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Poisson (1820). Suite du Mémoire sur les intégrales définies de Laplace, *Journal de l'École polytechinique*, (XVIII). Citado en Pier (1996), pp. 66-67

Tras esto, Poisson considera

$$dx = -\,i(\cos z + i \sin z)\, dz,$$

de donde se puede deducir que

$$\int \frac{dx}{x} = \left[\mathrm{Log}\left(-\left(\cos z + i \sin z\right)\right)\right]_0^{(2n+1)\pi},$$

que forma parte de uno de los comienzos de la historia de las funciones analíticas.

Cauchy, que redefine la integral de una función continua por medio de sumas de Riemann sobre un segmento (rompiendo así con la tradición de contemplar la integral como anti-derivación y retomando entonces el punto de vista geométrico[125]), se enfrenta directamente al problema de las integrales impropias e inventa la noción de valores principales. Para una singularidad esencial, suma desde $-A$ hasta $+A$ y pasa al límite. En 1821, en su *Cours d'analyse algébrique*, estudia las integrales del tipo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx,$$

lo que da lugar a la definición del Valor Principal de Cauchy (un origen de la teoría de distribuciones). Como bien sabemos, si la función $f(x)$ no está acotada en $x = 0$, esta integral es impropia. Pero el problema de la convergencia es más débil, puesto que se puede encontrar funciones f cuyo valor principal es finito, pero cuya integral impropia en un intervalo que contiene al 0 es divergente. Es de señalar que Cauchy definió este Valor Principal como una <u>alternativa</u> a la divergencia de la integral impropia.

[123] He aquí una afirmación de gran importancia. Poisson escribe esto justo antes de que Cauchy dé su definición de integral definida por medio de sumas de Riemann (independientemente de la derivación).

[124] Vemos aquí un pasaje importante a los números complejos, para evitar los puntos singulares de la función.

[125] Ya iniciado por Euler y Poisson, como hemos mostrado.

En la obra *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), Cauchy da la primera definición precisa de integral. En particular, propone la notación actual para una integral definida, sustituyendo la engorrosa $\int f(x)dx \begin{bmatrix} x=b \\ x=a \end{bmatrix}$ por $\int_a^b f(x)dx$, ya utilizada por Fourier en su *Théorie analytique de la chaleur*, de 1822. Vemos que Cauchy vuelve al método de exhausción, que posteriormente se denominará de 'sumas de Riemann'. La aportación de Cauchy es descrita por Grabiner[126] de la siguiente forma:

> [Cauchy] Synthetised previous work and built a firm foundation so well as to obscure the attempts that preceeded him. Just as Euclide's Elements were so successful that they drove much earlier work into obscurity; just as the Newton- Leibniz calculus made it unnecessary to read much earlier work on areas and tangents; so Cauchy's 'Cours d'analyse' and 'Calcul infinitesimal' made obsolete many of the earlier treatments of limits, convergence, continuity, derivatives, and integrals.
>
> Pier (1996), pág. 80

En sus trabajos de fundamento del cálculo integral Cauchy formaliza muchas de las propiedades actualmente conocidas y las expresa con la nueva notación:

$$\int_X^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^X f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^X \left(f + ig\right)(x)dx = \int_{x_0}^X f(x)dx + i\int_{x_0}^X g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Pasando a los casos límite, considera los ejemplos particulares siguientes que se escriben, en sus notaciones,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x dx = \lim\left(e^{\xi} - e^{\xi_0}\right) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty\,,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim \ell\, \frac{\xi}{\xi_0} = \ell\, \frac{\infty}{0} = \infty\,;$$

por otro lado,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty\,,$$

que da lugar a un *valor indeterminado*.

Además, dispone a partir de 1824 de un medio bastante eficaz de cálculo con la fórmula de los residuos (este método siempre hace intervenir integrales impropias).

A Fourier le debemos la notación actual para las integrales, aunque es Cauchy quien la "institucionaliza" en sus trabajos. Fourier estudia también el problema del desarrollo en series alternadas de ciertas integrales, del tipo:

---

[126] En *The origins of Cauchy's rigorous calculus* (1981). Citado en Pier (1996).

$$\sum \frac{(-1)^n . a_n}{n} \approx \int_a^{x_0} f(t)dt$$

En él se ve bien la diferencia entre el tratamiento local y global del problema. Esto es, para las funciones positivas, el enfoque de la convergencia es más bien local (es el comportamiento en un entorno del infinito el que nos permitirá deducir la convergencia). Sin embargo, para las funciones que cambian de signo, el enfoque es más bien global (es necesario esperar una compensación entre la alternancia de los términos positivos y los negativos). Este tipo de juego local-global será también desarrollado por nosotros en el diseño de nuestra Ingeniería.

Es durante el siglo XIX que se desarrollan las técnicas para asegurar los medios de convergencia de las series de Fourier.

A Bertrand se le debe un importante trabajo de búsqueda de criterios de convergencia para la serie $\sum f(n)$ según el comportamiento de la función *f*(*x*) en el infinito. De forma similar, podemos estudiar la convergencia de la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ mirando el comportamiento de la función *f*(*x*) en un entorno del infinito.

Aquí encontramos otro momento histórico relacionado con el punto de vista de nuestra investigación y con el camino didáctico que se ha escogido para el diseño de la Ingeniería Didáctica.

Finalmente, es Riemann quien caracteriza las funciones Riemann-integrables con una propiedad también válida para las integrales impropias:

Una función es Riemann-integrable si, y solamente si, la medida del conjunto de sus puntos de discontinuidad es nula[127].

Parece ser que la teoría de integrales impropias tuvo su contacto con la teoría de series divergentes, en desarrollo en el siglo XIX. Ésta se retoma ligada a un problema de integración impropia:

> Comme nous venons de le dire, on cessa, après la mort de Cauchy (1857), de se préoccuper des séries divergentes ; c'est seulement plus de vingt ans après que paraît un travail se rattachant à cette question ; je veux parler du "Mémoire de Laguerre sur l'intégrale"
>
> $$\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x}.$$
>
> […]
>
> Mais c'est à 1886 qu'il faut faire remonter les premières recherches à la fois générales et rigoureuses, sur des séries divergentes. À cette époque, parurent simultanément deux Mémoires, l'un de Stieltjes, l'autre de M. Poincaré sur les séries que le premier appelait « semi-convergentes » et le second « asymptotiques ». C'est ce dernier terme qui a prévalu ; la théorie de M. Poincaré a, en effet, une portée bien plus haute que celle de Stieltjes, comme on s'en rendra compte aisément en lisant le Chapitre I.
>
> Ce qui caractérise la théorie de M. Poincaré et lui donne sa grande importance, c'est qu'elle est basée essentiellement sur la possibilité d'appliquer aux séries asymptotiques, dans des conditions bien déterminées que nous apprendrons à connaître, les règles ordinaires du calcul algébrique et du calcul

[127] En el vocabulario de Lebesgue (1904). Un conjunto de medida nula *E* es un conjunto que, dado ε > 0, puede incluirse en una reunión de intervalos I_n: $E \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n$, tales que $\sum_{n\geq 1} |I_n| < \varepsilon$.

intégral. « Les opérations ainsi effectuées correspondent exactement aux opérations analogues effectuées sur les fonctions que l'on fait correspondre aux séries ».

Borel (1901), pp. 13-14

Durante el siglo XX sucede un nuevo cambio del punto de vista. Los autores deben comprender por qué forzosamente a veces hay divergencia. Cuando se desarrolla en series, aparecen a veces puntos en los que no se puede siempre asegurar la convergencia. Podemos ver ejemplos típicos de esto en Fourier, o también en los trabajos sobre la convolución de ciertas funciones.

Cuando estudiamos la teoría de las integrales impropias es necesario llegar hasta la teoría de integración de Lebesgue, pues con esta integral se resuelven algunos problemas que la integral impropia plantea (uno de sus puntos importantes es que si una función es Lebesgue-integrable, su valor absoluto también lo será). Por supuesto, también es necesario revisar los detalles de la teoría de distribuciones y su nacimiento.

Naturalmente, Lebesgue elimina las consideraciones precedentes (las de Cauchy, en particular) tomando el problema por el otro extremo, el de los valores de la función, y como el valor absoluto de una función Lebesgue-integrable lo es también, todas las sutilezas de la integral de Cauchy (valores principales) y otras más se encuentran apartadas a un lugar extraño, que será totalmente revisitado por las distribuciones.

3.1.3. Conclusiones

Como hemos intentado mostrar en la sección precedente, la integral impropia surge en el paisaje matemático como una generalización de resultados y los primeros autores no expresaban sorpresa por los resultados obtenidos. De hecho, las técnicas empleadas en los comienzos son simplemente una generalización de las técnicas empleadas para el cálculo de áreas (siglo XVII).

Los matemáticos que manejan en primer lugar esta nueva herramienta se preocupan más bien de conocer casos concretos y de calcularlos. No hay una teoría general sobre ellas, ni un estudio de su convergencia a priori. Por otro lado, algunos resultados paradójicos causan alguna sorpresa, pero la actitud de los matemáticos es la de aceptarlos como elementos más en el paisaje matemático contemporáneo ("*Entenderlo requiere de más conocimientos de geometría y lógica de los que dispone el señor Hobbes*"). Sin embargo, estos resultados siguen produciendo estupor e incluso pueden generar obstáculos, como se analiza en la Sección 3.3.4.

No es hasta el siglo XVIII que se cambia el punto de vista global-local. La formulación del problema cambia y entra en escena el estudio de las propiedades de la función en el intervalo de integración. Sin embargo, este problema no se plantea como un problema diferente al anterior; es tan sólo el enfoque (ahora analítico y no geométrico) el que ha cambiado. Sin embargo, en los siglos XIX y XX volvemos al enfoque gráfico del problema. Pero esta vez vestido con el nuevo formalismo desarrollado en este período. Esto origina que, muchas veces, la motivación geométrica de la integral de Riemann quede oscurecida por la notación que se emplea.

Este nuevo enfoque del siglo XVIII permite el estudio de las integrales por medio de series, lo que promueve diversos estudios que desembocan en los criterios de convergencia de Bertrand y de Cauchy.

Por otro lado, hasta Leibniz no vemos estudios sobre integrales impropias de funciones que cambian de signo, que Fourier desarrolla posteriormente.

En nuestra Ingeniería trataremos de volver al escenario original en el que surge la integral impropia: el gráfico. Intentaremos mejorar la comprensión de nuestros estudiantes regresando a este registro y motivando la mayoría de resultados desde él. Además, la motivación de nuestra secuencia didáctica será la misma que aparece en la Historia: generalizar los resultados que se conocen para la integral definida. Por otro lado, el interés por la convergencia y la clasificación de resultados no surge hasta que se ha realizado una primera aproximación al nuevo concepto y se descubren algunos resultados por medio de las herramientas que se conocen. Por tanto, el desarrollo de técnicas más específicas será posterior a la obtención de una primera clasificación de resultados.

Igual que ha sido importante en el devenir histórico, el juego global-local tendrá importancia en nuestro diseño, pues permitirá predecir el comportamiento de algunas integrales a partir de propiedades locales o globales del integrando. Este trabajo, y el estudio de las similitudes entre series e integrales, concluirá con el enunciado del Test Integral.

Finalmente, el estudio de las integrales de funciones que cambian de signo permitirá revisar las técnicas desarrolladas. La integral impropia de segunda especie será presentada como una simple variante de la de primera especie, por lo que los resultados podrán ser extendidos sin dificultad.

3.2. DIMENSIÓN DIDÁCTICA

3.2.1. INTRODUCCIÓN

Aunque los estudios de Matemáticas comienzan en nuestra Universidad en el curso 1969/70 (sólo el primer ciclo), es en julio de 1971 cuando se aprueba el Plan de Estudios de la Licenciatura y se implantan los dos últimos años de la Licenciatura. En ese momento la Titulación admitía dos especialidades: “Matemática Aplicada” y “Metodología y Didáctica”.

Posteriormente se suceden otras reformas. El 20 de noviembre de 1973 se reformó el Primer Ciclo del plan de estudios, y en noviembre de 1977 se reforma el Segundo Ciclo, estableciéndose como especialidades “Matemática Fundamental” y “Estadística e Investigación Operativa”.

En el BOE del 9 de octubre de 1969 (nº 242) aparece la siguiente resolución, donde se implanta el primer ciclo:

1847 Orden 26 septiembre 1969 (Mº Educ. y Ciencia).
FACULTAD DE CIENCIAS. La Laguna: plan de estudios para los tres primeros cursos de la Sección de Matemáticas,
Resuelve:
1º Aprobar el plan de estudios que ha de regir en los tres primeros cursos de la carrera, Sección de Matemáticas de dicha Facultad, que [...]quedará de la forma siguiente:

Primer curso (selectivo).
Álgebra lineal, Cálculo infinitesimal, Física general, Química general y Biología o Geología (selectiva).

Segundo curso.

	Clases teóricas	Clases prácticas
Análisis Matemático 1º	3	3
Geometría 1º	3	2
Álgebra y Topología	3	3

Física Teórica 1º	3	2
Total: 22 horas semanales.		
Tercer curso.		
Análisis Matemático 2º	3	3
Geometría 2º	3	3
Cálculo de Probabilidades y Estadística	3	2
Física Teórica 2º	3	2
Total: 22 horas semanales.		

En el BOE del 4 de octubre de 1971 aparece una reforma (orden de 26 de julio) de la resolución del 11 de marzo, y queda establecido el Plan de Estudios; los estudios de Matemáticas se completan con los dos últimos años.

Es en el año 1973 cuando se reforma el Primer Ciclo y se redistribuyen las asignaturas. Con esta reforma, los contenidos sobre integración impropia se estudian en el Primer Curso en la asignatura *Análisis Matemático I*. En el último año de este Plan de Estudios (1994/95) aparece el siguiente programa de la asignatura [GU1]:

101 ANÁLISIS MATEMÁTICO I

PROGRAMA:

1. El número real.
2. El número complejo.
3. Sucesiones.
4. Series.
5. Funciones, límites y continuidad.
6. Derivabilidad.
7. Fórmula de Taylor y aplicación.
8. La integral de Riemann.
9. Cálculo de primitiva.
10. Aplicaciones geométricas y físicas de la integral.
11. Integrales impropias.
12. Sucesiones y series de funciones.
13. Series de potencias.
14. Construcción de los números reales.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- N. Hayek,
“Una introducción al Análisis Matemático”.
Departamento de Análisis Matemático.
Universidad de La Laguna.

2.- M. Spivak,
“Cálculus”.
Ed. Reverté, Barcelona.

3.- E. Tebar Flores,
“Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tomos I y II”.
Ed. Tebar Flores.

4.- B. Demidovich,
“Problemas sobre cálculo de una variable”.
Ed. Paraninfo.

En la Reforma de los planes de estudio que se realiza en el año 1995 se implanta la nueva Titulación en cuatro años y el sistema de créditos. En concreto, en el BOE del 7 de septiembre de 1995 encontramos:

UNIVERSIDADES

20555 RESOLUCIÓN de 16 de agosto de 1995, de la Universidad de La Laguna, por la que se ordena la publicación del plan de estudios conducente a la obtención del título oficial de Licenciado en Matemáticas.

[...]

Este Rectorado, en virtud de las competencias que tiene atribuidas, ha resuelto ordenar la publicación del plan de estudios conducente a la obtención del título oficial de Licenciado en Matemáticas, aprobado el 25 de mayo de 1995 por la Junta de Gobierno de la Universidad de La Laguna y homologado por acuerdo de la Comisión Académica del Consejo de Universidades de fecha 14 de julio de 1995, que quedará estructurado conforme figura en el anexo de la presente Resolución.

La Laguna, 16 de agosto de1995.- El Rector, Matías López Rodríguez.

ANEXO QUE SE CITA
Estructura y organización del plan de estudios

1. Título oficial a que conducen estos estudios: Licenciado en Matemáticas.
2. Enseñanzas de: Primer y segundo ciclos.
3. Centro responsable de la organización del plan de estudios: Facultad de Matemáticas.
4. Carga lectiva global en créditos: 300.

Distribución

Ciclo	Curso	Materias troncales	Materias obligatorias	Materias optativas	Libre confi-guración	Trabajo fin de carrera	Total por curso
I...	1º	46	13,5	18	-	-	77,5
	2º	33	28,5	6	5,5	-	73
II...	3º	37	15	12	10,5	-	74,5
	4º	11,5	-	49,5	14	-	75
Totales...		127,5	57	85,5	30	-	300
Porcentaje		42,5	19	28,5	10	-	100

5. Trabajo o proyecto fin de carrera: No se exige.
6. Distribución de la carga lectiva global por año académico:

Año académico	Totales	Teóricos	Prácticos/clínicos
1º	77,5	42	35,5
2º	73	41	32
3º	74,5	42	32,5
4º	75	41,5	33,5

7. Especificaciones y aclaraciones: Todas las asignaturas son semestrales, asignándose a cada semestre un período lectivo de quince semanas.

Se otorgan, por equivalencia, 6 créditos a trabajos académicamente dirigidos e integrados en el plan de estudios. Estos créditos serán optativos, prácticos y tendrán una equivalencia de diez horas por crédito

8. Organización temporal de las enseñanzas:

(Tr.: Troncales. Ob.: Obligatorias. Op.:Optativas)

Curso 1.º: Primer semestre:

Tr. Análisis Matemático I.
Tr. Informática I.
Ob. Álgebra I.
Ob. Seminario de Análisis Matemático.
(6 créditos catálogo optativas.)

Curso 1.º: Segundo semestre:

Tr. Álgebra II.
Tr. Análisis Matemático II.
Tr. Geometría I.
Tr. Métodos Numéricos I.
(12 créditos del catálogo de optativas.)
[...]

El programa de la asignatura en la que se estudian las integrales impropias, *Análisis Matemático II*, que aparece publicado en la Guía Académica de la Facultad del curso 2002/03 (curso en que se desarrolla nuestra Ingeniería) es el siguiente [GU3]:

10Ñ Análisis Matemático II

Número de créditos teóricos:	4,5
Número de créditos prácticos:	3
Carácter:	Troncal
Curso y cuatrimestre:	1º Curso. 2º Cuatrimestre
[...]	
Presentación:	Se formaliza de forma rigurosa el concepto de Integral de Riemann con adiestramiento en el cálculo de primitivas, dándose una breve introducción a las ecuaciones diferenciales. Se analiza, por otro lado, el concepto de integral impropia poniendo de manifiesto el paralelismo con el algoritmo de las series numéricas. Se insiste en las aplicaciones geométricas elementales de la integral definida
Contenidos:	Tema I. Preliminares I.1 Representación gráfica de funciones. I.2 Coordenadas paramétricas. Coordenadas polares. I.3 Funciones circulares, exponencial e hiperbólicas. I.4 Introducción a los números complejos. Tema II. Integral de Riemann II.1 Definición y primeras propiedades. II.2 Condiciones de integrabilidad. Sumas de Riemann. II.3 Integración de funciones continuas y monótonas. II.4 Teorema fundamental del Cálculo Integral. II.5 Teorema del Valor Medio. II.6 Cambio de variable e integración por partes.

	Tema III. Cálculo de Primitivas III.1 Concepto de primitiva e integral indefinida. III.2 Integrales inmediatas. III.3 Métodos de sustitución e integración por partes. III.4 Integración de funciones racionales. III.5 Integración de funciones trigonométricas. III.6 Integración de ciertas funciones irracionales. III.7 Sustituciones trigonométricas. Tema IV. Ampliación de la Integral de Riemann IV.1 Integrales impropias. IV.2 Integrandos positivos: Criterios de convergencia. IV.3 Convergencia absoluta. IV.4 Funciones de Euler. IV.5 La integral de Riemann-Stieltjes. Tema V. Aplicaciones geométricas de la Integral de Riemann V.1 Cálculo de áreas planas. V.2 Longitud de arco. V.3 Volúmenes y superficies de cuerpos de revolución. V.4 Volúmenes de cuerpos de sección conocida. Tema VI. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias VI.1 Tipos de Ecuaciones Matemáticas. VI.2 Las ecuaciones diferenciales y las ciencias. VI.3 Solución o integral general de una ecuación diferencial. VI.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Métodos de resolución. VI.5 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.
Metodología:	Tres clases teóricas y dos de problemas a la semana. Se adjuntará listas de problemas, dándose indicaciones de resolución en las clases. Se propondrá algún tipo de trabajo que complemente lo explicado en las clases teóricas.
Forma de evaluación:	Examen cuatrimestral. Consta de dos partes correspondientes cada una a lo impartido en las clases de teoría (60%) y en las de problemas (40%).
Bibliografía básica:	1. Apostol, T. M.: "Cálculus", Reverté, Barcelona, 1986 2. Apostol, T. M.: Análisis Matemático, Reverté, Barcelona, 1988 3. Ayres, F. Ecuaciones Diferenciales, McGraw Hill, México 1976 4. Makarenko, G. y otros: Problemas de Ecuaciones Diferenciales. Editorial Mir. 1976. 5. Ortega, J.M.: Introducción al Análisis Matemático. Ed. Labor, Barcelona, 1993 6. Hayek, N.: Una introducción al Análisis Matemático, Campus, La Laguna, 1986 7. Marcellán, F. y otros: Ecuaciones Diferenciales. McGraw Hill, Madrid, 1990 8. Guzmán, M. y Rubio, B.: Problemas y métodos del Análisis Matemático, Ed. Pirámide, Tomos I, II y III. 9. Spivak, M.: Calculus, Reverté, Barcelona, 1987 10. Demidovich, B.: Problemas y ejercicios de Análisis Matemático, Paraninfo, Madrid, 1976
Otra bibliografía:	
Prerrequisitos:	Aunque la asignatura se puede cursar de forma independiente y autónoma, se recomienda tener conocimientos previos de Análisis Matemático I y Seminario de Análisis Matemático
Horario de tutorías:	Se anunciará oportunamente

De este programa destacamos tres cosas:

- En primer lugar, el énfasis que se hace en el cálculo de primitivas y el término empleado: *adiestramiento*.

- En segundo lugar, se observa que la bibliografía que se emplea tiene diez años de antigüedad (pues el texto más reciente es de 1993 y el programa es del curso 2002/03); además, de los 10 libros recomendados, 3 son de los años 70, 4 de los años 80 y 3 de los años 90.
- Por último, es novedoso que en el programa de este curso se hace alusión al paralelismo entre las integrales impropias y las series. Hemos de destacar que esto es algo completamente nuevo en el programa, pues en la secuencia habitual no se hace esta alusión (como se ve en la Sección 3.2.2.). De hecho, si vemos los programas de otros cursos, se lee:

[GU2]:

Presentación:	Desarrollamos y profundizamos en el concepto de integral definida tanto propias como impropias, así como integrales paramétricas. Finalmente, como aplicación del cálculo de primitivas, se hace una breve introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

[GU4]:

Presentación:	Una vez adquiridos, en el cuatrimestre anterior, los conocimientos básicos sobre cálculo diferencial de funciones de una variable y el estudio de sucesiones y series, esta asignatura se centra en introducir al alumno en el concepto de integral y en el estudio de sus propiedades y aplicaciones para el caso de funciones de una variable. Todos los contenidos de la asignatura, desde la construcción teórica del concepto de integral definidia, a los métodos para el cálculo de primitivas, pasando por la extensión de la integral de Riemann al caso de integrales impropias y por las aplicaciones geométricas al cálculo de áreas, volúmenes, ... son de vital importancia para el posterior aprendizaje del alumno de la mayor parte de las disciplinas que componen la carrera de Matemáticas, no sólo (ni mucho menos) las específicas de las áreas de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

[...]

Destrezas a adquirir:	* Manipular con soltura las Sumas de Riemann y ser capaces de obtener algunas integrales sencillas como límites de estas sumas. * Conocer y saber aplicar los resultados sobre condiciones suficientes y/o necesarias para la integrabilidad de funciones. * Reconocer fácilmente el carácter impropio de una integral definida y aplicar con solvencia los correspondientes criterios de convergencia y métodos de cálculo. * Dominar los métodos clásicos para el cálculo de primitivas. * Traducir, con soltura, diversos problemas relativos al cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco, ..., en la resolución de una o varias integrales definida. * Saber resolver ecuaciones diferenciales elementales como aplicación del cálculo de primitivas.

Como consecuencia de estos programas, se muestra a continuación cómo se organiza, en general, la enseñanza de la integración impropia en el nivel universitario.

3.2.2. LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL IMPROPIA

LOS MANUALES DE CONSULTA

Algunos de los textos recomendados como obras de consulta en los diferentes programas de la asignaura son, principalmente, los textos de Apostol (1986), Fernández Novoa (1990), Guzmán y Rubio (1992), Hayek (1986), Ortega (1993), Rudin (1980) y Spivak (1987). Describimos a continuación la presentación que se hace en cinco de ellos de la integración impropia, donde se usan acercamientos diferentes.

El libro de Apostol (1986) comienza con una introducción histórica de los conceptos básicos del Cálculo. La presentación formal empieza con los números reales y su axiomática y, tras ello, se desarrollan los conceptos del cálculo integral. Como herramientas, se exponen algunas definiciones básicas de funciones para llegar al concepto de área como función de conjunto. La primera definición de integral que se presenta es la de integral para funciones escalonadas. Con esta aproximación, se define la integral para funciones más generales de la siguiente forma:

> El método está inspirado en el de Arquímedes. [...] La idea es simplemente ésta: se empieza por aproximar por defecto y por exceso la función *f* mediante funciones escalonadas [...]. Para ello se supone que se elige una función escalonada arbitraria, designada por *s*, cuya gráfica está por debajo de la de *f*, y una función escalonada arbitraria, designada por *t*, cuya gráfica está por encima de la de *f*. Si ahora se considera el conjunto de todos los números $\int_a^b s(x)dx$, y $\int_a^b t(x)dx$ obtenidos eligiendo *s* y *t* de todas las maneras posibles, se tiene en virtud del teorema de comparación:
>
> $$\int_a^b s(x)dx < \int_a^b t(x)dx$$
>
> Si la integral de *f* ha de cumplir también el teorema de comparación, ha de ser un número comprendido entre $\int_a^b s(x)dx$ y $\int_a^b t(x)dx$ para cada par *s* y *t* de funciones de aproximación. Si existe un *número único* con esta propiedad, parece lógico tomar este número como definición de integral de *f*.

Apostol (1986), pág. 89

Con esta introducción se justifica razonadamente que es necesario trabajar con intervalos finitos y funciones *f* acotadas en ellos. Inmediatamente después se comienza a caracterizar algunas funciones integrables y se enuncian teoremas de propiedades de la integral y aplicaciones al cálculo de áreas, entre otras.

Tras definir la integral indefinida de una función se comienza con el capítulo de continuidad (donde se enuncian los teoremas de integración de funciones continuas), luego el capítulo dedicado a la derivación (con una introducción histórica y a lo largo del cual aparecen varias interpretaciones geométricas de los conceptos estudiados. Finalmente, se estudian algunas aplicaciones, como el estudio de curvas) y un capítulo que presenta la relación entre la integración y la derivación y algunas técnicas y teoremas de integración. En el capítulo siguiente se estudian las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas inversas. Finaliza este capítulo con más técnicas de integración.

Después de estudiar los polinomios de Taylor, la regla de L'Hôpital, la resolución de indeterminaciones y de ecuaciones diferenciales sencillas, los números complejos y sus propiedades, comienza el estudio de sucesiones, series e integrales impropias en un mismo capítulo. Este capítulo se introduce con una paradoja histórica, la de Zenón relativa al corredor y la imposibilidad de recorrer una distancia finita porque siempre le quedará la mitad por recorrer. En esta introducción se muestra de forma gráfica que

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\geq \log(n+1)$$

usando la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x+1}$ y una suma superior. Después de definir las sucesiones, las series y los criterios de convergencia nos encontramos con el criterio integral:

Teorema (Criterio integral):
Sea f una función positiva decreciente, definida para todo real $x \geq 1$. Para cada $n \geq 1$, sean

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad \text{y} \qquad t_n = \int_1^n f(x)dx.$$

Entonces o ambas sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen o ambas divergen.

La demostración que se presenta de este teorema es muy sencilla; se basa en tomar una partición de diámetro uniforme uno y las sumas de Riemann superiores (tomando el valor de la función en el extremo izquierdo de cada intervalo) e inferiores (tomando el valor de la función en el extremo derecho de cada intervalo).

A continuación se estudian las series alternadas y la convergencia absoluta y condicional. Finalmente, se estudian las integrales impropias. En su presentación se hace el siguiente comentario:

> Es evidente que las definiciones correspondientes a las integrales impropias tienen un gran parecido con las de las series infinitas. Por tanto, no es sorprendente que muchos de los teoremas elementales sobre series tengan su réplica en la teoría de las integrales impropias.
> Si la integral propia $\int_a^b f(x)dx$ existe para cada $b \geq a$, se puede definir una nueva función I como sigue:
>
> $$I(b) = \int_a^b f(x)dx \text{ , para cada } b \geq a.$$
>
> La función I así definida se denomina *integral infinita* o *integral impropia* de primera especie y se indica por medio del símbolo $\int_a^\infty f(x)dx$. La integral se dice que es *convergente* si el límite
>
> $$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$
>
> existe y es finito. En caso contrario se dice que la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ es *divergente*. Si el límite [...] existe y es igual a A, se dice que el número A es el *valor* de la integral y se escribe:
>
> $$\int_a^\infty f(x)dx = A.$$
>
> Esta definición es análoga a la dada para las series infinitas. Los valores de la función $I(b)$ juegan el mismo papel que las “sumas parciales”, por lo que se las llamará “integrales parciales”.

Apostol (1986), pp. 508-509

Se continúa el capítulo con más definiciones y criterios, algunos de los cuales coinciden con los que se presentan en el siguiente epígrafe dentro de esta Sección. Finalmente, algunos ejercicios. Es de notar que no hay ninguna gráfica en esta parte dedicada a las integrales impropias.

En el texto de Fernández Novoa (1990) se comienza introduciendo la aritmética de los números naturales, enteros y racionales para pasar inmediatamente a las sucesiones. Con estos elementos se define el cuerpo de los números reales y su axiomática. Tras esto, se comienza con los límites infinitos de sucesiones y algunos criterios para resolver indeterminaciones.

El siguiente bloque está dedicado a la topología de $\mathbb{R}$ y al trabajo con funciones de variable real: límites, continuidad, derivabilidad y el teorema de Taylor. Destacamos que en este texto se introduce la derivada de una función directamente al empezar el capítulo correspondiente, con su definición formal. Es sólo un poco después cuando se da una primera y breve interpretación geométrica de esta definición.

El bloque dedicado a la integración comienza directamente con la definición de partición de un intervalo y de suma inferior y superior de una función acotada en un intervalo. Inmediatamente después se comienza con los teoremas clásicos sobre integración y de caracterización. Como apéndice a esta primera sección del bloque se presenta el Teorema de Lebesgue.

En el siguiente capítulo de este bloque se presentan los teoremas del valor medio y los fundamentales del Cálculo y la regla de Barrow. Finalmente, se presenta la integral definida de una función f integrable en un intervalo compacto $[a, b]$ como límite de sumas; en concreto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx\,.$$

En el siguiente bloque se introducen, principalmente, las funciones exponenciales, potenciales, logarítmicas y trigonométricas utilizando las herramientas anteriores. Con todo esto, en el siguiente bloque se aborda el cálculo de primitivas.

No encontramos en este texto ninguna alusión directa a las integrales impropias.

Al comienzo del tema sobre integrales de la obra de Spivak (1987), podemos leer la siguiente introducción:

> Aunque será necesario definirla de forma esencialmente complicada, la integral viene a formalizar un concepto sencillo, intuitivo: el de área. Ahora ya no nos debe causar sorpresa el encontrarnos con que la definición de un concepto intuitivo puede presentar grandes dificultades y ciertamente el "área" no es ninguna excepción a esto.
>
> Spivak (1987), pág. 317

En este texto se da una primera definición de integral muy intuitiva:

> En este capítulo intentaremos solamente definir el área de algunas regiones muy especiales: aquellas que están limitadas por el eje horizontal, las verticales por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. Conviene denotar esta región por $R(f, a, b)$. Obsérvese que estas regiones incluyen rectángulos y triángulos, así como muchas otras figuras geométricas importantes.
> El número que asignaremos eventualmente como área de $R(f, a, b)$ recibirá el nombre de *integral de f* sobre $[a, b]$. En realidad, la integral se definirá también para funciones f que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. ...[En este caso] la integral representará la diferencia entre las áreas de las regiones [que están sobre y bajo el eje]...
>
> Spivak (1987), pág. 318

Las definiciones de integrales impropias, aquí, se dan en la parte de problemas, donde se plantean algunos ejercicios.

El libro de Guzmán y Rubio (1992) presenta un enfoque diferente, y encontramos el tema sobre integración antes que el de derivación. En este texto se introduce primero la integral de una función, luego la derivada (al final de este capítulo se presentan algunas técnicas de cálculo de primitivas) y, finalmente, encontramos un capítulo titulado *Integración y derivación*, donde se enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo, la regla de Barrow, se dan más técnicas de integración y aparecen las integrales impropias junto con aplicaciones del cálculo integral.

Sus razones para elegir este itinerario didáctico las exponen ellos mismos:

> Hemos preferido estudiar las integrales antes que las derivadas. Lo que se puede decir sobre integración, que no es poco, sin utilizar la derivada, se expone en el capítulo 4. Hay varias razones que avalan esta metodología. El problema de la integral, la medida de áreas, es previo al que motiva la aparición de la derivada, y también más simple, pues responde a una concepción geométrica y estática de la matemática, mientras que la derivada se basa en una interpretación dinámica. [...] La integración se apoya en la idea muy intuitiva, y aceptada bien por el estudiante, de que existe realmente un número que mide el área; en cambio, la tasa de crecimiento o el límite de las inclinaciones de las secantes a una curva, que motivan la derivada, son conceptos más difíciles. Si se estudia primero la integral, se comprenderá que ésta es algo más que un proceso inverso al de la derivada.
>
> Guzmán y Rubio (1992), pág. 16

El texto de Hayek (1986) vuelve al estilo clásico. Introduce el número real y las sucesiones de números reales y el cálculo de límites. Pasa a las series y luego a las funciones y sus límites para tratar a continuación la continuidad y derivabilidad de funciones, además de los teoremas clásicos y la Fórmula de Taylor.

El tema de integración comienza con una motivación histórica y alusión al cálculo de áreas. Tras esta introducción, se comienza con las definiciones y teoremas habituales.

Las integrales impropias se presentan como sigue:

> Al establecer el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)dx$ en el sentido de Riemann, se exige que la función f esté acotada en el intervalo finito [a, b]; esa restricción lleva implícita dos condiciones que, al analizarlas ahora por separado, dará lugar a una notable extensión de la teoría de la integración. En efecto, el incumplimiento de una de ellas (por ejemplo, cuando se trate de intervalo de integración infinito) o de la otra (función a integrar no acotada), o de ambas, conduce a nuevas definiciones que dan origen a las llamadas integrales impropias o generalizadas. Estos tipos de integrales generalizadas, una vez resuelto el problema de integrar una función definida en un intervalo I compacto (o sea, cerrado y acotado de $\mathbb{R}$), se definen como límites de integrales calculadas en subintervalos compactos de I.
>
> Hayek (1986), pág. 277

Se estudian por separado los casos en que el intervalo es infinito y en que la función es no acotada y se dan criterios para cada uno. A continuación se presentan las funciones eulerianas y sus propiedades.

Los distintos enfoques que se han presentado con el análisis de los libros o manuales recomendados dan lugar a una secuencia de enseñanza habitual en nuestra Universidad que describimos en el siguiente apartado.

La secuencia de enseñanza habitual

Mostramos a continuación un breve desarrollo de la presentación que se hace, habitualmente, en nuestra Universidad de los contenidos sobre integración, hasta llegar a la Integración Impropia.

En general, es habitual encontrar cómo el concepto de integral definida ha sido introducido motivándose en el cálculo de áreas. En una primera aproximación, se escribe:

$$\left.\begin{array}{c} -\infty<a<b<\infty \\ [a,b] \\ f(x) \\ \text{continua} \end{array}\right\} \overset{\text{existe área bajo } f(x)}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$$

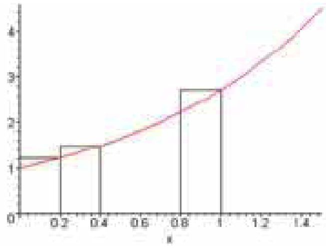
A continuación se dan varios ejemplos, todos ellos con una clara motivación geométrica y basándose en el cálculo de áreas. Las primeras integrales que se calculan se hacen utilizando razonamientos geométricos. Algunas de las más habituales son las siguientes:

$$a)\ \int_a^b k.dx = k.(b-a) \qquad b)\ \int_a^b x.dx = \frac{(b+a)}{2}.(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$c)\ \int_0^2 |x-1|dx = 1 \qquad d)\ \int_{-1}^3 E[x]dx = 2$$

$$e)\ \int_{-2}^2 x^3.dx = 0 \qquad f)\ \int_0^1 e^x dx = R(f;0,1) = e-1$$

La última de estas integrales se calcula haciendo una partición del intervalo y calculando el límite de la suma de las áreas de n rectángulos mayorantes de la función:



$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.e^{k/n} = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} e^{k/n} = \frac{1}{n}.\frac{e^{1/n}-e.e^{1/n}}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{e^{-1/n}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n.\left(1-e^{-1/n}\right)} = e-1$$

$$\text{Porque: } \lim_{n\to\infty} n.\left(1-e^{-1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} \overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}.e^{-1/n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = 1$$

Este ejemplo sirve para introducir el concepto de partición y de suma superior e inferior. Más adelante, nos encontramos la siguiente definición de función integrable Riemann:

> **Definición:**
> Sea f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada, siendo $[a, b]$ finito.
> Se dice que f es INTEGRABLE (en sentido Riemann) en $[a, b]$ si, y sólo si, $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

A continuación, se dan algunas condiciones necesarias y suficientes para asegurar la integrabilidad de la función usando propiedades de las particiones. Finalmente, se enuncia:

> **Teorema:**
> Sea f continua en $[a, b]$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$.

Tras esto, se suele ofrecer un contraejemplo de que la condición de estar acotada no implica ser integrable. Este contraejemplo es la conocida función de Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases} 1, x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se demuestra que no es integrable calculando su integral inferior y su integral superior y viendo que no son iguales.

Tras algunos teoremas[128] y ejemplos nos encontramos la siguiente definición:

> **Definición (Área plana encerrada por una curva):**
> Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \Re([a, b])$ y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.
>
> $$A(f; a, b) = \int_a^b f(x)dx .$$

Además, se dice que si la función es estrictamente negativa en el intervalo, el área coincide con la integral cambiada de signo. Si la función cambia de signo, se suman la integral en los subintervalos donde es positiva y la integral en los subintervalos donde es negativa, cambiada de signo.

Posteriormente, se enuncian algunos teoremas clásicos (como el del valor medio generalizado al cálculo integral) y otros sobre propiedades de la integral (linealidad, integrabilidad del valor absoluto de una función integrable y del producto de funciones,...).

Se da una interpretación geométrica de la definición de valor medio de una función en el intervalo $[a, b]$:

$$\alpha = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

diciendo que "$A(f; a, b)$ es el área de un rectángulo de base $(b - a)$ y altura α, el valor medio de f en $[a, b]$".

Otra condición de integrabilidad que se enuncia es la siguiente:

> **Teorema:**
> Sea f definida y monótona en $[a, b]$. Entonces, $f \in \Re([a, b])$.

Esta parte se concluye con varios teoremas más sobre propiedades de la integral. Después, se enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y otros teoremas relacionados. Se concluye con los teoremas del cambio de variable y de la integración por partes.

Antes de comenzar con los conceptos de la integración impropia, se suele hacer un acercamiento al cálculo de límites de sucesiones utilizando la integral de Riemann; se insiste en

[128] Entre ellos, nos encontramos el que afirma que si una función es integrable y positiva en el intervalo de integración, entonces su integral definida es positiva también. También se enuncia y se demuestra el teorema de aditividad del intervalo de integración.

buscar una función adecuada y una partición útil para plantear el término general de la sucesión como una suma de Riemann. Por ejemplo, para el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}.\left(\frac{(n-1).n}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

se procede de la siguiente forma:

Se toma la función $f(x) = x$ en el intervalo [0, 1], con la partición uniforme $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right\}$ y se hace lo siguiente:

$$x_n=\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{b-a}{n}.\left[f(\alpha_1)+...+f(\alpha_n)\right],$$

donde $[a, b] = [0, 1]$ y $\alpha_i \in \left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$[129]; por tanto, ya ha sido reescrito el término general de esta sucesión como una suma de Riemann.

De esta forma, se hace:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.\Delta x=\int_0^1 x.dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

Utilizando este procedimiento, se puede calcular algunos límites más. Consideramos que esta aproximación, aunque interesante, no deja de resultar meramente algorítmica, y pensamos que a los estudiantes no les queda bien claro el paso de lo discreto a lo continuo que supone la integral.

Al comienzo del tema en que se abordan las integrales impropias es normal hacer un recordatorio de las dos condiciones[130] que, hasta el momento, han sido utilizadas:

$$\left.\begin{array}{r}[a,b]\ \textit{finito}\\ f\ \text{acotada}\end{array}\right\}\wedge f\in\Re([a,b])\Rightarrow\exists\int_a^b f(x)dx$$

y se añade: "*si fallan las hipótesis, puede existir la integral impropia*".

Seguidamente, se dan algunos ejemplos de funciones no acotadas en un intervalo finito o acotadas en un intervalo infinito, y se calculan sus integrales haciendo uso de límites. Se hace de una forma natural, pues aún no se han definido ni clasificado las integrales impropias. Algunos ejemplos habituales son los siguientes:

---

[129] En particular, cada α_i es el extremo izquierdo de cada subintervalo. Por tanto, α_1 es igual a cero y $\alpha_2 = \frac{1}{n}$.

[130] Aunque ya hemos visto, con la función de Dirichlet, que estas dos condiciones juntas no son suficientes.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}0\ , & x=0\\ 1/x, & 0<x\le 1\end{cases}\qquad \int_0^1\frac{dx}{x}=\infty$$

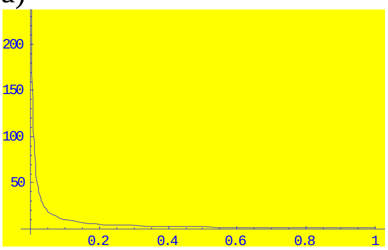
$$b)\ f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1/\sqrt{x}, & 0<x\le 1\end{cases}\qquad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$$

$$c)\ f(x)=e^{-x}\qquad \int_0^{\infty}e^{-x}dx=1$$

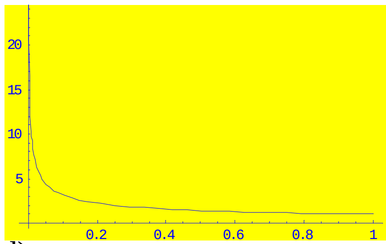
$$d)\ f(x)=x^{-1/3}\qquad \int_1^{\infty}x^{-1/3}dx=\infty$$

cuyas gráficas son las que presentamos a continuación, en el mismo orden:

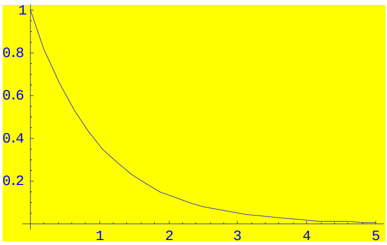
a)



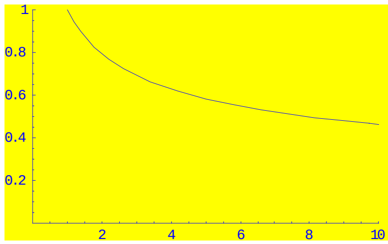
b)



c)



d)



Posteriormente, se da la clasificación de las integrales impropias, tal como sigue:

Primera especie Intervalos no acotados $[a, +\infty)$	Sea *f* definida y acotada en $[a, +\infty)$. $f \in \Re([a, b]),\ \forall\ b>a$[131]	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
Segunda especie Integrando no acotado $[a, b]$ finito, *f* no acotada en $[a, b]$	Suponemos que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$[132]. $f \in \Re([a, b\text{-}\varepsilon]),\ \forall\ \varepsilon>0$	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
Tercera especie Combinación de las anteriores	$I = \int_a^{\infty} f(x)dx$ con $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.	$\int_a^{\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_c^{\infty} f(x)dx}_{I_2}$ *I* converge si lo hacen I_1 e I_2 simultáneamente

[131] En general se definen así las integrales impropias cuando no se ve la definición de integrabilidad local.

[132] Si el punto donde la función se hace infinito fuera interior al intervalo, $\exists\ c \in [a, b]\ /\ \lim_{x\to c} f(x)=\infty$, definimos: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx\right]$ que se reduce a estudiar dos integrales del tipo aquí definido.

Los principales criterios de comparación que se enuncian son los que siguen:

- $\underset{(a>0)}{\int_a^{\infty}} \frac{dx}{x^k}$ es $\begin{cases} \text{convergente si } k > 1 \\ \text{divergente} \quad \text{si } k \leq 1 \end{cases}$

- Sean *f, g* definidas y acotadas en $[a, +\infty)$ (tales que, $\forall\ b>a$: $f, g \in \Re([a, b])$). Además, se cumple: $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Entonces:

$$1) \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$
$$2) \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ diverge.}$$

- Sean *f, g* definidas y acotadas en $[a, +\infty)$, tales que $f, g \in \Re([a, b])$ y $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, +\infty)$. Suponemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$. Entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ y } \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ tienen el mismo carácter.}$$

En otro caso, si $C = 0$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente. Y si $C = \infty$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ es divergente.

- Sea $a > 0$ y *f* definida y acotada en $[a, \infty)$ / $f \in \Re([a, b])$, $\forall\ b > a$ y $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, \infty)$. Sea $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} x^k.f(x)$. Entonces:

  Si $\lambda \neq \infty \wedge k > 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

  Si $\lambda \neq 0 \wedge k \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge[133].

- Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

- Las integrales de la forma $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^r}$, $r \in \mathbb{R}$, son convergentes para $0 < r < 1$.

- Sea $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ / $f \in \Re([a, b\text{-}\varepsilon])$ y $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Sea $\lambda = \lim\limits_{x\to b}(|x-b|)^r.f(x)$. Entonces:

[133] Nótese que, para aplicar este criterio, es necesario que $a > 0$. Por esta razón, en los ejemplos utilizados para ilustrarlo, cuando se trata de una integral desde cero a infinito, se divide en dos: desde cero hasta uno y desde uno hasta infinito. La primera integral es de Riemann, luego no se utiliza, y se toma sólo la segunda para aplicar el criterio y estudiar el carácter de la integral. Si se hace con los dos ejemplos: $\int_0^{\infty} \frac{x.dx}{x^4 + 2x + 1}$ y $\int_0^{\infty} \frac{x.dx}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$, la primera resulta convergente y la segunda divergente. Este procedimiento se utiliza varias veces, también utilizando otros criterios. Mostramos en la Sección 3.3.4. cómo algunos estudiantes descontextualizan este criterio y cómo lo hacen.

$$\text{Si } \lambda \neq \infty \wedge r < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

$$\text{Si } \lambda \neq 0 \wedge \ r \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ diverge.}$$

Los problemas y ejercicios propuestos a los estudiantes son, generalmente, de tipo algorítmico y rutinario. Suelen consistir en el estudio de la convergencia de cierta integral, en comparar con otra integral o en calcular directamente su valor.

Una vez acabada esta parte, se introducen las funciones eulerianas Gamma y Beta y se estudian sus aplicaciones y propiedades. Por último, se estudian las integrales dependientes de un parámetro. Una vez finalizada esta parte, se comienza el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.3. DIMENSIÓN COGNITIVA[134]

3.3.1. INTRODUCCIÓN

En el año 2001, motivados por la escasa comprensión de los conceptos de la integración impropia que percibíamos en los estudiantes, nos interesamos en desarrollar una aproximación cognitiva para estudiar cómo aprenden los alumnos de Primer Curso de la Titulación de Matemáticas los conceptos relacionados con la integración impropia, además de determinar algunas dificultades, obstáculos y errores que surgen en su aprendizaje (González-Martín, 2002).

Para ello, se utilizaron problemas no rutinarios (en el sentido dado al término en Monaghan *et al* (1999) y González-Martín y Camacho (2004a), que se muestra en la Sección 2.2.3. de esta Memoria) y de tipo no algorítmico para estimar el nivel de comprensión de los estudiantes, entendiendo la comprensión de un concepto matemático bajo la óptica de los sistemas de representación semiótica. Después de acotar nuestro campo de investigación inicial al uso de sólo dos registros de representación (gráfico y algebraico) en un primer acercamiento al análisis de la comprensión de los estudiantes de algunos conceptos básicos de la integración impropia, bajo la hipótesis de que los estudiantes sólo están acostumbrados al trabajo en uno de ellos (el algebraico), uno de nuestros objetivos principales fue analizar el sistema de representación en el que trabajan, además de observar si hacen alguna interpretación gráfica de los resultados que obtienen. Otras cuestiones a analizar fueron:

- ¿Utilizan los estudiantes elementos intuitivos?
- ¿Articulan los dos sistemas de representación considerados en situaciones relativas a las integrales impropias?
- ¿Realizan procesos de transferencia de otros conceptos previos a los nuevos?

Nuestras preguntas de investigación nos condujeron a la formulación de varios objetivos, entre los que citamos:

- Analizar el trabajo que desarrollan los estudiantes de Primer Curso de la Licenciatura en Matemáticas de nuestra Universidad cuando se ponen en juego dos registros de representación semiótica (el algebraico y el gráfico) en tareas relativas a la integración impropia.

[134] Los resultados que mostramos en esta sección pertenecen a González-Martín (2002) y han sido publicados en Camacho y González-Martín (2002b) y González-Martín y Camacho (2002a, 2002b, 2004a, 2004f, 2005a, 2005c).

- Elaborar un instrumento que, a partir del empleo de dos registros de representación semiótica, nos permita indagar en los conocimientos que tienen los estudiantes sobre el concepto de integral impropia después de recibir una instrucción tradicional.
- Caracterizar los distintos niveles de comprensión del concepto de integral impropia mediante un modelo de competencia.
- Identificar dificultades, obstáculos y errores que surgen en los estudiantes cuando aprenden los elementos de la integración impropia.

3.3.2. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES

En el Capítulo 2 de esta Memoria se exponen los fundamentos teóricos de nuestra investigación y, en particular, los utilizados en el estudio de la dimensión cognitiva de la Integral Impropia. Precisamos un poco más los cuatro elementos básicos que Socas (1997) distingue como productores de dificultades en el currículo de Matemáticas (Sección 2.2.4.):

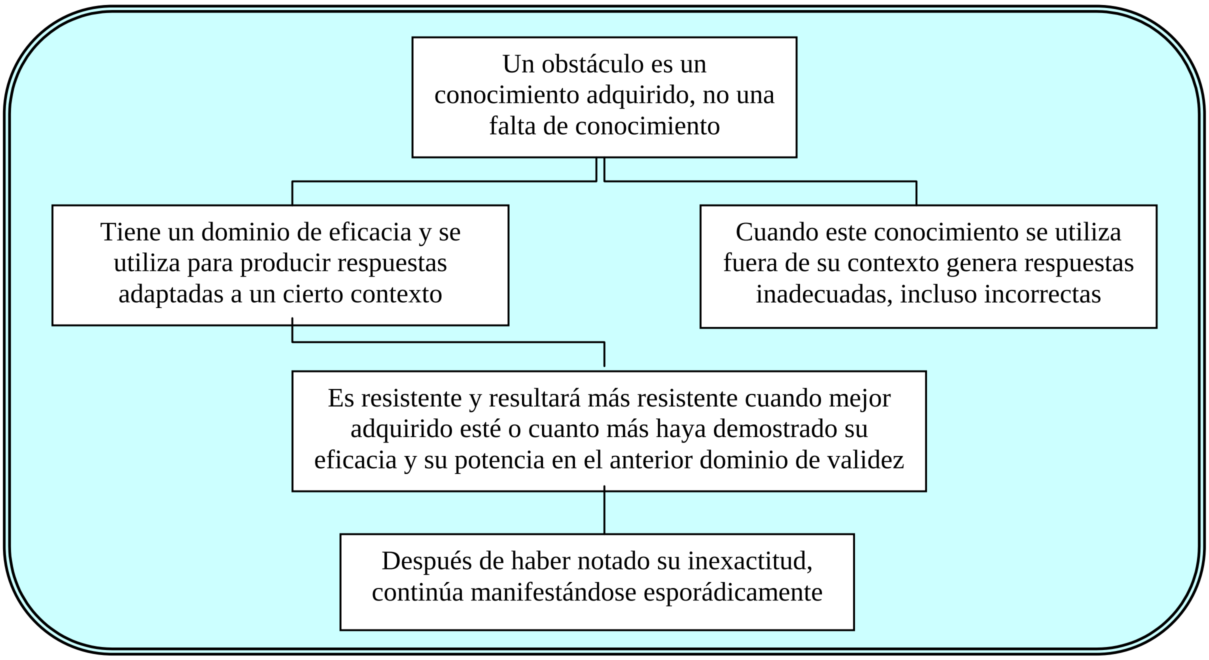
- las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un estudiante en Matemáticas,
- la necesidad de contenidos anteriores,
- el nivel de abstracción requerido,
- la naturaleza lógica de las Matemáticas escolares.

De forma detallada, éstas pueden ser organizadas de la siguiente forma:

<table>
<tr><td>Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.</td><td rowspan="5">Relacionadas con:</td><td rowspan="2">la propia disciplina</td></tr>
<tr><td>Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.</td></tr>
<tr><td>Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.</td><td>los procesos de enseñanza</td></tr>
<tr><td>Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.</td><td>los procesos cognitivos de los estudiantes</td></tr>
<tr><td>Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.</td><td>el terreno afectivo</td></tr>
</table>

Como se ha especificado en la Sección 2.2.4., estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Socas (1997) proporciona también algunas características de los obstáculos:



Desde nuestro marco teórico, por tanto, muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles del currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación (Duval, 1993). Además, la construcción inadecuada de un concepto se puede deber a una falta de articulación entre diferentes registros semióticos de representación.

Por último, repetimos que la complejidad de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas se traduce en errores que cometen los estudiantes, que se producen por causas muy diversas. Con frecuencia los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el algebraico. Otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático.

3.3.3. Descripción de la investigación

La población

Participan en la experiencia 31 estudiantes (13 chicos y 18 chicas) que cursan asignaturas de Primer año de la Titulación en Matemáticas y están matriculados en la asignatura *Análisis Matemático II*, que es la asignatura donde se tratan los contenidos propios de la integración en una variable y, en particular, los relacionados con la integración impropia. Se distribuyen en dos grupos, tal como se muestra en la siguiente tabla:

		SEXO		
		Hombre	Mujer	
GRUPO	1-A	9	9	18
	1-B	4	9	13
		13	18	31

También sabemos que para la mayoría de los estudiantes es el segundo año que cursan esta asignatura.

INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN

Conscientes del interés y la riqueza que aporta un análisis cualitativo en una investigación como la nuestra, desde el principio se planteó el uso de cuestionarios y entrevistas para realizar nuestro estudio. Esto se convirtió en una necesidad aún mayor después de realizar la prueba escrita y analizar las respuestas obtenidas[135]. La información que se pudo obtener de las entrevistas grabadas a partir de los datos del cuestionario resultó mucho más rica que la que obtuvimos de la corrección de las respuestas escritas en el papel.

Por tanto, se utilizaron dos instrumentos para recoger la información: un cuestionario de conocimientos y entrevistas semiestructuradas. El cuestionario consta de nueve preguntas, incluyendo no sólo tareas de cálculo directo de integrales impropias y estudio de convergencia de integrales impropias, sino también cuestiones intuitivas y algunos resultados paradójicos. En particular, se pide interpretar la mayoría de los resultados a los que se llega (véase González-Martín y Camacho, 2002ª, 2004a y González-Martín, 2002). Posteriormente se seleccionó a algunos estudiantes para ser entrevistados y obtener información directa sobre los procesos y razonamientos que habían seguido en sus respuestas y las concepciones que tienen del objeto "integral impropia".

En este sentido, la necesidad de estudiar cuestiones relativas a las respuestas obtenidas inicialmente nos condujo a utilizar como protocolo de las entrevistas las preguntas planteadas en el cuestionario. En González-Martín (2002) y González-Martín y Camacho (2004f y 2005a) se explica detalladamente qué preguntas se seleccionaron y con qué objetivos. La técnica usada fue la de entrevista basada en un cuestionario[136], en la que el entrevistado no sólo interactúa con el entrevistador, sino también con el conjunto de tareas que se le encomiendan (preguntas, problemas o actividades). En nuestro caso, las entrevistas no sólo fueron grabadas magnetofónicamente, sino también mediante medios audiovisuales, ya que estábamos interesados en recoger gran cantidad de información[137].

SELECCIÓN DE LOS ENTREVISTADOS

La selección de los estudiantes se hizo según sus respuestas al cuestionario. Básicamente, nos apoyamos en la combinación de los dos criterios siguientes: el desempeño total en la prueba y algunas representaciones o formas de proceder muy significativas. En total se entrevistó a seis estudiantes, lo que supone un 19'35% del total, casi la quinta parte. Los estudiantes seleccionados cumplían las siguientes características:

[135] Ver González-Martín (2002) y González-Martín y Camacho (2002a, 2004a, 2004f y 2005a).

[136] O *task-based interview*, término usado en la literatura anglosajona. Véase, por ejemplo, Goldin (2000).

[137] Nos parecen importantes no sólo los comportamientos verbales, sino también los no verbales, para realizar inferencias sobre el pensamiento matemático y el aprendizaje de los entrevistados.

ESTUDIANTE	GRUPO	SEXO	RESULTADO DEL CUESTIONARIO[138]
MA1	1-A	Mujer	Medio (6'33)
MA2			Bajo (2'33)
MA3		Hombre	Muy alto (9'22)
MA4	1-B		Alto (7'55)
MA5			Muy alto (9'66)
MA6	1-A		Alto (8'11)

Las entrevistas tuvieron una duración variable, según las respuestas de los estudiantes entrevistados. Estimamos que la más corta (MA5) duró alrededor de treinta y cinco minutos y que la más larga (MA1) duró una hora y veinte minutos.

De las nueve preguntas de que consta el cuestionario se seleccionaron cinco para la entrevista y se añadió una más (para estudiar las reacciones de los estudiantes ante una pregunta nueva y para evitar que los estudiantes hubieran preparado las respuestas de todas las preguntas del cuestionario). Para cada entrevista se llevó la prueba de conocimientos del estudiante entrevistado para hacerle preguntas particulares sobre lo que había escrito y, si realizaba algún cambio, averiguar las razones. Además, también servía para ayudar a algún estudiante si se quedaba bloqueado.

3.3.4. RESULTADOS OBTENIDOS

EN RELACIÓN CON LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Del análisis de los cuestionarios escritos se desprenden ciertas evidencias de que los estudiantes, para trabajar, prefieren enunciados claros y directos, en el registro algebraico, a pesar de las deficiencias que muchos ofrecen en este registro. Las preguntas de razonamiento y aquéllas en las que se pedía una interpretación de los resultados no fueron abordadas satisfactoriamente en general. Los estudiantes prefieren realizar cálculos algebraicos a interpretar resultados.

Se observa que los estudiantes se quedan desconcertados cuando se les pide que definan el concepto de integral definida. Y no sólo eso, sino que este hecho parece confundir a algunos. Muchas veces recurren expresamente a su memoria y la frase "*no me acuerdo*" se repite a lo largo de las entrevistas. Los estudiantes prefieren enunciados de tipo algorítmico y con instrucciones claras de lo que se les pide. Además, cuando las cuestiones no algorítmicas presentan otro registro de representación (en nuestro caso, el gráfico) producen grandes dificultades en los estudiantes, que no están acostumbrados a trabajar en este registro (véase, por ejemplo, Calvo, 1997 y Orton, 1983, citados en la Sección 1.3.1. y los trabajos citados en la Sección 1.3.3). De esta manera, preguntas que requieren trabajar explícitamente en un registro distinto del algebraico son abandonadas por un gran número de estudiantes.

El estudio, aunque de naturaleza distinta, confirma los resultados de Orton (1983) con respecto a la preponderancia del pensamiento algebraico en los estudiantes. Aunque el registro algebraico ocasione grandes dificultades a veces, es en el que están acostumbrados a trabajar. Esto se desprende por su tendencia a usarlo incluso en cuestiones de más fácil respuesta en el

[138] Esta categorización se basa en la puntuación que se dio a cada prueba para que el profesor de la asignatura pudiera tener en cuenta los resultados de ésta en la nota final de cada estudiante.

registro gráfico, o en cuestiones de respuesta meramente verbal. Nuestras entrevistas evidencian también que el empleo de gráficas para ayudarse en sus razonamientos no es una herramienta habitual. Además, en algunas ocasiones los estudiantes se resisten a utilizar las representaciones gráficas que se les dan y algunos ni siquiera reconocen el registro gráfico como un registro de trabajo matemático (lo que provoca en ciertos casos su incapacidad para trabajar en él).

Aunque los estudiantes a veces hagan interpretaciones de sus resultados, no están acostumbrados a explicitarlas, por lo que este tipo de cuestiones les produce inseguridad. Por otro lado, muchas veces no tienen claro el paso de lo algebraico a lo gráfico, lo que impide establecer conexiones entre el resultado obtenido y la interpretación gráfica (confirmando también los resultados de Eisenberg y Dreyfus, 1991, que también registran una clara reticencia de los estudiantes a utilizar el registro gráfico, que requiere demandas cognitivas mayores).

En consecuencia, el hecho de que no suelan interpretar gráficamente los resultados que obtienen es un impedimento para que sean conscientes de algunos resultados paradójicos a los que se llega. En el cuestionario no quedaba claro si los estudiantes son o no conscientes de estos resultados o si, simplemente, por resultarles desconcertantes prefieren evitar comentarlos. Por el contrario, en las entrevistas vemos cómo estos resultados les ofrecen problemas que en algunos casos constituyen verdaderos obstáculos. Algunos estudiantes se enfrentan a ellos apoyándose en el registro algebraico, en el que confían ciegamente. Se observa igualmente que los estudiantes con menores dificultades en las tareas de conversión parecen ser los que menos desconcierto muestran ante este tipo de cuestiones.

El uso de razonamientos intuitivos, tanto algebraicos como gráficos, está relacionado con el nivel de comprensión que se tiene de los conceptos que entran en juego, por lo que los estudiantes con grandes lagunas no suelen disponer de estos razonamientos.

Las entrevistas ponen de nuevo de manifiesto que la gráfica en el enunciado de la pregunta de la Figura 3.4, en general, no aporta nada a los estudiantes entrevistados; éstos no saben cómo utilizar la información en ella mostrada, lo que revela nuevamente una ausencia de coordinación entre el registro gráfico y el algebraico. Se pone de manifiesto que el paso de lo algebraico a lo gráfico ocasiona menos dificultades que el proceso inverso.

Pregunta 6:

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

En vista de estos resultados, ¿qué puedes decir del valor de $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ y $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$?

Ayúdate de la gráfica adjunta.

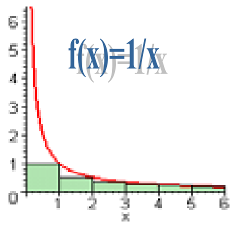
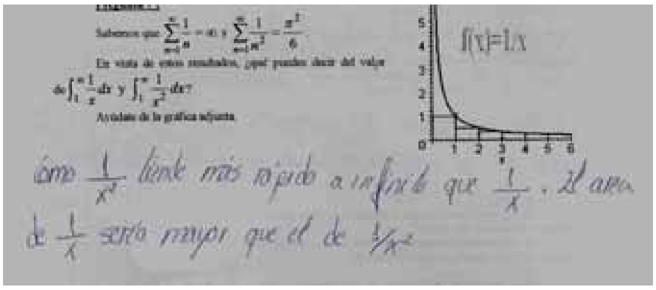


Figura 3.4.

Las entrevistas muestran las deficiencias de algunos estudiantes en conceptos como el de límite, que están bien presentes en el tema de la integración impropia. Esto confirma resultados como los expuestos por Artigue (1995a) y Tall (1992a, 1992b). También el mismo concepto de integral definida ofrece varias dificultades, incluso en estudiantes de nivel alto. El hecho de aprenderla como un área genera dificultades en algunos casos, pues se induce que siempre dará un valor positivo (Calvo, 1997; Bezuidenhout y Olivier, 2000).

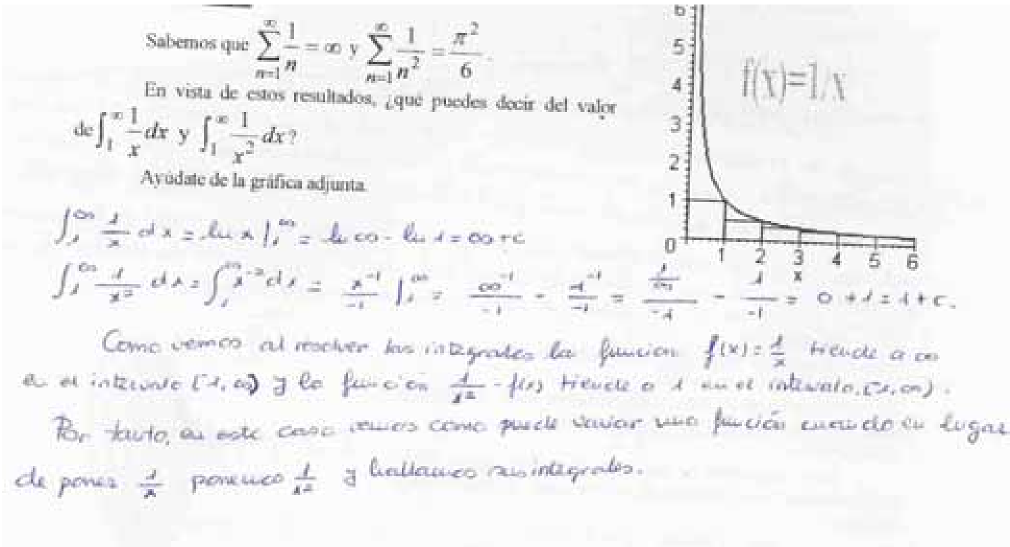
También queda clara la falta de transferencia de unos conceptos a otros. Por ejemplo, nos encontramos con estudiantes que no entienden por qué a veces se divide una integral impropia en dos y una de ellas se desprecia. Además de no tener claros los criterios y su uso, refleja una ausencia de conexiones con la misma forma de proceder en el caso de las series numéricas.

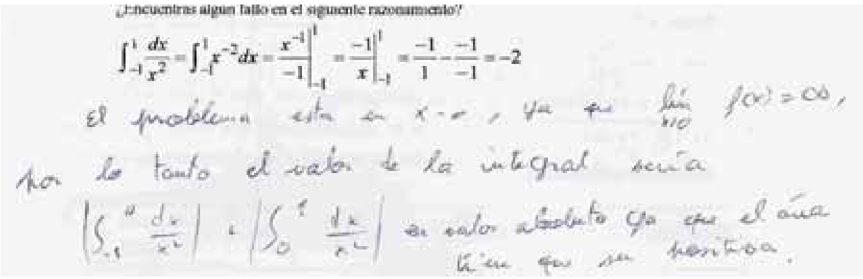
ALGUNAS DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES



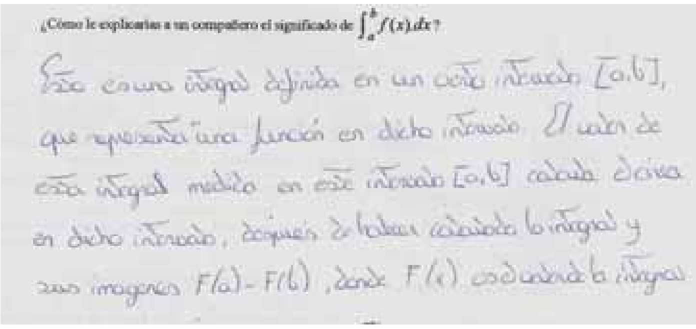
Una de las principales dificultades observadas proviene directamente de la ausencia de significado de herramientas fundamentales para comprender este concepto (como el uso de límites, la misma noción de convergencia, la definición de integral definida y algunas propiedades básicas de funciones, series y sucesiones) sin las cuales difícilmente se podrá adquirir adecuadamente una comprensión del concepto de integral impropia.

También la falta de coordinación entre registros, o el no reconocimiento del registro gráfico[139], causa dificultades a los estudiantes que aprenden los conceptos relacionados con la integración impropia. Ya se han comentado cómo algunas contradicciones les hacen dudar y cómo el uso del registro gráfico en el enunciado de las preguntas produce un alto índice de abandono o respuestas que ignoran su presencia.





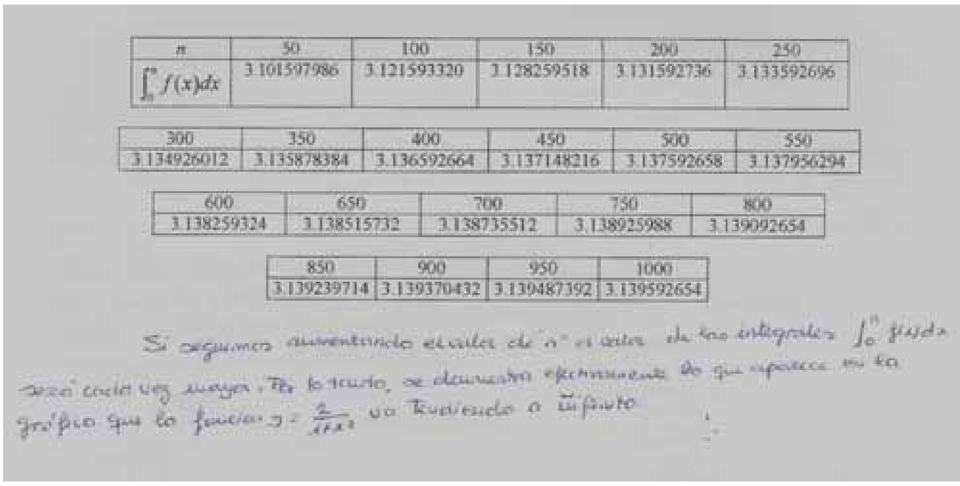
Entre los obstáculos que hemos registrado, está el que se genera por la concepción errónea de que la integral definida es siempre un área, y por tanto ha de dar un valor positivo. Éste, de origen didáctico[140], ha sido detectado también por otros autores en otros contextos (Calvo, 1997; Turégano, 1998; Bezuidenhout y Olivier, 2000).



En algunos casos, apreciamos concepciones meramente operativas de la integral definida.

[139] Un ejemplo claro de esto fue el estudiante MA3. Véase González-Martín (2002) y González-Martín y Camacho (2005a) para más detalles.

[140] Ver Sección 2.2.4.



n	50	100	150	200	250
$\int_0^n f(x)dx$	3.101597986	3.121593320	3.128259518	3.131592736	3.133592696

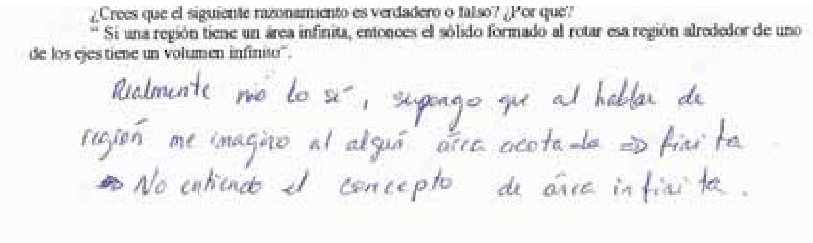
300	350	400	450	500	550
3.134926012	3.135878384	3.136592664	3.137148216	3.137592658	3.137956294

600	650	700	750	800
3.138259324	3.138515732	3.138735512	3.138925988	3.139092654

850	900	950	1000
3.139239714	3.139370432	3.139487392	3.139592654

Si seguimos aumentando el valor de "n" el valor de las integrales $\int_0^n f(x)dx$ será cada vez mayor. Por lo tanto, se demuestra efectivamente lo que aparece en la gráfica que la función $y = \frac{2}{1+x^2}$ va tendiendo a infinito

Hay otro obstáculo originado por el empleo de patrones estáticos para los procesos límite, además del uso del infinito potencial en lugar del actual. En ciertos casos, se ven concepciones del límite como una mera operación algebraica, lo que puede dificultar que se conceptualice el cálculo del área de una figura de aspecto infinito.



¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso? ¿Por qué?

" Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito".

Realmente no lo sé, supongo que al hablar de región me imagino al algún área acotada ⇒ finita ⇒ No entiendo el concepto de área infinita.

Un obstáculo que aparece de forma natural en algunos resultados paradójicos del cálculo de integrales impropias es el que hemos denominado de "*ligación a la compacidad*", por el que se concibe que un área finita debe pertenecer a figuras cerradas y acotadas[141]. Este obstáculo parece verse agravado por la ausencia de coordinación entre el registro gráfico y el algebraico, además de por la falta de ejemplos y contraejemplos en el campo de las series numéricas.

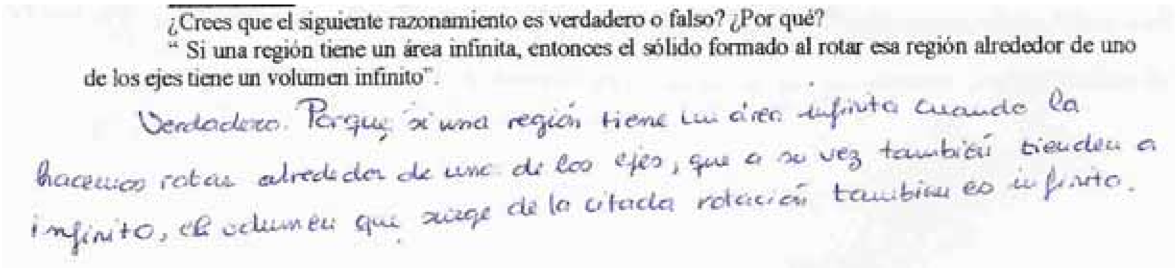
El obstáculo de "*homogeneizar dimensiones*" consiste en atribuir a un volumen las propiedades del área que lo genera por revolución (o a un área las propiedades de la línea que la delimita). Parece nuevamente que este obstáculo se ve agravado, entre otros factores, por la ausencia de coordinación entre registros. Estos dos obstáculos, relacionados entre sí, parecen también relacionados con el obstáculo de "*heterogeneidad de las dimensiones*" (Schneider, 1991). Una de las manifestaciones de éste consiste en ver un volumen como una superposición de superficies:

> Creo que es el método más intuitivo que se puede imaginar, pues siempre he imaginado un volumen como una superposición de superficies. Por medio del estudio de las dos primeras dimensiones podemos encontrar la tercera, o un volumen es una superficie multiplicada por una altura.

Schneider (1991), pág. 253

De este modo, si concebimos el volumen como compuesto de distintas láminas y se sabe que el área de la lámina "generatriz" (cuando se trata de un volumen de revolución) es infinita, se concluye que el volumen lo será también. Artigue (1995a) describe que este obstáculo se asocia con los saltos implícitos e incontrolados entre el dominio de los objetos y magnitudes geométricas y aquél de sus medidas cuando se manipulan simultáneamente magnitudes de dimensiones diferentes (por lo que a la unión de magnitudes correspondería necesariamente la adición de medidas).

141 Que, como se muestra en la Sección 3.1.2., aparece también en el devenir histórico (correspondencia entre Wallis y Hobbes).

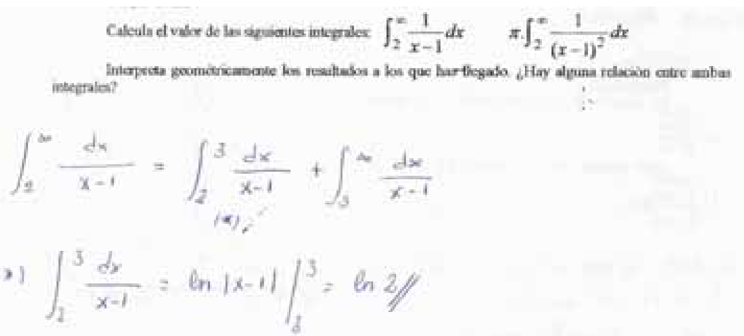


Una de sus consecuencias lleva a considerar que iguales perímetros encierran áreas iguales y que iguales áreas llevan a igual volumen. Por tanto, como hay figuras de perímetro infinito con área infinita (parece lo natural), se generaliza a que todas las figuras de perímetro infinito deben encerrar un área infinita.

Schneider relaciona también este obstáculo con los problemas que ocasiona el uso del infinito actual. Nuevamente, si el estudiante concibe el volumen como un agregado de secciones planas, atribuirá al resultado (el volumen sería el límite del agregado de áreas) las propiedades de los elementos (las secciones); nuevamente el volumen se concibe como forzosamente infinito. Esto último se describe en Tall (1992a, 1992b).

En el caso de las integrales de funciones como $1/x$ y $1/x^2$, algunos estudiantes tienden a interpretarlas siempre como el área y volumen de una misma función. Pero cuando se trabaja en el plano, parecen incapaces de ver ambas integrales como áreas bajo curvas diferentes; se trata de un obstáculo que parece nuevamente ligado a la coordinación entre registros, pero en este caso a la no flexibilidad en la coordinación[142].

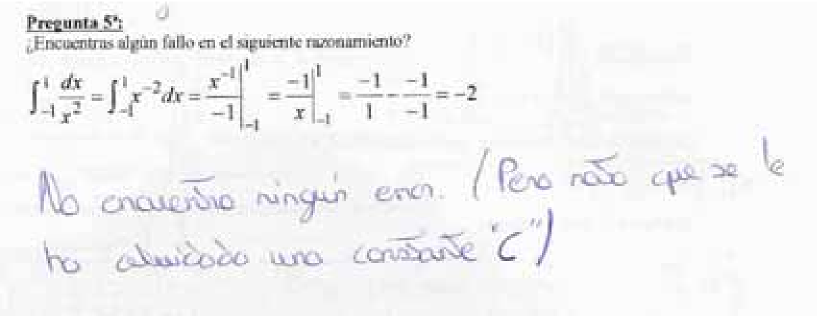
Quizá sean necesarias actividades donde se trabaje con este tipo de situaciones y donde se conjugue el trabajo en dos y tres dimensiones.



Uno de los errores analizados consiste en la carencia de significado al interpretar los enunciados de algún teorema o criterio y utilizarlo en otro caso. Este tipo de actuaciones puede llevar a resultados totalmente incoherentes. Por ejemplo, algunos criterios toman sólo la "cola" de la integral para determinar su carácter cuando ésta comienza en $x = 0$[143]; algunos estudiantes acaban pensando que es ésta la que condensa el valor de la integral, por lo que acaban calculando la integral en un subintervalo de integración pensando que obtendrán el valor de la integral total. Claramente, esta forma de actuar revela también una falta de coordinación entre los registros gráfico y algebraico, además de deficiencias en la definición de integral definida.

[142] También pensamos que se podría considerar como un obstáculo de origen didáctico (Sección 2.2.4.)

[143] Al final de la Sección 3.2.2. se expone este criterio (se estudia $\lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$) y en la nota 133 se vuelve a comentar el proceder de los estudiantes.



Pregunta 5ª:
¿Encuentras algún fallo en el siguiente razonamiento?

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{1}=\left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1}=\frac{-1}{1}-\frac{-1}{-1}=-2$$

No encuentro ningún error. (Pero noto que se le ha olvidado una constante "C")

Otros errores que hemos registrado se relacionan con problemas de sintaxis, meramente algebraicos. Pueden deberse a carencias de significado en el uso de las propiedades de las operaciones aritméticas o ser meramente casuales.

3.4. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo hemos analizado las tres dimensiones de la Integral Impropia. El recorrido que se ha empleado en este análisis pretende mostrar que estas tres dimensiones están relacionadas y no forman compartimentos aislados.

Aunque de forma histórica los primeros cálculos de integrales impropias se motivaron geométricamente y se relacionaron con la sumación de series, esta perspectiva cambió con el nacimiento del Cálculo. Históricamente surge de forma natural una distinción entre las integrales de primera especie (intervalo infinito, cálculo de áreas y argumentos gráficos) y las de segunda especie (estudios locales, desarrollos asintóticos, trabajo en intervalos acotados).

En el siglo XIX se vuelve a la motivación geométrica, pero esta vez revestida de la notación formal y recurriendo al cálculo de límites, continuando así con el largo predominio histórico del cuadro algebraico.

Es natural que el sistema de enseñanza haya seguido el esquema histórico y haga una separación notable entre las integrales de primera y segunda especie. Por otro lado, los primeros programas, de 1969, beben aún de la Reforma en la enseñanza de las Matemáticas de los años 60 y, posteriormente, de la Reforma de las Matemáticas Modernas[144], así que se establece un paradigma de la enseñanza de las integrales impropias en la Universidad que aún sigue vigente, de carácter algebraico y algorítmico (siendo las exigencias mínimas para profesores y estudiantes).

Este paradigma, alejado de las motivaciones intuitivas y geométricas, oculta las razones y métodos históricos del cálculo de áreas infinitas. Los estudiantes han de enfrentarse a la combinación del cálculo de integrales y el cálculo de límites, lo que monopoliza su atención. La visión que se genera del cálculo de integrales impropias es una visión truncada, se reduce al aspecto operacional y genera dificultades y obstáculos relacionados con los aspectos conceptuales y operacionales. Además, hemos visto que algunos obstáculos presentes en la Historia también se repiten.

Nuestra propuesta didáctica retoma las motivaciones históricas del cálculo de integrales impropias (generalización de resultados, cálculo de áreas, interpretación gráfica, relaciones con series, alternancia local-global) y trata de cambiar este paradigma de enseñanza, además de contrarrestar los paradigmas de la enseñanza universitaria descritos en la Sección 1.2. (Alsina, 2001).

[144] Véase Artigue (1995a).

CAPÍTULO 4
METODOLOGÍA

Este capítulo tiene dos partes bien diferenciadas. La primera expone los fundamentos teóricos y las características principales del diseño de Ingenierías Didácticas y del establecimiento de debates científicos.

La segunda parte muestra las líneas generales que se han seguido para el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica, para lo que se describe el contexto, sus características y restricciones, de su implementación, así como las elecciones de carácter global que se han tomado. Concluye esta parte con el análisis a priori de las sesiones diseñadas.

4.1. NOTAS SOBRE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En palabras de Chevallard, el interés de la Ingeniería Didáctica es "*estudiar el problema de la acción, y los medios de acción, en el sistema educativo*" (citado en Artigue, 1992b).

El concepto de *Ingeniería Didáctica* surge en la Didáctica francesa a comienzos de los ochenta como un medio de abordar dos cuestiones fundamentales:

- La cuestión de tener en cuenta la complejidad de los fenómenos del aula en las metodologías y prácticas de investigación.
- La cuestión de las relaciones entre investigación y acción en el sistema educativo.

En aquel momento, en búsqueda de una legitimidad científica, muchos investigadores escaparon de la complejidad del aula a través de 'metodologías externas', como test, cuestionarios y entrevistas, con un énfasis exagerado en la validación por medio de la comparación estadística entre grupos experimentales y de control. El concepto de Ingeniería Didáctica se desarrolló para superar las limitaciones de esta actitud y tener en cuenta, científicamente, la complejidad de los sistemas que se quería investigar y, específicamente, encontrar vías metodológicas para tratar los complejos detalles del funcionamiento del aula. Precisamente este punto, las relaciones entre investigación y práctica, alimentó la ambición de encontrar vías de racionalizar la acción en el sistema educativo y crear, en algún sentido, una ciencia de la Ingeniería para el diseño didáctico. El término de "Ingeniería Didáctica" surge como una comparación con el quehacer en Ingeniería: éste descansa sobre el conocimiento científico, pero los ingenieros deben también trabajar con objetos más complejos que los objetos "ideales" de la ciencia para desarrollar un proyecto determinado; tienen que manejar de forma lo más práctica posible problemas que la ciencia pura no quiere o no puede aún abordar y tienen que probar o verificar en la práctica la efectividad de sus construcciones[145].

Como se ha dicho, la Ingeniería Didáctica, en tanto que metodología de investigación, entró en la escena didáctica con la ambición de tener en cuenta la complejidad de los fenómenos del aula y la complejidad de las relaciones entre el aprendizaje matemático y las características

[145] Sin embargo, este término no surgió inmediatamente. Artigue (2000) relata cómo, al comienzo, convivieron dos términos: "fenomenotécnica", tomado de Bachelard, para la dimensión de investigación, y el de "ingeniería didáctica", para la dimensión de desarrollo. Sin embargo, ambos se fundieron y sobrevivió la segunda denominación.

sociales e institucionales de los entornos en que tiene lugar. Su ambición no era solamente comprender, sino también encontrar las vías de controlar algunos de los fenómenos didácticos resultantes, a través de la determinación de las variables didácticas clave y su control.

Por otro lado, las ingenierías didácticas, a lo largo de su historia, han resultado también útiles desde el punto de vista teórico. Han sido un medio privilegiado y exigente para evaluar la validez de las suposiciones teóricas en las que se basan: las de la Teoría de Situaciones Didácticas. Las discrepancias inesperadas y resistentes entre los análisis *a priori* y *a posteriori*, las dificultades encontradas en la difusión de los productos de Ingeniería una vez validados por la investigación... han jugado, ciertamente, un papel esencial en la evolución de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Obviamente, esta metodología también tiene limitaciones. Una de ellas, como metodología de investigación, es que no da acceso a la “vida natural” de los sistemas didácticos, sino que trabaja con sistemas limitados. Así, nos permite validar nuestros constructos didácticos a través de la habilidad demostrada en producir o reproducir fenómenos didácticos.

Sin embargo, las ingenierías didácticas pueden considerarse como un medio eficiente de aproximar la complejidad de los procesos didácticos, tanto para propósitos teóricos como para objetivos de diseño de enseñanza. Y, como cualquier metodología, tiene tanto potencialidades como límites y hay una complementariedad necesaria entre ella y otros métodos más naturales.

4.1.1. La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se basa en un esquema experimental:

- Diseño de secuencias de enseñanza
- Producción de secuencias de enseñanza
- Observación de las secuencias
- Análisis de la secuencia de enseñanza

Según el tamaño de la secuencia didáctica objeto de la investigación se distinguen, clásicamente, dos niveles:

- Micro-ingeniería
- Macro-ingeniería

La investigación a partir de micro-ingenierías es, efectivamente, más fácil de desarrollar. Sin embargo, aunque permite tener más en cuenta la complejidad de los fenómenos de clase de forma local, no permite combinar esta complejidad con la de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Por esta razón, la investigación a partir de macro-ingenierías se ha vuelto más frecuente, a pesar de las dificultades institucionales y metodológicas que conlleva.

Otra de las características de las Ingenierías Didácticas, en particular cuando se compara con otros tipos de investigación basados en experimentación en el aula, es el registro en que se sitúa y los métodos de validación utilizados.

La evaluación de las Ingenierías Didácticas no se basa en la comparación con validación externa basada en la confrontación estadística entre grupos experimental y de control. El modelo que sigue la Ingeniería Didáctica se basa en el modelo del estudio de casos, donde la validación es esencialmente interna, fundamentada en la confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*.

LAS FASES DE LA METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En el proceso experimental de una ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases:

1. Análisis preliminares
2. Diseño y análisis *a priori* de las situaciones de la ingeniería didáctica
3. Experimentación
4. Análisis *a posteriori* y evaluación

<u>Fase 1: Los análisis preliminares</u>

Se realizan dentro de un marco teórico general del conocimiento didáctico adquirido en el dominio bajo estudio. Se basan en unos análisis previos[146], generalmente:

- Análisis epistemológico de los contenidos de la enseñanza,
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos,
- Análisis de las concepciones de los estudiantes y las dificultades y obstáculos que caracterizan su desarrollo,
- Análisis del campo de las restricciones en las que tendrá lugar la producción didáctica,
- Toma en cuenta de los objetivos específicos de la investigación

Obviamente, se trata de un trabajo preliminar que servirá de base para el diseño de la ingeniería. Posteriormente será refinado y reforzado durante las distintas fases del trabajo. Por tanto, durante la primera fase se encuentra en su primer nivel de elaboración.

Normalmente, una vez que se definen los registros en que se trabajará, los análisis preliminares se centran en tres dimensiones, que surgen de forma natural de la perspectiva sistémica adoptada, por lo que no es sorprendente que sea paralela a la ofrecida por Brousseau en su estudio sobre los obstáculos de 1976:

- *Dimensión epistemológica*, asociada a las características del conocimiento en juego.
- *Dimensión cognitiva*, asociada a las características cognitivas del público que recibirá la enseñanza.
- *Dimensión didáctica*, asociada a las características de los trabajos en el sistema educativo.

Resaltamos aquí el hecho de que la bibliografía sobre Ingenierías Didácticas no señala explícitamente un marco teórico didáctico general para la dimensión cognitiva; la teoría será utilizada por el investigador como una herramienta escogida entre otras varias. No debe interpretarse que la investigación no tendrá implicaciones teóricas, sino que éstas no serán evidentes en esta fase; aparecerán de forma natural en la fase del análisis *a posteriori* y la evaluación.

Por otro lado, la elección hecha será crucial, pues la dimensión cognitiva suele privilegiarse en el diseño de ingenierías didácticas. Uno de los puntos esenciales del diseño consiste en un fino análisis preliminar de las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y

[146] Los tres primeros han sido desarrollados en el Capítulo 3 y los dos últimos se muestran en éste, en las Secciones 4.3.1. y 4.3.2.

errores y la Ingeniería será diseñada para producir, de forma controlada, el desarrollo de estas concepciones.

Fase 2: El diseño y análisis *a priori* de las situaciones

En esta fase, la distinción de las variables sobre las que actuará el investigador es esencial. Estas variables del sistema sobre las que se actuará, no determinadas por las restricciones localizadas en la Fase 1, son las *variables de comando* y se distinguen dos tipos:

- *Variables macro-didácticas* o *globales*, que conciernen a la organización global de la ingeniería.
- *Variables micro-didácticas* o *locales*, que conciernen a la organización local de la ingeniería, esto es, a la organización de una sesión o de un episodio.

Estas variables pueden ser, a su vez, de orden general o depender de los contenidos didácticos objetivo de la Ingeniería.

Las primeras elecciones que se hacen, después del análisis de las restricciones son elecciones globales: recurso a herramientas informáticas o tecnológicas, limitación de la complejidad de los contenidos, métodos de enseñanza... Estas elecciones han de preceder a la descripción detallada de la ingeniería, en donde se explicitarán las elecciones locales. Sin embargo, hay que puntualizar que aunque las elecciones globales precedan a las locales, **no son independientes de éstas**.

Por otro lado, como se ha dicho, una de las características distintivas de las Ingenierías Didácticas es su modo de validación, esencialmente interno. El proceso de validación parte de la fase de diseño, por medio del análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, estrechamente ligado al diseño local de la misma. Este análisis *a priori* se concibe como un *análisis del control del significado del conocimiento*. La Teoría de las Situaciones Didácticas, que actúa como un referente de la metodología de las Ingenierías (como se aclara al comienzo de esta Sección) desde sus comienzos, se propone ser una teoría de control de las relaciones entre el significado del conocimiento y las situaciones didácticas.

De esta forma, el objetivo del análisis *a priori* es determinar de qué modo las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que construyen. Para ello, el análisis se basa en varias hipótesis, cuya validación estará indirectamente en juego durante la cuarta fase, en la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Este análisis *a priori* comprende, tradicionalmente, una parte descriptiva y predictiva y se centra en las características de una situación a-didáctica que se desea constituir y cuya devolución se tratará de dejar a los estudiantes. Sus principales acciones son:

- Descripción de las elecciones hechas en el nivel local (posiblemente relacionándolas posteriormente con las elecciones globales) y las características de la situación a-didáctica que resulta.
- Análisis de los elementos que podrían estar en juego en esta situación para el estudiante (en función, en particular, de las posibilidades de acción, de elección, de decisión, de control y validación a su disposición, una vez sucede la devolución), en una situación casi independiente del profesor.
- Predicción del rango de posibles comportamientos e intento de mostrar en qué forma el análisis desarrollado permite el control de su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si suceden, son resultado del funcionamiento del conocimiento objetivo de la enseñanza.

Sobre el papel del profesor, hemos de decir que, tradicionalmente, su análisis apenas interviene en el análisis *a priori* y que éste es visto esencialmente en su relación con los procesos de devolución e institucionalización. Sin embargo, mostramos en la Sección 4.1.2. que en las Ingenierías Didácticas para nivel universitario esta situación puede cambiar.

Fase 3: Experimentación
Se desarrolla la ingeniería y se realizan las observaciones y anotaciones.

Fase 4: El análisis *a posteriori* y la evaluación
La fase de experimentación viene seguida de una fase de análisis denominado *a posteriori* que se basa en todos los datos recogidos durante la experimentación (como observaciones hechas durante las sesiones de enseñanza y también trabajos de los estudiantes realizados durante y fuera de las clases). Estos datos pueden venir acompañados de datos obtenidos con el uso de metodologías externas, como cuestionarios o entrevistas individuales o grupales realizadas en varios momentos de la enseñanza o después de ella. La validación de las hipótesis que conciernen la investigación se basa en la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*.

Algunas características de esta validación son:

- No se basa en análisis estadísticos entre grupos experimentales y de control.
- Normalmente, el análisis *a priori* no puede ser comunicado en su totalidad, debido a su extensión (especialmente cuando se trata de macro-ingenierías), por lo que el análisis que se muestra es una condensación del análisis realizado.
- En la mayoría de los trabajos publicados sobre Ingeniería, la confrontación de los dos análisis revela distorsiones, en términos de desfase, o diferencias, entre los dos análisis (*a priori* y *a posteriori*); sin embargo, estas diferencias dan riqueza a las ingenierías.
- Las hipótesis explícitamente implicadas en el trabajo de Ingeniería son a menudo relativamente globales, concerniendo el proceso de aprendizaje a largo plazo, y la extensión de la ingeniería no les permite necesariamente estar realmente implicadas en el proceso de validación.

REPRODUCIBILIDAD Y OBSOLESCENCIA

Una cuestión natural que surge, debido a la complejidad del diseño de una Ingeniería y sus distintas fases, es qué sucede durante su transmisión al profesor o profesores que serán los actores. Otra cuestión que surge es la de la obsolescencia del diseño realizado. Sobre este punto, Brousseau[147] expone:

> Las hipótesis de reproducción del mismo proceso deben ser vistas, principalmente, en términos de dos formas de reproducción:
> 1) la de una mejora, al menos localmente,
> 2) la de una obsolescencia de las situaciones didácticas.
>
> Por obsolescencia queremos expresar el siguiente fenómeno: de un año a otro, los profesores encuentran más y más difícil reproducir las condiciones que promoverán en sus estudiantes, que podrían tener diferentes reacciones, la misma comprensión de los conceptos que se enseñan.

Brousseau. Citado en Artigue (1992b), pág. 57

Se distinguen entonces dos tipos de reproducibilidad: *reproducibilidad externa* (de carácter dinámico y que implica la reproducción "histórica" de las secuencias) y

[147] Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (3), pp. 37-127. Citado en Artigue (1992b).

reproducibilidad interna (mucho menos fácil de identificar, que implica los significados construidos).

Brousseau enuncia la hipótesis de que la obsolescencia, si ocurre, tenderá a hacer cambiar las situaciones de la ingeniería didáctica; en particular, este cambio producirá un desplazamiento desde el registro de situaciones de adaptación del estudiante al registro de situaciones de comunicación de conocimiento institucionalizado. Postula que su hipótesis se debe a que esta obsolescencia conllevará "*por un lado, cambios en las cuestiones expuestas por el profesor en la dirección de un incremento en el número de problemas formulados y, por otro lado, una reducción del éxito en cuestiones más abiertas*" (Brousseau, 1981. Citado en Artigue, 1992b).

Michèle Artigue, en su Tesis Doctoral (1984), caracteriza la reproducibilidad como sigue:

> Se podría reconocer situaciones reproducibles por las siguientes características encontradas en experimentaciones repetidas:
>
> A1) Los mismos procesos deben aparecer (al menos, aquellos que no son marginales) con jerarquías comparables.
>
> A2) La historia de la clase debe poder ser descrita con un pequeño número de órbitas.
>
> A3) Las regularidades observadas en los procedimientos y órbitas han de deberse esencialmente a regularidades individuales. No pueden estar provocadas por acciones repetidas de re-centramiento o desbloqueo desarrolladas por el profesor.
>
> A4) Las ligeras diferencias que necesariamente se encuentran en una clase comparada con otra no pueden tender a crecer.

Artigue (1984), pág. 44

Sin embargo, el profesor aparece como un actor decisivo en la aparición de regularidades en los trabajos realizados. A partir de esto, se postula la hipótesis de que la reproducibilidad en términos de "historia" es casi necesariamente impuesta por el profesor (de forma más o menos consciente y discreta) en la guía de la dinámica desarrollada. Esto lleva a Artigue (1992b) a formular la siguiente hipótesis sobre la reproducibilidad:

> Las relaciones entre la reproducibilidad interna y externa deberían ser vistas en términos de relaciones de incertidumbre. En otras palabras, la exigencia de reproducibilidad externa sólo se puede encontrar sacrificando la reproducibilidad interna (siendo ésta el objetivo).

Artigue (1992b), pág. 59

En cuanto al punto mencionado al principio de este apartado sobre la transmisión de ingenierías didácticas a profesores no especialistas, Artigue (1992b) explica:

> Cuando describimos secuencias de enseñanza con el propósito de su transmisión más allá de nuestra investigación, el hecho de que nos dirigimos a una audiencia de no especialistas nos lleva a reducir nuestra discusión sobre los aspectos didácticos. Normalmente, con el temor de no ser comprendidos, abandonamos el registro de la comunicación científica y adoptamos el del pensamiento natural. Haciendo esto, es casi inevitable que sacrifiquemos las características internas de las situaciones didácticas en favor de las características externas, más fáciles de describir, y esto crea un verdadero obstáculo para la reproducción interna.

Artigue (1992b), pág. 59

Por otro lado, la misma intervención del profesor a la hora de desarrollar la Ingeniería puede producir interferencias:

> El investigador se enfrenta al hecho de que el profesor que desarrolla experimentaciones en una situación diseñada por el investigador "interpreta" la situación. Esta interpretación del profesor, que encuentra su

> expresión concreta en intervenciones imprevistas durante la sesión de clase, debe tenerse en cuenta como un objeto de estudio en sí misma, y no como un tipo de interferencia inevitable en la experimentación.
>
> Arsac[148]. Citado en Artigue (1992b), pág. 60

Además, algunas causas que influyen en la actuación del profesor en el aula son:

- sus propias concepciones sobre los contenidos a enseñar,
- la concepción que éste tiene sobre su rol en la clase,
- la representación que se ha formado del escenario a representar,
- el tiempo.

Así, estas "elecciones" (de tipo estable, salvo la última), junto con otras elecciones instantáneas, hacen que el comportamiento del profesor en la clase condicione la transmisión de ingenierías, lo que lleva a Robert y Robinet[149] a postular que es necesaria una cierta compatibilidad entre las concepciones del investigador (que concibe una ingeniería) y el profesor que va a experimentar con ella o a utilizarla para lograr el funcionamiento efectivo de la transmisión didáctica.

4.1.2. Ingenierías Didácticas en la Universidad

Como se ha comentado, el trabajo de diseño de una ingeniería debe tratar de dar a los estudiantes una responsabilidad maximal en el desarrollo de su conocimiento matemático y producir, en la medida de lo posible, nuevos objetos matemáticos y técnicas que aparezcan como herramientas óptimas en la resolución de problemas cuyo significado e interés pueda ser fácilmente percibido y cuya solución sea accesible de forma colectiva al grupo de estudiantes, lo más autónomamente posible.

Sin embargo, la extensión de ingenierías didácticas a niveles educativos avanzados hace aparecer nuevos problemas. El mencionado nivel casi autónomo de funcionamiento está a menudo fuera de alcance (al menos en un tiempo razonable) y las mediaciones del profesor, incluso en las fases a-didácticas, juegan un papel mucho más importante. Normalmente, una administración eficiente de las sesiones requiere de importantes mediaciones por parte del profesor; se puede dejar bajo la responsabilidad de los estudiantes la ejecución de partes técnicas del trabajo matemático, mientras el profesor se encarga de la parte más conceptual y reflexiva.

La modelización de estas situaciones requiere de la integración en el modelo didáctico y a-didáctico del profesor como un actor completo de la situación, cuyo papel no se puede reducir a la administración de la devolución y los procesos de institucionalización. Por sus mediaciones, modificará regularmente el *medio*, la forma en que los estudiantes interaccionan con él y los posibles efectos cognitivos de esta interacción.

Michèle Artigue (2000) muestra dos ejemplos de situaciones: en la primera de ellas, se produce un funcionamiento óptimo y las interacciones de los estudiantes con el *medio* son suficientes para producir la construcción social del conocimiento esperada; en la segunda (ligada a la resolución de ecuaciones diferenciales en la Universidad), sin embargo, este funcionamiento está fuera de alcance y el diseño didáctico de la situación tiene que incluir un análisis cuidadoso

[148] Arsac, G. (1989). Le rôle du professeur – aspects pratiques et théoriques, reproductibilité, *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*, IMAG-LSD, Grenoble.

[149] Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, Cahier de DIDIREM nº 1, Ed. IREM Paris 7. Citado en Artigue (1992b).

del papel del profesor y los posibles efectos de las decisiones que toma para superar las limitaciones cognitivas de la interacción de los estudiantes con el *medio*. En este último caso, las elecciones macro-didácticas tomadas fueron[150]:

- Abordar las limitaciones cognitivas y didácticas ligadas al estatus del registro gráfico a través de un módulo preliminar específico sobre funciones y gráficas.
- Abordar la complejidad de la resolución cualitativa utilizando asistencia de un *software* informático para crear una progresión en la complejidad de las tareas propuestas a los estudiantes.
- Abordar las limitaciones de tiempo mediante una reducción del contenido en la resolución algebraica y, más globalmente, un cambio en el estatus dado a las ecuaciones accesibles por resolución exacta.

4.2. El Debate Científico[151]

En palabras de Legrand (2001), el debate científico es un método de enseñanza que pretende cambiar la actitud pasiva de los estudiantes haciéndolos convertirse en los autores de los enunciados matemáticos (conjeturas, proposiciones y pruebas). El estudiante que quiere participar en el debate científico organizado por el profesor[152] está invitado a hablar directamente a los demás estudiantes. En particular, el estudiante habla desde sus creencias o conocimientos (*Creo que esta idea es válida... que este argumento prueba o contradice una idea defendida por mí u otro... y aquí están mis razones*), y no desde la habitual posición de "estudiante" (*Aprendí que... Leí en un libro que... Me enseñaron que... y por tanto afirmo que...*).

En consecuencia, una parte importante del contrato didáctico que se establece en el debate científico es que nadie asume ni que las conjeturas escritas por el profesor en la pizarra son teoremas ni que las demostraciones propuestas son válidas. En la primera fase del debate no se le pregunta al profesor que dé su opinión sobre la relevancia de lo que se dice; su papel es facilitar la expresión de las ideas y permitir que los puntos de vista opuestos sean claramente enunciados. Sólo al final del debate él institucionalizará los resultados dando definiciones apropiadas y teoremas e identificando resultados atractivos pero erróneos, el tipo de errores recurrentes que hay que tratar continuamente.

Para Legrand, las bases de esta metodología son:

- Cuando se aprende Matemáticas, uno no se convierte necesariamente en un matemático profesional.
- Para aprender y retener Matemáticas eficientemente, debemos convertirnos temporalmente en un "matemático", y la clase entera debe actuar como una comunidad científica.

En su opinión, un estudiante que no se comporta matemáticamente no puede dominar las Matemáticas. Y no es necesario acertar siempre; incluso cuando una conjetura resulta ser falsa,

[150] Véase Artigue (1989) para más detalles sobre esta Ingeniería.

[151] Véase la Sección 1.3.4. para consultar algunos resultados obtenidos con esta metodología.

[152] En el trabajo de Legrand esta metodología se entiende aplicada en el nivel universitario, donde se supone que los estudiantes tienen un nivel de razonamiento y justificación mayor. En particular, en lugar de "profesor" utiliza el término "*lecturer*", que en inglés denota al profesor universitario.

el trabajo utilizado para probar esta falsedad es útil y no una pérdida de tiempo; ayuda a clarificar lo que no fue entendido correctamente y en qué punto el pensamiento se torció. Además, identifica el debate científico en los cursos de Matemáticas como *un tipo de "ingeniería didáctica"que intenta poner este principio epistemológico en práctica*. Descansa también sobre otros dos principios:

- Un principio *socio-constructivista*: los estudiantes deben manejar el conflicto entre la racionalidad cotidiana (sentido común) y la racionalidad científica.
- Un principio *socio-ético*: todo ser humano debería tener la oportunidad de comprender el significado profundo de lo que nos esforzamos por enseñar.

La institución escolar ha de ser útil también para adquirir los hábitos de la vida en comunidad: la habilidad de entender los argumentos de los demás, de crear y desarrollar argumentos propios, defender las propias tesis (incluso cuando el interlocutor parece tener más conocimientos, o ser más poderoso, mayor y más sabio).

En su opinión, la educación escolar puede ser un buen vehículo para descubrir la riqueza del trabajo en común y la aproximación matemática, en particular, puede ser una herramienta poderosa para adquirir la autonomía esencial para la cooperación sin dominación. Para conseguir este propósito, debemos establecer un nuevo contrato didáctico por medio del cual los estudiantes y profesores deben considerar los exámenes como un medio, una herramienta necesaria para evaluar la competencia, y no como el objetivo central.

IMPLEMENTACIÓN DEL DEBATE CIENTÍFICO

Hay que tener en cuenta al planificar el uso del debate científico que los estudiantes serán considerados como una comunidad de matemáticos. El profesor propondrá temas y los estudiantes serán invitados a formular conjeturas y a participar en un debate científico sobre la relevancia y veracidad de sus conjeturas. El estatus de la "verdad" cambiará : ya no será *verdad* lo que diga el profesor o esté en los libros, sino que será fruto de una construcción conjunta con los demás compañeros. Esto requiere de las siguientes condiciones :

- El estudiante debe creer en sus propias conjeturas.
- El estudiante debe desarrollar argumentos racionales de forma que se convenza de que las conjeturas no son falsas.
- Los estudiantes deben encontrar palabras, fórmulas, teoremas y metáforas capaces de persuadir no sólo al profesor y a sus compañeros, sino también a cualquiera que entienda Matemáticas.

Por otro lado, el profesor debe evitar revelar cualquier opinión sobre la veracidad de la materia bajo discusión. Su tarea es promover la diversidad de opiniones con el objetivo de revelar conflictos en la racionalidad. Sus principales obligaciones son:

- Dar tiempo suficiente a los estudiantes para desarrollar sus opiniones basadas en razones científicas. También debe resumir en la pizarra los resultados globales de la discusión.
- Escribir en la pizarra los argumentos presentados por los estudiantes, sin alteraciones.
- Esforzarse por maximizar el número de estudiantes implicados en el descubrimiento de una solución racional. El debate se debería detener sólo cuando una mayoría de los estudiantes esté implicada en el problema.

Otro desafío para el profesor aparece al final del debate, a la hora de sintetizar los resultados y focalizar la atención de los estudiantes en lo que es importante tener en mente. Se debe evitar felicitar a aquellos que han dado argumentos correctos y menospreciar a aquellos que dieron soluciones incorrectas. Más bien se debe recuperar los razonamientos erróneos para mostrar cómo los errores, tras ser analizados, pueden ofrecer buenas ideas y soluciones útiles. Si el profesor es realmente neutral, cada estudiante puede llegar a creer que es útil tener, animar y defender ideas porque distintos puntos de vista pueden ayudar a entender mejor lo que no es obvio.

DIFICULTADES Y REACCIONES DE LOS ESTUDIANTES

Obviamente, el establecimiento de debates científicos en el aula conlleva una serie de dificultades, puesto que es un proceso lento que requiere una gran inversión de tiempo y esfuerzo por parte del profesor, así como un acuerdo entre el profesor y estudiantes de aceptar riesgos.

Aunque no tenga éxito inmediato, Legrand afirma que tiene la capacidad de transformar la comprensión de la ciencia de la mayoría de los estudiantes, así como de permitirles imaginar el concepto de verdad y demostración.

La autoridad inevitable del profesor ahora se basa en otro sistema de valores; algunas partes del contrato didáctico deben hacerse explícitas: el debate científico es posible si todo el mundo respeta al profesor por su competencia, pero también si su conocimiento no ensombrece a los estudiantes. El contrato didáctico se acepta cuando las diferencias con el conocimiento de los estudiantes no crean situaciones de dominación o de estar a la defensiva.

4.3. DISEÑO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Mostramos a continuación el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica sobre el concepto de integral impropia. Antes de abordar su diseño y la organización de las diferentes sesiones, presentamos algunas reflexiones generales y una descripción de las diferentes cuestiones que se han tomado en cuenta para su diseño.

En primer lugar, debemos aclarar las razones que nos han llevado a elegir el diseño de una Ingeniería como metodología de investigación y de innovación curricular. Esta elección viene marcada, fundamentalmente, por el doble propósito que nos planteamos al organizar nuestra investigación[153].

La primera fase vino marcada por un estudio exploratorio del aprendizaje de los estudiantes de los conceptos relativos a la integración impropia después de una enseñanza tradicional (González-Martín, 2002. Ver Sección 3.3.), que nos dio una aproximación al estado en que se encuentran nuestros estudiantes de Primer Curso de Matemáticas al acabar el curso académico en las cuestiones referentes a la comprensión de la integral impropia.

La segunda fase de nuestra investigación consiste en el diseño de una secuencia de enseñanza que ayude a paliar las numerosas carencias observadas en nuestros estudiantes. Sin embargo, esta secuencia también ha de cumplir la función de metodología de investigación, permitiéndonos observar y analizar el nuevo aprendizaje conseguido por los estudiantes y evaluarlo de forma objetiva.

El diseño de una Ingeniería Didáctica para introducir los conceptos de la integración impropia se reveló como muy apropiado a nuestros propósitos. Por un lado, nos da la

[153] Consultar las Secciones 1.1. y 1.2.

oportunidad de organizar una secuencia y re-ordenar los contenidos según nuestras hipótesis de trabajo y objetivos y, por otro, la contrastación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* nos puede proporcionar elementos de evaluación no sólo de la propia ingeniería sino también del nivel de aprendizaje conseguido.

Como se explica en las Secciones 1.1. y 1.2., algunas características de nuestro diseño son la articulación del registro gráfico con el algebraico, la reconstrucción del conocimiento a partir de conceptos previamente estudiados y el uso del ordenador para enriquecer las experiencias de los estudiantes.

Por lo expuesto anteriormente, nuestra Ingeniería no sólo tiene carácter de diagnóstico, sino que también pretende ofrecer una nueva secuencia de enseñanza para los contenidos relativos a la integración impropia.

4.3.1. RESTRICCIONES PARTICULARES

En esta Sección presentamos las principales restricciones que hemos encontrado en el diseño de nuestra Ingeniería. En primer lugar, presentamos aquéllas relativas a factores institucionales (que motivan la elección de los estudiantes con los que se desarrollaría la experimentación). En segundo lugar, una vez elegido el nivel y la asignatura, presentamos las principales restricciones que impone el nivel de conocimientos de los estudiantes.

EL CONTEXTO

Para el desarrollo de nuestra ingeniería didáctica se ha elegido la asignatura *Análisis Matemático II*, del primer curso de la Licenciatura en Matemáticas.

El motivo de esta elección reside, principalmente, en cuestiones institucionales. El desarrollo de una secuencia de enseñanza teniendo en cuenta los diversos aspectos de la integral impropia que tratamos requiere del mayor número de horas posible. De las titulaciones de nuestra Universidad donde se imparten los contenidos relativos a la integración impropia es la Licenciatura en Matemáticas la que mayor cantidad de horas dedica a éstos (en algunas titulaciones apenas se le dedica unas clases).

Por ejemplo, los estudiantes de Ingeniería estudian en un solo semestre, y en la misma asignatura, los contenidos de continuidad, derivabilidad e integración de funciones de una y dos variables, aunque no con mucha profundidad. También reciben una introducción a las ecuaciones diferenciales. El tiempo teórico que se le dedica al concepto de integral impropia es inferior a dos horas.

Los alumnos de Física, en su caso, tienen una asignatura semestral destinada al Cálculo Integral, donde aprenden los contenidos propios de la integración en una y varias variables, además de las aplicaciones físicas de estos últimos. Ellos sí estudian funciones eulerianas e integrales paramétricas. Estimamos que el tiempo dedicado en teoría a la integral impropia es de unas cuatro horas.

Por otro lado, acceder a la Titulación en Matemáticas nos resulta más fácil que a otras que tenemos en nuestra Universidad.

Otro motivo decisivo consiste en la aproximación que se hace. Pretendemos recurrir de forma reiterada a conceptos que tradicionalmente se estudian previamente a la integral impropia (continuidad, representación gráfica, límites, convergencia, series, integración definida) y los estudiantes que más profundamente han estudiado (aunque quizá no aprendido) estos conceptos son los de Matemáticas.

Por último, la experiencia del Director de esta Tesis Doctoral durante varios cursos en la asignatura *Análisis Matemático II* le permitió detectar grandes dificultades en los estudiantes para comprender situaciones relativas al concepto de integral impropia que le llevaron a una primera aproximación del problema de investigación que tratamos en esta Memoria. La buena disposición a colaborar en nuestro trabajo del profesor encargado de la asignatura acabó de decidirnos.

Una vez decidida la titulación en la que se realizaría nuestra Ingeniería, la elección del nivel y de la asignatura son inmediatos. Los contenidos referentes a la integración impropia se imparten en el Plan de Estudios actual durante el segundo semestre en el Primer Curso de la Licenciatura. Desafortunadamente, durante el primer curso de nuestra Licenciatura se estudian pocas aplicaciones de los conceptos; como consecuencia, nuestros estudiantes acaban el Primer Curso sin conocer Teoría de Probabilidades, ecuaciones diferenciales complicadas (donde intervienen transformadas integrales para su resolución o algunas que se pueden emplear para la solución de circuitos eléctricos) o aplicaciones físicas de los conceptos estudiados. Esta circunstancia nos obliga a restringir los contenidos (sobre todo, aplicaciones) de nuestra secuencia a los aspectos más formales.

Hay dos grupos de Primer Curso en la Licenciatura. Habitualmente, no todos los estudiantes asisten a las clases durante todo el curso, sino que en la mitad del semestre (y a veces desde mucho antes) los que asisten se reducen a menos del 50%.

Las clases teóricas las reciben todos los estudiantes de cada grupo juntos. Para las clases de problemas se divide el grupo en dos y cada mitad va con un profesor distinto. En total, hay tres horas semanales de teoría y dos de problemas.

Después de la implementación de esta Ingeniería queda pendiente su adaptación a estudiantes de otras titulaciones, tratando de partir de los conocimientos previos que se espera de ellos. De hecho, consideramos que su desarrollo con otros estudiantes (especialmente de Física, Ingeniería o Economía y Empresa) podría enriquecer este trabajo al poder incluir de forma mucho más activa las diversas aplicaciones que la integral impropia tiene e incluso poder utilizar algunas de éstas como motivación para su introducción en el escenario matemático. Por otra parte, este hecho podría ayudar a descargar un poco nuestro diseño de tantos contenidos matemáticos (especialmente algunos de gran rigor) y lograr un equilibrio en los contenidos que se presenten en ella.

CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTUDIANTES

Como se ha indicado anteriormente, la elección de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas viene determinada, entre otras cosas, por las características de los programas oficiales, al ser éstos los que más tiempo dedican al concepto "integral impropia" y al ser uno de nuestros objetivos ofrecer una propuesta donde se relacione este concepto todo lo posible con otros conceptos matemáticos (lo que implica trabajar con estudiantes de mayor bagaje matemático).

El nivel de los estudiantes viene determinado porque la asignatura donde se introducen las integrales impropias se imparte en el Primer Curso de la carrera. En nuestra Universidad, el itinerario clásico seguido para la introducción del concepto de integral impropia en la Licenciatura en Matemáticas es el que presentamos en la Figura 4.1.

En la parte superior aparecen dos asignaturas del primer semestre: *Análisis Matemático I* (a la izquierda) y *Seminario de Análisis Matemático* (a la derecha), que se estudian en paralelo. En la parte inferior aparece *Análisis Matemático II*, del segundo semestre:

Octubre	Números reales y su axiomática. Continuidad de funciones de una variable real. Derivación de funciones de una variable real. Polinomios de Taylor, regla de L'Hôpital.	Topología general. Sucesiones de números reales. Series de números reales. Sucesiones funcionales. Series funcionales. Series de potencias.
Febrero	Números complejos. Integración indefinida. Integración definida. Teorema fundamental del Cálculo. Integrales impropias. Integrales paramétricas. Introducción a las ecuaciones diferenciales.	

Figura 4.1.

Aunque los estudiantes con los que se desarrolla la Ingeniería pertenecen al primer año de la Titulación en Matemáticas, es habitual que muchos cursen la asignatura por segunda vez. Además, es posible cursar *Análisis Matemático II* sin haber superado alguna de las dos anteriores.

Una de las principales dificultades observadas para comprender los conceptos de la integración impropia proviene directamente de la ausencia de significado de herramientas fundamentales (ver Sección 3.3.4.), como el uso de límites, la misma noción de convergencia, la definición de integral definida y algunos conceptos básicos de series y sucesiones[154].

En la Sección 3.3.4. mostramos algunos obstáculos que aparecen en nuestro contexto, y que resumimos a continuación:

- Obstáculo generado por la concepción errónea de que la integral definida es siempre un área y, por tanto, ha de dar un valor positivo.
- Obstáculo producido por el empleo de una concepción estática de los procesos límite, además del uso del infinito potencial en lugar del actual, que puede inducir la creencia de que el área de una figura infinita es infinita. En algunos casos se detecta también una concepción del límite como una operación y no como un proceso.
- Obstáculo de *ligación a la compacidad*, consistente en la imposibilidad de concebir un volumen (o un área) como finito a menos que la figura sea cerrada y acotada. Es un obstáculo intrínseco al concepto a estudiar; no se trata de evitarlo, sino de enfrentar a los estudiantes a él para asimilarlo utilizando los elementos estudiados.
- Obstáculo de *homogeneizar dimensiones*, consistente en atribuir a un volumen las propiedades del área que lo genera por revolución (luego un área infinita se piensa que originará siempre un volumen infinito).
- Errores producidos por la mala interpretación del enunciado de algún teorema o criterio y utilizarlo en otro caso.
- Errores de tipo puramente algebraico.

[154] En la Sección 4.3.4. se presenta el itinerario diseñado para el concepto de integral impropia, donde señalamos de qué conocimientos previos nos servimos en cada momento; las carencias en éstos pueden dificultar o imposibilitar el aprendizaje de los nuevos elementos.

Para disminuir el efecto de estos obstáculos, se tendrán en cuenta en el diseño de las sesiones, enfrentando a los estudiantes con ellos y utilizando sus concepciones erróneas como parte de la enseñanza[155].

4.3.2. ELECCIONES MACRO-DIDÁCTICAS

Las elecciones principales que rigen el diseño de nuestra Ingeniería se organizan en torno a dos aspectos: matemático y didáctico. Se muestra a continuación las elecciones tomadas en cada una de ellos.

MATEMÁTICAS

Legitimación del registro gráfico y articulación con el algebraico

La Sección 3.3.4. muestra que, en general, los estudiantes prefieren enunciados de tipo algorítmico y con instrucciones claras de lo que se les pide y que las cuestiones no algorítmicas que presentan otro registro de representación (en nuestro caso el gráfico) producen grandes dificultades (o un alto índice de abandono).

El empleo de gráficas no es una herramienta habitual en los estudiantes, que muestran su preferencia por el registro algebraico (a pesar de las grandes dificultades que les ocasiona a veces), y muchos ni siquiera reconocen el registro gráfico como un registro de trabajo matemático. La falta de coordinación entre registros también origina dificultades a los estudiantes y algunas paradojas les hacen dudar.

Esta no coordinación, o falta de uso adecuado de uno de los registros (o de ambos), priva a los estudiantes de instrumentos de anticipación de resultados que se van a obtener y de control de resultados obtenidos.

Inferimos la siguiente hipótesis para la construcción de nuestra Ingeniería:

Hipótesis 1: El uso del registro gráfico de forma más activa durante la instrucción y en los ejercicios y problemas propuestos puede paliar algunas de las carencias encontradas en la dimensión cognitiva.

Para ello, se introducen paulatinamente actividades donde se recurre al registro gráfico. En primer lugar, se dará una interpretación gráfica de la definición construida de integral impropia, con lo cual se extiende el problema inicial de generalización de un concepto a un problema de tipo geométrico.

Posteriormente, se plantea a los estudiantes decidir la convergencia o divergencia de la integral de ciertas funciones según su forma, lo cual origina un primer criterio de divergencia que viene directamente relacionado con el registro gráfico. Estas actividades contribuyen a dar a este registro un estatus de registro de trabajo matemático, útil para predecir algunas situaciones o para interpretar resultados, aunque también se mostrarán algunas limitaciones (funciones de gráficas muy similares, pero cuyas integrales se comportan de forma bien distinta).

En lo siguiente, se tratará de interpretar muchos de los resultados gráficamente, de forma que se logre una coordinación entre los registros gráfico y algebraico y que los estudiantes sean capaces de utilizar el registro gráfico para conjeturar o interpretar.

[155] Véase Selden y Selden (1998), en la Sección 2.2.1., y también la Sección 2.3.2.

Tomar en cuenta la Hipótesis 1 nos hace lleva a las siguientes consideraciones:

- La introducción y uso del registro gráfico se hace progresivamente debido a la falta de costumbre de nuestros estudiantes al trabajo en él; primero se utiliza para interpretar resultados y posteriormente para predecir.
- El trabajo en el registro gráfico requiere también de ciertas habilidades y familiaridad con la forma de las funciones.
- Los estudiantes han de reconocer cuáles son las limitaciones de este registro.
- Estas limitaciones harán necesario el uso del registro algebraico.
- El uso del registro algebraico junto con el registro gráfico (con sus potencialidades y debilidades) facilitará la coordinación de ambos registros.
- La coordinación de estos registros enriquece la comprensión del objeto "integral impropia".

Reconstrucción del conocimiento

El mapa conceptual que planteamos para el concepto de integral impropia se presenta en la Figura 4.2.

En él, la línea gruesa representa el orden que se ha elegido para presentar los bloques de contenido principales (señalados con recuadro doble) y la línea discontinua un camino secundario a seguir dentro del primer bloque. Las flechas representan relaciones entre los diferentes contenidos.

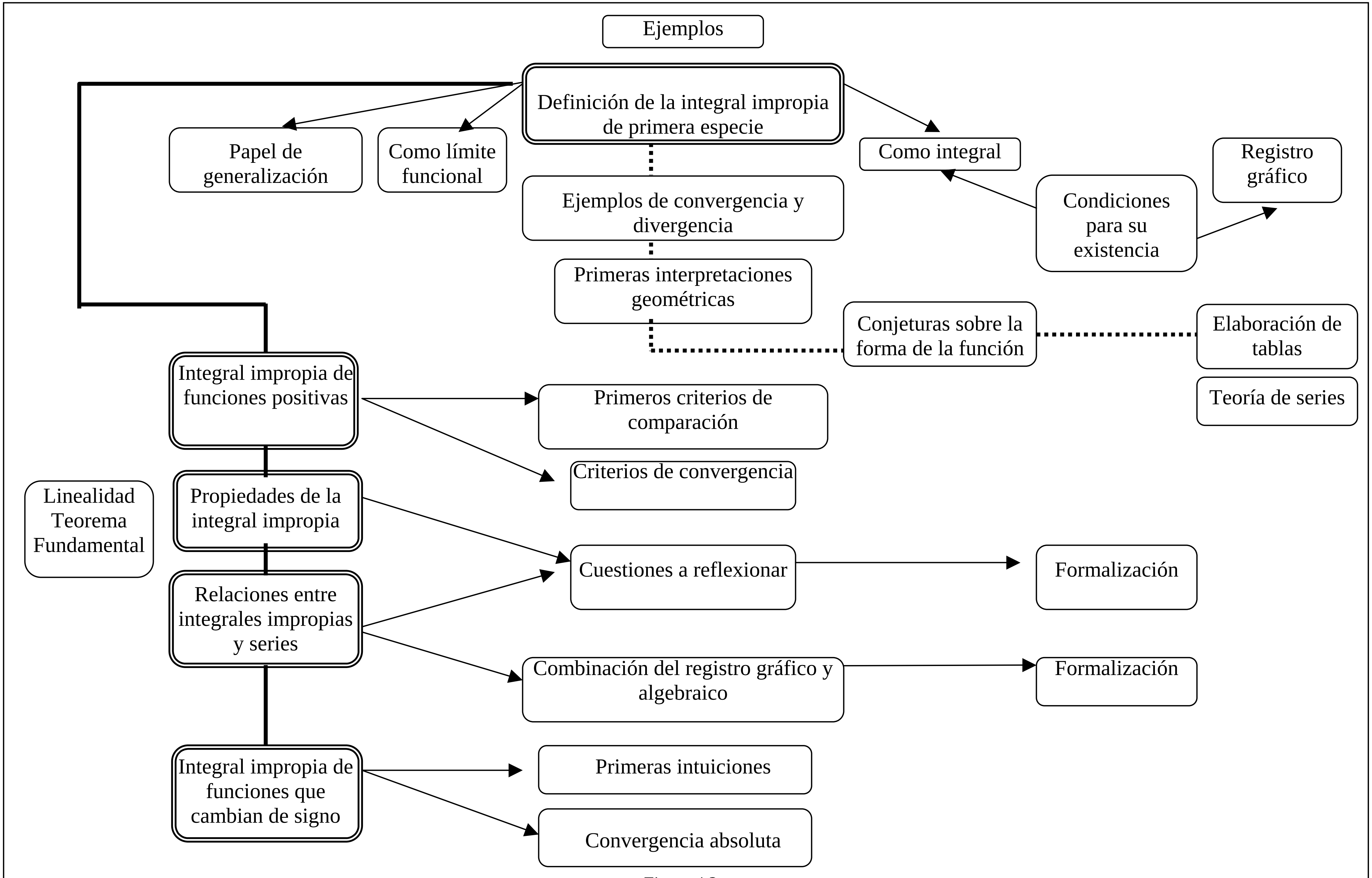

Ejemplos
Definición de la integral impropia de primera especie
Papel de generalización
Como límite funcional
Como integral
Registro gráfico
Condiciones para su existencia
Ejemplos de convergencia y divergencia
Primeras interpretaciones geométricas
Conjeturas sobre la forma de la función
Elaboración de tablas
Teoría de series
Integral impropia de funciones positivas
Primeros criterios de comparación
Criterios de convergencia
Linealidad
Teorema
Fundamental
Propiedades de la integral impropia
Cuestiones a reflexionar
Formalización
Relaciones entre integrales impropias y series
Combinación del registro gráfico y algebraico
Formalización
Integral impropia de funciones que cambian de signo
Primeras intuiciones
Convergencia absoluta

Figura 4.2.

Con las primeras actividades destinadas a la introducción de la definición de integral generalizada se pretende reforzar el conocimiento de los estudiantes sobre las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann. También se pretende reforzar la idea de integral como una función, como un proceso dinámico, lo cual permite calcular su límite y preguntarse bajo qué condiciones este límite será finito. En un primer momento, la definición dada será "imprecisa", para ir completándola poco después, tal como sucede históricamente; la definición de integrabilidad local es posterior a los primeros cálculos e intuiciones sobre integración impropia.

A través de los primeros ejemplos de convergencia y divergencia se refuerza el estatus del registro gráfico como registro de trabajo matemático útil para predecir y comprobar resultados. También se repasa la operatoria de cálculo de primitivas sencillas.

Se motiva, además, la elaboración de tablas donde se estudie la convergencia de la integral de las funciones más usuales. Este primer acercamiento ayuda a ver algunas diferencias de la integral impropia con la definida, a vislumbrar parecidos con la teoría de series y a introducir la función integral ($F(x) = \int_a^x f(t).dt$) como elemento clave en el trabajo posterior. Esta parte puede resultar útil para entrenar a los estudiantes en la búsqueda de contraejemplos, actividad que consideramos importante en el trabajo matemático[156].

Al estudiar la integral impropia de funciones positivas se abordan los primeros criterios de comparación, donde se revisan elementos de la teoría de series y se vuelve a recurrir al registro gráfico. El trabajo previamente realizado se utiliza en este bloque, en especial el concepto de función integral.

En el siguiente bloque, donde se abordan las propiedades que se generalizan y que no con la integral impropia, se recuerdan las propiedades básicas de la integral definida.

La teoría de series vuelve a aparecer explícitamente al enfocar algunas relaciones entre series e integrales impropias. Nuevamente se recurre al registro gráfico. El uso reiterado de este registro, alternado con el trabajo en el registro algebraico, puede darle un nuevo estatus cara a los estudiantes.

Finalmente, en el último bloque (integral impropia de funciones que cambian de signo en el intervalo de integración) se retoman elementos de la teoría de series y se trabaja en el registro gráfico.

La elección de este itinerario descansa en nuestra opción de potenciar el uso de la transferencia por los estudiantes y utilizar los conocimientos anteriores. Por esta razón, se sigue un recorrido implícitamente similar al recorrido para la instrucción de series.

Relación con conocimientos previos

Encontramos que las relaciones entre el concepto de integral impropia y otros conceptos previamente estudiados no son claras para muchos estudiantes; además, suelen presentar una ausencia clara del significado geométrico de la integral. Opinamos que para una correcta comprensión del concepto de integral impropia es necesario visualizar el cálculo de áreas como

[156] Véase la Sección 2.2.1. De acuerdo con Benbachir y Zaki (2001), consideramos que la construcción de ejemplos y contraejemplos permite un aprendizaje más rico y que éstos promueven los cambios de registros y la movilización del conocimiento. Además, la petición de contraejemplos a cuestiones que los estudiantes consideran ciertas promueve el aprendizaje (Selden y Selden, 1998). Maschietto (2001) señala el papel potencial del registro gráfico en la resolución de ciertos problemas; de igual forma, en nuestro diseño, este registro tiene un gran potencial en la construcción de ejemplos y contraejemplos. Nuestro diseño intenta también enseñar a los estudiantes a usarlos eficientemente (Alcock, 2004).

un proceso dinámico, ya que esta visión nos permite concebir la función integral y calcular su límite.

En este aspecto, enunciamos la segunda hipótesis que guiará el diseño de la Ingeniería, relacionada también con la reconstrucción del conocimiento:

<u>Hipótesis 2</u>: El aprendizaje de los nuevos conceptos puede utilizarse para reforzar los conocimientos previos de los estudiantes.

Esta hipótesis supone una retroalimentación con los conceptos aprendidos (Figura 4.3.):

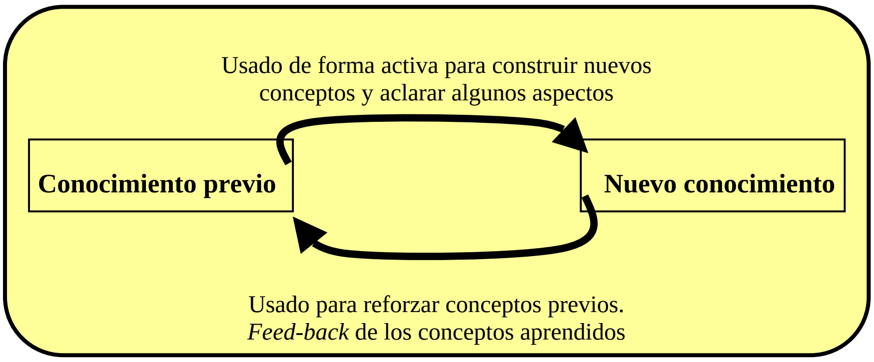


Figura 4.3.

Por una parte, utilizaremos activamente el aprendizaje anterior de los alumnos para construir los nuevos conceptos y, por otro, estos nuevos conceptos será utilizados para revisar los anteriores y aclarar algunos aspectos de ellos. En particular, los efectos de la consideración de esta hipótesis son:

- La introducción de la integral generalizada a partir del problema de extensión de la definición de Riemann puede reforzar la comprensión de ésta, en particular las condiciones bajo las que se define.
- La presentación de la función integral como elemento central del discurso puede reforzar la visión de la integral como un proceso dinámico.
- El cálculo del límite de la función integral para decidir el carácter de una integral puede hacer que los estudiantes revisen su visión de los procesos límite.
- La decisión de abordar la secuencia en paralelo a la secuencia habitual para la enseñanza de las series y la evidencia de sus relaciones a partir del Test Integral puede enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las series.
- El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquece el conjunto de experiencias de los estudiantes, haciéndolos más sensibles a los engaños de la intuición.

DIDÁCTICAS

Algunas han sido explicitadas previamente:

- Abordar las limitaciones cognitivas y didácticas ligadas al estatus del registro gráfico (y al poco hábito en su uso) a través de una introducción paulatina, de forma que su uso quede institucionalizado poco a poco[157].
- Apoyar la complejidad de las técnicas ligadas a la ausencia de una primitiva, así como la visualización de funciones no elementales, utilizando asistencia de un *software* informático.
- Abordar las limitaciones de tiempo mediante una reducción del contenido en la resolución algebraica, originando un cambio en el estatus privilegiado dado a la resolución directa.

Otras decisiones, de carácter más metodológico, son:

<u>Reparto de responsabilidades</u>

De acuerdo con la Teoría de Situaciones, se diseña el *medio* de cada actividad de forma que produzca contradicciones, dificultades o desequilibrios[158]. Esta condición inicial de "no control" ha de producir una adaptación en los estudiantes para tratar de solucionar la situación problemática planteada.

Para que el estudiante pueda interactuar con el *medio*, éstos han sido diseñados de forma que los estudiantes puedan recurrir a los conocimientos de que disponen para tratar de controlarlo. La interacción estudiante-*medio* debe finalizar en la producción de conocimiento por el estudiante, soluciones optimales a los problemas, susceptibles de institucionalización.

También se ha diseñado de forma que permita el trabajo lo más autónomo posible del estudiante y su aceptación de la responsabilidad que se le da. Este nuevo contrato didáctico específico resulta completamente nuevo a nuestros estudiantes, por lo que se decide comenzar con situaciones en principio cercanas a ellos (identificar integrales, decidir una definición, calcular integrales) para provocar una aceptación paulatina de éste.

El *medio* empleado para cada situación está ideado de forma que produzca la mayor interacción posible de los estudiantes con él y origine una reflexión sobre las cuestiones planteadas. También se procura que, en ocasiones, el *medio* pueda ser enriquecido para ser utilizado en una nueva situación.

De forma general, se usará como *medio* el planteamiento de una situación problemática para los estudiantes que induzca a la reflexión utilizando los conocimientos que se tienen para su solución.

<u>Debate científico</u>

Artigue (1999) señala que la discusión grupal es útil y que el juego colectivo permite en ocasiones encontrar soluciones en un tiempo razonable; el trabajo conjunto promueve regularidades que podrían no aparecer en el trabajo individual de los estudiantes. Muchos escenarios se vuelven ricos al participar del carácter social de los procesos de aprendizaje. Poirier (2001) destaca también que la confrontación con diversas formas de proceder ayuda al estudiante a reestructurar progresivamente su pensamiento y a refinar sus métodos de trabajo.

En la clase se enfatiza el debate y el uso de la intuición, el razonamiento y las relaciones con otros conceptos ya estudiados. Finalmente, se expondrán los principales resultados de forma

[157] Maschietto (2001) señala que, normalmente, el registro gráfico se asocia a ejercicios particulares y que su operacionalización en el nivel universitario se suele dejar para el trabajo privado del estudiante (ver Sección 1.3.3.), tendencia que se pretende combatir con nuestro diseño.

[158] Véase la Sección 2.3.2.

rigurosa, lo cual no significa que se haga de forma meramente algebraica o algorítmica. Se pretende dar una interpretación gráfica de muchos resultados y tratar de relacionar lo más posible el nuevo conocimiento con el anterior.

Aunque la distribución no es uniforme, de forma general en cada sesión hay trabajo individual (que se puede desarrollar en muchas ocasiones con los compañeros sentados más cerca), trabajo en pequeños grupos y debate en gran grupo (siguiendo la estructura del debate científico). La estructura de las aulas de nuestra Facultad (asientos fijos a modo de foro) no permite la organización frecuente de pequeños grupos de trabajo.

El profesor introducirá algunos conceptos o resultados y gestionará los debates.

La organización de debates es importante para problematizar las situaciones y para hacer de forma lo más colectiva posible la construcción de los conceptos y resultados clave.

4.3.3. El problema de enseñanza. Generalización de la integral definida

Esta sección recoge los aspectos que determinan nuestro problema de enseñanza y la forma en que éste será abordado a lo largo de nuestro diseño. Al ser nuestra problemática principal la de generalización de un concepto conocido, hemos de preguntarnos qué se generaliza específicamente, lo que da lugar a la definición de la integral impropia (generando diferentes técnicas según se trabaje o no con el cálculo de primitivas). Comentamos finalmente el papel que se da a la resolución de problemas y al trabajo con los ordenadores, finalizando con una enumeración de los principales instrumentos de evaluación de nuestra Ingeniería.

¿Qué se generaliza?

Nuestra propuesta se basa en presentar la integral impropia destacando su naturaleza de **generalización** de la integral definida, de forma que el desarrollo de la ingeniería ayude a complementar un conocimiento que los estudiantes deberían tener[159]. Se considera probable que la puesta en escena de nuestra ingeniería revele algunos elementos que se hayan pasado por alto en el trabajo preliminar y que causan discontinuidades en el aprendizaje de los estudiantes.

En nuestra aproximación se introduce la integral impropia desde el problema de generalización de la integral de Riemann (siendo la pregunta principal: ¿Bajo qué condiciones podemos extender la definición de integral de Riemann?). Se presenta su interpretación desde un punto de vista geométrico y se verán algunas de sus aplicaciones, reenviando a los estudiantes al origen histórico, consistente en el estudio de qué sucede al extender las técnicas de cálculo de áreas conocidas al caso de figuras infinitas. Igual que sucedió en la Historia, se abordarán primero casos sencillos y se creará una intuición para, posteriormente, formalizar una teoría de la integración impropia[160].

[159] Skemp (1980) afirma que los conceptos nuevos no pueden ser comunicados mediante una definición, sino preparando a los estudiantes para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos, por lo que se ha de construir los conceptos mediante ejemplos (Sección 2.2.1.)

[160] Esta elección viene condicionada, en parte, por el nivel de conocimiento de los estudiantes, que no conocen la Teoría de Probabilidades, ni las transformadas integrales, ni aplicaciones físicas de los conceptos que estudian (Sección 4.3.1.).

Otro elemento importante es el estudio de la extensión de las propiedades del concepto original, por lo que se dedica un bloque al estudio de las propiedades generales de la integral impropia, tales como la linealidad, el teorema de integración por partes, etc., haciendo especial hincapié en qué condiciones deben darse para ello.

Es de esperar que esta instrucción nos permita comprobar que algunas de las insuficiencias previstas en los estudiantes con el concepto de integral definida y de convergencia, principalmente, son más profundas de lo esperado.

Por ejemplo, el hecho de suprimir una de las condiciones iniciales en la integral de Riemann para definir el nuevo concepto puede ocasionar algún problema a los estudiantes. Sin embargo, el hecho de partir de la misma definición pretende crear una continuidad entre ambas definiciones (aunque más adelante se verá que no se conservan todas las propiedades y de qué manera se extienden otras).

Otra de las rupturas evidentes es la diferencia en las condiciones de existencia de una integral propia e impropia (por ejemplo, para el valor absoluto). Además, funciones para las que siempre existe la integral definida (como polinomios) aparecen como imposibles de integrar en un intervalo infinito.

En cuanto a las comparaciones de algunos criterios de integrales con los de series, puede originarse la falsa impresión de que las cosas funcionan siempre igual, por lo que se debe ser cuidadosos en esta parte y proporcionar contraejemplos adecuados.

TÉCNICAS Y TRABAJOS ESPECÍFICOS

La definición que damos en nuestra aproximación tiene en cuenta la distinción entre los casos en que se conoce una primitiva del integrando y se quiere utilizar y los casos en que no se conoce o no se quiere utilizar. De esta forma, se tiene:

$$\int_a^{\infty} f(x).dx = \underset{(1)}{\underline{\underline{\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x).dx}}} = \lim_{b\to\infty}\left[F(x)\right]_a^b = \underset{(2)}{\underline{\underline{\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)}}}$$

El uso de una u otra de las dos expresiones subrayadas da lugar al desarrollo de técnicas distintas para afrontar el problema de la convergencia. Si se utiliza una primitiva, el problema se reduce a estudiar su límite en el infinito (2); de esta forma se puede abordar la convergencia de la integral de funciones sencillas. Por el contrario, cuando se utiliza la expresión (1) el tipo de técnicas a desarrollar es distinto; una vez estudiado el caso (2) y teniendo un repertorio de integrales "sencillas", éstas serán utilizadas en criterios de comparación que permitirán decidir la convergencia o no sin calcular una primitiva.

Esta definición ayuda a reforzar el carácter funcional, dinámico, de la integral, elemento que será de gran importancia porque se da un papel fundamental a la función integral ($F(x) = \int_a^x f(t).dt$), gracias a la cual se prueban muchos de los criterios de convergencia.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El uso del debate en clase y el enunciado de conjeturas puede resultar de gran ayuda para que los estudiantes sean conscientes de qué elementos conocen y cuáles no de los conceptos previamente estudiados.

Nuestra propuesta también considera necesario el trabajo del profesor en la pizarra, planteando y resolviendo algunos ejercicios, para enseñar a los estudiantes las técnicas básicas de cálculo de integrales impropias y de estudio de su convergencia. Como se especifica en la Sección 4.1.2., la extensión de ingenierías didácticas al nivel universitario dificulta, generalmente, el nivel casi autónomo de trabajo de los estudiantes y las mediaciones del profesor juegan un papel mucho más importante. El profesor no solamente administrará las sesiones, sino que también se encargará de partes conceptuales y técnicas del trabajo. Es por ello que en nuestros análisis *a priori* se toman en cuenta las posibles intervenciones del profesor, no sólo a la hora de institucionalizar.

En clase se proponen cuestiones a razonar para introducir varios elementos de la nueva teoría y para ilustrar algunos ejemplos de qué es lo que generaliza y qué es lo que no la nueva definición de integral[161]. También se prevé la resolución de "problemas tipo" para ilustrar las nuevas técnicas aprendidas. Se han diseñado nuevas hojas de problemas, de donde se resolverán algunos ejercicios y problemas en los que el uso de las nuevas definiciones y técnicas aprendidas se ejemplifique. Estos ejercicios serán resueltos por el profesor, aunque en algunos casos cuente con la ayuda y participación de los alumnos.

El resto de ejercicios quedarán por resolver personalmente por parte de los estudiantes. Aunque parte de éstos será de tipo algorítmico, también se tratará de introducir algunos problemas con elementos novedosos o de mayor dificultad, donde sea necesaria mayor reflexión, así como aplicaciones, de forma que la integral impropia no parezca un mero divertimento matemático. Se tratará de que los ejercicios propuestos puedan ser abordados por los estudiantes utilizando los apuntes de clase y los ejercicios ya resueltos por el profesor, aunque en alguno sea necesario razonar más o buscar en la bibliografía.

En general, el material que se ha tomado para redactar los nuevos problemas, seleccionar los que se usarán en las sesiones y complementar las clases teóricas proviene de: Arnaudiès y Fraysse (1988), Boschet (1997), Dubinsky *et al* (1995), Groupe Aha (1999), Hauchecorne (1988), Hughes-Hallet *et al* (2002), Love (1889), Maschietto (2002), Ortega (1993), Simmons (2002), Spivak (1987), Terracher y Ferachoglou (1998), Thomas y Finney (1996) y Zill (1987)[162].

Buena parte de los problemas propuestos son de corte "no rutinario" o "no habituales", tratando de combinar los registros gráfico y algebraico, de forma que se enriquezcan los conceptos introducidos en clase. Estos ejercicios y problemas serán organizados para discutir en clase e incluso para introducir problemáticas y también para trabajar independientemente por cada estudiante. Otro aspecto que se utilizará será el de presentar situaciones atípicas; también se privilegiará el registro gráfico a la hora de plantear algunas cuestiones.

Entre estos ejercicios pensamos que es importante el uso de contraejemplos y de situaciones paradójicas para enriquecer la visión de este dominio del Cálculo. Todos estos ejercicios seguirán la tónica de los planteados en clase para debatir y su propósito es que el alumno reflexione sobre los aspectos teóricos de los conceptos aprendidos y sobre su conocimiento de ellos. También se pueden aprovechar estos ejercicios y problemas para plantear directamente a los alumnos algunas cuestiones que hayan quedado abiertas.

EL TRABAJO CON ORDENADORES

Como varias investigaciones han mostrado, la tecnología informática (usada adecuadamente) puede jugar un papel decisivo en el desarrollo de una articulación flexible entre

[161] Se trata de tener en cuenta las definiciones de "buen problema"y de "cuestión no rutinaria" que se dan en la Sección 2.2.3.

[162] Las hojas de problemas confeccionadas se muestran en el Anexo 1.

los registros algebraico y gráfico y puede hacer de esta articulación un instrumento eficiente de la actividad matemática (Artigue, 1999)[163].

Por esta razón, consideramos muy enriquecedor la organización de algunas sesiones en el aula de ordenadores para ilustrar los resultados estudiados en clase. En estas sesiones se presentan algunos casos de convergencia y divergencia, además de dibujar conjuntamente pares de funciones que se utilicen al aplicar algún criterio de comparación. También se muestran las limitaciones del *software* para el análisis de convergencia o el cálculo del valor de integrales, que se ven superadas con el recurso a la teoría y el empleo de los criterios estudiados en clase.

Por razones que se explican en la Sección 6.5.1., estas sesiones se diseñan como complemento a las clases teóricas (y no forman parte de las sesiones de Ingeniería), de forma que ilustren resultados estudiados.

La Sección 6.5. se dedica a la descripción de las variables escogidas para estas sesiones, de su diseño y su análisis.

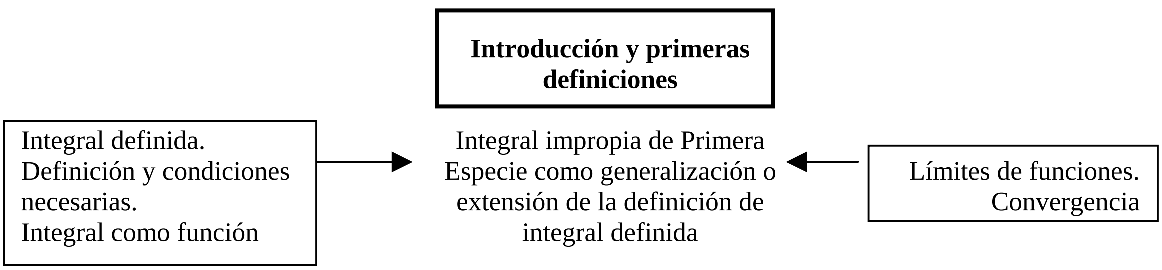
LA EVALUACIÓN DE LA INGENIERÍA

Como es habitual en el diseño de ingenierías, la validación de nuestras hipótesis se realiza principalmente confrontando los análisis *a priori* y *a posteriori* (ver Capítulo 5). Además de las observaciones de aula, a lo largo de las sesiones también se ha previsto repartir Fichas de trabajo a los estudiantes para que anoten sus respuestas a cuestiones que serán utilizadas para introducir nuevos conceptos, utilizando los anteriores. Con ellas se pretende analizar si los alumnos se apropian del saber institucionalizado, además de estudiar su conocimiento sobre contenidos anteriores.

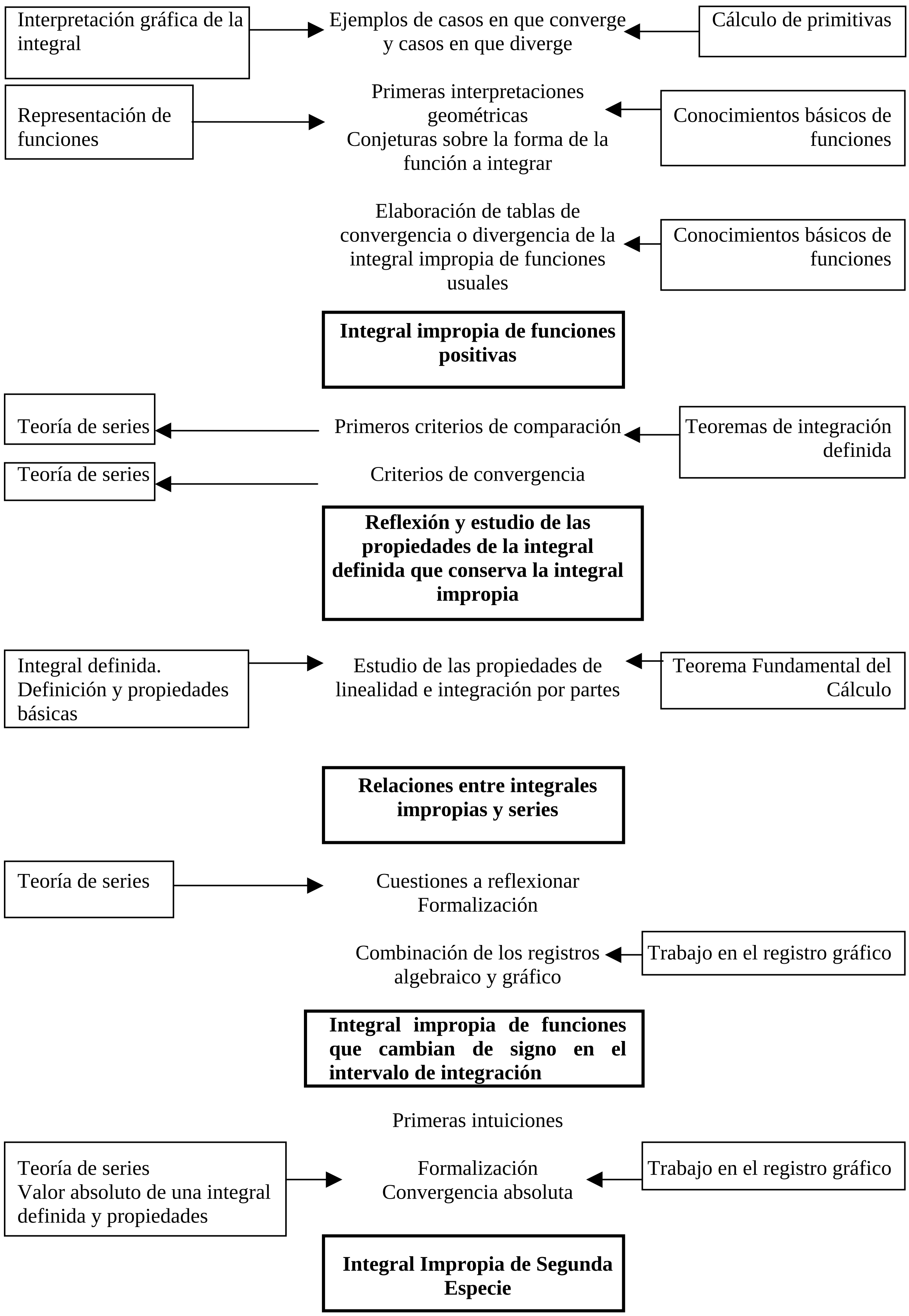
Se ha previsto también realizar un cuestionario de contenidos al final de su desarrollo, para obtener más datos sobre el aprendizaje de los estudiantes, y recoger datos sobre la opinión de los estudiantes, evaluando así sus impresiones sobre los aspectos más relevantes del desarrollo de nuestra secuencia. También se les presentará un test sobre el uso de contraejemplos en la enseñanza. Es de destacar que los resultados de este test son también utilizados en un estudio de carácter internacional (Gruenwald y Klymchuk, 2003).

4.3.4. LA INGENIERÍA RESULTANTE

Presentamos a continuación el itinerario principal de la secuencia que se implementa sobre la integración impropia. En la columna central y recuadrados, aparecen los títulos de cada uno de los bloques en que se divide nuestra secuencia y a continuación se describen algunos trabajos específicos en cada uno de ellos; a los lados del esquema de enseñanza situamos los elementos matemáticos que consideramos necesarios:



[163] Citado en la Sección 1.1.



En la Sección 5.1. se describen los aspectos generales de la implementación (duración, números de sesiones, horarios…).

4.4. ANÁLISIS *A PRIORI* DE LAS SESIONES

En el análisis *a priori* de cada sesión se mostrará, en primer lugar, una descripción general, señalando sus objetivos, las principales variables locales y elecciones micro-didácticas, así como el *medio* y material empleado. Posteriormente, se divide la sesión en episodios y se analizan uno a uno; estos episodios constituyen unidades de información que nos permiten hacer un análisis más fino del desarrollo de las sesiones. La descripción del desarrollo de cada sesión y su análisis *a posteriori* serán objeto del Capítulo 5.

Es importante destacar que, por razones de espacio, presentamos los análisis *a priori* definitivos y que cada uno se enriquece de los análisis *a posteriori* de las sesiones desarrolladas previamente (Sección 5.2.)

En González-Martín (2005a y 2005c) y González-Martín y Camacho (2003, 2004b, 2004c y 2005b) se da una breve visión de la estructura de nuestra Ingeniería.

4.4.1. SESIÓN 1

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Reflexión sobre qué condiciones son necesarias para definir la integral de Riemann.
- Presentar a los estudiantes elementos de reflexión que permitan obtener la definición de la integral generalizada de primera especie y considerar su significado y su relación con la integral definida.
- Comenzar a observar algunos parecidos y diferencias con la integral definida. Primera reflexión sobre las condiciones para definirla, ejemplos de convergencia y divergencia y debate sobre qué tipo de funciones originarán integrales divergentes. Utilización de la definición en ejemplos prácticos.
- Comenzar a presentar el registro gráfico a los estudiantes como un registro que se volverá cada vez más activo.

Dimensión matemática:

Se introduce el problema a estudiar a partir de una situación matemática (*¿cómo generalizar una definición ya conocida?*) que se relaciona con el problema geométrico del cálculo de áreas de figuras no acotadas. En esta sesión no sólo se reflexiona sobre las condiciones bajo las cuales se define la integral de Riemann[164], sino que se da una nueva definición para el caso en que no se cumple una de ellas (intervalo de integración finito).

En primer lugar, se identifican las condiciones que se van a vulnerar de la definición de Riemann para, posteriormente, reflexionar sobre cómo extender esta definición. Posteriormente, se operacionaliza esta nueva definición con algunos ejemplos que plantearán la siguiente cuestión: *¿se puede predecir qué funciones darán lugar a una integral convergente y cuáles no?*

[164] Como señala Calvo (1997), un hecho didáctico destacado es que al presentar la integral de Riemann se dibuja una curva sin patologías, en un intervalo positivo, con un número razonable de rectángulos... pero no se insiste en cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no. De este modo, nuestra primera actividad promueve una reflexión sobre esta cuestión.

Con las actividades de operacionalización de la nueva definición se pretende favorecer una visión dinámica de los procesos de integración y presentar de manera informal la función integral, que será definida formalmente en la siguiente sesión.

Los ejemplos elegidos favorecen la reflexión sobre las condiciones necesarias y/o suficientes y promueven el uso del registro gráfico[165], con una consecuente reflexión sobre cuáles son sus potenciales y sus limitaciones.

En esta sesión comenzamos a utilizar el registro gráfico como un registro de trabajo matemático que puede ser conjugado con el algebraico. Este registro caracterizará al final de la sesión algunas funciones cuya integral es divergente.

Dimensión didáctica:

Se comienza la sesión utilizando el debate científico. Se ha elegido una cuestión "sencilla" para los estudiantes para animarlos a participar (y acostumbrarse a esta metodología, que se prevé utilizar durante las siguientes sesiones). La cuestión a debatir, implícitamente, será bajo qué condiciones se define la integral de Riemann.

Posteriormente se tomarán algunas de las integrales mostradas en la primera actividad para dar una definición de la integral impropia de primera especie, de forma que quede clara la necesidad de procesos límite. La definición que se construye da lugar a la distinción de dos "familias" de técnicas para abordar el problema de la convergencia (esto es, el cálculo directo de la integral o el estudio de su carácter sin calcularla).

Formas de trabajo:

En esta primera sesión se utiliza, sobre todo, el debate en clase y las aportaciones de los estudiantes. Se define la integral impropia de primera especie, se realizan algunos cálculos y se interpretan gráficamente los resultados.

El profesor también utiliza la pizarra para sintetizar estas aportaciones, realizar gráficas y proponer ejemplos.

El *medio*:

El *medio* que se presenta consiste en un conjunto de integrales de funciones (tanto definidas como impropias). Está diseñado de forma que permita a los estudiantes explicitar qué integrales no pueden abordar con las herramientas de que disponen y reflexionar sobre las condiciones para poder hacerlo; además, incorpora algunos casos de respuestas erróneas previstas (por ejemplo, si los estudiantes creen que es necesaria la continuidad, en el *medio* aparece como contraejemplo la integral fácilmente calculable de una función discontinua). Con este propósito han sido incorporadas una función discontinua, una no derivable y una no integrable, que se utilizarán para reflexionar si las condiciones dadas por los estudiantes son necesarias y/o suficientes.

El *medio* es incompleto en el sentido de que, en un principio, se desconoce la solución al problema propuesto y su utilidad. Sin embargo, los estudiantes disponen de los elementos y conocimientos necesarios para su estudio.

El resto de actividades de la sesión se desarrollan tomando funciones del *medio* de la primera.

[165] Gráficamente es muy sencillo probar que la función $f(x) = 1- |x|$ no es derivable pero es integrable. Igualmente, es sencillo probar que la función $f(x) = E[x]$ no es continua pero sí integrable. Posteriormente, las dos integrales elegidas para operacionalizar la definición permiten iniciar un debate sobre el uso del registro gráfico.

Material utilizado por el profesor:

Utilizará la Transparencia 1[166], donde se recogen distintas integrales a identificar. Esta transparencia estará activa durante toda la sesión.

Como complemento, se usará la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Al final de la sesión se les entrega las hojas de problemas, de donde se resolverán cuestiones durante las sesiones siguientes y se seleccionarán problemas para entregar de forma individual. En esta sesión se resuelven ya dos ejercicios de las hojas.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Una vez expuestas las características globales de la sesión, procedemos a un análisis más fino de ésta. Para ello, se ha dividido la sesión en cuatro episodios y se presenta el análisis de las distintas dimensiones distinguidas, explicitando las diversas elecciones locales tomadas.

Episodio 1:

Duración prevista:
20 min. aprox.

Objetivos:

- Toma de conciencia de las condiciones que hasta el momento se han necesitado para definir la integral de Riemann de una función y analizar qué condiciones no son imprescindibles.
- Se quiere también relacionar la motivación matemática de la generalización con el problema del cálculo de áreas, aunque no sea el propio *medio* quien lo propicie directamente. Será el profesor quien, mediante producciones gráficas en la pizarra, enfoque la interpretación gráfica de lo que se hace.

- Hacer que los estudiantes comiencen a reflexionar sobre lo que han aprendido y lo que van a aprender.
- Creación de un nuevo contrato didáctico en el que el profesor se limitará fundamentalmente a dirigir el debate, manteniéndose neutro; se trata de que el estudiante pueda hacer funcionar su saber en situaciones donde el enseñante no esté tan presente como en la enseñanza tradicional. Se intenta comenzar a dotar al alumno de cierta autonomía que deberá desarrollar a lo largo de las sesiones siguientes.
  Como lo expresa Brousseau (1988), esta primera situación pretende hacer surgir de forma natural la problemática de extender una definición, pero disimula en un principio su propósito y la respuesta esperada; es necesaria una adaptación del alumno.
- Introducción de los estudiantes al uso del debate grupal en clase y a la problematización de situaciones.
- El debate ayudará al profesor a hacerse una idea de qué es lo que los estudiantes han retenido sobre la integral definida y de cuál es su nivel de comprensión actual.

Descripción:

- Presentación por parte del profesor del problema inicial (¿qué integrales no podemos abordar con la definición clásica?), reflexión individual y grupal por parte de los alumnos. Debate científico.

[166] Todas las transparencias utilizadas durante las sesiones se muestran en el Anexo 2.

- El *medio* consiste en un conjunto de integrales de diversas funciones: funciones integrables en intervalo finito, intervalo infinito, funciones no acotadas, funciones discontinuas, no derivables e, incluso, no integrables. Con esto, los estudiantes quedan inmersos en una situación problemática: identificar qué integrales no pueden ser abordadas por ellos y **por qué**.

a) $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$	b) $\int_0^{\pi} e^x dx$	c) $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$
d) $\int_0^5 \frac{1+2x}{x^2+1} dx$	e) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$	f) $\int_{-1}^3 E[x] dx$
g) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$	h) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$	i) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
j) $\int_1^e \ln x dx$	k) $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-1}}$	l) $\int_0^{10} (1+5x)^7 dx$
m) $\int_1^{\infty} x^{-1/3} dx$	n) $\int_{-1}^1 (1-\lvert x \rvert) dx$	o) $\int_0^1 f(x)dx$, con $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{I} \\ 0, \text{ si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

Dificultades:

Quizá el debate sea muy abierto y los estudiantes no se centren. Si esto sucediera, el profesor ha de intervenir y ayudarles. Por otro lado, los estudiantes verán esta metodología como completamente nueva y posiblemente les cueste entrar en el debate.

Creemos que el *medio* es lo suficientemente completo como para poder superar los inconvenientes previstos.

Acciones esperadas de los estudiantes:

En un primer momento, quizá pueda haber algo de confusión por parte de los estudiantes, debido a dos razones principales:

- Uso de una cuestión en absoluto algorítmica y rutinaria para ellos, lo que requiere de una adaptación.
- Petición de hablar en voz alta, de establecer hipótesis y razonarlas, lo que supone una ruptura con la actitud pasiva habitual.

Se espera que sea más sencillo para ellos localizar las integrales impropias de primera especie que las de segunda[167], ya que estas últimas requieren de, al menos, una de las siguientes condiciones:

- una mayor coordinación entre los registros algebraico y gráfico[168].
- un análisis o conocimiento de las propiedades de la función integrando en el intervalo de integración.

Entre las respuestas esperadas a la pregunta "*¿Bajo qué condiciones se define la integral de Riemann?*" se esperan las siguientes:

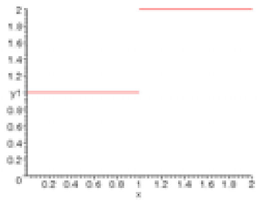
[167] Obviamente, para las integrales impropias de primera especie, la presencia del símbolo "∞" en los extremos de integración es de inmediato reconocimiento. Por tanto, con tan sólo una mirada pueden ser reconocidas, mientras que las de segunda especie requieren de un estudio del integrando.

[168] En el Capítulo 1 se comentan varios resultados que muestran que en los estudiantes prevalece lo algebraico sobre lo gráfico: Orton (1983), Evangelidou *et al* (2004), Tall (1992b).

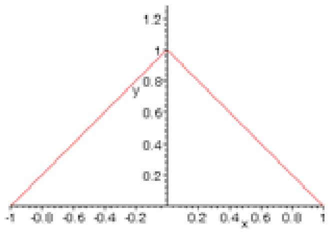
- Función acotada en el intervalo de integración.
- Intervalo de integración acotado.
- Función continua.
- Función derivable.
- Función integrable.
- Función tal que coincidan las sumas superiores con las sumas inferiores.

Para las respuestas no correctas, se puede recurrir al propio *medio* para su eliminación:

- Si la condición no eliminada fuera la de continuidad, se planteará el cálculo de la integral de la función $E[x]$, que aparece en el *medio*, utilizando el registro gráfico:



- Si la condición no eliminada fuera la de derivabilidad, planteará el cálculo de la integral de la función con forma de triángulo ($1- |x|$), utilizando el registro gráfico:



- Si quedara la condición de ser integrable, el profesor recalcará a los estudiantes que precisamente el hecho de asumir que la función es integrable en $[a, b]$ implica que se dan las condiciones necesarias para ello. Se recuerda que en la definición de Riemann aparecen las sumas de Riemann. En primer lugar, se toma un número finito de rectángulos, por lo que esta decisión obliga a que el intervalo de integración sea finito; por otro lado, al partir de sumas finitas para acotar el área, la función debe estar acotada en el intervalo. Por tanto, ser acotada y el intervalo finito son condiciones **necesarias** para ser integrable.

- Si quedara la condición de ser función tal que las sumas superiores y las inferiores coinciden, el profesor recalcará a los estudiantes que precisamente ésta es una caracterización de la integrabilidad, luego se supone que se dan las condiciones necesarias para ello, como en el caso anterior. Por esta razón, la función de Dirichlet no es Riemann integrable, pues aunque se cumplen las condiciones necesarias, no cumple esta caracterización y siempre se podrá encontrar sumas inferiores con valor 0 y sumas superiores con valor 1[169].

[169] De hecho, éste suele ser el argumento utilizado para probar la no-integrabilidad según Riemann de esta función en el intervalo [0, 1]. Véase la Sección 3.2.2.

En cuanto a si estas condiciones son suficientes para asegurar la integrabilidad, se espera que haya dudas al respecto, si bien en el *medio* está el contraejemplo clásico. Por tanto, se espera que algún estudiante lo reconozca.

Acciones esperadas del profesor:

- El profesor da pie a los estudiantes y dirige el debate de forma lo más neutra posible. Escritura en la pizarra de las aportaciones de los alumnos.
- El profesor intervendrá si los alumnos no fueran capaces de identificar las integrales que no se pueden calcular por el momento. Si se identifica al menos una de cada tipo, no será necesaria su intervención.
- En caso de que no estuviera claro qué condiciones son necesarias y cuáles no, el profesor también puede intervenir y aportar nuevos elementos de reflexión, tal como se ha indicado.

<u>Episodio 2:</u>

Duración prevista:
15 min. aprox.

Objetivos:

- Ver la necesidad de extender la definición de Riemann con el uso de límites cuando el intervalo de integración no es finito.
- Distinción de las dos variantes de la definición:

  1) $\int_a^\infty f(x).dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x).dx$

  2) $\int_a^\infty f(x).dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x).dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$, en caso de conocer una primitiva y querer utilizarla.

  El uso de una u otra variante dará lugar a dos tipos de técnicas distintas para averiguar el carácter de la integral.
- Remarcar el carácter funcional (dinámico) de la función integral $F(x) = \int_a^x f(t).dt$, que se tomará como elemento central del desarrollo de la teoría.
- Primera intuición de que no todas las funciones son integrables en sentido impropio (para ello, se preguntará a los estudiantes si pueden adelantar alguna situación en que no exista este límite).

- El uso del debate y la reacción de los estudiantes ante la necesidad del límite ayudará al profesor a averiguar qué tipo de concepción tienen los estudiantes sobre la integral: estática, dinámica o mixta[170].

[170] Artigue (1995a) resume estos modelos conceptuales sobre la convergencia a partir de los trabajos de Aline Robert. Los modelos que se distinguen son: Primitivo (descripciones monótonas en términos de cotas o puntos estacionarios de la convergencia), Dinámico (la convergencia se asocia con la idea de aproximación dinámica), Preestático y Estático (hacen una traducción al lengua natural de la formalización usual de ε o *N*. Los modelos Preestáticos corresponden más precisamente a formulaciones donde la cuantificación de ε no es evidente y se presentan con mayor frecuencia en el ciclo básico universitario) y Mixtos (conjugan expresiones dinámicas y estáticas). Comparar también con los perfiles identificados por Turégano (1998) en la Sección 1.3.1.

Descripción:

- El profesor pide a los estudiantes construir una primera definición para la integral impropia de primera especie. Presenta las diversas formulaciones si se utiliza o no una primitiva del integrando. Institucionalización.
- Interpretación gráfica.

Dificultades:

Nuevamente, están condicionadas por qué es lo que los estudiantes saben, además de por el uso de una pregunta de corte no rutinario. Por otro lado, opinamos que la mayoría de los estudiantes no tiene una visión dinámica de los procesos límite, tal y como se indicó en la Sección 3.3.4., por lo que su uso en esta situación puede parecer “artificioso”.

De todas formas, se espera que los estudiantes participen y surja la definición mediante límites.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Nuevamente, el uso de una pregunta abierta y en absoluto algorítmica puede hacer dudar a los estudiantes. En caso de no reacción, se abordarán casos particulares y la búsqueda de un método para calcular la integral de dos funciones:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Debido al nivel cognitivo de los estudiantes (Sección 3.3.), se espera que sea necesaria alguna intervención del profesor para la construcción de la definición, al igual que para hacer surgir las dos variaciones de la definición.

También es posible que algún estudiante aplique directamente la regla de Barrow, evaluando la primitiva en el infinito directamente. Se ha de hacer ver que este procedimiento es incorrecto por dos razones:

- No se puede evaluar directamente una función en el infinito. Esta cuestión debería plantear el uso de límites.
- El aplicar la regla de Barrow presupone que se conoce una primitiva de la función integrando.

No se espera que los estudiantes remarquen algún caso en que el integrando tenga una discontinuidad esencial en el interior del intervalo de integración $[a, \infty)$, con lo que no tendría sentido la definición[171]. En estas condiciones, la definición de “integrabilidad local” se pospondría para la segunda sesión.

Acciones esperadas del profesor:

- Plantear el problema de cómo definir el nuevo objeto y escribir en la pizarra las aportaciones de los estudiantes y sus razonamientos.
- En caso de que los estudiantes no sepan cómo enfocar la cuestión, plantear las dos integrales citadas.
- Producciones gráficas en la pizarra para orientar el debate.

[171] Nótese que al calcular $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, implícitamente se supone que la función es Riemann-integrable en cada intervalo $[a, b]$.

- Propiciar que surja por parte de los estudiantes la distinción de las dos versiones de la definición y puntualización de que cada una dará lugar al desarrollo de técnicas distintas.
- Explicitación de que la definición construida tiene sentido *si existe el límite*. La matización de esta apreciación dará lugar en la siguiente sesión a la definición de "integrabilidad local".
- Presentación de la función integral y acentuación de su carácter dinámico.
- Una vez construida la definición, plantea a los alumnos si prevén situaciones en que no exista el límite.

Episodio 3:

Duración prevista:
15 min. aprox.

Objetivos:

- Operacionalización de la nueva definición con dos ejemplos "sencillos" para no desviar la atención de la nueva definición hacia el cálculo de primitivas complicadas. Apropiación de esta nueva definición tras su institucionalización.
- Se ha hablado ya de dos técnicas distintas para conocer el comportamiento de una integral impropia, según si se conoce o no una primitiva del integrando. Ilustración de la técnica en el caso de que se utiliza una primitiva.
- Observación de distintos comportamientos para una integral impropia: convergencia y divergencia.
- Presentación del registro gráfico de forma más activa. Reflexión sobre la forma de las funciones y su influencia en el comportamiento de su integral. Institucionalización de las debilidades de este registro, para más adelante mostrar su potencial.
- Adelantar el Criterio de Divergencia de integrales de primera especie.
- Primera aproximación a la integral de funciones del tipo $1/x^k$.

Descripción:

- Operacionalización de la definición construida para la integral impropia de primera especie. Cálculo de dos ejemplos:

$$a)\ f(x)=e^{-x} \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

$$b)\ f(x)=x^{-1/3} \qquad \int_1^\infty x^{-1/3}dx = \infty$$

- Dibujo de las gráficas de los dos integrandos. Observación de similitudes en las gráficas y diferencias en el comportamiento de las integrales.
- Reflexión sobre si hay algún tipo de gráfica que permita asegurar la divergencia, lo que permitirá obtener un Criterio de Divergencia en el registro gráfico.

Dificultades:

Pensamos que la principal dificultad puede venir originada por la falta de manejo de las técnicas implicadas: cálculo de primitivas y cálculo de límites.

También asimilar una visión dinámica de la definición propuesta puede originar dificultades a los estudiantes. La combinación del cálculo de primitivas con el de límites puede despistar a algunos.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se espera que, con mayor o menor dificultad, calculen las integrales dadas y se haga una puesta en común de resultados. Posteriormente, se espera que sepan dibujar las gráficas de las funciones.

Nuevamente, el debate abierto sobre qué formas permiten asegurar la divergencia puede desconcertar a los estudiantes en esta primera sesión.

Acciones esperadas del profesor:

- Plantear las integrales que se va a calcular y seleccionar alumnos que lo harán en la pizarra.
- Petición de gráficas a los alumnos.
- Introducción del debate. En caso de bloqueo, ayudar a los estudiantes a razonar con pistas o con producciones gráficas.
- Trabajar la noción de convergencia en este contexto. Promover una visión dinámica de los procesos que se utilizan.
- Dejar claro que uno de los objetivos de la parte teórica será desarrollar técnicas que permitan predecir si una integral converge o no sin calcular su integral; éste será el único camino posible o el más económico en muchos casos (funciones con primitiva difícil de calcular o sin primitiva conocida).
- Ayudar a la producción del Criterio de Divergencia. Institucionalización.

Episodio 4:

Duración prevista:

7 min. aprox.

Descripción:

Se trata de un momento didáctico.

El profesor plantea a los alumnos comenzar a elaborar una tabla de funciones elementales donde se estudie el carácter de su integral, planteando utilizar la información provista por el Criterio de Divergencia del episodio anterior.

Los estudiantes trabajan de forma individual o en pequeños grupos y, antes del final de la sesión, el profesor dice a los alumnos que este nuevo concepto tiene múltiples aplicaciones. Para ilustrarlas, propone la resolución de los ejercicios y problemas del 2 al 15 de las hojas.

4.4.2. SESIÓN 2

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Definición formal de la integrabilidad local.
- Comienzo del estudio de los resultados sobre convergencia de integrales impropias de primera especie con integrando positivo, que se abordará profundamente en las siguientes sesiones.

  Esto se concreta en la construcción de una tabla de convergencia de la integral de las funciones elementales.
- Introducción de la función integral.
- Conseguir una mayor implicación de los estudiantes en los debates desarrollados.

- Uso activo del registro gráfico y del Criterio de Divergencia enunciado en la sesión anterior. Institucionalización de éste.
- Posibilidad de vislumbrar algún parecido entre los resultados de series y los de integrales.

Dimensión matemática:

Los principales elementos previstos de esta sesión son la formalización de la condición de integrabilidad local y, al final, la definición de la función integral, $F(x)$ (que jugará un papel fundamental en adelante), deduciendo dos propiedades fundamentales (positiva y creciente), que permitirán identificar su comportamiento en el infinito (acotada o no) con el carácter de la integral impropia. De esta forma, en nuestro enfoque se identifica el problema del análisis del carácter de la integral impropia con el del estudio del comportamiento de la función $F(x)$ en el infinito (creciente en el caso de integrar una función positiva).

Por otro lado, se construye la tabla de convergencia de la integral de las funciones elementales y aparece un primer criterio de convergencia para las funciones del tipo $1/x^k$.

El registro gráfico sigue presente en la elaboración de las dos tablas previstas y se utilizará conjuntamente con el registro algebraico, mostrando así su utilidad y las ventajas del trabajo conjunto en ambos registros.

Finalmente, destacamos el hecho de que en esta sesión se prevé la aparición del primer contraejemplo a la intuición “habitual”. Se presenta una función que no tiene límite en el infinito, pero cuya integral es convergente. De esta forma, se introduce una nueva herramienta que se utilizará en lo sucesivo: el razonamiento a partir de ejemplos y contraejemplos. Aunque en estos primeros acercamientos será el profesor el que construya los contraejemplos[172], se espera una devolución más adelante y que los estudiantes sean capaces de construir algunos contraejemplos sencillos.

Dimensión didáctica:

Aparecen en esta sesión momentos donde el profesor presenta y demuestra resultados sin el uso de situaciones a-didácticas. Al comienzo de la sesión el profesor jugará el rol de institucionalizar, revisando los elementos de la sesión anterior e introduciendo algunos resultados. Se hace ver a los estudiantes que en la sesión anterior se ha dado por satisfecha la condición de integrabilidad local y se completa la definición dada para la integral impropia de primera especie.

En el segundo episodio se da la responsabilidad a los estudiantes para que construyan la tabla de convergencias; con esta actividad serán ellos mismos los que analicen la convergencia de la familia $1/x^k$, que será posteriormente institucionalizada por el profesor.

El tercer episodio previsto supone el comienzo del estudio formal de la integral de funciones positivas[173]. Para comenzar, se pide a los estudiantes que debatan y reflexionen sobre las relaciones entre el comportamiento de la función integrando en el infinito y la convergencia o no de su integral. Con este debate pretendemos que los estudiantes estudien todos los casos posibles y los prueben o presenten contraejemplos.

---

[172] Dado que esta actividad es nueva para los estudiantes y que se realizará coordinando los registros algebraico y gráfico y usando resultados de series, es importante que sea el profesor quien introduzca poco a poco esta herramienta para que los estudiantes aprendan a usarla eficientemente (Alcock, 2004).

[173] Tal como sucede en la Historia (Sección 3.1.2.), antes de sistematizar el estudio de integrales impropias, se abordan algunos resultados particulares usando las técnicas de que se dispone.

Formas de trabajo:

Debate en clase y trabajo en grupos.

El profesor trabajará también en la pizarra.

El *medio*:

Se comienza la sesión con una situación didáctica.

En el Episodio 2 el *medio* lo constituyen las familias de funciones elementales que conocen los estudiantes y que se escribirán en la pizarra junto con dos herramientas: el Criterio de Divergencia y la definición de integral impropia de primera especie. La tarea prescrita será la construcción de una tabla donde se analice la convergencia de la integral de estas funciones. Se prevé la intervención del profesor para completar el análisis de la familia $1/x^k$.

La tarea prescrita en el Episodio 3 será la construcción de una tabla donde se relacione el comportamiento local en el infinito del integrando con el carácter de la integral. El *medio* lo constituye el Criterio de Divergencia (que permite asegurar la divergencia en ciertos casos) y los ejemplos estudiados hasta el momento (en la Sesión 1, Episodio 3, que plantean el conflicto, pues hay funciones que tienden a cero con integral convergente y divergente), y se complementa con el conocimiento básico de los estudiantes sobre funciones. El *medio* no es completo, pues no se espera que los estudiantes puedan estudiar correctamente el caso “función sin límite en el infinito”, por lo que el profesor debe intervenir al final de la actividad para completar la tabla.

Finalmente, en el Episodio 4, se prevé un momento didáctico, con una breve discusión previa, para deducir las dos propiedades fundamentales de $F(x)$ cuando el integrando es positivo.

Material utilizado por el profesor:

No se utilizan transparencias en esta sesión. El profesor utiliza la pizarra.

Material distribuido a los estudiantes:

Se prevé distribuir la Ficha 1 en el Episodio 3.

> Sea $f(x)$ una función no negativa.
> ¿Cuáles son los diferentes comportamientos en el infinito de $f(x)$ que puedes distinguir?
> ¿Cuál es el carácter de la integral $\int_a^b f(x)dx$ en cada caso?
> Trata de justificarlo gráficamente. ¿Puedes demostrarlo formalmente?

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Episodio 1:

Duración prevista:

13 min. aprox.

Objetivos:

- Breve reflexión sobre la condición de integrabilidad local y formalización de esta condición. Se justifica, con ella, del uso de un límite en la definición, ya que supone que $F(x)$ está bien definida. Con esta definición se explicita un elemento que se usa a menudo de forma inconsciente.

- Formalización de que, como consecuencia de la integrabilidad local, el ser integrable en sentido impropio es una propiedad local (se establece un paralelismo con las series: el carácter, que no el valor de la suma, lo marcan los últimos términos).
- Ilustración de la importancia de la nueva definición y operacionalización. El hecho de ser localmente integrable permite que el estudio de la convergencia se realice solamente en un entorno de b, lo que simplifica la mayoría de demostraciones.

Descripción:

Se comienza con un momento didáctico. Se institucionalizan los resultados pendientes de la sesión anterior:

- Enunciar bajo qué condiciones se define la integral de Riemann.
- Institucionalizar la definición de integral impropia de primera especie.
- Recordar el argumento gráfico de YG de que si $f(x) \geq k > 0$ a partir de un cierto valor, se puede asegurar la divergencia de su integral y demostración algebraica de tal resultado.
- Introducir la idea de que, para calcular el límite de la integral, es necesario suponer que la función es integrable en subintervalos. Definición de integrabilidad local y acentuación de que la integrabilidad impropia es una **propiedad local** (en un entorno del infinito).

> **Definición:**
> Sea $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$ y f: $[a, b) \to \mathbb{R}$.
> Se dice que f es localmente integrable en $[a, b)$ si para todo x, $a \leq x < b$, f es integrable Riemann en $[a, x]$.

Posteriormente, se reflexiona brevemente si se puede generalizar la propiedad de la integral de Riemann de aditividad del intervalo de integración[174]. El profesor enuncia el siguiente teorema como una ilustración del funcionamiento de la condición de ser localmente integrable y lo demuestra:

> **Teorema:**
> Sea f definida y localmente integrable en $[a, b)$.
> Sea $a < c < b \leq \infty$. Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\int_c^b f(x)dx$ converge.

Dificultades:

Enunciar una condición que se ha supuesto implícitamente en la sesión anterior puede ocasionar alguna dificultad para los estudiantes. En tal caso, el profesor les incitará a mirar los ejemplos del día anterior.

En cuanto al teorema, la demostración, aunque es sencilla, puede no ser evidente para todos los estudiantes pues, en definitiva, lo que está en juego es la definición de integrabilidad local, que se acaba de enunciar.

[174] Sea f integrable en $[a, b]$ y sean c, d: $a \leq c \leq d$. Entonces, f es integrable en $[c, d]$. Además, si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Episodio 2:

Duración prevista:
12 min. aprox.

Objetivos:

- Clasificación de las funciones elementales según la convergencia o no de su integral impropia (observar si algún estudiante nota la similitud con los resultados sobre series).
- Operacionalización conjunta del Criterio de Divergencia y de la definición de integral impropia.
- Suscitar la cuestión de que quedan muchas funciones sin estudiar, ya que su tratamiento no es tan “inmediato” como el de estas funciones. Para estas funciones se desarrollarán unas técnicas diferentes.
- Ilustración de los beneficios y de las grandes limitaciones que tiene el trabajo exclusivamente en el registro gráfico ya que sólo nos permite asegurar la divergencia en algunos casos.
- El agrupamiento de las funciones en familias promueve el estudio consecuente de las funciones $1/x^k$ (primer acercamiento al cálculo de integrales dependientes de un parámetro).

- Socialización de la construcción de una herramienta que ilustra lo estudiado hasta ahora y que podrá ser utilizada en el futuro. El profesor puede aprovechar este momento para ver si los alumnos manejan las técnicas de integración de las funciones elementales, qué “repertorio” de funciones manejan los estudiantes y si conocen bien su comportamiento y tratamiento.

Descripción:

- En primer lugar, el profesor pide a los estudiantes que agrupen las funciones conocidas por familias y las escribe en la pizarra. Este agrupamiento, junto con el Criterio de Divergencia y la definición de integral impropia, constituirán el *medio* para la actividad.
- Análisis por grupos de la convergencia de la integral impropia de cada familia (lo que supone un repaso activo de los elementos trabajados en la sesión anterior). Construcción de la tabla de convergencias (primer acercamiento al estudio de la convergencia de integrales impropias). Puesta en común y argumentación.

Función $f(x)$		**Valor de** $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ **(**$\alpha > 0$**)**
0		Convergente (= 0).
a		Divergente
x^k, $k > 0$		Divergente
$\frac{1}{x^k}$, $k > 0$	$k \leq 1$	Divergente
	$k > 1$	Convergente
a^{kx}, $a > 1$	$k \geq 0$	Divergente
	$k < 0$	Convergente
$\ln kx$, $k > 0$		Divergente
$\sin kx$		Divergente
$\cos kx$		Divergente

- Se prevén dificultades para el estudio de la familia $1/x^k$, por lo que el profesor interviene e institucionaliza la Proposición sobre la convergencia de estas integrales:

PROPOSICIÓN:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} \text{ es } \begin{cases} \text{convergente si } k > 1 \\ \text{divergente} \quad \text{si } k \leq 1 \end{cases} \quad (a>0)$$

Dificultades:

Las mayores dificultades esperadas son realizar un agrupamiento de funciones por familias (en cuyo caso el profesor ayudará a los estudiantes). Es posible que las funciones de las que no se puede decir nada a priori (a^{kx}, con $k < 0$ y, en particular, $1/x^k$), o que son oscilantes, ocasionen también alguna dificultad. Si los estudiantes tuvieran problemas con el carácter de la integral de las funciones trigonométricas, el profesor explicitará que, por convenio, cuando una integral no es convergente la llamaremos divergente.

En el caso del estudio de la familia $1/x^k$, el trabajo conjunto con integrales, límites y parámetros es seguro que resulte difícil para la mayoría de los estudiantes.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Estudiar el carácter de las integrales planteadas y reflexión en pequeños grupos. Posteriormente, puesta en común de los resultados obtenidos.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor plantea la actividad y la enlaza con el trabajo de la sesión anterior. Como consecuencia de las observaciones de la sesión anterior (Sección 5.2.1.), divide la clase en pequeños grupos para asignarle a cada uno el estudio de una familia de funciones. Orientar a cada grupo en su trabajo y promover el uso de las herramientas institucionalizadas hasta el momento.

Demostración y enunciado del resultado para la familia $1/x^k$, como consecuencia del debate anterior.

Episodio 3:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Se trata de analizar el carácter de la integral impropia a partir del comportamiento local del integrando en el infinito. Nuevas evidencias de las ventajas e inconvenientes del trabajo en el registro gráfico.
- Introducción de un contraejemplo significativo de una función sin límite en el infinito y con integral convergente. Comienzo activo del uso de ejemplos y contraejemplos en nuestra Ingeniería. Uso del registro gráfico para su construcción.

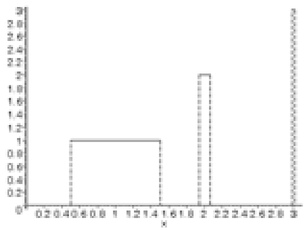
Descripción:

- El profesor anuncia que comienza el segundo bloque de la secuencia. Después de estudiar "*Introducción y primeras definiciones*" se comienza el bloque "*Integral impropia de funciones positivas*".

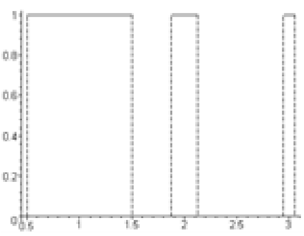
- Se hace una reflexión sobre el efecto que tiene el comportamiento local de una función en el infinito en el área que ésta encierra. Trabajo en pequeños grupos (que puede servir para observar qué es lo que los estudiantes están experimentando hasta el momento).
- Elaboración de una tabla resumen de esta reflexión.

		Comportamiento de la función	**Carácter de la integral**
Función positiva	Sin límite finito	Tiende a infinito	Divergente
		No tiene límite	No se sabe
	Con límite finito	Tiende a un número mayor que cero	Diverge
		Tiende a cero	No se sabe

- Para la reflexión inicial, se repartirá a los estudiantes la Ficha 1, que será recogida posteriormente para su análisis.
- No se espera que los estudiantes puedan probar que hay funciones sin límite en el infinito y con integral convergente. El profesor presenta el siguiente ejemplo[175]: sobre cada entero n se construye un rectángulo cuyo área valga $1/n^2$, de forma que el área total equivalga a la suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$. Los rectángulos se construyen tomando un intervalo centrado en n de base $1/n^3$ y de altura n, luego su área será: $(1/n^3) \cdot n = 1/n^2$:

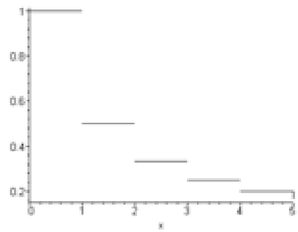


Otros contraejemplos que se pueden construir son, por ejemplo, una función escalonada que forma rectángulos sobre cada entero n, pero esta vez de altura 1 y de base $1/n^2$:



o también una función escalonada definida sobre cada intervalo $[n, n + 1)$ como $1/(n + 1)^2$, cuya área es igual a la de las dos anteriores, que no sería válida, pues su límite existe y vale cero:

[175] Este ejemplo, junto con otros usados por nosotros, aparece en Klymchuk (2004) con referencia a nuestro trabajo.



Sin embargo, hemos escogido la primera función porque ésta es un ejemplo de que:

$$\text{Función no acotada} \not\Rightarrow \text{Área no acotada.}$$
$$\text{Área acotada} \not\Rightarrow \text{Función acotada}$$[176]

Y será retomada al estudiar las relaciones entre series e integrales (Secciones 4.4.5.y 4.4.6.).

Lo único que se puede afirmar a partir de la tabla construida es que si la función tiene límite en el infinito, y éste es infinito, entonces el área encerrada no está acotada[177].

Dificultades:

Realizar la clasificación de los distintos comportamientos de una función en el infinito de la forma deseada, que permite un estudio más claro de todos los casos.

Es muy probable que algunos estudiantes piensen que si una función no tiene límite, su integral no será convergente (especialmente se prevé que los alumnos piensen en las funciones trigonométricas). Además, en la construcción del contraejemplo preparado, se espera que el uso conjunto de nociones sobre series e integrales, además del registro gráfico, ocasione algún problema a los estudiantes.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Los estudiantes deben trabajar personalmente y en los pequeños grupos de trabajo y aportar sus resultados y conjeturas. Producir gráficas.

Se espera que, con algo de ayuda o sin ella, lleguen a confeccionar una tabla similar a la presentada, aunque no se espera que tengan en cuenta el caso “función sin límite” y muchos menos que adelanten el comportamiento de su integral ni sepan dar ejemplos.

Acciones esperadas del profesor:

Diferenciar los momentos de reflexión personal y trabajo en pequeños grupos de los momentos de diálogo grupal y de institucionalización.

En caso de que los estudiantes no se centren en la clasificación esperada, el profesor deberá reconducir el debate, o darles alguna aclaración de lo que se espera. También podrá aportar algunos elementos que puedan hacer surgir el debate y la reflexión (por ejemplo, el hecho de que una función tenga límite distinto de cero implique la no convergencia, el contraejemplo de la función $1/x$ como función que tiende a cero y cuya integral no converge,

[176] Aparte de luchar con la dominancia de ejemplos concretos en la enseñanza (Tall, 1992a, 1992b; Selden y Selden, 1998; Artigue, 1995a, Evangelidou *et al*, 2004), este contraejemplo promueve la coordinación de registros y la transferencia (Benbachir y Zaki, 2001). De acuerdo con estos autores, consideramos que el uso de contraejemplos frente a cuestiones que los estudiantes consideran ciertas promueve el aprendizaje. Además, mostramos elementos para combatir el obstáculo de *ligación a la compacidad* (Sección 3.3.4.).

[177] El problema 28, propuesto a los estudiantes, está relacionado con esta cuestión. Véase el enunciado en la Sección 5.3.2. y el análisis de respuestas.

etc.). También, en caso de necesidad, ayuda a los estudiantes con orientaciones para confeccionar la tabla.

En el momento en que surja la conjetura de que una función sin límite debe tener una integral divergente, el profesor planteará a los estudiantes que no pueden probar este resultado (que, además, es falso) y construirá el contraejemplo preparado.

Episodio 4:

Duración prevista:
15 min. aprox.

Objetivos:

- Estudio del carácter de la integral impropia a partir de propiedades globales del integrando (en contrapartida a la actividad anterior, que era a partir de su comportamiento local en el infinito). Deducción del signo no-negativo y del no-decrecimiento de la función $F(x)$. Formalización de esta herramienta.
- Reafirmación del carácter funcional de la integral de una función.

Descripción:

- Presentación formal de la función integral y deducción, por medio del debate entre toda la clase, de las dos propiedades (signo y monotonía) que permitirán analizar la convergencia de la integral impropia.
- Identificación del comportamiento de $F(x)$ (estar o no acotada) con el carácter de la integral (convergente o divergente, respectivamente).
- El profesor enuncia el siguiente teorema y realiza su demostración:

Teorema:
Supongamos que f es localmente integrable y no negativa en $[a, b)$.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge si, y sólo si, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \le x < b$, está acotada en $[a, b)$.
Si F diverge, lo hace necesariamente hacia $+\infty$.

- El profesor relaciona este resultado con el contraejemplo de la actividad anterior. Se tiene que la función área está acotada (pues representa la suma de la serie $1/x^2$), lo cual garantiza que la integral impropia es convergente. Hace notar a los estudiantes que **no se concluye nada sobre la función *f*** (sólo se ha impuesto que sea localmente integrable y no negativa, pero no se obtienen conclusiones sobre ella).

Dificultades:
En vista del nivel conceptual de nuestros estudiantes, prevemos que la reflexión sobre la interpretación de la integral como una función y su carácter dinámico no será fácil. Por otro lado, quizá la deducción de propiedades de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$ no sea inmediata[178].

Para algunos estudiantes, se estima que aceptar como una herramienta de trabajo una función que viene dada por una integral, que no viene dada por una fórmula explícita, también

[178] Véase Alibert y Thomas (1991).

originará dificultades[179], por lo que habrá que seguir haciendo hincapié en esta cuestión. El trabajo explícito con la función integral en próximos episodios será útil.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Reflexión y justificación de sus argumentos.

Discusión entre todos de las propiedades que se pueden deducir y las que no. Algunas aportaciones esperadas son:

- Si f es positiva, entonces F también lo será (ésta parece la conclusión más evidente).
- Si f es creciente, entonces F también lo será (parece natural, después de la anterior. Sin embargo, lo que no es tan fácil es que los estudiantes se den cuenta de que en cualquier intervalo donde $f \neq 0$, F será creciente).
- $F(x)$ creciente si f es estrictamente positiva.
- $F(x)$ derivable. Sin embargo, se puede proporcionar como contraejemplo la integral de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x^2, & \text{si } 2 \le x \end{cases}$, que no es derivable en $x = 2$.
- $F(x)$ integrable. En este caso, el profesor dirá que, aunque sea cierto[180], este dato no nos ayudará a predecir su comportamiento en un entorno del infinito.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor hace una presentación en la pizarra de la función $F(x)$ y propone a los estudiantes que reflexionen qué propiedades "adquiere" y por qué.

Síntesis de resultados (ha de quedar bien claro que si F es positiva y creciente, en un entorno del infinito sólo tiene dos posibilidades: estar acotada o no), institucionalización de los mismos y enunciado y demostración del teorema.

4.4.3. SESIÓN 3

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Se comienza el bloque "*Integral impropia de funciones positivas*".
- Formalización de la función integral, elemento fundamental en nuestro desarrollo. Deducción de su comportamiento a partir de propiedades del integrando: locales (límite en el infinito) y globales (no-negativo).
- Trabajo con ejemplos y construcción de contraejemplos.
- Operacionalización de la función integral en el primer Criterio de Comparación.
- Observar si se explicitan similitudes con los resultados sobre series.
- Mantener la implicación de los estudiantes en los debates desarrollados.
- Uso activo del registro gráfico y del Criterio de Divergencia.
- Mejorar la gestión del tiempo asignado a cada episodio.

[179] Consultar Artigue (1995a), Carlson *et al* (2003) y Evangelidou *et al* (2004).

[180] Pues si f es integrable en $[a, b]$, entonces F es continua en $[a, b]$, luego es integrable.

Dimensión matemática:

Los principales elementos previstos de esta sesión son: relación de algunas propiedades locales (límite en el infinito) y globales (no-negativo) del integrando con el carácter de la integral, formalización de la función integral y su relación con la convergencia, enunciado del Criterio de Comparación y operacionalización del mismo.

Además, se comienza el trabajo de construcción de contraejemplos para ilustrar algunos resultados. Estos contraejemplos se construirán, fundamentalmente, en el registro gráfico, siendo más relevante el proceso de su construcción que la obtención de una expresión algebraica para ellos.

Continuamos desarrollando actividades que ayuden a dotar al registro gráfico de un estatus más matemático. Así, la construcción de la tabla y del contraejemplo del Episodio 2 son actividades claramente planteadas en el registro gráfico. Los resultados de los Episodios 3 y 4 también serán motivados e interpretados gráficamente.

Tal como se dijo en el análisis *a priori* de la sesión anterior (pero, por cuestiones organizativas se ha trasladado a ésta), destacamos el hecho de que en esta sesión se prevé la aparición del primer contraejemplo a la intuición "habitual": se construye una función que no tiene límite en el infinito, pero cuya integral es convergente; se trata, además, de una función no acotada que encierra un área finita[181].

Dimensión didáctica:

De acuerdo con las conclusiones del análisis de la sesión anterior (Sección 5.2.1.), continuamos combinando los momentos a-didácticos con momentos didácticos, en donde el profesor institucionaliza y demuestra resultados. En esta sesión, el balance de situaciones didácticas y a-didácticas es el siguiente:

- <u>Episodio 1:</u> es de recapitulación del trabajo realizado, de carácter didáctico.
- <u>Episodio 2</u>: tiene carácter a-didáctico con trabajo en grupos, con intervención del profesor al final para construir el contraejemplo. Se prevé la distribución de la Ficha 1, que permitirá concretar las conclusiones de cada grupo y analizar posteriormente la apropiación de los resultados establecidos hasta el momento.
- <u>Episodio 3</u>: se establece un breve diálogo con los estudiantes para obtener propiedades de $F(x)$ con el fin de enunciar y demostrar un resultado.
- <u>Episodio 4</u>: breve diálogo con los estudiantes para enunciar el Criterio de Comparación, que será demostrado.
- <u>Episodio 5</u>: situación didáctica ilustrando el uso del Criterio de Comparación.

Formas de trabajo:

Los estudiantes tendrán, durante el Episodio 2, un momento de trabajo en pequeños grupos (12:28 min. de trabajo grupal y 24:42 min. en total el episodio). En los Episodios 3 y 4 se pide su interpretación para adelantar resultados antes de institucionalizarlos; en el resto de episodios también se les pedirá su intervención.

El profesor trabajará fundamentalmente en la pizarra.

[181] Se ofrecen, de esta forma, contraejemplos que permitan disminuir los efectos del obstáculo de *ligación a la compacidad* (Sección 3.3.4.)

El *medio*:

El *medio* del Episodio 2 se describió en la Sesión anterior (Episodio 3). Se prevé que quedará sin estudiar el caso de función sin límite en el infinito[182], por lo que el profesor construirá el contraejemplo. En este sentido, las herramientas que se piden al alumno no se consideran demasiado complicadas y el enunciado de la tarea es sencillo, por lo que se espera la devolución de la actividad.

Para el Episodio 3, el *medio* viene constituido por la interpretación gráfica institucionalizada de la integral impropia, que interactúa con los conocimientos de los estudiantes sobre la integral definida de funciones positivas. De igual forma que en el Episodio 2, el enunciado de la cuestión no es complicado, aunque quizá no sean directas las respuestas esperadas. El trabajo de los estudiantes permitirá la institucionalización por el profesor de un teorema.

El Episodio 4 es más de tipo didáctico, aunque precedido por un pequeño trabajo de los estudiantes para prever los resultados del Criterio de Convergencia. La interpretación gráfica dada a la integral impropia de primera especie constituye el *medio*.

Material utilizado por el profesor:

El profesor trabaja en la pizarra.

En el Episodio 2, después de la construcción en la pizarra del contraejemplo de función sin límite en el infinito con integral convergente preparado, mostrará a los estudiantes la Transparencia 2, con una representación por ordenador de éste.

Material distribuido a los estudiantes:

Durante el trabajo en grupos del Episodio 2 se distribuirá a los estudiantes la Ficha 1, con la siguiente cuestión:

> Sea $f(x)$ una función no negativa.
> ¿Cuáles son los diferentes comportamientos en el infinito de $f(x)$ que puedes distinguir?
> ¿Cuál es el carácter de la integral $\int_a^b f(x)dx$ en cada caso?
> Trata de justificarlo gráficamente. ¿Puedes demostrarlo formalmente?

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

<u>Episodio 1:</u>

Duración prevista:

5 min. aprox.

Objetivos:

- Revisar la definición de función localmente integrable y su consecuencia.
- Comentar los resultados de la tabla de convergencias.
- Destacar el estudio realizado para las funciones $1/x^k$.

[182] Como consecuencia de una enseñanza basada en ejemplos prototípicos y la evasión de casos patológicos, no se espera que los estudiantes piensen en funciones discontinuas o, incluso, que consideren este caso.

Descripción:

Momento didáctico con participación de los estudiantes. El profesor pregunta qué recuerdan de la sesión anterior y lo escribe en la pizarra, de forma que se revisen los elementos más importantes.

Está previsto que pregunte a los estudiantes si los resultados vistos les resultan familiares, para ver si alguno hace conexiones con la teoría de series.

Dificultades:

Al ser el comienzo de la sesión, lo más complicado puede ser centrar a los estudiantes en el trabajo de una nueva sesión. Tampoco es seguro que algún estudiante haga conexiones entre los resultados vistos y la teoría de series.

Episodio 2:

Coincide con el Episodio 3 de la sesión anterior.

La única diferencia es el tiempo estimado asignado. En esta ocasión, se le asigna una duración estimada de 18 min. aprox.

Episodio 3:

Coincide con el Episodio 4 de la sesión anterior.

La única diferencia es el tiempo estimado asignado. En esta ocasión, se le asigna una duración estimada de 12 min. aprox.

Episodio 4:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Uso de la identificación de la integral como área cuando la función es positiva. Utilización práctica de las propiedades de la función $F(x)$ definida para desarrollar la demostración.
- Enunciado del Criterio de Comparación, que servirá de “base” a los posteriores criterios, e interpretación gráfica del mismo.

Descripción:

- El profesor enuncia que se va a trabajar con dos funciones: una de la que se conoce el comportamiento de su integral y otra de la que se quiere saber. Plantea en la pizarra la situación de dos funciones positivas e integrables tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

  motivando el pensamiento gráfico.
- El profesor plantea a los estudiantes el uso de las funciones $F(x)$ y $G(x)$ para obtener información de la convergencia de una integral a partir de la otra y una interpretación gráfica de la situación. Se da un tiempo de discusión en pequeños grupos y se hace una puesta en común. El profesor escribe en la pizarra las aportaciones y pregunta si se acepta lo escrito.

- El profesor, finalmente, enuncia y demuestra el siguiente criterio. Primero lo hace sin la k y luego hace ver a los alumnos que su presencia no cambia el resultado. Destacamos el hecho de que el resultado se enuncia en un intervalo $[a, b)$ genérico con la intención de generalizarlo cuando se estudien las integrales impropias de segunda especie.

<u>Proposición</u>:
Sean f, g dos funciones no negativas y localmente integrables en $[a, b)$. Además, se cumple que, en un entorno de b: $0 \leq f(x) \leq k.g(x)$. Entonces:

1) $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.
2) $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge.

- Una vez demostrado, el profesor insiste en el carácter local de las propiedades que se enunciarán en lo sucesivo.

Dificultades:
A pesar de que éste es un resultado bastante gráfico, el uso de la función $F(x)$ y del resultado que identifica su acotación con la convergencia pueden no ser claros debido a que se acaban de establecer.
Uso de propiedades de la integral definida para su demostración[183].

Acciones esperadas de los estudiantes:
Una vez planteada la cuestión a debatir, tras una pequeña reflexión individual-grupal, se espera que los alumnos (ayudados en particular por la interpretación gráfica dada por el profesor) den aportaciones correctas. No se prevé ningún otro tipo de aportación.

Acciones esperadas del profesor:
El profesor debe plantear la nueva situación y motivar la exploración de la misma. Promover el uso de la función integral y la interpretación gráfica mediante la realización de gráficos en la pizarra.
Síntesis de las aportaciones de los estudiantes en la pizarra e institucionalización de resultados.

<u>Episodio 5:</u>

Duración prevista:
10 min. aprox.

Objetivos:
- Operacionalización del criterio recién enunciado mediante la resolución de ejemplos.

Descripción:
Momento didáctico. El profesor resuelve en la pizarra los ejercicios 18-d, 18-e y 19-e de las hojas pidiendo colaboración a los estudiantes.

[183] Como consecuencia del análisis *a posteriori* de las dos primeras sesiones (Secciones 5.2.1. y 5.2.2.), donde queda patente que los estudiantes apenas recuerdan los resultados o técnicas de la integración definida.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx \qquad \int_{4}^{\infty} \frac{dt}{(\ln t)-1}$$

Dificultades:

Además del uso adecuado del criterio[184] y de la elección de la función con la que se comparará (en particular en la primera integral; probablemente en las siguientes los estudiantes intuyan cuál elegir por repetición del mismo procedimiento), se esperan las siguientes dificultades:

- En la primera integral, una vez dividida en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$, lo más complicado será la separación de la misma en dos intervalos para comparar con la función $1/x^2$, pues ésta no está definida en $x = 0$.
- En la segunda, además de la división del intervalo en dos, será el uso de la desigualdad $\arctan x \leq \pi/2$.
- En la tercera, será el uso de la desigualdad $\ln t < t$.

Como se ve, las dificultades particulares esperadas se relacionan más con propiedades de las funciones en juego (principalmente, acotaciones), en coherencia con nuestra conjetura inicial (Sección 5.2.1.) sobre el bajo nivel académico de los estudiantes.

4.4.4. SESIÓN 4

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Enunciado de dos nuevos criterios de comparación, consecuencia del enunciado en la sesión anterior. En primer lugar, se estudia el $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ para obtener conclusiones sobre el carácter de las integrales impropias de estas funciones. Posteriormente, se particulariza al caso en que $g(x) = 1/x^k$.
- Se comienza el tercer bloque de esta parte: "*Reflexión y estudio de las propiedades de la integral definida que conserva la integral impropia*". Las propiedades que se quiere estudiar en esta parte son la extensión de la linealidad y del teorema de integración por partes.
- Mantener la implicación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
- Puntualidad en el desarrollo de cada episodio.

Dimensión matemática:

Esta sesión tiene dos partes bien diferenciadas:

*	La primera parte presenta dos nuevos resultados consecuencia del Criterio de Comparación. La demostración del primer resultado utiliza activamente las conclusiones de este Criterio y se usará para observar si los estudiantes lo han comprendido y lo utilizan correctamente. El segundo resultado utiliza directamente el resultado anterior y la convergencia

[184] Aunque la primera integral es inmediata y la segunda se resuelve con un sencillo cambio de variable, estos ejemplos se han elegido para operacionalizar el Criterio de Convergencia, por lo que se tratará de acotar las funciones. Por otro lado, dado el nivel de conocimientos observado de los estudiantes tampoco se espera que alguno se dé cuenta de que el carácter de éstas es fácil de determinar utilizando la definición de integral impropia.

de las integrales de las funciones $1/x^k$, por lo que el trabajo de esta parte sirve para reforzar dos herramientas ya institucionalizadas. Posteriormente se resuelve un ejercicio para ilustrar el uso de estos resultados y operacionalizarlos.

Aunque el primer corolario del Criterio de Comparación puede ser enunciado en un intervalo $[a, b)$ genérico, hemos preferido particularizarlo al caso $[a, \infty)$ pues el siguiente resultado sí es particular de este tipo de intervalos. Cuando se estudien las integrales impropias de segunda especie se hará ver a los estudiantes que la prueba del primero no necesita que b sea igual a infinito.

* La segunda parte presenta dos resultados útiles de la integración definida que se extienden al caso de la integral impropia: la linealidad y el teorema de integración por partes. Se ha escogido presentar en un bloque independiente estos dos resultados porque serán utilizados posteriormente (en particular en la parte sobre la convergencia absoluta), luego resulta más práctico tenerlos separados en un bloque independiente. Además, siguiendo el recorrido histórico (Sección 3.1.2.), se han desarrollado primero unas intuiciones y unos resultados de fácil interpretación gráfica para luego estudiar otros resultados más formales (lo que justifica que este bloque se sitúe en este lugar, y no al principio, como podría parecer más lógico).

En este caso, ambos resultados se enuncian en un intervalo $[a, b)$ genérico, para poder ser extendidos fácilmente al caso de integrales impropias de segunda especie.

En esta sesión el trabajo se realizará sobre todo en el registro algebraico, recuperándose el trabajo en el registro gráfico en la siguiente sesión.

Dimensión didáctica:

Se siguen alternando los momentos didácticos y los a-didácticos, junto con momentos de trabajo grupal por parte de los estudiantes. En esta sesión, la distribución prevista es la siguiente:

<u>Episodio 1</u>: recapitulación de los resultados de la sesión anterior. Momento didáctico, donde el profesor pide colaboración a los estudiantes.

<u>Episodio 2</u>: Momento didáctico donde se enuncia el Criterio del Cociente como corolario del Criterio de Comparación. Posteriormente, se resuelve un ejemplo para ilustrar su uso. El profesor pide a los estudiantes colaboración durante el desarrollo del episodio.

<u>Episodio 3</u>: Comienza con un momento de trabajo en grupo, donde los estudiantes tratarán de particularizar el corolario anterior al caso en que $g(x) = 1/x^k$. Posteriormente, puesta en común e institucionalización del enunciado.

<u>Episodio 4</u>: Comienza el tercer bloque del capítulo. Momento a-didáctico donde los estudiantes trabajan en grupos la cuestión de la linealidad. Posteriormente, puesta en común de resultados e institucionalización.

<u>Episodio 5</u>: Momento didáctico para extender el teorema de integración por partes al caso impropio. Se pide colaboración de los estudiantes.

Formas de trabajo:

Los momentos de mayor autonomía de los estudiantes son los episodios 3 y 4. En ambos casos, trabajarán por pequeños grupos.

En el resto de episodios se pedirá su colaboración en momentos concretos del desarrollo de los resultados.

El profesor trabaja en la pizarra.

El *medio*:

El *medio* para el Episodio 3 lo constituyen el resultado del Episodio 2 (Criterio del Cociente) y la tabla de convergencias de la Sesión 2 (con lo que se vuelve a operacionalizar). Con estos dos elementos se espera que los estudiantes sean capaces de particularizar el resultado anterior al caso de comparación con la familia $1/x^k$. Aunque el *medio* es completo, no se espera que los estudiantes enuncien el resultado en la forma sintética en que será institucionalizado y tampoco se espera que se den cuenta de que en este caso hay que imponer que en el intervalo $[a, \infty)$, a sea mayor que 0, al estar centrados en las comparaciones.

En el Episodio 4 el *medio* lo constituyen la cuestión planteada en la Ficha 2 y la definición institucionalizada de la integral impropia. Aunque se espera que los estudiantes puedan extender la linealidad, no pensamos que todos se den cuenta de que hay que asegurar la convergencia de las integrales implicadas.

Material utilizado por el profesor:

El profesor trabajará en la pizarra.

Material distribuido a los alumnos:

Durante el desarrollo del Episodio 4 se distribuirá a los estudiantes la Ficha 2 para que anoten sus conclusiones sobre la extensión de la linealidad:

> ¿Es cierto siempre que $\int_a^{+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx+\int_a^{+\infty} g(x)dx$?
>
> ¿Se te ocurre algún caso en que no?
> En caso de ser cierto, ¿bajo qué condiciones?

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Episodio 1:

Duración prevista:

5 min. aprox.

Objetivos:

- Revisar los resultados de la tabla que relaciona el carácter local del integrando en el infinito y el posible carácter de la integral impropia (Sesión 3, Episodio 2).
- Revisión del resultado que identifica la acotación de $F(x)$ con la convergencia de $\int_a^{\infty} f(x)dx$.
- Revisar las conclusiones del Criterio de Comparación.
- Recoger las tablas de convergencia de los estudiantes para su posterior análisis.

Descripción:

Momento didáctico con aportaciones de los estudiantes. El profesor va preguntando qué se ha visto en la sesión anterior y lo escribe en la pizarra.

Dificultades:

Al ser el comienzo de la sesión, puede costar centrar a los estudiantes para que revisen los contenidos de la sesión anterior. Sin embargo, este ejercicio es bueno para ir centrándolos en el nuevo trabajo y refrescar los últimos enunciados.

Episodio 2:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Se presenta el Criterio del Cociente y se razona su significado. Con éste, se cuenta con una nueva herramienta para estudiar el comportamiento de una integral.
- Operacionalizar el Criterio de Comparación, pues en la prueba de este corolario se realizan varias acotaciones.
- Más trabajo implícito con las funciones integrales $F(x)$ y $G(x)$.

Descripción:

- El profesor plantea que en el criterio anterior se comparaban dos funciones por su posición gráfica. Pregunta a los estudiantes si conocen otras formas de comparar funciones. Si nadie aporta nada, será él quien diga que se estudiará el límite del cociente.
- Se enuncia y prueba el siguiente resultado:

Proposición:

Sean f, g dos funciones no negativas en $[a, +\infty)$ y localmente integrables. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$. Entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ y } \int_a^\infty g(x)dx \text{ tienen el mismo carácter.}$$

De cualquier forma, si $C = 0$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente. Y si $C = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ es divergente.

- Para mostrar cómo usar este criterio, se estudia la convergencia de la integral 19-b: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4}$. Se pide colaboración a los alumnos.

Dificultades:

Dado el nivel académico de los estudiantes, interpretar el límite del cociente. Definición del límite cuando x tiende a infinito.

Probablemente, el paso complicado para los estudiantes será plantear las dos desigualdades a partir de las cuales nos ponemos en el Criterio de Comparación. Para aliviar esto, el profesor escribirá en la pizarra:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C \Rightarrow \text{para } x \text{ suficientemente grande}: \left|\frac{f(x)}{g(x)}-C\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-C<\varepsilon \Rightarrow$$

$$C-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<C+\varepsilon \underset{g \text{ positiva}}{\Rightarrow} (C-\varepsilon).g(x)<f(x)<(C+\varepsilon).g(x)$$

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se esperan colaboraciones cuando se aplique el Criterio de Comparación durante la demostración.

Cuando se les pregunta si conocen otras formas de comparar funciones, sólo se espera como respuesta que digan mediante el límite, pues esto se hace durante el primer semestre. Sin embargo, también es posible que no haya aportaciones.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor plantea qué formas conocen los estudiantes de comparar funciones, para introducir de forma lo más natural posible el enunciado del criterio. Si no se produjera ninguna aportación, será él quien diga que se va a estudiar el límite del cociente.

Enuncia y demuestra el resultado y resuelve un ejemplo. Pide colaboración a los estudiantes en distintos pasos.

<u>Episodio 3:</u>

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Obtención de un nuevo criterio como caso particular del anterior.
- Promover que sean los estudiantes los que particularicen el resultado anterior al caso de la función $g(x) = 1/x^k$ (con lo que se revisa la convergencia de las integrales de esta familia).
- Con esta actividad se usan activamente tanto el enunciado anterior como la tabla de convergencias, de forma que se relaciona todo el trabajo realizado en las sesiones anteriores.

Descripción:

- El profesor plantea a los estudiantes que comparen en este caso con la familia $1/x^k$ y enunciar cómo quedaría el criterio en este caso. Para ello, propone utilizar la tabla de convergencias, donde se estudiaron los distintos comportamientos para los valores de k.
- Tras el trabajo grupal se hace una síntesis y el profesor escribe y demuestra el criterio, en su forma sintética:

<u>Proposición</u>:

Sea $a > 0$ y f no negativa y localmente integrable en $[a, \infty)$. Sea $\lambda = \lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$. Entonces:

Si $\lambda \neq \infty \wedge k > 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Si $\lambda \neq 0 \wedge k \leq 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ diverge

- El profesor hace hincapié en que es necesario para aplicar el criterio que $a > 0$.

- Una vez probado, el profesor anuncia a los estudiantes que pueden intentar en casa los ejercicios 18 a 21.

Dificultades:

Recordar lo trabajado sobre la integral de las funciones $1/x^k$.

Quizá para algunos alumnos suponga un problema concretar las condiciones y el enunciado de un resultado ya estudiado.

Darse cuenta de por qué se exige en este criterio que a sea mayor que cero.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Los estudiantes trabajan en pequeños grupos cómo enunciar este criterio y qué condiciones imponer.

Sin embargo, no se espera que enuncien el criterio en la forma institucional, sino enumerando todos los casos posibles. Tampoco se espera que se den cuenta de que es necesario imponer que el intervalo de integración no contenga al 0, pues la familia $1/x^k$ no está definida para este valor.

Acciones esperadas del profesor:

Plantea la actividad a los estudiantes y posteriormente hace síntesis en la pizarra.

Sintetiza los casos posibles y da la versión definitiva del criterio y añade, si no lo hace ningún alumno, la condición de ser $a > 0$.

Episodio 4:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Introducir formalmente la linealidad de la integral impropia. Se recuerda con ello que se está trabajando con límites, luego el límite de la suma coincide con la suma de límites cuando éstos están bien definidos.

Descripción:

- El profesor plantea a los estudiantes que se comienza un nuevo bloque: "*Reflexión y estudio de las propiedades de la integral definida que conserva la integral impropia*" y se tratará de generalizar algunas propiedades de la integral de Riemann.
- Propone a los estudiantes la cuestión de la Ficha 2 y da un tiempo de reflexión grupal.
- Puesta en común de los resultados. El profesor institucionaliza y demuestra el siguiente resultado:

Teorema:

Sean f y g integrables en sentido impropio en $[a, b)$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\lambda f + \mu g$ es integrable en sentido impropio y se tiene:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Dificultades:

Es posible que algunos estudiantes se dejen llevar por las propiedades de la integral definida para concluir que se conserva la linealidad, aunque esperamos que ya un cierto número de estudiantes concluyan que hay que exigir que existan las integrales por separado. Esto es más evidente si se utiliza la definición de integral impropia, donde aparece un límite.

Quizá no se tome en cuenta, explícitamente, que "el límite de la suma no coincide siempre con la suma de los límites" y que esta situación se da bajo determinadas condiciones (existencia de los límites por separado). Igualmente, en el caso de series, la serie de una suma de términos generales no coincide siempre con la suma de las dos series por separado.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se espera que los estudiantes, tras el trabajo grupal, lleguen a la conclusión, en su mayoría, de que es necesario que las integrales implicadas converjan por separado.

En el caso de los estudiantes que no enuncien esta condición, opinamos que puede ser por un abuso de escritura, un exceso de generalización, o el no uso de la definición de integral impropia.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor plantea la cuestión y da un tiempo de reflexión. Posteriormente, institucionaliza el resultado y lo prueba.

En el caso de que algún estudiante no vea la necesidad de la convergencia por separado de las integrales, el profesor puede recordar bajo qué condiciones el límite de la suma de funciones coincide con la suma de los límites y ver que en este caso se sigue manteniendo (en definitiva, la integral impropia es el límite de una función).

Episodio 5:

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Enunciado y demostración del teorema de integración por partes para el caso impropio. Extensión de un resultado previamente estudiado.
- Presentar nuevos elementos que relacionan la teoría de integrales impropias con la de integrales definidas. Revisión del enunciado para el caso Riemann.

Descripción:

- El profesor propone a los estudiantes tratar de recordar el teorema de integración por partes en el caso definido y enuncia que se va a generalizar al caso impropio.
- El profesor enuncia y demuestra el siguiente teorema, haciendo especial hincapié en las hipótesis iniciales:

Teorema de integración por partes:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$.

Sean f y g continuas en $[a, b)$ y g con derivada continua en $[a, b)$. Supongamos que F es una primitiva de f en $[a, b)$.

Entonces, si existen y son finitos dos de los tres límites:

$$i) \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t).g(t)dt \qquad ii) \lim_{x\to b^-} F(x).g(x) \qquad iii) \lim_{x\to b^-}\int_a^x F(t).g'(t)dt$$

existe el tercero, es finito y se verifica:

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x).g(x) - F(a).g(a) - \int_a^b F(t).g'(t)dt$$

Dificultades:

En primer lugar, no creemos que los estudiantes recuerden (quizá ni siquiera lo tengan a mano) el resultado para el caso definido, y menos sus hipótesis.

Posteriormente, durante la demostración, como se usa directamente el teorema de integración por partes del caso Riemann, ésta puede ser la mayor dificultad, pues no parece que los estudiantes tengan bien asimilados los conceptos previos.

También hemos observado que las demostraciones en las que se desarrolla una igualdad y se concluye que si existen ciertos elementos existe otro, causan dificultad a los estudiantes[185]. Esto puede deberse a que se parte de un término (en este caso, $\int_a^b f(t).g(t)dt$) del que se quiere probar su existencia[186].

Acciones esperadas de los estudiantes:

Sería conveniente que recordaran el teorema de integración por partes, o si no sus hipótesis, al menos cómo se aplica, pues se usa directamente en la demostración.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor enuncia y demuestra el teorema pidiendo colaboración a los estudiantes. En caso de que no recuerden la regla del teorema de integración por partes ($\int u.dv = uv - \int v.du$), la escribirá aparte.

4.4.5. SESIÓN 5

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Enunciar y probar el teorema de integración por partes para integrales impropias.
- Se comienza el estudio de las relaciones entre series e integrales. Analizar qué impresiones han desarrollado los estudiantes por el momento.
- Desarrollo de contraejemplos de que no siempre la serie funcional se comporta como la integral impropia, y viceversa.
- Conclusión del trabajo anterior con el enunciado y demostración del Test Integral.

[185] Como se vio en la prueba del teorema del Episodio 1 de la Sesión 2 (Sección 5.2.2.).

[186] Otros autores, como Tall (1992a) y Alcock (2004) han investigado las dificultades que tienen los estudiantes con las demostraciones formales y los razonamientos implicados. No en vano, Duval (2000) afirma que la demostración es uno de los tópicos más difíciles en la educación matemática.

Dimensión matemática:

Se finaliza en esta sesión el estudio de las propiedades que se conservan al extender la definición de integrabilidad a un intervalo infinito, que no pudo ser concluido en la sesión precedente.

En la segunda parte de esta sesión se inicia el estudio de las relaciones entre series e integrales, de forma que queden explícitas al final de la sesión bajo qué condiciones se tiene que el comportamiento de una serie coincide con el de la integral impropia de la función asociada.

Este bloque comienza analizando si los estudiantes se han dado cuenta de que a veces (en los ejemplos vistos hasta el momento, casi siempre) los resultados de integrales impropias son iguales a los de series y qué resultados señalan como ejemplos de esto. Posteriormente, se indaga si opinan que siempre se mantendrán los resultados o no (el contraejemplo construido en el Episodio 2 de la Sesión 3 muestra que no). En esta parte se retoma el trabajo ya iniciado en la construcción de contraejemplos utilizando el registro gráfico, que no fue utilizado en la sesión anterior. Aunque sólo se ha trabajado con contraejemplos a partir de la teoría de series una vez, se quiere averiguar si los estudiantes son ya capaces de construir alguno.

Finalmente, en la demostración del Test Integral el registro gráfico se utiliza activamente, con lo que continuamos reforzando su estatus matemático.

Destacamos que este bloque ("*Relaciones entre integrales impropias y series*") se ha situado en este lugar porque es normal que, después de haber trabajado la integral impropia de primera especie como se ha hecho, los estudiantes piensen que conserva las propiedades de las series. En este bloque se muestran ejemplos de que esto no es cierto. De esta forma, llevamos a cabo otro de nuestros objetivos, consistente en enriquecer la experiencia de los estudiantes con ejemplos y contraejemplos y hacer que ellos sientan la necesidad de este trabajo para combatir la intuición desarrollada.

Por otro lado, el trabajo realizado en las sesiones anteriores con el registro gráfico será de utilidad ahora para visualizar los contraejemplos planteados y, además, para abordar la demostración del Test Integral.

Dimensión didáctica:

La parte central de esta sesión contiene trabajo de búsqueda de contraejemplos, que será abordado en grupos para ver si los estudiantes son capaces de construir alguno. La distribución del trabajo será la siguiente:

- <u>Episodio 1</u>: momento didáctico de revisión de lo último estudiado. El profesor pedirá colaboración a los estudiantes.
- <u>Episodio 2</u>: Momento didáctico; enunciado y demostración del Teorema de integración por partes. El profesor pide colaboración.
- <u>Episodio 3</u>: Momento a-didáctico. Se plantea a los estudiantes trabajar en grupos bajo qué condiciones los resultados de series se extienden a integrales impropias y viceversa. Para ello, el *medio* lo constituyen todos los resultados institucionalizados hasta el momento (en donde se encuentra la función construida en el Episodio 2 de la Sesión 3, que es un contraejemplo de que esto no es así) y las dos cuestiones planteadas en la Ficha 3.
- <u>Episodio 4</u>: Momento didáctico; enunciado y demostración del Test Integral, con colaboración de los estudiantes.

Formas de trabajo:

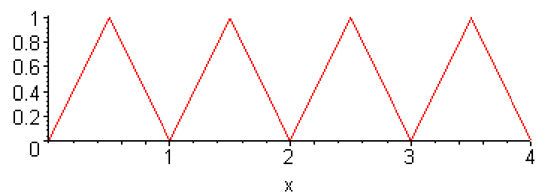
Durante los dos primeros episodios los estudiantes trabajan colaborando cuando el profesor lo pide. Se privilegia el funcionamiento didáctico.

Durante el tercer episodio los estudiantes trabajan en pequeños grupos, debatiendo las cuestiones planteadas. Posteriormente, habrá una puesta en común e institucionalización de resultados. Finalmente, en el último episodio se vuelve a privilegiar el funcionamiento didáctico, pero con mayor colaboración de los estudiantes.

El *medio*:

Para el Episodio 3 el *medio* lo constituyen las dos preguntas que se plantean (ver Ficha 3) y el conjunto de resultados institucionalizados hasta el momento (incluidos los ejemplos y contraejemplos). Pensamos que el *medio* es completo, pues ya se ha construido una función no acotada con integral convergente (tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1+2+3+... = \infty$) que responde a la cuestión de que si una función tiene integral convergente, su serie asociada no tiene por qué converger.

Una vez respondida esta pregunta, pensamos que la otra implicación no debería resultar tan complicada (esto es, si la serie asociada a una función converge, ¿convergerá su integral impropia?). Además, los estudiantes cuentan con sus experiencias previas[187], luego quizá no resulte difícil pensar en una función no negativa que se anule en todos los enteros (originando una serie convergente) con integral divergente:



Sin embargo, dadas las dificultades observadas en los estudiantes, es posible que la cuestión con series despiste a muchos. Existe una tendencia a compartimentar los conocimientos (Tall, 1992a), que impide a los estudiantes utilizar contenidos previos, por lo que puede que este fenómeno se dé en esta sesión (se conjugan ideas de series, el registro gráfico, integrales definidas... para abordar una cuestión sobre integración impropia).

Material utilizado por el profesor:

Principalmente, usa la pizarra. En el Episodio 3, una vez que los estudiantes han dicho qué resultados les recuerdan a series, usará las Transparencias 3 y 4, con los principales resultados sobre series.

Se mostrará la Transparencia 5 para mostrar a los estudiantes algunos contraejemplos continuos a la segunda cuestión de la Ficha 3.

Material distribuido a los estudiantes:

Durante el Episodio 3 se les distribuye la Ficha 3, con la siguiente cuestión:

a) ¿Es cierto que si $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$?

b) ¿Es cierto que si $\sum f(n)$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge también?

[187] Aunque en el desarrollo de las sesiones previas ya se ha observado la predominancia de ejemplos prototípicos y el repertorio reducido de funciones que manejan los estudiantes. Por esta razón, es posible que esta tarea no sea tan sencilla.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Episodio 1:

Duración prevista:
5 min. aprox.

Objetivos:
- Revisión de los contenidos de la sesión anterior.
- Hacer que los estudiantes comiencen a participar y revisen sus apuntes.

Descripción:
El profesor pregunta a los estudiantes qué resultados recuerdan de la sesión anterior y va anotando en la pizarra sus aportaciones. Pregunta también qué conclusiones sacaron sobre la linealidad de la integral impropia.

Dificultades:
Al ser el principio de la sesión, que los estudiantes no estén centrados o comiencen poco participativos.

Episodio 2:

Duración prevista:
8 min. aprox.

Descripción:
Coincide con el Episodio 5 de la sesión anterior.
El único cambio es que, por razones de tiempo y para dar todo el tiempo posible al momento a-didáctico del siguiente episodio, no se pide a los estudiantes que recuerden las hipótesis de este teorema en el caso Riemann, sino que el profesor enuncia y demuestra directamente el teorema, con lo que el tiempo estimado es menor.

Episodio 3:

Duración prevista:
24 min. aprox.

Objetivos:
- Hasta ahora, los resultados presentados tienden a hacer pensar que la teoría de series puede ser trasladada en su totalidad a la de integrales impropias y que se conservan todos los resultados. Por primera vez se hace una reflexión explícita sobre esta situación, tratando de analizar su veracidad o falsedad.
- Se presentan los primeros resultados en los que lo que sucede con la integral de una función no coincide con lo que sucede con la serie correspondiente, y viceversa. Esto da pie a analizar qué propiedades tienen en común todos los casos estudiados hasta el momento, en que sí coinciden los comportamientos de la integral y de la serie.
- Enriquecer las experiencias de los estudiantes con nuevos contraejemplos de casos patológicos, utilizando de forma activa el registro gráfico y la teoría de series.

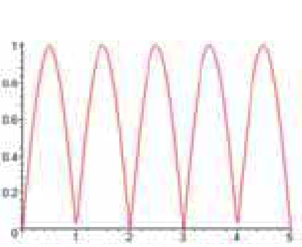
Descripción:

- El profesor anuncia que se comienza un nuevo bloque, "*Relaciones entre integrales impropias y series*", y que se estudiarán algunas relaciones entre éstas.
- El profesor pregunta a los estudiantes qué resultados, hasta el momento, creen ellos que son similares para ambos casos. Una vez los estudiantes acaban de enumerarlos, presenta las Transparencias 3 y 4, donde aparecen los resultados más importantes de series (que son similares a los estudiados hasta el momento para integrales).
- Para iniciar el debate, el profesor plantea a los estudiantes si creen que siempre se tendrá que el comportamiento de la serie asociada a una función y de su integral impropia será similar. Organiza el trabajo por grupos y escribe en la pizarra las cuestiones de la Ficha 3.
- Una vez se acabe el trabajo grupal, se organiza la puesta en común. Se anotan en la pizarra las aportaciones de los estudiantes.
- Si no apareciera ningún contraejemplo para la cuestión: ¿ $\int_0^\infty f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$?, el profesor plantea los siguientes:
  - La función dada por: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$

    Es obvio que su integral impropia es convergente (vale cero), mientras que su serie asociada diverge. Con esta función se muestra un ejemplo no continuo, enriqueciendo la experiencia de los estudiantes.
  - La función definida en la Sesión 3, que forma rectángulos sobre cada n de altura n y base $1/n^3$. Ésta es la respuesta que estaba incluida en el *medio* y que quizá algún estudiante utilice.
- Si no apareciera ningún contraejemplo para la cuestión: ¿ $\sum f(n) < \infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx < \infty$?, el profesor plantea los siguientes:
  - La función dada por: $f(x) = \begin{cases} a_n, \text{ si } x = n \in \mathbb{N} \\ 1 \quad, \text{en otro caso} \end{cases}$

    donde a_n da lugar a una serie convergente. Para facilitar los cálculos, se tomarán los $a_n = 0$. Pensamos que, una vez construido el primer contraejemplo de la cuestión anterior, quizá éste pueda ser deducido por los estudiantes.
  - Se presenta a los estudiantes un contraejemplo continuo, para despertar la idea de que no siempre hay que vulnerar la continuidad. Quizá este tipo de funciones estén más cercanas de las experiencias de los estudiantes.

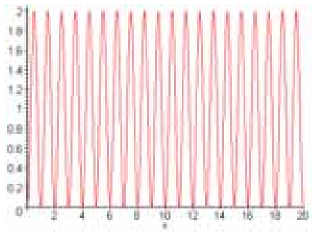
    Si tomamos la función $f(x) = \sin \pi x$, se obtiene una función que se anula en todos los enteros, aunque cambia de signo. Sin embargo, la función $g(x) = |\sin \pi x|$ sí es positiva, encierra un área infinita y da origen a la serie de términos nulos, que es convergente.



La siguiente función $f(x)$ es una compresión del $\sin x$, de forma que en cada entero vale -1:

$$f(x) = \sin\left(\left(2x - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

Si le sumamos 1, obtenemos una función cuya gráfica es:



La serie asociada es nula, pero la integral sobre cada intervalo $[k, k + 1]$ vale 1.

Dificultades:

Debido a que los resultados enunciados hasta el momento dan que pensar que siempre se tiene el paralelismo entre los resultados de series e integrales, romper esta intuición errónea puede ser el primer escollo. Otra dificultad viene impuesta por el nivel académico de los estudiantes, por lo que combinar series e integrales será probablemente difícil para la mayoría.

Una vez que se intenta probar la falsedad de las implicaciones, la principal dificultad es la búsqueda de un contraejemplo adecuado, pues se usa activamente el registro gráfico con funciones no habituales para los estudiantes (discontinuas, no monótonas...). Los contraejemplos que aquí presentamos, aunque muy simples, pueden resultar sutiles a los alumnos. Sin embargo, opinamos que una vez surgido el primer contraejemplo, los alumnos podrán comenzar a *fabricar* ya otros.

Reflexión sobre qué condiciones no cumplen las funciones de los contraejemplos que antes sí se cumplían

Quizá una vez se institucionalice que la primera cuestión es falsa los estudiantes puedan intuir que la segunda también lo es y generar contraejemplos.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Cuando el profesor pregunta qué resultados son similares, se espera que algunos estudiantes se refieran a los de la convergencia de las integrales de $1/x$ y $1/x^2$, pues ya se han explicitado en clase.

Los estudiantes trabajan en los grupos formados y abordan las cuestiones. Se espera que algunos crean que son ciertas ante la imposibilidad de pensar en un contraejemplo (y ante el paralelismo de los resultados institucionalizados con series).

Aunque el *medio* cuenta con un contraejemplo claro para una de las cuestiones, no se espera que los estudiantes lo utilicen, al menos sin ayuda por parte del profesor.

Sí es posible que una vez se institucionalice que la primera implicación es falsa haya aportaciones espontáneas refutando la veracidad de la segunda y se generen contraejemplos basados en los construidos para la primera cuestión.

Acciones esperadas del profesor:

Presenta el nuevo bloque y da elementos para la reflexión. Pregunta a los estudiantes si creen que siempre se da el paralelismo y presenta las cuestiones a debatir.

Una vez acabado el trabajo de grupos, dirige el debate y escribe en la pizarra las aportaciones de cada grupo.

En caso de no haber aportaciones correctas, presenta alguna de las previstas y motiva que los estudiantes construyan otros contraejemplos.

Episodio 4:

Duración prevista:
21 min. aprox.

Objetivos:

- Estudio formal de bajo qué condiciones se tiene que los comportamientos de la serie asociada a una función y su integral impropia son similares.
- Enunciado y demostración del Test Integral.

Descripción:

- El profesor plantea que se va a abordar bajo qué circunstancias se tiene que el comportamiento de una serie coincide con el de la integral impropia de la función correspondiente.
- El profesor enuncia y demuestra el siguiente teorema, con la ayuda de los estudiantes:

Teorema (Test Integral):
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Supongamos que $a_n = f(n)$, donde f es una función continua[188], positiva y decreciente en x, para todo $x \geq N$ (N un entero positivo).
Entonces la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^\infty f(x)dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

- El profesor recalca, al enunciar el Teorema, que aunque se tiene que ambas tienen el mismo carácter no tienen por qué tener el mismo valor.
- Al final de este episodio se prevé utilizar 8 minutos para anunciar que en la próxima sesión se estudiarán las funciones que cambian de signo y para comenzar a organizar el horario de las sesiones con ordenador.

Dificultades:
Los "trucos" empleados para la demostración, aunque no sean muy difíciles de entender una vez visualizados. Aunque la idea visual es sencilla, el formalismo distraerá a muchos estudiantes.

Es probable también que en la demostración, al usar los mismos rectángulos mayorando y minorando la función, se produzca alguna confusión.

Acciones esperadas de los estudiantes:
Aportaciones cuando el profesor lo solicite.

[188] Nótese que, en realidad, la continuidad no es una condición necesaria, pero se ha elegido este enunciado (Thomas y Finney, 1996, pág. 642) para simplificar las gráficas de la demostración y no distraer la atención de los estudiantes.

Acciones esperadas del profesor:

Presenta el resultado haciendo las aclaraciones previstas. Demostración solicitando ayuda a los estudiantes.

4.4.6. SESIÓN 6

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Conclusión del estudio de las relaciones entre series e integrales. Bajo qué condiciones se da la igualdad del carácter. Enunciado y demostración del Test Integral.
- Aclarar algunas cuestiones importantes que surgen de la revisión de la Ficha 3[189]:
  - repetición del contraejemplo construido por AB, WD y CF,
  - diferencia entre sumas de Riemann y serie asociada a una función,
  - aclaración de que $\int_a^\infty f(x)dx < \infty \not\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y algunas otras cuestiones,
  - explicación de por qué los criterios de series coinciden con los de integrales impropias.
- Comienzo del estudio de la integral impropia de funciones que cambian de signo. Definición de la convergencia absoluta y condicional y enunciado del Criterio de Cauchy.
- Reflexión sobre si la convergencia implica convergencia absoluta.
- Mantener la implicación de los estudiantes en las actividades.
- Mejorar la gestión del tiempo.

Dimensión matemática:

En el plano matemático, hay tres partes que se abordan en esta sesión:

- Demostración del Test Integral, que permite analizar todos los ejemplos estudiados hasta el momento y justificar las similitudes o diferencias con los resultados de series. Se vuelve a explicar el contraejemplo construido en la sesión anterior por AB, CF y WD y se ve qué condiciones del Test fallan.

- Revisión de algunos elementos tratados en la Ingeniería que siguen produciendo dificultades a los estudiantes, como se vio al analizar la Ficha 3. En particular, se vuelve a aclarar explícitamente que la convergencia de una integral no implica que el integrando tienda a cero, ni viceversa y se revisan contraejemplos de ambas afirmaciones. Por último, se muestra gráficamente la diferencia entre la serie asociada a una función y las sumas de Riemann, tratando de reconstruir dos conceptos en los que los estudiantes han mostrado grandes carencias.

- Se estudia la cuestión de la convergencia absoluta de integrales, estableciendo nuevos paralelismos con los resultados de series (y la construcción de un nuevo contraejemplo en el registro gráfico utilizando los resultados de series). La definición de convergencia absoluta se dará en un intervalo $[a, b)$ genérico, de forma que luego pueda ser extendida al caso de integrales impropias de segunda especie. Por último, se enuncia el Criterio de Cauchy, que se utiliza en la demostración del teorema de la convergencia absoluta; se da una interpretación gráfica, estableciendo relaciones con el criterio correspondiente para series.

---

[189] Ver Sección 5.2.5.

Dimensión didáctica:

Al principio de la sesión el profesor pedirá a los estudiantes que resuelvan tres problemas de las hojas para entregar, una nueva variación del contrato didáctico habitual en nuestra Facultad y que ya se puso en práctica al pedirles la tabla de convergencia. Los resultados de estos problemas se analizan en la Sección 5.3.2.

Esta sesión continúa estudiando los paralelismos entre los resultados de series e integrales impropias. Por un lado, se demuestra el Test Integral (con la colaboración de los estudiantes) y, por otro, se analiza la cuestión de la convergencia absoluta, para lo que se organizan nuevos grupos de trabajo para ver qué intuiciones tienen los estudiantes (que ya cuentan con el Test Integral y todos los resultados institucionalizados hasta el momento) sobre esta cuestión. Sin embargo, por cuestiones de tiempo no se pedirá a los estudiantes que rellenen ninguna ficha, sino que se hará una puesta en común.

Por otro lado, después de haber analizado la Ficha 3, queda clara la resistencia de algunos obstáculos en la enseñanza de la integral impropia. Por esta razón se hace un cambio significativo en la organización y se dedican unos minutos a aclarar cuestiones que han vuelto a aparecer (como la posibilidad de tener convergencia con funciones que no tienden a cero, una de las grandes diferencias con los resultados de series). También se revisarán contenidos previos que los estudiantes han mostrado no comprender: el concepto de suma de Riemann y la interpretación gráfica de la suma de una serie.

Formas de trabajo:

En esta sesión se privilegia más el funcionamiento didáctico, con intervenciones de los estudiantes.

En el Episodio 4 se produce el único momento de funcionamiento a-didáctico, en el que los estudiantes han de analizar en pequeños grupos la cuestión de la convergencia absoluta, tras lo que se hará una puesta en común.

El *medio*:

Se trata, en la mayoría de los episodios, de un *medio* didáctico.

En el Episodio 4 el *medio* viene constituido por la cuestión que los estudiantes deben analizar (¿la convergencia implica convergencia absoluta?), que podrá ser enriquecido por el profesor (sugiriendo que se revise lo que sucede con series) si los estudiantes no supieran qué decir, y por la afirmación de que en el caso Riemann es cierto que la existencia de la integral garantiza la existencia de la integral del valor absoluto (que sólo aporta una afirmación a generalizar o no). Los estudiantes cuentan con los resultados institucionalizados hasta el momento, donde se establecen algunas relaciones entre series e integrales. Después de lo observado en las sesiones anteriores, es dudoso que los estudiantes operacionalicen lo que deberían saber sobre series.

Material utilizado por el profesor:

Durante el Episodio 1, el profesor pondrá la Transparencia 6, con el enunciado del Test Integral.

Durante el Episodio 2, para aclarar el contraejemplo construido en la sesión anterior por AB, WD y CF, usará la Transparencia 7. Para aclarar la diferencia entre sumas de Riemann y la serie asociada a una función, usará la Transparencia 8.

Material distribuido a los estudiantes:

No se distribuye ninguna ficha. Para ahorrar tiempo, durante el Episodio 4 los estudiantes debatirán pero no anotarán sus conclusiones.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Episodio 1:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Breve revisión de los resultados de la última sesión.
- Enunciado y demostración del Test Integral.

Descripción:

- Comienza la sesión con el profesor anunciando a los estudiantes que para la próxima sesión deben entregar resueltos los problemas 21, 24 y 28 de las hojas.
- Posteriormente, se hace un breve repaso de los resultados de la última sesión y pide a los estudiantes que recuerden el enunciado del Test Integral. Pregunta si alguno intentó probarlo. Luego pone el enunciado en una transparencia.
- Enunciado y demostración del Test Integral. Se pide colaboración a los estudiantes.

Teorema (Test Integral):

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Supongamos que $a_n = f(n)$, donde f es una función continua, positiva y decreciente en x, para todo $x \geq N$ (N un entero positivo).

Entonces la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

El resto es como se describió en la sesión anterior.

Episodio 2:

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

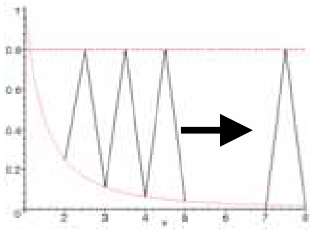
- Aclarar algunos puntos difusos que han aparecido después de la revisión de la Ficha 3 y durante el final de la sesión anterior[190].
- Repetición del algunos contraejemplos de la sesión anterior y del construido por AB, WD y CF usando la Transparencia 7, para que quede más claro.
- Aclarar la diferencia entre sumas de Riemann y serie asociada, usando la Transparencia 8. Mostrar algún ejemplo.

[190] Véase la Sección 5.2.5.

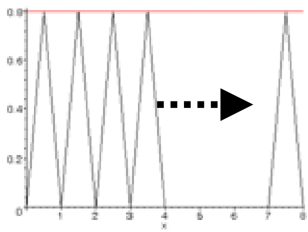
- Aclaración de que $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty \not\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Preguntar a los estudiantes si recuerdan algún contraejemplo.
- Explicación informal de por qué los criterios de series coinciden con los de integrales impropias. Interpretación gráfica de una serie como la integral de una función escalonada.

Descripción:

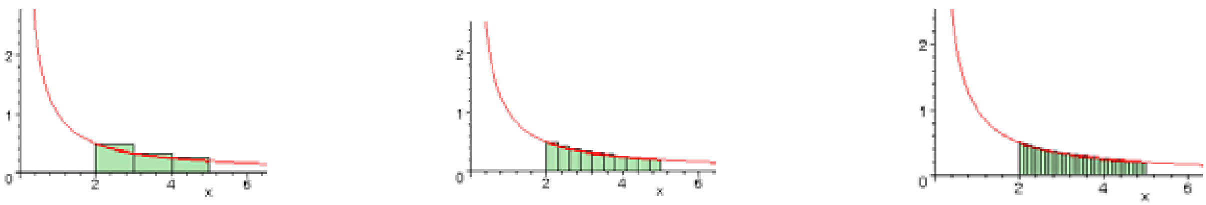
- El profesor recapitula un poco las cuestiones a debatir de la sesión anterior y recuerda que el grupo de AB, WD y CF presentó un contraejemplo. Usa la Transparencia 7 para aclarar su construcción.



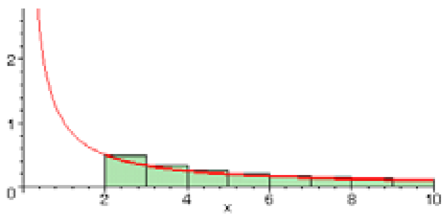
- Aclara también que, usando la misma idea, se puede construir ejemplos más sencillos, donde la función se anule en cada entero:



- Usa la Transparencia 8 para visualizar las sumas de Riemann de una función en un intervalo finito:



Posteriormente, muestra la serie asociada a la misma función, para ver que éstas tienen siempre base igual a uno y, por tanto, se miden en un intervalo infinito:



Aclara que, en general, la serie asociada no coincide con la integral, pues se toman rectángulos de base fija uno, luego no se está aproximando, a la función.

- Comenta que algún grupo concluyó: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$. Y al contrario, también hubo quien concluyó que si $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow f(x) \to 0$.

  Aclara que la primera afirmación es falsa, usando la función $f(x) = 1/x$ y que la segunda también, usando la función definida en la Sesión 3.

- Explica de forma informal que una serie se puede interpretar gráficamente como la integral de una función continua a trozos, por lo que se le puede aplicar los criterios estudiados hasta el momento, lo cual justifica la similitud entre los criterios estudiados para series y para integrales impropias.

Dificultades:

Pensamos que al abordar varias cuestiones distintas a la vez, esto puede provocar un exceso de información para los estudiantes, que quizá no asimilen todos los contenidos.

Por otro lado, se trata de aclarar cuestiones que contradicen la intuición, por lo que quizá estén muy enraizadas en el conocimiento de los estudiantes; algunas de estas concepciones erróneas han sido ya tratadas en la Ingeniería, pero han mostrado ser persistentes.

En la última cuestión, el uso combinado de los registros gráfico y algebraico también puede resultar complicado para los estudiantes, pues además se tratan las series como integrales, dos conceptos que han aprendido por separado y que han sido compartimentados sin relación[191].

Todo esto, junto con el bajo nivel académico de los estudiantes puede hacer que este episodio sea el más complicado para los estudiantes.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Intervenir cuando el profesor lo pida, para comprobar si entienden lo que se explica.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor expone lo previsto usando la pizarra y las transparencias preparadas al efecto.

<u>Episodio 3:</u>

Duración prevista:

8 min. aprox.

Objetivos:

- Presentación del nuevo bloque: "*Integral impropia de funciones que cambian de signo en el intervalo de integración*" y de la problemática a tratar.
- Definición de convergencia absoluta.

Descripción:

Momento didáctico para introducir el nuevo bloque:

- El profesor anuncia que se comienza un nuevo bloque, donde se estudiará cómo abordar la integral de funciones que cambian de signo, tratando de aprovechar el trabajo ya realizado.
- Se enuncia la siguiente definición:

[191] Tall (1992a). Véase la Sección 1.3.5.

Definición:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$.

Supongamos que f es localmente integrable en $[a, b)$. Se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge absolutamente si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Episodio 4:

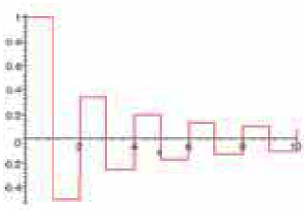
Duración prevista:
12 min. aprox.

Objetivos:

- Reflexión sobre si se puede generalizar la propiedad siguiente de las integrales de Riemann: Si $\int_a^b f(x)dx$ existe $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ existe.
- Construcción de un contraejemplo de tal afirmación.
- Definición de la convergencia condicional.

Descripción:

- El profesor plantea a los estudiantes que en el caso de Riemann, si una función es integrable en un intervalo $[a, b]$, también lo será su valor absoluto en el mismo intervalo. Plantea entonces si creen que esto será también cierto cuando $b = \infty$.
- Se da un tiempo de reflexión a los estudiantes para que aborden la cuestión.
- Finalmente, puesta en común de resultados. Se espera que quizá los estudiantes que repiten aporten el contraejemplo típico ($f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$). También es posible que (quizá guiados por alguna pista del profesor para enriquecer el *medio*), los estudiantes puedan construir algún contraejemplo usando los resultados de series. En cualquier caso, se expondrán los contraejemplos que haya.
- Si nadie lo ha construido, el profesor presenta la siguiente función, que sobre cada intervalo entero $[n, n + 1)$ toma el valor $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$:



  cuya integral resulta convergente, pero no absolutamente convergente (la integral de su valor absoluto coincide con la serie armónica). Explicitación de que, nuevamente, se utilizan los resultados de series.

- Tras la puesta en común, se da la siguiente definición:

Definición:
Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$.

Sea f localmente integrable en $[a, b)$. Se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge condicionalmente si es convergente y $\int_a^b |f(x)|dx$ no lo es.

Dificultades:

Quizá después de haber visto las relaciones entre series e integrales, los estudiantes que recuerden que para series la convergencia no garantiza la convergencia absoluta puedan deducir que tampoco será cierto en este caso.

Sin embargo, la construcción de un contraejemplo, aunque se sugiera que se usen los conocimientos sobre series, pueda no resultar evidente, pues hemos visto las dificultades que tienen los estudiantes en transferir los resultados sobre series al caso de integrales impropias, en particular cuando se hace mediante el registro gráfico (los estudiantes no tienen los conceptos de series asociados a este registro[192]).

Acciones esperadas de los estudiantes:

Reflexión de la cuestión propuesta y búsqueda de contraejemplos.

Es posible que algunos estudiantes, sabiendo lo que sucede con las series, sospechen la falsedad del enunciado. Aunque puede ser que algunos recuerden el contraejemplo típico de series, no consideramos probable que los estudiantes sean capaces de convertirlo en una función.

Acciones esperadas del profesor:

Presenta la cuestión y da tiempo para el debate grupal.

Posteriormente, coordina la puesta en común y anota las aportaciones en la pizarra. Si nadie presenta un contraejemplo, construye el contraejemplo previsto.

Episodio 5:

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Enunciado del Criterio de Cauchy, necesario para la demostración del próximo teorema. Explicación del mismo.
- Organizar las sesiones con el ordenador.

Descripción:

Momento didáctico.

- El profesor enuncia este resultado, explicando que se usará en el próximo teorema:

Criterio de Cauchy:

Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$. La integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ es convergente si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe b_0: $a < b_0 < b$ tal que

[192] Ver Sección 5.2.5.

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon,\ \forall x_1, x_2 : b_0 < x_1 < x_2 < b.$$

- Una vez enunciado, se da una interpretación de lo que significa, estableciendo paralelismos con los resultados de series.
- Antes de acabar la sesión, el profesor trata de organizar con los estudiantes las sesiones con ordenador que complementan esta Ingeniería.

Dificultades:

A los estudiantes con mayores dificultades este enunciado puede resultarles complejo, debido a la cantidad de cuantificadores lógicos que utiliza. Por ello se tratará de explicar lo que quiere decir.

4.4.7. Sesión 7

Descripción general

Objetivos de la sesión:

- Enunciado y demostración del teorema de la convergencia absoluta.
- Operacionalización del teorema. Cálculo de dos ejemplos típicos.
- Construcción de la definición de integral impropia de segunda especie.
- Generalización del Criterio de Comparación.
- Generalización del Criterio del Cociente.
- Mantener la participación de los estudiantes.
- Ser fieles a la organización temporal.

Dimensión matemática:

Se revisa en esta sesión el Criterio de Cauchy enunciado en la sesión anterior y se muestra en una transparencia junto con el análogo para series, de forma que sea más fácil establecer los paralelismos entre ambos resultados. Con esta herramienta se enuncia y demuestra el teorema de la convergencia absoluta para integrales impropias (se enuncia en un intervalo [*a*, *b*) para generalizarlo en la sesión siguiente) y se operacionaliza resolviendo dos ejemplos típicos. Es seguro que ésta será una de las partes más difíciles de la Ingeniería para los estudiantes, debido al formalismo empleado y a que se emplean varios resultados a la vez.

En la segunda parte de esta sesión, se comienza el estudio de las integrales impropias de segunda especie. En esta ocasión, se sigue un camino similar al que se siguió para las integrales de primera especie (se parte de la cuestión de generalizar una definición ya conocida y se trata de generalizar todos los resultados anteriores). Termina la sesión con el enunciado del Criterio de Comparación y de su primer corolario.

Dimensión didáctica:

Se comienza revisando el Criterio de Cauchy (que con seguridad no es claro para todos los estudiantes) y comparándolo con el de series (tratando de reutilizar un conocimiento ya aprendido, aunque no tenemos dudas de que muy pocos estudiantes lo recuerdan o lo entienden). Sin embargo, este Criterio sólo es una herramienta para el teorema de la convergencia absoluta, por lo que no se invierte mucho tiempo en él y se pasa al enunciado y demostración del teorema. Debido al formalismo de la prueba y a que se usa una herramienta que da por sí da problemas, se invertirá más tiempo en mostrar dos ejemplos clásicos en los que este teorema de operacionaliza. La demostración del teorema se realiza por cuestiones institucionales.

Una vez superada esta primera parte más árida, comienza el estudio de las integrales impropias de segunda especie. Debido al poco tiempo restante de la Ingeniería, se ha de hacer de forma un poco rápida, aunque se intentará aprovechar su desarrollo para revisar los resultados anteriores y tener una impresión de si los estudiantes han comprendido los resultados institucionalizados; se trata, en definitiva, de reconstruir el conocimiento sobre integrales impropias de primera especie, de forma que sea válido para las dos situaciones.

Tras observar que la definición de integral es técnicamente la misma que se había construido, se espera que los estudiantes puedan generalizar la mayoría de los resultados anteriores, aunque al principio el profesor deba intervenir para ilustrar cómo hacerlo.

En esta parte, las intervenciones de los estudiantes nos serán útiles para ver cómo han comprendido los contenidos de las sesiones previas.

Formas de trabajo:

Debido al tiempo restante, se privilegia el funcionamiento didáctico, aunque se pide participación a los estudiantes en la mayoría de los episodios.

El *medio*:

No hay situaciones a-didácticas en esta sesión. En las cuestiones en que se quiere generalizar los resultados anteriores y se pedirá participación de los estudiantes, éstos cuentan con todos los resultados institucionalizados y la “nueva” definición de integral impropia.

Material utilizado por el profesor:

Durante el Episodio 1, el profesor usará la Transparencia 9 con la función condicionalmente convergente construida en la sesión anterior.

Posteriormente usa la Transparencia 10 con el Criterio de Cauchy para series y para integrales impropias, para reforzar el paralelismo. También aparece en esta transparencia la propiedad de Riemann de la integral del valor absoluto, que se usará en la demostración del teorema de convergencia absoluta.

Durante el Episodio 3 se usará la Transparencia 11, con los resultados necesarios para la resolución de los ejemplos preparados (Criterio de Comparación y el teorema de integración por partes).

Durante el Episodio 4, para hacer ver a los estudiantes que el área es invariante mediante traslaciones, utilizará la Transparencia 12.

En el Episodio 5 se usará la Transparencia 13, para mostrar el Criterio de Comparación en el caso de segunda especie.

Material distribuido a los estudiantes:

No se distribuye ninguna ficha.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

<u>Episodio 1:</u>

Duración prevista:

5 min. aprox.

Objetivos:

- Breve revisión de los resultados de la sesión anterior.
- Establecimiento de relaciones entre el Criterio de Cauchy para series y para integrales.
- Revisión de las propiedades de la integral del valor absoluto para integrales de Riemann.

Descripción:

Momento didáctico con participación de los estudiantes.

- El profesor pregunta a los estudiantes cuáles son los resultados que recuerdan de la sesión anterior. Muestra en transparencia el contraejemplo de función construida cuya integral converge, pero no converge absolutamente.
- Se muestra en transparencia el Criterio de Cauchy y se revisa su significado. También se revisa la propiedad de la integral del valor absoluto en el caso Riemann.

Dificultades:

Al ser el comienzo de la sesión los estudiantes pueden estar aún descentrados. Pensamos que lo más complicado de este momento es el Criterio de Cauchy, ya que en su enunciado aparecen varios cuantificadores.

<u>Episodio 2:</u>

Duración prevista:

15 min. aprox.

Objetivos:

- Enunciado y demostración del teorema de la convergencia absoluta.

Descripción:

- El profesor enuncia y demuestra el teorema de la convergencia absoluta. Para ayudarse, utiliza la Transparencia 10, donde están los resultados que se van a utilizar.

> **<u>Teorema:</u>**
> Si $\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es convergente.

- El profesor solicita ayuda a los estudiantes en algunos pasos.

Dificultades:

La demostración de este teorema, aunque no es demasiado complicada, es artificiosa y utiliza dos veces el Criterio de Cauchy (que de por sí ofrece dificultades a los estudiantes) y las propiedades de la integral del valor absoluto (hemos visto que los estudiantes no tienen muy claros los contenidos sobre integral de Riemann).

Pensamos que la escritura de la convergencia absoluta en términos del Criterio de Cauchy y las operaciones para eliminar los valores absolutos, que nos permiten escribir una nueva formulación en términos del Criterio de Cauchy (que, a su vez, es equivalente a la convergencia de la integral) causarán dificultades a los estudiantes, que han mostrado en repetidas ocasiones sus deficiencias con los razonamientos lógicos y los mecanismos de prueba y demostración.

Aunque se tratará de explicar los distintos pasos lo más claramente posible, dudamos que muchos estudiantes lleguen a comprender verdaderamente la demostración.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Intervenir cuando el profesor lo requiera, aunque dado el formalismo de esta prueba, probablemente lo harán con inseguridad.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor enuncia y demuestra el teorema, tratando de aclarar lo más posible los distintos pasos de éste.

Episodio 3:

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Operacionalización del teorema anterior mediante la resolución de dos ejemplos típicos.
- Relacionar la parte de integrales con integrando no negativo con ésta (al utilizar el valor absoluto de los integrandos, se aplican los resultados de convergencia de integrales con integrando no negativo).

Descripción:

Se trata de un momento didáctico con participación de los estudiantes (no se hace un momento a-didáctico por las dificultades observadas y lo artificioso de los ejemplos, en particular el segundo).

- El profesor plantea a los estudiantes el estudio de la convergencia de las integrales $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ y $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
- Pidiendo colaboración a los estudiantes, va resolviéndolas. Como apoyo utilizará la Transparencia 11, con los resultados que se utilizarán.
- Al final del episodio, el profesor comenta que hay más resultados sobre la convergencia absoluta y plantea resolver en casa el ejercicio 38 de las hojas.

Dificultades:

En ambos ejemplos, combinar las distintas herramientas que se utilizan, en particular los resultados que se han visto hace tiempo (Criterio de Comparación) y que no se han utilizado aún (teorema de integración por partes, que vimos que era probable que no quedara muy claro, pues los estudiantes ya tienen problemas con el teorema en el caso Riemann).

La segunda integral requiere más trabajo aún que la primera, pues no se puede probar su convergencia absoluta. El "truco" de dividirla primero en dos partes y luego aplicar el teorema de integración por partes no es nada natural:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{de Riemann}} + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{lcl} u = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow & du = -\dfrac{1}{x^2} dx \\ dv = \sin x . dx & \Rightarrow & v = -\cos x \end{array} \right\} = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x} dx +$$

$$+ \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^b - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{(A)}$$

Además, ya hemos visto[193] que los estudiantes no parecen tener muy claro cuándo hay que dividir el intervalo de integración para aplicar un criterio.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Intervención cuando el profesor lo solicite. Estimamos que habrá que recordarles los resultados que se van a utilizar, lo que justifica el uso de la Transparencia 11.

No se espera que ninguno apunte el uso del teorema de integración por partes, pero sí el uso del Criterio de Comparación cuando sea necesario y, quizá, darse cuenta de que la integral (A) es similar al primer ejemplo estudiado.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor enuncia y prueba ambos ejemplos, pidiendo colaboración a los estudiantes.

Episodio 4:

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Se comienza el capítulo "*Integral impropia de segunda especie*". Construcción de una definición para la integral en el caso de que la función no esté acotada en uno de los extremos del intervalo de integración.
- Visualización gráfica de la nueva situación. Justificación gráfica de que el nuevo problema es similar al anterior, lo que justifica la extensión de los mismos resultados.

Descripción:

- El profesor anuncia el comienzo del nuevo capítulo y plantea a los estudiantes la nueva situación de integrar una función no acotada en uno de los extremos del intervalo de integración.
- Pregunta a los estudiantes qué definición darían de la integral en esta nueva situación. Precisión de las dos definiciones equivalentes y reflexión sobre el hecho de que esta definición coincide con la anterior, lo cual plantea la posibilidad de extender los mismos resultados.
- Para ayudar a la reflexión de que esta situación no es tan distinta de la anterior, producción de gráficas, apoyado por la Transparencia 12, para mostrar que se sigue tratando de un problema de cálculo de áreas de figuras infinitas.
- El profesor plantea que se tratará entonces de generalizar todo el estudio que ya se ha realizado.

Dificultades:

Aunque, en un principio, la nueva situación puede parecer nueva para los estudiantes, se espera que no haya grandes dificultades para dar la definición de la integral en esta situación y darse cuenta de que coincide con la anterior.

En la segunda parte del episodio, quizá aceptar que el hecho de que las figuras infinitas sean ahora verticales no afecta a los resultados.

[193] Véanse las Secciones 5.2.3. y 5.2.4.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Tras una breve reflexión se espera que la construcción de la definición surja por parte de los estudiantes, así como darse cuenta de que es la misma que se tenía, aunque es posible que el profesor deba dar alguna pista para animar las intervenciones. Probablemente, el hecho de que la definición coincida con la anterior haga dudar a los estudiantes y no se atrevan a participar de entrada. Recordamos que en la primera sesión el estudiante JB propuso calcular una integral impropia con integrando no acotado utilizando un límite[194].

Acciones esperadas del profesor:

El profesor motiva el debate y hace notar a los estudiantes que, en adelante, se tratará de generalizar los resultados obtenidos, pues la definición sigue siendo la misma.

Episodio 5:

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Generalización del Criterio de Comparación para que abarque también a las integrales de funciones no acotadas.
- Interpretación gráfica del mismo.

Descripción:

- El profesor, con ayuda de la pizarra y de la Transparencia 13 revisa el Criterio de Comparación ya enunciado.
- Nuevamente, mediante una rotación (uso de la Transparencia 13) hace ver a los estudiantes que la situación sigue siendo similar y plantea que enuncien conclusiones que se pueden obtener.
- Enunciado del Criterio de Comparación general para los dos casos.
- Reflexión sobre qué habría que cambiar en la demostración ya vista para que sea válida.

Dificultades:

Quizás cambiar el enunciado y darse cuenta de que podemos cambiar "b" por "∞" en la demostración. Pensamos que dado que los estudiantes suelen otorgar al "infinito" un estatus "misterioso"[195], para ellos no será equivalente decir "para x suficientemente grandes" que "para x suficientemente próximos a b".

Acciones esperadas de los estudiantes:

Dado el trabajo realizado previamente con el Criterio de Comparación, se espera que los estudiantes sean capaces de enunciar las conclusiones que se obtienen en este caso.

Sin embargo, no se espera que sean capaces de darse cuenta de que añadiendo al anterior enunciado "Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$", el resto permanece invariable.

[194] Ver Sección 5.2.1.

[195] Ver Garbin (1998), Camacho y Aguirre (2001) y Hitt (2000c, 2005).

Acciones esperadas del profesor:

Plantea la situación para que los alumnos saquen las conclusiones del Criterio de Comparación. Posteriormente, hace el cambio señalado al enunciado para que siga siendo válido y reflexiona qué cambios se harían en la demostración.

Episodio 6:

Duración prevista:

5 min. aprox.

Objetivos:

- Generalización del Criterio del Cociente.
- Reflexión sobre qué habría que modificar en la demostración.

Descripción:

- El profesor recuerda a los estudiantes que después del Criterio de Comparación en el capítulo anterior se enunció un corolario y plantea que lo recuerden.
- Una vez recordado, plantea cómo habría que alterar su enunciado para que siga siendo válido y motiva una reflexión de si en la demostración anterior se utilizó que $b = \infty$.
- La demostración se completará en la sesión siguiente.

Dificultades:

Nuevamente, quizá adaptar el enunciado anterior (aunque, después de adaptar el anterior, no debería ser muy complicado) y ver que no es necesario repetir la demostración, sino adaptar algunas partes.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se espera que revisen el enunciado que se dio de este corolario y reflexionen si puede seguir siendo válido y qué hay que cambiar.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor plantea la situación y hace reflexionar a los estudiantes.

4.4.8. SESIÓN 8

DESCRIPCIÓN GENERAL

Objetivos de la sesión:

- Enunciado y demostración de los dos corolarios del Criterio de Comparación.
- Estudio de la convergencia de las integrales del tipo $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$.
- Generalización de los resultados enunciados previamente.
- Definición de la integral impropia de tercera especie.
- Operacionalización de la definición de integral impropia de tercera especie.
- Mantener la participación de los estudiantes.
- Ser fieles a la organización temporal.

Dimensión matemática:

En esta última sesión se pretende generalizar todos los resultados anteriores que son válidos tanto para integrales impropias de primera como de segunda especie, de forma que se reconstruya el conocimiento institucionalizado en las sesiones anteriores; por otro lado, se estudiará también la convergencia de las integrales de funciones del tipo $\frac{1}{(x-b)^k}$.

Se hará énfasis en la presencia de la introducción "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$" en la mayoría de resultados institucionalizados, que permite que éstos sean válidos para ambas situaciones.

Dimensión didáctica:

Esta sesión, como la anterior, tiene un carácter más didáctico que las precedentes, pues se pretende cerrar los contenidos de la Ingeniería. Sin embargo, se ha organizado de forma que se revisen la mayoría de resultados ya institucionalizados, lo que permite dar un breve repaso.

En los momentos en que el profesor pedirá colaboración de los estudiantes, éstos contarán con todos los resultados ya enunciados y se observará si las intervenciones de los estudiantes tienen en cuenta estos resultados y si muestran haberlos comprendido.

Hay unos pequeños momentos de trabajo en grupos para generalizar resultados, aunque no se dará tanto tiempo como en sesiones anteriores y, según el control del tiempo, quizá no haya debate posterior.

Formas de trabajo:

El profesor trabaja mayoritariamente en la pizarra y usa transparencias. En algunos momentos pide colaboración a los estudiantes.

Se han organizado también unos momentos de trabajo en pequeños grupos para que los estudiantes generalicen algunos resultados.

El *medio*:

En el Episodio 3 los estudiantes trabajan en grupos para tratar de decidir la convergencia de la familia de integrales $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$ en función del parámetro *k*. El *medio* lo provee el estudio de la convergencia de las integrales $\int_a^\infty \frac{dx}{x^k}$ ya realizado y la definición institucionalizada de integral impropia de segunda especie.

Los resultados de este episodio proveerán el *medio* para el episodio siguiente, donde se pide a los estudiantes que intenten predecir la convergencia de la integral de *f*(*x*) a partir del valor de $\lim_{x\to b}(|x-b|)^k.f(x)$ y de *k*.

Material utilizado por el profesor:

Durante el Episodio 2, el profesor usará la Transparencia 14 con el enunciado y demostración del Criterio del Cociente. Antes de probarlo, usará la Transparencia 15 para mostrar que el teorema que identifica la convergencia de la integral de *f*(*x*) con la acotación de la función *F*(*x*) se sigue manteniendo.

Durante el Episodio 5, en que se generalizan todos los enunciados obtenidos, se usa la Transparencia 16, que muestra las diferencias entre los enunciados de la proposición que estudia el $\lim_{x\to\infty} x^k.f(x)$ cuando se integra en [*a*, ∞) y la proposición que estudia el $\lim_{x\to b}(|x-b|)^k.f(x)$.

Finalmente, en el Episodio 5 se usa la Transparencia 17 con cuatro resultados que se generalizan al caso impropio de segunda especie con sólo añadir "Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$".

Material distribuido a los estudiantes:
No se distribuye ninguna ficha.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS *A PRIORI* DE LOS EPISODIOS

Episodio 1:

Duración prevista:
5 min. aprox.

Objetivos:
- Breve revisión de los resultados de la sesión anterior.

Descripción:
Momento didáctico con participación de los estudiantes.
- El profesor pregunta a los estudiantes cuáles son los resultados que recuerdan de la sesión anterior y se van revisando. Si es necesario, se anotan en la pizarra.

Dificultades:
Al ser el comienzo de la sesión los estudiantes pueden estar aún descentrados.

Episodio 2:

Duración prevista:
5 min. aprox.

Objetivos:
- Enunciar y demostrar el Criterio del Cociente.
- Revisar su demostración y darse cuenta de que no varía sustancialmente y que la nueva generaliza la anterior.

Descripción:
- El profesor pregunta a los estudiantes si pensaron cómo cambiar el enunciado del Criterio del Cociente y se anotan las respuestas.
- Antes de pasar a la demostración, el profesor dice que, en el caso de integrales impropias de segunda especie, también se puede definir una función integral $F(x)$ que cumplirá las mismas propiedades que antes. La acotación de esta integral supondrá la convergencia de la integral impropia. Se muestra el enunciado y la demostración en la Transparencia 15.

Teorema:
Supongamos que f es localmente integrable y no negativa en $[a, b)$.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge si, y sólo si, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \le x < b$, está acotada en $[a, b)$.
Si F diverge, lo hace necesariamente hacia $+\infty$.

- Se enuncia y demuestra el Criterio del Cociente, usando la Transparencia 14.

Proposición:
Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f, g no negativas y localmente integrables en $[a, b)$. Suponemos que $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$. Entonces $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ tienen el mismo carácter.

De cualquier forma, si $C = 0$ y $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es convergente. Y si $C = \infty$ y $\int_a^b g(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es divergente.

- Reflexión sobre el hecho de que este enunciado y demostración generalizan los anteriores.

Dificultades:
Probablemente adaptar el enunciado anterior y ver que no es necesario repetir la demostración. Por otro lado, darse cuenta de que este enunciado generaliza los dos casos de integral impropia puede resultar costoso a los estudiantes, a pesar de haberse introducido esta idea en la sesión anterior.

Acciones esperadas de los estudiantes:
Se espera que alguno haya pensado en cómo adaptar el enunciado del corolario y lo exponga. También es posible que haya dificultades para darse cuenta de la frase "*Para x suficientemente grandes*" es equivalente, ahora, a "*Para x suficientemente próximos a b*".

Acciones esperadas del profesor:
El profesor pregunta a los estudiantes qué han pensado y, posteriormente, muestra cómo quedaría ahora el corolario.

Episodio 3:

Duración prevista:
15 min. aprox.

Objetivos:
- Estudio de la convergencia de las integrales del tipo $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$.

Descripción:
- El profesor hace recordar a los estudiantes qué resultado se enunció después del corolario anterior en el capítulo de integrales impropias de primera especie. Se recuerda que se particularizó el corolario para la familia de funciones $f(x) = 1/x^k$.
- El profesor hace notar que en un intervalo $[a, b]$ no tiene sentido comparar con esta familia y plantea el estudio de las integrales $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$ según los valores del parámetro, tal como se hizo en el bloque anterior.
- Tras un tiempo de trabajo personal-grupal, se hace una puesta en común y se prueba el resultado en la pizarra.

Proposición:

Las integrales de la forma $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^r}$, $r \in \mathbb{R}^+$, son convergentes para $0 < r < 1$.

Dificultades:

Quizá calcular los límites y estudiar los casos, como sucedió en la Sesión 2[196]. Esperamos que lo hecho con las integrales del tipo $\frac{1}{x^k}$ en el bloque anterior sea de ayuda.

Por otro lado, aunque esta integral es inmediata, es posible que haya dificultades para calcular una primitiva. Ésta es la razón por la que se ha elegido la formulación $x - b$ en el denominador, para no producir problemas con los signos, a pesar de que así se tiene una función negativa y esto obligará a introducir un valor absoluto en el siguiente resultado.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Después del trabajo realizado en el bloque anterior, se espera que los estudiantes sean capaces de distinguir distintos casos para diferentes valores del parámetro. Es posible que el caso $r = 1$ no se estudie, aunque sí se esperan las distinciones entre $r > 1$ y $r < 1$.

Quizá haya problemas con los límites a calcular, pues aparecen cuatro valores literales (*a, b, r, t*), de los que dos son fijos, uno es la variable y otro es un parámetro.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor motiva la reflexión y da un tiempo a los estudiantes para que intenten resolver el problema.

Posteriormente, puesta en común e institucionalización en la pizarra.

__Episodio 4:__

Duración prevista:

10 min. aprox.

Objetivos:

- Enunciado y demostración del segundo corolario del Criterio de Comparación, utilizando esta vez para comparar la familia de funciones $f(x) = \frac{1}{|x-b|^r}$.

Descripción:

- El profesor pide a los estudiantes que, utilizando el nuevo resultado, traten de reenunciar el corolario anterior utilizando la familia de funciones especificada.
- Tras un tiempo de trabajo personal-grupal, se escribe el nuevo enunciado en la pizarra. Comparación de éste con el que se tenía para el caso de integrales de primera especie.

Proposición:

Sea $f(x) \geq 0$ y localmente integrable en $[a,b)$ / $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$. Sea $\lambda = \lim_{x\to b} (|x-b|)^r . f(x)$. Entonces:

[196] Ver Sección 5.2.2.

Si $\lambda \neq \infty \wedge r < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.
Si $\lambda \neq 0 \wedge r \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ diverge.

Dificultades:

Nuevamente, es posible que la traducción de enunciados a nuevas situaciones cause alguna dificultad. El profesor ayudará si fuera necesario, pero se espera que entre todos los estudiantes la tarea se pueda completar.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Ya se han observado dificultades para adaptar un resultado conocido a una nueva situación, por lo que es probable que algunos vuelvan a encontrarlas en este caso; además, en este caso cambian las condiciones de convergencia (donde antes era $k \leq 1$, ahora es $r \geq 1$ y viceversa).

Acciones esperadas del profesor:

El profesor propone la tarea y ayuda a los estudiantes cuando lo necesiten. Posteriormente, síntesis en la pizarra.

Episodio 5:

Duración prevista:
15 min. aprox.

Objetivos:

- Generalización de los principales resultados estudiados para su validez en primera y segunda especie.

Descripción:

- El profesor plantea a los estudiantes que se va a explorar qué propiedades de las enunciadas anteriormente siguen siendo válidas para esta nueva situación. Las va poniendo en transparencias:

Teorema:
Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.
Sea f definida y localmente integrable en $[a, b)$.
Sea $a < c < b \leq \infty$. Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\int_c^b f(x)dx$ converge.

Teorema:
Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.
Sean f y g integrables en sentido impropio en $[a, b)$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Entonces, $\lambda f + \mu g$ es integrable en sentido impropio y se tiene:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Teorema de integración por partes:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f y g continuas en $[a, b)$ y g con derivada continua en $[a, b)$. Supongamos que F es una primitiva de f en $[a, b)$.

Entonces, si existen y son finitos dos de los tres límites:

$$i)\ \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t).g(t)dt \qquad ii)\ \lim_{x \to b^-} F(x).g(x) \qquad iii)\ \lim_{x \to b^-} \int_a^x F(t).g'(t)dt$$

existe el tercero, es finito y se verifica:

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x).g(x) - F(a).g(a) - \int_a^b F(t).g'(t)dt$$

Teorema:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Si $\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es convergente.

- El profesor aclara que, salvo los resultados del Episodio 3 y 4 y la parte de series e integrales (exclusiva de las integrales impropias de primera especie), todos los resultados son generalizables.

Dificultades:

Debido a la rapidez con que se harán estas generalizaciones, es probable que no queden claras a muchos estudiantes. Por otro lado, entre estos cuatro resultados se encuentran dos de los que hemos considerado más difíciles para los estudiantes (integración por partes y convergencia absoluta), así que generalizar resultados no claros puede producir dificultades (como ya se ha visto).

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se trata de un momento didáctico, por lo que se espera que pregunten dudas si algo no queda claro.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor va exponiendo los resultados, relacionando todo con el trabajo ya realizado.

Episodio 6:

Duración prevista:

5 min. aprox.

Objetivos:

- Definición de la integral impropia de tercera especie a partir de los dos tipos anteriores.

Descripción:

Momento didáctico con introducción de una nueva definición.

- El profesor adelanta que se va a analizar qué sucede si la función dada no es localmente integrable en $[a, b]$ por tener discontinuidades esenciales en el interior. Plantea a los estudiantes cómo extenderían la definición en este caso.
- Finalmente, el profesor da la definición siguiente:

<u>Definición:</u>
Si *f* se vuelve infinita en un punto *d* interior de [*a*, *b*), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

La integral desde *a* hasta *b* **converge** si las integrales desde *a* hasta *d* y desde *d* hasta *b* ambas convergen. En otro caso, la integral desde *a* hasta *b* **diverge**.

Dificultades:

Quizá pueda surgir alguna dificultad al plantear qué sucede si el intervalo es infinito y la función tiene una asíntota vertical en el interior. Aunque lo natural es pensar en dividir la integral en dos, realmente hay que dividirla en tres.

<u>Episodio 7:</u>

Duración prevista:
5 min. aprox.

Objetivos:
- Operacionalización de la definición recién institucionalizada.
- Resolución de un ejercicio de las hojas de problemas.

Descripción:
- El profesor propone a los estudiantes la resolución del ejercicio 46 ($\int_1^3 \frac{dz}{z-2}$) de las hojas. Se resuelve en la pizarra con la participación de los estudiantes.

Dificultades:

Quizá afrontar correctamente su cálculo. Resolver adecuadamente las integrales que se obtienen, ya que son de segunda especie y se va a operacionalizar uno de los criterios expuestos en esta sesión.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Aunque se acaba de enunciar el criterio que se utilizará, es posible que algún estudiante se confunda con el criterio correspondiente para primera especie. Sin embargo, en ambos casos, las integrales son divergentes para *k* = 1, por lo que se debe llegar al mismo resultado.

Acciones esperadas del profesor:
El profesor resuelve el ejercicio pidiendo colaboración a los estudiantes.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo recoge el análisis de datos desarrollado durante la implementación de nuestra Ingeniería. Después de describir los instrumentos de toma de datos, se desarrollan los análisis a posteriori de las sesiones desarrolladas, en donde se describe también el transcurso de cada sesión.

Posteriormente, se analizan los materiales recogidos: las tablas de convergencia, los problemas seleccionados para su resolución y las respuestas del Test de contenidos. Finaliza el capítulo con el análisis de las respuestas de los estudiantes a un test de opinión sobre los elementos más característicos de nuestra Ingeniería y su implementación, así como al test sobre el uso de contraejemplos.

5.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES

Hemos de señalar que la semana anterior al comienzo de la Ingeniería, el profesor-investigador tuvo una presentación con los estudiantes participantes, donde se comentó que él sería el profesor durante las próximas clases y el tema del que se encargaría (aunque ambos grupos ya sabían que se iba a desarrollar una experiencia). Además, repartió fichas de identificación a los estudiantes y pidió que las devolvieran rellenas lo antes posible.

La Ingeniería Didáctica diseñada se realizó en los dos grupos de Primer Curso de la Licenciatura en Matemáticas, como se había previsto. Se presenta a continuación un cronograma del desarrollo de las 8 sesiones de Ingeniería Didáctica y de las 2 sesiones de ordenador en ambos grupos, con el número de estudiantes presentes:

GRUPO	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	M1	M2
1-A	L19	X21	V23	L26	X28	L2	X4	V6	J5	L9
Asistentes	23	24	21	21	23	23	22	19	18	22
1-B	M20	J22	V23	M27	J29	M3	J5	V6	J5	M10
Asistentes	15	14	16	13	11	15	13	11	8	8

Las fechas señaladas con fondo claro corresponden a las sesiones desarrolladas durante el mes de mayo del año 2003 y las señaladas con fondo oscuro a las desarrolladas en el mes de junio. El profesor-investigador tuvo su presentación en ambos grupos el viernes 16 de mayo.

Los horarios que se utilizaron para las sesiones de la Ingeniería son los siguientes:

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1-A	12:00-13:00		12:00-13:00		10:30-11:30
1-B		12:00-13:00		12:00-13:00	8:30-9:30

Las sesiones se desarrollaron en las aulas 2 (grupo 1-A) y 1 (grupo 1-B) de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, que tienen forma de foro (Fig. 5.1). En ellas, los estudiantes se distribuyen libremente y en el análisis de las sesiones se explicita qué lugar ocupaba cada estudiante.

Figura 5.1

5.1.1. INSTRUMENTOS PARA EL ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Por otro lado, la participación de los estudiantes de cada grupo en los trabajos pedidos es la siguiente:

	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Tabla convergencias	Problemas	Test opinión	Test contraejemplos	Test contenidos
1A	21	21	23	16	15	19	16	20
1B	14	13	11	10	11	5	4	6

Ficha 1: Recogida durante la Sesión 2 en 1-B y durante la Sesión 3 en 1-A.

Ficha 2: Recogida durante la Sesión 4 en los dos grupos.

Ficha 3: Recogida durante la Sesión 5 en los dos grupos.

Tabla de convergencia de integrales: Primer ejercicio a entregar pedido a los estudiantes. Se pidió durante la Sesión 3 y se entregó en la Sesión 4 en ambos grupos.

Problemas entregados: Se seleccionaron los problemas 21, 24 y 28 de las hojas de ejercicios. Se pidieron durante la Sesión 6 y se entregaron en la Sesión 7 en ambos grupos.

Test de opinión de la Ingeniería: Test de opinión sobre aspectos del diseño de la Ingeniería y de su puesta en escena (relleno el miércoles 11 de junio en el grupo 1-A y el jueves 12 en el grupo 1-B).

Test sobre los contraejemplos: Test con tres preguntas sobre la actitud de los estudiantes ante el uso de contraejemplos de forma activa (entregado en la Sesión M1 y recogido los días siguientes)[197].

Test de contenidos: Test con preguntas de contenido sobre los temas impartidos (realizado el miércoles 11 de junio en el grupo 1-A y el jueves 12 de junio en el grupo 1-B).

NOTA: Aunque la estudiante AR está matriculada en el grupo 1-B, asistió a sesiones de Ingeniería en el grupo 1-A. Por tanto, en todos los cómputos aparece como alumna del grupo 1-A.

Como se ve, la participación ha sido mucho mayor en el grupo 1-A que en el grupo 1-B, lo que ha motivado que en esta Memoria, aparte de por razones de tiempo y espacio, sólo se tengan en cuenta los datos obtenidos en el primero de ellos, que nos parece más representativo.

Aparte de estos elementos de recogida de datos, se cuenta con los siguientes:

1. Seguimiento de participación: Durante el desarrollo de la Ingeniería se tomaron notas sobre la participación activa de los estudiantes en las sesiones.

2. Ficheros de prácticas en *Maple*: Recogidos al final de las sesiones realizadas en el aula de ordenadores. Por un problema del servidor de las aulas y del disco duro virtual de las

197 Éste es el test que se utilizó en el estudio internacional sobre el uso de contraejemplos (Gruenwald y Klymchuk, 2003). Ver Sección 2.2.1.

máquinas, no se tienen los ficheros de todos los estudiantes asistentes a la segunda sesión. Los resultados se comentan en la Sección 6.5.4.

3. Videograbaciones de cada sesión: Recogidas en cintas clasificadas con la fecha, la sesión y la hora.

Una vez se han mostrado las razones que motivan la elección del grupo 1-A para la redacción de esta Memoria, pasamos a mostrar la relación de todos los estudiantes del grupo 1-A de los que se tiene algún material, especificando cuál:

	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**M1**	**M2**	**TB**	**PR**	**TC**	**TO**	**TE**
NA															
RA															
AB															
JB															
NB															
YC															
DC															
CC															
JC															
AC															
WD															
SD															
CF															
AG															
NG															
IG															
MG															
FG															
EG															
EY															
MI															
YG															
JH															
SM															
LP															
AR															

S*n* = Corresponde a la asistencia del estudiante en la Sesión *n*.
M*n* = Corresponde a la asistencia del estudiante en la Sesión *n* con *Maple V*.
TB = Señala si el estudiante entregó la tabla de convergencias.
PR = Señala si el estudiante entregó los problemas seleccionados.
TC = Señala si el estudiante rellenó el test de contenidos.
TO = Señala si el estudiante rellenó el test de opinión.
TE = Señala si el estudiante rellenó el test sobre el uso de los contraejemplos.

NOTA: Los estudiantes que asistieron a las Sesiones 3, 4 y 5, rellenaron las Fichas 1, 2 y 3, respectivamente. Por esta razón, no se ha señalado este material en la tabla.

Hacemos notar que en la asignatura, en el grupo 1-A, hay matriculados 42 estudiantes y que sólo un 50% acuden a las clases regularmente.

5.2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

En esta Sección se recogen los análisis *a posteriori* de las sesiones de Ingeniería desarrolladas. En cada una de ellas, procedemos en primer lugar a una breve descripción del desarrollo de la sesión, episodio por episodio. Después, en el análisis *a posteriori* propiamente dicho, se explicitan las distintas dimensiones de análisis de cada sesión y se pasa a su análisis detallado. Los datos utilizados para estos análisis provienen de las videograbaciones realizadas, las anotaciones realizadas por el profesor-investigador durante su desarrollo y del análisis de las Fichas de trabajo distribuidas.

Los análisis *a priori* de cada sesión se encuentran en la Sección 4.4. y a ellos se hará referencia continuamente.

Algunos resultados parciales de nuestro análisis de datos se han publicado en González-Martín (2005a, 2005c) y González-Martín y Camacho (2003, 2004b, 2004c, 2004d, 2004e, 2005b).

5.2.1. ANÁLISIS DE LA PRIMERA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 1

Se comienza la sesión a las 12:00 y se cuenta en total con 23 estudiantes, que van llegando paulatinamente. Sólo tres de ellos entregan sus fichas de identificación rellenas. La sesión se videograba, aunque al ser el primer día el enfoque no es óptimo.

Los estudiantes se distribuyen en la clase en pequeños grupos de forma habitual. En adelante, utilizaremos siglas para designar a cada uno de ellos. Su distribución en esta sesión es:

NA, IG, EG, JB	
SM, CC	
MI, SD	JH, AC
RA	
YG, LP, DC	NB, EY, NG
WD, AB, CF	YC, AG, MG

<u>Episodio 1:</u>

Se cumple, aproximadamente, la duración prevista (la presentación y el desarrollo de este episodio duran unos 23 min.).

Comienza la clase con una presentación del profesor y del trabajo que se va a realizar, animando a los estudiantes a colaborar lo más posible en la experiencia que se quiere desarrollar.

Tras el breve comienzo, hace un pequeño recordatorio de lo que se ha estudiado hasta ahora en la asignatura (números complejos, integrales definidas e indefinidas y aplicaciones) y anuncia que se comienza un nuevo tema: las integrales impropias o generalizadas; lo que se va a ver en esta sesión es qué es lo que se generaliza. Para su presentación, se va a proponer una pregunta. En este momento, se presenta la Transparencia 1[198] con las integrales; el profesor plantea la pregunta "*¿Cuáles, para ustedes, con lo que han estudiado hasta ahora, tienen sentido y cuáles no, y por qué?*"

[198] Las transparencias utilizadas durante las sesiones se muestran en el Anexo 2.

Algunos estudiantes se quedan mirando la transparencia, otros murmuran entre sí. Tras alguna pregunta, el profesor puntualiza que no hay que calcularlas, sino estudiar cuáles tienen sentido. Tras esta apreciación, un estudiante (YG) identifica rápidamente (unos diez segundos después) la integral (c) como "intrusa"; el argumento que da es que tiene un intervalo de integración infinito. El profesor dibuja la función y otro estudiante (JB) argumenta que esta integral puede ser calculada porque la función se aplasta. Esta intervención despierta mayor inseguridad en el resto de los estudiantes.

La siguiente función que es identificada como "intrusa" es la (o), la función de Dirichlet (alumna AB, argumentando que "*es como dos funciones*"). Sin embargo, sus compañeros no están seguros de por qué; algunos no tienen una idea de cómo esbozarla. Esta función hace que YG proponga como condición para definir la integral de Riemann que la función tenga un número finito de discontinuidades. El profesor pregunta a los alumnos si les suena el resultado y, ante la ausencia de respuesta, aclara que más tarde se contestarán todas las preguntas.

A los 9:49 minutos, y ante el estancamiento del debate, el profesor propone analizar las integrales una a una para ir descartando las que no tienen sentido. YG afirma que la (a) es válida por ser la función continua y acotada en [1, 10], al igual que la (b) y la (d) (en ésta primero dice que no, pues cree que tiene una asíntota, pero se corrige). Hasta este momento, el discurso está prácticamente monopolizado por YG.

La integral (e) plantea conflicto (minuto 12:15). YG afirma que sí es integrable pues "*donde único tiene fallo es en el cero, pero si integras en un intervalo que no lo contenga sí es integrable*"; JB rebate esta afirmación diciendo que "*no tiene sentido la integral*" y plantea integrar en un intervalo $[\varepsilon, 1]$ y hallar el límite cuando $\varepsilon \to 0$. YG no ve este razonamiento y dice que integrar en (0, 1) es lo mismo, a lo que la alumna EG responde que la integral se define sobre un intervalo cerrado y acotado.

Posteriormente (minuto 14:38), la integral (f) es aceptada por YG porque tiene un número finito de discontinuidades. La función (g) por ser un intervalo acotado y tratarse de una función acotada. La integral (h) es descartada por YG y la alumna SM, argumentando que se debe a que el intervalo "*no se acaba nunca*".

En el minuto 17 el profesor detiene el debate y pregunta "*Las integrales que tienen sentido para ustedes por ahora son aquéllas que...*" y pregunta qué condiciones se dan para definir la integral de Riemann. El alumno JB aporta inmediatamente la condición de tener un intervalo acotado. YG añade la condición de tener un número finito de discontinuidades. Cuando el profesor pregunta si quieren añadir algo más, YG añade también que la función sea finita.

Finalmente, el profesor señala las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann y pregunta si son suficientes, siendo YG quien dice que no y dando como contraejemplo la integral (o), aunque no queda claro si el resto de estudiantes está tan seguro. Se explica que esta función no es Riemann-integrable porque sus sumas superiores e inferiores no coinciden y se explica gráficamente la necesidad de tener un intervalo y una función acotados para poder calcular las sumas de Riemann.

Al final de este episodio, tenemos el siguiente balance:

- Se identifican dos de las tres integrales impropias de primera especie propuestas.
- Se identifica solamente una de las dos integrales impropias de segunda especie propuestas.
- La integral (o) ha sido identificada como no integrable, aunque no todos los estudiantes tienen claro por qué. Ha sido explicado por el profesor.
- Aparecen dos respuestas no previstas en el análisis *a priori*.

Episodio 2:

El desarrollo de este episodio toma unos minutos menos de lo previsto (entre ocho y nueve minutos).

Para introducir la definición, se plantea una integral genérica $\int_a^\infty f(x)dx$ y se pregunta cómo calcularla. En un primer momento, no hay aportaciones, pero un minuto después el estudiante JB interviene una vez más y plantea calcularla integrando en el intervalo [a, ε] y luego hacer tender ε a infinito. El profesor hace una representación gráfica de lo sugerido y escribe también "$= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$". Al preguntar si están todos de acuerdo, nadie dice nada. El profesor añade entonces que un miembro de la igualdad será igual al otro si el límite existiera y puntualiza que si más adelante se ve que hay que añadir alguna condición, se añadirá.

Posteriormente, plantea cómo quedará la definición si se conoce una primitiva de la función y EG lo dice, pero como no se le oye, JH lo repite y queda escrito "$= \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$". Al preguntar a los estudiantes si están de acuerdo, algunas cabezas asienten.

El profesor puntualiza que "*las dos definiciones son equivalentes, representan lo mismo, el área de una figura infinita, pero lo podemos expresar de dos formas*" y cuándo se utilizará una u otra, dando lugar a técnicas diferentes. Se repite que si $f(x)$ es positiva se tiene el área de una figura infinita y que en adelante se planteará si tiene sentido este problema geométrico.

Posteriormente, el profesor destaca el carácter funcional de la integral $F(x)$ y se especifica que es una función que expresa el área.

Al final de este episodio se tiene:

- Se ha dado una definición en términos de límites para la integral impropia de primera especie, que se ha escrito en la pizarra.
- Se ha distinguido entre los casos en que se conoce y utiliza una primitiva de la función a integrar y los que no, y se ha puntualizado que cada situación dará lugar a unas técnicas distintas.
- Se ha introducido el concepto de función integral, $F(x)$, y se ha relacionado con la interpretación gráfica.

Episodio 3:

El desarrollo de este episodio toma unos minutos más de lo previsto (unos 23 minutos).

El cálculo de las dos integrales preparadas ofrece bastantes problemas a los estudiantes (pasan más de 4 minutos hasta que sale un estudiante a resolver la primera y unos 9 minutos en tener las dos resueltas en la pizarra); varios reconocen que no saben calcular sus primitivas.

La primera de ellas es resuelta en la pizarra por la estudiante WD[199]. No obstante, realiza un cambio de signos "poco natural" para calcular la primitiva de la función y la técnica que se quería ilustrar parece quedar oculta por la dificultad de este cambio.

La segunda integral resulta mucho más complicada para los estudiantes. Finalmente, el estudiante JB la calcula y la muestra en la pizarra. El profesor pregunta si hay alguna duda o algo que corregir, pero nadie dice nada.

[199] Esta alumna se revela como una estudiante tímida, razón por la que no interviene en los debates, a pesar de que parece que sí tenga cosas que aportar.

La cuestión sobre la forma de las funciones toma bastante tiempo, pues los estudiantes tienen grandes dificultades para representarlas gráficamente (unos 4:26 minutos desde que se pregunta por las representaciones hasta que ambas quedan dibujadas; al principio, ningún estudiante se ofrece a reproducir la segunda) y esto parece desviar la atención de la cuestión que se quería plantear: *La forma de la función no parece asegurar nada sobre la convergencia*.

Sin embargo, los estudiantes intuyen con rapidez algunas funciones que darán lugar a integrales divergentes: JH aporta que las funciones que tienden al infinito originarán integrales divergentes, YG puntualiza que cualquier función que tienda a un valor mayor que cero lo hará y AB ataca la cuestión de signos y enuncia que si $|f(x)|$ tiende a infinito, se obtendrá una integral divergente.

El profesor explicita que se estudiará por el momento funciones positivas y que la condición de JH está incluida en la de YG. Y plantea posteriormente a los estudiantes si creen que es cierto o falso este enunciado de YG.

YG se revela en este punto "muy visual" y plantea un argumento gráfico en la pizarra, argumentando que si la función está sobre una cierta cota, entonces su área será mayor que la de un rectángulo de altura esa cota y base infinita. Sin embargo, algunos compañeros no parecen convencidos.

El balance es el siguiente:

- Se ha operacionalizado la definición con los ejemplos propuestos, aunque ha tomado más tiempo del previsto.
- Se han realizado las gráficas esperadas, aunque también ha tomado más tiempo del previsto.
- Se hacen aportaciones sobre qué tipo de funciones originarán una integral divergente y, como se esperaba, se formula informalmente el Criterio de Divergencia.

Episodio 4:

El profesor prefiere dejar la confección de la tabla para la siguiente sesión (pues en la Sesión 2 se plantea acabar tal tabla) ya que los estudiantes ni siquiera parecen ver la veracidad del enunciado planteado.

Se les plantea probarlo en casa o buscar un contraejemplo y con ello se comenzará la siguiente sesión.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 1

Para realizar el análisis *a posteriori* de esta sesión, se distinguen las observaciones hechas sobre los estudiantes y las observaciones hechas sobre el profesor. Además, en el caso de los estudiantes, se han señalado varias dimensiones, que hacen referencia a los objetivos generales de la sesión. Éstas son:

- Los conocimientos previos
- El *medio*
- El contrato didáctico y el uso del debate
- Las condiciones para definir la integral de Riemann
- La definición de la integral impropia de primera especie
- La operacionalización de la definición
- El uso del registro gráfico

Pasamos ahora a detallar el análisis realizado.

<u>Estudiantes:</u>

<u>Los conocimientos previos:</u>

Después de leer la descripción de la sesión, salta a la vista que el nivel de conocimientos previos de nuestros estudiantes no es el que "institucionalmente" se podría esperar; a pesar de habérseles presentado previamente varios conceptos y resultados, no parecen tener una idea clara de ellos ni mostrarse seguros al manejarlos.

En consecuencia, una primera conjetura que podemos enunciar es que el nivel académico de los estudiantes es más bajo del esperado.

Un ejemplo claro que apoya nuestra suposición es el momento de identificación de la función de Dirichlet, que AB descarta en primer lugar por ser "*como dos funciones*", pero ningún alumno especifica por qué se puede descartar; posteriormente, YG dice que "*una función con un número finito de discontinuidades se puede integrar, pero ésa no tiene un número finito de discontinuidades*" y ningún compañero sabe qué decir. Parece que ninguno recuerda el argumento por el que no es integrable esta función. Los estudiantes no esgrimen argumentos convincentes para descartarla, sino que parece que se reducen a criterios memorísticos; se esperaba que conocieran argumentos de eliminación, pero parece que, simplemente, *les suena*.

También vemos que los estudiantes no cuentan (en general) con herramientas para refutar o confirmar las hipótesis que sus compañeros enuncian, lo que apoya una vez más nuestra impresión de poca asimilación de contenidos previos. Una posibilidad a tener en cuenta podría ser que la no refutación sea debida al nuevo contrato didáctico (con lo que no se lograría la devolución) y no a la falta de argumentos, cuestión que quedará pendiente para el análisis de futuras sesiones.

Otro momento realmente sintomático a favor de nuestra conjetura se produce en el Episodio 3, donde las dificultades observadas se han situado a un nivel más elemental del previsto (pues las dos integrales propuestas ofrecen grandes dificultades a los estudiantes) y de una importancia notoria; sucede lo mismo que en el estudio de Camacho y Aguirre (2001), que constatan que sus estudiantes tienen grandes dificultades (que no se habían previsto) para calcular el valor de las integrales pedidas. De igual modo, las dificultades encontradas posteriormente (que no habían sido previstas) para representar gráficamente las dos funciones elegidas apuntan en la dirección de nuestra conjetura.

Por otro lado, es significativo que los estudiantes no dispongan de calculadora y, los que la tienen, no saben cómo utilizarla para esbozar la gráfica de las funciones pedidas: el profesor sugiere utilizar la calculadora y dar valores a las funciones y ha parecido sonar como una técnica completamente nueva para los estudiantes. A pesar de la transformación sugerida por YG, $x^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, los alumnos siguen sin saber qué valores dar a la variable independiente y ha de ser el profesor quien dé los valores x = 1, 8, 27.

Destacamos que los estudiantes tampoco parecen tener una idea gráfica de las funciones presentadas en el primer episodio (que se comprueba en el Episodio 3), y la integral (i) no es identificada (función con discontinuidad esencial en el intervalo de integración). El hecho de que se haya identificado la integral de segunda especie (e), pero no la (i), puede deberse al hecho de que la primera tiene su discontinuidad en uno de los extremos de integración, lo que facilita su identificación.

En el caso de la definición de la función $F(x)$, aunque el profesor remarca su carácter dinámico, opinamos que no todos los estudiantes son capaces de asimilar esta idea (cuando el profesor presenta informalmente la función F no se producen intervenciones de los alumnos), lo que está de acuerdo con las dificultades previstas en el análisis *a priori*. Las demandas cognitivas de este concepto son elevadas[200]. En el caso en que la definición de la integral impropia viene en la forma:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

parece más evidente que se calcula el límite de una función, por lo que los estudiantes pueden evocar sus concepciones sobre este proceso (aunque, como se ha comentado en el análisis cognitivo, éstas son más de tipo estático[201]). Sin embargo, en el caso de:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

esto no es tan evidente, en particular cuando se evocan modelos estáticos para la integral.

El medio:

En esta primera sesión el *medio* se ha revelado demasiado complejo para el desarrollo del Episodio 1, lo que ha supuesto alguna dificultad para los estudiantes: la gran cantidad de integrales a estudiar probablemente les ha distraído del objetivo de la actividad en este episodio. Quizá la organización de la actividad ha influido: se podría haber repartido las integrales entre distintos grupos de estudiantes o dar mayor mayor tiempo para la reflexión y el desarrollo de opiniones basadas en razones científicas (Legrand, 2001 y Sección 4.2.).

Por otro lado, las integrales seleccionadas en el Episodio 3 y las gráficas que se debían realizar han resultado también de dificultad considerable, elemento que no había sido previsto. Esta complejidad no esperada podría tener efectos negativos en los objetivos generales de la sesión:

- Ep. 1: Las condiciones para definir la integral de Riemann pueden no quedar claras al tener que analizar muchos casos y producirse muchas aportaciones.
- Ep. 3: Los estudiantes pueden desviar su atención al cálculo de primitivas en lugar de a la operacionalización pretendida de la definición.
- Ep. 3: Las dificultades para producir representaciones gráficas pueden desviar la atención de la cuestión pretendida. Además, los estudiantes pueden concluir que el uso del registro gráfico es más difícil y desarrollar actitudes negativas.

Sin embargo, habría sido difícil escoger integrales más sencillas para el Episodio 3 que cumplieran nuestro propósito. Pero a pesar de las dificultades no previstas, estas dos integrales han mostrado ser eficaces a la hora de la siguiente actividad de reflexión sobre la forma de las funciones. Dadas las aportaciones e interacciones producidas (en particular en el Episodio 3), nos inclinamos a favor de la idea de que, en cierta medida, sí se han producido las devoluciones de las actividades y retroacciones explotables, por lo que el *medio* cumple su propósito.

[200] Consultar Artigue (1995a), Calvo (1997), Rasslan y Tall (2002), Carlson *et al* (2003) y Evangelidou *et al* (2004).

[201] Consultar Artigue (1995a) y Hitt (2000c, 2005). Ver también la Sección 3.3.4.

El contrato didáctico y uso del debate:

Otro detalle que observamos es el hecho previsto de que los estudiantes no están nada acostumbrados a hablar ni a debatir en clase y mucho menos a defender sus opiniones; de hecho, algunos han parecido desconcertados (como se había previsto en el análisis *a priori*. También se vio en la Sección 3.3. que el uso de preguntas no algorítmicas desconcierta a los estudiantes) o incluso cohibidos ante la posibilidad de hablar para sus compañeros (con el agravante de ser videograbados). Además, el hecho de que el profesor no refutara ni confirmara sus hipótesis ha sido realmente confuso para ellos.

Estas circunstancias dificultan la implementación del debate científico, pues los estudiantes deben creer en sus propias conjeturas y poder desarrollar argumentos racionales convincentes[202]. Por otro lado, asumimos que la implementación del debate científico es un proceso lento[203] que requiere una inversión de tiempo, por lo que sí es positivo que algunos estudiantes se hayan animado a expresar sus ideas, aunque no haya habido muchas refutaciones por parte de los compañeros (destacamos el caso de JB, YG y EG, alumnos que sí se han atrevido a refutar a sus compañeros, o a pedir más explicaciones). Sí ha habido una participación gradual de los estudiantes.

En los Episodios 2 y 3, con una mayor participación, se ha llegado, más que a un debate entre los estudiantes, a un efecto de exposición de ideas con el profesor, que ha de reexponerlas al gran grupo. Se ha observado, al principio, una cierta reticencia a la hora de construir la definición de la integral impropia de primera especie, quizá debida a la novedad de la situación (a pesar de que parece evidente que, tarde o temprano, el profesor *dará la definición correcta*, la mayoría de los estudiantes parece no creerse preparados para esta "responsabilidad", lo que dificulta en un principio la devolución de la actividad)[204].

Uno de los objetivos propuestos en nuestra investigación (Sección 1.2.) es la creación de un nuevo contrato didáctico donde el estudiante reciba mayor autonomía y se utilicen preguntas de corte no algorítmico. Aunque una sola sesión no es suficiente para alcanzar este objetivo, a lo largo de ésta hemos visto una participación gradual de los estudiantes:

- Ep. 1: destacan YG, JB, AB, EG, SM.
- Ep. 2: destacan JB, EG, JH.
- Ep. 3: destacan YG, WD, JB, JH, AB, EG, SM.

lo que de alguna manera apoya nuestra hipótesis y nos hace pensar en una aceptación paulatina del nuevo contrato.

Las condiciones para definir la integral de Riemann:

En primer lugar, destacamos el momento en que YG afirma que la integral (a) tiene sentido por estar la función acotada y ser continua. Cuando el profesor le pregunta si es necesario que la función sea continua, él responde "*No, pero si es continua es integrable*" y puntualiza que esta función lo es en [1, 10].

---

[202] Ver Sección 4.2.

[203] Ver Sección 4.2.

[204] Ya se ha dicho en la Sección 2.3.1. que el estudiante no experimentado en este funcionamiento a-didáctico ha de ser preparado poco a poco, pues el estudiante tiende a querer beneficiarse de la maquinaria didáctica y de sus formas económicas de adaptación.

Como se había previsto, la identificación de las integrales impropias de primera especie es menos costosa que las de segunda especie (aunque ha quedado una de cada tipo sin identificar, se ve que la integral (e) despierta más diferencia de opiniones). El argumento dado por YG para identificar (c) ha sido “*porque el intervalo es hacia infinito, el área no tiene sentido. El área encerrada por una función hacia infinito*” (aunque haya sido rebatido por JB argumentando que como la función se acerca a cero “*llegará un punto en que sea nula la integral*”). Podríamos encontrarnos aquí ante la presencia del obstáculo de *ligación a la compacidad* (ver Sección 3.3.4.).

Para la integral (e), que YG identifica como integrable, su argumento es “*donde único tiene el fallo es en el cero, pero si integras en un intervalo que no lo contenga, sí es integrable en un intervalo que no coja al cero*”. JB rebate diciendo que “*no tiene sentido la integral*” y plantea el uso de un límite. Ante la afirmación de YG de que esto es lo mismo que integrar en (0, 1), EG afirma que la integral se define sobre un intervalo cerrado y acotado.

Se ve que entre estos tres estudiantes han quedado señaladas las condiciones para definir la integral de Riemann.

Nos parece significativo que no sea identificada la integral de la función que presenta una discontinuidad esencial en el interior del intervalo de integración. Esto puede deberse a tres posibilidades:

- Falta de un repertorio gráfico adecuado de funciones elementales que permita el descarte inmediato de esta integral (que está de acuerdo con nuestra conjetura sobre el nivel académico de nuestros estudiantes).
- Uso inadecuado de herramientas algebraicas en el estudio de propiedades de funciones elementales que no han permitido el descarte (ídem).
- Complejidad del *medio* o de la pregunta planteada (conjetura relacionada con la anterior).

Entre las intervenciones de los estudiantes han aparecido dos no previstas especialmente interesantes.

Una de ellas es la de JB, que en el Episodio 1 se muestra especialmente gráfico e intuitivo al afirmar que la integral (c) puede ser calculada porque la función se acerca a cero y “*llegará un punto en que sea nula la integral*” y puntualiza que esto sucede “*según cómo se acerque a cero*”. Esta afirmación revela un conocimiento de las propiedades del integrando y un uso del registro gráfico y también resulta sorprendente la seguridad con la que este alumno hace su afirmación pareciendo distinguir distintas formas de tender a cero[205]; de hecho, ningún compañero se atreve a rebatirlo. Con su afirmación adelanta la noción de convergencia y, además, lo hace ligada al registro gráfico. Por su intervención y algunas posteriores, nos planteamos averiguar si este estudiante está repitiendo o si cursa la asignatura por primera vez (en caso de estar repitiendo, su seguridad quizá podría atribuirse al hecho de que él *sabe que esta integral se puede calcular*). De una u otra forma, es obvio que este estudiante recurre al registro gráfico en sus razonamientos y distingue formas de tender a cero (“*Según cómo se acerque a cero*”).

La identificación de la función de Dirichlet hace que surja como condición para definir la integral de Riemann que la función tenga, a lo sumo, un número finito de discontinuidades (segunda intervención no prevista), condición que no es necesaria para definir la integral de Riemann. Por ejemplo, si dividimos un intervalo [k, k +1] en n subintervalos de forma que sobre

[205] Por lo que niega la afirmación: “ $f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$ ”.

cada uno se trace un segmento de altura $h_i = \dfrac{n}{i^2}$, respectivamente, se tendrá una sucesión de rectángulos cuya área será:

$$\sum_{i=1}^{n}(\text{base.altura}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.\frac{n}{i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2},$$

que es convergente cuando $n \to \infty$. Un ejemplo más complicado lo provee la función siguiente, definida sobre [0, 1]:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si existe } n \text{ natural tal que } \dfrac{1}{2n+1} \leq x < \dfrac{1}{2n}, \\ 1, \text{ si existe } n \text{ natural tal que } \dfrac{1}{2n+2} \leq x < \dfrac{1}{2n+1} \end{cases},$$

que sí es integrable Riemann en [0, 1], pero tiene infinitas discontinuidades[206].

Aunque el profesor, finalmente, dice que esta condición no es necesaria, al no proporcionarse ningún contraejemplo quizá no resulte convincente.

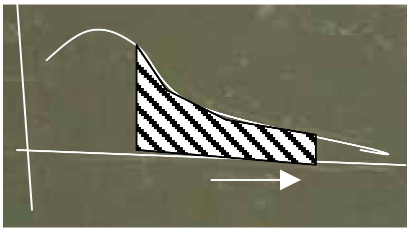
Como se había previsto, se ha realizado una reflexión colectiva sobre las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann y al final sólo han quedado en la pizarra las dos condiciones buscadas. De las respuestas esperadas, han surgido:

- Intervalo acotado (surge nada más plantear la pregunta, por JB).
- Función finita en el intervalo (YG).

y no han surgido las otras previstas. Destacamos que, al tratar la integral (a), YG aclara que aunque la continuidad no es necesaria, sí asegura la integrabilidad, por lo que no es necesario justificar que (f) es integrable.

La definición de la integral impropia de primera especie:

El empleo de límites para extender la definición al caso de intervalos de integración infinitos surge en un tiempo breve (menos de un minuto después de la última intervención del profesor) y un estudiante (JB) lo aporta de forma natural. Sin embargo, es posible que esta premura impida al resto de compañeros comprender por qué son necesarios límites, al estar en juego el carácter dinámico de la integral de una función. En este sentido, las aportaciones gráficas del profesor pueden haber resultado útiles.



[206] Tomado de [P7], pág. 2.

Una de las posibles reacciones previstas, pero que no se ha dado, era la sugerencia de utilizar directamente la regla de Barrow para definir el nuevo concepto. Estimamos que la no aparición de esta formulación se puede deber a:

- La escritura de $F(\infty)$ no resulta nada familiar; no ha habido una legitimación de esta notación previamente.
- Si algún estudiante hubiera pensado en utilizarla, su no legitimación podría haberle disuadido de comunicarlo en voz alta.

En cuanto a las dos variantes de la definición, se ha conseguido que surja por parte de los estudiantes esta distinción (el profesor sólo plantea cómo quedaría la definición si se conociera una primitiva de la definición y EG y JH lo aportan). Posteriormente, el profesor ha explicitado claramente que el uso de una variante u otra dará lugar a diferentes técnicas.

Como se había indicado en el análisis *a priori*, ningún estudiante ha previsto que el integrando no sea Riemann-integrable en los intervalos $[a, b]$ que se utilizan para extender la definición, esto es, la presencia de discontinuidades esenciales en el interior de $[a, \infty)$. Esto puede responder a varios factores:

- Focalización en los nuevos elementos de la sesión.
- Ausencia o no empleo de herramientas en el registro gráfico. Predominancia del modelo “continuo” o “suave” en los modos de pensar[207].
- Falta de experiencias de casos “patológicos” durante el aprendizaje anterior[208] (tanto en el registro gráfico como algebraico), que se une al bajo nivel académico.

Mientras que la primera se relaciona con la complejidad no esperada de algunos elementos de esta sesión, las dos últimas se relacionan con nuestra previsión del nivel académico de los estudiantes.

La operacionalización de la definición:

A pesar de que se han resuelto los dos ejemplos propuestos, las dificultades encontradas por los estudiantes para hacerlo pueden haber distraído su atención de nuestro objetivo, que es la operacionalización de la definición construida.

Éste es uno de los objetivos de esta primera sesión, pero debido a que los ejemplos han resultado muy complicados para los estudiantes y a que la resolución no ha sido muy “natural” (al escribir WD en su resolución $\int e^{-x}dx = -\int -e^{-x}dx$ para ver la primitiva), a algunos estudiantes puede no haberles quedado muy claro (más probablemente debido al cálculo de primitivas que al uso de límites). Sin embargo, como ya se ha dicho, la elección de ejemplos más sencillos que sirvan para iniciar el debate sobre las formas no es trivial. Aunque para la operacionalización de la definición no hayan resultado óptimos, sí han cumplido su función para el debate posterior sobre formas de funciones y ha habido retroacciones interesantes. Más que al propio *medio*, en este momento las dificultades se deben al bajo nivel de los estudiantes.

---

[207] Tall (1992a) habla de la predominancia de ejemplos concretos en el aprendizaje y las imágenes restringidas de funciones que éstos generan. Véase también Artigue (1995a).

[208] Consultar Tall (1991b), Selden y Selden (1998) y la Sección 2.2.1.

<u>*El uso del registro gráfico:*</u>

A lo largo de la sesión el profesor recurre varias veces al registro gráfico:

- Dibuja la gráfica de la función de la integral (c) cuando es descartada.
- Hace un esbozo de la función de Dirichlet cuando es eliminada.
- Justifica gráficamente, con el argumento de las sumas de Riemann, la necesidad de tener un intervalo finito y una función acotada.
- Hace una representación gráfica del significado del uso de un límite para calcular una integral impropia después de la definición dada por JB.
- Al distinguir entre las dos variantes de la definición, aclara que cuando la función es positiva se trata del área de una figura de aspecto infinito.
- Una vez calculadas las dos integrales del Episodio 3, explicita "*tenemos calculado el área bajo una curva desde uno hasta infinito y hemos obtenido este valor*".
- Promueve la representación gráfica de los dos ejemplos elegidos para operacionalizar la definición.
- La búsqueda de funciones con integral divergente se hace desde el registro gráfico: "*lo que les planteo es lo contrario, ¿se les ocurre alguna forma tal que podemos asegurar que la integral no converge?*"
- Hace representaciones gráficas de las aportaciones de los estudiantes e invita a YG a que pruebe su resultado gráficamente.

De esta forma, se relacionan los trabajos que se hacen en el registro algebraico con el registro gráfico.

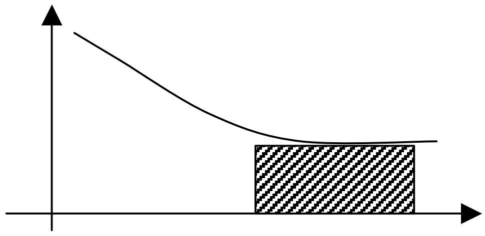
Por otro lado, aunque el tiempo empleado en el desarrollo del Episodio 3 es superior al esperado y las dificultades encontradas son imprevistas (los estudiantes tienen grandes dificultades para representar gráficamente incluso funciones elementales como las propuestas), lo que podría distraer la atención de los estudiantes de la cuestión buscada (*La forma de la función no parece asegurar nada sobre la convergencia*), el desarrollo posterior da que pensar que este objetivo sí se ha alcanzado.

La cuestión que habíamos catalogado de más difícil en este episodio ha sido la más fructífera y ha habido aportaciones muy interesantes sobre qué formas permiten asegurar la divergencia. Los estudiantes parecen intuir con suficiente rapidez algunas funciones que darán lugar a integrales divergentes y parecen mostrar un pensamiento claramente gráfico:

- JH aporta que las funciones que tienden al infinito originarán integrales divergentes.
- YG puntualiza que cualquier función que tienda a un valor mayor que cero lo hará.
- AB enuncia que si $|f(x)|$ tiende a infinito se obtendrá una integral divergente.

Uno de los objetivos que creemos que se ha alcanzado es el de la presentación del registro gráfico con un estatus más matemático. Se ha explicitado que hay funciones que tienen gráficas similares e integrales muy distintas y hay estudiantes que han sido capaces de aportar sus propios criterios de divergencia a partir de la forma de la función. De este modo, se ha adelantado el Criterio de Divergencia. Además, desde el Episodio 1, JB ha avanzado que una función que tienda a cero puede originar integrales convergentes o divergentes, "*según cómo se acerque a cero*".

Sin embargo, parece que el estatus del registro gráfico no es aún aceptado del todo, en vista de las reticencias que el razonamiento de YG en la pizarra produce (cuando YG explica su argumento, se pregunta si entienden y alguien dice que no. Una vez que YG dibuja su razonamiento en la pizarra[209]:



el profesor pregunta: "*¿Les convence? ¿Se lo creen?*" y no hay consenso. Poco a poco, algunos estudiantes, como el grupo de AB, CF y WD, se atreven a decir que no les convence). Aunque después de aceptar la posibilidad de que nuestros estudiantes tengan más carencias teóricas de las esperadas, pensamos que esta reticencia puede deberse simplemente a la complejidad del razonamiento empleado, y no al uso del registro gráfico.

El profesor:

Los debates preparados han resultado muy abiertos y la ayuda del profesor ha servido para que algunos estudiantes participen, aunque no se haya conseguido una participación masiva. Además, ha mantenido una actitud neutra, pidiendo a los estudiantes que sean ellos los que confirmen o refuten las hipótesis de sus propios compañeros, y ha escrito en la pizarra sus aportaciones. También ha producido gráficas en la pizarra para orientarles y ha asistido a algunos estudiantes en sus asientos durante el cálculo de las dos integrales del Episodio 3. También ha ofrecido alternativas para realizar las representaciones gráficas de este episodio cuando se ha visto que los estudiantes no sabían cómo abordarlas y ha seleccionado estudiantes para trabajar en la pizarra.

Sin embargo, el profesor deberá tomar un rol más *institucionalizador* una vez que se ha dado por finalizado el debate, en el sentido de que quede claro para los estudiantes cuándo se recapitula lo que ellos dicen y cuándo ejerce su "rol de profesor". Quizá haya que señalar más claramente cuándo finalizan los debates.

Un caso que nos parece significativo es el de la construcción de la definición de la integral impropia de primera especie, que no ha sido bien institucionalizada al añadir el comentario "*si vemos que hay que añadir alguna condición, se añadirá*" o "*por ahora aceptaremos esta definición y si luego nos falla, pues recapitularemos*". Al dejar para la siguiente sesión la condición de integrabilidad local, este comentario parece más bien dar un estatus dudoso a lo escrito en la pizarra. Los estudiantes pueden haber interpretado que la definición que se ha construido no es correcta, pues "no siempre existe el límite" (cuando en realidad existe siempre que se impongan condiciones a la función, y no a la definición en sí). En el caso de la integral impropia de primera especie han de verificarse dos condiciones:

- La función $F(x)$ ha de estar bien definida en los intervalos $[a, b]$ que se utilizan y, en particular, en un entorno del infinito.
- Existencia y finitud del $\lim_{x\to\infty} F(x)$, que es lo que determina la *convergencia* de la integral.

En el Episodio 4, debido al tiempo de más que consume el episodio anterior y a las dificultades observadas, realiza un cambio en la organización de la Ingeniería por razones

[209] Se ve, a lo largo de las sesiones, el predominio de representaciones prototípicas y de concepciones monótonas de la convergencia.

didácticas. El profesor prefiere dejar el comienzo de la confección de una tabla de convergencias para la siguiente sesión (teniendo en cuenta que en la Sesión 2 se había previsto plantear acabar tal tabla) ya que los alumnos ni siquiera parecen ver la veracidad del enunciado planteado en la pizarra por YG.

Se les plantea probarlo en casa o buscar un contraejemplo y con ello se comenzará la siguiente sesión. También se propone la resolución de las cuestiones 2-15 de las hojas de problemas.

Algunas consecuencias:

En primer lugar, estimamos que habría sido útil dedicar un poco de tiempo a repasar lo que los estudiantes han visto previamente en la asignatura antes de desarrollar nuestra Ingeniería, para situarlos mejor en lo que se va a hacer[210]. Después de desarrollar la experiencia hemos visto que, realmente, la mayoría de los estudiantes se encuentran perdidos y no sólo apenas han estudiado los conceptos previos, sino que parece que apenas los han entendido.

En nuestro diseño se propone *reforzar* conocimientos previos, pero no *repasarlos* o *revisarlos.* En consecuencia, una cuestión a estudiar es si este repaso se debería hacer dentro de la Ingeniería o si se debería prever una sesión previa donde se aborden las cuestiones fundamentales que se utilizarán.

Para posteriores desarrollos de la Ingeniería opinamos que quizá habría que reformular la pregunta introductoria del debate (Episodio 1) de forma que quede más claro qué es lo que hay que identificar y para que no haya posibles desvíos de atención, como ha parecido suceder en esta sesión.

También habría que añadir nuevas respuestas posibles de los estudiantes en el análisis *a priori*, entre las que contarían las que se han producido en esta sesión.

Una consecuencia que supone una reorganización de la próxima sesión es que habrá que dedicar unos minutos a institucionalizar las conclusiones de esta primera actividad. Pensamos que el profesor debe iniciar la siguiente sesión adoptando un rol *institucionalizador* y plantear los resultados fundamentales de esta sesión:

- Bajo qué condiciones se define la integral de Riemann (aunque se ha explicitado la necesidad de tener un intervalo finito y una función acotada en él para poder hablar de las sumas de Riemann, quizá no haya quedado bien claro que éstas son las únicas condiciones a imponer a priori y que no garantizan la integrabilidad).
- La definición de la integral impropia de primera especie.
- La integral impropia de una función cuyo límite sea superior a una cierta constante k positiva es divergente. Probar el resultado en el registro algebraico apuntando que el razonamiento gráfico de YG es totalmente correcto.

Por otro lado, la definición de la integrabilidad local permitirá dar un *rigor* a la definición de integral impropia de primera especie que en esta sesión ha quedado inconcluso (la insinuación de casos en que no se puede aplicar la extensión de la integración a intervalos infinitos quizá haya tenido un efecto pernicioso no previsto sobre la definición en sí). También, como está previsto, se continuará realizando conversiones al registro gráfico para dotarlo de un estatus más matemático, que será utilizado en determinados razonamientos.

[210] Tal como se realizó en la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue. Ver Artigue (2000) y Sección 4.1.2.

Otro concepto que hay que reforzar poco a poco durante las siguientes sesiones es el de la función integral $F(x)$ y su carácter dinámico. La impresión recibida en esta sesión es de un pensamiento estático en los estudiantes que habrá que enriquecer.

Por otro lado, en cuando a la metodología, en los siguientes debates se dará un tiempo de trabajo personal antes de debatir (dando así a los estudiantes un tiempo de apropiación de las cuestiones que favorezca su participación, como propone Legrand, 2001). De esta forma, se pretende evitar la monopolización del debate por parte de algunos alumnos, de modo que los estudiantes que necesitan mayor seguridad para participar puedan tenerla. Además, en las actividades propuestas donde haya que realizar muchos cálculos, se dividirá el trabajo entre toda la clase, para ahorrar tiempo y en previsión de carencias algebraicas por parte de los estudiantes.

También debe quedar más claro en qué momento finalizan los debates y, una vez finalizados, el profesor institucionalizará los resultados correspondientes.

Se tendrá también en cuenta el bajo nivel de nuestros estudiantes, por lo que se revisarán las actividades propuestas en el resto de la Ingeniería. A lo largo de las siguientes sesiones se va a analizar si este nivel es tan bajo como se había previsto o más aún (no parecen tener un repertorio de funciones "básicas" y sus gráficas), lo que supondría dificultades para el desarrollo de las sesiones siguientes (los *medios* previstos podrían resultar demasiado complejos y no se producirían las retroacciones esperadas), por lo que habría que realizar cambios en la organización de las siguientes sesiones.

En este sentido, uno de los objetivos de nuestra Ingeniería, que es el de reforzar conceptos y destrezas previos, puede ser de gran importancia para los estudiantes; nuestras aportaciones pueden resultar útiles también para desarrollar concepciones más dinámicas en los estudiantes.

5.2.2. ANÁLISIS DE LA SEGUNDA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 2

Se comienza la sesión a las 12:00 y se cuenta con 24 estudiantes. La mayoría están en la clase cuando empieza la sesión y su distribución es la siguiente:

EG, JB	
NA, IG, SM, CC	AC, JH, YC, YG, LP, DC
FG, MI, SD, RA	NB, EY, NG
WD, AB, CF	AG, MG

Sólo una estudiante entrega su ficha de identificación.

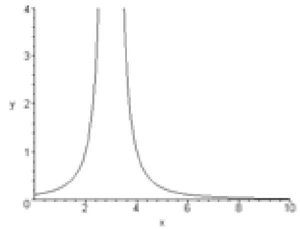
Episodio 1:

Se lleva a cabo todo lo previsto, aunque se tarda más (unos 21 minutos).

El profesor ejerce su rol de institucionalizador y recuerda a los alumnos bajo qué condiciones se define la integral de Riemann (aclarando que la condición añadida en la sesión anterior por YG no es necesaria para definir la integral. Sin embargo, no ofrece ningún contraejemplo) y se recuerda que no son suficientes. Tras esto, se institucionaliza la definición de integral impropia de primera especie.

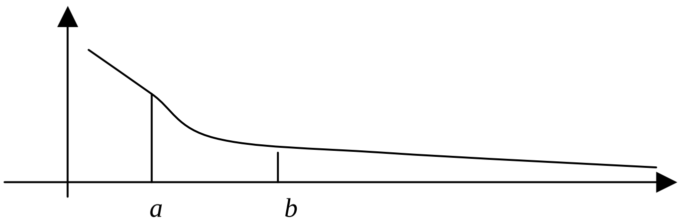
Posteriormente se recuerda la tarea que se dejó para casa: probar que si $f(x) \geq k > 0$, a partir de un cierto valor, entonces su integral es divergente. El profesor expone a los alumnos que el argumento gráfico expuesto en la sesión anterior (por YG) es correcto[211] y procede a su transposición en el registro algebraico.

Después, el profesor aclara a los estudiantes que, hasta el momento, se ha dado por hecho que el límite de la integral $\int_a^b f(x)dx$, con $b \to \infty$, siempre se puede calcular y los ejemplos tratados hasta el momento "funcionan". Sin embargo, muestra una gráfica de una función con una discontinuidad esencial en el intervalo de integración para hacer ver que no siempre se puede asegurar esta condición.



Este ejemplo sirve para introducir la definición de función localmente integrable y aclarar que, en adelante, se trabajará siempre con este tipo de funciones. La definición parece no causar demasiada dificultad a los estudiantes.

Como consecuencia, se enuncia que si una función es localmente integrable y se tiene que una integral impropia converge, convergerá cualquier otra contenida en la anterior. Se acentúa el carácter local de la propiedad de tener integral impropia convergente y parece que los estudiantes lo aceptan. Se muestra un argumento gráfico de esta consecuencia (dada una función definida en $[a, \infty)$ con integral convergente, se hace ver que la integral en $[b, \infty)$ está comprendida en la anterior).



Se recuerda a los estudiantes la propiedad de la integral de Riemann de partición de un intervalo y se pregunta si creen que en el caso impropio será cierto también. YG responde inmediatamente que sí, por la consecuencia que se acaba de enunciar. El profesor confirma su veracidad. Se enuncia el resultado y se demuestra. El alumno JB tiene algún problema y pregunta si puede repetir la prueba. Una vez demostrado el resultado, se pregunta a los estudiantes si lo han entendido, pero apenas ninguno dice nada.

En este segundo momento se invierte más tiempo del esperado y se retrasa todo el desarrollo posterior de la sesión.

Al finalizar este episodio se tiene:

- Se han enunciado claramente las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann.
- Se ha institucionalizado la definición de integral impropia de primera especie. Se repiten las dos definiciones equivalentes y en qué condiciones se usará una u otra.
- Se ha justificado gráficamente el Criterio de Divergencia y se prueba algebraicamente.
- Se ha dado la definición de integrabilidad local y algunas consecuencias.

[211] Aunque sin aclarar que no es necesaria la monotonía.

Episodio 2:

Se plantea a los estudiantes la elaboración de la tabla de convergencias y se les sugiere utilizar el Criterio de Divergencia. En primer lugar, se pide que digan qué familias de funciones elementales conocen. En este momento, se ve que también tienen ciertas dificultades para agrupar las funciones usuales por familias.

Es en este momento que se produce una mayor participación de los estudiantes. Cuando se enumeran las funciones trigonométricas y el profesor aclara que se estudiarán el seno y el coseno, y no la tangente por no ser localmente integrable, varios alumnos asienten.

Se pone en práctica por primera vez la opción tomada como conclusión del análisis de la sesión anterior de repartir la tarea para centrar la atención de los estudiantes. Se hacen cinco grupos y se reparten las familias de funciones. Aunque al principio esto provoca algo de desconcierto, observamos que posteriormente los estudiantes se ponen a trabajar y a debatir entre ellos sus resultados. En la puesta en común intervienen alumnos que no habían participado hasta el momento (como SD, IG y AG).

Cuando son las 12:30 el profesor ve que los estudiantes aún están abordando sus integrales y decide introducir una alteración importante en la Ingeniería. Decide dejar la actividad transcurrir con normalidad y que los alumnos se responsabilicen de la tarea que se les ha dado. El profesor aprovecha el momento para acercarse a cada uno de los grupos. De esta forma, se averigua que, efectivamente, JB y EG son estudiantes que ya conocen los contenidos trabajados, pues han cursado la asignatura el año anterior. El resto de observaciones hechas se presentan en el análisis *a posteriori*.

La familia de funciones $1/x^k$ dio problemas, pero despertó la problemática. Un grupo obtuvo que eran convergentes y otro que eran divergentes. Finalmente, el profesor realizó el estudio en la pizarra y se enuncia este criterio como una proposición y se completa la tabla de convergencias. Se aclara que se ha resuelto el ejercicio 16 de las hojas y se plantea el 17 para casa.

Al concluir este episodio se tiene:

- Se han combinado los registros gráfico y algebraico en la elaboración de la tabla.
- La iniciativa de repartir el trabajo entre los estudiantes ha resultado adecuada.
- Se ha realizado una puesta en común donde cada grupo ha expuesto sus resultados. El caso que quizá no haya quedado muy claro es el de la familia a^{kx}.
- Se ha debatido sobre la familia $1/x^k$ y se ha probado el criterio en la pizarra.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 2

De igual forma que se hizo con el análisis de la sesión anterior, separamos las observaciones hechas sobre el profesor de las observaciones de los estudiantes. Asimismo, distinguimos varias dimensiones en las observaciones de los estudiantes, orientadas por los objetivos planteados en esta sesión:

- Definición de la integrabilidad local
- Construcción de la tabla de convergencias
- Contrato didáctico y uso del debate
- Uso del registro gráfico
- Relaciones entre series e integrales

Señalamos que se ha realizado un cambio significativo en el desarrollo de la sesión, al dar un mayor tiempo al Episodio 2, lo que ha originado que los Episodios 3 y 4 no se llevaran a cabo. Todo ello conduce a un desajuste importante entre los objetivos planteados en el análisis *a priori* y los objetivos que se analizan en el análisis *a posteriori*.

Estudiantes:

Definición de la integrabilidad local:

Pensamos que la necesidad de la definición de integrabilidad local ha quedado clara con la gráfica realizada por el profesor en la pizarra (función con discontinuidad esencial en el intervalo de integración), lo que ha permitido a los estudiantes ver que los ejemplos tratados hasta el momento "funcionan". Se aclara que, en lo sucesivo, se trabajará siempre con funciones de esta clase. La definición parece no crear problemas a los estudiantes, pues no hay dudas y por la intervención de YG más adelante.

Posteriormente, se enuncia una consecuencia: dada una función localmente integrable, si se tiene que **una** integral impropia converge, entonces convergerá cualquier otra contenida en la anterior. Esto es:

$$f \text{ localmente integrable y } \int_a^\infty f(x)dx < \infty \Rightarrow \int_b^\infty f(x)dx < \infty,\ \forall b > a$$

porque "$\int_a^b f(x)dx$ *es de Riemann*" y "*la integral de b a infinito está comprendida ahí* [en $\int_a^\infty f(x)dx$]". Con este resultado, el profesor acentúa que el carácter de la integral impropia de una función es una propiedad local, que parece ser aceptado por los estudiantes. Una evidencia de esto se produce cuando YG afirma que el teorema del Episodio 1 debe ser cierto "*por lo que está escrito ahí* [la definición de integrabilidad local y la consecuencia]". Aunque luego JB tiene algún problema con este teorema (probablemente debido a que, en un primer momento no se escribe la demostración, sino se argumenta), luego afirma haberlo comprendido (una vez se escribe la demostración).

Otra posible evidencia de la aceptación de la definición de integrabilidad local se da al construir la tabla de convergencias. Cuando el profesor enuncia que no se estudiará la tangente por no ser localmente integrable ("*tiene infinitos picos*"), varios estudiantes asienten, lo que puede representar una evidencia de haber entendido la definición dada y la importancia de su uso.

Construcción de la tabla de convergencias:

En el momento de plantear su construcción se sugiere explícitamente la utilización del Criterio de Divergencia menos de dos minutos después de comenzar la reflexión ("*piensen que hay un método gráfico para ver la divergencia*"). Notamos que en el momento de agrupar las funciones por familias se aprecian ciertas dificultades para hacerlo:

- Los estudiantes sugieren familias lentamente.
- El profesor da algunas pistas ("*tenemos la inversa de ésta* [señala las exponenciales] *y quedaría...*").
- Aparece antes "rectas" que "polinomios".
- Un alumno (¿JH?) sugiere la función parte entera.

- Es el profesor quien hace ver que falta la inversa de los polinomios, $1/x^k$.

Estas dificultades para nombrar las familias elementales de funciones refuerzan nuestra conjetura de la Sesión 1 sobre el bajo nivel de los estudiantes. A pesar de ello, el desarrollo de este episodio es el que más de nuestros objetivos reúne. Por un lado, se produce una mayor participación de los estudiantes y un trabajo responsable por grupos, se realizan representaciones gráficas y se usan la definición de integral impropia y el Criterio de Divergencia y parece que se ha comprendido la importancia de la integrabilidad local. Se cumple el objetivo de operacionalizar las herramientas institucionalizadas por el momento.

Como se había previsto, la familia de funciones $1/x^k$ ocasionó dificultades, pero despertó la problemática, lo cual consideramos positivo. AG y MG obtuvieron que son divergentes (al evaluar $\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_a^b$ y no hacer consideraciones sobre el valor de k) y otros que son convergentes. Finalmente, el profesor realiza el estudio en la pizarra haciendo notar a los estudiantes la necesidad de diferenciar casos para distintos valores de k (al principio, al dividir entre $k - 1$, se impone $k \neq 1$. Una vez calculada la primitiva, explica *"en 'a' tampoco hay problema, luego lo que importa es* $\lim_{b\to\infty} b^{1-k}$*"*. Destacamos que es el alumno YG quien distingue los casos $k > 1$ y $k < 1$). Finalmente, se enuncia este criterio como una proposición y se completa la tabla de convergencias. Se aclara que se ha resuelto el ejercicio 16.

Sin embargo, un caso que quizá no haya quedado claro es el de las funciones del tipo a^{kx}; por falta de tiempo, tras haber probado el criterio para $1/x^k$, el profesor dice que se prueba igual y da el resultado. Para comprobar si los estudiantes han organizado toda la información, se les pedirá en la próxima sesión una copia de esta tabla.

<u>Contrato didáctico y uso del debate:</u>

Se observa en esta sesión una mayor participación por parte de los estudiantes. Esto puede estar motivado por alguna de las siguientes razones:

- El profesor, en esta sesión, aprueba explícitamente las intervenciones de los estudiantes fuera de momento de debate.
- Se va produciendo una aceptación paulatina del nuevo contrato didáctico.
- Los contenidos de esta sesión (en particular la tabla de convergencias) promueven más la intervención. Por otro lado, hay un trabajo previo de reflexión individual-grupal que facilita las aportaciones de los estudiantes.

Los momentos de mayor (y más variada) participación han sido:

- Agrupamiento de las funciones conocidas en familias.
- Análisis de la convergencia de las integrales propuestas (en los grupos de trabajo).
- Puesta en común de los resultados.

Otro recurso puesto en marcha en esta sesión, como consecuencia del análisis de la anterior, ha sido el de dividir las tareas propuestas entre el total de la clase, para centrar la atención de los estudiantes. En el momento de construir la tabla de convergencias se hacen cinco grupos y se reparten las familias de funciones. Aunque esto puede desconcertar a algunos estudiantes, posteriormente se produce un momento fructífero de trabajo personal-grupal y de debate de los resultados en cada grupo. El profesor aprovecha este momento para acercarse a cada grupo y realizar una observación más cercana. Finalmente, durante la puesta en común, intervienen estudiantes que no habían participado hasta el momento.

La buena aceptación de esta tarea provoca que el profesor introduzca una alteración en la organización de la Ingeniería y deje que la actividad se desarrolle con normalidad y sin prisas y que los estudiantes se responsabilicen de la tarea que se les ha dado. Pensamos que los estudiantes se han hecho responsables de la actividad y han hecho suya la construcción de la tabla de convergencias.

Por otro lado, el hecho de que el profesor haya adoptado por algunos minutos el rol de "profesor" y haya enunciado y demostrado resultados (lo que los alumnos suponen que debe hacer el profesor) creemos que ha producido que los estudiantes doten al profesor de una autoridad que no tenía hasta el momento. En esta sesión los resultados han sido institucionalizados y los alumnos han percibido los cambios en el contrato didáctico.

Opinamos que en las actividades llevadas a cabo se ha realizado la devolución. Los alumnos se han responsabilizado de la tarea encargada y han colaborado en la construcción de la tabla.

Uso del registro gráfico:

Al comienzo de la sesión el profesor prueba en el registro algebraico que si $f(x) \geq k > 0$, a partir de un cierto valor, entonces su integral es divergente y expone a los estudiantes que el argumento gráfico expuesto en la sesión anterior (por YG) es correcto.

Para introducir la definición de integrabilidad local, se presenta un ejemplo también en el registro gráfico.

Durante la construcción de la tabla de convergencias algunos estudiantes han mostrado evidencias de pensar gráficamente los argumentos para decidir el carácter de sus integrales. Por ejemplo:

- JB y EG reconocen que es totalmente nuevo para ellos pensar gráficamente. De hecho, su estrategia para decidir el carácter de la integral de las funciones trigonométricas consistía en evaluar su convergencia absoluta.
- El grupo formado por WD, AB y CF abordó sus integrales (función constante y potenciales) en el registro algebraico. No obstante, cuando el profesor les sugirió el uso del Criterio de Divergencia, lo utilizaron sin reticencias y probaron los mismos resultados con él.
- Los alumnos YG, JH, AC, YC, LP y DC tuvieron problemas para calcular la primitiva de la función logaritmo, lo que refuerza nuestra conjetura sobre las carencias técnicas de los estudiantes. Cuando se les sugirió que pensaran gráficamente, rápidamente utilizaron el Criterio de Divergencia y discutieron entre ellos los resultados.

Vemos que, aunque aún hay una predisposición a utilizar el registro algebraico, los estudiantes parecen ver las ventajas del registro gráfico y aceptarlo en su trabajo.

Relaciones entre series e integrales:

No se ha producido ninguna intervención al respecto por parte de los estudiantes de forma espontánea. Estaba previsto que el profesor preguntara si estos resultados les sonaban, pero no se ha hecho.

El profesor:

Tal como se había previsto, el profesor ejerce su rol de institucionalizador al principio de la sesión y aclara los resultados de la sesión anterior. Se institucionaliza la definición de integral impropia de primera especie, aclarando que el uso o no de la primitiva de la función dará lugar al desarrollo de técnicas diferentes.

En esta sesión el profesor decide aprobar todas las intervenciones correctas de los alumnos fuera de momento de debate (por ejemplo, la intervención de YG antes de probar el teorema-propiedad de la integrabilidad local. No pone en duda la explicación de este alumno y afirma su veracidad). Observamos que, posteriormente, más alumnos se animan a participar (aunque aún tímidamente).

Como se había previsto, ha sido necesaria su intervención[212] en el estudio de la integral de las funciones del tipo $1/x^k$ y hacer notar a los estudiantes la necesidad de diferenciar casos según los valores de k.

Algunas consecuencias:

En primer lugar, hay que reestructurar las actividades previstas de forma que se dé mayor tiempo a las actividades de tipo grupal, pues vemos que:

- Los estudiantes evidencian grandes carencias en los conocimientos anteriores.
- La puesta en marcha de debates científicos y la implicación del grueso de la clase (con sus limitaciones algebraicas y falta de costumbre a trabajar en grupo) lleva más tiempo del inicialmente estimado.

Por otro lado, debido al retraso acumulado en esta sesión, habrá que reacomodar las actividades previstas en las próximas sesiones.

Se ha observado también un efecto positivo en la decisión de aprobar explícitamente las intervenciones de los estudiantes fuera de momento de debate, lo que anima a los estudiantes a participar de forma cada vez más activa y llegar a algún momento de diálogo. Tenemos la impresión de que los estudiantes han sacado ideas en claro de esta sesión y que la experiencia de ser miembros activos en la construcción del conocimiento les agrada.

Como consecuencia, extraemos que nuestros estudiantes no estaban preparados en absoluto para un debate científico en condiciones en la Sesión 1, fuere el *medio* que fuere el utilizado. El hecho de dedicar casi toda la primera sesión al debate chocó con el contrato didáctico que los alumnos esperaban, luego es necesaria una entrada gradual en el nuevo contrato.

Para próximas sesiones desprendemos las siguientes consecuencias:

---

[212] Como se aclara en la Sección 4.1.2., en las Ingenierías Didácticas desarrolladas en el nivel universitario, las mediaciones del profesor, incluso en las fases a-didácticas, juegan un papel más importante.

- El profesor deberá seguir ejerciendo su “rol de profesor” y enunciar y demostrar resultados. Este simple hecho hace que los estudiantes lo vean como portador de conocimiento. Una vez que el profesor muestra su “autoridad”, su decisión de romper el contrato didáctico y promover un debate, o un trabajo en grupo, es acogida más positivamente por los alumnos.
- El desarrollo de la Sesión 2 obliga a reestructurar el resto de sesiones. Las actividades desarrolladas muestran el escaso bagaje de nuestros alumnos y, más grave, la falta de confianza en lo que saben. Por esta razón, opinamos que quizá haya que descargar la Ingeniería de los momentos de mayor formalismo en beneficio de conseguir una mayor implicación de los estudiantes en actividades más sencillas.

5.2.3. ANÁLISIS DE LA TERCERA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 3

Se comienza la sesión un poco después de las 10:30 (los viernes ésta es la hora de la clase) y los estudiantes se encuentran en su mayoría en el aula (21 estudiantes en total). Cuatro alumnas entregan sus fichas de identificación.

La distribución de los estudiantes es la siguiente:

IG, SM, NA, CC	AC, JH, YC, LP, YG, DC
	NB, NG
FG, MI, SD, RA	
WD, AB, CF	AG, MG

Episodio 1:

Se realiza lo previsto en menos tiempo del programado (unos 3:22 minutos, a los que hay que añadir un minuto en el que el profesor da sus horarios de tutorías y la localización de su despacho).

Se recuerda la definición de función localmente integrable (aunque no la consecuencia obtenida) y que se elaboró una tabla de convergencia de integrales conocidas y se pide a los estudiantes una copia de la tabla elaborada para la próxima sesión.

Posteriormente, se enuncia de nuevo el resultado con la convergencia de la familia $1/x^k$ y se escribe el resultado de los casos particulares $1/x$ y $1/x^2$. Se pregunta a los estudiantes si este resultado les resulta conocido (en la sesión anterior no se preguntó nada). A esta cuestión hay respuestas afirmativas: YG y SM afirman que les recuerda las sucesiones y WD dice que las series y algunos alumnos afirman que no les suena. Se emplea por primera vez la técnica de pedirles que levanten el brazo para ver qué opinan.

Al finalizar este episodio tenemos:

- Se han revisado los contenidos principales de la sesión anterior.
- Se ha pedido que entreguen al profesor una tabla de convergencias para la siguiente sesión.
- Hay evidencias de estudiantes que han visto el paralelismo entre los resultados obtenidos de convergencia y los resultados de series.

Episodio 2:

Se pregunta a los estudiantes qué tipo de resultados pueden distinguir para el límite de una función positiva en el infinito. Se les organiza por grupos y se les da tiempo para debatirlo (unos 12:28 minutos); el profesor se va acercando por los grupos y respondiendo dudas. Aunque a algún grupo hubo que aclarar lo que se preguntaba, en general queda claro el planteamiento de la actividad. Los estudiantes aceptan con pocas reservas que el profesor les diera una hoja para entregar con sus conclusiones. Se forman los siguientes seis grupos:

- CC, IG, NA, SM
- FG, MI, RA, SD
- AB, CF, WD
- DC, NB, NG, YG
- AC, JH, LP, YC
- AG, MG

Los estudiantes debaten entre sí y tratan de argumentar sus razones ante sus compañeros. Posteriormente se procede al debate y los estudiantes aportan los casos que estudiaron (aparecen las cuatro posibilidades esperadas). Se completa rápidamente la tabla y YG aporta que la función puede no tener límite y que, en este caso, no se puede decir nada de la integral (su grupo es el único que considera esta opción).

En este momento, el profesor dice que se construirá un ejemplo a partir de las series. Al preguntar por una serie que sepan que converge, inmediatamente una alumna (WD o AB) propone $1/x^2$. La construcción del ejemplo parece clara y los estudiantes asienten durante su construcción y deducen las bases de los rectángulos.

Se especifica también que se ha visto un ejemplo de función no acotada que encierra un área acotada y esta sentencia se recuadra en color. Por otro lado, se dice a los alumnos que se seguirán usando algunas series para construir contraejemplos.

Al final de este episodio el balance es el siguiente:

- Se construye la tabla deseada con las aportaciones de los estudiantes, dando ejemplos y contraejemplos en cada caso.
- El profesor construye el contraejemplo de una función sin límite en el infinito con integral convergente en el registro gráfico.

Episodio 3:

El profesor presenta la función $F(x)$ y deduce sus propiedades con ayuda de los estudiantes. Guiados por el profesor, se concluye que será no negativa y no decreciente. Se usa la gráfica de la función sin límite recién construida para ilustrar que $F(x)$ es no negativa y no decreciente.

Tras esto, se plantea que $F(x)$ puede estar acotada o no estarlo y se comenta que se estudiará el carácter de las integrales a partir del comportamiento de la función integral.

Se enuncia el teorema y se demuestra. Aquí se señala con color amarillo la segunda parte del teorema y parece que quedan claras las dos partes. Los estudiantes parecen seguir la demostración y participan cuando se les pide.

Se tiene:

- Se presenta formalmente la función $F(x)$ y se deduce que será no negativa y no decreciente.
- Se enuncia y demuestra el teorema que identifica la convergencia de la integral de $f(x)$ con la acotación de $F(x)$.

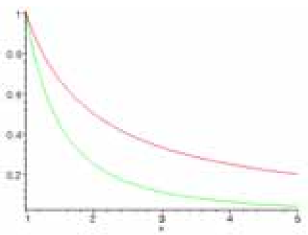
<u>Episodio 4:</u>

El profesor plantea a los estudiantes la situación en que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, así como qué conclusiones pueden sacar. Se les pide que piensen en términos de áreas.

JH saca las conclusiones y los demás parecen compartirlas. Por otro lado, los estudiantes enuncian también que la divergencia de $g(x)$ y la convergencia de $f(x)$ no aportan nada.

Se procede al enunciado y demostración del teorema en un intervalo $[a, b)$ genérico y los estudiantes van asintiendo y parecen seguirlo. Finalmente, el profesor añade al final una k y hace ver que no afecta al resultado final.

Una vez demostrado, el profesor dice a los alumnos que no deberían memorizar el enunciado, sino visualizar la imagen de la situación planteada:



Se tiene:

- Los estudiantes deducen el Criterio de Comparación. Posteriormente, se institucionaliza y demuestra.
- Se usa activamente el registro gráfico en el razonamiento previo y la función integral en la demostración.

<u>Episodio 5:</u>

El profesor comenta que, para ilustrar cómo utilizar este criterio, se resolverán algunos ejercicios y se resuelven el 19-e y el 18-e.

Los estudiantes parecen ir comprendiendo los diferentes pasos y van participando cuando se les pide. El profesor tiene que especificar que $\ln x < x$ y realiza una gráfica. También dibuja la función $\tan x$ para que vean que la $\arctan x$ está acotada.

Por último, se les hace ver que, en el caso de comparar con funciones $1/x^k$ es necesario asegurar que la integral no contiene al cero.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 3

Siguiendo el esquema habitual, en las observaciones hechas sobre los estudiantes distinguimos las siguientes dimensiones, de acuerdo con los objetivos planteados:

- Estudio de $F(x)$ a partir de propiedades locales y globales del integrando.
- Construcción de contraejemplos.
- Criterio de Comparación.
- Similitudes con los resultados sobre series.
- El contrato didáctico.
- Uso del registro gráfico y del Criterio de Divergencia.
- Gestión del tiempo.

Estudiantes:

Estudio de F(x) a partir de propiedades locales y globales del integrando:

En el Episodio 2 se trabaja informalmente la relación entre las propiedades locales en el infinito de $f(x)$ y la acotación de $F(x)$. Al comienzo de la actividad hay que aclarar la pregunta al grupo de AG y MG y a YG y, durante el desarrollo, vuelve a aclarar al grupo de FG, MI, RA y SD y al de CC, IG, NA, SM. Estos dos últimos grupos son los que responden de forma menos correcta), parece que luego queda claro a los estudiantes. La exposición incluye las siguientes frases:

- "*Lo primero que vamos a hacer es plantearnos si el comportamiento de una función en el infinito va a influir o no en la integral*".
- "*Hemos visto ya un Criterio de Divergencia y también resultados de convergencia*".
- "*Si les digo que f es no negativa y les pregunto* [escribe:] ¿$\lim_{x\to\infty} f(x)$ *? ¿Qué respuestas hay?*"
- "*Buscar comportamientos de funciones y deducir el de su integral, si se puede decir algo*".
- "*¿Qué tipo de posibilidades hay para el límite de una función cuando x tiende a infinito?* [...] *Intenten agrupar* [...]. *Y después intenten deducir: pues si el límite de una función es tal, pues la integral, entonces, yo creo que va a ser tal... Si creen que lo pueden garantizar. Si creen que no pueden garantizar nada...*"

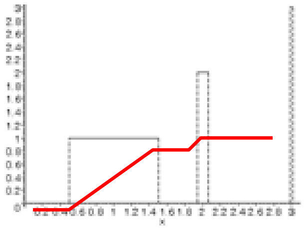
Sin embargo, el análisis de las respuestas de la Ficha 1 revela que quizá no todos los estudiantes tuvieron claro cómo contestar. Tal como se había previsto, el caso "no tener límite" es el más complicado para los estudiantes. Esto se puede deber a dos causas, principalmente:

- El nivel académico de los estudiantes y falta de ejemplos explícitos[213] (pues conocen el seno y coseno, que no tienen límite).
- El enunciado de la pregunta produce una tendencia a pensar en casos de funciones con límite, y no plantea la opción de no tener límite.

En caso de ser la segunda causa, esto nos llevará a plantearnos algunas consecuencias más adelante.

Después de la construcción del contraejemplo, es el profesor el que presenta la función $F(x)$ y deduce sus propiedades globales con ayuda de los estudiantes ("*Si f(x) es no-negativa, entonces esta función nos da el área* [...]. *Vamos a tratar de deducir dos propiedades de F*"). Su signo se deduce rápidamente, aunque sólo se explicita que será positiva y el profesor puntualiza que, en el peor de los casos, será nula. La cuestión de la monotonía resulta más difícil. De hecho, en un primer momento, cuando el profesor pregunta qué se puede decir de su monotonía, YG afirma que "*nada*". En este momento el profesor interviene y especifica que siempre se añade área positiva o nula y rápidamente YG concluye que la función será creciente (el profesor aclara que, a lo sumo, no decreciente). El profesor recurre al contraejemplo construido para ejemplificar el comportamiento de $F(x)$ (señalando que en los trozos donde f es nula, F permanece constante).

[213] Ya se ha hablado en los análisis anteriores de las evidencias de un aprendizaje algorítmico por parte de los estudiantes, con presencia de ejemplos prototípicos.



Tras esto, el profesor plantea que $F(x)$ puede estar acotada o no estarlo y comenta que se estudiará el carácter de las integrales a partir del comportamiento de la función integral. Con esto, el profesor enuncia y demuestra el teorema, señalando con tiza amarilla la segunda parte para diferenciarla de la anterior; los estudiantes, a pesar de sus carencias (por ejemplo, cuando el profesor pregunta por el signo de $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ se produce silencio y debe insistir para que alguien diga "*positivo*", aclarando después que será mayor o igual que cero), siguen la demostración y participan cuando se les pide (aunque en el momento recién citado haya que insistir. En la segunda parte, al escribir que $\lim_{x\to b} F(x) \neq k$ [214] y ser F creciente pregunta qué puede suceder y un estudiante afirma que tenderá a infinito).

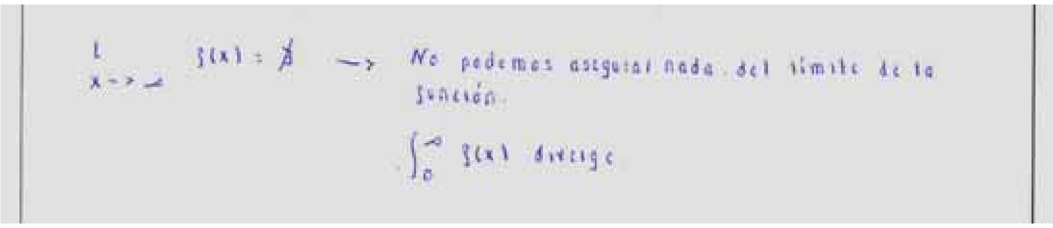
Durante la demostración del Criterio de Comparación, como se había previsto, se utilizan las funciones $F(x)$ y $G(x)$ y se aclara: "*por el teorema anterior, hablar de la acotación de estas funciones es lo mismo que hablar de la convergencia de las integrales impropias*". Los estudiantes parecen entender el resultado.

Sin embargo, en vista de las intervenciones a este respecto, presumimos que el concepto de función integral necesitará ser revisado y reforzado, pues no es evidente que los estudiantes lo hayan comprendido[215]; más bien parece que se limitan a aceptarlo.

<u>*Construcción de contraejemplos:*</u>

Tal como se había previsto, ningún estudiante ha podido construir un contraejemplo adecuado para mostrar que hay funciones sin límite en el infinito con integral convergente. La construcción de esta sesión, utilizando resultados de series, pretende ser una "introducción" a la búsqueda y construcción de tales funciones.

También era previsible que los estudiantes no señalaran la posibilidad de funciones sin límite. En este sentido, la aportación de YG a su grupo y, posteriormente, a la clase resulta de gran valor. Aunque en la Ficha 1 su grupo escribió que estas integrales divergen:



[214] La segunda parte del teorema dice que "Si F diverge, lo hace necesariamente hacia $+\infty$". En la primera parte se ha demostrado que $F(x)$ es creciente y se usa de nuevo para probar que si F es divergente ($\lim_{x\to b} F(x) \neq k$), como es creciente, necesariamente ha de tender a $+\infty$.

[215] Véase Carlson *et al* (2003).

en su intervención en el gran grupo afirma que cuando la función no tiene límite no se puede concluir que la integral diverge, sino que su carácter no se puede predecir (quizá el hecho de que en la Ficha 1 se escriba otra cosa se debe a que el encargado de escribir se confundió, o a que YG no logró convencer a su grupo).

La intervención del profesor para construir el contraejemplo no parece haber producido muchas dificultades en general. El profesor dice que se construirá a partir de una serie convergente y pregunta por alguna conocida, siendo WD quien propone $1/x^2$ (tal como se había previsto, pues $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es la serie convergente por excelencia en los cursos de Primero). Además, se ve a varios estudiantes asentir durante la construcción y la base de los rectángulos para el caso $n = 3$ la pregunta el profesor; al principio hay silencio, pero a los 40 segundos un estudiante (¿YG?) dice que será $1/3^3$.

Por último, el profesor recalca (y lo escribe claramente en la pizarra) que, también, se ha construido un ejemplo de función no acotada que encierra un área acotada[216]. Se dice a los estudiantes que se seguirá usando algunas series para construir contraejemplos (“*En adelante buscaremos más contraejemplos y usaremos series*”), lo cual sirve para hacer ver que este tipo de construcciones se hará más frecuentemente.

Como se había previsto, la construcción del contraejemplo parece ser comprendida por los estudiantes. En posteriores actividades se evaluará si los estudiantes son capaces de construir sus propios contraejemplos a otras cuestiones.

Criterio de Comparación:

El uso del registro gráfico parece ser cada vez más útil a los estudiantes. En este caso, es el profesor el que plantea la interpretación en términos de áreas (dadas $0 \le f(x) \le g(x)$, ¿qué se puede decir?) y rápidamente aparecen conclusiones (JH dice en primer lugar que las integrales respectivas “*cumplen también la desigualdad*”[217] y al preguntar el profesor “*¿Y qué conclusiones podemos sacar del carácter de las integrales?*”, contesta correctamente y sin vacilación) que, en este caso, son compartidas por varios compañeros (se producen asentimientos). El profesor plantea si la divergencia de $g(x)$ y la convergencia de $f(x)$ aportan algo y parece quedar claro que no, pues se ven movimientos de cabezas y algún estudiante dice “*no*”.

El enunciado del criterio, después del trabajo colectivo, no presenta problemas y la demostración parece quedar clara (no se producen incidencias y nadie pregunta nada). El hecho de añadir la k una vez probado el resultado no parece ofrecer problemas (el profesor la añade en cada línea de la demostración, recalcando que no afecta. Por último, comenta que en el corolario que se enunciará en la siguiente sesión será necesaria).

La parte que parece ofrecer mayores dificultades a los estudiantes es la operacionalización de este criterio. Teniendo en cuenta el Episodio 5, creemos que las carencias de los estudiantes con el manejo de funciones condicionan el desarrollo de muchas actividades. En este caso, en vez de fijar la atención en el hecho de que hay que dividir la integral en dos para aplicar correctamente el criterio, parece que los estudiantes se concentran más en el hecho de

[216] Lo cual combate el obstáculo de *ligación a la compacidad*.

[217] Se trata de una respuesta no prevista que muestra un conocimiento de esta propiedad en el caso definido.

acotar las funciones arctan x y ln x (la mayor parte del tiempo de este episodio se va en justificar estas acotaciones).

<u>*Similitudes con los resultados sobre series:*</u>

Como se había previsto, el profesor, al comienzo de la sesión, recuerda el resultado de convergencia de las integrales de las funciones $1/x^k$ y añade los resultados particulares de las funciones $1/x$ y $1/x^2$. Tras esto, pregunta a los estudiantes si este resultado les resulta conocido o si les suena de alguna otra asignatura[218] ("*Este resultado de aquí, ¿les suena? ¿Recuerdan haberlo visto anteriormente?*"). A esta cuestión se obtienen respuestas afirmativas: YG dice que a sucesiones (y SM se suma) y la alumna WD dice que a series (y CC asiente); a otros estudiantes no les suena (se ven movimientos de cabeza negativos). Ante la falta de decisión de la mayoría, se pide que alcen las manos y se obtiene, aunque no participen todos:

- YG, JH, WD, AB, SM ... afirman que les suena.
- MG, NB, AG... afirman que no les suena.

Los resultados obtenidos no contradicen nuestro análisis *a priori*. Se había previsto que quizá algunos estudiantes se dieran cuenta del parecido entre los resultados, aunque también era posible que en este momento aún no fuera claro. El hecho de explicitar el resultado para el caso de $1/x$ y $1/x^2$, además de explicitar dos casos que se usarán con frecuencia, tiene por intención provocar que sea más fácil el reconocimiento de parecidos.

Nuevamente, parece claro que los estudiantes que tienen menos dificultades en recurrir al conocimiento matemático previo son YG, JH, WD, SM y AB.

<u>*El contrato didáctico:*</u>

En esta sesión se introducen dos novedades:

- Una nueva variante que el profesor ha introducido en su rol institucionalizador ha sido el **uso de tizas de colores en la pizarra**, cuyo efecto consideramos totalmente positivo, pues ayuda a señalar la distribución que se hace de la pizarra y las diversas partes de los resultados enunciados. Aunque algunos estudiantes hayan mostrado sorpresa al principio, las cosas han quedado mejor distribuidas en esta sesión.
- Se emplea la técnica de **pedir a los estudiantes que levanten el brazo para saber qué opinan** en determinadas cuestiones, evitando así la actitud pasiva habitual y aportándonos mayor información. Aunque con algunas reticencias (no todos los estudiantes participan), muchos estudiantes han acabado haciéndolo y lo aceptan de buen humor.

En esta sesión nos mostramos muy entusiastas con las reacciones de los estudiantes:

- Respuestas inmediatas a la pregunta sobre relaciones entre series e integrales.
- Aunque no lo hacen todos, los estudiantes levantan la mano cuando se les pide.
- YG sigue igual de participativo (o más). Además, hace buenas aportaciones generalmente.

[218] Tall (1992a) señala como una de las consecuencias de un aprendizaje algorítmico la compartimentación de los conocimientos que se adquieren.

- JH se muestra cada vez más participativo: construcción de la tabla resumen de la Ficha 1, y concluye inmediatamente los resultados del Criterio de Comparación, entre otros.
- La estudiante WD también se anima más a intervenir.
- En los debates grupales participan estudiantes que no han participado en el gran grupo (como SD, DC, AG y MG, NG, NB...).
- Durante el trabajo con la Ficha 1 se ve auténtico diálogo y debate entre los miembros de cada grupo.

Como se puede ver en la Ficha 1, el trabajo en pequeños grupos ha resultado productivo y los estudiantes se han apropiado de la cuestión presentada en el Episodio 2. Además, han aceptado con pocas reservas (los primeros alumnos en recibir la ficha más bien se sorprenden, pero el profesor aclara "*No son exámenes. Es para ver qué ideas tienen*") que el profesor les diera una hoja para escribir sus conclusiones. Se observa que algunos estudiantes que no han participado aún en el gran grupo sí intervienen en el pequeño grupo de trabajo (como AG y MG, NG, CC, YC...), lo cual concuerda con nuestra hipótesis inicial de que uno de los motivos de no participar en los debates, además de la inseguridad, es la falta de costumbre de hablar en público (que, por otro lado, multiplica la inseguridad en lo que se sabe). En el tiempo dado para el trabajo grupal (12:28 minutos, incluyendo el momento de formación de grupos, la entrega de fichas y su recogida) se ha observado que los estudiantes argumentan entre sí y tratan de argumentar sus razones con sus compañeros.

En el debate consecuente los estudiantes aportan los casos estudiados en sus grupos:

- JH interviene distinguiendo, cuando el límite es finito, los casos en que sea cero o igual a $k \neq 0$;
- el alumno AC, cuando el límite no es finito, distingue el caso $\pm\infty$;
- YG añade el caso en que no existe límite y afirma que, en él, no se puede decir nada de la integral;
- hay más intervenciones individuales (pero no queda claro en la grabación quién las hace)

y se completa la tabla en la pizarra. Cada vez más se observa una aceptación del nuevo contrato didáctico, con una participación mayor de los estudiantes (aparece la primera intervención de AC. Además, el intercambio con el profesor es mucho más fluido y se responden todas las preguntas formuladas).

En el Episodio 3 también hay una participación de los estudiantes para deducir las propiedades de $F(x)$ (un estudiante deduce que será positiva y YG, aunque primero dice que no se puede añadir nada de la monotonía, luego dice que será creciente).

En el Episodio 4 intervienen los estudiantes (destacando JH) para deducir las relaciones entre la convergencia de las integrales de $f(x)$ y de $g(x)$.

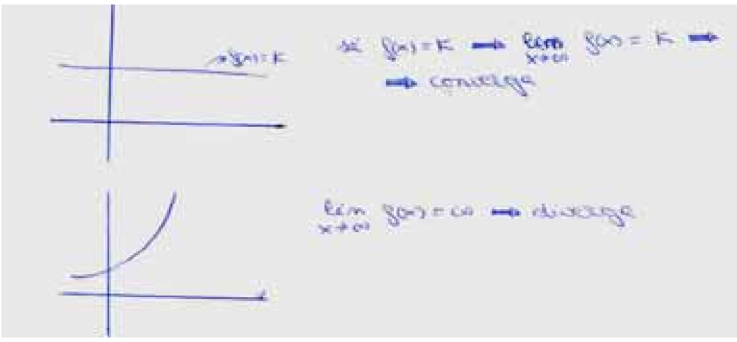
Finalmente, en el Episodio 5, en distintos momentos de la resolución de los ejercicios hay participaciones, pero no se identifican claramente en la grabación.

En el análisis *a posteriori* de la Sesión 1 habíamos enunciado la conjetura de una aceptación progresiva del nuevo contrato didáctico que parece confirmarse a lo largo de las sesiones. Cada vez, más estudiantes aportan sus opiniones y aceptan las tareas propuestas, mostrando una apropiación de éstas.

Uso del registro gráfico y del Criterio de Divergencia:

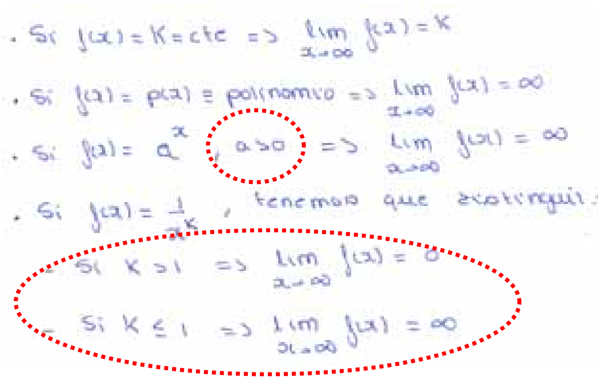
Uno de los elementos que apoyan nuestra conjetura de que los estudiantes van dotando al registro gráfico de un mayor estatus matemático lo encontramos durante el desarrollo del Episodio 2. Una vez analizadas las fichas recogidas, destacamos que todos los grupos han utilizado argumentos gráficos para justificar sus respuestas. Aunque el grupo de DC, NB, NG y YG no realiza gráficas en la Ficha, sí debaten con razonamientos gráficos.

- El grupo de FG, MI, RA y SD es el que menos avanza. Se quedan en el comportamiento de la función, sin relacionarlo con el comportamiento de la integral. Por otro lado, vemos que identifican el término "*tiende a un valor*" con "*converge*" en el caso de funciones:



Además, afirman que "*una función f*(x) *no negativa en el infinito puede converger o diverger*", con lo que no consideran el caso de no tener límite[219].

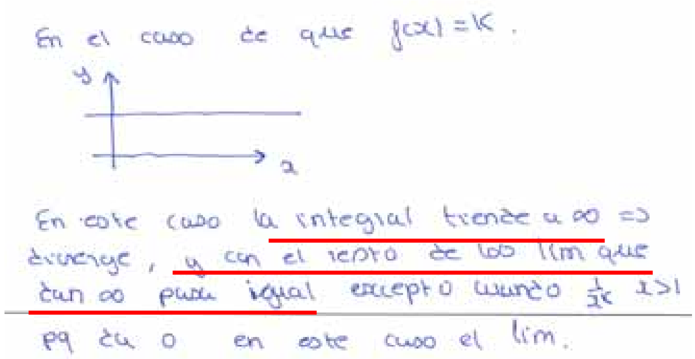
- CC, IG, NA y SM también parecen un poco perdidas al principio. Básicamente, agrupan las funciones conocidas en familias (como se hizo para la tabla de convergencias) y calculan el límite de cada una (con errores de tipo algebraico en la familia $1/x^k$ y a^x):



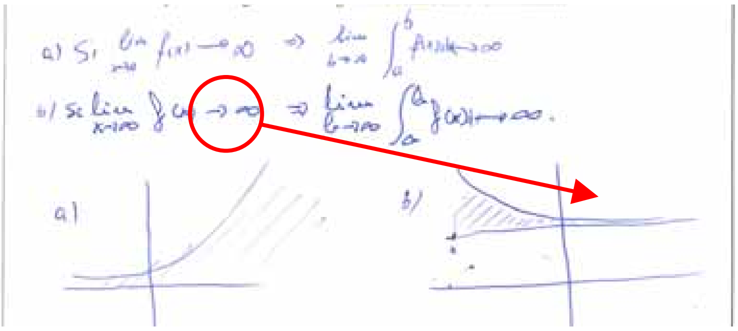
Hecha esta agrupación, se disponen a deducir el comportamiento de la integral en cada caso, aunque sólo pueden abordar el primero de ellos (pero se aprecia que han asimilado el Criterio de Divergencia, pues afirman que "*con el resto de los lim. que dan* ∞ *pasa igual* [la integral tiende a ∞]"). Probablemente la brevedad se debe a la falta de tiempo. Si

[219] No creemos que incluyan el caso "no tener límite" dentro del término "divergir".

la falta de tiempo se debe a que tardaron en calcular los límites, esto podría ser un síntoma de las dificultades que los conocimientos previos suponen para estas estudiantes.

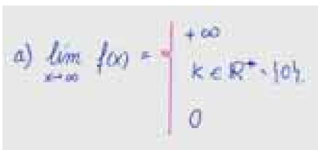


- Los estudiantes AG y MG (suelen parecer despistados durante las sesiones), a pesar de su inicial confusión, arrancan bien. Sin embargo, sólo distinguen los comportamientos "*tender al infinito*" y "*tender a una constante*", siendo en ambos casos las integrales divergentes.



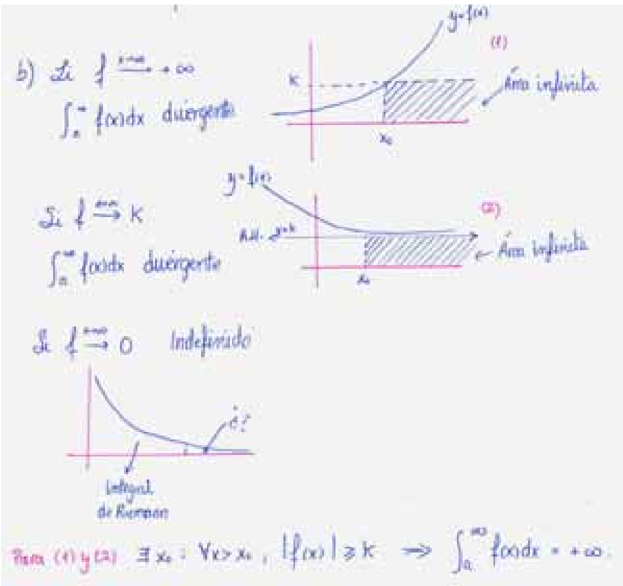
Parece evidente (en vista de la representación gráfica del caso *b*) que consideran el caso en que el límite tiende a una constante $k > 0$, por lo que el escribir "$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$" se trataría de un error meramente ejecutivo.

- El grupo de AB, CF y WD considera todas las opciones posibles (salvo que no exista el límite)



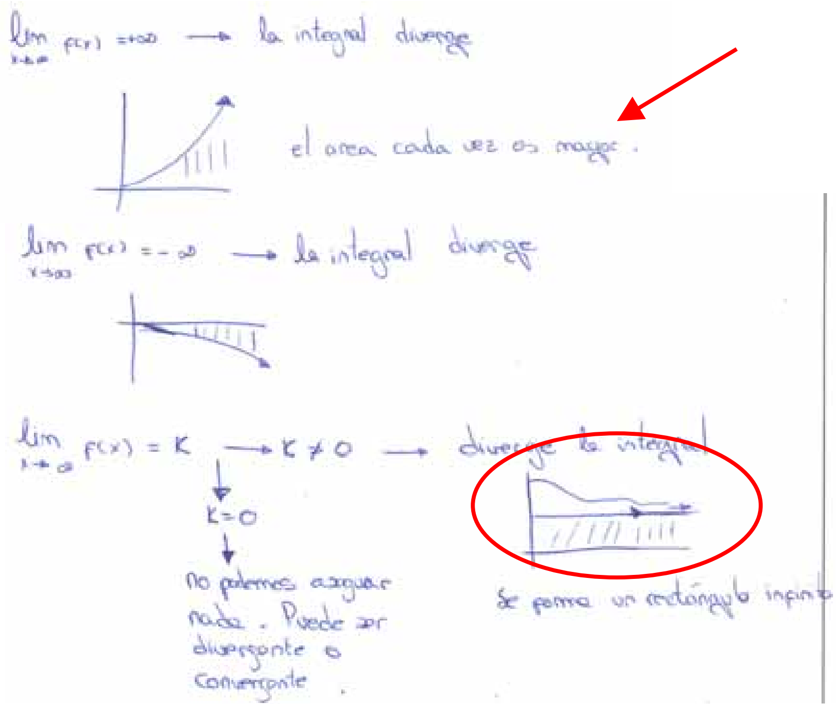
y, mediante argumentos gráficos (complementados con explicaciones algebraicas), muestran sus conclusiones[220]. Tienen claro que el hecho de que la función tienda a cero no implica nada.

[220] Según Richard, se ve en estos razonamientos ejemplos de inferencias figurales (ver Richard, 2004) de estructura binaria. Por ejemplo, de la proposición "$f(x) \to \infty$" se infiere la proposición "$\int_a^\infty f(x)dx$ diverge" gracias a la gráfica de la derecha. Los estudiantes se basan también en las propiedades espaciales del área y en su significado instituido.



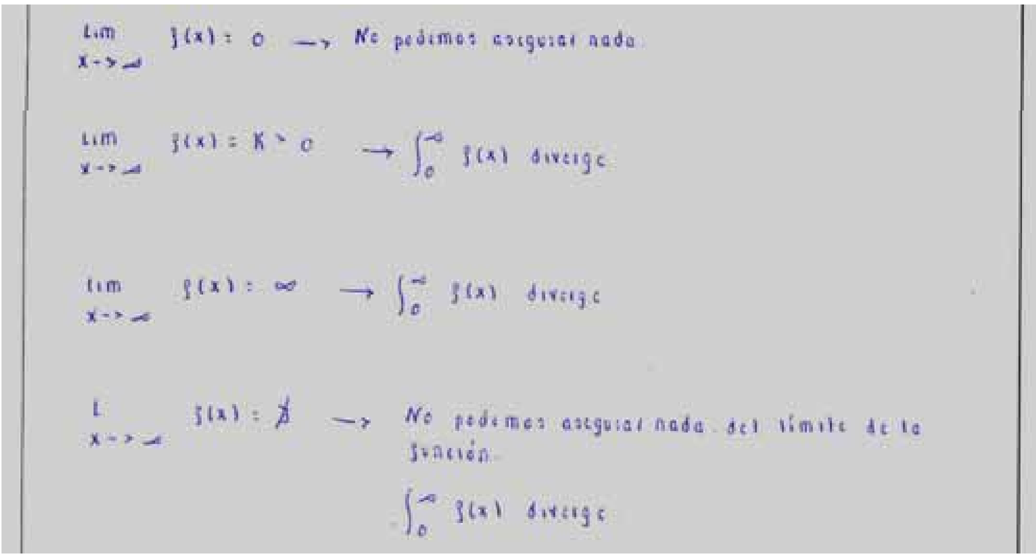
Destacamos el hecho de que, en la sesión anterior, este grupo abordó sus integrales algebraicamente y, cuando el profesor les propuso hacerlo gráficamente, aceptaron de buen grado. Quizá el hecho de que esta vez recurran directamente el registro gráfico suponga una aceptación implícita de éste.

- AC, JH, LP y YC debaten activamente y argumentan gráficamente. Distinguen todos los casos posibles (salvo que no exista el límite; a cambio, añaden el caso en que el límite es -∞) y estudian el carácter de la integral con dibujos (éste es el único grupo que adjunta la gráfica de una función no monótona). En el caso en que la función tiende a cero, afirman que “*no podemos asegurar nada. Puede ser divergente o convergente*”.



El comentario señalado suponemos que tiene un carácter adicional, una observación al dibujo, pues el hecho de añadir siempre área (y que el área sea cada vez mayor) no implica la divergencia.

- Finalmente, el grupo de DC, NB, NG y YG es el único que distingue todos los casos posibles, incluso que no exista el límite (este caso lo aporta YG). Este grupo no realiza ninguna gráfica, aunque mientras debaten utilizan las notas de clase y el Criterio de Divergencia. Separan todos los casos con gran claridad y analizan correctamente el comportamiento de las integrales.



$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \to$ No podemos asegurar nada

$\lim_{x \to \infty} f(x) = K > 0 \to \int_0^{\infty} f(x)$ diverge

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \to \int_0^{\infty} f(x)$ diverge

$l_{x \to \infty} f(x) = \nexists \to$ No podemos asegurar nada del límite de la función.

$\int_0^{\infty} f(x)$ diverge

La aportación de YG al gran grupo no parece quedar clara a sus compañeros. Cuando dice que no se puede decir nada del límite ni de la integral ningún estudiante interviene; y cuando el profesor pregunta a la clase si tienen algún ejemplo o no, tampoco. Además, es claro que ninguno de los otros grupos consideró este caso, pues el profesor pregunta a cada uno y ninguno responde afirmativamente. Este hecho está en acuerdo con nuestro análisis *a priori*, pues se había considerado esta posibilidad[221].

Destacamos que los dibujos realizados por los estudiantes muestran una concepción monótona de la convergencia (Artigue, 1995a). Todas las gráficas de una función que tiende a una constante $k > 0$ (salvo la realizada por YC, AC, LP y JH) muestran una función monótona decreciente. Esto puede evidenciar el pequeño repertorio que manejan los estudiantes, o simplemente mostrar la fuerza del uso de representaciones estereotípicas en la enseñanza, que en ocasiones favorecen la no-flexibilidad del pensamiento y producen falsas concepciones.

En el caso de una función decreciente, la gráfica muestra claramente la divergencia de la integral. Pero si la función no fuera decreciente, sino que oscilara o creciera tendiendo a k (Figura 5.2.), el dibujo de un rectángulo de altura k bajo la función no sería posible. En este caso, habría que buscar un $k' < k$ para dibujar un rectángulo bajo la función, lo que generaliza el razonamiento empleado por los estudiantes.

[221] Lo que está de acuerdo con Calvo (1997), que afirma que los estudiantes manejan aspectos de gran formalismo sin haber desarrollado ideas intuitivas de muchos conceptos.

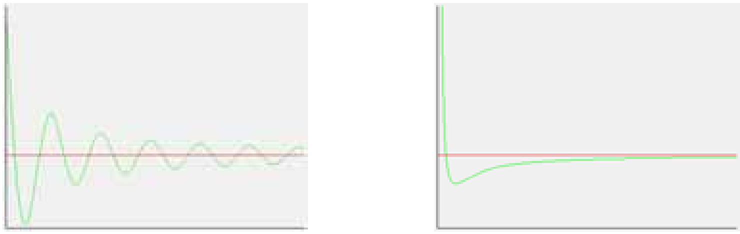
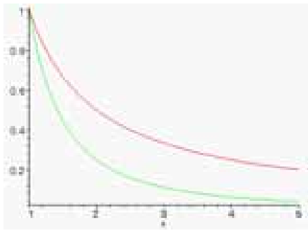


Figura 5.2.

Durante la construcción del contraejemplo diseñado, los estudiantes parecen comprender el proceso de construcción y el argumento gráfico dado (al exponer el proceso de construcción y preguntar "*¿Me explico?*", algunos afirman y los estudiantes deducen la base para $n = 3$).

El registro gráfico se sigue utilizando durante el resto de la sesión. En el Episodio 3 el pensamiento gráfico está presente implícitamente para deducir las propiedades de $F(x)$. Una vez deducidas, se ejemplifica con la gráfica del contraejemplo construido previamente.

Durante el Episodio 4, una vez probado el Criterio, se realiza una gráfica como la siguiente:



aunque los estudiantes han obtenido las relaciones entre las integrales del Criterio sin ella. Sin embargo, vemos una vez más aquí la predominancia de representaciones prototípicas, al escogerse dos funciones estrictamente decrecientes en vez de utilizar alguna oscilante que enriquezca las concepciones de los estudiantes (en este criterio, la monotonía no juega ningún papel, sino solamente la acotación). En este sentido, en las actividades diseñadas con el ordenador se han incluido funciones no monótonas[222].

Una vez demostrado el teorema, el profesor indica a los estudiantes que no deberían memorizar el enunciado, sino visualizar una imagen de la situación planteada.

Por último, durante la resolución de los ejemplos del Episodio 5, el profesor se vale de gráficas para recordar a los estudiantes que $\ln x < x$ y dibuja la función $\tan x$ para que vean que la $\arctan x$ está acotada. Con este tipo de trabajo, se pretende reforzar el papel de este registro como registro de control y su utilidad para recordar resultados algebraicos.

Gestión del tiempo:

En esta sesión se ha cumplido con la planificación programada de forma global, produciéndose compensaciones entre las actividades que llevan más tiempo del previsto y las que menos. Las duraciones de las actividades han sido:

[222] Ver la Sección 6.5.3.

Episodio	Tiempo previsto	Tiempo real
1	5 min.	4 min.
2	18 min.	24:42 min.
3	12 min.	12:05 min.
4	15 min.	8:44 min.
5	10 min.	≈10:30 min.

lo cual confirma nuestra conjetura de que era necesario redistribuir los tiempos asignados a las actividades grupales.

<u>El profesor:</u>

En general, cumple con lo previsto. En cuanto a los nuevos elementos:

- Utiliza tizas de colores en la pizarra, para aclarar la distribución que de ella se hace y para señalar diferentes partes de resultados o resaltar.
- Cuando se quiere saber si los estudiantes están de acuerdo o no con alguna aportación, se les pedirá que levanten el brazo.

En relación con otros elementos:

- Controla el tiempo asignado a cada episodio.
- Realiza al comienzo de la sesión una pequeña revisión de lo anteriormente estudiado, pidiendo la colaboración de los estudiantes.
- Pide a los estudiantes para la próxima sesión una copia de la tabla de convergencias, que servirá para revisar el trabajo realizado y para controlar cómo anotan ellos los resultados de clase.
- Señala más claramente los momentos didácticos y a-didácticos. Adopta su rol de profesor cuando está previsto, institucionaliza resultados.
- Organiza a los estudiantes en pequeños grupos para la actividad del Episodio 2. Se acerca a los distintos grupos y resuelve dudas.
- Resume las aportaciones de los estudiantes en la pizarra (en general, antes de aprobar una aportación pregunta si se está de acuerdo; también los momentos de debate y los de institucionalización quedan claros).

Sin embargo, opinamos que en el Episodio 3 se debió haber dado más tiempo al debate, en lugar de preguntar directamente a los estudiantes por el crecimiento y la monotonía de la función integral.

<u>Algunas consecuencias:</u>

Las observaciones de esta sesión son más alentadoras aún que las de la previa. Es evidente que tener en cuenta las conclusiones de una sesión para desarrollar la siguiente es muy efectivo.

Analizando las respuestas a la Ficha 1 pensamos que los estudiantes, en general, se han apropiado del conocimiento presentado en las primeras sesiones y han debatido entre ellos. Habría que organizar más trabajo por medio de fichas, ya que se puede observar a todos los estudiantes argumentando entre sí y se recoge información de lo que realmente piensan.

Se desprenden las siguientes consecuencias para las siguientes sesiones:

- Se puede ser puntuales en el desarrollo de las sesiones. Para próximas sesiones, se tratará de planificar de forma más acorde con la realidad de nuestros estudiantes el tiempo dedicado al debate y a las actividades desarrolladas.
- El uso de colores ha resultado muy positivo. Se continuará con su uso en las siguientes sesiones.
- Pedir a los estudiantes que levanten el brazo en los debates parece implicarles más y les obliga a decidirse (se evitan las posturas poco comprometidas con el conocimiento). Se seguirá utilizando esta técnica, empleada sólo una vez en esta sesión.
- Debemos organizar más actividades que permitan a los estudiantes trabajar por pequeños grupos. Este trabajo es un excelente momento para que el profesor observe los argumentos que ellos utilizan y se recoge información de todos los sectores de la clase.
- Para optimizar el trabajo en grupos, habrá que revisar la redacción de las cuestiones, de forma que sean lo más claras posibles y promuevan las interacciones con el *medio*, de forma que el uso del conocimiento previsto sea una estrategia optimal[223].

5.2.4. ANÁLISIS DE LA CUARTA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 4

Se comienza la sesión un poco después de las 12:00 y los estudiantes se encuentran en su mayoría en el aula (21 estudiantes en total). Dos entregan sus fichas de identificación.

La distribución de los estudiantes es la siguiente:

AR	
SM, EG	NB, EY
IG, NA, CC	AC, JH, YC, LP, YG
	NG
SD, RA	
WD, AB, CF	AG, MG

Se cuenta con la presencia de la estudiante AR, que asiste por primera vez.

Episodio 1:

Empieza con la revisión de elementos de la sesión anterior. El profesor pregunta cuáles son los posibles límites de una función en el infinito y los estudiantes van diciendo todas las posibilidades y se reconstruye la tabla de la sesión anterior (participan activamente AB, SM y WD, entre otros).

El teorema que relaciona la integral impropia con la función integral cuesta más, pero al final WD lo enuncia y el profesor recuerda que $F(x)$ es el área al ser $f(x)$ positiva.

Finalmente, el profesor enuncia el Criterio de Comparación y añade la k directamente en el enunciado.

Este episodio lleva unos 7 min. (2 más de lo previsto) y quedan revisados los principales elementos de la sesión anterior.

[223] Ver Sección 2.3.1.

Episodio 2:

El profesor plantea que no siempre vamos a tener que $f < g$, sino que a veces habrá que comparar de otra forma y pregunta "*¿Sabemos otras formas de comparar funciones en un entorno del infinito?*". Tras un silencio, el profesor habla de velocidades y YG responde "*el límite del cociente*". El profesor dice "*Pues estudiar este límite nos va a dar otro criterio de convergencia que enunciamos como un corolario*", y enuncia y prueba el corolario en un intervalo $[a, \infty)$.

Una vez probado, hay varias preguntas. SM dice algo y EG pregunta algo relacionado con el signo de la función, que queda aclarado. Posteriormente, YG pregunta por qué cuando $C = 0$ sólo se usa la desigualdad que mayora:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon.g(x) < \underbrace{f(x) < \varepsilon.g(x)}$$

El profesor lo explica y queda claro. Luego, añade que siempre se supondrá que se conoce el comportamiento de una de las integrales, en este caso la de $g(x)$: "*Está puesto todo el criterio en términos de que ustedes conocen la* [*integral*] *de g*".

Después plantea la resolución del ejemplo previsto, que JH propone resolver comparando con $1/x^4$, que converge por ser $k > 1$. Se resuelve así y después el profesor lo resuelve aplicando el corolario.

Este episodio dura 20:20 min. y, al final, se tiene:

- Se enuncia y demuestra el Criterio del Cociente. Además, surge de los estudiantes la comparación de funciones mediante su cociente.
- Surgen algunas dudas que se responden.
- Se resuelve un ejemplo. Por intervención de los estudiantes se resuelve aplicando directamente el Criterio de Comparación y, posteriormente, se resuelve aplicando el Criterio del Cociente.

Episodio 3:

El profesor plantea a los estudiantes enunciar el corolario comparando con la función $g(x) = 1/x^k$, "*que ya sabemos cómo se comporta*".

Los estudiantes trabajan en pequeños grupos y el profesor se acerca a sus sitios. Se observa que estudiantes que no suelen hablar en voz alta participan activamente en los pequeños debates (destacan NB, AC y YC).

Tras el trabajo grupal el profesor comienza a escribir en la pizarra el nuevo enunciado y aclara que se sabe que $1/x^k$ es no negativa y localmente integrable, con lo que se sintetiza el enunciado. Pregunta a los estudiantes qué conclusiones han sacado y escribe la tesis en su forma definitiva, explicando cómo ha agrupado.

Una vez finalizada la escritura, plantea si recuerdan el ejemplo de la sesión anterior $\left(\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx\right)$, que había que separar en dos para comparar con $1/x^2$ y pregunta: "*¿Las integrales de* $1/x^k$ *son convergentes en cualquier intervalo infinito?*", tras lo que dibuja la gráfica genérica para aclarar que no están definidas en $x = 0$. Finalmente, añade en el enunciado del corolario: "*Sea a* > 0".

Posteriormente JH pregunta una duda que es aclarada. Este episodio dura 15:12 min. y al final se tiene:

- Tras un trabajo grupal, se enuncia un nuevo corolario del Criterio de Comparación. Los estudiantes, en general, llegan a casi todas las conclusiones.
- Se aclara por qué hay que imponer que $a > 0$.

<u>Episodio 4:</u>

El profesor anuncia que se comienza con una nueva parte en donde se estudiarán las propiedades de las integrales impropias y que se verán dos propiedades (aunque más adelante se verán algunas más). Posteriormente, corrige el enunciado del ejercicio 21 de las hojas, pues en la fotocopia dada a los estudiantes no se ve bien una de las funciones.

El profesor recuerda a los estudiantes que con la integral de Riemann se cumplía la linealidad y plantea para debatir en grupos "*Cuando $b = \infty$, ¿se mantiene? Si no, ¿me pueden dar un contraejemplo?*". Mientras los estudiantes trabajan la cuestión, el profesor distribuye la Ficha 2 y aclara: "*Escriban todo: lo que se les ocurra, lo que no entiendan... Todo*".

Una vez finalizado el trabajo grupal, el profesor aclara: "*La integral se define como el límite cuando el límite existe. Si el límite no existe o es infinito, la integral diverge y si el límite existe y es finito, la integral converge*". Se enuncia y prueba el teorema de linealidad.

La sesión finaliza aquí y son los estudiantes los que recuerdan al profesor que había pedido las tablas de convergencia y se entregan varias (el 61'90% de los asistentes).

<u>Episodio 5:</u>

No se desarrolla por falta de tiempo.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 4

Siguiendo el esquema habitual, en las observaciones hechas sobre los estudiantes distinguimos las siguientes dimensiones, de acuerdo con los objetivos planteados:

- Enunciado de dos nuevos criterios de comparación.
- Teorema de linealidad para la integral impropia.
- Mantener la implicación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
- Puntualidad en el desarrollo de cada episodio.

<u>Estudiantes:</u>

<u>*Enunciado de dos nuevos criterios de comparación:*</u>

El profesor plantea que se usará otra nueva herramienta para comparar el carácter de las integrales de dos funciones en un entorno del infinito. Como se había previsto, un estudiante (YG) responde a la cuestión "*¿Sabemos formas de comparar funciones en un entorno del infinito?*" diciendo "*el límite del cociente*". Ésta era la única respuesta esperada, pues se ha utilizado en la asignatura *Análisis Matemático I*. Sin embargo, nos parece sintomático que el resto de estudiantes permanecen callados.

El profesor enuncia y demuestra el teorema y parece que a los estudiantes les queda clara la demostración. Una vez finalizada, SM y EG preguntan algo (no se entiende bien la grabación) que se responde rápidamente (y parece quedarles claro, pues ambas asienten cuando se les aclara) y YG pregunta si se podían utilizar más desigualdades en la demostración (en particular, en el caso $C = 0$, pues queda la desigualdad: $- \varepsilon.g(x) < f(x)$ y se sabe que la integral de $g(x)$ converge). Esta pregunta puede denotar que se ha comprendido bien el Criterio de Comparación, por lo que se busca aplicarlo en todas las situaciones posibles. El profesor aclara que se supone que sólo se conoce el comportamiento de $g(x)$, por lo que sólo se enuncian esas conclusiones posibles: "*está todo el criterio en términos de que ustedes conocen la* [*integral*] *de g*". Aclara, además, que en - $\varepsilon.g(x) < f(x)$, si se tuviera que $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge no se podría decir nada, pues quedaría entonces: $-\infty < \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$.

Para operacionalizar el criterio se resuelve el ejercicio 19-b de las hojas, para dejar claro que es más conveniente usar las nuevas técnicas desarrolladas ("*Fíjense que aquí calcular una primitiva sería complicado* [...]... *fracciones simples*") y el profesor pide una función para comparar. JH propone la función $1/x^4$ y utiliza el Criterio de Comparación para probar la convergencia de la integral, lo que evidencia nuevamente que ha sido comprendido su uso (aunque quizá esto signifique que, en un principio, no ha quedado claro el resultado que se pretendía ejemplificar). El profesor aplaude las intervenciones y añade que se puede resolver también con el nuevo criterio enunciado y lo muestra (de forma que quede claro cómo aplicarlo).

En el siguiente episodio se plantea a los estudiantes dar un enunciado alternativo del criterio anterior cuando se compara con la familia $1/x^k$. Después del tiempo de reflexión, parece claro que los estudiantes sí han comprendido el corolario anterior, pues casi todos los grupos consiguen enunciar el nuevo criterio de forma casi completa. Destacamos que los grupos que cuentan con estudiantes repetidores lo enuncian en la forma sintética Los estudiantes con más problemas para arrancar son AG y MG, pero consiguen enunciar la primera parte.

Finalmente, el profesor enuncia el nuevo criterio en la pizarra y aclara la forma sintética en que se enuncia (empieza aclarando que $1/x^k$ es no negativa y localmente integrable, por lo que el criterio empieza como: "*Sea f*(x)..."). Una vez escrito, parece que para JH no queda del todo claro (pues pregunta qué se haría si $C = 0$ y $k > 1$), pero luego se da cuenta.

Sin embargo, cuando se pregunta a los estudiantes si añadirían alguna condición nueva, no saben qué responder, tal como se había previsto. El profesor ha de dibujar la gráfica de una función $1/x^k$ y señalar el intervalo [0, 1] para que los alumnos se den cuenta de que hay que integrar en intervalos que no contengan al 0 (a la pregunta "*¿Ustedes pueden integrar en* [0, 1]*?*", YG responde que no). Con esto, se añade la condición $a > 0$ y se recuadra en amarillo.

Se pregunta si se ha comprendido y nadie pregunta nada.

<u>Teorema de linealidad para la integral impropia:</u>

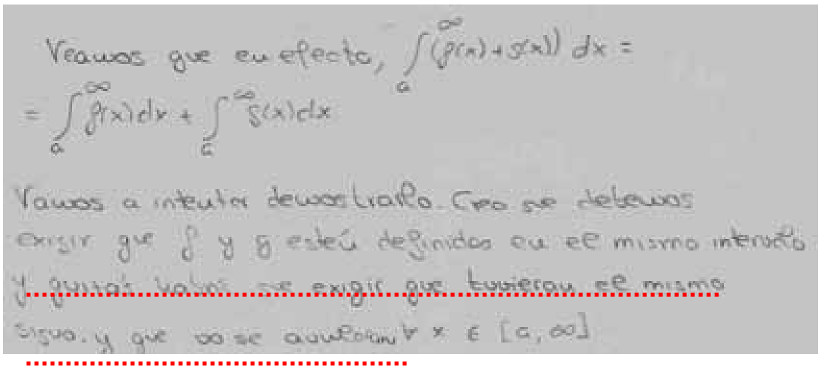
El profesor plantea a los estudiantes que la integral de Riemann es lineal y así lo escribe en la pizarra. La pregunta que plantea para abrir el debate es: "*Cuando b = ∞, ¿se mantiene* [*esta propiedad*]*? Si no, ¿me pueden dar un contraejemplo?*".

Los grupos que se forman son los siguientes:

- AB, WD, CF.
- RA, SD.
- NA, CC, EG, IG, SM.
- AR.
- NB, EY, YG.
- AC, YC, NG, JH, LP.
- AG, MG.

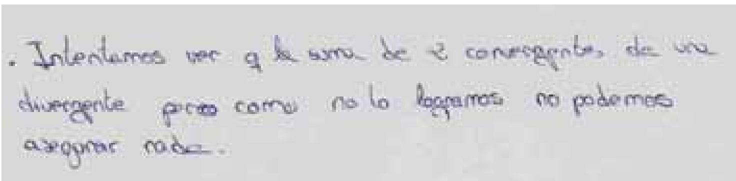
En esta ocasión, ha habido una mayor dispersión de respuestas que en la Ficha 1 y, aunque algunos grupos han probado el resultado, otros parecen estar muy lejos de poder hacerlo. Sin embargo, quizá tenga más que ver con la naturaleza de la pregunta en sí (demostración formal) que con el conocimiento institucionalizado hasta el momento; éste es el primer resultado formal que se pide a los estudiantes que intenten probar[224]. Parece haber una correspondencia con los resultados de Pian (Sección 2.2.3.), que afirma que si para resolver una tarea es necesaria alguna transformación, un gran número de estudiantes no podrá resolverla. El tiempo con que han contado los estudiantes para pensar y responder ha sido de unos 8-10 minutos, según el grupo.

La alumna AR (que asiste por primera vez a una sesión) intuye que sí será cierto, pero no logra demostrarlo y busca imponer condiciones que no son útiles o necesarias a las funciones:


Veamos que en efecto, $\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,dx =$
$= \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$

Vamos a intentar demostrarlo. Creo se debemos exigir que f y g estén definidos en el mismo intervalo y quizás habría que exigir que tuvieran el mismo signo. y que no se anulan $\forall x \in [a, \infty]$

El grupo formado por AC, YC, NG, JH y LP intuye que el enunciado es falso, pero no encuentran ningún contraejemplo. El grupo es prácticamente comandado por JH. Su estrategia es errónea, pues la suma de dos integrales convergentes será convergente. Es el caso contrario (suma de dos funciones con integral divergente que origina una función con integral convergente) el que les podría haber ayudado.


. Intentamos ver q la suma de 2 convergentes da una divergente pero como no lo logramos no podemos asegurar nada.

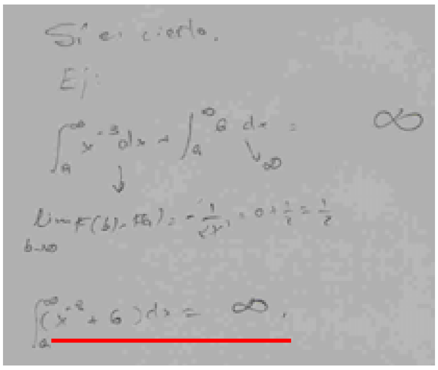
Quizá las actividades desarrolladas hasta el momento hacen pensar a los estudiantes que todo es falso y que siempre hay que buscar contraejemplos[225], por lo que esta actividad en la que el enunciado es cierto puede ayudar a destruir esta impresión para las siguientes actividades.

AG y MG aparecen como los alumnos con más deficiencias (quizá debieran trabajar más con otros estudiantes). Concluyen que sí es cierto y aportan un ejemplo (muestran carencias en el proceso de prueba y refutación en Matemáticas) como validación[226]. Además, su ejemplo lo provee una función integrable (x^{-3}) y otra no integrable ($y = 6$) y obtienen que la integral de la suma coincide con el valor ∞.

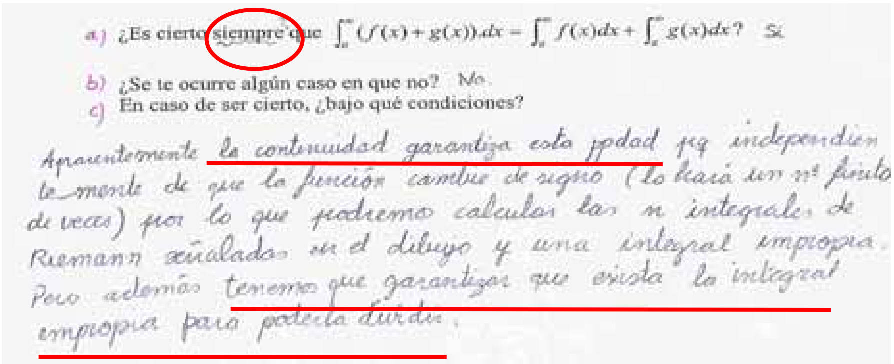
[224] Y ya hemos visto las dificultades que la mayoría tiene con los contenidos anteriores, así que las técnicas de demostración formal no deberían ser una excepción. Véase, al respecto, Alcock (2004) y Selden y Selden (1998).

[225] Lo que podría interpretarse como algún tipo de adaptación a un contrato didáctico esperado por ellos.

[226] Ver Selden y Selden (1998), Alcock (2004) y Duval (2000).

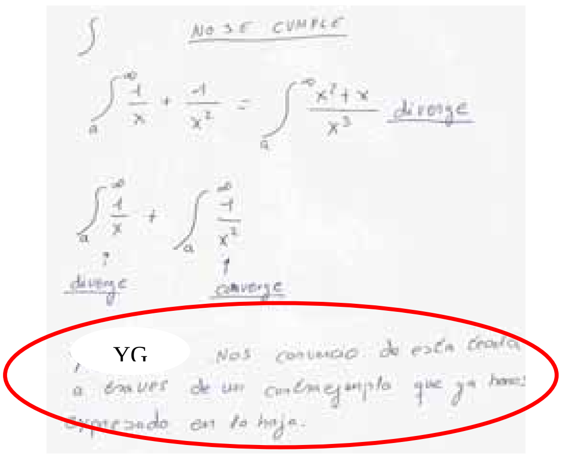


El grupo formado por AB, WD y CF responde a la primera pregunta afirmativamente, aunque subrayan la palabra "*siempre*" del enunciado de la cuestión. Sin embargo, toman como hipótesis la continuidad de los integrandos, condición que no es necesaria (y concluyen que el número de cambios de signos será finito, que tampoco es cierto). Sin embargo, a pesar de la confusión, parecen tener una idea de la solución, pues escriben: "*tenemos que garantizar que exista la integral impropia para poderla dividir*".



Dicen al profesor que quieren justificar su razonamiento gráficamente[227], aunque no añaden ninguna gráfica, quizá por falta de tiempo.

NB, EY y YG trabajan bajo las ideas del tercero, que logra convencerles de la falsedad del enunciado. En este caso, toman una función integrable y otra que no lo es ($1/x^2$ y $1/x$, respectivamente) y comprueban que la suma es divergente.



[227] Nuevamente, se puede tratar de formas de adaptación de los estudiantes a un contrato didáctico esperado, creyendo que se ha de probar todo utilizando el registro gráfico.

Aunque ésta es la idea que se usa para buscar un caso paradójico, en este caso no es válido el ejemplo construido. Hacemos notar que desde el primer momento YG estaba convencido de la falsedad del enunciado, por lo que quizá de haber buscado bajo qué condiciones se da la veracidad habrían llegado a la prueba.

Las alumnas NA, CC, EG, IG y SM son prácticamente comandadas por EG, que repite. Esbozan una demostración, aunque utilizan funciones primitivas. Implícitamente, suponen la convergencia de las dos integrales que se suman, aunque no lo aclaran:

Pensamos que es cierto

$$\int_a^\infty f+g \overset{?}{=} \lim_{b\to\infty} [(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))] \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)+g(x)\,dx$$

$$\overset{?}{=} \lim_{b\to\infty} [F(b)-F(a)] + \lim_{b\to\infty} [G(b)-G(a)]$$

$$= \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$$

RA y SD trabajan conjuntamente y hacen una demostración del resultado, utilizando la definición de integral impropia y las propiedades de la integral de Riemann. Este grupo impone las condiciones explícitamente:

$$\int_a^\infty (f(x)+g(x))dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Creemos que es cierto bajo la condición de que los límites existan y que las dos integrales impropias converjan.

Las dos hemos llegado a esta conclusión.

Finalmente, el profesor enuncia y demuestra el resultado. Se recalca finalmente que la integral impropia es lineal cuando existen por separado cada una de las integrales.

Las dos principales dificultades que hemos detectado han sido las siguientes:

- Recurrir a la teoría de integrales de Riemann, que parece evidente que los estudiantes no manejan.
- Los estudiantes parecen intentar adaptarse de alguna forma a lo que esperan del profesor, así que parecen creer que siempre hay que buscar contraejemplos, o probar todos los resultados en el registro gráfico[228].

[228] Vemos aquí formas económicas de adaptación (Artigue, 2001).

Para combatir la segunda posibilidad, esperamos que el resto de sesiones de la Ingeniería hagan ver a los estudiantes que se tienen que enfrentar a diversos problemas de distinto tipo y tienen que activar, para cada uno, diversas estrategias de resolución.

Mantener la implicación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades:

Nos seguimos mostrando entusiastas con las reacciones de los estudiantes, aunque en esta sesión ha costado algo arrancar. Los estudiantes se han mostrado receptivos y han participado bastante en clase (algunos aún tímidamente, pero se animan a participar). Seguimos observando que los estudiantes, en los pequeños grupos de trabajo, sí participan y debaten entre ellos.

Durante la revisión del Episodio 1, no parece que se hayan mirado la teoría durante el fin de semana y se muestran tímidos cuando el profesor les pide que enuncien los resultados más interesantes (aunque participan, principalmente, AB, WD y SM, entre otros). Opinamos que es importante que sean ellos mismos los que consulten sus apuntes para ver qué se ha hecho en la última sesión.

Se repite de forma rápida la tabla de comportamientos de una función en el infinito (poco a poco los alumnos van participando; destacamos la participación de SM, aún tímidamente y confundiendo algunos resultados, AB y JH). Después se recuerda el enunciado del teorema que liga el comportamiento de la función $F(x)$ con el carácter de la integral (este resultado es el que más cuesta; WD participa en su enunciado) y el Criterio de Comparación.

En los debates de grupos, observamos que los estudiantes participan en su mayoría. Se observa que NB comenta resultados con EY, JH con AC y YG, YC con LP... También los estudiantes se animan más a preguntar sus dudas cuando se institucionalizan los resultados (SM, EG, YG, JH...).

Son los estudiantes quienes recuerdan al profesor que había pedido que le entregaran una copia de la tabla de convergencias y trece de los estudiantes presentes entregaron una tabla. Poco a poco se irán corrigiendo y se devolverán a los alumnos. El análisis de estas tablas se muestra en la Sección 5.3.1.

Puntualidad en el desarrollo de cada episodio:

En esta sesión no se ha cumplido con la planificación programada; ha faltado el último momento. La tabla de tiempos es la siguiente:

Episodio	**Duración prevista**	**Duración real**
1	5 min.	7:00
2	15 min.	20:20
3	10 min.	15:12
4	15 min.	≈ 17:00
5	10 min.	

Como se ha dicho, el Episodio 1 ha comenzado algo lento y ha costado iniciar la revisión de resultados. El Episodio 2 se alarga debido a las cuestiones que los estudiantes plantean y a que se resuelve el ejercicio de dos formas distintas (que no se había previsto). El Episodio 3 debido a la síntesis del enunciado, agrupando casos y a las preguntas consecuentes (quizá habría sido mejor no sintetizar tanto). El Episodio 4 debido a que la corrección del enunciado del ejercicio 21 de las hojas lleva más tiempo del previsto.

Profesor:

Volvemos a destacar el efecto positivo del uso de tizas de colores en la pizarra para señalar la distribución que se hace de la misma y las diversas partes de los resultados enunciados, por lo que seguirán siendo utilizadas, pues ayuda a los estudiantes a organizar sus apuntes.

En este sentido, el profesor siempre presenta la actividad que se desarrolla (enunciado, demostración, puesta en común, resolver un ejercicio, el comienzo de un nuevo bloque...). También señala que sólo se estudiarán por el momento dos propiedades elementales y que hay más en las hojas de problemas.

Aunque en esta sesión no es un objetivo el uso del registro gráfico por parte de los estudiantes, el profesor sigue realizando gráficas en la pizarra para ilustrar algunos detalles. Por ejemplo, para razonar por qué en el criterio de comparación con la familia de funciones $1/x^k$ se ha de utilizar $a > 0$, realiza la gráfica de estas funciones en [0, 1].

Sin embargo, opinamos que en algunos momentos corta rápidamente el debate o el trabajo de los estudiantes. Esto se debe a que los episodios se van alargando y los cambios de organización hasta el momento han retrasado la organización de la Ingeniería.

Algunas consecuencias:

El detalle más importante a tener en cuenta es que conviene ser mucho más fiel, de ahora en adelante, a la programación, ya que se ha cruzado el ecuador de la Ingeniería (el retraso de esta sesión se debe a que se han organizado dos actividades de debate).

Sin embargo, el grupo parece reaccionar bien a la metodología empleada y cada vez más alumnos participan en clase (cada uno a su estilo, algunos aún muy tímidamente) y la mayoría se implican en los pequeños grupos de trabajo que se organizan. Además, los pequeños grupos de trabajo nos permiten observar qué estudiantes van adoptando el rol de "profesores" de los demás y cuáles desarrollan mayor intuición.

A partir de ahora, pensamos que será positivo que el profesor pregunte a los alumnos al principio de cada clase los resultados más relevantes de la anterior, para ver qué es lo que han retenido como importante. Aunque esto lleve más tiempo, parece que será positivo para tomar el pulso al grupo.

De todo lo anterior, desprendemos las siguientes consecuencias para las siguientes sesiones con ambos grupos:

- Debido a que no se han abordado todos los puntos previstos, se intentará ser muy puntuales en el desarrollo de las próximas sesiones.
- El uso de colores ha resultado muy positivo también en la sesión actual. Su uso queda constituido para el desarrollo de las siguientes sesiones.
- Los alumnos han entregado mayoritariamente (61'90 % de los asistentes) la tabla pedida. Se tiene previsto pedir también la resolución de algunos problemas para analizar sus progresos.

5.2.5. ANÁLISIS DE LA QUINTA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 5

Se comienza la sesión sobre las 12:00 y los estudiantes se encuentran en su mayoría en el aula (23 estudiantes en total). Dos entregan sus fichas de identificación y tres más sus tablas de convergencia. Algunos estudiantes comentan al profesor que tienen próximamente un examen parcial de otra asignatura y que han de estudiarla.

La distribución de los estudiantes es la siguiente:

SM, JC	
EG, JB	
NA, IG, CC	LP, JH, AC, YC, YG
	NG, NB
FG, MI, SD, RA	
WD, AB, CF	AG, MG

En esta sesión hay un nuevo estudiante que asiste por primera vez (JC).

<u>Episodio 1:</u>

Este episodio dura 5:20 minutos.

El profesor comienza revisando los últimos contenidos (“*¿Se acuerdan de lo más importante que vimos el último día?*”). Preguntando a los estudiantes, les recuerda que se estudió un criterio que implicaba el límite del cociente y luego se particularizó (escribe el enunciado con $\lambda = \lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$.).

Luego pregunta: “*Y finalmente estudiamos la linealidad de la integral impropia. Entonces, ¿bajo qué condiciones tenemos que la integral impropia es lineal?*”. Tras una pausa y haber insistido, YG afirma: “*Cuando f y g son integrables en el intervalo*”. El profesor repasa la demostración.

Se tiene:

- Se revisan los principales resultados de la sesión anterior, aunque con no mucha participación.
- Las condiciones para extender la linealidad parecen haber quedado claras.

<u>Episodio 2:</u>

Este episodio dura 11:23 minutos.

El profesor anuncia que se va a estudiar el segundo resultado que se va a generalizar de la integral de Riemann, que será el teorema de integración por partes. Lo enuncia y lo escribe en la pizarra, tras lo cual, explica brevemente lo que quiere decir.

Para la demostración va pidiendo ayuda, sugiriendo: “*Miren la demostración de la linealidad y vean qué hicimos*”. Algunos estudiantes van participando cuando se pide. Es preciso recordar la regla del teorema ($\int u.dv = uv - \int v.du$). La demostración se finaliza y el profesor pregunta si hay dudas, pero nadie dice nada.

Concluye diciendo: “*Bueno, quedan más propiedades de las integrales impropias. Algunas las veremos la semana que viene, cuando veamos la integral de funciones que cambian de signo y otras están en las hojas de problemas* [...]. *Acabamos otro bloque y empezamos el último bloque de ‘Integral de funciones no negativas’* ”.

Se tiene:

- Se ha enunciado y probado el teorema de integración por partes para el caso impropio.
- Las intervenciones de los estudiantes en la demostración parecen mostrar que van aprendiendo cómo se actúa normalmente en estas demostraciones.

<u>Episodio 3:</u>

El desarrollo de este episodio tarda 40:34 minutos.

El profesor recuerda que al ver los criterios de convergencia se estudió el de la familia $f(x) = 1/x^k$ y "*les pregunté si les recordaba alguna otra cosa que hubieran visto*". Pregunta qué les recordó y una chica dice que a series. El profesor pide que levanten la mano los estudiantes a los que les recordó algo de series y levantan la mano, entre otros: CF, AB, WD, NA, IG, CC, EG, JB, SM (no se ven todos en la grabación).

Entonces pregunta si hay algún otro resultado más que les suene, en particular a series, y JH afirma que "*el Criterio de Comparación*" y lo explica.

Como no hay más aportaciones, el profesor dice que les refrescará la memoria y pone las Transparencias 3 y 4, relacionando estos resultados de series con los ya estudiados.

Luego comenta: "*Quizá las cosas se conservan. Lo primero que hay que plantearse es: Si yo tengo una función y la evalúo en los naturales* (escribe $\sum f(n)$) *y yo sumo esos valores y me da que es convergente la suma, ¿entonces la integral va a ser convergente?* [...] *Y les pregunto lo contrario. Si tengo una función y puedo probar que su integral es convergente, ¿si sumo estos valores me dará convergente?*", mientras va escribiendo ambas implicaciones:

$$\sum f(n) < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$
$$\sum f(n) < \infty \Leftarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

Plantea la cuestión y da tiempo para que lo piensen en grupos. En total, se tienen 21:49 minutos de trabajo. Tras recoger las fichas, pregunta si todos piensan que la primera es cierta, a lo que hay respuestas afirmativas.

Entonces el profesor presenta el primer ejemplo previsto y lo explica. Pregunta qué opinaron de la segunda pregunta, y el grupo de CF, AB y WD dice que no es cierto. AB explica el contraejemplo que han construido, sale a la pizarra y lo razona. Hay algunas preguntas. Posteriormente, JB dice que este contraejemplo es de la primera pregunta, y no de la segunda; tras esta precisión, parece que todo queda más claro.

Entonces el profesor usa la función construida en la Sesión 3 como otro contraejemplos (como JB no asistió a la Sesión 3, vuelve a explicar cómo se construye). Añade que también hay ejemplos continuos y usa la Transparencia 5.

Finaliza diciendo que "*Repito que ninguna de las dos* [*implicaciones*] *era cierta. Pero hasta ahora nos cuadraba todo. El próximo día vamos a ver por qué nos cuadraba*".

Se tiene:

- Ha quedado claro que, hasta ahora, los resultados enunciados guardan un cierto paralelismo con los de series. Algunos estudiantes así lo afirman.
- Tras una reflexión sobre si siempre serán las cosas iguales, se muestran contraejemplos de que no será así.
- Un grupo de estudiantes construye un buen contraejemplo de una de las implicaciones.
- Se anuncia que próximamente se verá bajo qué condiciones se tiene la igualdad en el carácter de la serie asociada y la integral impropia.

<u>Episodio 4:</u>

Dura unos 2:41 minutos.

Por falta de tiempo, sólo se enuncia el Test Integral en la pizarra. El profesor subraya las tres condiciones que se imponen (positiva, continua y decreciente). Propone a los estudiantes pensar una demostración para la próxima sesión. Y aclara que el teorema enuncia que la serie y la integral tendrán el mismo carácter, pero no el mismo valor.

Vuelve a los contraejemplos construidos y hace ver que uno de ellos no es continuo y la función construida por AB, WD y CF no es decreciente.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 5

Siguiendo el esquema habitual, en las observaciones hechas sobre los estudiantes distinguimos las siguientes dimensiones, de acuerdo con los objetivos planteados:

- Teorema de integración por partes para integrales impropias.
- Análisis de las impresiones que han desarrollado los estudiantes de las relaciones entre series e integrales.
- Contraejemplos de que no siempre la serie funcional se comporta como la integral impropia, y viceversa.
- Enunciado y demostración del Test Integral.
- El contrato didáctico.
- Gestión del tiempo.

Estudiantes:

Teorema de integración por partes para integrales impropias:

Tal como se había previsto, se enuncia y demuestra el teorema de integración por partes. Además, el enunciado se plantea de la forma "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$", de forma que este resultado sea válido cuando se estudien las integrales impropias de segunda especie. Durante la demostración, cada uno de los tres límites implicados se señala con tiza de color y el profesor pide colaboraciones que pueden evidenciar que se ha entendido el procedimiento general de estas demostraciones[229] (y, en particular, la del teorema de linealidad). El profesor comienza la demostración escribiendo la integral genérica $\int_a^b f(x).g(x)dx$ y pregunta: "*¿Cómo seguimos?*". Tras un tiempo de silencio, apunta: "*Miren la demostración de la linealidad y vean qué hicimos*" y YG dice: "*El límite*". Tras esto, queda escrita la integral $\int_a^t f(x).g(x)dx$ y es WD quien dice que se trata de una integral de Riemann. El profesor aclara que se dan las condiciones del Teorema de integración por partes para el caso Riemann y lo aplica, aunque debe recordar a los estudiantes en un rincón aparte la regla ($\int u.dv = uv - \int v.du$), tal como se había previsto. Se ve que los estudiantes tienen dudas con el resultado en el caso definido, así que no es de extrañar que haya dificultades para comprender este resultado, pues incluso el caso "sencillo" les resulta difícil.

Las intervenciones de algunos estudiantes durante la demostración muestran una apropiación del procedimiento general (recordemos que en la Ficha 2 varios fueron también capaces de hacer una demostración). Quizá la parte más "oscura" de la demostración sea que se parte de una integral que se quiere probar que existe y se divide en dos, que no se sabe si existen:

[229] Esto es, aplicar la definición mediante límites y obtener así una integral de Riemann, a la que se le pueden aplicar las propiedades conocidas.

la existencia de dos asegura la de la tercera. Esta dificultad prevista está más relacionada con las carencias de los estudiantes, en particular en los procesos formales de prueba y demostración[230].

<u>*Análisis de las impresiones que han desarrollado los estudiantes de las relaciones entre series e integrales*</u>:

El profesor recuerda que cuando se estudió el criterio de convergencia de la familia $1/x^k$ algunos comentaron que les sonaba este resultado: "*No hubo consenso, pero algunos dijeron que les recordaba... ¿a qué?*", a lo que una alumna (¿SD?) dice "*Series*". El profesor pregunta: "*¿A quién le recordó esto a algo de series? Que levante la mano*" y aproximadamente la mitad levantan la mano (en la grabación se identifica a CF, AB, WD, NA, IG, CC, EG, JB, SM).

Para ver si los estudiantes han apreciado alguna relación más, pregunta: "*Les pregunto: de todo lo que hemos visto hasta ahora, ¿hay algo más, algún otro resultado que les suene o recuerde a otra asignatura? En particular con series o alguna otra*". A esta pregunta responde JH diciendo: "*El Criterio de Comparación*" ($f(x) < g(x)$) y lo explica, diciendo que le suena a sucesiones. Se trata de una intervención no esperada que revela una comprensión de este resultado y el establecimiento de conexiones con los resultados sobre series.

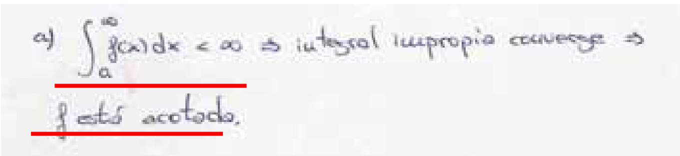
El profesor pregunta si algún otro resultado, pero nadie dice nada. Mientras pone las transparencias pregunta cuántos han aprobado la asignatura *Seminario de Análisis Matemático*, y al menos nueve de los presentes alzan la mano (no se ve el grupo total. En caso de ser menos de la mitad de los presentes los que han superado esta asignatura, esto podría explicar la ausencia de más conexiones).

Los datos recogidos muestran concordancia con dos de nuestras hipótesis generales. La primera es que tal como se ha diseñado la secuencia, y con los comentarios que se ha ido haciendo, es posible establecer relaciones informales entre los contenidos estudiados de series y los nuevos sobre integrales impropias. La segunda es que muchos estudiantes estudian los nuevos conceptos (en general) desvinculados de los anteriores, por lo que es preciso realizar una enseñanza que los ponga en relación explícitamente.

<u>*Contraejemplos de que no siempre la serie funcional se comporta como la integral impropia, y viceversa*</u>:

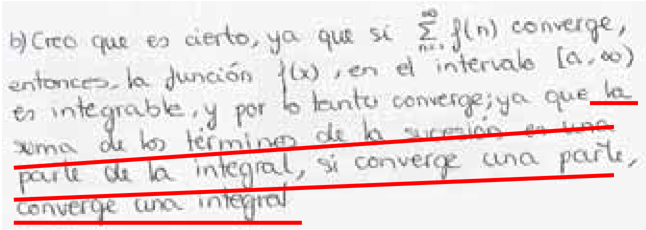
El planteamiento de esta situación intenta aprovechar el potencial del registro gráfico para su resolución (Maschietto, 2001); el uso de este registro supone una estrategia optimal de respuesta. Sin embargo, se han observado muchas respuestas no previstas que revelan la presencia de dificultades y obstáculos.

El grupo de SD, FG, MI y RA no llega a un resultado relevante. Más bien, parecen haber desarrollado una idea equivocada, que ha sido explícitamente mencionada en clase:


a) $\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \Rightarrow$ integral impropia converge $\Rightarrow$
f está acotada.

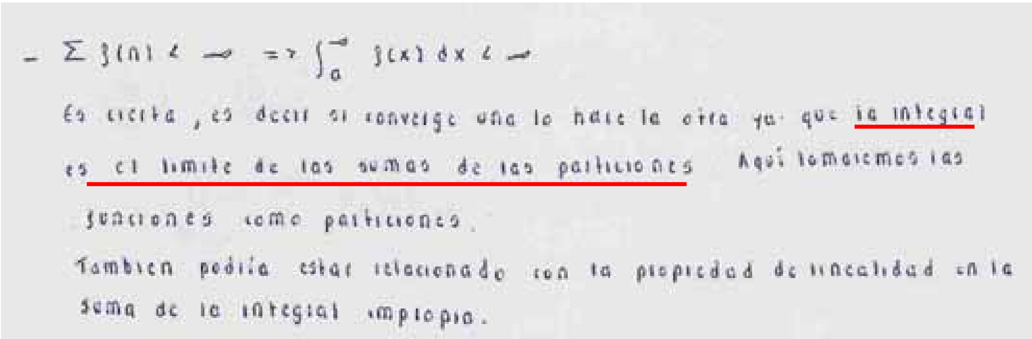
[230] Ya hemos señalado que Duval (2000) afirma que la demostración es uno de los tópicos más difíciles en la educación matemática. Véase también Artigue (1995a), citada en la Sección 1.1.

Quizá haya que tratar estos obstáculos[231] explícitamente con los alumnos, para que los tengan presentes. Por otro lado, también vemos presente en este grupo la confusión de las sumas de Riemann con la serie asociada:


b) Creo que es cierto, ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, entonces la función $f(x)$, en el intervalo $[a,\infty)$ es integrable, y por lo tanto converge; ya que la suma de los términos de la sucesión es una parte de la integral, si converge una parte, converge una integral

Esto puede revelar la presencia de procesos incorrectos para manejar las sumas de Riemann, o concepciones inapropiadas de éstas (ver Bezouidenhout y Olivier, 2000).

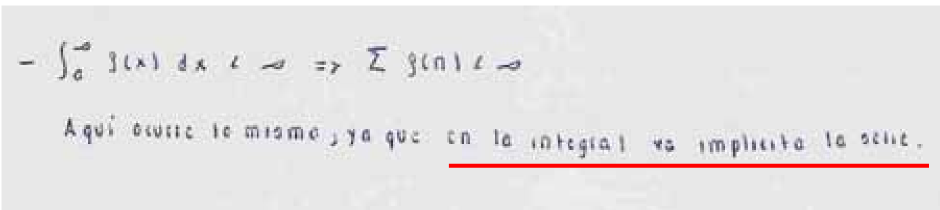
NG y NB parecen pensar también en sumas de Riemann y piensan que ambas proposiciones son ciertas:


- $\sum f(n) < \infty \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

Es cierta, es decir si converge una lo hace la otra ya que la integral es el límite de las sumas de las particiones. Aquí tomaremos las funciones como particiones.

También podría estar relacionado con la propiedad de linealidad en la suma de la integral impropia.

Por otro lado, parecen no dar adecuadamente el salto discreto-continuo y piensan que lo que sucede en valores puntuales determina lo que sucede sobre intervalos reales. El concepto de partición tampoco parece claro, al no ver la diferencia entre las particiones que genera la integral definida y la partición de distancia entre sus puntos igual a 1 que genera la serie asociada. La frase señalada parece evidenciar que opinan que al calcular la integral se suma el valor de todas las ordenadas de la función, y esta suma dará el área, mostrando así concepciones erróneas de la integral definida y una falta de coordinación entre lo algebraico y lo gráfico (si sumamos *todas* las ordenadas de una función en un intervalo [*a*, *b*], ¿cómo vamos a obtener un área finita?):

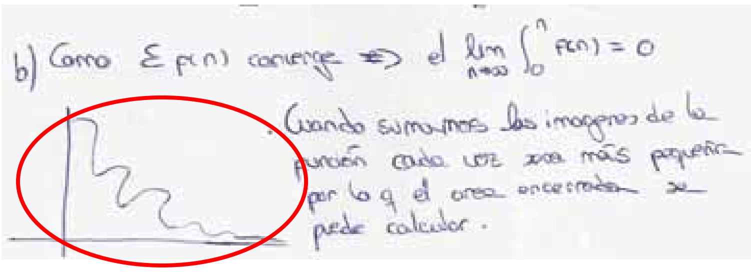

- $\int_a^{\infty} f(x)\,dx < \infty \Rightarrow \sum f(n) < \infty$

Aquí ocurre lo mismo, ya que en la integral va implícita la serie.

Vemos aquí la misma concepción que han mostrado las estudiantes del grupo anterior.

El grupo de YC, AC, YG, LP y JH utiliza argumentos gráficos (este grupo va pensando cada vez más gráficamente) y no monótonos:

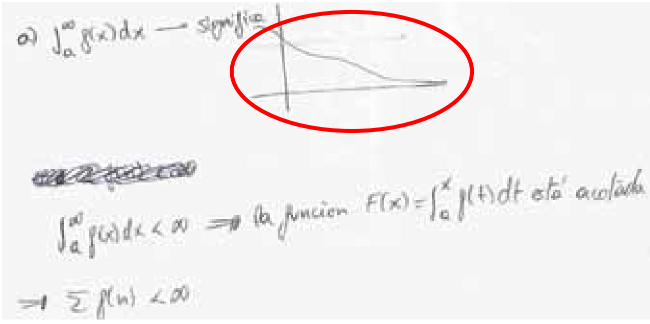
[231] Pensamos que esta afirmación está en relación con el obstáculo de *ligación a la compacidad*, descrito en la Sección 3.3.4.



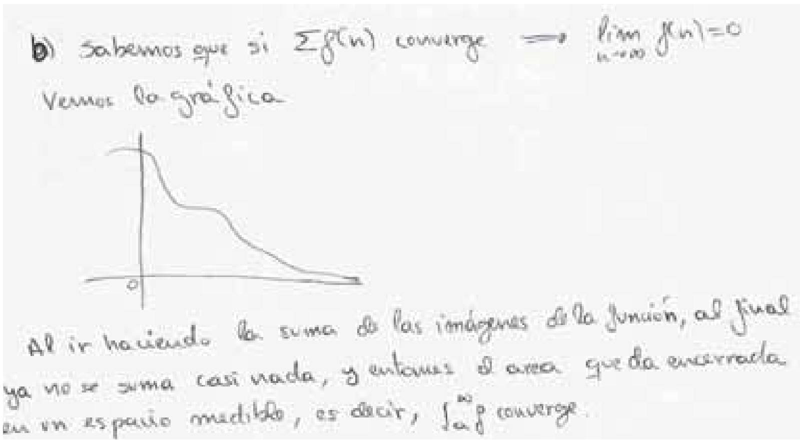
aunque se equivocan. Vemos en sus razonamientos aparecer varios obstáculos.

Se observa en su argumento el razonamiento de que como la serie es convergente, se deduce que $f(n) \to 0$, de donde asumen que, en primer lugar, $f(x) \to 0$ (abuso del modelo continuo y monótono), y como consecuencia que entonces el área será finita.

También se identifica la convergencia de la integral con que la función deba tender a cero. A pesar de intervenciones didácticas para aliviar este obstáculo, vemos que sigue presente en varios estudiantes, mostrando su resistencia.

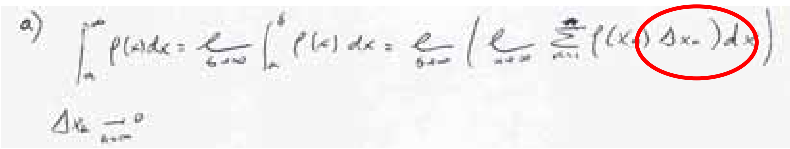


En la respuesta a la segunda cuestión vemos en algunos la preponderancia del modelo continuo que les lleva a razonamientos erróneos:



En este modelo, se ve una clara identificación de lo que sucede en puntos aislados con lo que sucede en intervalos, como consecuencia del uso de una imagen continua y monótona (Artigue, 1995a; Tall, 1992a, 1992b). Los estudiantes parecen generalizar el valor de la función en una ordenada $f(n)$ al área en el intervalo $[n, n+1]$, deduciendo que el área será acotada.

Un grupo con diversidad de opiniones es el de NA, IG, EG, JB, JC, SM y CC. También trabajan con la definición de sumas de Riemann (aunque con errores en la notación, quizá producto de un intento de memorización sin sentido) y piensan que es cierto:

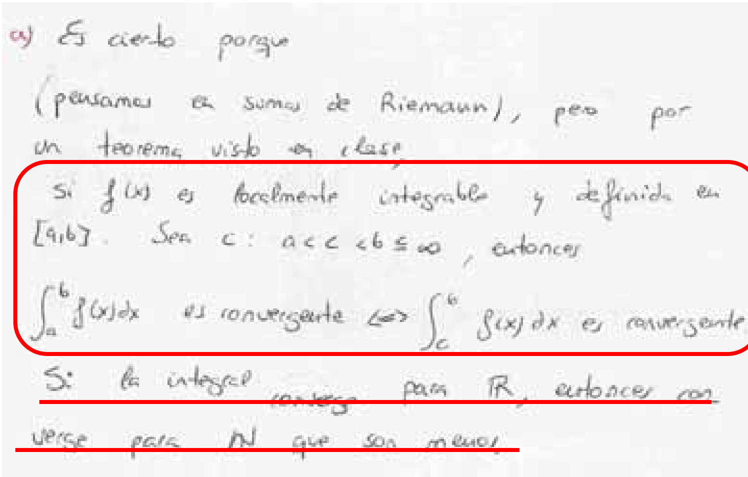


a) $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i)dx\right)$

$\Delta x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pensamos que puede convenir hacer que los estudiantes vean la diferencia entre una suma de Riemann cualquiera y la serie asociada a una función, pues no parece que se haya entendido el concepto de suma de Riemann, lo que puede explicar muchas de las dificultades que hemos registrado en los estudiantes; por otro lado, es evidente que tampoco hay una idea gráfica del significado de la suma de una serie, y los estudiantes acaban confundiendo las sumas de Riemann con la suma de los valores $f(1) + f(2) + ...$

El profesor les apunta más tarde que la respuesta a una de las cuestiones ya se ha visto en clase, y esto les confunde. El enunciado que ellos utilizan es el siguiente:



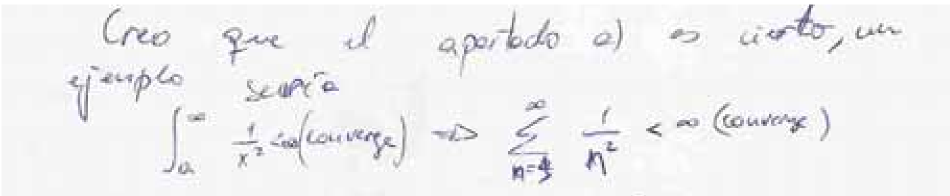
a) Es cierto porque (pensamos en suma de Riemann), pero por un teorema visto en clase

Si $f(x)$ es localmente integrable y definida en $[a,b)$. Sea c: $a<c<b\leq\infty$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\int_c^b f(x)dx$ es convergente

Si la integral converge para $\mathbb{R}$, entonces converge para $\mathbb{N}$ que son menos

lo que revela que también creen que una integral suma todos los valores de $f(x)$ en el intervalo.

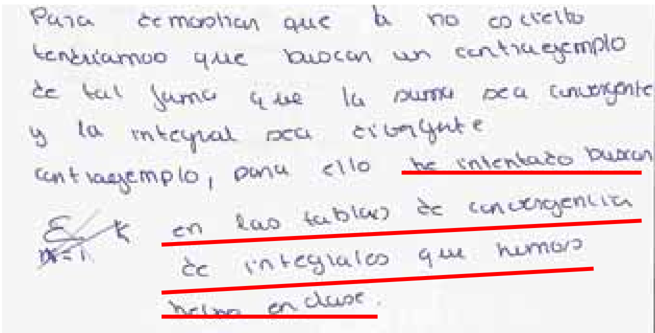
Las estudiantes NA e IG aportan ejemplos para sus respuestas afirmativas (lo que desvela más deficiencias en sus razonamientos lógicos y sobre los mecanismos de demostración); el profesor les aclara que un ejemplo sólo sirve para probar la falsedad de un argumento, pero les invita a que escriban lo que se les ocurra.



Creo que el apartado a) es cierto, un ejemplo sería

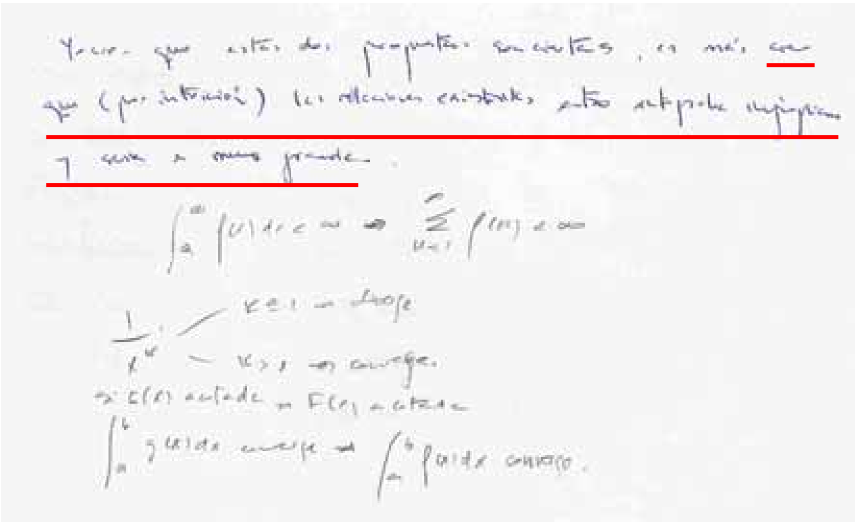
$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^2}$ (converge) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ (converge)

Las alumnas NA, IG y SM especifican que creen que la cuestión (b) es falsa, aunque no se les ocurre ningún contraejemplo. SM añade que ha buscado en la tabla de convergencias (en donde todos los casos coinciden con el carácter de la serie; olvida ver los demás ejemplos usados en clase), pero no lo ha encontrado:



Para demostrar que b no es cierto tendríamos que buscar un contraejemplo de tal forma que la suma sea convergente y la integral sea divergente. contraejemplo, para ello he intentado buscar en las tablas de convergencia de integrales que hemos hecho en clase.

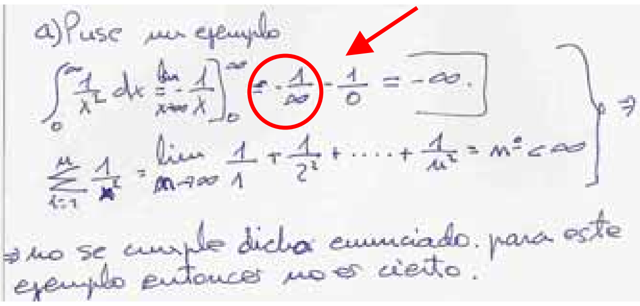
Por último, mencionamos al estudiante JC, que asiste por primera vez, que escribe "*que estas dos propuestas son ciertas, es más, creo que (por intuición) las relaciones existentes entre integrales impropias y series es muy grande*".



Yo creo que estas dos propuestas son ciertas, es más, creo que (por intuición) las relaciones existentes entre integrales impropias y series es muy grande.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

Los estudiantes AG y MG piensan que (a) no es cierto y buscan un contraejemplo, pero éste es erróneo. Su error está en no darse cuenta de que la convergencia de la integral de $1/x^2$ sólo se da a partir de un *a* positivo[232]:



a) Puse un ejemplo

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} = -\infty.$$

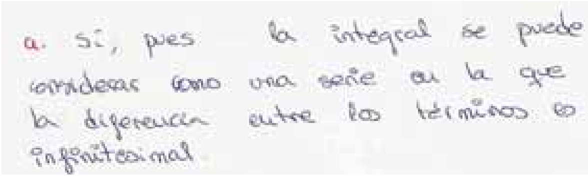
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} = n^o < \infty$$

$\Rightarrow$ no se cumple dicho enunciado. para este ejemplo entonces no es cierto.

Tal como se observa en el análisis *a posteriori* de la Sesión 3, al operacionalizar el Criterio de Comparación, los estudiantes no se centran en dividir el intervalo de integración o ver en qué intervalos son convergentes las integrales estudiadas.

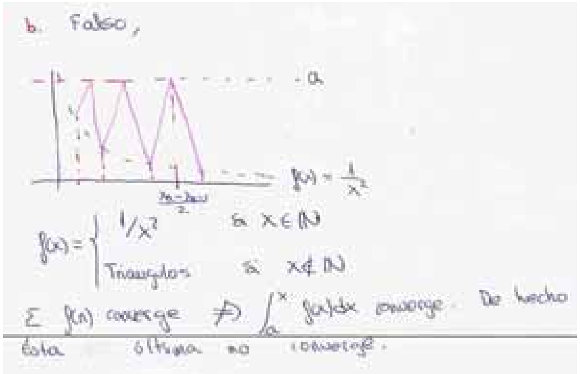
El grupo de CF, AB y WD (comandados por AB) se revela como muy creativo y gráfico. La primera cuestión les engaña y piensan que es cierta:

[232] Obsérvese también que evalúan directamente en ∞, repitiendo el error localizado por Camacho y Aguirre (2001), y que muestran problemas con los signos.



Como en los grupos precedentes, se ve una confusión entre las sumas de Riemann y la serie asociada a la función.

Sin embargo, en la segunda cuestión ven que es falsa y proporcionan un contraejemplo muy original y donde el registro gráfico es fundamental:

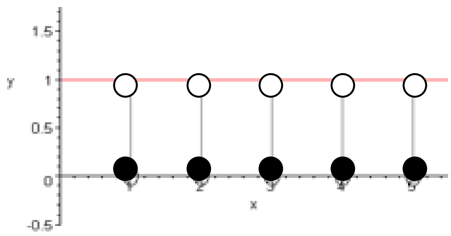


Este grupo muestra una asimilación de los contenidos y técnicas mostrados (en particular, la construcción de contraejemplos), un desarrollo de la intuición que permite relacionarlos entre sí y una aceptación del registro gráfico que, como se vio en la Sesión 3, se ha ido produciendo gradualmente.

De forma general, creemos que los grupos se han apropiado de la cuestión y han intentado responderla, aunque sus concepciones erróneas han producido dificultades que no habían sido previstas.

Durante la puesta en común, el profesor pregunta en la pizarra si alguien cree que la primera afirmación es falsa, a lo que nadie responde. Observamos aquí que el grupo de AG y MG no dice nada, lo cual revela que hay estudiantes que, aún teniendo cosas que aportar, no participan. Probablemente, el motivo principal es la inseguridad en sus razonamientos, aunque también el poco hábito a hablar en clase y la vergüenza pueden influir. Por tanto, se verifica también una de nuestras conjeturas hechas en la Sesión 1: muchos estudiantes no participan a pesar de tener cosas que aportar, simplemente por motivos de vergüenza, lo que ha dificultado la entrada en el debate científico en un espacio tan corto de tiempo.

El profesor se confunde y presenta en la pizarra el primer contraejemplo previsto para la segunda cuestión:



Los estudiantes parecen quedarse asombrados, pero van aceptando el contraejemplo (SM y YG van respondiendo a las preguntas que hace el profesor durante su construcción).

Después, se pregunta si alguien cree que la segunda cuestión es falsa. Es entontes cuando interviene el grupo de AB, CF y WD y presentan su contraejemplo. Al principio los compañeros no lo ven y el profesor pide a AB que lo dibuje en la pizarra. Con el dibujo y la explicación del profesor, los estudiantes van comprendiendo.

Sin embargo, JB tiene dudas pues no le queda claro cuál es la función final, por lo que el profesor la repasa en rojo. Posteriormente, EG reconoce que no ve por qué el área es infinita, y el profesor explica cómo el área sobre cada intervalo entero tiende a la de un triángulo. YG y JH también preguntan.

Probablemente, en este contraejemplo, el trabajar conjuntamente con la función que en cada entero vale $1/n^2$ (es posible que los estudiantes asocien esto a una sucesión y conjugar una función que toma en los enteros los valores de una sucesión les confunde) y cuya integral viene dada por la "suma de unos rectángulos" resulta complejo para los estudiantes; se conjugan a la vez varios elementos no prototípicos.

Posteriormente, JB aclara que este contraejemplo corresponde a la primera cuestión de la pizarra (se escribieron en orden inverso), así que una vez que se aclara, parece que los alumnos lo entienden.

Posteriormente, el profesor muestra a los alumnos más contraejemplos: para la segunda cuestión recuerda el caso de la función que forma rectángulos de base $1/n^3$ y altura n, que origina una integral convergente y una serie divergente (los estudiantes parecen recordarla, lo que apoya la conjetura de que fue comprendida en la Sesión 3. Tan sólo JB pregunta cómo se forma, pues no estuvo presente en la Sesión 3); después muestra la Transparencia 4, con funciones sinusoidales que originan series convergentes e integrales divergentes.

El profesor recalca que la intuición nos engaña y que se estudiará bajo qué condiciones se da la igualdad entre el comportamiento de la serie y de la integral porque "*hasta ahora nos cuadraba todo. El próximo día vamos a ver por qué nos cuadraba*".

Enunciado y demostración del Test Integral:

El profesor dice que enunciará el Teorema para que lo piensen durante los próximos días sin clase y lo escribe en la pizarra. Se subrayan las condiciones de ser f positiva, decreciente y continua y se señala que en el contraejemplo de AB, CF y WD la función no es decreciente, al igual que en los otros presentados.

Por falta de tiempo, no se puede demostrar este teorema.

El contrato didáctico:

Nos seguimos mostrando muy entusiastas con las reacciones de los estudiantes, aunque en esta sesión ha costado algo arrancar con el repaso de resultados.

Los estudiantes se han mostrado muy receptivos y han participado bastante en clase (EG cada vez participa en voz más alta; el grupo de AB, WD y CF se va animando; SM ahora interviene bastante; todo esto además de los habituales). Seguimos observando que los estudiantes, en los pequeños grupos de trabajo, participan y debaten entre ellos de forma muy activa.

En esta sesión creemos que se ha producido una devolución significativa del conocimiento con las cuestiones planteadas.

Este grupo parece reaccionar bien a la metodología empleada y se producen devoluciones. Por otro lado, los estudiantes se implican cada vez más y ya no se extrañan de los debates grupales, ni de las fichas de trabajo o de que se les pida su opinión o que salgan a la pizarra. Esto nos parece un éxito después de sólo cuatro sesiones. Como afirma Legrand (2001), el establecimiento de debates en el aula es un proceso lento que requiere una gran inversión de tiempo y esfuerzo, y es probable que no tenga éxito inmediato. Opinamos que no es posible para nuestros estudiantes (dada su formación y hábitos en el aula) llegar al extremo del debate científico a lo largo de nuestra Ingeniería, aunque sí se intentará mantener la participación de los estudiantes.

Mencionamos también que antes de que empiece la clase se devuelven las tablas de convergencia con correcciones a los alumnos; algunos parecen sorprenderse de que se les devuelva corregida. Pero parece que esto anima a que otros alumnos entreguen la suya. De los 23 alumnos presentes, ya son 16 (un 72’72% de los 22 estudiantes habituales presentes) los que han entregado sus tablas, lo que interpretamos como un índice aceptable de responsabilización de la tarea.

Gestión del tiempo:

En esta sesión no se ha cumplido con la planificación programada; ha faltado la demostración del Test Integral.

Episodio	Duración prevista	Duración real
1	5 min.	5:20 min.
2	8 min.	11:23 min.
3	24 min.	40:36 min.
4	21 min.	≈ 2:41 min.

Para tratar de mejorar la gestión del tiempo y que los debates en grupo no sean tan largos en esta sesión se emplea una nueva táctica: los alumnos debaten juntos pero luego escriben personalmente sus conclusiones. Sin embargo, no parece que se ahorre mucho más tiempo que de la forma habitual.

Profesor:

El profesor ha continuado en esta sesión realizando producciones gráficas en la pizarra y utilizando tizas de colores que permitan a los estudiantes distinguir mejor los distintos elementos tratados. También anuncia a los estudiantes los cambios de bloque para que puedan distribuir adecuadamente sus notas de clase.

Por otro lado, continúa promoviendo la participación entre los estudiantes y ha presentado los ejemplos previstos. A pesar del despiste de cambiar el orden de las cuestiones del Episodio 3, no creemos que haya sido un fallo significativo.

Finalmente, entrega a los estudiantes sus tablas de convergencia corregidas, lo que consideramos útil para que los estudiantes se den cuenta de que el material entregado es evaluado de alguna forma.

Algunas conclusiones:

Nuevamente, apuntamos que conviene ser mucho más fiel, de ahora en adelante, a la programación prevista. Aunque es cierto también que si los debates se alargan es porque los estudiantes hablan y trabajan, hay problemática real y responsabilización de la tarea.

También observamos un conjunto de interacciones globales que dinamizan las actividades. Ciertamente, algunos estudiantes se erigen en "líderes" de los grupos de debate y, además, se ve alguna competitividad entre grupos, lo cual estimula la reflexión. El estudio con detalle de estas interacciones podría resultar interesante.

Desprendemos las siguientes consecuencias para las siguientes sesiones con ambos grupos:

- Se intentará ser muy puntuales en el desarrollo de las próximas sesiones.
- Hoy se ha cambiado un poco la forma de recoger datos. Los estudiantes trabajan en grupos y luego cada uno entrega su ficha. Sin embargo, esto no parece ahorrar mucho tiempo.
- Los alumnos han respondido positivamente cuando se les ha devuelto la tabla de convergencia corregida y tres más se han animado. Se tiene pensado pedir también la resolución de algunas cuestiones de las hojas de problemas, que será útil para analizar cómo operacionalizan los elementos vistos en clase.
- Pensamos que conviene realizar una transparencia resumiendo los contraejemplos de esta sesión, para que a los estudiantes les queden claros, en particular el de AB. También habrá que abordar la diferencia entre suma de Riemann y serie asociada y algunos obstáculos que aparecen de forma natural.

5.2.6. ANÁLISIS DE LA SEXTA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 6

Se comienza la sesión sobre las 12:00 y los estudiantes se encuentran en su mayoría en el aula (23 alumnos en total). Dos alumnas entregan sus fichas. La disposición es la siguiente:

EG, JB	
NA, IG, SM, CC	AC, YC, LP, DC, YG
	EY, NB, NG
FG, MI, SD, RA	
WD, AB, CF	AG, MG

<u>Episodio 1:</u>

Dura 20:00 minutos.

Al comienzo de la sesión el profesor anuncia a los estudiantes que para la próxima sesión han de entregar resueltos los problemas 21, 24 y 28 de las hojas, recordando que se corrigió el enunciado del número 21 y sus horas de tutorías.

Comienza el repaso de los últimos resultados, con la participación novedosa de NB, entre otros. Es AB quien recuerda que para tener igual comportamiento entre la integral impropia y la serie asociada han de darse tres condiciones y también participa SM.

El profesor pone el enunciado del Teorema en transparencia y explica lo que éste dice. Comienza la demostración para el caso $N = 1$. El estudiante JB intentó la demostración en casa, pero no es correcta.

El profesor recuerda que propuso pensar gráficamente. Durante la demostración JB y YG tienen algún problema, pero se resuelve.

Al final de este episodio se tiene:

- Se pide a los estudiantes que entreguen tres problemas resueltos.
- Se repasan los resultados de la sesión anterior. NB participa por primera vez.
- Se demuestra el Test Integral.

Episodio 2:

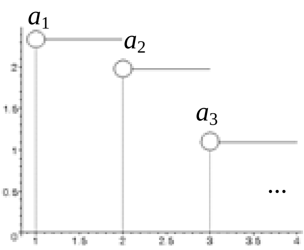
Dura 13:14 minutos.

El profesor recuerda el contraejemplo construido por AB, WD y CF usando una transparencia, recordando cómo se construía. Posteriormente, muestra otra función que usa la misma idea, pero más sencilla.

Tras esto, explica que algunos concluyeron que al ser la integral convergente, convergían las sumas de Riemann, luego la serie asociada era convergente. Usando otra transparencia, se visualiza la diferencia entre las sumas de Riemann y la serie asociada a una función.

Posteriormente, aclara que el hecho de que una función tienda a cero no implica que su integral converja (poniendo el ejemplo de $1/x$), ni viceversa (poniendo el ejemplo de la función construida en la Sesión 3). Lo escribe en la pizarra y JB pregunta cómo se definía esta función; el profesor lo vuelve a explicar.

Por último, se aclara que, hasta el momento, nunca se ha impuesto que la función a integrar sea continua. Representa en la pizarra una sucesión (como puntos sobre cada entero *n*) y luego crea una función continua a trozos a partir de estos puntos:



Con este dibujo, comenta que la integral de esta función coincidirá con la suma de la serie, pues los rectángulos tienen todos base 1, por lo que su área coincide con la altura. De esta forma, se puede ver una serie como una integral, por lo que son aplicables los criterios estudiados.

Pregunta si hay dudas, pero nadie dice nada.

Al final de este episodio se tiene:

- Se revisa el contraejemplo construido por AB, CF y WD en la sesión anterior y se aportan otros más sencillos.
- Se muestra, gráficamente, la diferencia entre las sumas de Riemann de una función en un intervalo $[a, b]$ y la serie asociada a tal función.
- Se aclaran los elementos previstos.
- Se comenta de manera informal cómo se puede interpretar una serie como una función, de forma que los criterios estudiados son válidos para series.

Episodio 3:

Este episodio dura 3:58 minutos.

El profesor anuncia que se comienza un nuevo bloque, dedicado a la integral de funciones que cambian de signo. Establece la definición de convergencia absoluta.

Episodio 4:

Este episodio dura 17:18 minutos.

Se recuerda que si una función es Riemann-integrable en un intervalo [*a*, *b*], su valor absoluto también lo será y se escribe en la pizarra. El profesor plantea a los alumnos si se mantendrá la propiedad cuando $b = \infty$ y da tiempo para pensarlo en grupos. En total, se tiene unos 8:17 de trabajo grupal.

Una vez que se acaba el tiempo, comienza la puesta en común. Nadie afirma pensar que sea cierto, algunos dicen que es falso (se distingue: YG, EG, WD, CF, DC, SM, IG) y tan sólo JB afirma tener dudas. El profesor anuncia entonces que es falso y propone usar lo que se sabe sobre series, sin embargo nadie recuerda un contraejemplo de series (JB propone funciones sinusoidales). Una vez el profesor escribe la serie armónica generalizada, algunos estudiantes afirman que les suena (se distingue: WD, AB, CF, CC, IG), pero a varios no les suena de nada (se distingue: AG, NB, EY, LP, DC). El profesor pregunta si se les ocurre cómo construir una función, pero nadie aporta nada, por lo que él la construye.

En este momento, YG pregunta por qué la integral coincide con la suma de la serie, pues no se dan las condiciones del Test Integral. El profesor responde y parece quedar claro. Finalmente, anuncia que hay otros contraejemplos (como $f(x) = \frac{\sin x}{x}$) que se verán más adelante.

Acaba el episodio con la definición de la convergencia condicional. Se tiene:

- Se recuerda que en el caso de Riemann la integrabilidad de una función asegura la de su valor absoluto.
- Se produce una reflexión en pequeños grupos sobre la generalización de esta cuestión, tras la que ningún estudiante piensa que sea cierta.
- El profesor construye en la pizarra el ejemplo previsto para mostrar que la convergencia de la integral no asegura la convergencia absoluta.

Episodio 5:

Dura 5:30 minutos.

El profesor enuncia el Criterio de Cauchy, aclarando que no se probará; explica su significado y lo relaciona con series.

Acaba la sesión recordando que los ejercicios deben ser entregados y se acuerdan los horarios de las sesiones con ordenador.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 6

Siguiendo el esquema habitual, en las observaciones hechas sobre los estudiantes distinguimos las siguientes dimensiones, de acuerdo con los objetivos planteados:

- Enunciado y demostración del Test Integral.
- Repetición del contraejemplo construido por AB, WD y CF.
- Mostrar la diferencia entre sumas de Riemann y serie asociada a una función.
- Aclaración de que $\int_a^\infty f(x)dx < \infty \not\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y otras cuestiones.
- Explicación informal de por qué los criterios de series coinciden con los de integrales impropias.
- Definición de la convergencia absoluta y condicional y enunciado del Criterio de Cauchy.

- Reflexión sobre si la convergencia implica convergencia absoluta.
- Mantener la implicación de los estudiantes en las actividades.
- Mejorar la gestión del tiempo.

Estudiantes:

Enunciado y demostración del Test Integral:

El profesor pone el enunciado del Test Integral en una transparencia y pregunta si alguien pensó en una demostración. El único que dice haberlo hecho es JB. Sin embargo, observamos en su esquema que se restringe al registro algebraico y comete algunos errores (como confundir sumas de Riemann con la serie. Afirma que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0 \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y $\int_N^{\infty} f(x)dx$ divergen, lo que muestra que prevalece un modelo continuo, quizá monótono, por lo que el hecho de que $a_n \to l$ le hace pensar que $f(x) \to l$ también; posteriormente, estudia casos particulares).

Se procede a la demostración del teorema. El profesor va aclarando cada paso del razonamiento gráfico, relacionándolos con las hipótesis del Test (por ejemplo, al dibujar los rectángulos mayorantes: "*Por ser decreciente, todos los rectángulos van a estar por encima de la curva*", o, más adelante: "*Fíjense que aquí es imprescindible que la función sea decreciente para hacer lo que estamos haciendo"*). Algunos estudiantes (en particular, JB) no ven a la primera que el área de cada rectángulo coincide con su altura, por tener base 1, por lo que el profesor ha de explicitarlo. Esto revela evidencias de no interpretar gráficamente las series. Esta no coordinación permita que se confundan posteriormente las sumas de Riemann y la serie asociada (sólo se considera el término "series"), mientras que una imagen gráfica adecuada ayudaría a combatir esta dificultad.

Hay evidencias de que aún el razonamiento gráfico, en particular relacionado con series, causa dificultades a los estudiantes. Como otro ejemplo, citamos que YG pregunta en medio de la demostración si "*los a_1 y los a_n son iguales* [*en los dos dibujos*]", por lo que hay que precisar: "*Sí, sólo que en un caso se proyectan encima de la curva y en el otro, por debajo. Pero los a_n son fijos*". Esto está de acuerdo con lo observado por Duval (2000), para el que muchos estudiantes que no realizan tareas de coordinación perciben que, al cambiar el registro (o la representación), cambia el objeto representado.

Creemos que, en general, el razonamiento algebraico desarrollado ha quedado claro a los estudiantes, aunque sigue habiendo dificultades para visualizar la serie asociada a una función. No sabemos si esta dificultad inesperada se debe al uso del registro gráfico o de la serie asociada, que ya hemos visto en la sesión anterior que causa dificultades.

Durante el Episodio 4, una vez construido el contraejemplo previsto, YG plantea una cuestión que interpretamos como evidencia de estas dificultades con la conjugación de series e integrales en el mismo gráfico (y quizá que no se ha comprendido bien el enunciado del Test): Una vez se construye el contraejemplo, el profesor muestra que su integral coincide con la serie (usando lo explicado sobre ver las series como una integral). Entonces, YG pregunta: "*¿La función no tenía que ser continua para que fuera igual el carácter?*"[233].

[233] Apreciamos dificultades con la lógica de las Matemáticas (ver Artigue, 1995a, citada en la Sección 1.1.). YG interpreta que las condiciones que en este Test aseguran la igualdad de carácter han de darse siempre, cuando sólo son suficientes y no necesarias.

A esta pregunta se responde: "*Sí*[234]*, pero hay ejemplos de funciones discontinuas que lo cumplen. Por ejemplo, ésta. Aquí, la integral coincide con la serie, estoy calculando lo mismo. Siempre que la función sea escalonada entero a entero, la integral coincide con la serie*". El profesor también aclara que el hecho de que no se den las condiciones no implique que no se dé la igualdad y resalta que, en este caso, se ha construido la función de forma que coincida con la serie.

Las grandes dificultades observadas en los estudiantes para coordinar los dos registros cuando se combinan series e integrales, además de la aparente incapacidad de interpretar gráficamente la suma de una serie y la confusión entre la serie asociada a una función y sus sumas de Riemann (y, por tanto, con su integral) no estaban previstas. Éstas pueden producir que no quede clara la demostración del Test ni cómo aplicarlo.

<u>Repetición del contraejemplo construido por AB, WD y CF:</u>

En esta sesión se han aclarado algunas cuestiones que se observaron en la Ficha 3 y creemos que ha sido útil para los estudiantes.

En primer lugar, se repite el ejemplo dado por AB, WD y CF en la sesión anterior utilizando la Transparencia 7 y se da la alternativa para construir una función más sencilla utilizando la misma idea (de forma que ésta, en vez de valer $f(n) = 1/n^2$ vale $f(n) = 0$). Parece que esta vez queda más claro a los estudiantes, pues no se hacen cuestiones como en la sesión precedente.

Por otro lado, ya se ha visto que a veces los estudiantes tienen cosas que decir y no intervienen, por lo que la no presencia de cuestiones no ha de implicar que se haya comprendido lo expuesto. Se ha de tener presente también las grandes lagunas de los estudiantes en los conocimientos previos y sus dificultades para conjugar series e integrales.

<u>Mostrar la diferencia entre sumas de Riemann y serie asociada a una función:</u>

En segundo lugar, se intenta aclarar la diferencia entre las sumas de Riemann y la serie asociada a una función. Se utiliza la Transparencia 8 y comentarios como:

- "*Si yo integro en* [2, 5]*, las sumas de Riemann, si la función es integrable, convergen.* [...] *Pero esa serie, en principio, no tiene nada que ver con ésta* (mostrando la serie asociada)".
- "*La serie asociada son rectángulos de base* 1*, mientras que la serie de Riemann son rectángulos que la base tiende a cero*".
- "*En ésta* (señala la gráfica con sumas de Riemann)*, la suma de Riemann coincidirá con la integral de la función, pero sin embargo ésta* (señala la gráfica con la serie asociada) *no coincide con la integral de la función porque la base es fija, la base es uno*".
- "*No confundan la suma de Riemann con la serie asociada a la función. Son cosas diferentes*".

Aunque en principio parece que queda claro (no hay cuestiones ni dudas al final), parece que el concepto de serie asociada causa más dificultades de las previstas.

[234] Aunque ya se ha comentado (Sección 4.4.5.) que esta condición no es necesaria en realidad, aparece en el enunciado elegido.

Aclaración de que $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty \not\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *y otras cuestiones:*

Se explica en la pizarra que las siguientes dos implicaciones:

$$f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ convergente}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ convergente} \Rightarrow f(x) \to 0$$

son falsas. Para la primera se da el contraejemplo de la función $1/x$ y para la segunda se recuerda la función definida a trozos de la Sesión 3. JB sigue teniendo problemas con esta función (“*Y la función ésa, ¿cómo se define?*”; no asistió a la Sesión 3) y se le vuelve a explicar (en la última sesión se hizo un poco rápidamente) cómo se construye; parece que esta vez lo comprende pues se le pregunta si queda claro y asiente.

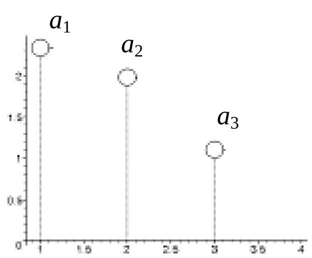
Se pregunta a los estudiantes si les queda alguna duda sobre esta cuestión y responden que no.

Se ha visto con estas cuestiones la resistencia de algunas intuiciones erróneas, de forma que se analizará la persistencia de éstas en los materiales escritos de los estudiantes.

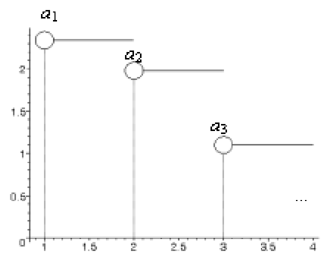
Explicación informal de por qué los criterios de series coinciden con los de integrales impropias:

Por último, se explica en la pizarra que una sucesión puede ser extendida a una función escalonada y que, en este caso, la serie coincide con la integral de tal función. Todo esto se hace utilizando el registro gráfico.

El profesor comenta: “*Ustedes, hasta ahora, una sucesión a_n, ¿cómo la representaban? Con puntitos, ¿no?*” y dibuja:



Y continúa: “*Pues fíjense, si yo hago lo siguiente hemos convertido la sucesión en una función*”.



Aunque esta formulación no es del todo correcta (pues la sucesión ya es una función), pensamos que la idea queda clara: se extiende la definición de forma que la función esté definida para todo real. Tras esto, el profesor añade: “*Y fíjense ustedes qué curioso, que la suma coincide con la integral*” y escribe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{\infty} f(x)dx$$

Este último razonamiento se aclara: "*Porque la suma, ¿qué es? Como la base es uno... el área de este rectángulo es a_1 precisamente, el área de este rectángulo es a_2* [...]. *Luego si yo sumo $a_1 + a_2 + a_3$ ... es lo mismo que si yo sumo el área de este rectángulo, más el área de este rectángulo, más el área de este rectángulo, etcétera.* [...] *Y eso es lo mismo que integrar esta función que es continua a trozos*".

Con esto, se justifica lo siguiente: "*Luego yo puedo ver una serie como una integral impropia; por tanto, cualquier criterio que hayamos visto para integrales impropias, siempre que no imponga que la función sea continua, va a ser válido para series, porque es lo mismo.* [...] *Por eso, todos los criterios que ustedes han visto para series coinciden con los que ustedes han visto para integrales*".

Se justifica de esta forma por qué los criterios de series coinciden con los ya estudiados, al poder interpretar gráficamente la serie como una integral. Este último punto ofrece mayores resistencias; aunque algunos estudiantes parecen aceptar la identificación hecha, es seguro que las dificultades observadas impiden una correcta coordinación de estos conceptos y seguramente se volverán a repetir.

Definición de la convergencia absoluta y condicional y enunciado del Criterio de Cauchy:

Se presenta el último bloque correspondiente a integrales impropias de primera especie. En este momento, se comenta a los estudiantes que el recorrido que se ha seguido es el mismo que ellos siguieron al estudiar las series y varios alumnos asienten (parece que algunos estudiantes establecen paralelismos entre algunos resultados, como se analiza en el siguiente punto).

Antes de pasar al Episodio 4, se escribe en la pizarra la definición de convergencia absoluta y, una vez que finaliza el Episodio 4, se presenta la definición de convergencia condicional (después del trabajo realizado en la puesta en común, queda más claro la utilidad de esta definición, pues hay funciones cuya integral converge, pero no la integral de su valor absoluto) y se anuncia que en la próxima sesión se estudiará la convergencia absoluta. Se adelanta el resultado de Cauchy y se hace ver su parecido con el criterio para series; nuevamente, no sabemos en este punto si será fácil para los estudiantes traducir este resultado del lenguaje de integrales al análogo para series.

Reflexión sobre si la convergencia implica convergencia absoluta:

El profesor plantea a los estudiantes la cuestión (problema 34 de las hojas) para que debatan en grupos. Posteriormente, es necesario aclarar que el término "*existe*" en nuestro caso significa "*es convergente*".

Durante el trabajo en grupos, algunos estudiantes muestran comenzar a pensar en series (lo que puede reflejar el establecimiento de algunos paralelismos entre series e integrales mostrados en esta sesión), aunque observamos que el principal problema es que los estudiantes tienen un conocimiento muy inestable sobre series y muy memorístico, lo que produce que no recuerden ejemplos y contraejemplos patrones.

El grupo de FG, MI, SD y RA no consigue avanzar. No tienen claro si será cierto o no lo será.

AG y MG tampoco consiguen centrarse. No están seguros de su veracidad o falsedad.

El grupo de NA, IG, SM y CC trabaja de forma un poco independiente. CC no se pronuncia; SM está convencida de que es falso, aunque no puede explicar por qué y sus otras dos compañeras piensan que es falso, aunque no se deciden.

El grupo de CF, AB y WD concluye rápidamente que es falsa. Sin embargo, no atinan a encontrar un contraejemplo. Su idea proviene del conocimiento de que la proposición es falsa para series. Después de su aportación en la sesión anterior y su seguridad con este resultado, pensamos que este grupo está realizando las transferencias esperadas.

YC, AC, YG, DC y LP trabajan casi en simultáneo con EY, NB y NG. Estos dos grupos piensan que es falso porque para series lo es. Sin embargo, no pueden recordar ningún contraejemplo. Además, añaden que el hecho de tener una definición de convergencia absoluta implica que no siempre se va a dar la afirmación (pues si toda función cuya integral converge, convergiera absolutamente, la definición sería redundante). Este grupo también utiliza los resultados de series para abordar esta cuestión; pero, al igual que con el anterior, no recuerdan ningún contraejemplo de series, por lo que la construcción de un contraejemplo para integrales queda bloqueada. Esta situación no estaba prevista, pues se había supuesto que algunos estudiantes lo recordarían**.**

EG y JB piensan que es falso. Curiosamente, no recuerdan el contraejemplo típico (sinx/x; JB lo menciona, pero cree que es una serie alternada que no converge absolutamente).

Se hace posteriormente la puesta en común y el profesor pregunta qué opinan en general. Aproximadamente la mitad de la clase opina que es falso, aunque nadie tiene un contraejemplo. El profesor expone al gran grupo que la mayoría de los que han dicho que es falso lo dicen "*porque algunos me han dicho que con series es falso; si una serie converge, no tiene por qué converger absolutamente*".

Sin embargo, pregunta si recuerdan algún contraejemplo de series que lo cumpla, pero nadie se acuerda. JB plantea las funciones sin x, cos x, pero se le dice que no valen como series alternadas. El profesor insiste: "*¿Cuando dieron el Criterio de Leibniz no les suena otra?*". Como nadie aporta nada, es él quien escribe en la pizarra:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

y pregunta si alguien conoce el resultado (levantan la mano, entre otros: WD, AB, CF, CC, IG) y a quién no le resulta conocido (levantan la mano, entre otros: AG, NB, EG, LP, DC). Como se ve, nuevamente las carencias de conocimientos previos dificultan el desarrollo correcto de nuestra Ingeniería. Este conocimiento, que se suponía prototípico de la teoría de series, es reconocido por pocos estudiantes, y ninguno accedió a él durante el desarrollo de la tarea.

Posteriormente, pregunta si a alguien se le ocurre cómo se podría construir una función adecuada, pero nadie dice nada (pensamos que, nuevamente, esto se debe al no poder interpretar gráficamente la suma de una serie, a pesar de haberse mostrado en el Episodio 2). Por cuestiones de tiempo es él quien la construye y explica cómo funciona y que la integral de su valor absoluto coincide con la serie armónica, divergente.

Finalmente, el profesor expone que hay un contraejemplo continuo (sinx/x) que se demostrará más adelante.

Mantener la implicación de los estudiantes en las actividades:

Como se había previsto, se pide a los estudiantes que para la próxima sesión entreguen los problemas 21, 24 y 28 resueltos. Aunque les supondrá un inconveniente en el estudio de su examen parcial de otra asignatura, parece que aceptan la propuesta. Se espera un porcentaje de participación similar al que se obtuvo con las tablas de convergencia.

Los alumnos siguen mostrándose muy receptivos y trabajadores. WD y AB participan cada vez más (aunque siempre en voz bajita), SM sigue haciéndolo, JB lo hace también, EG también y en esta sesión NB se atreve a hacerlo; YG aparece en las últimas sesiones un poco menos participativo.

La primera intervención de NB en la Ingeniería se produce durante el repaso de la sesión anterior del Episodio 1. AB comenta que bajo determinadas condiciones se tiene que el comportamiento de la serie asociada a una función y de su integral impropia coinciden. El profesor pregunta qué más y SM añade que se estudiaron algunas funciones que originan una serie convergente aunque su integral no lo sea.

Algunos estudiantes siguen animándose a preguntar las dudas que les surgen (JB, YG) y, en las discusiones grupales, los estudiantes participan en general (destacan EG, JB, YG, AB, WD, SM, CC). También se observa que, cada vez más, los estudiantes levantan el brazo cuando se les pide (JB, YG, EG, WD, CF, DC, SM, IG, AB, AG, NB, EY, LP...). Pero al tratarse esta sesión de una sesión con mayor carácter didáctico, ha habido menos oportunidades de participación.

Al final, el profesor plantea a los estudiantes la posibilidad de realizar algunas sesiones con el *Maple V* fuera del horario lectivo. Después de comentar algunas de las características del programa, solamente una estudiante dice conocerlo (AB). Este grupo se muestra dispuesto a realizar alguna sesión con el ordenador y se anuncia que se les comunicará cuándo se puede realizar[235].

Mejorar la gestión del tiempo:

En esta sesión sí se ha cumplido con la planificación programada; pensamos que esto se debe a que no se les ha entregado ninguna ficha de trabajo. La relación entre las duraciones estimadas y las reales es la siguiente:

Episodio	Duración prevista	Duración real
1	15 min.	≈ 20 min.
2	15 min.	≈ 13:14 min.
3	8 min.	3:58 min.
4	12 min.	17:18 min.
5	10 min.	≈ 5:30 min.

Profesor:

Ésta ha sido una sesión donde se abordan muchos contenidos, así que el desarrollo ha sido un poco rápido y con pocos momentos a-didácticos. Opinamos que el momento en que se aclararon algunos errores de la Ficha 3 era óptimo para que se animara la participación de los

[235] Al final de la sesión, YC se acerca al profesor para preguntar qué libro le recomienda utilizar. Éste le dice que la mayoría de los enunciados de los resultados se han tomado de Ortega (1993) y que en la próxima sesión le dará la referencia de Thomas y Finney (1996).

estudiantes y saber quiénes tienen las ideas más claras y quienes menos. Y, por razones de tiempo, no se ha hecho así.

Se sigue promoviendo el uso del registro gráfico, tanto para explicar algunos conceptos como para construir ejemplos y contraejemplos. Por otro lado, se presentan de forma explícita las relaciones con las series.

Destacamos como muy positivo el uso de transparencias, sobre todo para gráficos de gran complejidad. Además, escribir el enunciado de algún resultado en transparencias ahorra tiempo y permite que los estudiantes lo tengan siempre presente.

Algunas conclusiones:

Desprendemos las siguientes consecuencias para las siguientes sesiones:

- Se intentará seguir siendo puntuales en las últimas sesiones de esta Ingeniería.
- En las próximas sesiones el trabajo parece que dará menos lugar a debate. La observación del aprendizaje de los estudiantes se hará también a través de los materiales escritos que se ha pedido que entreguen.
- Se seguirán utilizando transparencias de forma más activa. Se tratará de representar en ellas los ejemplos y contraejemplos tratados, además de utilizarlas para recordar a los alumnos los enunciados de los resultados que se vayan a utilizar.
- Resultará conveniente incluir algunas cuestiones que en esta sesión se han revisado en el Test de contenidos para saber hasta qué grado lo han entendido los alumnos.

6.2.7. ANÁLISIS DE LA SÉPTIMA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 7

Se comienza la sesión sobre las 12:00 y los estudiantes se encuentran en su mayoría en el aula (22 en total). Dos alumnos entregan sus fichas. Además, trece alumnos entregan los problemas marcados. La disposición es la siguiente:

EG, JB	
AR	
CC, NA, IG, SM	YC, JH, AC, LP, YG
FG	NB, MG, NG
MI, SD, RA	
WD, AB, CF	

Episodio 1:

Este episodio dura 6:11 minutos, aunque desde que comienza el repaso, dura sólo 3:11 minutos.

El profesor recoge los ejercicios que le entregan los alumnos y dice que quien no los haya entregado lo podrá hacer el siguiente día. Repite los horarios de tutorías.

Pregunta las principales conclusiones del día anterior y los estudiantes recuerdan el Criterio de Cauchy y la definición de convergencia absoluta. El profesor recuerda la de convergencia condicional y pone una transparencia con el contraejemplo construido y lo explica de nuevo. Posteriormente, recuerda que dijo que el Criterio de Cauchy era parecido al de series y pone el enunciado de series (y lo explica) y luego el de integrales.

Al final de este episodio se tiene:

- Los estudiantes han participado para recordar los resultados más relevantes.
- Se han revisado los resultados de la sesión anterior y se compara el Criterio de Cauchy con el análogo de series.

Episodio 2:

Este episodio dura 8:47 minutos.

Se enuncia el teorema de convergencia absoluta. Antes de demostrarlo, el profesor revisa los resultados a utilizar (Criterio de Cauchy y la integral definida del valor absoluto) con una transparencia. Durante la demostración hay una pregunta sobre notación que se resuelve rápido.

Una vez finalizada, JB pregunta una duda en un paso y el profesor se la aclara. Finalmente, el profesor comenta que este resultado se puede usar para probar la convergencia de muchas integrales de funciones que cambian de signo, probando que convergen absolutamente.

Al final de este episodio se tiene:

- Se enuncia y prueba el teorema de convergencia absoluta.
- Se preguntan dos cuestiones que se responden y los estudiantes que las han hecho dicen que queda claro.

Episodio 3:

Este episodio dura 19:21minutos. Se anuncia que se va a resolver el problema 37 de las hojas (ver Anexo 1).

Para el primer ejemplo, el profesor dice que se estudiará su convergencia absoluta, lo que implicará su convergencia. Una vez se escribe la integral del valor absoluto, una alumna plantea comenzar acotando el integrando. Con esto, el ejemplo se resuelve en unos cinco minutos.

El profesor dice que para el segundo ejemplo no se puede ver la convergencia absoluta, pues se dijo en la sesión anterior que esta integral es un ejemplo de convergencia condicionada. Plantea comenzar dividiendo el intervalo en dos, pues para comparar con $1/x^k$ es necesario que el intervalo no contenga al cero.

Una vez se obtiene la integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, EG dice que es de Riemann, a lo que se suma NB. Sin embargo, pocos estudiantes ven esto y es necesario aclarar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. El estudiante AC no acaba de verlo claro, por lo que se repite el razonamiento.

Una vez solucionada la primera integral, el profesor dice que a la segunda se le aplicará el teorema de integración por partes y verifica que se cumplen las hipótesis (el enunciado está en transparencia). En la deducción de *u* y *dv* pide ayuda a los estudiantes y participan. Una vez se acota la primera integral resultante, se hace ver que la segunda es como el primer ejemplo resuelto, por lo que resulta convergente.

Finalmente, se dice que hay más resultados sobre convergencia de integrales de funciones que cambian de signo y se propone resolver en casa el ejercicio 38 de las hojas.

Episodio 4:

Este episodio dura 9:42 minutos.

Se comienza el estudio de lo que sucede cuando la función no está acotada en el intervalo de integración y se anuncia que se pretende reducir todo el estudio de esta nueva situación a la situación anterior. Se usa la Transparencia 12 para visualizar la nueva situación.

Se supone que la función no está acotada en el extremo derecho del intervalo y pregunta cómo se definiría ahora la integral $\int_a^b f(x)dx$. Hay una pausa y plantea que pueden hablarlo entre ellos. Finalmente, dice también que busquen una integral de Riemann, como se hizo para la definición de integral impropia de primera especie, a lo que YG interviene y propone: $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$, pero no todos los estudiantes lo ven claro. El profesor hace una interpretación gráfica de lo que propone YG, y algunos estudiantes que antes no estaban seguros afirman estar ahora de acuerdo.

Al final se pregunta si alguien no lo entiende y nadie replica. Se institucionaliza la definición y el profesor hace notar que es la misma que se tenía. Pregunta cómo quedaría en caso de conocer una primitiva y utilizarla y una estudiante lo dice: $\lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Posteriormente, viene la interpretación gráfica y ningún estudiante está en desacuerdo con que las rotaciones no cambian el área, aunque sea de una figura infinita. El profesor usa la transparencia.

Episodio 5:

Este episodio dura 8:14 minutos.

Se revisa el Criterio de Comparación y se repasan sus conclusiones (participa NB). El profesor plantea la nueva situación, usando la Transparencia 13 y pregunta qué conclusiones se pueden sacar. Participan NB, YC y JH y se dicen las conclusiones.

Se escribe en la pizarra el nuevo enunciado añadiendo "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$"[236] y YG participa diciendo las conclusiones: si $\int f = \infty \Rightarrow \int g = \infty$ y si $\int g < \infty \Rightarrow \int f < \infty$.

El profesor recuerda que cuando se enunció el Criterio se hizo en un intervalo $[a, b)$ y que ahora, cuando $b = \infty$ se está en el caso anterior y cuando b es un número real se está en el caso de integrales impropias de segunda especie. Pregunta si la demostración cambiaría y varios alumnos niegan. El profesor repite el esquema de la demostración en la pizarra.

Episodio 6:

El profesor repite que el Criterio de Comparación sirve para integrales de primera y segunda especie y recuerda que se enunciaron luego dos corolarios, en el primero se estudiaba el $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. El profesor pregunta cómo habría que alterar el enunciado para que fuera válido en ambos casos y YG afirma que escribiendo: $\lim_{x\to b}$.

El profesor comenta los cambios que habría que hacer en la demostración y pide a los estudiantes que intenten escribirlos para la siguiente sesión.

Finaliza la sesión con la organización de los horarios de las sesiones en el aula de ordenadores.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 7

Siguiendo el esquema habitual, en la parte de los estudiantes destacamos las siguientes dimensiones:

---

[236] Recordamos que el Criterio ya fue enunciado en la Sesión 3 en un intervalo $[a, b)$.

- Enunciado, demostración y operacionalización del teorema de la convergencia absoluta.
- Construcción de la definición de integral impropia de segunda especie.
- Generalización del Criterio de Comparación.
- Generalización del Criterio del Cociente.
- Mantener la participación de los estudiantes.
- Ser fieles a la organización temporal.

Estudiantes:

Enunciado, demostración y operacionalización del teorema de la convergencia absoluta:

Antes de enunciar el teorema, se recuerda a los estudiantes el contraejemplo construido en la sesión anterior en una transparencia y se recuerda cómo se construye. Además, el profesor muestra el Criterio de Cauchy en transparencias.

Se enuncia el Teorema y se procede a su demostración. Como la demostración escogida nos parece muy formal y con detalles sutiles, el profesor muestra antes de comenzar los resultados que se utilizarán, señalando en la transparencia el Criterio de Cauchy y el teorema sobre la integral de Riemann del valor absoluto.

Durante la demostración comprobamos que, como se había previsto, la demostración es muy sutil (lo que, unido a las carencias de nuestros estudiantes en los procesos de demostración, puede resultar fatal). EG parece haberse confundido y piensa que se utiliza alguna implicación cuando se escribe "$\int_a^b |f(x)|dx$ *converge*". El profesor aclara que simplemente se está traduciendo lo que significa que "$\int_a^b f(x)dx$ *es absolutamente convergente*" y la estudiante dice que ha comprendido. Esta intervención apoya nuestra impresión de que la demostración es muy sutil y quizá no esté al alcance de todos los estudiantes, dado su bajo nivel; ya se remarcaron en la sesión anterior dificultades de los estudiantes en los procesos lógicos de las Matemáticas.

Durante el resto de la demostración no hay más preguntas, pero una vez se finaliza JB hace otra pregunta que apunta a que la demostración es muy sutil. JB pregunta por qué $\left|\int f\right| \leq \int |f|$ y el profesor señala la transparencia con el resultado de la integral del valor absoluto en el caso Riemann; JB asiente y dice que lo ha entendido. Como se ve, los dos únicos estudiantes que se han atrevido a preguntar han planteado cuestiones no esperadas (la primera cosa que no se entiende es una mera traducción del hecho de ser absolutamente convergente; la segunda, es la aplicación de un resultado puesto en transparencia), luego es de esperar que haya muchas dudas con esta demostración.

Todo esto a pesar de que "*Lo único que utilizamos es dos veces el Criterio de Cauchy y la propiedad del valor absoluto de la integral*". Conscientes de las dificultades que esta demostración conlleva, se ha decidido dedicar más tiempo a su operacionalización que a la demostración.

Se proponen los dos ejemplos y el profesor los resuelve en la pizarra.

Para el primero, aclara que una estrategia típica será estudiar la convergencia absoluta, que garantizará la convergencia usual. Cuando el profesor escribe $\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ y pregunta "*¿Se les ocurre algo que hacer con esta función?*", inmediatamente una estudiante (CC, SM o AR) dice "*Acotarla*" y rápidamente JH y YG ven que se ha de comparar la función resultante con $1/x^2$. Se enseña en transparencia el enunciado del Criterio de Comparación. Estas intervenciones dan a entender que el Criterio de Comparación es uno de los resultados que más claro ha quedado a los estudiantes.

El segundo ejemplo da algún problema. En primer lugar, se dice a los estudiantes que éste es el ejemplo típico de función con integral convergente pero que no converge absolutamente ("*Aquí podríamos pensar lo mismo de antes: ver la convergencia absoluta y la convergencia absoluta nos va a garantizar la convergencia usual. Pero si se acuerdan lo que les dije ayer, éste es un contraejemplo de función con integral convergente pero no absolutamente convergente*"), por lo que no se puede usar esa estrategia.

Después se les plantea que, si quisiéramos comparar con $1/x$, se debería tener el 0 excluido del intervalo, por lo que se divide la integral en dos. Una vez hecho esto, se pregunta a los estudiantes qué opinan que le sucede a la primera de las integrales. ($\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$) Después de un tiempo, EG es la primera en decir que es de Riemann. Posteriormente, otros alumnos se van sumando, como YG, CC, JH (curiosamente, AB no lo ve). El profesor dice que se tiene un intervalo cerrado y acotado y pregunta si la función está acotada, a lo que EG insiste que sí. Posteriormente, NB también lo afirma. El profesor pregunta quién lo ve, y levantan la mano EG, NB, CC y JB (EG se lo explica) del grupo que se ve en la grabación.

El profesor plantea que "*tendríamos problemas en el cero*", escribe: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ y pregunta "*¿Cuánto es ese límite?*". Una estudiante responde que vale 1 y el profesor pregunta a los demás si recuerdan este resultado y afirma "*Entonces esta primera integral es de Riemann*".

Sin embargo, AC interviene (¡por primera vez en voz alta!) y dice que sigue sin comprenderlo, por lo que se procede a una explicación más detallada tras la que parece que no quedan dudas. Nuevamente, estas intervenciones y las dudas de los estudiantes son indicadores de sus deficiencias. Naturalmente, la introducción de nuevas técnicas se dificulta, pues ya el uso de las antiguas es problemático.

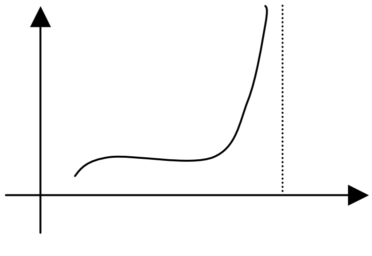
Con la segunda integral el profesor anuncia que se integrará por partes y muestra el enunciado de este Teorema en transparencia, recordando a los alumnos las hipótesis y las conclusiones. El profesor señala a u y dv y WD es quien calcula du y v. Finalmente, se divide la integral en dos y se comprueba que el primer límite está acotado (NB y YG colaboran) y el segundo se reduce a un caso como el primer ejemplo. Se concluye que es convergente.

Se pregunta si hay dudas o algo que repetir, pero nadie dice nada.

<u>Construcción de la definición de integral impropia de segunda especie:</u>

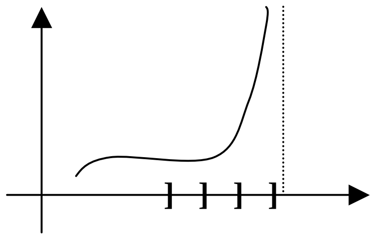
Al iniciar el estudio de las integrales impropias de segunda especie, algunos estudiantes han mostrado haber comprendido las ideas presentadas hasta el momento y han sabido adaptar la definición y el Criterio de Comparación al nuevo caso, lo que puede suponer una apropiación del saber institucionalizado hasta el momento (al menos, el que es menos formal)[237].

Al principio es necesaria alguna ayuda por parte del profesor. Así, después del silencio producido al preguntar qué definición darían para el nuevo caso, el profesor hace un dibujo para aclarar la situación:



[237] Recordamos que uno de los objetivos propuestos era utilizar esta parte como revisión de los resultados anteriores y para observar si los estudiantes los han aprendido.

También añade: "*Fíjense; tenemos que buscar, como la otra vez, integrales de Riemann*". Este comentario parece ser el que arroja luz, e inmediatamente YG propone calcular el límite: $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$. Ante la pregunta del profesor de qué opinan los demás, se ve a EG negar, AB afirmar que sí y NB dice que no sabe. Ante el escepticismo de algunos, el profesor aclara la idea de YG con un dibujo ("*Lo que plantea YG es hacer esto de aquí*"):



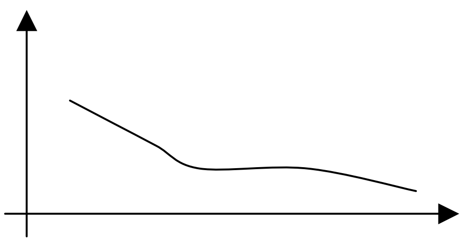
Cuando pregunta: "*¿Lo ven?*" se ve que ya EG asiente, así como NB y AC, entre otros. Finalmente, pregunta si alguien no lo entiende y nadie dice nada. Quizá una parte del escepticismo se deba a que la definición coincide con la anterior y los estudiantes esperaban otra distinta. Pero parece que el dibujo hacer ver que, efectivamente, la situación es la misma, el extremo superior de la integral es móvil y, mediante integrales de Riemann, se intenta llenar un intervalo. Creemos que el dibujo clarifica la situación pues posteriormente el profesor pregunta cómo quedaría la definición si se conociera una primitiva de la función y una estudiante dice rápidamente: $\lim_{x \to b} F(x) - F(a)$.

Se ve que para algunos estudiantes no parece haber mucho problema para aceptar la notación de un intervalo [*a, b*) genérico, pudiendo ser $b = \infty$. Para estos alumnos se estaría produciendo una aceptación de los resultados mostrados y un saber adaptarlos a la nueva situación, que era uno de los objetivos de nuestra propuesta.

Otros estudiantes, sin embargo, se han mostrado algo escépticos, aunque poco a poco parecen haber ido aceptando que los resultados enunciados se pueden generalizar.

La institucionalización se produce inmediatamente: "*Lo aceptamos como correcto y vamos a ir tomando un intervalo que cumpla las condiciones de Riemann y vamos a ir calculando la integral.* [...] *Si se fijan, la definición no es nada diferente de la que teníamos anteriormente. Y si conocemos la primitiva de una función y queremos utilizarla, ¿cómo quedaría la definición?*", a lo que responde una estudiante (SM, CC o AB). El profesor remarca que la definición es igual, sólo que antes $b = \infty$.

Posteriormente, se da una interpretación gráfica. Se plantea a los alumnos que el área es una propiedad invariante por giros y traslaciones y que el nuevo caso se puede estudiar de forma similar al anterior ("*Si yo hiciera una figura así:*



y moviera la figura, ¿el área se conservaría?" y se producen asentimientos: EG, AB, WD, NA...). Luego se muestran las gráficas de la transparencia. En la generalización de los resultados se observa si se producen discrepancias entre la definición e interpretación institucionalizados y las concepciones de los estudiantes.

Generalización del Criterio de Comparación:

Para hacer ver a los estudiantes que las cosas no serán tan distintas, se plantea el caso de una función que minora a otra. Se hace una gráfica en un intervalo infinito y se recuerdan las conclusiones que se podía obtener (participan NB y YG y se ve a EG asentir con la cabeza); se analizan también los casos en que la función mayorante diverge y la minorante converge y no hay dudas, lo que parece confirmar nuestra conjetura de que este resultado ha sido, en general, comprendido. Se muestra entonces la Transparencia 13 con dos funciones no acotadas en un intervalo finito y se pregunta a los estudiantes qué conclusiones pueden sacar ahora. Tras un momento, NB aporta conclusiones, aunque las enuncia al revés (comienza diciendo "*es lo mismo*", lo que denota que cree que se mantienen los resultados, aunque luego los diga al revés. Probablemente, se trate de un error fortuito). YC y JH comentan entre sí y es JH quien hace las correcciones, a lo que NB asiente (lo que interpretamos como síntoma de que se ha dado cuenta de su error).

Otros estudiantes (CC, EG, JB, SM, AB...) van asintiendo. Posteriormente, el profesor escribe en la pizarra las conclusiones del Criterio (que enuncia YG) y lo enuncia formalmente en la pizarra, recalcando que se sigue manteniendo. Además, pregunta si en la demostración se utilizó en algún momento que *b* fuese infinito. Ante la pregunta: "*¿Creen que la demostración cambiaría?*", se ve que JH, YG, SM y EG, entre otros, mueven la cabeza negativamente.

Sin embargo, algunos estudiantes no se muestran convencidos y NA (¡por primera vez!) interviene y dice que "no se cree el argumento". Por tanto, el profesor repite la demostración en la pizarra (hasta el momento en que queda planteado que $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx < \int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx$) y parece aclarar la situación.

Generalización del Criterio del Cociente:

Se recuerda a los estudiantes que también se enunció un corolario donde se calculaba el límite en el infinito del cociente entre funciones y se les pregunta cómo cambiarían el enunciado. YG dice que habría que calcular el límite cuando *x* tiende a *b*.

El profesor lo aprueba y hace un pequeño recordatorio de la demostración. Pide a los estudiantes que para la próxima sesión reformulen el criterio de forma que siga siendo válido y miren si hay que realizar cambios en la demostración.

Mantener la participación de los estudiantes:

En este grupo ha habido buena aceptación de la propuesta de entregar problemas (los han entregado el 61'90% de los 21 estudiantes habituales presentes en esta sesión) y algunos alumnos han pedido entregarlos en la siguiente sesión.

Los estudiantes siguen mostrándose muy receptivos y trabajadores. WD y AB participan cada vez más (siempre en voz bajita), SM ha participado también, CC ya participa cuando se pregunta si se ha entendido lo explicado, EG se anima a hablar en voz algo más alta, JB sigue participando, NB ha vuelto a atreverse en esta sesión y AC y NA han participado y preguntado dudas por primera vez; YG ha vuelto a adoptar un rol más activo y JH ha vuelto (no estuvo en la anterior sesión) y ha participado. Seguimos notando cómo más estudiantes se van implicando y participan. También es positivo que estudiantes que nunca habían intervenido se animen a preguntar sus dudas en voz alta[238].

Ser fieles a la organización temporal:

En esta sesión también se ha cumplido con la planificación programada; nuevamente, debido a que no se ha entregado ninguna ficha de trabajo, al carácter más didáctico de esta sesión y a que, tal como se había previsto, los resultados de las integrales de segunda especie se pueden deducir de forma más rápida.

La tabla de duraciones se muestra a continuación. Se observa que, aunque no se han cumplido todas las programaciones, se han producido efectos de compensación entre las duraciones de los distintos episodios:

Episodio	Duración prevista	Duración real
1	5 min.	6:11 min.
2	15 min.	8:47 min.
3	10 min.	19:21 min.
4	10 min.	9:42 min.
5	10 min.	8:14 min.
6	5 min.	1:35 min. + organización sesiones con ordenador

Profesor:

Se sigue revelando muy positivo y efectivo el uso de transparencias, sobre todo para gráficos de gran complejidad. Además, escribir el enunciado de algún resultado en transparencias ahorra tiempo y permite que los estudiantes lo tengan siempre presente. En esta sesión ha sido de gran ayuda para recordar los enunciados de los resultados utilizados en cada momento.

[238] Señalamos que el día 4 de junio se acerca a Tutorías la alumna AB a aclarar algunas cuestiones.
Una de sus dudas es de terminología. Pregunta si cuando decimos "*f es integrable*" se quiere decir "*la integral de f es convergente*" y se le contesta que sí. Que los términos "*f es integrable*", "*f es integrable en sentido impropio*" y "*la integral de f es convergente*" son equivalentes. Otra de sus cuestiones es sobre la definición de integrabilidad local. Se le aclara y pregunta si ser localmente integrable implica ser integrable. Se le dice que no y que piense un contraejemplo y rápidamente dice que las funciones constantes.
Se le pregunta qué opina de la metodología seguida y dice que ve muy positivo que se les haga pensar antes de enunciar resultados. Eso hace que, al ir a estudiarlos, sea más fácil, pues los han trabajado previamente.
Se le pregunta cómo ha visto la generalización que se ha hecho en esta sesión y dice que la ha entendido. Que realmente no había recapacitado en por qué se escribía "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$" y hoy le ha dado su importancia y lo ha entendido.
Finalmente, se le pregunta sobre la participación en clase y ella dice que, en su caso, no tiene problema en hablar, pero lo hace siempre en voz baja porque la presencia de la cámara la cohíbe.

El día 5 de junio se acerca por la mañana JH al despacho del profesor para saber si habría prácticas con el ordenador por la tarde. Se aprovecha para preguntarle qué le parece la metodología empleada. Dice que le parece muy bien y que le gusta mucho, ya que cuando se sienta a estudiar los resultados "*los hemos hecho todos*" y que el reflexionarlos primero ayuda a recordar luego.
Se le pregunta cómo ve las demostraciones hechas y dice que "*normales* [*para estar en Matemáticas...*]", pero la ayuda de reflexionar previamente y de interpretar la mayoría de resultados es buena.

El profesor continúa promoviendo la participación de los estudiantes y el uso del registro gráfico mediante producciones en la pizarra (y en las transparencias) para aclarar conceptos y razonamientos.

Debido al carácter didáctico de esta sesión, no se ha tenido que dirigir ningún debate, sino preguntar a los estudiantes en general y resolver cuestiones cuando han aparecido.

Algunas consecuencias:

Desprendemos las siguientes consecuencias para la próxima sesión:

- Se debe conseguir ser fiel en la próxima sesión, que es la última de esta Ingeniería.
- Se seguirán utilizando transparencias de forma más activa. Se tratará de representar en ellas los ejemplos y contraejemplos tratados, además de utilizarlas para recordar a los estudiantes los enunciados de los resultados que se vayan a utilizar.
- Se prepararán transparencias donde aparezcan claramente los criterios como han sido enunciados y su nueva formulación para que sigan siendo válidos. Se tratará de interpretar gráficamente la mayoría de resultados.
- Se tratará de seguir relacionando en la próxima sesión ambos conceptos, con el objetivo de facilitar a los alumnos las generalizaciones y ayudar a los que aún tienen problemas para comprender los enunciados.

5.2.8. ANÁLISIS DE LA OCTAVA SESIÓN

DESCRIPCIÓN SESIÓN 8

Se comienza la sesión sobre las 12:00 y los alumnos se encuentran en su mayoría en el aula (19 en total). La disposición es la siguiente:

EG, JB	
	DC, YG
CC, NA, IG, SM	AC, YC, JH, LP
	AG, NG
SD, RA	
WD, AB, CF	

Episodio 1:

Este episodio dura 4.28 minutos.

El profesor comienza dando los horarios de tutorías a partir de la semana siguiente y EG le pide que repita. Posteriormente, anuncia que dará a los estudiantes las transparencias utilizadas durante las sesiones, a petición de algunos.

Comienza el repaso y el profesor recuerda que se había comenzado con el segundo bloque sobre integrales impropias de segunda especie. Recuerda que se había dado la definición y se conservaba la construida anteriormente; también se vio que el área era invariante mediante rotaciones y un Criterio de Comparación igual al que se tenía y planteó rescribir el corolario. Pregunta si alguien lo ha pensado, pero nadie responde.

Episodio 2:

Este episodio dura 2:54 minutos.

Antes de ver el corolario, se verán otros resultados. Afirma que se puede volver a definir una función integral y el teorema (que se muestra en transparencias) de que la convergencia de la integral es equivalente a la acotación de la función $F(x)$ sigue siendo válido; hace notar que en la demostración no se usa que $b = \infty$, sino que $f \geq 0$. F sigue siendo no decreciente y sólo se cambia que antes $x \to \infty$ y ahora $x \to b$.

Se retoma el criterio que había que volver a enunciar para esta sesión. El profesor especifica que el enunciado comienza con "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ ó $b = \infty$" y lo muestra en transparencia. Vuelve a indicar que hay que sustituir siempre $x \to \infty$ por $x \to b$. Y la frase "*para x suficientemente grande*" por "*para x suficientemente cerca de b*".

Episodio 3:

Este episodio dura 10:36 minutos.

El profesor señala que se puede pensar que todo lo que se ha hecho para primera especie se mantiene, pero no es así. Con la ayuda de alumnos, se recuerda que después se enunció el corolario para el caso de comparación con $1/x^k$. Sin embargo, en un intervalo $[a, b]$, estas funciones no generan integrales impropias, lo que genera que se estudie la familia $\dfrac{1}{(x-b)^k}$. Plantea a los estudiantes el estudio de la convergencia de la integral de esta familia. Tras unos 7:40 minutos de trabajo personal-grupal, se escribe y demuestra el resultado en la pizarra.

Tras esto, se particulariza el resultado para la familia $1/x^k$ en el intervalo [0, 1].

Se hace un gráfico resumen en la pizarra.

Episodio 4:

Este episodio dura 9:26 minutos.

Posteriormente, se da a los estudiantes un tiempo para que traten de deducir el segundo corolario del Criterio de Comparación. Tras unos 3:47 minutos de trabajo personal-grupal, el profesor muestra el enunciado en una transparencia y hace algunas aclaraciones.

Episodio 5:

Este episodio dura 4:46 minutos.

El profesor aclara que los dos últimos son los dos únicos resultados que se van a estudiar distintos a los de primera especie y aclara que la parte de series e integrales es también específica de primera especie.

Se comienza un repaso de los resultados vistos, generalizándolos uno a uno. El profesor usa transparencias en esta parte. Se intenta hacer ver que en las pruebas nunca se usa que b sea infinito.

Se revisa la linealidad, la integración por partes, la convergencia absoluta.

Episodio 6:

Este episodio dura 6:46 minutos.

Se acaba el bloque anterior y se va a estudiar qué sucede cuando se combinan ambas situaciones, lo que algunos libros denominan "integral impropia de tercera especie". Se hace una gráfica de la situación y se pregunta a los estudiantes cómo se plantearía la integral, a lo que JH dice: "*Partirla en dos*".

Se da la definición y se establece cuándo la integral es convergente. Luego se estudian casos particulares usando el registro gráfico, con la colaboración de estudiantes, para ver si saben cómo dividir.

Episodio 7:

Este episodio dura unos 6 minutos.

Finalmente, se resuelve un ejercicio. El profesor aclara qué ejercicios son de integrales de primera especie (1-38), de segunda especie (39-45), de tercera especie (46-47), problemas más complicados (48-51) y de integrales paramétricas y eulerianas (52 en adelante). Se resuelve el ejercicio 46.

El profesor ejemplifica cómo el mal uso de la regla de Barrow da lugar a un resultado incorrecto y pasa a la resolución del ejemplo previsto. Toma la integral en el intervalo [1, 2] y una estudiante (WD o AB) dice que diverge. El profesor lo escribe claramente a los demás. Se concluye que la integral inicial es divergente.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* SESIÓN 8

En la parte de los estudiantes destacamos las siguientes dimensiones:

- Enunciado y demostración de los dos corolarios del Criterio de Comparación.
- Estudio de la convergencia de las integrales del tipo $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$.
- Generalización de los resultados enunciados previamente.
- Definición de la integral impropia de tercera especie.
- Operacionalización de la definición de integral impropia de tercera especie.
- Mantener la participación de los estudiantes.
- Ser fieles a la organización temporal.

Estudiantes:

Enunciado y demostración de los dos corolarios del Criterio de Comparación:

Una vez generalizado el resultado que identifica la convergencia de la integral de $f(x)$ con la acotación de $F(x)$ (el profesor explicita que no se utiliza en la demostración que $b = \infty$, sino que $f \geq 0$, para que $F(x)$ sea el área), se muestra en transparencia el primer corolario, pues ningún estudiante lo ha traído preparado (probablemente debido al examen parcial que están estudiando). El profesor remarca que hay que añadir "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$" y sustituir siempre "$x \to \infty$" por "$x \to b$" y que durante la demostración, cuando antes se decía "*para x suficientemente grande*", ahora habría que decir "*para x suficientemente cerca de b*".

Ningún estudiante pregunta dudas durante la exposición. Al terminar, el profesor pregunta si hay que aclarar algo y algunas cabezas niegan. No se habían previsto dificultades con este primer resultado que, por otra parte, ya fue abordado en la sesión anterior.

Una vez finalizado el estudio de la convergencia de las integrales de tipo $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$, el profesor recuerda que en el primer bloque, una vez visto el Criterio de Comparación y el primer corolario, se particularizó a una familia particular de funciones (y YG o DC dice que fue a la familia $1/x^k$) y pregunta "*¿Cómo particularizarían el criterio para este caso?*". Se añade: "*Si* *tienen el criterio delante, recuerden que sintetizamos y resumimos bastante* [lo muestra en transparencias]. *¿Qué hay que cambiar ahora?*".

Los estudiantes cuentan con unos 3:47 minutos para trabajar la cuestión. Durante este tiempo, algunos preguntan dudas al profesor (YG y DC, JH y YC, NG y nuevamente YG y DC).

Se comprueba que, en general, los estudiantes saben cómo reenunciar el criterio, aunque, al principio (como se había previsto), algunos tienen problemas con la nueva clasificación según los valores de k. También algunos estudiantes han mostrado dificultades para reconocer en la nueva situación el enunciado del criterio anterior (en particular, por la presencia de $|x - b|^k$). Una vez que finaliza el breve momento de trabajo grupal, el profesor muestra el nuevo enunciado en transparencia y hace dos aclaraciones:

- "*Hay que imponer que f no tenga asíntotas en* (a, b)".
- "*Hay que poner valor absoluto porque es negativo, para que sean las dos funciones positivas*".

Tras esto, aclara punto a punto las conclusiones del criterio. No se hace ninguna pregunta.

<u>*Estudio de la convergencia de las integrales del tipo* $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$</u> *:*

El profesor aclara que el estudio que se había realizado con las funciones $1/x^k$ se hizo en el intervalo [a, ∞), pero ahora nos encontramos en un intervalo [a, b], en donde esta familia no genera integrales impropias en general. De esta forma, se justifica que ahora se estudie la convergencia de la familia $\frac{1}{(x-b)^k}$ en el intervalo [a, b].

El profesor plantea que hay que ver nuevamente cuándo convergen las integrales de estas funciones y añade: "*¿Se acuerdan qué hicimos con la familia* $1/x^k$*? Pues vamos a hacer lo mismo. Está en los problemas*". Tras esto, da unos minutos (7:40 minutos) para trabajar en pequeños grupos.

Durante el tiempo de trabajo, algunos estudiantes preguntan al profesor cómo proceder y les recuerda cómo se hizo la vez anterior (a JH y AC les aclara que han de buscar una primitiva y estudiar qué sucede para distintos valores de k, usando la definición de integral impropia; WD tiene la misma duda y se le aclara enseñándole en sus apuntes lo que se hizo la vez anterior; también se aclaran detalles a SD y RA, a SM y a YG). Pensamos la aparición de algunas de estas dudas se puede deber a la distracción de los estudiantes con la presencia de un examen de otra asignatura el fin de semana siguiente, pues una vez que se les recuerda cómo proceder, la mayoría plantea adecuadamente la demostración. Igual que la vez anterior, se observan grandes deficiencias con la operatoria básica, lo que provoca que no todos lleguen correctamente a las conclusiones.

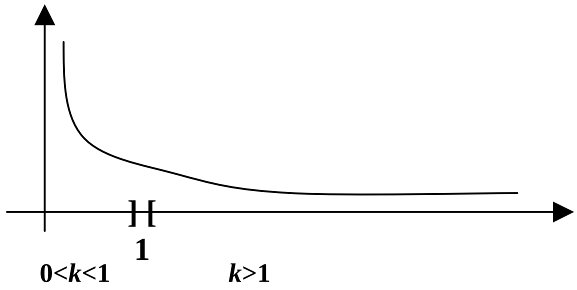
Por otro lado, volvemos a observar deficiencias en los contenidos básicos sobre integración. Varios estudiantes han calculado una primitiva del integrando mediante un cambio de variable, lo que les origina problemas posteriores (habitualmente, cuando los estudiantes hacen un cambio de variable olvidan hacer el mismo cambio en los extremos de integración).

Una vez se agota el tiempo y el profesor ve que la mayoría ha conseguido avanzar, escribe el enunciado del criterio en la pizarra (usando r en lugar de k) y aclara que $r > 0$ (en respuesta a una duda preguntada por YG) porque, si no, la función sería un polinomio y que $r \neq 0$ pues, si no, la función sería constante.

Durante la prueba no hay incidencias (YC participa por primera vez, corrigiendo algo mal escrito en la pizarra). Cada vez que se llega a una conclusión el profesor pregunta si se ve y varias cabezas asienten. Una vez concluida la prueba, el profesor aclara que "*aquí pasa al revés; antes eran convergentes cuando* $r > 1$ *y ahora es convergente cuando* $0 < r < 1$". Además, se especifica en la pizarra el caso de las funciones $1/x^k$ en el intervalo [0, 1]:

Para la familia $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ *son convergentes cuando* $\underline{0 < k < 1}$.

Tras esto, se hace en la pizarra un gráfico con los distintos resultados de convergencia de la familia $1/x^k$ en la siguiente forma:



Una vez institucionalizado este resultado, se aclara que el día anterior, durante la sesión de trabajo con *Maple V* algunos estudiantes compararon con $1/x^2$ en (0, 1) y les daba que era divergente[239], lo que responde a este resultado. El profesor añade: "*Fíjense que a partir de* 1 *el criterio es como en series, y antes de* 1 *es al revés*".

Se observa también que ningún estudiante remarca que la familia $\frac{1}{(x-b)^k}$ puede tener signo negativo en el intervalo [*a*, *b*), lo que puede evidenciar nuevamente sus limitaciones en la operatoria básica.

<u>*Generalización de los resultados enunciados previamente:*</u>

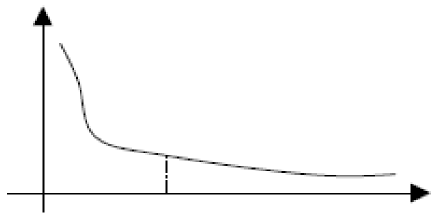
El primer resultado que se generaliza se hace durante el Episodio 2. Antes de abordar la demostración del Criterio del Cociente, se presenta el resultado que identifica la acotación de $F(x)$ con la convergencia de la integral de $f(x)$. Es el profesor quien lo muestra en transparencias y lo comenta, aclarando que antes era "$x \to \infty$" y ahora "$x \to b$". Ningún estudiante pregunta nada.

Una vez se enuncia el segundo corolario del Criterio de Comparación (Episodio 4), el profesor aclara: "*Ya hemos visto los dos únicos resultados, que vamos a ver nosotros, que son diferentes*" y añade "*La parte de series e integrales es específica de integrales impropias de primera especie, pues se usa un intervalo infinito*".

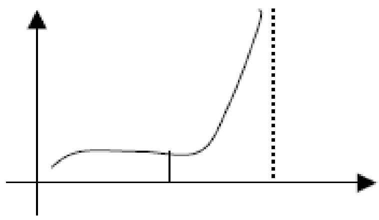
El Episodio 5 se introduce diciendo: "*Vamos a ir recordando todos los demás resultados, para que vean que no hay diferencia*" y se van mostrando las transparencias preparadas.

Para visualizar el primer resultado, el profesor produce dos gráficas. Una vez realizada la primera, comenta: "*si ponemos un punto en medio del intervalo de integración... lo que importa es la cola*".

[239] Ver Sección 6.5.4.



Una vez se hace la segunda gráfica, el comentario es: "*en este caso es igual. Si es convergente, la cola infinita es convergente*".



Aclara que nunca se utilizó en la demostración que $b = \infty$, luego tan sólo hay que añadir "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$". Se invierte 1:28 minutos en este resultado.

Tras él, viene el de linealidad, al que se le dedican 0:52 minutos. El comentario es: "*Nunca usamos que el intervalo fuera infinito.* [...] *Sólo la definición de integral impropia, que es la misma para primera y segunda especie, pues es un límite*". Y aclara que ya pueden comprender por qué se comenzó el teorema con "*Sea* $b \in \mathbb{R}$ *ó* $b = \infty$".

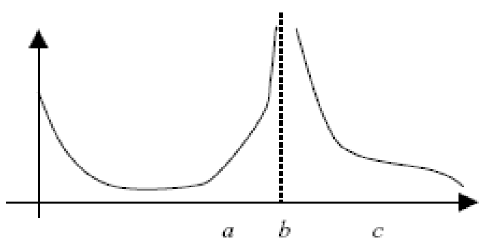
Al resultado de integración por partes (que también se enunció en su momento de la forma general) se le dedican 0:22 minutos y a la convergencia absoluta, 0:14 minutos. El profesor pregunta si todo queda claro y no hay preguntas.

La conclusión que hace el profesor de este episodio es: "*Las propiedades de integrales impropias se mantienen para intervalo infinito o este caso. Lo único que cambia es el criterio de comparación con* $1/x^k$ *y la parte de series e integrales*".

No hay ninguna intervención de estudiantes en este episodio.

<u>*Definición de la integral impropia de tercera especie:*</u>

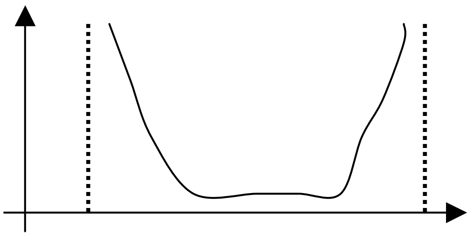
El profesor motiva la discusión diciendo: "*Cuando vimos la definición de integrabilidad local, les pregunté qué pasaría si...*" y hace la siguiente gráfica:



Aclara que esta función no es localmente integrable y continúa: "*Antes ustedes no sabían responderlo, pero ahora sí. ¿Cómo plantearíamos la integral de esta función en este intervalo?*". Tras una breve reflexión, JH interviene: "*Partirla en dos*" (lo que puede mostrar una adaptación de los resultados institucionalizados a la nueva situación) y el profesor escribe $\int_a^b$ y $\int_b^c$.

Con esto, institucionaliza la definición y, al acabar, pregunta si hay alguna duda, y nadie interviene. Añade: "*sólo si cada una por separado converge diremos que ésta converge y vale la suma. Desde que una de ellas diverja, diverge ésta*". Haciendo de nuevo referencia a los resultados de la sesión del día anterior con *Maple V*[240] dice: "*Por eso,* $\int_0^\infty 1/x^2\,dx$ *diverge, porque aunque en* (1, ∞) *converge, en* (0, 1) *diverge*".

Para comprobar si se ha comprendido la nueva definición, presenta otra situación gráfica:



y sigue: "*si tuviéramos funciones así, ¿cómo evaluaríamos la integral?*" y alguien (¿AC?) responde: "*Igual*", refiriéndose a la intervención de JH de partirla en dos. El profesor precisa: "*El punto* [*intermedio*] *que elegimos* [*para partirla en dos*] *es el que queramos* (y aclara que esto se debe al resultado ya generalizado de que lo que importa para decidir la convergencia es la "*cola*" de la integral)".

Las intervenciones parecen indicar que hay una interpretación gráfica de las posibles situaciones y que los estudiantes saben adaptar las técnicas institucionalizadas (integral impropia de primera o segunda especie) a estas nuevas situaciones.

<u>*Operacionalización de la definición de integral impropia de tercera especie:*</u>

Se plantea la resolución del ejercicio 46 de las hojas de problemas. El profesor comienza: "*Probablemente, hace un mes habrían buscado una primitiva*" y escribe:

$$\ln 1 - \ln |-1|$$

Continúa: "*Pero esto es un error. ¿Lo ven todos?*". Se producen asentimientos. "*Tenemos una asíntota, luego no podemos aplicar la regla de Barrow. Luego esto es absurdo*".

El profesor plantea que hay que calcular las dos integrales $\int_1^2 \frac{dx}{x-2}$ y $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$. Plantea la primera y pregunta: "*¿sabemos resolver todos esta integral?*" y una estudiante (¿WD o AB?) dice: "*Diverge*", lo que muestra una operacionalización del resultado de divergencia y la asociación de los exponentes (en este caso, $k = 1$) con el carácter de la integral. El profesor pregunta si alguien no lo ve, pero nadie interviene.

El profesor lo explica escribiendo: "Tenemos $\int_a^b \frac{dx}{x-b}$ y ya tenemos un criterio para esta familia; r = 1, luego diverge". Añade: "Como una de las dos diverge, ya no hay que plantearse la otra. [La integral] diverge. ¿De acuerdo?". Se agrega que de haber tomado la otra integral se habría resuelto de igual forma. No hay preguntas.

[240] Ver Sección 6.5.4.

Mantener la participación de los estudiantes:

Como se ha visto a lo largo de las sesiones, los estudiantes que se animan una vez a preguntar en alta voz, suelen seguir haciéndolo. Tal es el caso de EG, que se mostraba muy tímida en las primeras sesiones pero ya es capaz de detener al profesor para preguntar dudas. Así hace al comienzo de la sesión, cuando pregunta al profesor si puede repetir sus horarios de tutorías durante la siguiente semana.

También YC participa para aclarar algo escrito en la pizarra durante el Episodio 3, mientras el profesor demuestra cuándo son convergentes las integrales del tipo $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^k}$. Y se ha contado en las últimas sesiones con la participación de NB y de AC y, en la sesión anterior, de NA.

Sin embargo, aunque la participación individual ha mejorado bastante e incluso ha habido una buena respuesta a los ejercicios pedidos para entregar, los momentos de revisión al principio de las sesiones (Episodio 1) siguen costando; también se observa que los estudiantes no suelen preparar las cuestiones que quedan pendientes al final de una sesión (aunque en las últimas sesiones esto se puede deber a la presencia de un examen parcial). Así sucede en esta sesión cuando se pregunta si alguien ha reescrito el Criterio del Cociente, pues ningún estudiante interviene.

Incluso muchas veces, cuando se pide recordar lo que se ha hecho en anteriores sesiones suele haber un momento de silencio. Durante el Episodio 3, cuando el profesor pregunta, una vez generalizado el primer corolario del Criterio de Comparación, "*Si se acuerdan, ¿después de ese corolario qué hicimos?*", hay una pausa. No es hasta que el profesor añade "*lo particularizamos a un caso especial...*" que un estudiante (¿DC o YG?) dice que se hizo para las funciones $1/x^k$.

Ser fieles a la organización temporal:

En esta sesión era forzoso cumplir con la organización, pues es la última. Los tiempos han sido los siguientes:

Episodio	Duración prevista	Duración real
1	5 min.	4:28 min.
2	5 min.	2:54 min.
3	15 min.	10:36 min.
4	10 min.	9:26 min.
5	15 min.	4:46 min.
6	5 min.	6:46 min.
7	5 min.	6 min.

Profesor:

Debido a que esta sesión tiene carácter de cierre y era necesario abordar todos los contenidos previstos, se ha ido un poco rápido y no se han organizado debates, aunque sí momentos de trabajo grupal con la asistencia del profesor.

Se ha tratado de presentar todos los resultados ordenados y estableciendo vínculos con el primer bloque para que los estudiantes vean que la mayoría de resultados son generalizables.

Por otro lado, se ha continuado con las representaciones gráficas en la pizarra para ilustrar resultados y nuevas situaciones y el profesor ha preguntado en cada momento si se entendían los resultados. Ha animado los debates grupales y ha resuelto dudas.

Como se explica en la Sección 4.1.1., los datos recogidos durante las sesiones de Ingeniería pueden venir acompañados del uso de metodologías externas, como es el uso de cuestionarios. En las secciones siguientes mostramos el análisis del material recogido durante las sesiones y el de los cuestionarios empleados, que nos ayudarán a establecer nuestras conclusiones en el Capítulo 7.

5.3. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS APORTADOS POR OTROS INSTRUMENTOS

5.3.1. LAS TABLAS DE CONVERGENCIA

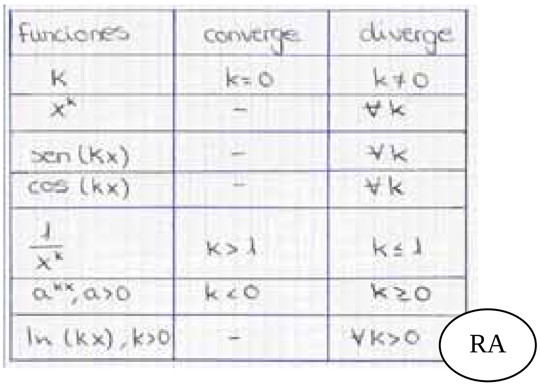
Después de construir en la Sesión 2 (Sección 5.2.2.) entre toda la clase una tabla donde se analiza la convergencia de la integral impropia de las funciones más conocidas, se decide pedir a los estudiantes en la Sesión 3 que entreguen una copia de su propia tabla al profesor.

Como se especifica en el análisis *a posteriori* de la Sesión 2 (Sección 5.2.2.), el propósito principal de pedir a los estudiantes sus tablas es comprobar cómo organizan la información que se presenta en la pizarra. También es útil para verificar si quedan claros (al menos en sus apuntes) los conceptos que se abordan y si hay estudiantes que no escriben correctamente los resultados institucionalizados, lo que podría interpretarse como una falta de atención.

En cuanto a la participación, se recogen 16 tablas de convergencia; se observa, por otro lado, una apropiación de la tarea entre los estudiantes más regulares a las sesiones, aunque resulta extraño el hecho de que los estudiantes AB e YG, que suelen participar en las sesiones, no entregan la tabla:

ENTREGA	SESIONES QUE ASISTE	NO ENTREGA
NA, RA, YC, CC, AC, WD, SD, CF, NG, IG, SM, LP	8	AB, YG
AG, MG, EG, JH	7	NB
	6	JB, MI
	5	DC, FG
	4	EY
	2	AR
	1	JC

Entre las tablas recogidas, se observa que hay 8 estudiantes (RA, CC, JH, SM, LP, AG, MG y EG) que simplemente resumen los resultados obtenidos, sin desarrollar muchas explicaciones. Se considera que hay que analizar en el resto de materiales entregados cómo utilizan estos resultados para ver si se han comprendido.

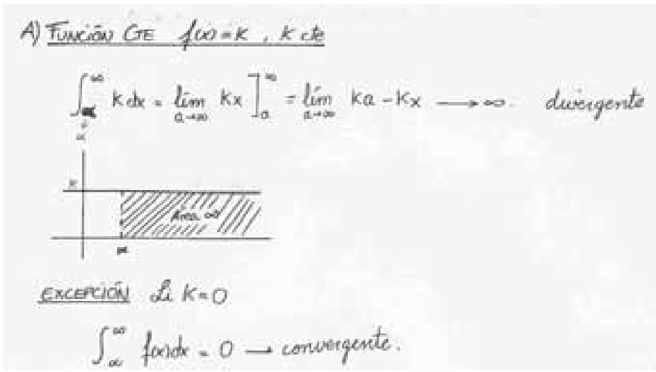


Funciones	converge	diverge
k	$k=0$	$k\neq 0$
x^k	–	$\forall k$
$\mathrm{sen}\,(kx)$	–	$\forall k$
$\cos\,(kx)$	–	$\forall k$
$\frac{1}{x^k}$	$k>1$	$k\leq 1$
$a^{kx}, a>0$	$k<0$	$k\geq 0$
$\ln\,(kx), k>0$	–	$\forall k>0$

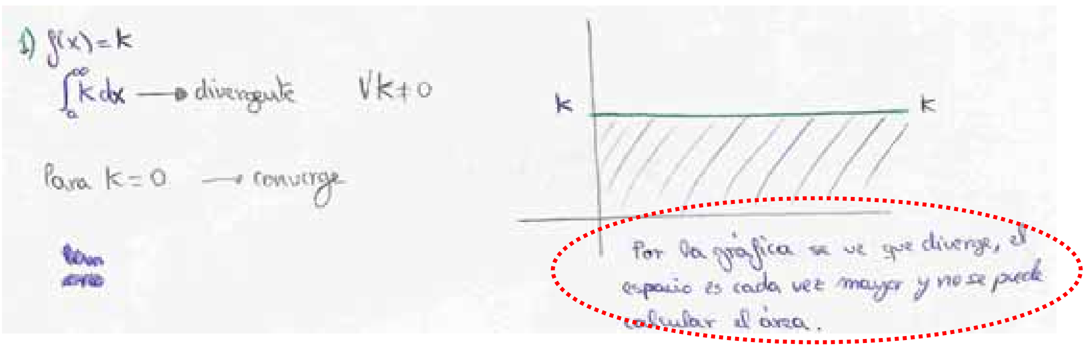
RA

Entre los estudiantes restantes (8) que añaden comentarios o justificaciones, se observa que la mayoría prefiere aún el registro algebraico para hacerlo (casi todos los que utilizan el Criterio de Divergencia, lo que da más muestras de su aceptación, lo hacen en el registro algebraico).

Seis estudiantes (NA, YC, WD, SD, NG, IG) prueban algebraicamente la divergencia de la integral de $f(x) = k$. WD añade, además, el argumento gráfico:



WD es una de las estudiantes que en la Sesión 2 prueba la divergencia de las integrales asignadas (constantes y polinomios) analíticamente. Su uso del registro gráfico en esta ocasión muestra una aceptación del mismo. Por último, AC es el único estudiante que sólo utiliza el argumento gráfico:

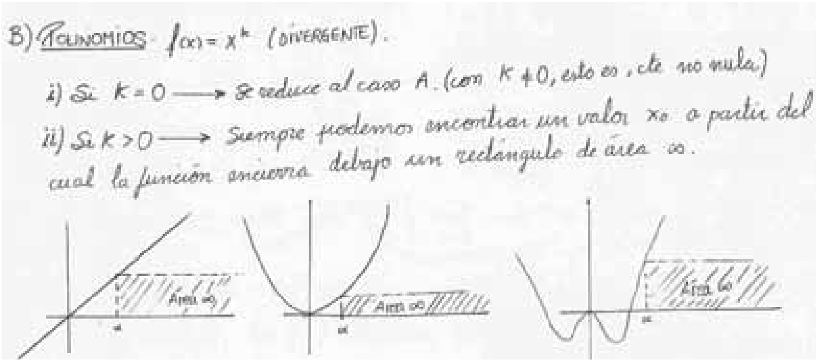


Se observa que este estudiante añade el mismo comentario que YC en la Ficha 1 (Sesión 3). Quizá sea necesario analizar si estos estudiantes usan una concepción potencial del infinito[241] en sus razonamientos. Otra posibilidad es que se trate de comentarios fortuitos y no crean que el hecho de que *el área sea cada vez mayor* implicará la divergencia.

[241] Ver Garbín (1998) y Hitt (2005c).

Dos estudiantes (NA e IG) justifican la divergencia de las integrales de $f(x) = x^k$, escribiendo explícitamente que "*diverge, pues* $\lim_{x\to\infty} x^k = \infty$", lo que indica una operacionalización del Criterio de Divergencia.

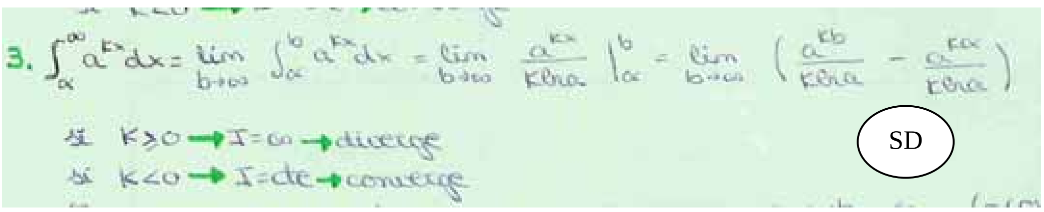
SD prueba la divergencia calculando primitivas y no aplica el Criterio de Divergencia. Por último, hay 3 estudiantes (AC, WD e IG) que justifican la divergencia gráficamente y añaden un dibujo (se destaca el caso de WD, que usa concepciones no estrictamente monótonas):



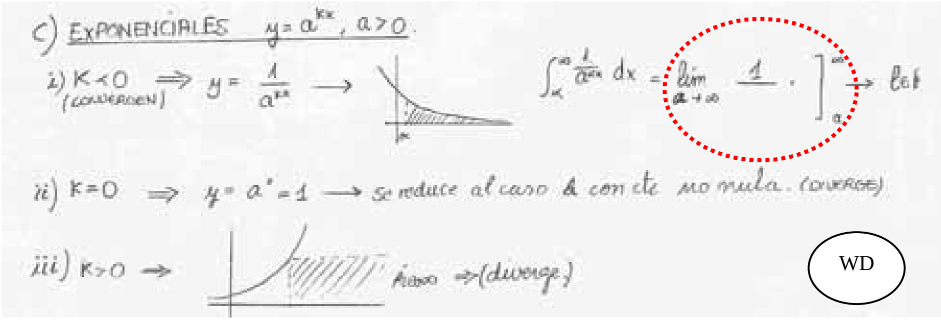
El estudio de las exponenciales (que no se realizó en clase) es el que revela más carencias operatorias. Es de destacar que al estudiar las funciones a^{kx} ningún estudiante separa los casos $a < 1$ y $a \geq 1$ (lo que denota un poco dominio del repertorio básico de funciones). Todos los estudiantes, menos dos (JH y LP), escriben explícitamente $a > 0$. La única estudiante que señala en un momento distinciones para a es CF, aunque suponemos que se trata de un error ocasional:

Conviene mencionar que la estudiante AB, al final de la Sesión 2, se acerca al profesor y le pregunta si para estudiar las funciones exponenciales hay que tener en cuenta los casos en que a sea mayor o menor que uno. Sin embargo, esta estudiante no entrega la tabla.

Se observan también dificultades operativas con límites e integrales "sencillas". Las dos estudiantes (SD y WD) que presentan algún cálculo, no los acaban:

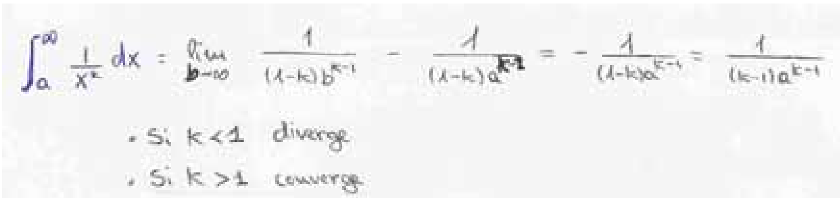


Por último, citamos que las estudiantes WD e IG agregan gráficas para apoyar los resultados.



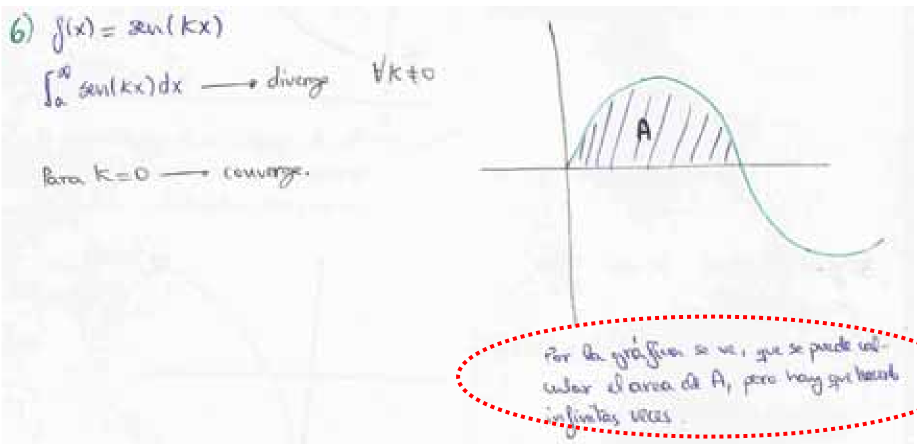
Hay 6 estudiantes (NA, YC, AC, WD, CF y NG) que justifican la divergencia de la integral de la función $f(x) = \ln(kx)$ utilizando explícitamente el Criterio de Divergencia: "*diverge, pues* $\lim_{x\to\infty} \ln(kx) = \infty$", lo que muestra que los estudiantes aceptan este registro por proporcionar una estrategia más económica. De ellos, WD y AC añaden también una gráfica. SD es la única que desarrolla los cálculos para encontrar una primitiva. IG justifica la divergencia con sólo una gráfica, sin pasar al registro algebraico.

En el caso de $f(x) = 1/x^k$, los estudiantes NA, YC, WD, SD, CD, AC e IG desarrollan los cálculos para probar cuándo converge y cuándo diverge. AC es el único que hace un desarrollo no muy claro:



que podría significar que para él no quedó muy clara la institucionalización, aunque es posible que se trate de un abuso de notación.

En cuanto a las funciones trigonométricas, NA, WD, SD y NG argumentan la divergencia del seno y del coseno algebraicamente, calculando primitivas. Destacamos que el estudiante AC realiza un gráfico y un razonamiento erróneo: parece concebir la integral siempre como un área positiva:



Destacamos que el caso $k = 0$ no se estudió en clase. Sin embargo, hay estudiantes que lo consideran, enriqueciendo así la tabla:

- AC, SD, JH, LP y EG separan el caso $k = 0$ para el seno, que da una integral convergente.
- AC, SD, JH y LP señalan también el caso $k = 0$ para el coseno, añadiendo que en este caso la integral sí es divergente.

En conclusión, parece que el registro gráfico se va institucionalizando poco a poco entre los estudiantes. Aunque en la Ficha 1 se ve un uso mayoritario de éste, en las tablas de convergencias aún no lo es. Sí se observa una aceptación del Criterio de Divergencia, lo que sugiere una apropiación del mismo. Además, se registra en la estudiante WD una aceptación del registro gráfico y una paulatina combinación de los dos registros en sus razonamientos.

5.3.2. Los problemas

Descripción de los problemas seleccionados

Los problemas (tomados de las hojas de problemas, ver Anexo 1) se propusieron a los estudiantes en la Sesión 6 para que los resolvieran en casa y los entregaran en la siguiente sesión. A continuación se presenta su descripción, analizando también los elementos de la Ingeniería implicados para su resolución y el motivo de su selección para ser propuesto a los estudiantes.

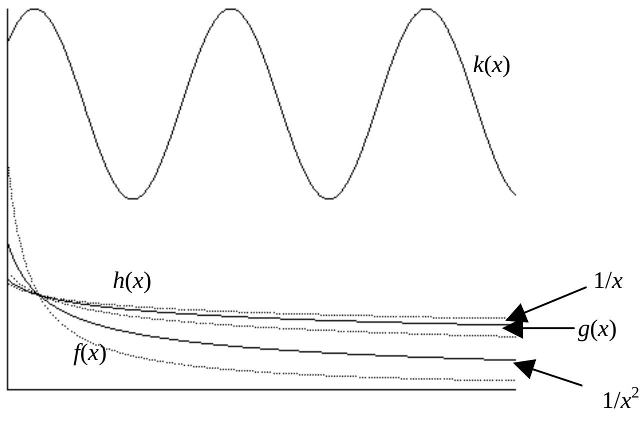
Problema 21:

Las gráficas de $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ y las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ se muestran en la gráfica adjunta.

a) ¿El área encerrada entre $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, \infty)$ es finita o infinita? Explicar.

b) Utilizando la gráfica, decidir si la integral de cada una de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ en el intervalo $[1, \infty)$ converge, diverge o si no se puede decir.

c)



En este problema[242] se trata de operacionalizar el Criterio de Comparación en una pregunta planteada directamente en el registro gráfico, algo infrecuente para los estudiantes (González-Martín, 2002), con una gráfica con función informativa (Elia y Philippou, 2004), que nos permite analizar si los estudiantes son capaces de interpretar adecuadamente gráficos

[242] Tomado de Hughes-Hallet *et al* (2002), pág. 338.

sencillos. Por otro lado, el primer apartado se puede responder de forma directa utilizando los resultados institucionalizados.

Este problema ha sido seleccionado, en primer lugar, para analizar si los estudiantes aplican correctamente el Criterio de Comparación (uno de los resultados más usados en las sesiones y que se ha conjeturado que ha sido comprendido por la mayoría) y si saben distinguir en qué casos se pueden sacar conclusiones y en cuáles no; además, se revisan los resultados sobre la convergencia de las integrales de las funciones del tipo $1/x^k$.

Por otro lado, también se pretende analizar el índice de abandono de una pregunta planteada directamente en el registro gráfico, cuyo gráfico tiene una función informativa. Además, se trabaja con funciones cuya expresión se desconoce; de esta forma se observa si los estudiantes reaccionan positivamente, o se quedan bloqueados por la falta de una ecuación.

El primer apartado está planteado en el lenguaje habitual y admite respuestas tanto en el registro algebraico como en el gráfico (además de una explicación utilizando el mismo lenguaje). El registro de respuesta puede ofrecernos un indicador de qué registro es el preferido por los estudiantes y qué tipo de razonamientos utilizan para justificar sus respuestas.

Problema 24:

Supongamos que *f* es una función continua para todo número real y que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge. Sea *a* un número positivo cualquiera. Decidir la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados. Dar explicaciones para cada respuesta.

a) $\int_0^\infty a.f(x)dx$ converge. b) $\int_0^\infty f(a.x)dx$ converge.

c) $\int_0^\infty f(a+x)dx$ converge. d) $\int_0^\infty (a+f(x))dx$ converge.

Esta pregunta[243] se plantea utilizando el registro algebraico y se ofrecen más propiedades de la integral impropia que los estudiantes pueden construir. Sin embargo, todos los apartados se pueden responder utilizando interpretaciones gráficas de las transformaciones que se hacen al integrando, lo que necesita de coordinaciones entre los dos registros.

Sin embargo, visto el nivel académico de los estudiantes, no se espera que éstos conozcan (o recuerden) interpretaciones gráficas de las transformaciones que en esta pregunta se realizan (salvo, quizá, en el apartado (*d*), en que entra en juego también la linealidad de la integral impropia).

Se observa qué tipo de argumentos utilizan los estudiantes para resolver las cuestiones y qué resultados institucionalizados operacionalizan, lo que nos podrá dar evidencia de los resultados más aceptados o fáciles de aplicar para ellos.

[243] Tomada de Hughes-Hallet *et al* (2002), pág. 342.

Problema 28:

Sea $I = [a, +\infty)$ y f continua en I. Probar que:

a) Si f tiene límite l en $+\infty$ y f es integrable sobre I, entonces $l = 0$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ no es suficiente para asegurar la integrabilidad de f.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ no es tampoco una condición necesaria de integrabilidad de f.

Esta pregunta[244] se plantea en el registro algebraico, pero puede responderse en su totalidad utilizando el registro gráfico. Se analizará si los estudiantes son capaces de hacer estas conversiones para dar respuestas más cortas o no.

El apartado (*a*) sugiere una situación que los estudiantes suelen considerar necesaria para la convergencia de la integral (que el integrando tienda a cero). La demostración por reducción al absurdo de esta proposición lleva directamente al Criterio de Divergencia que se institucionalizó en la Sesión 2. Se observa cómo lo utilizan los estudiantes. Por otro lado, la refutación de la proposición utilizando un razonamiento gráfico lleva también a una interpretación del Criterio de Divergencia. En tal caso, se observa qué modelos utilizan los estudiantes para la función $f(x)$, pues en las sesiones se ha registrado la predominancia del modelo monótono.

El apartado (*b*) rescata un contraejemplo clásico que ha sido institucionalizado en clase. En el análisis de la Ficha 3 (Sesión 5) se mostró la resistencia del obstáculo de pensar que la convergencia de la integral impropia implica que el integrando tienda a cero (que se explicitó a los estudiantes en la Sesión 6), por lo que en esta cuestión se analiza si los estudiantes comprenden finalmente esta situación. También nos permite analizar si los estudiantes recurren al ejemplo prototípico ($f(x) = 1/x$) o si son capaces de producir contraejemplos propios.

El apartado (*c*) es el que consideramos más difícil y, a primera vista, parece estar en contradicción con el apartado (*a*). Sin embargo, nos parece importante enfrentar a los estudiantes con una cuestión que, explícitamente, menciona que no es necesario que una función tienda a cero para que su integral converja.

En primer lugar, cabe decir que se han observado dificultades de los estudiantes con el lenguaje lógico de las Matemáticas, lo que puede ocasionar que muchos no vean la diferencia entre este apartado y el (*a*). En segundo lugar, la construcción de un contraejemplo continuo (utilizando la teoría de series y el registro gráfico) no es trivial, aunque el uso de las ideas expuestas en clase puede ser de ayuda. En caso de que algún estudiante produzca un contraejemplo, se analizará su naturaleza y los conocimientos movilizados para ello.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

Las preguntas fueron puntuadas, de modo que los trabajos de los estudiantes recibieron una puntuación de 0 a 10 para poder tener una idea aproximada de su desempeño global en la resolución de los problemas propuestos. La puntuación dada a cada problema es la que se muestra a continuación:

	Prob. 21		Prob. 24				Prob. 28		
	a	*b*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*
Puntuación	1	1	1	1	1	1	1	1	2

[244] Tomada de Beck y Selon (1999).

Del total de la clase, 15 estudiantes entregaron el trabajo pedido: 13 de ellos lo hicieron en el día fijado y otros 2 (NA y SD) en la sesión siguiente. La distribución de calificaciones de los trabajos, de menor a mayor, es la siguiente:

Intervalo	[0, 2.5)	[2.5, 5)	[5, 7.5)	[7.5, 10]
Estudiantes	NB	CF, NA, CC, NG, YG	SD, YC, WD, AC, IG	JH, AB, EG, SM
Total	1	5	5	4

siendo las calificaciones exactas las que se muestran a continuación:

Estudiante	NB	CF	NA	CC	NG	YG	SD	YC	WD	AC	IG	JH	AB	EG	SM
Puntuación	1.5	2.85	2.9	3.5	3.6	4.8	5.3	6.5	6.5	7.3	7.3	7.8	7.9	8.4	9.95

La distribución de las puntuaciones en cada problema es la siguiente:

	21-a	**21-b**	**24-a**	**24-b**	**24-c**	**24-d**	**28-a**	**28-b**	**28-c**
NB	0.8	0.7	0	0	0	0	0	0	0
CF	0.95	0.2	1	0	0	0	0.5	0.2	0
NA	0.2	0.2	1	0.2	0.2	1	0.1	0	0
CC	0.2	1	1	0.2	0.2	0.9	0	0	0
NG	0.9	0.3	1	0.2	0.2	1	0	0	0
YG	0.8	1	1	0	1	1	0	0	0
SD	0.9	1	1	0.1	0.1	1	0.2	1	0
YC	0.8	0.1	1	0.8	0.9	0.9	1	1	0
WD	1	1	0.6	0.2	1	1	0.4	1	0.3
AC	0.7	1	1	0.8	0.9	0.9	1	1	0
IG	1	1	1	0	0	1	1	1	1.3
JH	1	0.8	1	0.8	0.9	0.9	1	1	0.4
AB	1	1	1	0.3	0.7	0.9	0.7	1	1.3
EG	1	1	1	1	0.8	1	0.8	1	0.8
SM	1	1	1	1	0.95	1	1	1	2
Medias	0.82	0.75	0.91	0.37	0.52	0.83	0.51	0.61	0.41
%	81.67	75.33	90.67	37.33	52.33	83.33	51.33	61.33	20.33

A partir de esta tabla podemos ordenar los distintos apartados por orden de dificultad para los estudiantes:

Intervalo	[0, 25)	[25, 50)	[50, 75)			[75, 100)			
Apartado	**28-c**	**24-b**	**28-a**	**24-c**	**28-b**	**21-b**	**21-a**	**24-d**	**24-a**
%	20.33	37.33	51.33	52.33	61.33	75.33	81.67	83.33	90.67

Observamos que 7 de los apartados han obtenido un índice mayor del 50%, siendo sólo 2 los que han obtenido un porcentaje menor. Como se había previsto, el problema 28-c ha sido el más difícil para los estudiantes. El problema 24-b ha producido más dificultades de las esperadas.

Se muestra a continuación el análisis de cada uno de los apartados:

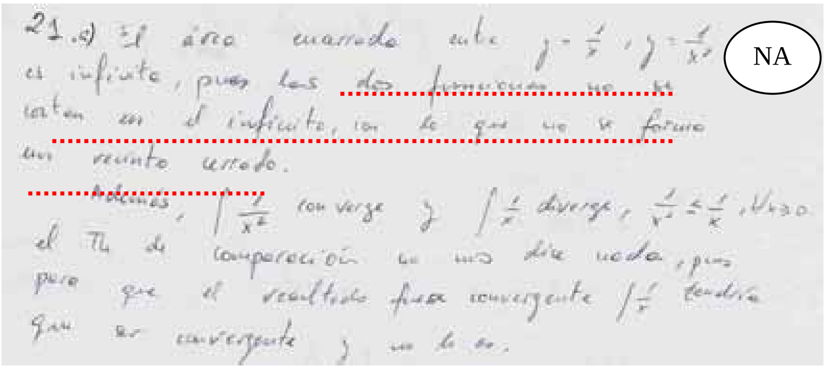
<u>Problema 21-a</u>

Se han recogido siete tipos de argumentos distintos en esta pregunta:

1	El Criterio de Comparación no nos dice nada	NA
2	$1/x^2$ (integral convergente) $\leq 1/x$ (integral divergente)	AC
3	El área es infinita, pues no se cortan	NA, AC, CC, CF
4	Infinita, pues $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ diverge (sin más explicaciones)	NB
5	Aplica el Criterio del Cociente	WD
6	Lo prueba mediante cálculos algebraicos	AB, YC, SD, CF, EG, IG, NG, YG
7	Explicación en el registro gráfico	AB, YC, IG, JH, SM

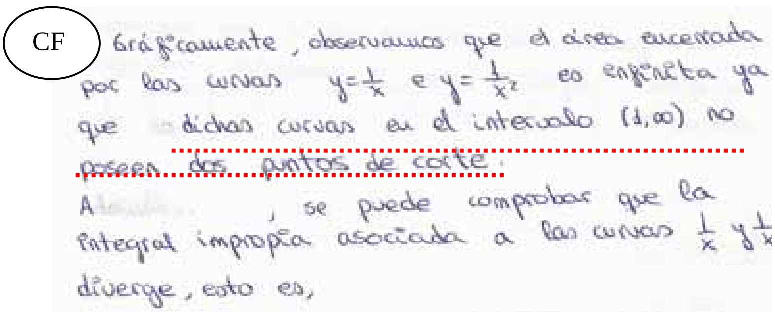
Salta a la vista que los estudiantes, cuando no se les pide expresamente el uso de otro registro, siguen utilizando el registro algebraico para responder las tareas propuestas (a pesar de la presencia clara de una gráfica en el enunciado de la pregunta); esto puede deberse a los hábitos adquiridos en su enseñanza previa. Destacamos que de los cuatro estudiantes que responden correctamente en el registro gráfico[245], dos añaden la comprobación algebraica.

Entre las respuestas significativas, observamos la nueva aparición del obstáculo *de ligación a la compacidad*, que no se había previsto. Cuatro estudiantes argumentan que el área ha de ser infinita porque se origina una figura no cerrada. Se observa en la estudiante NA, además, una ausencia de interpretación gráfica de la cuestión. Sabe que una integral diverge y la otra converge, pero se limita a aplicar el Criterio de Comparación y no parece darse cuenta de que ya cuenta con los elementos que le permiten afirmar que el área será infinita:


21.a) El área encerrada entre $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ es infinita, pues las dos funciones no se cortan en el infinito, con lo que no se forma un recinto cerrado.
Además, $\int \frac{1}{x^2}$ converge y $\int \frac{1}{x}$ diverge, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$, Uso el Th de comparación no nos dice nada, pues para que el resultado fuera convergente $\int \frac{1}{x}$ tendría que ser convergente, y no lo es.

NA

CF, después de argumentar:

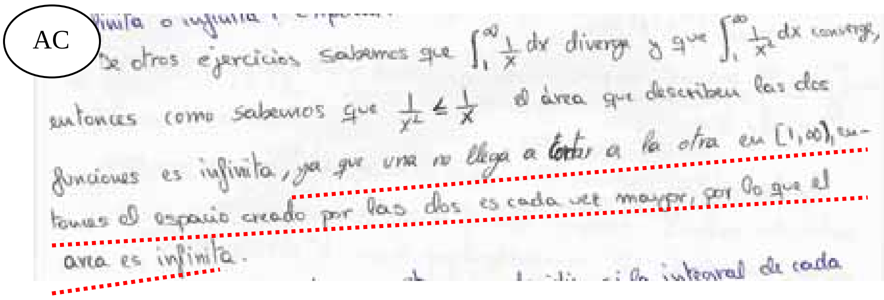

CF

Gráficamente, observamos que el área encerrada por las curvas $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{1}{x^2}$ es infinita ya que dichas curvas en el intervalo $(1,\infty)$ no poseen dos puntos de corte.
A[illegible], se puede comprobar que la integral impropia asociada a las curvas $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ diverge, esto es,

desarrolla los cálculos algebraicos, comprobando que el área es infinita. Sin embargo, parece obviar que al calcular $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$ se calcula el área entre dos funciones que tampoco se cortan.

[245] Como se verá más adelante, la respuesta de YC en el registro gráfico no es del todo correcta.

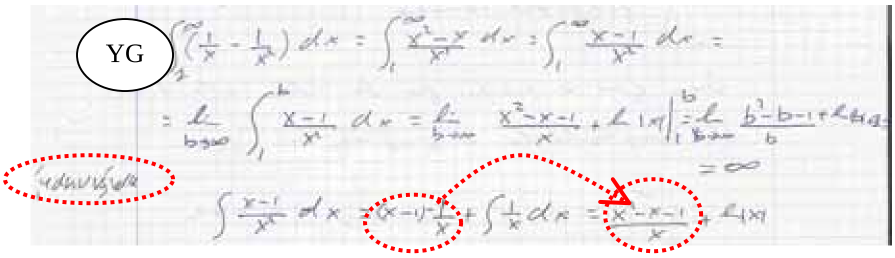
En el estudiante AC este obstáculo aparece también:


AC
De otros ejercicios sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge y que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces como sabemos que $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ el área que describen las dos funciones es infinita, ya que una no llega a tocar a la otra en $[1,\infty)$, entonces el espacio creado por las dos es cada vez mayor, por lo que el área es infinita.

Además, repite una vez más su comentario de que "*el área cada vez es mayor, por lo que el área es infinita*", lo que parece confirmar la presencia de un uso potencial de los procesos infinitos; parece concebir que al añadirse siempre más área, ésta crecerá sin límite.

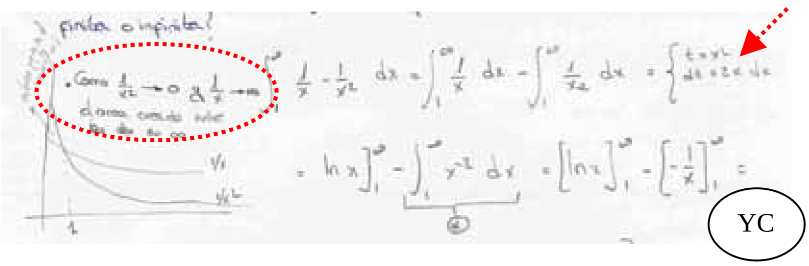
Por otro lado, aunque al principio parece que su razonamiento será correcto (utiliza la divergencia de una integral y la convergencia de la otra), acaba utilizando una argumentación relacionada con el obstáculo. Éste parece un caso de convivencia de los dos patrones: el del conocimiento institucionalizado y el del obstáculo.

De los estudiantes que realizan los cálculos algebraicos, tan sólo uno (YG) parece no tener mucha soltura con éstos, pues resta las dos funciones antes de integrarlas (a pesar de conocerse los resultados de cada integral por separado):



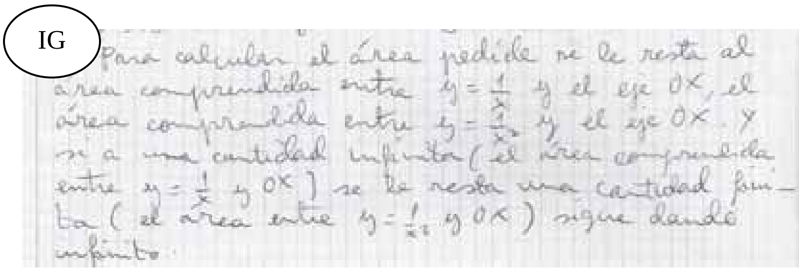
Se comprueba que los estudiantes tienen dificultades con la operatoria básica. En este caso, para resolver una integral inmediata se utiliza la integración por partes, que no parece un conocimiento afianzado (se escribe la regla en el margen). Por otro lado, la aritmética básica también es deficiente, pues el estudiante olvida los paréntesis al calcular el producto *u.v* y luego suma las fracciones. Este desarrollo está en concordancia con nuestra conjetura sobre el bajo nivel de los estudiantes y apoya su confirmación.

También destacamos que dos estudiantes (mostramos un fragmento de YC), en su discurso escrito, parecen confundir el comportamiento de la integral con el de la función (al afirmar que la función con integral convergente tiende a cero y la función con integral divergente tiende a infinito. Esto también podría interpretarse como una interpretación incorrecta de la información suministrada por la gráfica y, quizá, como un desconocimiento de características básicas de funciones. Sin embargo, pensamos que se trata más bien de un error de tipo ejecutivo y de la identificación del carácter de la integral con el comportamiento de las funciones):

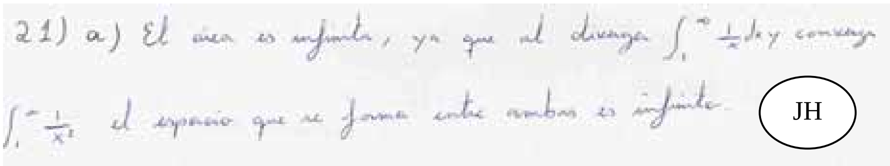


Sin embargo, no queda claro si esta confusión se produce solamente a nivel de notación o es más profunda (pues en sus cálculos manejan correctamente el carácter de las integrales). Se observa también que esta estudiante, para resolver una integral inmediata, realiza un cambio de variable; vemos, nuevamente, dificultades con la operatoria básica.

Las cuatro respuestas consideradas claramente planteadas en el registro gráfico, y abordadas en términos de áreas, son las de IG (que lo comprueba algebraicamente), JH, AB (también añade los cálculos algebraicos) y SM:


IG

Para calcular el área pedida se le resta al área comprendida entre $y = \frac{1}{x}$ y el eje OX, el área comprendida entre $y = \frac{1}{x^2}$ y el eje OX. Y si a una cantidad infinita (el área comprendida entre $y = \frac{1}{x}$ y OX) se le resta una cantidad finita (el área entre $y = \frac{1}{x^2}$ y OX) sigue dando infinito.


21) a) El área es infinita, ya que al diverge $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ y converge $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ el espacio que se forma entre ambos es infinito.

JH

12 de los estudiantes han proporcionado respuestas correctas (aunque algunas con imprecisiones), de los que 5 muestran claros argumentos gráficos. Los estudiantes, en general, han sido capaces de enfrentarse a la pregunta, aunque en algunos casos, la presencia de un obstáculo les ha llevado a argumentos incorrectos. También parece claro que los estudiantes conocen el carácter de las integrales de $1/x$ y $1/x^2$.

Problema 21-b

Este apartado generó una gran cantidad de respuestas, pues se pide analizar el comportamiento de cuatro integrales. Mostramos a continuación la clasificación de las respuestas obtenidas:

1	$g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ divergen porque sus límites son infinitos. $f(x)$ converge porque su límite es finito.	YC
2	$f(x)$ y $g(x)$ parece que van a converger porque se acercan a cero. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$	NA, CC, NG
3	$f(x)$ toma el valor cero en ∞, luego $f(x)$ converge	CF
4	$f(x)$ converge, pues $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge	NB
5	$\int_1^\infty f(x)dx$ converge, pues $f(x) < 1/x^2$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge	AB, AC, SD, WD, EG, IG, YG, JH, SM
6	$g(x)$ se mantiene sobre un rectángulo, luego encierra un área infinita.	CF
7	$g(x)$ diverge, pues $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge	NB
8	$\int_1^\infty g(x)dx$ no se sabe, pues $1/x^2 < g(x) < 1/x$	AB, AC, SD, WD, EG, IG, YG, JH, SM

9	No dice nada sobre $h(x)$	NB
10	$h(x)$ diverge por encerrar un área infinita (es casi una constante)	CF
11	No se puede decir nada de $h(x)$. Parece que se acerca a cero, pero puede cambiar.	NA, CC, NG
12	$\int_1^\infty h(x)dx$ diverge, pues $1/x < h(x)$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge	AB, AC, SD, WD, EG, IG, YG, JH
13	$k(x)$ diverge por ser oscilante	NA, NB, NG
14	$\int_1^\infty k(x)dx$ diverge, por ser oscilante	JH
15	$k(x)$ oscila, luego no se puede decir nada	CF
16	$k(x)$ diverge (sin explicaciones)	CC
17	$\int_1^\infty k(x)dx$ diverge, pues $k(x) > h(x) > 1/x$	AC, SD, EG, IG, YG, SM
18	$\int_1^\infty k(x)dx$ diverge por el Criterio de Divergencia	AB, AC, WD, EG

La lectura de la tabla anterior arroja datos que apoyan la conjetura de que algunas dificultades y obstáculos son resistentes, a pesar del uso de secuencias didácticas que los evidencien.

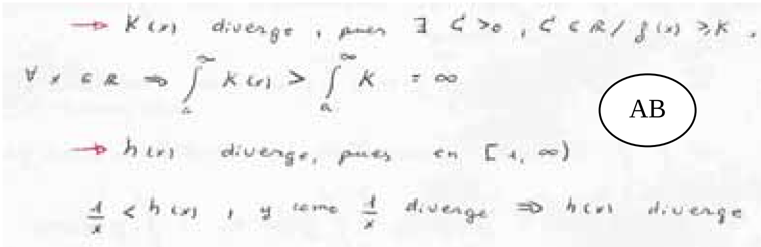
En primer lugar, seguimos observando en algunos estudiantes una confusión entre el comportamiento de la función y el de su integral (NA, CC, YC[246], CF, NG[247]). Por tanto, cuando estos estudiantes afirman, por ejemplo, que la integral de $f(x)$ es convergente porque ésta tiende a cero, se puede deber a dos razones:

- Al confundir el carácter de la integral con el comportamiento de la función y observar que la función tiende a cero, enuncian que "$f(x)$ converge".
- Prevalece la dificultad detectada de suponer que si una función tiende a cero entonces su integral será convergente.

En otros estudiantes parece que se produce esta confusión sólo en el uso de la notación, escribiendo $f(x)$ para referirse a su integral (quizá por ahorro de escritura). Se encuentran en este grupo NG (que deduce, incorrectamente, el carácter de la integral de cada función sin escribir el símbolo integral), SM (que resuelve el apartado correctamente e incluso enuncia el Criterio de Comparación. Sin embargo, quizá por ahorro de escritura, escribe el nombre de las funciones para referirse a sus integrales. Destacamos que, en su caso, el comportamiento de la integral de $h(x)$ ha sido mal calculado por un error en su gráfica, pero bien calculado con respecto a la gráfica que ella realiza. Esta respuesta no ha sido tenida en cuenta en la tabla anterior) y AB (aplica correctamente el Criterio de Comparación en cada caso, pero parece que ahorra escritura):

[246] Esta estudiante, que muestra un comportamiento similar en el problema 21-a, añade su propio "criterio de convergencia": "*Si los límites de* $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ *son finitos, son convergentes. Si por el contrario los límites son infinitos, son divergentes*".

[247] Paradójicamente, esta estudiante, antes de resolver el apartado, escribe: "*Hay que comentar que la forma que tenga la función (representación) no asegura el carácter de la misma* (e^{-x}, $x^{-1/3}$)".



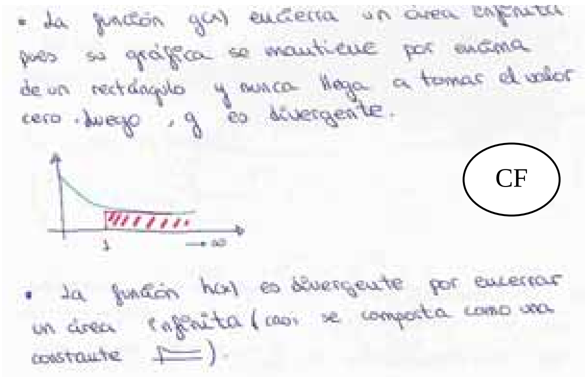
→ K(x) diverge, pues ∃ C > 0, C ∈ R / g(x) ≥ K, ∀x ∈ R ⇒ $\int_a^\infty K(x) > \int_a^\infty K = \infty$

→ h(x) diverge, pues en [1, ∞) $\frac{1}{x} < h(x)$, y como $\frac{1}{x}$ diverge ⇒ h(x) diverge

AB

Es también evidente en algunos estudiantes la ausencia de una interpretación correcta de la información dada gráficamente. A pesar de que en la gráfica aparecen señaladas las funciones $1/x$ y $1/x^2$, que deberían servir de orientación sobre las otras, algunos estudiantes se dejan llevar por la apariencia de la gráfica proporcionada, mostrando una descoordinación entre los registros gráfico y algebraico y, como señala Duval (2000), para ellos, al cambiar de representación, cambian los objetos representados.

Éste es el caso, por ejemplo, de CF, que hace su propia gráfica e interpreta lo que ve directamente, ignorando la información algebraica provista en la gráfica ($1/x^2 < g(x) < 1/x$):

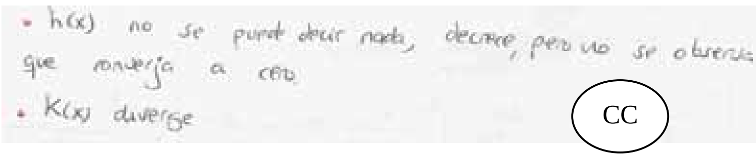


• la función g(x) encierra un área infinita pues su gráfica se mantiene por encima de un rectángulo y nunca llega a tomar el valor cero. luego, g es divergente.

• la función h(x) es divergente por encerrar un área infinita (casi se comporta como una constante).

CF

o de NA, CC y NG, que para la función $h(x)$ utilizan solamente lo que se ve y no el resto de información que da la gráfica.



• h(x) no se puede decir nada, decrece, pero no se observa que converja a cero

• K(x) diverge

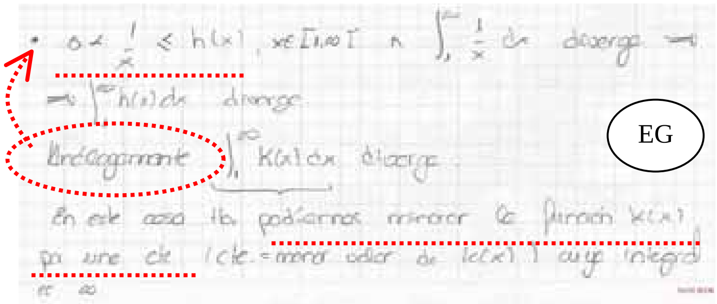
CC

Estas respuestas indican que la falta de costumbre de los estudiantes en el uso del registro gráfico les produce también dificultades, pues no están habituados a interpretar la información que viene dada de forma gráfica. En una pregunta de este tipo, cuya gráfica tiene función informativa (Elia y Philippou, 2004), esta limitación resulta fatal.

Otra respuesta que puede señalar la presencia de alguna dificultad es la conclusión de que la integral de $k(x)$ diverge porque esta función oscila. Sí es cierto que en un contexto algebraico, o con otro tipo de gráficas, esta respuesta podría ser natural y revelar falsas concepciones. Sin embargo, con la información que provee la gráfica, no es tan natural argumentar que esta integral diverge porque la función es oscilante. Sin embargo, ha sido lo argumentado por NA, NB, CF, NG, JH.

Por último, destacamos que aunque varios estudiantes deducen la divergencia de la integral de $k(x)$, tan sólo cuatro utilizan el Criterio de Divergencia institucionalizado en clase. Sin embargo, esto no se debe necesariamente a un rechazo de este Criterio por formularse en el registro gráfico, pues como hemos visto, parece que los estudiantes asocian su divergencia a su carácter oscilante, sin percatarse de que esta función cumple las hipótesis del Criterio.

Todos los estudiantes que establecen correctamente la divergencia de esta integral han deducido también correctamente el carácter de las demás integrales utilizando el Criterio de Comparación. Por tanto, es probable que el hecho de que la mayoría deduzca la divergencia de $\int_1^{\infty} k(x)dx$ utilizando el Criterio de Comparación no se deba a un rechazo del Criterio de Divergencia, sino a la creencia de que "*el ejercicio se debe resolver de esta forma*". De hecho, de los cuatro estudiantes que usan el Criterio de Divergencia (AB, AC, EG y WD), dos prueban el resultado usando también el Criterio de Comparación (EG y AC):



En total, 10 de los estudiantes muestran un uso correcto del Criterio de Comparación (incluso para afirma que no se puede concluir nada), condicionado por una correcta interpretación de la información gráfica. Todos ellos respondieron correctamente el apartado anterior (salvo AC, que planteó el Criterio, pero usó también que las funciones no se cortan). En total, parecen ser capaces de realizar coordinaciones y adaptar la información que conocen al contexto del nuevo problema.

Una dificultad encontrada, que ha imposibilitado a algunos la correcta resolución de la tarea, no viene relacionada con el Criterio de Comparación , sino con sus limitaciones para interpretar información gráfica[248] y a la resistencia de ciertas concepciones ($f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$).

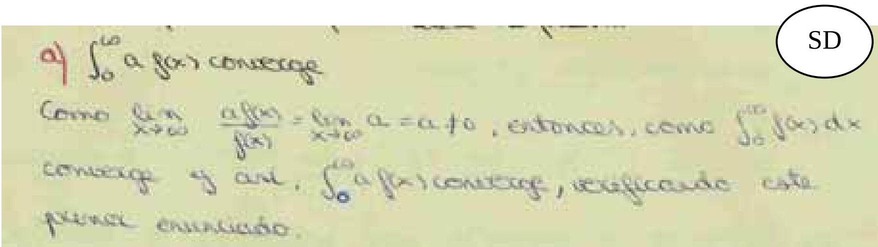
<u>Problema 24-a</u>

Este apartado es el que tiene un mayor índice de respuestas correctas, por lo que las respuestas son más homogéneas. Las respuestas obtenidas son:

<table>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">Converge</td><td colspan="2">Sin explicar por qué</td><td>NB</td></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizando la definición de convergencia</td><td>WD</td></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizando el Criterio del Cociente</td><td>SD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Por linealidad</td><td>Argumentos verbales y uso de: $\int a.f(x)dx = a.\int f(x)dx$</td><td>AB, AC, CC, YC, CF, NG, JH</td></tr>
<tr><td>Desarrollo algebraico completo</td><td>NA, EG, IG, YG, SM</td></tr>
</table>

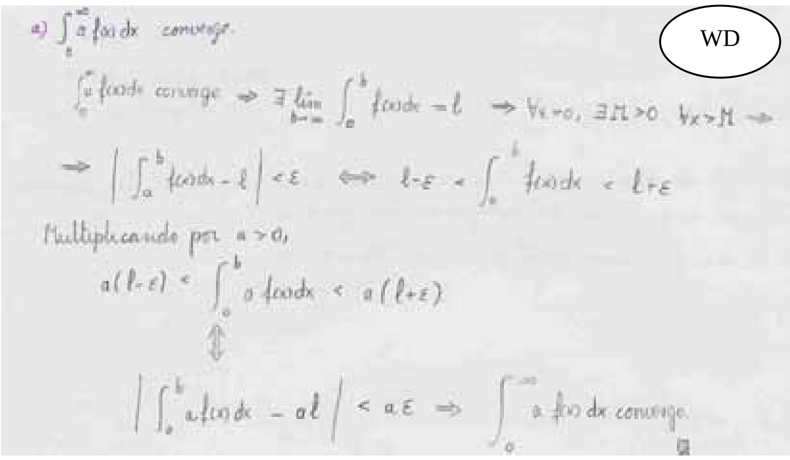
[248] Elia y Philippou (2004) afirman que una resolución de problemas efectiva, haciendo uso de gráficos, depende no sólo de la relación entre el problema y el dibujo, sino también de los conocimientos y habilidades previos de los estudiantes.

Entre los métodos "inesperados" se encuentran el de SD (que asume que $f(x) \geq 0$), que aplica el Criterio del Cociente:



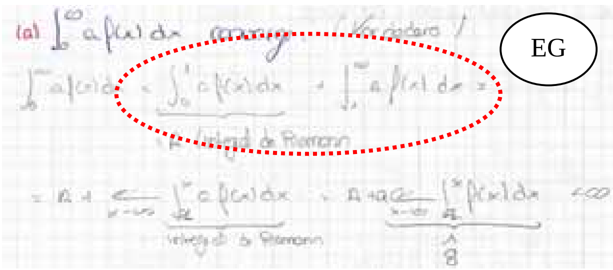
lo que apunta al hecho de que los estudiantes no suelen verificar las hipótesis de los resultados que utilizan.

Por otro lado, WD utiliza la definición de convergencia, pero lo hace incorrectamente, pues la variable en el límite es *b* y no *x*. Esta estudiante mostró en las primeras sesiones una tendencia al uso del registro algebraico, aunque posteriormente mostró su aceptación por el gráfico. En este caso, no acude a él, a pesar de la complejidad de los cálculos que desarrolla:



Esta confusión no la consideramos demasiado grave, pues los estudiantes aún no conocen el cálculo en dos variables, así que nos parece comprensible que se haya producido una confusión en el manejo de las variables.

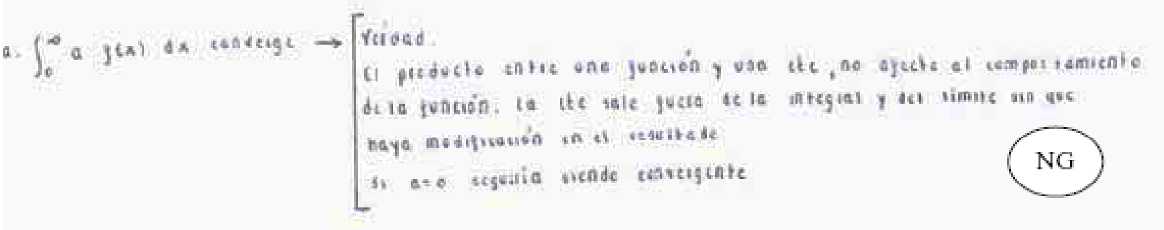
De los estudiantes que escogen el desarrollo algebraico completo para la comprobación destacamos a EG, que separa la integral en dos de forma innecesaria (error ya detectado en nuestro estudio sobre la dimensión cognitiva[249]):



---

249 Ver Sección 3.3.4.

De los estudiantes que usan argumentos verbales y aplican directamente la linealidad (en este caso es posible al ser la integral de partida convergente) destacamos las formulaciones de NG y YC por los términos que utilizan para su explicación:



En total, 12 estudiantes han mostrado poder resolver la cuestión (aunque SD no verifica las hipótesis) para obtener nuevas propiedades de la integral impropia.

Nos parece importante el hecho de que ningún estudiante resuelva este apartado utilizando el registro gráfico. Sin embargo, esto no parece ser debido a un rechazo de este registro, sino a que los estudiantes no se percatan de la interpretación gráfica del producto $a.f(x)$.

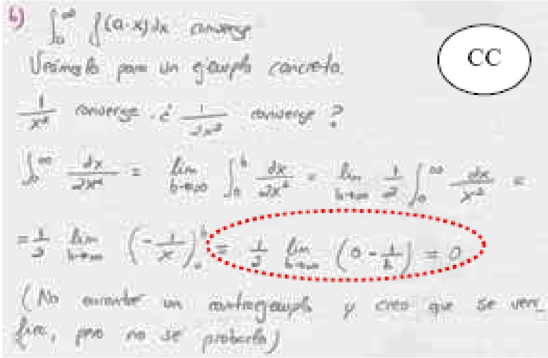
Problema 24-b

Éste es el apartado que más nos ha sorprendido, pues no se esperaban las dificultades encontradas para resolverlo. Ha habido una gran variedad de aproximaciones por parte de los estudiantes, pero tan sólo dos respuestas que se consideren correctas:

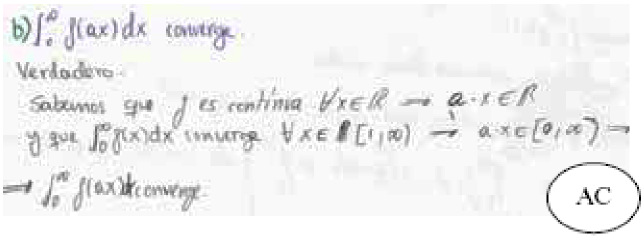
1	En blanco			CF, IG
2	Es cierto	Por decir algo (y añade que cree que diverge en $0 < x < \varepsilon$ y converge en $\varepsilon \le x < \infty$)		NB
		Cree que es cierto por la idea intuitiva de comprobarlo en gráficas con $1/x^2$.		YG
		Uso de ejemplos	Buscó un contraejemplo y no lo encontró. Cree que es cierto y no sabe probarlo. Da un ejemplo.	CC
			Da un ejemplo	NG
			Cree que es cierto, pues lo ha comprobado con varias funciones	SD
		Porque $a.x$ es un número real y f es continua $\forall\, n \in \mathbb{R}$ y la integral converge		AC, YC, JH
		Usa hipótesis de crecimiento y decrecimiento en su "demostración"		AB
		Intenta usar $F(a.b) - F(0)$, pero no sabe demostrarlo		WD
		Utiliza que $f(a.x) = a.\ f(x)$ para probar la convergencia		NA
		Lo prueba con un cambio de variable		EG, SM

En los razonamientos de los estudiantes encontramos varios errores típicos, como pensar que un ejemplo sirve para demostrar una proposición (Alcock, 2004). También vemos errores de tipo algebraico[250]:

[250] Además, en esta respuesta se aprecia una falta de coordinación entre los registros gráfico y algebraico. Al ser el integrando estrictamente positivo, la integral no puede dar cero.



Una respuesta que aparece en tres estudiantes que revela falta de comprensión del concepto de convergencia, y quizá dificultades con la función integral $F(x)$, es la que argumentan AC, YC, JH. La respuesta más elaborada es la de AC, que dice que la integral converge $\forall\, x \in [1, \infty)$. Parecen concebir esta integral impropia como una función, cuando en realidad es un valor (finito o infinito).



Por último, citamos que la estudiante EG vuelve a separar la integral de partida en dos subintervalos.

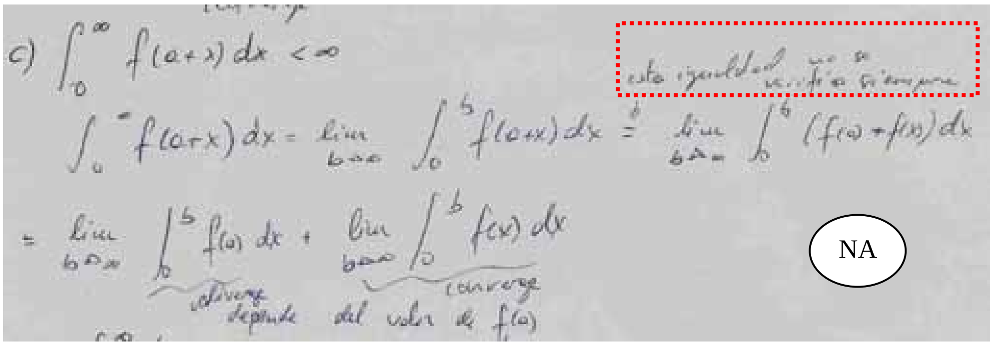
Igual que en el apartado anterior, opinamos que los estudiantes no han recurrido al registro gráfico por no conocer una interpretación gráfica del significado de $f(a.x)$. Además, tan sólo dos estudiantes han utilizado un cambio de variable, lo que revela nuevamente grandes dificultades con la operatoria básica.

Problema 24-c

Las respuestas obtenidas son las siguientes:

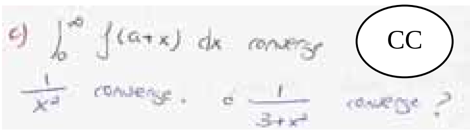
1	En blanco		CF, IG
2	Es falso. Da un "contraejemplo"		SD
3	Es cierto	No da ningún argumento	NB
		$a+x \in \mathbb{R}$ y f continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y la integral converge $\forall\, x \in [1, \infty)$	AC
		Lo "prueba" mediante un ejemplo	CC, NG
		Utiliza que $f(a+x) = f(a) + f(x)$	NA
		Lo prueba con un cambio de variable	AB, YC, EG, JH, SM
		Argumento gráfico: se trata de una traslación de la función y convergerá de igual manera	WD, YG

Nuevamente se observan en las respuestas de nuestros estudiantes muchas carencias de tipo operativo y conceptual. Por ejemplo, el razonamiento de NA utilizando propiedades de linealidad:

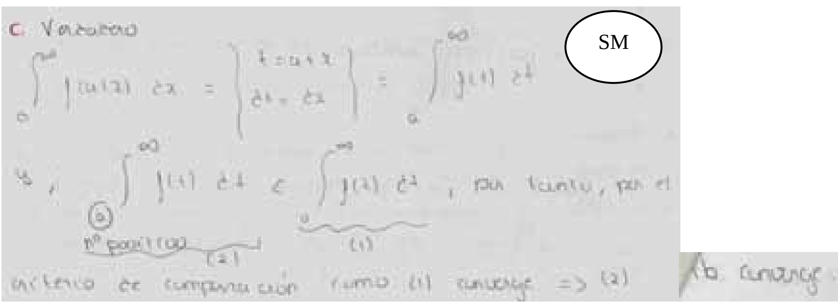


Se da cuenta de que la propiedad de linealidad no siempre es cierta, pero no parece darse cuenta de que la integral $\int_0^\infty f(a)dx$ será convergente sólo si $f(a) = 0$. Sin embargo, estos razonamientos son frecuentes en nuestros estudiantes de primer curso: en el segundo semestre se estudia el Álgebra Lineal y muchos acaban aplicando propiedades de linealidad en el resto de asignaturas, repitiendo los procedimientos típicos de las demostraciones de esa área.

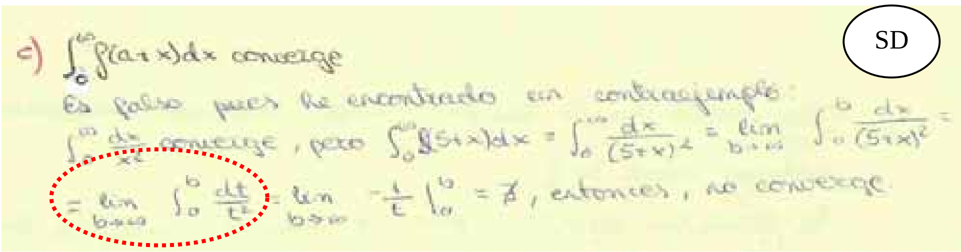
Las estudiantes CC y NG vuelven a intentar probar una afirmación con un ejemplo. Nuevamente, CC muestra dificultades para calcular el valor de $f(a + x)$ en su ejemplo, revelando más dificultades operatorias:



Es significativo que esta estudiante realiza un cambio de variable para calcular la integral de $1/(3+x^2)$, pero no se da cuenta de que usando un cambio de variable podría resolver el apartado. Por otro lado, vemos en ella un error muy frecuente en los estudiantes al realizar un cambio de variable: no cambiar los extremos de integración. Este error se repite también en tres de los estudiantes que prueban la veracidad del enunciado mediante un cambio de variable. Por otro lado, AB sí cambia los extremos de integración, pero incorrectamente; por su desempeño en el resto de la prueba, opinamos que este error es simplemente ocasional. Otra estudiante que hace un cambio de variable, SM, aplica incorrectamente el Criterio de Comparación, cuando en realidad está utilizando que la convergencia es una propiedad local.



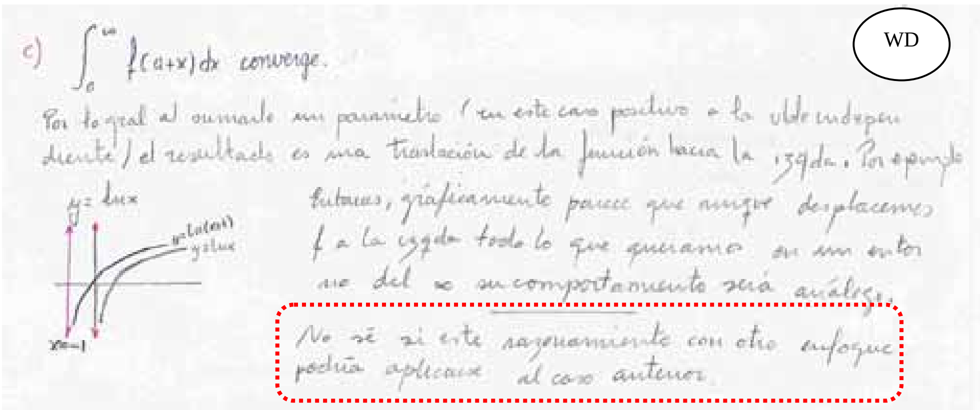
La estudiante SD “encuentra” un contraejemplo. Pero no se da cuenta de que su integral de partida es divergente (ya se ha detectado en los análisis *a posteriori* que los estudiantes se centran en el carácter de la integral, pero no miran si el intervalo de integración es adecuado). Se observa, también, que hace un cambio de variable y, como otros estudiantes, no cambia los extremos de la integral:


SD

c) $\int_0^\infty f(a+x)dx$ converge

Es falso pues he encontrado un contraejemplo: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, pero $\int_0^\infty f(5+x)dx = \int_0^\infty \frac{dx}{(5+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(5+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{t}\Big|_0^b = \nexists$, entonces, no converge

Por último, destacamos la respuesta de la estudiante WD, que utiliza argumentos gráficos (como YG) y realiza una gráfica:


WD

c) $\int_0^\infty f(a+x)dx$ converge.

Por lo gral al sumarle un parámetro (en este caso positivo a la vble independiente) el resultado es una traslación de la función hacia la izqda. Por ejemplo

futuras, gráficamente parece que aunque desplacemos f a la izqda todo lo que queramos en un entorno del ∞ su comportamiento será análogo.

No sé si este razonamiento con otro enfoque podría aplicarse al caso anterior

El hecho de que estos dos estudiantes utilicen aquí un argumento gráfico y no en el apartado anterior parece que obedece a una ausencia de interpretación gráfica de *f*(*a.x*). Además, el comentario que añade WD verifica nuestra conjetura[251]. Muchos estudiantes optan, en esta pregunta, por los cálculos algebraicos porque, simplemente, carecen de herramientas en el registro gráfico (que proporciona una estrategia optimal) para abordarla.

Problema 24-d

Esta pregunta es la segunda con mayor índice de éxito y las respuestas han estado menos dispersas, distribuyéndose de la siguiente forma:

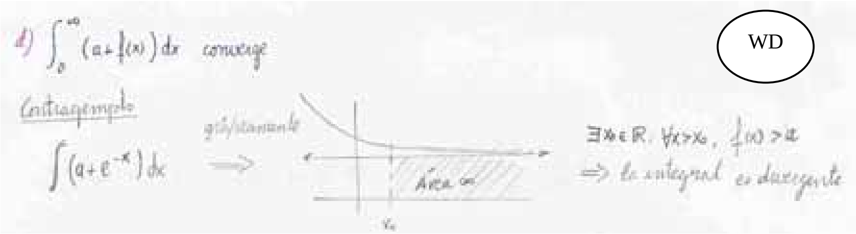
1	En blanco		NB, CF
2	Es cierto	Da un contraejemplo	WD
		Utiliza el Criterio de Comparación	IG
		Lo prueba utilizando la linealidad de la integral	NA, AB, AC, CC, YC, SD, EG, NG, YG, JH, SM

Once estudiantes utilizan la estrategia considerada más probable para responder a la pregunta. De ellos, SD añade un contraejemplo (elige $f(x) = 1/x^2$, $a = 5$ y prueba algebraicamente que $\int_0^\infty (5 + 1/x^2)dx = \infty$).

Aparecen también dos respuestas significativas para deducir la falsedad del enunciado. WD proporciona un contraejemplo y comprueba que la integral resultante es divergente utilizando el Criterio de Divergencia y el registro gráfico (además de operacionalizar un ejemplo

251 Por otro lado, confirma la aceptación de WD del registro gráfico y que no lo utilizó en los apartados (*a*) y (*b*) por no conocer interpretaciones gráficas de *a.f*(*x*) y *f*(*a.x*).

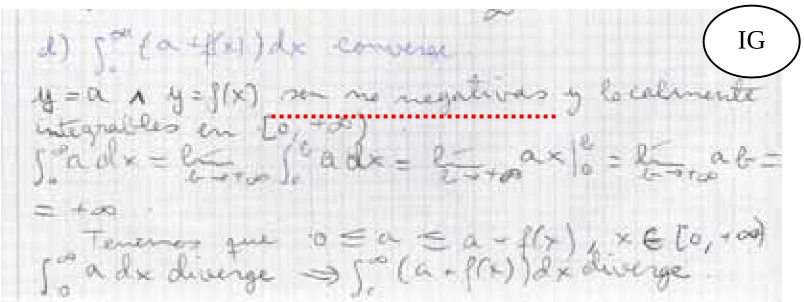
visto en clase en la Sesión 1). Esto, finalmente, confirma que esta estudiante no ha utilizado el registro gráfico en los apartados (*a*) y (*b*) por desconocimiento de interpretaciones gráficas.



Sin embargo, obsérvese que este razonamiento sólo es correcto si $f(x) \geq 0$. El uso en este caso del Criterio de Divergencia requiere de más consideraciones de las que WD ha tenido en cuenta.

Se obtiene también una respuesta no prevista: IG prueba la divergencia de la integral de $y = a$ y utiliza el Criterio de Comparación con las desigualdades: $0 \leq a \leq a + f(x)$.

Sin embargo, aunque ella especifica que $f(x)$ es no negativa en $[0, \infty)$ para que su razonamiento sea válido, ésta es una condición que no se da en el ejercicio.



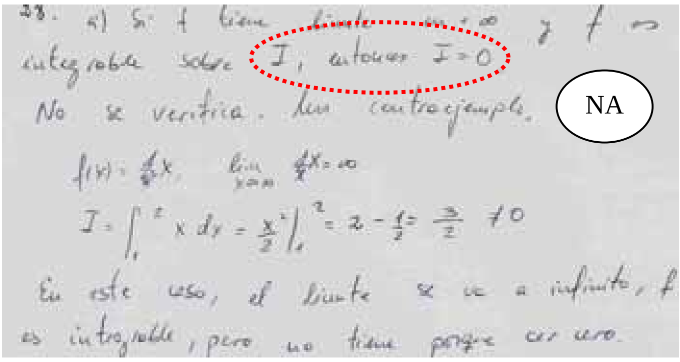
Podemos concluir que la linealidad de la integral impropia es otro de los resultados que han quedado claros a los estudiantes, aunque es necesario analizar el resto de materiales recogidos para ver si los estudiantes respetan sus hipótesis, pues este problema nos ha permitido ver que los estudiantes no siempre verifican las hipótesis de los resultados que utilizan (como, en esta ocasión, para aplicar el Criterio de Convergencia).

<u>Problema 28-a</u>

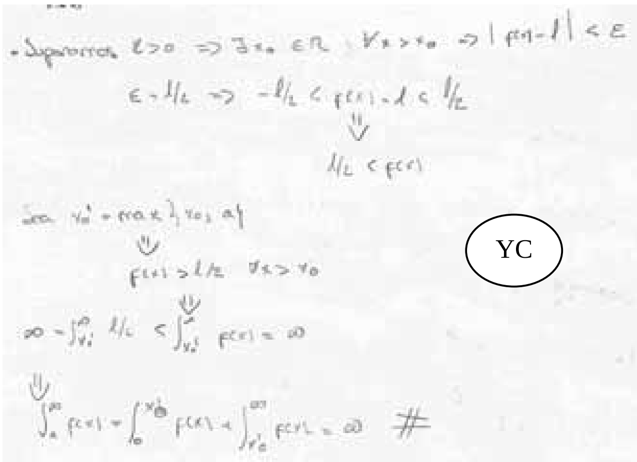
El problema 28, como se ha dicho, se considera el más difícil de los propuestos. Sin embargo, el apartado (*a*) no ha ofrecido demasiados problemas a los estudiantes. De las respuestas dadas, ocho se consideran correctas. La distribución total de respuestas es la siguiente:

1	En blanco		CC, NG, YG
2	Es falso. Se ha de cumplir además que $a > 0$ (sin más explicaciones)		NB
3	Falso. Da un contraejemplo		NA
4	Prueba con un ejemplo, usando la implicación contraria ($l = 0$ y la integral converge)		SD
5	Verdadero. Intenta una demostración formal		WD
6	Verdadero. Demostración formal (contrarrecíprocos o reducción al absurdo)		AB, AC, YC, EG, IG, SM
7	Verdadero. Si $l > 0$, la integral diverge.	Usa argumentos de clase	CF
		Interpretación gráfica	JH

Siguen apareciendo errores que denotan carencias en los conceptos anteriores. Por ejemplo, NA busca un “contraejemplo” que no es válido, pues ni siquiera se trata de una integral impropia. Parece que la interpretación del mismo enunciado le ha resultado difícil:



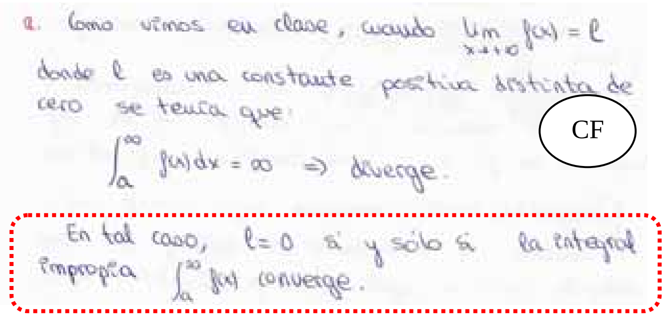
De los seis estudiantes que desarrollan una demostración formal, algunos realizan demostraciones muy completas:



La única demostración que podemos considerar que tiene algún error es la de EG, que no considera un x_0 a partir del cual la función se acerca al límite. Por otro lado, considera también que $f(x) \geq l$ en el intervalo, mostrando la presencia de un modelo monótono decreciente para el límite.

WD intenta una demostración, pero vuelve a equivocarse (como en la pregunta 24-a) y considera que en el $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x).dx$ la variable es la x; esto podría interpretarse como una dificultad para conceptualizar la función $F(x)$. Por otro lado, considera también que si $f(x) < g(x)$, la desigualdad se mantendrá también para sus derivadas, lo que no es cierto.

En esta pregunta, la estudiante CF, que comete errores en la mayoría de las otras preguntas, acierta y utiliza los resultados institucionalizados en clase; en particular, el Criterio de Divergencia:



a. Como vimos en clase, cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ donde ℓ es una constante positiva distinta de cero se tenía que:

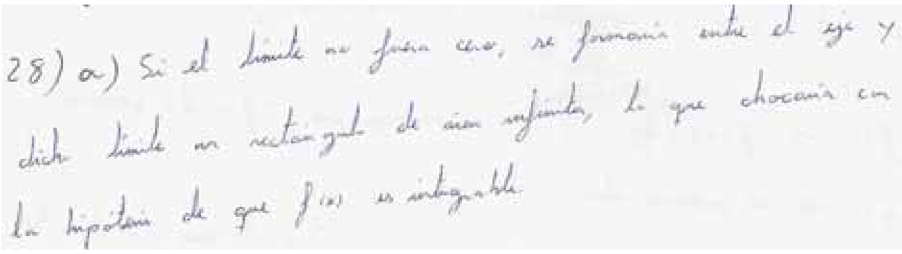
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \infty \Rightarrow \text{diverge.}$$

En tal caso, $\ell = 0$ si y sólo si la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)$ converge.

CF

Sin embargo, hace una generalización errónea, que revela la presencia del obstáculo de pensar que la convergencia implica que la función tenderá a cero.

El estudiante JH es otro de los estudiantes que ha aceptado el registro gráfico y lo usa de forma privilegiada para justificar sus respuestas; parece haberse dado cuenta de las respuestas económicas que este registro puede proporcionar. En esta ocasión también responde usando este registro:



28) a) Si el límite no fuera cero, se formaría entre el eje y dicho límite un rectángulo de área infinita, lo que chocaría con la hipótesis de que $f(x)$ es integrable

y, aunque su idea es correcta, se observa la suposición implícita de que $f(x) \geq 0$.

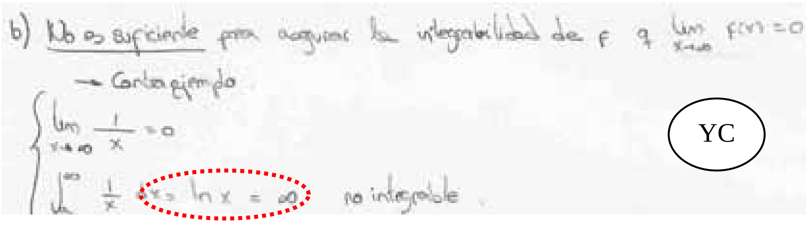
Se observa que esta pregunta, de enunciado más formal, produce que los estudiantes acudan, en general, a explicaciones formales. Los estudiantes parecen adaptar sus respuestas al estilo en que se formulan las preguntas y, cuando no es obvio que se espera una respuesta gráfica, acuden al registro algebraico, quizá por no saber interpretar los enunciados gráficamente.

<u>Problema 28-b</u>

En este apartado ha habido también poca dispersión, con bastantes respuestas consideradas válidas. La distribución exacta es la que se muestra:

1	En blanco	CC, NG, YG
2	Verdadero (sin añadir más)	NB
3	Cree que es cierto, pero no sabría cómo probarlo	NA
4	Intenta probarlo con un contraejemplo (erróneo)	CF
5	Pone un contraejemplo ($1/x$)	AB, AC, YC, SD, WD, EG, IG, JH, SM

Destacamos que los nueve estudiantes que han probado que la condición dada no es necesaria han utilizado el mismo contraejemplo: la función $1/x$ (ejemplo prototípico, cuando en clase se han visto otros casos). De ellos, la estudiante YC abusa de la notación:

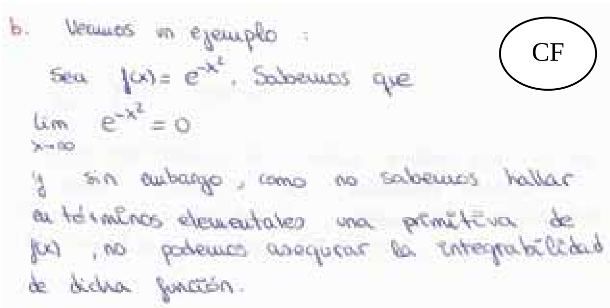


aunque lo hace en varias ocasiones en sus ejercicios. Por otro lado, la estudiante AB argumenta la divergencia de la integral de $1/x$ utilizando un criterio de series (criterio de Pringe).

Los nueve estudiantes que responden correctamente a esta cuestión resolvieron correctamente la pregunta 21-a, luego su conocimiento sobre la divergencia de la integral de $1/x$ parece adaptarse a diferentes situaciones y ser flexible.

No podemos concluir nada de NB, que responde a ambos apartados (21-a y 28-b) sin dar explicaciones. Sin embargo, este estudiante evidencia grandes carencias y dificultades para resolver las cuestiones propuestas.

Los otros estudiantes que contestan correctamente a la pregunta 21-a son YG, NG (ambos dejan en blanco la pregunta 28) y CF, que se equivoca aquí, lo que podría mostrar un conocimiento inestable, muy adaptado a un cierto tipo de preguntas. Esta estudiante, en su respuesta, muestra una dificultad usual:



Considera que si no se puede calcular una primitiva de una función, no se puede asegurar su integrabilidad, identificando las técnicas de cálculo de primitivas con la propiedad de ser integrable.

Por otro lado, el ejemplo que escoge es, precisamente, el ejemplo prototípico de función que no tiene primitiva pero es integrable.

<u>Problema 28-c</u>

Tal como se había previsto, esta pregunta ha sido la más difícil para los estudiantes y tan sólo se ha obtenido una respuesta completamente correcta. La distribución exacta es la que sigue:

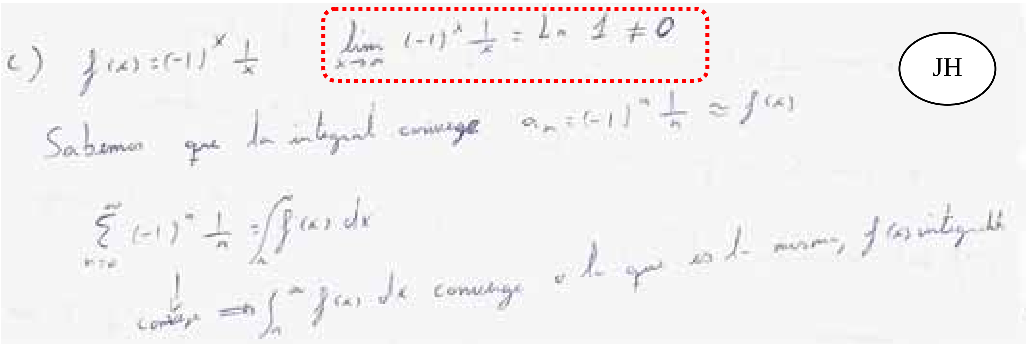
<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">En blanco</td><td>CC, CF, NG, YG</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">“Creo que es una condición necesaria, pero no suficiente”</td><td>NB</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">“Creo que es cierto, pero no se me ocurre cómo demostrarlo”</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">“He buscado ejemplos, pero no encuentro ninguno que verifique esto”</td><td>SD</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Este apartado se contradice con el apartado (a)</td><td>AC, YC</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">Enuncia qué habría que hacer, pero no hace más</td><td>EG</td></tr>
<tr><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">Construye un contraejemplo</td><td>Proporciona una función no continua</td><td>JH</td></tr>
<tr><td>Razona que es falso con las notas de clase, pero no puede construir un ejemplo continuo y da uno discontinuo</td><td>AB, WD, IG</td></tr>
<tr><td>Resuelve la pregunta correctamente</td><td>SM</td></tr>
</table>

Tal como se esperaba, los estudiantes no han sido capaces de construir un contraejemplo continuo, lo que permite conjeturar que su aprendizaje de la construcción de contraejemplos aún está en un nivel bajo. Las respuestas de las categorías 2 a 5 muestran la presencia del obstáculo de creer que es necesario que una función tienda a cero para que su integral sea convergente y fallos en los razonamientos lógicos (AC, YC).

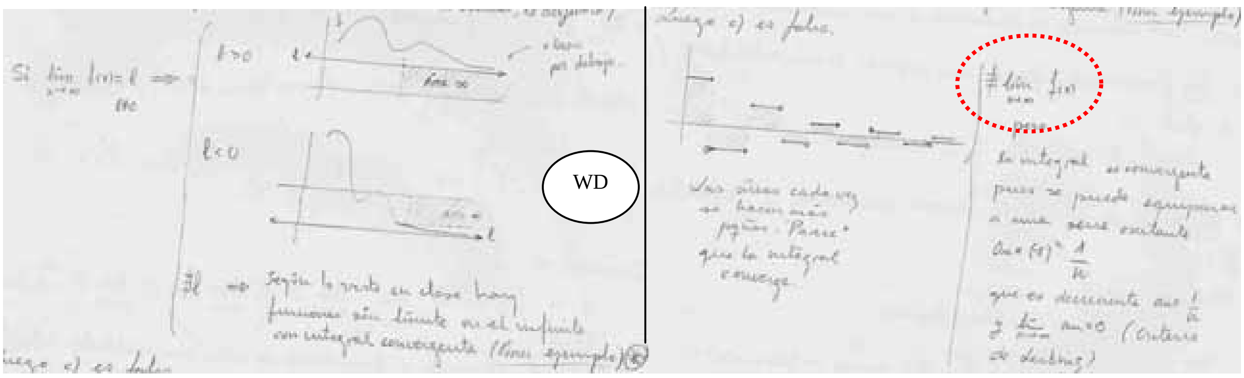
Comentamos las respuestas de las categorías 6 y 7, distintas entre sí, aunque algunas sigan una línea común.

En primer lugar, EG enuncia qué procedimiento habría que seguir para responder a la pregunta (“*Hay q buscar una función cuyo límite sea* ≠ 0 *y su integral sea* < ∞”), pero no escribe más. Es de suponer que, no pudiendo encontrar un contraejemplo, decide dejar el resto en blanco.

JH intenta proporcionar una función construida en clase (Sesión 6, el contraejemplo de función condicionalmente convergente), aunque no recuerda su expresión algebraica. Parece intuir funciones discontinuas que sirven de contraejemplo, pero se equivoca al escoger ésta, pues ésta sí tiende a cero[252]:



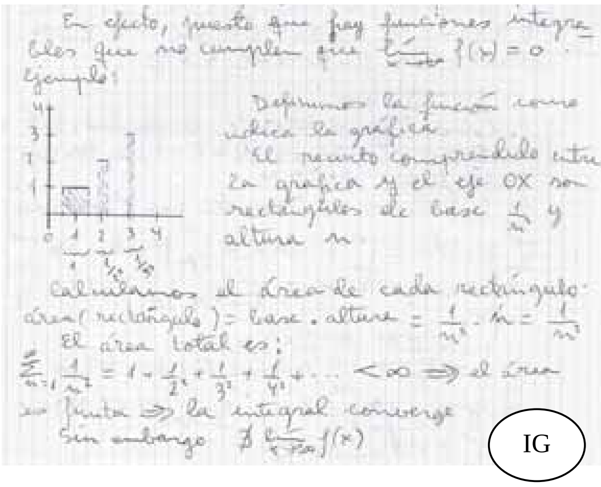
De las tres estudiantes que aportan razonamientos basados en las notas de clase, WD primero argumenta que para series sí es cierto y posteriormente recuerda que en clase se han construido funciones sin límite en el infinito, pero con integral convergente. Sin embargo, el ejemplo que posteriormente proporciona (coincide con el de JH) sí que tiene límite en el infinito:



Parece que algunos estudiantes asocian la discontinuidad con no tener límite.

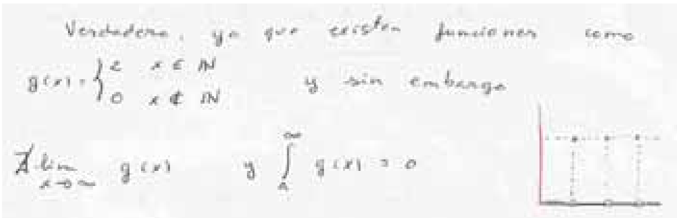
IG, por su parte, recuerda que se han visto funciones integrables que no cumplen que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, pero cuya integral converge, y da la función construida en clase (mostrando que ha comprendido su construcción):

[252] Nótese que, en su notación, el límite de la *función* da un similar a la suma de la serie (posiblemente copió mal este dato en la Sesión 6).

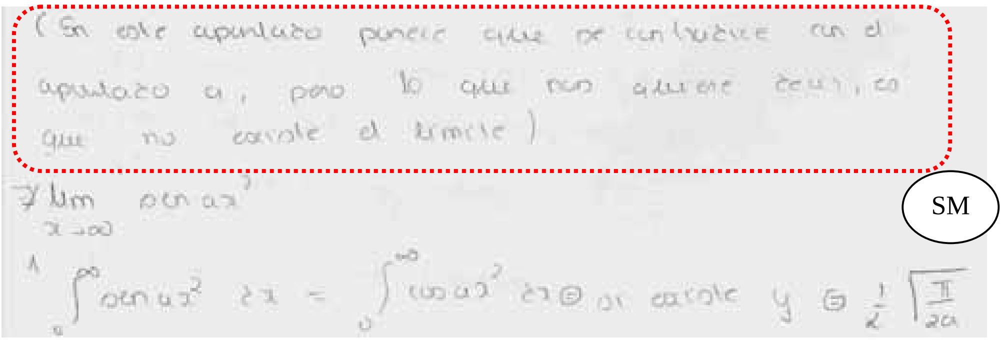


Sin embargo, parece olvidar que en el encabezado de la pregunta se pide que la función sea continua.

AB construye una función basada en una construida en clase, sin límite pero con integral convergente. Nuevamente, parece olvidar que se ha pedido que la función sea continua:



Finalmente, SM proporciona una función correcta (días más tarde, al preguntársele cómo la encontró, dice que la vio en un libro) y aclara que este apartado no contradice el apartado (a):



Las respuestas obtenidas, en general, nos permiten decir que los resultados institucionalizados en clase, en general, han sido comprendidos por los estudiantes, que los operacionalizan para responder a nuevas cuestiones. Se observa que las principales dificultades y errores detectados no se relacionan directamente con la integral impropia, sino con otros contenidos previos (interpretación de gráficas, interpretación gráfica de traslaciones y dilataciones, razonamiento lógico, falsas concepciones...).

5.3.3. El test de contenidos

Descripción de las preguntas del test

Se muestran a continuación las preguntas escogidas para incluir en el test de contenidos, describiendo sus características y el tipo de respuestas esperadas, además de los conocimientos que se pretenden movilizar con cada una.

El test de contenidos se realizó el miércoles 11 de junio en el grupo 1-A y en él participaron 20 estudiantes que asistieron regularmente a las sesiones de Ingeniería. El estudiante que más tardó en entregarlo contó con aproximadamente 1:45 horas para responderlo. El que menos tardó lo completó en aproximadamente 1 hora. El test se realizó sin previo aviso, con la intención de estudiar las reacciones espontáneas de los estudiantes, lo que puede explicar algunas diferencias importantes entre los resultados de los problemas entregados y las respuestas a este test.

El test se dividió en dos partes, de forma que preguntas que están relacionadas, o que abordan un mismo tema desde varias perspectivas estuvieran separadas. En el cuestionario utilizado para nuestro análisis cognitivo[253] se observó una retroalimentación entre preguntas que no permitió saber cuál era la primera intuición de los estudiantes con algunas cuestiones. Ésta es la razón por la que, en esta ocasión, las preguntas que se consideraron más relacionadas fueron separadas; se estudia también si se producen retroalimentaciones y cómo afectan a las respuestas originales.

Primera parte

Pregunta 1:

¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x).dx$?

¿Y cómo le explicarías el de $\int_a^\infty f(x).dx$?

El objetivo de esta pregunta es doble. Por un lado, se pretende analizar si los estudiantes explicitan qué condiciones son necesarias para definir la integral de Riemann y si hay discrepancias entre la definición que dan y su operacionalización (Rasslan y Tall, 2002; Artigue, 1995a).

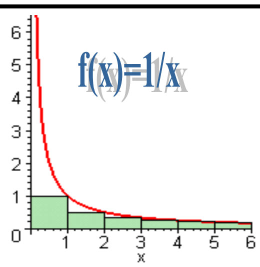
Por otro lado, se ha añadido una nueva cuestión para ver qué idea intuitiva han desarrollado los estudiantes del concepto de integral impropia y ver cómo la definen.

Pregunta 2:

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En vista de estos resultados, ¿qué puedes decir del valor de $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$?

Ayúdate de la gráfica adjunta.



[253] Ver Sección 3.3.4. Para más detalles, consultar González-Martín (2002) y González-Martín y Camacho (2004a y 2004f).

Se quiere estudiar cómo relacionan los estudiantes los resultados de series y de integrales a partir de una interpretación gráfica. Los estudiantes conocen el Test Integral y las relaciones entre integrales impropias y series. Además, en las prácticas con *Maple* se ha trabajado este resultado[254].

En las Sesiones 5 y 6 se vieron serias dificultades de los estudiantes para diferencias las sumas de Riemann y la serie asociada, además de limitaciones en la interpretación gráfica de una serie. Se pretende estudiar la resistencia de estas dificultades (que fueron explícitamente abordadas) y el índice de abandono que una pregunta planteada en el registro gráfico genera.

Se observan también los efectos del uso de un gráfico con función organizativa (Elia y Philippou, 2004) en la resolución de los estudiantes.

Pregunta 3:

¿Encuentras algún fallo en el siguiente razonamiento?

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2} = \left.\frac{-1}{x-4}\right|_2^5 = \frac{-1}{5-4} - \left(\frac{-1}{2-4}\right) = -1 + \frac{1}{-2} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Esta pregunta[255] se plantea en el registro algebraico con una integral impropia de segunda especie (esta vez con asíntota en el interior del intervalo) para ver si nuestros estudiantes se fijan en que esta curva no está acotada en el intervalo de integración. Ya se observó en la Sesión 1 que es más fácil identificar las integrales impropias de primera especie por la presencia del símbolo "∞" en los extremos de integración. Después del desarrollo teórico de las sesiones, pensamos que no identificar la integral impropia puede ser síntoma de grandes carencias en lo relativo a funciones, más que a desconocimiento de cómo tratar estas situaciones.

Por otro lado, se observó en los problemas entregados que los estudiantes tienen tendencia a responder en el registro que se les pregunta, por lo que esta pregunta puede dar más datos sobre esta cuestión. En esta cuestión, el uso del registro gráfico permite observar que la función es siempre positiva, luego no tiene sentido obtener una integral negativa.

Se pretende también observar si los estudiantes validan o no el uso de la regla de Barrow cuando se trata de una integral impropia.

Pregunta 4:

¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso? ¿Por qué?

" Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito".

En el Test hay otra cuestión que responde a ésta (Pregunta 10), que ha sido situada en la segunda parte para estudiar las posibles retroacciones. Se espera que los estudiantes conozcan los resultados y fórmulas para cálculo de volúmenes.

Los estudiantes han utilizado frecuentemente ejemplos y contraejemplos, con lo que queremos ver si los utilizan en cuestiones nuevas para ellos. La única dificultad puede ser que, si no recuerdan las fórmulas para el cálculo de un volumen, la búsqueda de un contraejemplo sencillo sea más costosa.

Por otro lado, también queremos ver si los alumnos relacionan esta nueva situación con todo lo que se ha trabajado con las integrales de $1/x$ y $1/x^2$ y analizar las manifestaciones de los

[254] Ver Sección 6.5.3.

[255] Adaptada de Eisenberg y Dreyfus (1991).

obstáculos de *homogeneizar dimensiones* y de *ligación a la compacidad*, que han aparecido ya en algunos de sus argumentos.

> **Pregunta 5:**
>
> Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Con esta pregunta se pretende evaluar los aspectos meramente algorítmicos de nuestra Ingeniería. El Criterio de Comparación se ha utilizado repetidas veces, tanto en el registro gráfico como algebraico y se ha conjeturado que es uno de los resultados más aceptados por los estudiantes. Queremos ver si los estudiantes son capaces de utilizarlo y recuerdan el resultado que se enuncia y si son capaces de adaptarse a una nueva situación que, aunque en principio parece que se trata de una función que cambia de signo, se puede abordar con el Criterio por tratarse de una función positiva.

En este caso, la aplicación del Criterio no es inmediata, sino que es necesaria una transformación; por otro lado, en esta ocasión la acotación ha de ser inferior para poder sacar conclusiones. Se analiza si los estudiantes se adaptan a esta situación o se quedan bloqueados al no sacar conclusiones con la cota superior.

Se ha visto también que los enunciados de aplicación del Criterio de Comparación en el nivel *técnico* tienen gran índice de éxito entre nuestros estudiantes. Contrastamos con este enunciado los resultados de Pian[256], que afirma que un enunciado en el nivel *movilizable* producirá un alto índice de fracaso en los estudiantes.

SEGUNDA PARTE

> **Pregunta 6:**
>
> Se dice que una función $f(x)$ es localmente integrable en un intervalo $[a, b)$ cuando...
>
> Dar un ejemplo de una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b)$ tal que f no sea localmente integrable en $[a, b)$.
>
> ¿Si $f(x)$ es localmente integrable en $[a, b)$, entonces su integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ es convergente?

Con esta cuestión pretendemos averiguar qué idea han retenido los estudiantes de la condición "*ser localmente integrable*", que se ha utilizado a lo largo de toda la Ingeniería, y que se conjeturó en la Sesión 2 que había quedado clara.

Por otro lado, se vuelve a requerir de los estudiantes el uso de ejemplos y contraejemplos (aunque esta vez más sencillos) para argumentar la veracidad o falsedad de propiedades. En este caso, los contraejemplos a buscar no son difíciles, por lo que se puede evaluar si el uso de contraejemplos complicados ayuda a los estudiantes a luego buscar contraejemplos sencillos.

[256] Citado en Robert y Speer (2001). Ver Sección 2.2.3.

Pregunta 7:

Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

Si $f(x) \to 0$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $f(x) \to 0$.

Si $f(x)$ es continua y cumple que $f(1) + f(2) + f(3) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ da un valor finito, entonces $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Con los dos primeros apartados se evalúa si a los estudiantes les ha quedado clara la falsedad de las dos implicaciones presentadas, que consideramos un obstáculo resistente ligado al concepto de integral impropia. A pesar de haberlo tratado explícitamente en las sesiones, lo seguimos encontrando en las hojas de problemas que los estudiantes entregaron al profesor.

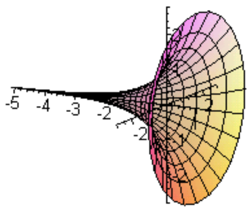
Con la tercera cuestión queremos ver si los estudiantes pueden reproducir la técnica vista en clase para encontrar contraejemplos a estas cuestiones que relacionan series con integrales, imponiendo en esta situación la continuidad.

Aunque esta pregunta está planteada en el registro algebraico, es el registro gráfico el que ofrece respuestas óptimas y más económicas, por lo que se observará el registro preferido por los estudiantes. Por otro lado, se analizará también qué tipo de contraejemplos proporcionan, para ver si reproducen los de clase o son capaces de crear los suyos propios.

Pregunta 8:

La siguiente figura muestra el resultado de hacer girar la curva $y = e^x$ alrededor del eje OX en el intervalo [-5, 1].

Vamos a calcular el volumen que se formaría si siguiéramos prolongando la figura hacia la izquierda (hacia $-\infty$).



Cada sección circular tiene un radio de e^x. Por tanto, el área de cada sección es

$$A(x) = \pi.(\text{radio})^2 = \pi.\ (e^x)^2 = \pi.\ e^{2x}.$$

Si sumamos ahora todas las áreas, obtendremos:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{1} A(x)dx = \int_{-\infty}^{1} \pi.e^{2x}dx = \pi.\lim_{b\to-\infty} \int_b^1 e^{2x}dx.$$

Concluye los cálculos. Interpreta el resultado.

Presentamos a los estudiantes la resolución de una integral "sencilla" (similar a la calculada en la Sesión 1) que representa el volumen finito de un sólido de longitud infinita[257]. Éste es un aspecto que no se ha tratado explícitamente en nuestra Ingeniería, aunque se han propuesto algunos problemas a los estudiantes.

[257] Similar a la trompeta hiperbólica infinita, que suscitó una controversia en el siglo XVII fruto del obstáculo de *ligación a la compacidad*. Ver Sección 3.1.2.

Además de observar la resolución de esta integral, que nos servirá como indicador de su nivel académico, se estudiarán los índices de abandono de la pregunta (que podrían estar originados por la presencia del obstáculo) y, en segundo lugar, las respuestas proporcionadas. ¿El trabajo explícito en el registro gráfico ayuda a enfrentarse a este tipo de obstáculos?

Pregunta 9:
Aquí vemos dos formas de resolver una integral impropia. Compara ambos métodos.

1.- $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)}} = \int_4^5 (x-4)^{-1/2}\,dx = \left.\frac{(x-4)^{1-1/2}}{1-1/2}\right]_4^5 = \left.\frac{(x-4)^{1/2}}{1/2}\right]_4^5 = 2.\left(\sqrt{5-4}-\sqrt{4-4}\right) = 2.\left(\sqrt{1}-0\right) = 2.$

2. $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)}} = \int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^{1/2}} = \lim_{b\to 4}\int_b^5 \frac{dx}{(x-4)^{1/2}} = \lim_{b\to 4}\left.\frac{(x-4)^{1-1/2}}{1-1/2}\right]_b^5 = \lim_{b\to 4}\frac{1}{1/2}.\left((5-4)^{1/2}-(b-4)^{1/2}\right) =$

$= 2.\lim_{b\to 4}\left(\sqrt{1}-\sqrt{b-4}\right) = 2.\left(\sqrt{1}-0\right) = 2.$

En esta cuestión, que se complementa con la 2, planteamos a los estudiantes una integral impropia que al resolverla con la regla de Barrow da el mismo resultado que al utilizar los métodos desarrollados.

¿En este caso los estudiantes validan el empleo de la regla de Barrow? ¿El registro algebraico tiene un peso como para borrar la teoría que se ha visto?

Pregunta 10:
Calcula el valor o el carácter de las siguientes integrales:

$\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx \qquad \pi.\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Interpreta gráficamente resultados a los que has llegado. ¿Hay alguna relación entre ambas integrales?

En esta ocasión, permitimos a los estudiantes que simplemente estudien el carácter de estas integrales si no conocen una primitiva de las funciones implicadas[258].

Se ha situado la pregunta 4 en la otra parte para que no se produzca “ruido” entre las respuestas a esta pregunta y las intuiciones que la 4 puede despertar. Pensamos que después de ver la pregunta 8 a muchos estudiantes les puede quedar claro que la segunda integral representa un volumen. Queremos estudiar las reacciones que los resultados producen y las interpretaciones que los estudiantes hacen de este resultado.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Las preguntas fueron puntuadas, de modo que los test de los estudiantes recibieron una puntuación de 0 a 10 para poder tener una idea aproximativa de su desempeño global en la resolución de las preguntas propuestas. La puntuación dada a cada pregunta es la que se muestra en la siguiente tabla:

[258] Lo que es posible dado su nivel académico. Esta situación ya sucedió con los estudiantes del estudio de la dimensión cognitiva, y fue imprevista (González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2004a).

	P1		P2	P3	P4	P5	P6			P7			P8	P9	P10
	a	*b*					*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*			
Puntuación	0.4	0.3	1	0.8	1.1	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.45	0.45	1	1	1
	4.7						5.3								

La distribución de los resultados de los estudiantes es la siguiente:

Intervalo	[0, 2.5)	[2.5, 5)	[5, 7.5)	[7.5, 10]
Estudiantes	FG, RA, MI, LP, NB	SM, AC, YC, AG	CF, NG, JH, NA, SD, YG	JB, IG, EG, AB, WD
Total	5	4	6	5

siendo la distribución exacta de las calificaciones la que se muestra a continuación:

Est.	FG	RA	MI	LP	NB	SM	AC	YC	AG	CF	NG	JH	NA	SD	YG	JB	IG	EG	AB	WD
Punt.	0.1	1.05	1.25	1.6	1.7	2.85	2.95	3.6	3.7	5.10	5.35	5.65	5.8	5.9	7.3	8.4	8.45	8.5	9.2	9.9

Se observa que 11 estudiantes obtienen una puntuación mayor que 5. La distribución de las puntuaciones en cada pregunta es la siguiente:

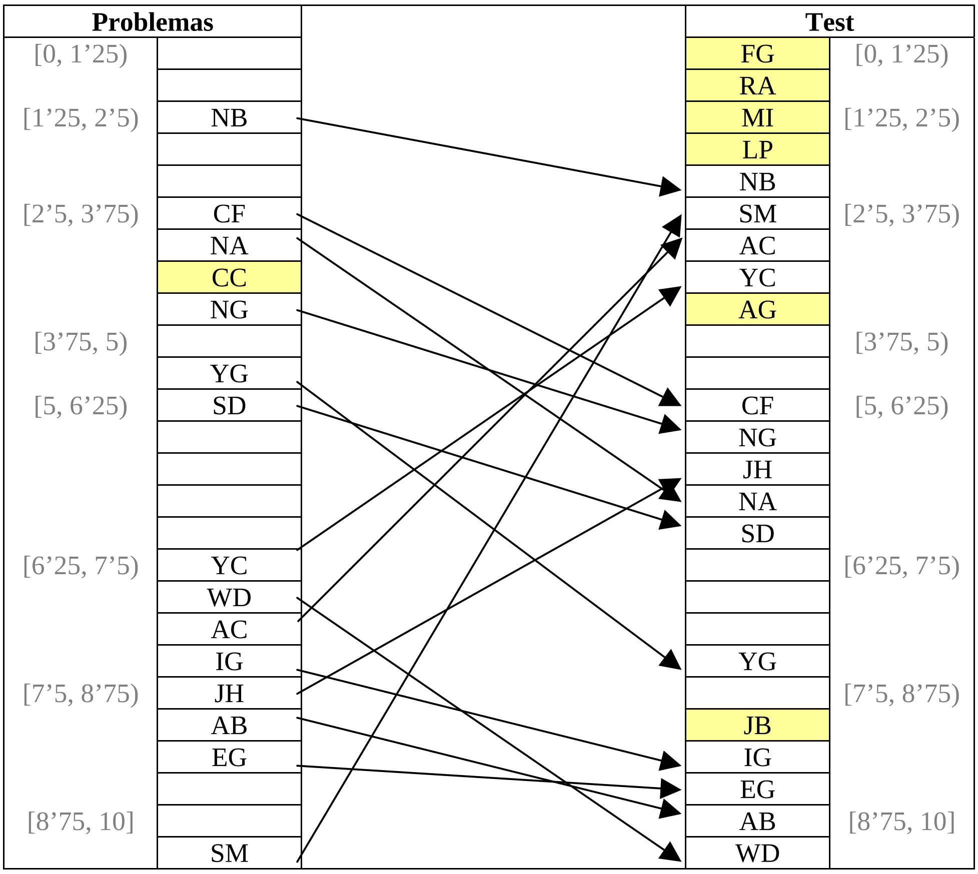
	1-a	**1-b**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6-a**	**6-b**	**6-c**	**7-a**	**7-b**	**7-c**	**8**	**9**	**10**
FG	0.05	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RA	0.2	0.15	0.1	0	0	0.4	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0
MI	0.15	0.1	0	0	0	0.7	0	0	0.1	0	0.05	0.05	0	0	0.1
LP	0.1	0.15	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0	0.7	0	0.6
NB	0.2	0.2	0.2	0	0.1	0	0	0	0.3	0	0	0	0	0	0.7
SM	0.25	0.2	0.3	0	0	0.8	0.1	0	0.1	0.3	0	0	0	0	0.8
AC	0.2	0.15	0.2	0	0	0	0.2	0	0.4	0.3	0.1	0.1	0.8	0	0.5
YC	0.35	0.15	0.1	0.5	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.8	0.7	0.8
AG	0.3	0.2	0.2	0.3	0	1	0	0	0	0	0.1	0	0.8	0	0.8
CF	0.3	0.25	0.2	0.6	0	0.2	0	0.4	0.3	0.3	0.1	0.45	0.9	0.9	0.2
NG	0.3	0.2	0.5	0.8	0	0.5	0.15	0.1	0.1	0.2	0.05	0.05	0.8	1	0.6
JH	0.2	0.15	0.7	0.7	0.4	0.4	0.05	0.05	0	0.3	0.2	0.3	0.8	1	0.4
NA	0.3	0.2	0.3	0	0.6	1.1	0	0	0	0.3	0.2	0	1	1	0.8
SD	0.3	0.2	0.5	0.75	0.3	0.3	0.2	0.4	0.4	0.3	0.35	0.2	0	1	0.7
YG	0.2	0.2	0.9	0.8	0	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0	0	0.9	1	0.8
JB	0.3	0.2	1	0.75	0	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.45	1	1	0.8
IG	0.3	0.15	0.9	0.8	0	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.45	0.45	1	1	0.9
EG	0.2	0.15	1	0.8	0.3	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.3	0.35	0.9	1	1
AB	0.3	0.2	0.9	0.8	0.8	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.45	0.9	1	0.95
WD	0.4	0.25	1	0.8	1.1	1.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.45	1	1	1
Medias	0.25	0.18	0.45	0.42	0.18	0.6	0.13	0.17	0.21	0.19	0.16	0.18	0.62	0.58	0.62
%	61.25	58.33	45	52.5	16.36	54.55	41.67	41.88	51.25	63.33	36.11	40	61.5	58	62.25

A partir de esta tabla podemos ordenar los distintos apartados por orden de dificultad para los estudiantes:

Int.	[0, 25)	[25, 50)					[50, 75)								
Preg.	4	7-b	7-c	6-a	6-b	2	6-c	3	5	9	1-b	1-a	8	10	7-a
%	16.36	36.11	40	41.67	41.88	45	51.25	52.5	54.55	58	58.33	61.25	61.5	62.25	63.33

Se observa que casi las dos terceras partes del test (9 de los apartados) han conseguido un porcentaje de éxito superior al 50%, aunque ninguna pregunta supera el 75%. Como se esperaba, la pregunta 4 ha causado grandes dificultades a los estudiantes. La pregunta 2 ha sido más difícil de lo que se había previsto, pues los estudiantes conocen el Test Integral y en clase se han explicitado las relaciones entre series e integrales. Las preguntas 6 y 7 también han causado dificultades, como se esperaba (a pesar de haberse abordado la pregunta 7 directamente en las sesiones). Se destaca que las preguntas 8, 9 y 10, de carácter más algorítmico, están entre las preguntas con mayor índice de acierto.

Se observa también que los estudiantes más participativos están entre los estudiantes con puntuación mayor al 50% (salvo SM; AC y YC intervienen sólo en las últimas sesiones). Si comparamos su desempeño en los problemas entregados y en el Test, obtenemos el siguiente gráfico:



Observamos que, en general, los estudiantes que entregaron los problemas han mejorado su puntuación en el Test. Las excepciones son YC, AC (por un despiste, no respondió a las preguntas de la cara trasera de la Primera Parte), JH (aunque sigue por encima del 50%) y SM (su cambio es el más acusado. Ella explica que se debe a que no tuvo tiempo de revisar los contenidos por el examen parcial, y que ella necesita de tiempo para prepararse las pruebas).

Nuestra conjetura sobre las dificultades de NB se confirman, pues no muestra una gran evolución entre las dos pruebas. Se observa también que los cuatro estudiantes con menor puntuación son estudiantes que no entregaron los problemas y que no solían participar en las sesiones, lo que puede indicar (en conjunto) una menor aceptación de la responsabilidad con las tareas propuestas.

A continuación analizamos e interpretamos las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta:

<u>Pregunta 1-a</u>:
Las respuestas que se consideran más representativas se presentan en la siguiente tabla:

1	Respuesta en términos de área	Es el área	SM, AG, RA, EG, YG, LP, JH, AC
		Si $f(x) \geq 0$, es el área	JB, AB, IG, CF, WD, NA, NG
		Igual que la anterior y aclara qué sucede cuando $f(x)$ no es positiva	AB, IG, WD
2	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ si f tiene primitiva		JB, CF, NG
3	$[a, b]$ cerrado y acotado	Implícitamente[259]	JB, SM, IG, NA, FG, AG, RA, EG, NG, YG, JH, AC
		Explícitamente	SD, MI, WD, YC, LP
4	Explicita que $f(x)$ esté acotada		SD, NB, WD
5	Añade una gráfica		SM, CF, NA, AG, RA, JH, AC
6	Habla de integrales superiores e inferiores		WD
7	Pone un ejemplo		NA
8	Es un mecanismo, un cálculo...		NG, LP
9	Otras		YC, MI, NB, FG

18 estudiantes de los 20 participantes responden en términos de áreas. De éstos, 10 aluden al signo de la función, distinguiendo que la integral no es siempre un área. Habrá que ver en el resto de respuestas de los demás si creen que la integral siempre es un área o no.

De los tres estudiantes que aluden a la regla de Barrow, dos aluden a la posibilidad de que exista la primitiva (elemento que se ha señalado explícitamente en nuestra Ingeniería):

- JB: "$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$*, siendo* $F'(x) = f(x)$".
- CF: "*Esta integral se puede hallar mediante la conocida Regla de Barrow: Si* $f(x)$ *posee una primitiva* $F(x)$ entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$".

También destacamos que 17 estudiantes utilizan (implícita o explícitamente) que el intervalo de integración sea cerrado y acotado; de éstos, 5 lo dicen claramente. Sin embargo, los estudiantes siguen obviando la precisión de que la función $f(x)$ esté acotada en el intervalo (en esta ocasión, sólo se ha contado cuándo se dice explícitamente, pues lo normal es considerar que esto se da). De estos tres estudiantes, destacamos que SD sólo señala el caso en que $f(x)$ no está acotada en $x = b$, quizá como consecuencia de la instrucción (o quizá por ahorro de escritura, como se ha hecho en clase):

- SD: "*Esta integral se puede tratar de una integral de Riemann cuando a y b son diferentes del infinito o una integral impropia cuando uno de los dos o los dos son infinito. Si* $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$*, entonces se trata de una integral impropia de* 2^a *especie, cuando este límite es* $\neq \infty$*, entonces es de* 1^a *especie*".

[259] Esto es, escribiendo en su explicación el intervalo en la forma $[a, b]$ o argumentando que se integra entre las rectas $x = a$ y $x = b$.

Entre todas las respuestas recogidas, mencionamos especialmente la de WD, que combina los distintos registros y responde tanto formal como informalmente:

- WD: "*Pongamos a y b nºs reales finitos y f acotada, entonces la integral definida si f es positiva se puede entender como el área q encierra la función f*(x) *con el eje de las X; En caso de q f cambie de signo, puede hacerse una separación de intervalos donde f tenga el mismo signo. Esta explicación es la más geométrica y fácil de comprender, ahora bien si realmente no estudiamos áreas, puede explicársele el concepto como un nº real q resulta de una integral superior (resultado de las sumas superiores de Riemann (ínfimo de las mismas)) y la integral inferior (resultado de las sumas inferiores de Riemann (supremo de las mismas))*".

Finalmente, citamos que hay seis estudiantes (NG, LP, MI, NB, FG, YC) que no dan una definición clara o correcta (siendo MI y NB quienes dan respuestas que señalan que no tienen una idea clara de este concepto). En dos de ellos (NG, LP) se observa una clara concepción a nivel de acción, interpretando la integral como un mecanismo, casi una operación[260]:

- LP: "*Para calcular el área de una función en un intervalo cerrado* [a, b], *se coge la función, se integra y se sustituyen los valores y obtenemos el área*".

Pregunta 1-b:

Las respuestas obtenidas se agrupan de la siguiente forma:

1	El concepto es similar al anterior		AB, IG, CF, WD, EG, NG, YG, AC
2	El dominio de integración es no acotado		JB, AB, SD, IG, WD, NA, YC, FG, AG, RA, EG, NG, YG, LP, AC
3	Se calcula el área de una figura infinita		JB, AG, RA, EG, YG, JH, AC
4	Escribe la definición	$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$	SD, CF, NA, NG, LP
		$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$ siendo F una primitiva	SM, AC
5	Puede converger o no		JB, SD, SM, NA, YC, NB, JH, AC
6	Hace una gráfica		SD, NA, RA, JH
7	Da las condiciones para definir la integral de Riemann		CF, WD
8	No se obtiene una región limitada por la curva		NA
9	Pone un ejemplo		NA
10	Otras		MI, NB

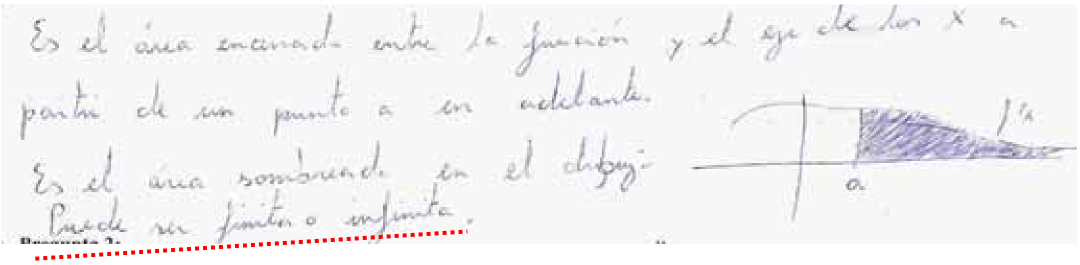
8 de los estudiantes explicitan que el concepto es similar al de integral de Riemann, lo que hace claro que han aceptado la integral impropia como una extensión de la integral de Riemann. Entre ellos, destacamos a CF, que aunque en el apartado anterior no explicitó las condiciones necesarias para definir la integral de Riemann, lo hace en éste:

- CF: "*Este expresión es un caso particular de la integral de Riemann. Es la llamada <u>integral impropia o generalizada</u>. Este concepto surge cuando la función f*(x) *no está acotada en* [a, b] *(Integral impropia de segunda especie), o cuando el intervalo de definición no es cerrado y acotado (Integral impropia de primera especie). En ambos casos, la integral impropia se puede definir como:* $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$ *donde M es un parámetro y* [a, M) *el intervalo* ".

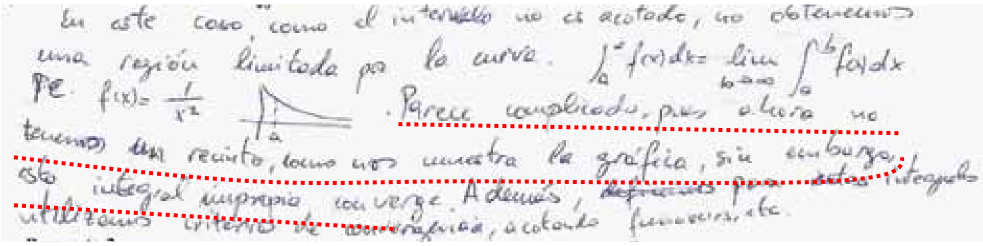
[260] Tendrían un perfil *primitivo*, según la clasificación de Turégano (Sección 1.3.1.).

evidenciando de esta forma que han quedado claras las condiciones para definir la integral de Riemann y cómo se extiende este concepto (aunque da la expresión analítica sólo para la primera especie).

7 de los estudiantes afirman que se calcula el área de una figura infinita. De ellos, JB es el único que precisó en el apartado anterior que se calcula el área sólo si la función es positiva. Para estos estudiantes podría producirse un alivio del obstáculo de *ligación a la compacidad*, como muestra la respuesta de JH, donde afirma que el área puede ser finita o infinita:



lo contrario de lo que sucede con NA, que afirma que "*como el intervalo no es acotado, no obtenemos una región limitada por la curva*". En esta estudiante parecen convivir los conocimientos institucionalizados con la presencia de este obstáculo, como se muestra en el siguiente fragmento:



Tan sólo 7 de los estudiantes escriben la definición institucionalizada de integral impropia. Sin embargo, viendo el desempeño global de los que no lo hacen, conjeturamos que esto se debe a que se entiende que se ha de dar una respuesta informal a la pregunta (de hecho, la mayoría de respuestas lo son).

Nuevamente, destacamos la respuesta de WD por sus comentarios:

- WD: "*En este caso, no nos encontramos con una integral definida, sino impropia. ¿Cuál es la diferencia? A primera vista que el intervalo no es finito, luego, la definición de antes no nos vale pues para calcular sumas de Riemann, si hacemos una partición el nº de subintervalos resultante es ∞, esto es, infinitos subintervalos.*
  Y en el caso de q f no estuviera acotada pues resulta de la misma forma pero ahora son los supremos (o los ínfimos) los q fallan pues si f en un determinado pto se va para infinito, las alturas de los rectángulos en las sumas de Riemann serán infinitos.
  Luego, esta integral es una generalización de la de Riemann (ampliada a intervalo no acotado (1ª especie), función no acotada (2ª especie) o ambas combinadas (3ª especie)".

donde explica perfectamente por qué para definir la integral de Riemann es necesario que la función esté acotada y el intervalo sea finito, tal como se hizo en la Sesión 1.

Señalamos también la respuesta de AB, que afirma:

- AB: "*Le diría que el concepto es similar pero en este caso b = ∞, le haría notar algunas propiedades, como que no es necesario que* $\lim_{x \to b} f(x) = 0$ *para que converja (si* <u>*no*</u> *es continua) etc.* ".

En este comentario deja claro que parece haber superado uno de los obstáculos típicos (y que se aborda en la Pregunta 7). Sin embargo, parece que el obstáculo se ha transformado, pues parece concebir que esto no es necesario sólo si la función no es continua (a pesar de que el problema 28-c abordaba esta cuestión; pero ella respondió con un ejemplo discontinuo).

En este apartado siguen apareciendo concepciones operativas de la integral, como en LP:

- LP: "*En esta integral el intervalo es* [*a*, ∞), *entonces se aplica el límite a la integral:* $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$ *; se resuelve la integral, después el límite y obtenemos el área*".

Las dos respuestas completamente incorrectas obtenidas revelan que estos estudiantes no tienen claro tampoco el concepto de integral definida, lo que impide reconstruirlo:

- MI: "*En esta integral los puntos pueden ser varios, que van desde a hasta ∞, es decir, f*(*x*) *(integral), puede resolverse en varios intervalos. No tiene un intervalo de puntos cerrados para poder resolver dicha integral*".
- NB: "*Le diría que es una función que se va a infinito cuya integral es esa, y que puede converger o divergir dependiendo de la función que sea*".

<u>Pregunta 2</u>:

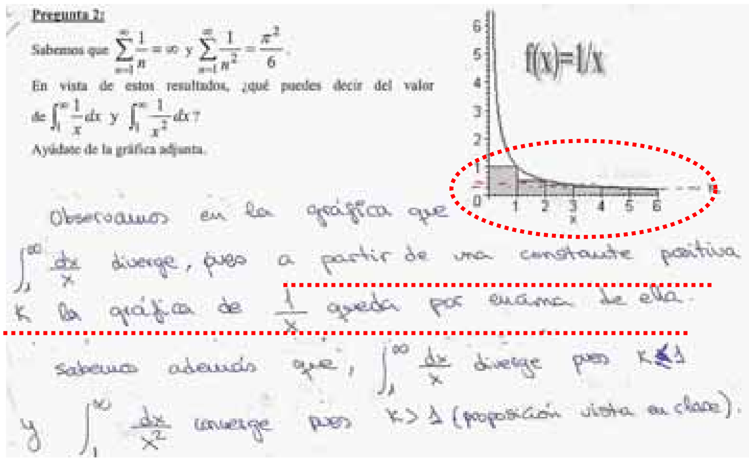
Las respuestas recogidas se agrupan de la siguiente forma:

<table>
<tr><td rowspan="11">$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Usa el registro gráfico</td><td>Hace referencia explícita a la gráfica</td><td>SD, IG, CF, WD, NA, EG, YG</td></tr>
<tr><td>Hace otra gráfica similar</td><td>AB, EG</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Resolución correcta</td><td>$\sum \frac{1}{n} < \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$</td><td>JB, SD, IG, WD, EG, YG</td></tr>
<tr><td>Como la anterior, definiendo una función $g(x)$ para los rectángulos y aplicando el Criterio de Comparación</td><td>AB</td></tr>
<tr><td>Usa el Test Integral</td><td>WD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">Otras formas de calcularla</td><td>Usa los resultados de convergencia para $1/x^k$.</td><td>SM, CF</td></tr>
<tr><td>La calcula</td><td>NA, YC</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">Otros razonamientos</td><td>$\sum \frac{1}{n} = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$
La integral coincide con las áreas de los rectángulos</td><td>NB, NG, JH, AC</td></tr>
<tr><td>Es divergente porque el área bajo la curva es infinita</td><td>AG</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Otras respuestas</td><td>RA, LP</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">En blanco</td><td>MI, FG</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Usa el registro gráfico</td><td>Hace una gráfica</td><td>JB, AB, WD, NB</td></tr>
<tr><td>Describe la nueva situación gráfica</td><td>YG</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Resolución correcta</td><td>$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \le \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$</td><td>JB, EG, YG</td></tr>
<tr><td>Como la anterior, definiendo una función $g(x)$ para los rectángulos y aplicando el Criterio de Comparación</td><td>AB</td></tr>
</table>

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$			Usa el Test Integral	IG, WD
	3	Otras formas de calcularla	Usa los resultados de convergencia para $1/x^k$	SM, CF
	4	Calcula la integral	Como comprobación	AB, CF
			Como respuesta	YC, AG
	5	Otros razonamientos	$\sum \frac{1}{n^2} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ La integral coincide con las áreas de los rectángulos	SD, NB, NG, JH
			Si la suma converge, la integral converge	NA
			Converge (sin explicar)	RA
	6	Otras respuestas		LP, AC
	7	En blanco		MI, FG

En primer lugar, subrayamos el hecho de que tan sólo dos estudiantes han dejado esta cuestión en blanco. De los que responden, 9 estudiantes recurren claramente al registro gráfico para la primera integral y 5 para la segunda. Obsérvese que la estudiante WD moviliza varios resultados institucionalizados y responde a la pregunta utilizando la información de la gráfica y comparando áreas y, también, mediante el Test Integral.

Sin embargo, es destacable el hecho de que sólo 7 estudiantes deducen el carácter de la primera integral usando los datos que se les dan (aparece una respuesta no prevista: AB define una función que coincide con los rectángulos y aplica el Criterio de Comparación) y sólo 6 estudiantes deducen el carácter de la segunda. Parece que las dificultades que se observaron para interpretar gráficos donde aparecen simultáneamente series e integrales son persistentes, como lo muestran algunas respuestas recogidas. La estudiante CF sigue mostrando estas dificultades, que mostró en los problemas entregados, y no parece ser capaz de interpretar correctamente la información dada en la gráfica:



Las otras estudiantes que mostraron dificultades con la interpretación gráfica en la Pregunta 21-b de los problemas son NA, CC (que no hace el Test de contenidos) y NG. NA hace referencia a la gráfica, pero no utiliza adecuadamente la información provista y NG ignora la gráfica en su respuesta. Se ve que las limitaciones para interpretar gráficos, en estas estudiantes, les impiden la correcta resolución de preguntas planteadas (o apoyadas) en este registro, con lo que no perciben la función *organizativa* del dibujo.

También aparecen dificultades con la comparación entre series e integrales. Las estudiantes SM y NG afirman:

- SM: "*Y tb sabemos que las integrales siguen el mismo comportamiento que las series*".

- NG: "*Con las integrales ocurre lo mismo que con las series*".

lo que revela no comprender el enunciado del Test Integral (y quizá el no tomar en cuenta los contraejemplos vistos en clase). NA es otra estudiante que malinterpreta los resultados institucionalizados, afirmando:

- NA: "$f(x)=\frac{1}{x^2}$, *su suma converge, necesariamente su integral impropia debe ser convergente* [...]. *En cambio, para* $f(x)=\frac{1}{x}$, *su suma no converge es infinita, pero esto no nos asegura que su integral impropia sea convergente.* [...] *La integral impropia no converge. Lo que no puede ocurrir es que una suma de una función sea convergente y su integral divergente* ".

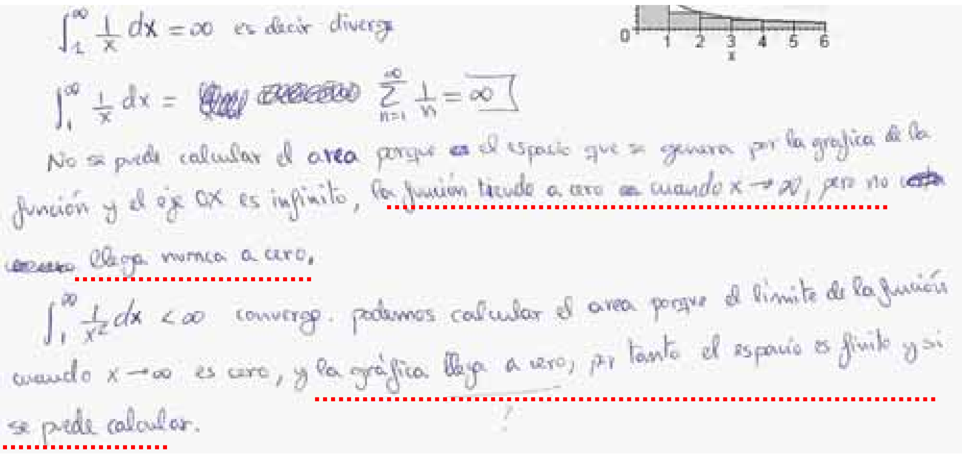
por lo que desarrolla la concepción errónea de que $\sum f(n)<\infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx<\infty$ y la concepción de que $\sum f(n)=\infty \not\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx=\infty$.

En este sentido, la estudiante WD es muy clara y en la resolución de ambas integrales añade:

- WD: "*Como en estas condiciones* [*se refiere al Test Integral*] *el carácter de la serie y la integral es el mismo puede decirse que* $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ *es divergente. Ahora bien, tener en cuenta que igual carácter* $\not\Rightarrow$ *igual valor. Por lo tanto, para el caso (2)* [...] *la serie es convergente y por tanto la integral tb lo es, pero eso* <u>*no*</u> *implica q tengan el mismo valor, luego del valor de* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *no sé nada, salvo q tiene un valor finito* ".

y muestra haber comprendido correctamente el Test Integral (y qué *no* se puede deducir con él).

El estudiante AC muestra obstáculos con su interpretación del carácter local de las funciones en el infinito:


$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\infty$ es decir diverge

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

No se puede calcular el area porque el espacio que se genera por la grafica de la función y el eje OX es infinito, la función tiende a cero cuando $x\to\infty$, pero no llega nunca a cero.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx<\infty$ converge. podemos calcular el area porque el limite de la función cuando $x\to\infty$ es cero, y la gráfica llega a cero, por tanto el espacio es finito y si se puede calcular.

y parece confirmarse un uso del infinito potencial[261]. Cree que como $1/x$ no llega a cero, siempre se añade área y el área será infinita.

Pregunta 3:

Las preguntas obtenidas las podemos agrupar de la siguiente forma:

1	Respuestas válidas	La función no está acotada en $x = 4$	JB, AB, SD, IG, WD, EG, NG, YG, JH
		La función es positiva y da un área negativa	WD, AG
		No es de Riemann. No es correcto el uso de la Regla de Barrow	AB, IG, WD, YG
		Para calcularla, habría que dividirla en dos	JB, WD, EG, NG, SD, JH
		La calcula para comprobarlo	JB, SD
		$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^r}$ converge sii $r < 1$ y aquí $r > 1$	CF
		Se resuelve con límites	YC
2	Hace una gráfica		JB, AB
3	Respuestas no válidas	$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{x^2 - 2^2}$, que es inmediata	MI
		Hay que resolverla por cambio de variable, cambiando el intervalo de integración	SM
		Falla en el cálculo de la primitiva	CF, FG
		En la primitiva, primero se sustituye $x = 2$ y luego $x = 5$	RA
		No encuentra ningún fallo	NA
4	En blanco		NB, LP, AC

Tan sólo se han producido 6 respuestas incorrectas, y una de ellas (CF) la da una estudiante que también aporta una forma correcta de responder a la cuestión[262]. Por otro lado, los estudiantes AC y LP no escriben absolutamente nada en la segunda carilla de la primera parte de la prueba y, más tarde, AC reconoce que no se fijó que hubiera preguntas escritas. Quizá éste es el mismo caso de LP (estos dos estudiantes fueron los primeros en entregar la primera parte de la prueba).

De los estudiantes que dan una respuesta correcta, sólo dos realizan los cálculos, por lo que parece que en general hay seguridad en las respuestas proporcionadas. Además, la mayoría de estudiantes no valida el uso de la regla de Barrow en este caso.

Los estudiantes, en su mayoría, parecen haberse sensibilizado con la presencia de discontinuidades esenciales en el intervalo de integración. 9 estudiantes expresan que éste es el error (JH dice que la función no está definida, pero consideramos que sabe que hay una asíntota al anularse el denominador).

Se observa en la respuesta de AG un obstáculo[263] (en relación con su respuesta a la Pregunta 1-a) y asume que la integral *siempre* es un área y ha de dar un valor positivo:

[261] Que habíamos conjeturado al analizar la Ficha 1 (Sesión 3) y los problemas entregados (véase el 21-a), al escribir recurrentemente "*el espacio creado es cada vez mayor, por lo que el área es infinita*".

[262] En este caso, es obvio que el uso de los criterios institucionalizados permite a CF superar sus limitaciones operatorias.

[263] Ya registrado por Calvo (1997) y Bezouidenhout y Olivier (2000).

La $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$ representa el área de la función bajo la curva por lo que nunca puede ser negativa. Sebo hallar la $\int_2^5 \left|\frac{dx}{(x-4)^2}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Por lo que este estudiante quizá no se da cuenta de la presencia de la asíntota, sino simplemente de que el área da negativo.

Se observa en esta pregunta el primer efecto de retroalimentación con otra pregunta, en este caso la Pregunta 9. La estudiante YC primero contesta:

- YC: "*La resolución de esta integral no es correcta*".

y, tras responder a la Pregunta 9, escribe:

- YC: "*En la parte anterior en el ejercicio q pedía ver si la resolución de la integral estaba bien. Está mal pq debería de hacerse con el límite*".

Este efecto se había previsto y, en este caso, ha permitido a esta estudiante corregirse y "recordar" el proceso de cálculo de estas integrales.

Entre las respuestas incorrectas, predominan las que revelan fuertes carencias de los estudiantes con el álgebra básica (MI) o con los procesos básicos de cálculo de primitivas:

- MI: "*La integral está mal resuelta porque la pondríamos de la siguiente forma* $\int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 2^2}$ *y la podríamos resolver por medio de las integrales inmediatas, que nos quedaría* $1/2.\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$, *y resolviendo esta integración nos queda,* $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2} = 1/2.\ln|3/7| - 1/2.\ln 0$ ".

  Se observa que, a pesar de las carencias en la aritmética básica, sin embargo esta estudiante ha memorizado las principales primitivas. Obsérvese también que no concluye sus cálculos; probablemente por no saber cómo evaluar ln0.

- SM: "*Al calcular una integral utilizando el método de cambio de variable, tb tenemos que cambiar el intervalo de integración, yo creo que es ahí donde está el fallo, a pesar de que dé el mismo resultado, es simple coincidencia* [realiza el cálculo a su forma, aplicando Barrow y haciendo el cambio de variable]".

  De forma sorprendente, esta estudiante, que tiene el más alto rendimiento en los problemas entregados, comete errores de importancia considerable. Al hablar con ella posteriormente, comenta que necesita de mucho tiempo para prepararse las pruebas y que no tuvo ese tiempo para este test y se puso nerviosa.

- CF: "*Creo que el razonamiento falla en el cálculo de la primitiva de la función* [y, posteriormente añade que no puede converger por ser $r > 1$]".
- NA: "*No encuentro ningún fallo, f está definida en* [2, 5] [y repite el cálculo]".

Señalamos que los estudiantes que han dado respuestas incorrectas a esta pregunta (salvo CF, que da también una respuesta correcta, y NA) son los estudiantes con menor puntuación en el Test. Es posible que su bajo desempeño (y poca asimilación de los elementos de nuestra Ingeniería) se relacione más con sus fuertes carencias.

Pregunta 4:

Esta pregunta es una de las más difíciles de analizar, pues se producen retroacciones con las Preguntas 8 y 10. Además, al tener un carácter más abierto, se han registrado explicaciones diversas. Pensamos que una posible clasificación de las respuestas es la siguiente:

1	Es falso	Da explicación correcta	AB, WD, EG, JH, NA
		Otras explicaciones	SD
		Sin explicación	NB
2	Depende del carácter de la integral		NA
3	Verdadero	Con explicación	JB, MI, SM, CF, YC, RA, YG, JH
		Sin explicación	IG
4	Añade un dibujo		NA, WD, SD, YC, RA, EG, NB
5	En blanco		FG, AG, NG, LP, AC
6	Tipos de explicaciones para la veracidad	El procedimiento de hallar la integral con rectángulos se puede hacer con un sólido y el volumen tampoco converge	JB, YC
		Respuestas relacionadas con el obstáculo de *homogeneizar dimensiones*	SM, CF, RA, EG, YG, JH
		Otras	MI

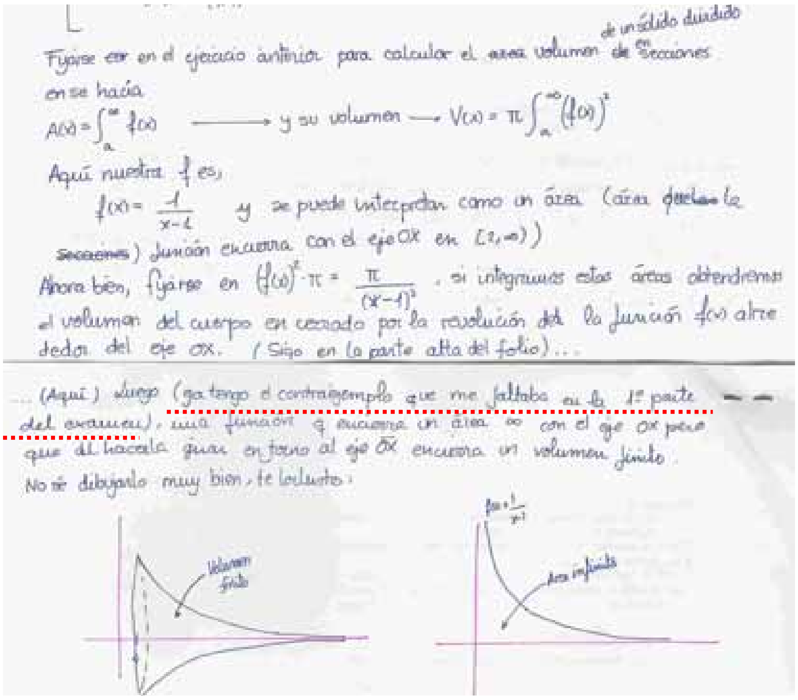
Como se había previsto, esta pregunta es una de las más difíciles para los estudiantes y sólo se han obtenido cinco correctas, a pesar de encontrarse una ayuda en la Segunda Parte de la prueba. Destacamos que sí se han producido algunas de las retroacciones esperadas, pues de las cinco respuestas consideradas correctas, 4 (WD, EG, JH, NA) se completaron durante la resolución de la Segunda Parte. De estas 4 respuestas, 2 muestran la presencia del obstáculo de *homogeneizar dimensiones*, que se combate con los resultados algebraicos. AB es la única estudiante que responde correctamente en la Primera Parte:

- AB: "*Falso, pues la "fórmula" para hallar el vol. Es* $V = 2\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ *y por ejemplo* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *diverge y, en cambio (a > 0):* $2\pi\int_a^\infty \dfrac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\pi.\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\right]_a^b = \dfrac{2\pi}{a^2}$ *converge*".

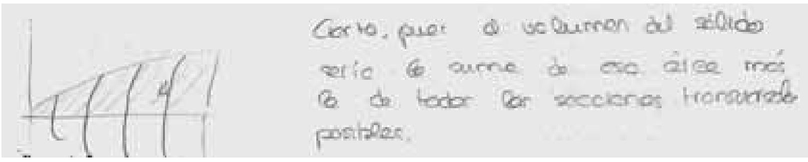
Sin embargo, se equivoca al resolver el ejemplo que propone, intercambiando las posiciones de la función y la primitiva; pero lo atribuimos a un error casual, pues resuelve correctamente la Pregunta 10 de la prueba.

WD es otra estudiante que sabe que es falso y da evidencias de haber trabajado en casa las hojas de problemas. Al resolver la Segunda Parte encuentra un contraejemplo a la cuestión:

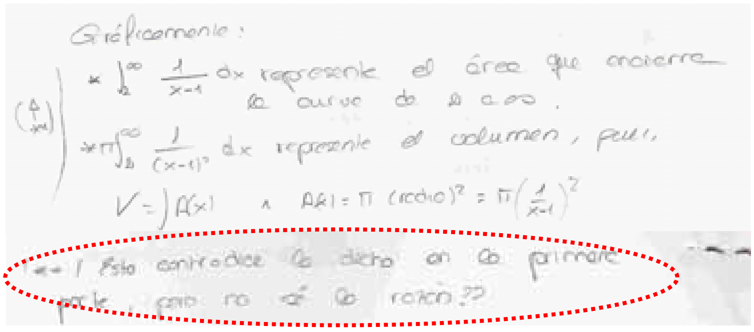
- WD (Preg. 4): "*Creo haber visto un ejercicio como este en las hojas de problemas y recuerdo q el área encerrada era infinita pero el volumen no lo era. Sin embargo no sé como demostrarlo*".

- WD (Preg. 10): 

En EG aparece el obstáculo de *homogeneizar dimensiones* fuertemente. Su primera respuesta muestra claramente la presencia del obstáculo. Al resolver la Pregunta 8 parece que duda y decide asegurarse calculando el área de la figura. Finalmente, es la resolución de la Pregunta 10 la que le ocasiona el conflicto:

- EG (Preg. 4): 

- EG (Preg. 8): "[calcula el volumen y le da finito. Calcula entonces el área y le da también finito. Escribe entonces] *(No contradice lo dicho en la 1ª parte)*".

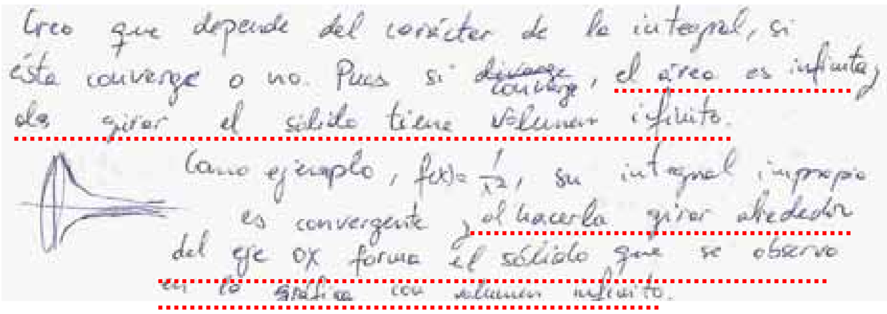
- EG (Preg. 10): 

Finalmente, JH también muestra la presencia del obstáculo, aunque afirma no tener claro el concepto de volumen infinito. En su caso, al responder a la Pregunta 8 parece recordar haber trabajado casos de áreas infinitas que generan volúmenes finitos[264]:

[264] Aunque en este caso se equivoca, pues la función de la Pregunta 8 también tiene área finita. Quizá su conclusión del área infinita viene causada por el obstáculo de *ligación a la compacidad*.

- JH (Preg. 4): "*V. No estoy seguro, pero tiene sentido pensar que al girar un área infinita se obtiene un volumen infinito, aunque por otra parte, el concepto de volumen infinito no lo tengo nada claro*".
- JH (Preg. 8): "[Calcula el volumen y le da una cantidad finita] *Vemos como una curva que encierra un área infinita, al girar define un volumen finito*".

Entre las respuestas incorrectas, citamos la de NA. Aunque no es claro en ella, parece que también existe la presencia del obstáculo de *homogeneizar dimensiones*, quizá ligado al de *ligación a la compacidad*, pues su respuesta se basa, aparentemente, en lo que observa:


Creo que depende del carácter de la integral, si ésta converge o no. Pues si ~~diverge~~ converge, el área es infinita, al girar el sólido tiene volumen infinito.
Como ejemplo, $f(x)=\frac{1}{x^2}$, su integral impropia es convergente y al hacerla girar alrededor del eje OX forma el sólido que se observa en la gráfica con volumen infinito.

Sin embargo, al responder la Pregunta 8, escribe: "*El volumen es finito, en la pregunta de la hoja (1) se hacía mención al volumen infinito de un área infinita, en este caso área infinita encierra volumen finito*[265]"

AB, también al resolver el Problema 8, añade: "*Luego el volumen es finito como ya comentábamos en el ejercicio 3 de la pág. anterior*", mostrando implícitamente que, igual que JH y NA, considera que la figura tiene área infinita.

Como se ve, estos obstáculos están fuertemente arraigados, incluso en estudiantes de alto rendimiento en el total de la prueba. Y estudiantes que muestran ser capaces de calcular las integrales implicadas, se dejan llevar por la intuición y afirman que determinadas figuras tienen área o volumen infinito, sin comprobarlo.

<u>Pregunta 5</u>:

Las respuestas obtenidas las agrupamos de la siguiente forma:

<table>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">Resolución correcta</td><td colspan="2">Separa integrales y usa que la integral de $2/\sqrt{x}$ diverge</td><td>Usa los resultados de convergencia de $1/x^k$</td><td>JB, SM, NA</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Criterio de Comparación</td><td rowspan="2">$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$</td><td>Prueba que la integral de $1/\sqrt{x}$ diverge con la definición</td><td>AB, AG</td></tr>
<tr><td>Usa los resultados de convergencia de $1/x^k$</td><td>IG</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x} < \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$</td><td>Sabe que la integral de $1/x$ diverge</td><td>YG</td></tr>
<tr><td colspan="3">Usa el Criterio del Cociente y divide entre $1/x$, que sabe que diverge</td><td>WD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Resolución mixta</td><td>Criterio de Comparación</td><td>$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} < \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$</td><td>"Prueba" que la integral de $\sin x/\sqrt{x}$ diverge con $\lim_{x\to\infty} x^k . f(x) = 0$ si $k < ½$</td><td>EG</td></tr>
<tr><td colspan="3">Separa integrales e integra cada una. Se equivoca en una integral, pero calcula bien la de $1/\sqrt{x}$ y concluye la divergencia</td><td>MI</td></tr>
</table>

[265] Igual que JH, concluye que la figura tiene área infinita por la forma que tiene.

3	Resolución incorrecta	Criterio de Comparación	$\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} < \frac{3}{\sqrt{x}}$	Sabe que la integral de $1/\sqrt{x}$ es divergente	No concluye nada	SD
					Concluye que diverge	SM, NG
			$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$	La integral de $1/\sqrt{x}$ es convergente	Concluye que converge	RA
			$\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} < \frac{4}{x^2}$	Sabe que la integral de $1/x^2$ converge	Concluye que converge	CF, JH
		Otros				YC
4	En blanco					FG, NB, LP, AC

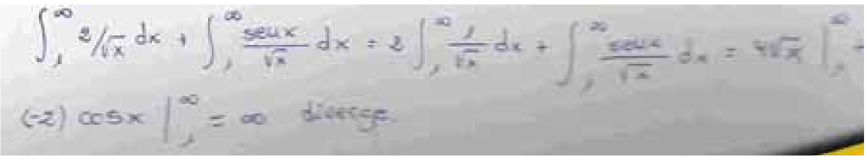
Si bien es cierto que la acotación que se debía hacer para responder a esta cuestión no es habitual[266], el índice de acierto en esta pregunta es más bajo del esperado: tan sólo 8 estudiantes han proporcionado respuestas correctas. Hay otros 2 estudiantes (EG y MI) que proporcionan respuestas correctas, pero con algún error en el procedimiento. Destacamos que los estudiantes que aplicaron correctamente el Criterio en el Problema 21-a, tan sólo SM se equivoca ahora.

Aunque la única resolución que se esperaba era el uso del Criterio de Comparación, se han obtenido respuestas y métodos no esperados:

- Dos estudiantes (JB, SM, NA) prefieren separar el cociente en dos, obteniendo una integral directamente divergente.
- Un estudiante (YG) utiliza que $\forall\ x > 1$: $\sqrt{x} < x$ y acota la integral inicial con $1/x$.
- Una estudiante (WD) utiliza el Criterio del Cociente.

Quizá el Criterio de Comparación ha sido utilizado más en el registro gráfico durante las sesiones, lo que ha originado la elección de estrategias alternativas[267]. Sin embargo, la presencia de éstas muestra que hay otras técnicas que también han sido bien asimiladas por los estudiantes.

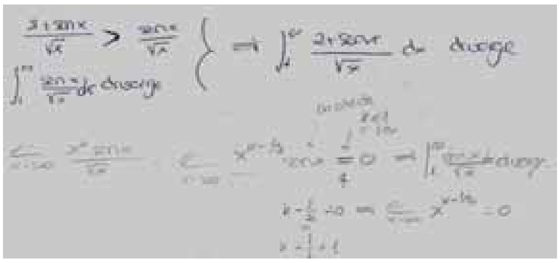
Entre las dos respuestas (EG y MI) "mixtas", aparecen dos nuevos procedimientos para abordar la cuestión. MI, que parece desconocer los resultados institucionalizados en las sesiones, opta por calcular directamente una primitiva de la función y obtiene la divergencia (sin embargo, calcula mal una de las primitivas):



EG utiliza también un procedimiento original. Sin embargo, olvida comprobar que se dan las hipótesis necesarias para aplicar el resultado (sin $x/\sqrt{x}$ no tiene signo constante) y luego compara con una integral que no es divergente:

[266] La acotación que los estudiantes están más habituados a hacer es $\sin x \leq 1$, y no $-1 \leq \sin x$.

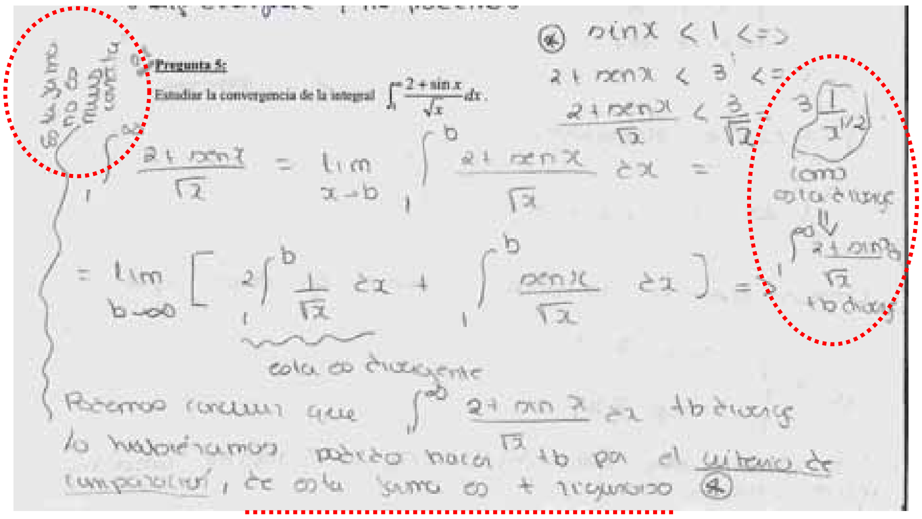
[267] Que, siguiendo nuestra conjetura, podrían deberse a que en esta ocasión se acota inferiormente, algo inhabitual.



A pesar de los métodos de resolución incorrectos, destacamos los siguientes datos:

- 5 estudiantes utilizan claramente los criterios de convergencia para las funciones $1/x^k$.
- 2 estudiantes usan la definición para decidir la divergencia de la integral de $1/\sqrt{x}$.
- 7 estudiantes explican que “se sabe” el carácter de las integrales de $1/x$ (2 estudiantes), $1/\sqrt{x}$ (3 estudiantes) y de $1/x^2$ (2 estudiantes).

La estudiante SM constituye un caso excepcional. Parece haber desarrollado la idea de que “lo correcto” es el uso de criterios o resultados formales y quizá aplica esta regla en todo su aprendizaje. Resuelve correctamente la cuestión separando la integral en dos y concluyendo la divergencia de una de ellas (usando los resultados de $1/x^k$). Sin embargo, escribe “*esta forma no es muy correcta*” y añade que el uso del Criterio de Comparación “*es más riguroso*”:



lo que la lleva a un error, pues acota superiormente y muestra, salvo que se trate de un error casual, no comprender el uso del Criterio.

La estudiante WD, por su parte, continúa aclarando todas sus respuestas al máximo y, después de resolver la cuestión correctamente con el Criterio del Cociente, escribe “*Notar q no uso q la integral (el integrando) cambia de signo, pues seno oscila entre* $\pm$ 1 *y* 2 + sen $x \in [1, 2]$, *luego no cambia de signo*”, lo que muestra que, además, conoce las hipótesis de aplicación del resultado.

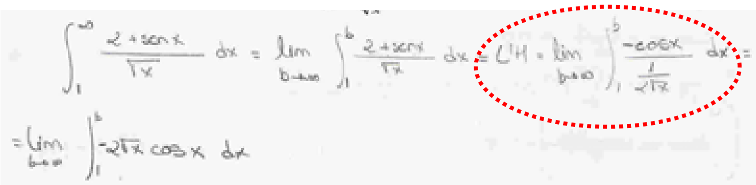
Entre las respuestas no correctas, destacamos que SD acota superiormente y, aunque no concluye nada[268], no intenta acotar inferiormente, lo que puede estar relacionado con un aprendizaje inflexible y prototípico. Señalamos de nuevo a la estudiante MI que, aunque no maneja correctamente los contenidos de integración impropia, parece haber memorizado varias fórmulas de cálculo de primitivas.

[268] Lo que denota una correcta comprensión del Criterio y de los casos en que no se puede concluir nada.

Los estudiantes que usan incorrectamente el Criterio de Comparación son:

- Concluyen que la divergencia de la integral de una función mayorante implica la divergencia de la integral mayorada: SM y NG.
- Concluyen que la convergencia de la integral de una función minorante implica la convergencia de la integral minorada: RA.

Otras dos respuestas incorrectas (CF y JH) aplican correctamente el Criterio, pero cometen errores aritméticos al afirmar que $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$. Por tanto, podemos concluir que el Criterio de Comparación es uno de los resultados mejor comprendidos y que muchos errores cometidos se deben a carencias con conceptos anteriores. Uno de estos errores aparece en la respuesta de YC:



que trata de adaptar una estrategia (la regla de L'Hôpital) económica que da buenas respuestas en otro contexto a esta nueva situación. Parece que YC no ha comprendido el Criterio, pues no lo usa en el Problema 21-b ni en esta pregunta, al igual que NG, que dio respuestas incorrectas en el Problema 21-b y en esta pregunta aplica mal el Criterio. NA tampoco lo aplicó correctamente en el Problema 21-a, pero ahora resuelve correctamente la integral (sin usar el Criterio). En el caso de CF, parece confirmarse que su problema en el Problema 21-b fue la interpretación gráfica, pues en esta ocasión aplica bien el Criterio (aunque con un error aritmético[269]).

Pregunta 6:

Agrupamos las respuestas de la siguiente forma:

	6-a	6-b	6-c	
1	Correcta	Correcta	Correcta	JB, IG, WD, AB, EG, YG
2	Imprecisa	Correcta	Correcta	SD
3	Imprecisa	Incorrecta	Correcta	AC
4	Imprecisa	Incorrecta	Imprecisa	SM
5	Blanco	Correcta	Imprecisa	CF
6	Incorrecta	Blanco	Correcta	NB
7	Incorrecta	Imprecisa	Incorrecta	RA, JH
8	Incorrecta	Blanco	Incorrecta	MI
9	Incorrecta	Blanco	Blanco	LP
10	Blanco	Blanco	Incorrecta	YC
11	Incorrecta	Incorrecta	Incorrecta	NA, NG
12	Blanco	Blanco	Blanco	AG, FG

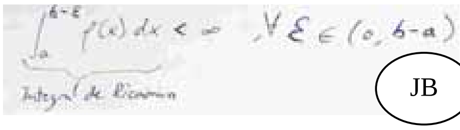
Aparentemente, tan sólo 7 estudiantes han comprendido bien el concepto de integrabilidad local (o recuerdan la definición y están en condiciones de responder al resto de las preguntas). Aunque la definición de SD no es correcta, quizá se debe a un error casual, pues

[269] En la Pregunta 3 el uso de criterios le permitió superar sus carencias. Sin embargo, en esta pregunta son sus carencias las que le impiden comparar adecuadamente, y produce una respuesta incorrecta.

responde correctamente los siguientes apartados. Se han detectado en los estudiantes universitarios dificultades con los cuantificadores, por lo que quizá en este caso se ha producido una confusión entre "∀" y "∃"[270].

Sin embargo, es positivo que los estudiantes que han sabido dar una definición correcta han sido también capaces de ofrecer un ejemplo y un contraejemplo a las siguientes cuestiones, lo que revela una comprensión del concepto. De esta forma, muestran que no sólo se ha comprendido este concepto, sino que son capaces de ofrecer ejemplos y contraejemplos sencillos a ciertas cuestiones relacionadas con los contenidos.

Entre las definiciones que se han dado, IG y WD reproducen la que se institucionalizó en clase, en el registro algebraico, y AB y EG la enuncian utilizando más el lenguaje habitual. JB y YG alteran la definición original, aunque sigue siendo equivalente:

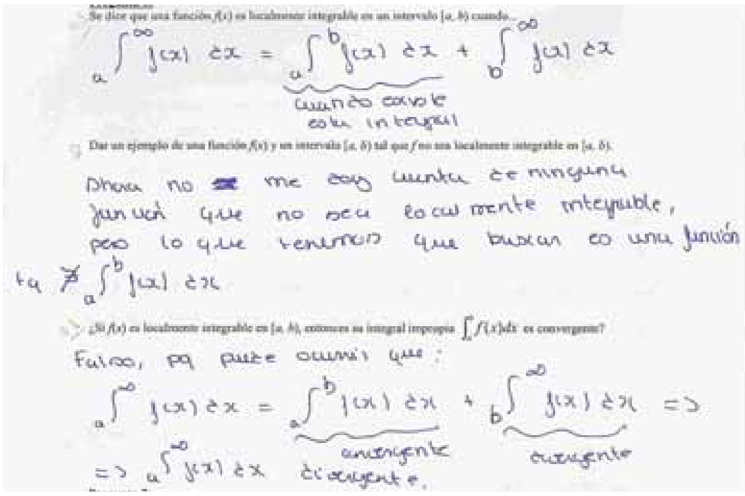

$\underbrace{\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}_{\text{Integral de Riemann}} < \infty \quad , \forall \varepsilon \in (0, b-a)$

JB


f(x) es integrable en $[x_1, x_2]$ $\forall x_1, x_2$ con $a \leq x_1 < x_2 < b$

YC

De las tres definiciones imprecisas, en dos (AC, SM) no queda claro si el estudiante comprende correctamente el concepto. En el caso de SM, no es probable que lo tenga claro, por las siguientes respuestas que da:


Se dice que una función f(x) es localmente integrable en un intervalo [a, b) cuando...

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{b} f(x)\,dx}_{\text{cuando existe esta integral}} + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$

Dar un ejemplo de una función f(x) y un intervalo [a, b) tal que f no sea localmente integrable en [a, b).

Ahora no me doy cuenta de ninguna función que no sea localmente integrable, pero lo que tenemos que buscar es una función tq $\nexists \int_a^b f(x)\,dx$

¿Si f(x) es localmente integrable en [a, b), entonces su integral impropia ∫ f(x)dx es convergente?

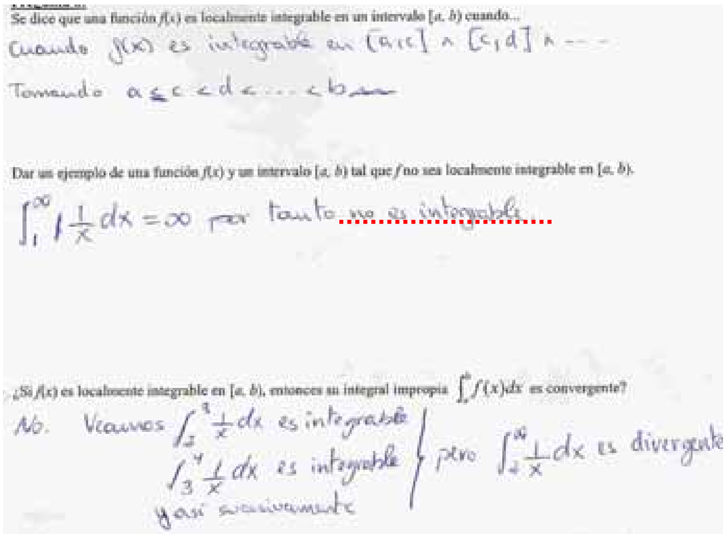
Falso, pq puede ocurrir que:

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{b} f(x)\,dx}_{\text{convergente}} + \underbrace{\int_b^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{divergente}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ divergente.

La respuesta de AC no es precisa pues no aclara si los puntos *c, d, ...* son fijos o no. Su respuesta a la segunda pregunta no es correcta, aunque responde "*no es integrable*", luego no queda claro si interpreta bien el enunciado o si cree que se pide un ejemplo que no sea integrable, en vez de localmente integrable:

[270] Esta estudiante escribe: "*Existe un $a < x < b \leq \infty$ tal que $\int_a^x f(x)dx$ sea una integral de Riemann*".


Se dice que una función $f(x)$ es localmente integrable en un intervalo $[a, b)$ cuando...

Cuando $f(x)$ es integrable en $[a,c] \wedge [c,d] \wedge \ldots$

Tomando $a \leq c < d < \ldots < b$

Dar un ejemplo de una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b)$ tal que f no sea localmente integrable en $[a, b)$.

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$ por tanto no es integrable

¿Si $f(x)$ es localmente integrable en $[a, b)$, entonces su integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ es convergente?

No. Veamos $\int_2^3 \frac{1}{x}dx$ es integrable
$\int_3^4 \frac{1}{x}dx$ es integrable
y así sucesivamente
pero $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ es divergente

Entre las respuestas no correctas, se recogen las siguientes definiciones:

- Existe la integral de Riemann en ese intervalo[271]: NG
- $\int_a^b f(x)dx$ converge: RA, JH, NB
- f continua en $[a, b]$ y derivable: NA, MI
- El intervalo es cerrado y acotado: LP

Entre los ejemplos que se dan al segundo apartado se encuentran:

- JB y SD utilizan la integral de la Pregunta 3 ($f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ en [2, 5]).
- AB y YG usan una función del tipo $f(x) = \dfrac{1}{x-c}$ en un intervalo $I = [a, b)$ con $c \in I$.
- CF recurre a $f(x) = \text{tag } x$ en $[0, 2\pi)$.
- IG, WD y EG definen una función a partir de la función de Dirichlet.
- RA, JH y NG usan $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[0, b)$[272].

Los contraejemplos dados al segundo apartado son los siguientes:

- JB proporciona $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en [0, 2) y afirma que la integral diverge sin desarrollar cálculos.
- AB proporciona uno de los contraejemplos más sencillos que se podría construir: $f(x) = k$ en $[a, \infty)$ y prueba algebraicamente la divergencia de la integral.

[271] Quizá esta respuesta podría considerarse imprecisa, en lugar de incorrecta. Sin embargo, el no dar ningún detalle más nos ha hecho considerarla incorrecta.

[272] Aunque sus respuestas no se consideraron correctas al no dar una definición correcta de integrabilidad local.

- IG, WD, EG, SD, AC, NB y YG recurren a un contraejemplo que podríamos considerar "natural": $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $[1, \infty)$ y afirman que la integral diverge sin realizar cálculos.

La respuesta de CF se consideró imprecisa porque afirma que "*para ser convergente hay que cumplir más condiciones que la integrabilidad local*", aunque no da ningún contraejemplo. Probablemente esto se deba a que no recuerda la definición exacta, razón por la que deja en blanco el primer apartado de la pregunta.

Señalamos la respuesta de YC, que afirma: "*No* [es al revés]. *Si* $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente* $\Rightarrow$ *es loc. int. en* $[a, b)$", que parece identificar "ser localmente integrable" con "ser integrable".

En la Sesión 2 se conjeturó que esta definición no había causado problemas a los estudiantes. No queda claro si los estudiantes que no dan un definición correcta lo hacen por no comprenderla o por no haberla estudiado. Sin embargo, sí es claro que los estudiantes que han dado una definición correcta han sido capaces de responder correctamente los otros dos apartados, lo que indica que les ha quedado clara y que, además, son capaces de proporcionar ejemplos y contraejemplos sencillos.

Pregunta 7:

El análisis de esta pregunta se revela también de gran complejidad. De forma global, las respuestas obtenidas se agrupan así:

	7-a	7-b	7-c	
1	Correcta	Correcta	Correcta	JB, IG, WD, AB, EG
2	Correcta	Imprecisa	Correcta	CF, JH
3	Correcta	Correcta	Imprecisa	SD
4	Correcta	Imprecisa	Imprecisa	AC
5	Correcta	Blanco	Incorrecta	SM
6	Correcta	Incorrecta	Incorrecta	NA, YG
7	Imprecisa	Imprecisa	Imprecisa	NG
8	Incorrecta	Imprecisa	Incorrecta	AG
9	Incorrecta	Incorrecta	Imprecisa	YC, RA
10	Una en blanco y/o ninguna correcta			LP, MI
11	Tres en blanco o dos en blanco y una incorrecta			NB, FG

El análisis de esta pregunta demuestra que algunas dificultades y obstáculos propios del concepto de integral impropia son realmente resistentes. Tan sólo 5 estudiantes han respondido correctamente a las tres cuestiones. De ellas, la primera es la que menos problemas ofrece (12 respuestas correctas), seguida por la tercera (7 respuestas correctas) y la segunda (6 respuestas correctas).

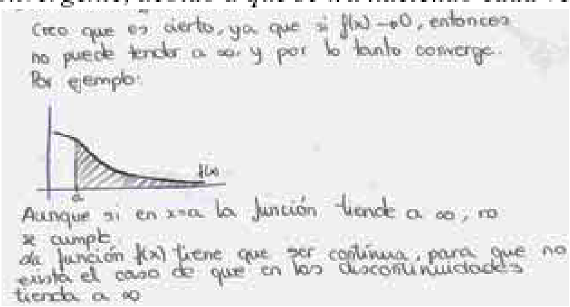
Las respuestas obtenidas para el primer apartado se agrupan así:

1	Falso	$f(x) = 1/x \to 0$ y su integral diverge	JB, IG, WD, CF, AB, NA, SD, AC, SM, JH, YG
		$f(x) = 1/\sqrt{x} \to 0$ y prueba con la definición que la integral diverge	EG
		Si $f(x) \to 0$ no se sabe nada del comportamiento de la integral	NG

2	Hace un gráfico		IG, RA
3	Verdadero	Con explicación	RA, LP
		Sin explicación	YC, MI
4	$\int_a^{\infty} 0dx < \infty$		AG
5	Blanco		NB, FG

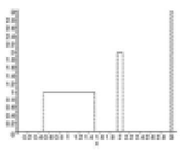
Se observa en las respuestas correctas el uso de un ejemplo prototípico (aunque utilizado en las sesiones para reforzar esta cuestión); tan sólo una estudiante recurre a un contraejemplo diferente. Por otro lado, NG parece confundida en sus conceptos: aunque en las sesiones se ha dicho que no se puede concluir nada del carácter de la integral si una función tiende a cero, esto se debe a que hay casos en que converge y casos en que diverge. No parece haber comprendido que en esta pregunta se pide un contraejemplo. Sin embargo, en la Pregunta 5 es de los estudiantes que afirma que la integral de $1/\sqrt{x}$ es divergente (aunque aplica mal el Criterio), por lo que se considera que sí habría sido capaz de dar un contraejemplo y que su respuesta intenta mostrar que hay casos en que es cierto y casos en que no.

Tan sólo 4 estudiantes afirman que la propiedad es cierta. De los dos que explican por qué, se ve la presencia de concepciones monótonas y continuas, lo que parece mostrar la resistencia de estas concepciones que, a la larga, provocan obstáculos:

- LP: "*Si la función $f(x) \to 0$, llegará un momento en la gráfica en la que su integral sea convergente, debido a que se irá haciendo cada vez más pequeña la función*".
- RA: 

Señalamos también que YC es una estudiante que mostró esta concepción errónea en los problemas entregados (ver el Problema 21-b), aunque en el Problema 28-b respondió correctamente y proporcionó la función $1/x$ como contraejemplo. Se podría decir que este conocimiento era inestable.

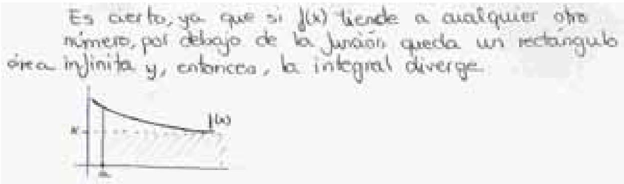
Las respuestas al segundo apartado se agrupan como sigue:

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="3">Hace una gráfica</td><td>JB, IG, WD, RA, SD</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td rowspan="6">Respuestas correctas o imprecisas</td><td rowspan="2"></td><td>Explica cómo se construye</td><td>JB, IG</td></tr>
<tr><td>No explica cómo se construye</td><td>WD, SD</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{N} \\ 0, x \notin \mathbb{N} \end{cases}$</td><td>AB</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \sin x^2$</td><td>Prueba incorrectamente la convergencia de la integral</td><td>EG</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es falso. No recuerda un contraejemplo</td><td>CF, JH</td></tr>
</table>

3	Respuestas incorrectas	Falso	$f(x) = a^{kx}$, $a > 1$, $k \geq 1$ converge y $f \not\to 0$	NA
			La implicación es al revés	YC
			$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$	AG
			Otros razonamientos	MI, NG
			Sin explicación	AC, LP
		Cierto	Concepciones monótonas y continuas	RA, YG
4	Blanco			SM, NB, FG

Se observa que 6 estudiantes proporcionan un contraejemplo y que de ellos, 4[273] eligen la función construida en la Sesión 3. EG, al igual que en el apartado anterior, aporta un contraejemplo diferente, aunque tiene problemas para probar la convergencia de la integral. Vuelve a recurrir al criterio con $\lim_{x \to \infty} x^k . f(x)$ y esta vez especifica que $f(x)$ ha de ser positiva, lo que aclara que en la Pregunta 5 se despistó y no se dio cuenta de que la función con la que comparaba cambia de signo. Este contraejemplo coincide con el que dio SM en el Problema 28-c.

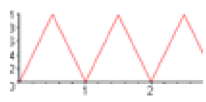
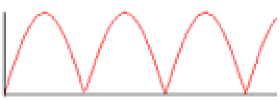
Dos de las respuestas incorrectas muestran la presencia de modelos continuos y monótonos para las funciones, lo que origina posteriores obstáculos.

- YG: "*Verdadero. Si* $f(x)$ *no tiende a* $0 \Rightarrow$ *tiende a un* $k \neq 0$ *y el área encerrada es infinita*".
- RA 

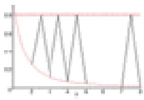
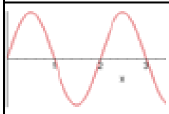
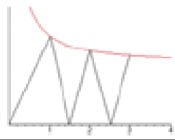
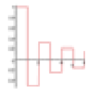
YG usa el Criterio de Divergencia, pero se equivoca al concluir que si $f(x) \not\to 0$, ha de tender a algún valor. Paradójicamente, él fue el único estudiante que consideró el caso en que $f(x)$ no tiene límite en la Sesión 3.

Destacamos también la afirmación de YC, que vuelve a afirmar que la implicación inversa es cierta. Este conocimiento erróneo parece haberse instalado profundamente.

Las respuestas al tercer apartado se agrupan de la siguiente forma:

1	Hace un gráfico		JB, IG, WD, CF, EG, RA, AC, JH, NB
			JB, IG, WD
			WD

[273] Entre ellos, JB, que no estuvo presente el día que se construyó esta función y que mostró dificultades con ella, prueba haberlas superado, pues explica cómo se construye correctamente.

2	Respuestas correctas			CF
		 $f(x) = \sin \pi x$		EG
		 tq. $\Sigma f(n) < \infty$		JH
		$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N} \\ k \neq 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$		AB
3	Respuestas incorrectas	Falso		RA
			 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$	AC
			$f(x) = 1/x^2$	NG
			$f(x) = x$	SD
			Otras razones	NB, YG
			Sin explicación	YC, MI
		Verdadero	Si la suma es finita, converge	NA
			Las integrales tienen las mismas propiedades que las series	SM
		Las series no guardan relación con la integral		AG
4	Blanco			LP, FG

Se observa que 7 estudiantes son capaces de producir un contraejemplo, obteniéndose 6 funciones diferentes. Para estos estudiantes, parece haber quedado clara la cuestión y su institucionalización en el aula.

La estudiante WD dibuja la función sinusoidal y describe la función triangular:

- WD: "*Por ejemplo, ésta es un valor absoluto de una cierta función sinusoidal cuyo valor en los naturales es siempre* 0 *(también valdría la de los triangulitos puesta en clase) cuya integral tiene todas las trazas de ser divergente pues vamos incrementando cada vez con trocitos positivos, cada vez más*".

Destacamos que las respuestas correctas han sido planteadas claramente en el registro gráfico, privilegiando la concepción de área (sólo AB ha dado una expresión analítica). JH, un estudiante que ha aceptado el registro gráfico, inventa una función generalizando el procedimiento visto en clase, mostrando que también puede crear contraejemplos sin recurrir a una fórmula.

La respuesta de YG sigue mostrando concepciones monótonas:

- YG: "*Verdadero. Porque tomando el valor de* $f(1)$, ... *como rectángulos de base* 1 *y altura* $f(x)$ *probamos tomando los rectángulos por encima de la curva que podemos mayorar el valor de la integral por el de la serie*".

NA vuelve a mostrar su falsa concepción de la relación entre la convergencia de la suma y de la integral escrita en la Pregunta 2 (“*su suma converge, necesariamente su integral impropia debe ser convergente* [...] *Su suma no converge, es infinita, pero esto no nos asegura que su integral impropia sea convergente* [...] *Lo que no puede ocurrir es que una suma de una función sea convergente y su integral divergente*”):

- NA: “*Sí. Porque no puede ocurrir que su suma sea finita y luego diverja. Un ejemplo sería de la hoja anterior (1), la suma de* $f(x) = 1/x^2$ *es convergente, sería contradictorio que su integral no lo fuera*”.

Este conocimiento erróneo parece haberse instalado de forma resistente.

<u>Pregunta 8</u>:

Las respuestas se agrupan de la siguiente forma:

<table>
<tr><th></th><th>Cálculo de la integral</th><th colspan="2">Comentario</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="8">Concluye correctamente los cálculos</td><td rowspan="3">Referencia explícita a la finitud</td><td>Volumen = $\frac{\pi.e^2}{2}$</td><td>AC</td></tr>
<tr><td>El volumen es finito (y vale $\frac{\pi.e^2}{2}$)</td><td>IG, AB, NA, JH, CF</td></tr>
<tr><td>El volumen de revolución en (-∞, 1] es igual al área del semicírculo de radio e</td><td>JB, WD</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Referencias a la Pregunta 4</td><td>Vemos que si el área es finita entonces el volumen también es finito</td><td>CF</td></tr>
<tr><td>Calcula el área.
No contradice la pregunta 4</td><td>EG</td></tr>
<tr><td>Lo toma como ejemplo para la Pregunta 4</td><td>AB, NA, JH</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otros</td><td>AC</td></tr>
<tr><td colspan="2">No comenta nada</td><td>YC, AG</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">No integra correctamente (pero le da finito)</td><td>Referencia explícita a la finitud</td><td>El volumen es finito</td><td>YG, NG</td></tr>
<tr><td colspan="2">No comenta nada</td><td>LP</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otros</td><td>NG</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Parece no saber integrar</td><td colspan="2">No comenta nada</td><td>NB</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">En blanco</td><td>RA, SD, MI, SM, FG</td></tr>
</table>

Solamente 11 estudiantes son capaces de concluir correctamente los cálculos planteados, lo que nos puede dar una idea más real del nivel de muchos de los estudiantes. 3 estudiantes se equivocan en el cálculo de una primitiva (aunque les da finito el valor) y un estudiante (NB) parece dar evidencias de grandes problemas operativos:

Además, 5 estudiantes dejan la pregunta en blanco (entre los que están SD, una estudiante con bastantes respuestas correctas, SM, la estudiante con mayor rendimiento en los problemas entregados y MI, que ha mostrado conocer varias fórmulas de integrales inmediatas).

Entre las respuestas correctas cabe mencionar la de WD que, una vez más, amplía sus respuestas con comentarios acertados:

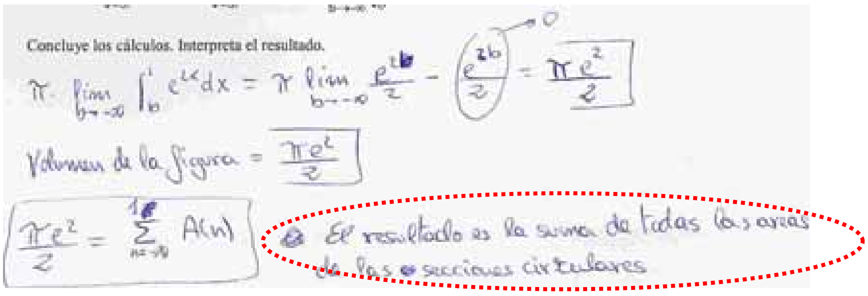
- WD: “*Este volumen sería comparable a la mitad del área del círculo (o sección)* [...] *en magnitud claro está no en unidades puesto q el área mide superficies (unidades al cuadrado) y el volumen (unidades al cubo)*”.

Entre los estudiantes para los que se produce una retroalimentación con la Pregunta 4, citamos que EG calcula primero el área de la figura y, al obtener un valor finito, escribe “*No contradice la pregunta 4*”. CF parece referirse también a esta pregunta, pues escribe: “*Vemos que si el área es finita entonces el volumen también es finito*”. Esta estudiante escribió en la Pregunta 4: “*una región infinita no puede generar un volumen finito debido a que el área está íntimamente relacionada con el volumen, y si el área es infinita necesariamente el volumen debe ser infinito*[274]”, por lo que parece estar añadiendo un comentario a su respuesta. Sin embargo, no hay evidencias de cómo concluye que el área es finita.

A los estudiantes JH y NA esta pregunta, erróneamente, les hace darse cuenta de que su respuesta en la Pregunta 4 no era correcta. Aunque parecen combatir el obstáculo de *homogeneizar dimensiones*, parece aparecer ahora el de *ligación a la compacidad*, pues afirman que la figura tiene área infinita solamente por su forma no acotada (igual que hace AB):

- NA: “*El volumen es finito, en la pregunta de la hoja (1) se hacía mención al volumen infinito de un área infinita, en este caso área infinita encierra volumen finito*”.
- JH: “*Vemos cómo una curva que encierra un área infinita, al girar define un volumen finito*”.

Finalmente, comentamos que el estudiante AC concluye correctamente los cálculos y comenta que el volumen es finito. Sin embargo, añade un comentario que muestra la resistencia de las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar las sumas de Riemann de la serie asociada a una función:



<u>Pregunta 9</u>:

Las respuestas se agrupan de la siguiente forma:

	Método correcto	Razón	
1	El segundo	$f(x)$ no acotada en [4, 5]	JB, WD, CF, AB, NA, EG, SD, JH, NG
		No es una integral de Riemann	JB, WD, NA, YG
		No se puede aplicar Barrow	JB, IG, AB, NA, YG
		Es una integral impropia	IG, CF, WD, NA, EG, SD, NG
		Se realiza calculando el límite, como en (2)	IG, EG, NG

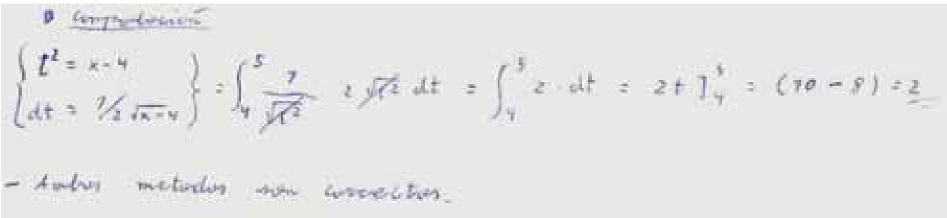
[274] Mostrando, de paso, la presencia del obstáculo de homogeneizar dimensiones.

		Aunque den lo mismo, (1) no es la forma correcta	IG, WD, AB, NA, YC, EG
		Hace un dibujo	SD
		Hace referencia al Problema 3	WD, YC
2	El primero	El intervalo está acotado	AC, AG
		La integral es definida	AG
3	Los dos	(1) está resuelto por integración inmediata y (2) por integración impropia	RA, MI
		Lo comprueba con un cambio de variable	LP
4	Ninguno	(1) Al hacer cambio de variable hay que cambiar el intervalo (2) Es una integral definida en un intervalo Hace referencia al Problema 3	SM
5	En blanco		NB, FG

12 estudiantes han respondido correctamente a esta pregunta. Además, en el caso de YC, le ha servido para darse cuenta de que había respondido correctamente a la Pregunta 3 y se corrige. De las 6 estudiantes que comentan que da lo mismo de las dos formas, aunque sólo una sea válida, NA comenta: “*Es curioso, que los dos métodos den el mismo resultado*”.

La principal razón para que 2 estudiantes piensen que el primer método es el correcto es que parecen no darse cuenta de que la función no está acotada (sólo se fijan en el intervalo).

Además, aparecen 2 estudiantes (RA, MI) para las que la integral impropia parece constituirse solamente como “otro método alternativo” y no como un concepto. Éste podría ser también el caso de LP, aunque su razonamiento se basa en resolver la integral con un cambio de variable (con lo que valida el primer razonamiento, al tratarla como una integral de Riemann). Vemos en este estudiante dificultades operatorias, pues no realiza el cambio en el intervalo de integración:



Citamos también el caso de SM, que, al igual que hizo en la Pregunta 3, invalida la integral (1) por no realizarla con un cambio de variable (y hace referencia explícita a su respuesta a la Pregunta 3). Tal como expresó en la Pregunta 5, parece que sólo concibe como correctas las resoluciones “formales” o que movilizan resultados de clase, lo que puede constituir un obstáculo. Por otro lado, al igual que AC y AG, no se da cuenta de que la función no esté acotada y afirma que (2) no es correcto porque la integral está definida en un intervalo. Finalmente, añade un comentario que parece ilustrar que no ha comprendido el concepto de integral impropia de segunda especie (ocasionado, quizá, por los ejemplos tratados en las sesiones, aunque no parecen haber ocasionado problemas al resto):

- SM: “*Y en el apartado 2 tampoco creo que se pueda hacer eso, ya que esto es una integral definida en un intervalo y estamos aplicando la definición de integral impropia, y en todo caso sería* $\lim_{b\to 5}\int_4^b f(x)dx$”.

La definición de integral impropia de segunda especie parece no haber quedado clara a 7 estudiantes, si comparamos las respuestas de la Pregunta 3 con las de ésta.

En primer lugar, citamos que YC corrige su respuesta a la Pregunta 3 con ésta, dándose cuenta de su error. Por otro lado, CF y NA sí parecen comprender la definición, en vista de sus respuestas a esta pregunta (NA no vio ningún error en la Pregunta 3).

Los 7 estudiantes que no parecen tener una idea clara son los siguientes. MI argumentó en la Pregunta 3 que el fallo estaba en el cálculo de la primitiva (como FG, que deja ésta en blanco) y ahora muestra una concepción de la integral impropia como un método de cálculo, al igual que RA (que en la Pregunta 3 pensó que el error se producía al aplicar la regla de Barrow al revés). SM, como se ha dicho, sólo valida la resolución mediante un cambio de variable. De los tres que dejaron la Pregunta 3 en blanco, NB vuelve a hacerlo y AC y LP hacen pensar que quizá la integral impropia de segunda especie no fue suficientemente operacionalizada.

<u>Pregunta 10</u>:

Las respuestas obtenidas las agrupamos como sigue:

<table>
<tr><td rowspan="13">1</td><td rowspan="13">Ambas correctamente</td><td rowspan="3">Primera integral</td><td>Con definición</td><td>IG, AB, YC, SD, AG, SM, NG, YG</td></tr>
<tr><td>Criterio de Comparación</td><td>JB, NA, EG, YG</td></tr>
<tr><td>Criterio del Cociente</td><td>WD</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda integral</td><td>Con definición</td><td>JB, IG, AB, NA, YC, SD, AG, SM, NG, YG</td></tr>
<tr><td>Criterio del Cociente</td><td>WD</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$</td><td>EG</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hace gráfica</td><td>JB, IG, WD, SD, NG, YG</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Comentario</td><td>Se tiene un área infinita y un volumen finito</td><td>WD, AB, EG</td></tr>
<tr><td>Es un contraejemplo para la Pregunta 4</td><td>WD, EG</td></tr>
<tr><td>Relación con la Pregunta 8 – Fórmula del volumen</td><td>WD</td></tr>
<tr><td>Función mayorante – Función minorante</td><td>JB, IG</td></tr>
<tr><td>Si $r > 1$ diverge y si $r \leq 1$ converge</td><td>NG</td></tr>
<tr><td>No comenta</td><td>NA, YC, SD, AG, SM, YG</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Ambas incorrectamente</td><td colspan="2">Usa en ambas el criterio para $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^r}$</td><td>CF</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otros métodos</td><td>MI</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comentario</td><td>Ambas divergen y están definidas en el mismo intervalo</td><td>CF</td></tr>
<tr><td>No comenta</td><td>MI</td></tr>
<tr><td rowspan="7">3</td><td rowspan="7">Primera bien, segunda mal</td><td rowspan="2">Primera integral</td><td>Criterio de Comparación</td><td>AC, NB</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td>LP</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Segunda integral</td><td>Criterio de comparación</td><td>AC, NB</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td>LP</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hace gráfica</td><td>LP</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comentario</td><td>Las gráficas coinciden</td><td>LP</td></tr>
<tr><td>No comenta</td><td>AC, NB</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">Sólo calcula la primera</td><td colspan="2">Definición</td><td>JH</td></tr>
<tr><td>Comentario</td><td>El área encerrada es infinita</td><td>JH</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">En blanco</td><td>RA[275], FG</td></tr>
</table>

[275] Tan sólo escribe: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{1}{x-1}\,dx$, por lo que se ha incluido en este grupo.

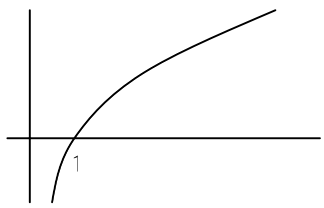
12 estudiantes son capaces de calcular o el valor o el carácter de las dos integrales propuestas (YG calcula el valor de la primera integral de dos formas distintas). Sin embargo, es necesario precisar que se ha decidido (dado el nivel de los estudiantes y viendo que es un error común) dar por válidas las resoluciones que, haciendo un cambio de variable, no cambian los extremos de integración, siempre que el carácter de la integral se mantenga.

De este modo, hay que explicitar que:

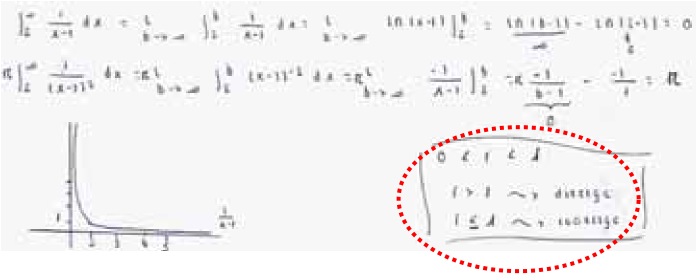
- NA resuelve correctamente la primera integral por comparación y la segunda integral mediante la definición. Sin embargo, previamente utiliza también el Criterio de Comparación con la segunda integral, pero erróneamente: $\frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{x^2}, x \geq 2$. Se han registrado diversas acotaciones incorrectas entre los estudiantes, revelando más deficiencias con la aritmética básica. En este caso, al calcularla también con la definición, se ha dado por correcta la respuesta.
- YC calcula correctamente la primera integral usando la definición. La segunda la resuelve también por la definición, pero hace un cambio de variable (técnica que revela poca seguridad en las fórmulas inmediatas) y olvida cambiar los extremos de integración. La integral le da $\pi/2$.
- SD resuelve las dos con la definición y cambio de variable, pero nunca cambia los extremos de integración. Sin embargo, su técnica se basa en hacer el cambio de variable (dejando los mismos extremos de integración), calcular una primitiva y deshacer el cambio antes de aplicar Barrow, por lo que obtiene el resultado exacto.

Entre los estudiantes que calculan mal el carácter de una de las integrales seguimos encontrando errores aritméticos que llevan a resultados erróneos:

- AC realiza la siguiente acotación: $\frac{1}{x-1} \leq \frac{\pi}{(x-1)^2}$, lo que le lleva a concluir la divergencia de la segunda integral. Sin embargo, escribe: "*Seguro que está mal*".
- NB acota correctamente la primera integral, pero para la segunda realiza la siguiente operación: $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx < \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ y concluye la convergencia.
- LP resuelve correctamente la primera integral, pero para la segunda hace un cambio de variable y no cambia los extremos de integración. Al final, escribe: $\pi . \lim_{a \to \infty} \int_2^a t^{-2} dt = t^{-1} \Big|_2^a = \infty$. Su comentario sobre la relación entre ambas integrales es: "*La relación es que la gráfica de las dos integrales coinciden*" y representa la siguiente gráfica:



Entre los estudiantes que responden incorrectamente a ambas cuestiones, encontramos un caso de mala interpretación de un resultado y aplicación en un contexto adecuado. CF usa los resultados sobre la convergencia de $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^r}$ y al ser en ambos casos $r \geq 1$, concluye la divergencia. Este mismo error aparece en NG, que calcula correctamente ambas integrales, realiza una gráfica y añade:



MI también muestra dificultades para calcular límites y, en este caso, para calcular una primitiva sencilla[276]:

- MI: $$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(x-1)\Big|_2^{\infty}$$
  $$\pi.\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \pi.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^{\infty}$$

WD demuestra tener una idea global del test y se da cuenta de que el Problema 8 le da la fórmula para el volumen, que se usa en esta pregunta y que, además, obtiene un contraejemplo para la Pregunta 4 (a la que responde inicialmente que es falsa, pero no puede dar un contraejemplo). EG es otra estudiante que se da cuenta de esto (aunque ella había respondido a la Pregunta 4 que era verdadera), así que añade: "*Esto contradice lo dicho en la primera parte, pero no sé la razón??*".

El hecho de que tan sólo 3 estudiantes relacionen las integrales como área y volumen parece deberse a que en ese curso no se realizaron muchos cálculos de volúmenes, por lo que los estudiantes no habían memorizado aún las fórmulas.

5.4. LOS ESTADOS DE OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES

En esta Sección se describen e interpretan las respuestas de los estudiantes a dos test de actitud: el primero, sobre los aspectos más característicos de nuestra Ingeniería y el aprendizaje conseguido; el segundo, sobre el uso de contraejemplos de forma activa en la enseñanza.

5.4.1. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS DEL TEST DE OPINIÓN

El test de actitud consta de 35 preguntas que se distribuyen en tres grupos principales. Una reproducción del test, tal como se administró a los estudiantes, se puede consultar en el

[276] Recuérdese que, a lo largo de la prueba, muestra evidencias de haber memorizado algunas fórmulas. Para la segunda integral, parece pensar que $\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2-1}$ (como hizo en la Pregunta 3) y recuerda partes de la fórmula $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}.\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

Anexo 4. Para su confección, algunas preguntas han sido tomadas de Gil (2003) y Artigue y Lagrange (1997).

Pasamos a describir cada uno de los grupos en que se agrupan las preguntas.

1.- SITUACIÓN PERSONAL Y OPINIÓN SOBRE EL GRADO DE DIFICULTAD DEL PRIMER AÑO (ítems **1 a 4**)

Objetivo: Obtener datos de carácter general sobre los estudiantes participantes en la Ingeniería, su opinión sobre los estudios de Matemáticas en general y sobre la asignatura *Análisis Matemático II* en particular. Por otro lado, se quiere identificar también a los estudiantes que repiten para analizar su opinión sobre la metodología (en principio, en comparación con la empleada tradicionalmente).

- Opinión sobre el propio nivel de conocimientos y relación con el de los compañeros: **1, 3, 4**.
- Identificación de los estudiantes que no son nuevos en la Universidad: **2**.
- Identificación de un primer posicionamiento frente a la asignatura: **4**.

2.- EVALUACIÓN DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA (ítems **5 a 17**)

Objetivo: Evaluar la opinión de los estudiantes sobre los diferentes aspectos de nuestra Ingeniería. En particular, nos interesamos por su opinión sobre los aspectos más innovadores empleados en nuestra propuesta, como son el uso de ejemplos y contraejemplos, el empleo de debates en clase, las relaciones explícitas establecidas con otros conceptos previamente estudiados (series e integrales definidas) y el empleo de gráficas. Por otro lado, también se evalúa su opinión sobre los contenidos y su presentación, así como el grado de dificultad de los problemas y ejercicios resueltos y marcados para hacer en casa.

- Opinión global sobre la metodología empleada y sobre su propio aprendizaje: **5, 6, 7**.
- Opinión sobre el grado de dificultad de las cuestiones resueltas en clase y en casa: **7, 8, 9, 10**.
- Opinión sobre las cuestiones trabajadas en clase en pequeños grupos: **10, 11**.
- Opinión sobre la organización de pequeños grupos de trabajo: **11**.
- Opinión sobre el uso activo de ejemplos y contraejemplos: **12**.
- Nivel de participación en clase y opinión sobre el uso de esta técnica: **13, 14**.
- Relaciones entre la integral impropia y otros conocimientos: **15, 16**.
- Opinión sobre el uso activo de gráficas como registro de trabajo matemático y sobre su utilidad: **17**.

3.- EVALUACIÓN DE LAS SESIONES CON *Maple V* Y DE LA PROPIA ACTITUD HACIA LOS ORDENADORES (ítems **18 a 35**)

Objetivo: Se pretende obtener un estado de opinión de los estudiantes hacia las sesiones desarrolladas en el aula de Informática y si opinan que les han sido útiles. Por otro lado, también analizamos cómo se han sentido trabajando con el ordenador, su actitud hacia su uso y si las restricciones del *software* mostradas en las prácticas han desarrollado una actitud crítica por parte de los estudiantes. En primer lugar, nos interesamos por saber si conocen otros programas para intentar inferir su grado de familiaridad con los *software*.

- Se averigua si conocían ya el *software* utilizado y/o si ya manejaban otros programas: **18**.
- Opinión general sobre el contenido de las prácticas: **19, 20, 34, 35**.
- Opinión sobre el uso del ordenador como herramienta de aprendizaje matemático: **20, 21, 23, 25, 27, 28, 29**.
- Desarrollo de una actitud crítica hacia el uso del ordenador: **22, 24**.
- Opinión sobre el uso del ordenador como elemento motivador: **26, 27, 28, 29**.
- Evaluación de algunos aspectos trabajados explícitamente con el *Maple V*: **30, 31, 32, 33**.
- Opinión sobre el uso de forma activa del ordenador en las clases de Matemáticas: **34, 35**.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS OBTENIDAS

El test de opinión fue cumplimentado por 24 de los estudiantes que participaron habitualmente en la experiencia. De ellos, 19 pertenecen al grupo 1-A y 5 al grupo 1-B. Se analizan en esta Memoria las respuestas obtenidas de los estudiantes del grupo 1-A.

En este grupo, el test se administró al finalizar el Test de contenidos (miércoles 11 de junio), aunque se recogió durante toda la semana.

Aclaramos que en todas las cuestiones donde se graduaba la respuesta, las respuestas han sido codificadas otorgándole un 0 a la categoría más baja y ascendiendo uno a uno en cada categoría. Así, por ejemplo, en la pregunta:

5.- En general, la metodología de las clases sobre *Integrales Impropias* me ha parecido

Muy poco adecuada	Poco adecuada	Adecuada	Muy adecuada

la codificación sería: 0 = Muy poco adecuada   2 = Adecuada
1 = Poco adecuada   3 = Muy adecuada

Así se ha procedido en todas las preguntas y se muestran todas las respuestas agrupadas en grupos numerados como se ha indicado, salvo que se indique lo contrario. La mayoría de preguntas graduadas contaban con cuatro opciones para evitar actitudes poco comprometidas y forzar a los estudiantes a pronunciarse (ya sea positiva o negativamente). Sólo se han admitido cinco opciones en las preguntas en que se consideró que era posible una respuesta neutra.

Precisamos también que en este capítulo analizamos las respuestas a los dos primeros bloques y que en Capítulo 6 (Sección 6.5.5.) se analizan las respuestas sobre el uso de ordenadores.

Primer bloque:

A lo largo de las sesiones y del análisis del material de los estudiantes ha sido evidente el bajo nivel académico con el que éstos cuentan. Sin embargo, las respuestas de los 19 encuestados sobre su propia formación académica se agrupan de la siguiente forma:

- 1 estudiante (SM) considera su formación “Muy mala”.

- 4 estudiantes (EG, NG, RA y YC) consideran su formación "Defectuosa".
- 14 estudiantes (CC, AG, NB, LP, SD, YG, NA, SM, JB, JH, AC, AB, WD, CF, MI) la consideran "Apropiada".

Estas respuestas resultan un poco paradójicas. SM es la que considera tener un peor nivel; sin embargo, fue la estudiante de mejor rendimiento en los problemas entregados (aunque en el Test de contenidos su rendimiento bajó considerablemente y dio muestras de algunas concepciones erróneas). EG considera que su nivel es "Defectuoso", y es una de las estudiantes de mejor rendimiento en los problemas y en el Test de contenidos, además de tener participaciones acertadas en las sesiones.

Del resto de estudiantes, se ve que aunque muchos consideren que su formación es "Apropiada", los errores y dificultades que evidencian están en contradicción con su propia evaluación.

Por otro lado, tal como se había previsto, hay varios estudiantes que repiten curso entre los participantes. Los estudiantes se agrupan como sigue:

- Sí repite (8): CC, EG, YG, NA, SM, JB, JH, AC.
- No repite (11): NG, AG, NB, LP, SD, RA, YC[277], AB, WD, CF, MI.

Destacamos que las principales dificultades y errores han sido registrados entre los estudiantes que no repiten (en general).

La opinión de los estudiantes sobre el primer curso en Matemáticas se distribuye como sigue:

- Nivel alto /duro /difícil con respecto al Bachillerato: CC, AG, NB, SD, YC, NA, SM, JH, AC, CF.
- En algunos aspectos, un poco alto: NA, MI.
- En general bien (salvo un par de asignaturas): EG, YG, AB, WD.
- No muy bajo: LP.
- No tan alto como esperaba: NG, WD.
- El nivel ha bajado con respecto a otros años: JB.

Entre los comentarios aportados, destacamos la opinión de que se juntan muchos cambios que hacen este primer curso más difícil (NG, SD, AC, CF), de que es muy abstracto (NA), o de que habría que disminuir el número de asignaturas (CC). Un comentario que destacamos, y que está en relación con los *mitos* de la enseñanza Universitaria de Alsina (2001)[278], es el de WD: "*Esperaba más nivel a la hora de dar las clases (peores explicaciones, menos tiempo)*".

En cuanto a la dificultad relativa de la asignatura *Análisis Matemático II*, los estudiantes opinan:

- Alta: NG, AG.
- Nivel intermedio (comparada con otras)/ Es normal/ Asequible: CC, YC, JB, JH, AC, AB, WD, CF, EG, NB.
- Difícil/ La más difícil: LP, SD, RA, YG, NA, SM.

[277] YC es la única estudiante de las encuestadas que ha hecho una rama de FP. Opina que el nivel del Primer Curso de Matemáticas es alto porque no traen una buena base.

[278] Véase la Sección 1.2.

- En blanco: MI.

Y algunas explicaciones que se dan son que es fácil *ver* esta asignatura (EG), que es poco teórica (JB), que es más entretenida y amena que las otras (AG), que casi todo es mecánico (YC, JB), que hay muchos tipos de integrales que aprender a resolver (SD, RA), que requiere de mucho tiempo para practicar (WD, CF), que se supone que los estudiantes deberían saber muchas cosas y no es así (SM) y que los conceptos de integral y de integral impropia son difíciles de entender (NA).

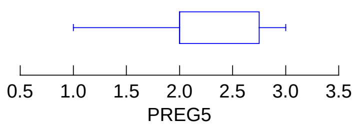
<u>Segundo bloque</u>:

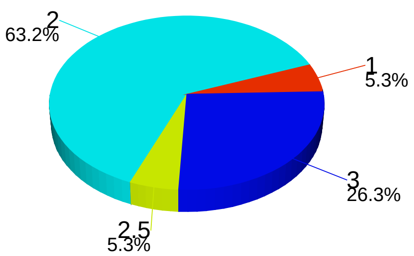
En primer lugar, veamos la opinión de los estudiantes sobre la metodología empleada:

	PREG5
N of cases	19
Minimum	1.000
Maximum	3.000
Median	2.000
Mean	2.237
Standard Dev	0.537
Variance	0.288

Vemos que ningún estudiante ha calificado la metodología de "Muy poco adecuada" y que sí se ha alcanzado el máximo (5 estudiantes la califican de "Muy adecuada" y una de "Adecuada +", por lo que se le ha otorgado un 2.5). La media es de 2.23 (con una desviación del 0.53) y la mediana es de 2, luego más de la mitad de los estudiantes la han calificado de "Adecuada" o "Muy adecuada".

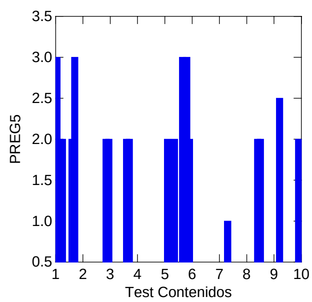
Como se ve en el siguiente gráfico, las respuestas se agrupan alrededor del intervalo 2-2.7, habiendo puntos atípicos en 1 y en 3.





En particular, los porcentajes de respuesta han sido los que se muestran a la izquierda. Tan sólo un estudiante (5.26%) ha calificado la metodología de "Poco adecuada", mientras que más de la cuarta parte de los encuestados la considera de "Muy adecuada" (26.31%). El valor que más se repite es el de "Adecuada", con 12 estudiantes.

Se podría pensar que las opiniones de los estudiantes son dependientes del grado de dificultad que ha tenido para ellos el Test de contenidos. Sin embargo, como se observa en el diagrama de barras de la derecha, las calificaciones más altas de la metodología se dan, precisamente, entre los estudiantes de menor rendimiento[279]. La estudiante que calificó la metodología de "Adecuada +" obtuvo una calificación superior a 9 en el Test y el estudiante que la califica de "Poco adecuada", de más de 7.



Se observa, además, que la metodología ha sido valorada más positivamente entre los estudiantes que repiten (37.5% de los repetidores la califican de "Muy adecuada", frente a un 18.18%

	Metodología				
	1	2	2.5	3	Total
Repite	1	4	0	3	8
No repite	0	8	1	2	11
Total	1	12	1	5	19

[279] Se puede conjeturar, pues, que los estudiantes con mayores dificultades son los que más agradecen el uso de metodologías donde ellos sean los protagonistas de su aprendizaje.

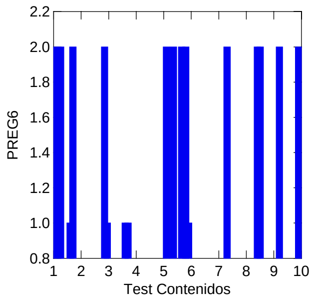
de los que no repiten) y que ya han visto los contenidos a través de una enseñanza tradicional. Sin embargo, se producen compensaciones y las medias en el grupo de repetidores y de no repetidores se equiparan (2.25 y 2.22, respectivamente).

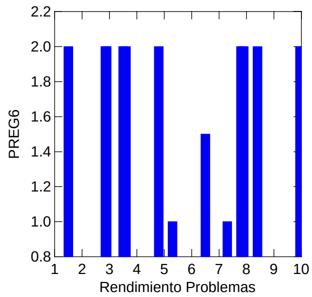
Uno de los objetivos principales de la Ingeniería es que los conceptos a tratar queden claros a los estudiantes. A este respecto, las opiniones de los estudiantes se agrupan como sigue:

	PREG6
N of cases	19
Minimum	1.000
Maximum	2.000
Median	2.000
Mean	1.737
Standard Dev	0.452
Variance	0.205

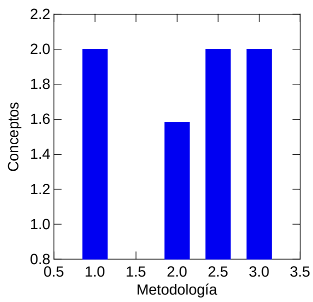
Se observa que ningún estudiante opina que han quedado “Nada claros” y que más de la mitad puntuó la presentación de los contenidos como “Claros”. En este caso, ningún estudiante ha utilizado el máximo; 5 de los encuestados (26.32%) opinan que los conceptos han quedado “Algo confusos” y 14 estudiantes (73.68%) opinan que “Claros”.

En este caso, sí nos parece importante clasificar las respuestas atendiendo al rendimiento de los estudiantes en el Test de contenidos y en los problemas entregados:

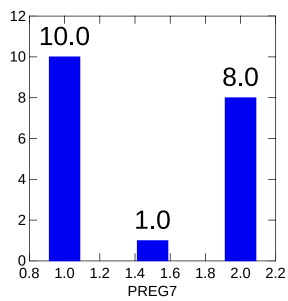




Los estudiantes a los que los contenidos no les han quedado claros son AG (no entrega los problemas y obtiene un 3.7 en el Test), LP (no entrega los problemas y obtiene un 1.6 en el Test), SD (obtiene un 5.3 en los problemas y un 5.9 en el Test), YC (obtiene un 6.5 en los problemas y un 3.6 en el Test) y AC (obtiene un 7.3 en los problemas y un 2.95 en el Test). No parece haber relación directa entre sus puntuaciones y su opinión (salvo que, en el Test, todos obtienen menos de 6).



Otra de las preguntas naturales que nos podemos hacer es si la opinión de los estudiantes sobre la metodología influye en su opinión sobre la claridad de los conceptos presentados. Sin embargo, observando el diagrama de barras adjunto, vemos que los 5 estudiantes a los que los conceptos no les han quedado claros, calificaron la metodología de “Adecuada”[280]. Inversamente, el estudiante que la calificó de “Poco adecuada” (YG) opina que los conceptos han quedado “Claros”.



Sobre la dificultad de las cuestiones planteadas en clase, se obtiene que 10 de los participantes la califica de “Difícil” y 8 de “Normales-Fáciles” (estos estudiantes son AG, NB, LP, JB, JH, AB, CF y MI. Dos de ellos repiten, lo que puede justificar su respuesta, y cinco han obtenido menos de 5.2 en el Test de contenidos). CC marca dos casillas (se le otorga un 1.5) y especifica: “*Marco dos porque a veces han sido fáciles y otras veces difíciles*”.

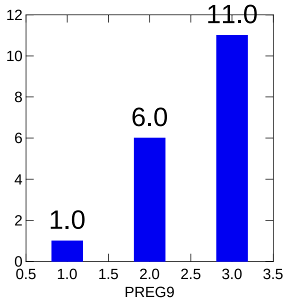
Continuando con la dificultad para los estudiantes, evaluamos su opinión sobre los problemas propuestos:

[280] Haciendo que para los estudiantes que consideran la metodología “Adecuada” la media sobre la claridad baje a un 1.6: $\frac{5\times 1+7\times 2}{12}=1.58$.

	Poco interesantes	Interesantes	Muy interesantes	Total
Muy difíciles	1	0	0	1
Difíciles	1	7	1	9
Normales -Fáciles	1	6	1	8
Total	3	13	2	18

En este caso, se ha alcanzado el mínimo, pero no el máximo. Y en cuanto a su interés, se invierte la situación: se ha alcanzado el máximo, pero no el mínimo. Obsérvese que sólo aparecen 18 estudiantes, pues la estudiante MI dejó el apartado en blanco (quizá esto tiene que ver con que no entregara los problemas).

Es positivo que 13 de los estudiantes han considerado los problemas “Interesantes”. Además, no parece haber dependencia entre el grado de dificultad y el de interés que los estudiantes otorgan, pues los 3 estudiantes que los califican de “Poco interesantes” otorgaron grados de dificultad diferentes y hay un estudiante (NB) que los encontró “Difíciles” (de hecho, su puntuación fue de 1.5, la más baja), pero “Muy interesantes”. Analizamos también si estos problemas han ayudado a los estudiantes a aclarar algunas ideas y revisar aspectos teóricos de las Sesiones.



Ningún estudiante dice que “En nada. Al revés, me han liado”, pero 1 estudiante dice que no le han ayudado en nada. Esta estudiante es RA, que también los calificó de “Poco interesantes” y “Muy difíciles”, lo que podría justificar que no los haya entregado. Nuevamente, MI se abstiene de responder. Es positivo también que a 11 estudiantes les han ayudado “Bastante” a revisar los contenidos.

Me ha ayudado un poco a entender luego la teoría

Dificultad	Interés: 2	3	Total
1	7	1	8
2	5	0	5
Total	12	1	13

Me ha ayudado mucho a entender luego la teoría

Dificultad	Interés: 2	3	Total
1	3	2	5
1.5	1	0	1
2	0	0	0
Total	4	2	6

Analizamos ahora las cuestiones sobre el contrato didáctico y el uso de grupos de trabajo. En primer lugar, observamos la opinión de los estudiantes sobre las cuestiones trabajadas en pequeños grupos. La Pregunta 10 analiza el grado de dificultad, de interés para los estudiantes y si estas cuestiones les han sido útiles para entender la teoría. Destacamos que este punto (utilidad para entender la teoría) muestra que los cambios en el contrato didáctico y el diseño del *medio* han resultado efectivos, pues las respuestas se agrupan en torno a “Me han ayudado un poco a entender luego la teoría” (13 estudiantes) y “Me han ayudado mucho a entender luego la teoría (6 estudiantes[281])”:

En total, 3 estudiantes (EG, NB, AB) opinan que las preguntas han sido “Muy interesantes” y 16 que han sido “Interesantes”. La estudiante CC marcó las casillas “Difíciles” y “Fáciles” (se le otorga 1.5) y especificó: “*Según el ejercicio*”. Además, ella es una de los 6 estudiantes para los que las cuestiones planteadas han sido de gran ayuda a entender luego la teoría. La estudiante AB señala “Difíciles”, aunque escribe: “*En un primer momento, aunque luego parecieran fáciles*”; para ella, las cuestiones, además, han sido “Muy interesantes” y le han ayudado mucho a entender la teoría.

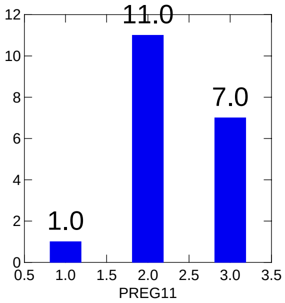
Nos parece significativo que, aunque la mayoría califica las preguntas de “Difíciles”, una amplia mayoría admite su interés y acepta su utilidad en el proceso de aprendizaje.

---

[281] Cuyos rendimientos en el Test de contenidos no son homogéneos: CC (no hace el Test), NB (1.7), NG (5.35), JH (5.65), NA (5.8) y AB (9.2).

Una vez analizada la opinión sobre las cuestiones planteadas, veamos la opinión sobre la utilidad del trabajo en pequeños grupos (uno de nuestros objetivos: el fomento del trabajo cooperativo y las interacciones entre los estudiantes):

	PREG11
N of cases	19
Minimum	1.000
Maximum	3.000
Median	2.000
Mean	2.316
Standard Dev	0.582
Variance	0.339



Se observa que no se ha alcanzado el mínimo, aunque sí hay una estudiante que lo cataloga de “Poco útil. Se pierde tiempo”, por lo que la mediana se sitúa en 2, indicando que más de la mitad de los estudiantes lo encuentra “Útil. Se aclaran cosas” o “Muy útil. Me ha servido de mucho”. Las frecuencias exactas se muestran en el diagrama de barras.

La única estudiante (SD) que encuentra el trabajo en grupos “Poco útil”, sin embargo, encontró la metodología “Adecuada”, aunque para ella los conceptos quedaron “Algo confusos”. Probablemente, la opinión de la utilidad de los grupos de trabajo depende de los compañeros de trabajo. En este caso, SD suele trabajar con RA (1.05 en el test), FG (0.1 en el test) y MI (1.25 en el test), luego es posible que para ella los momentos de trabajo grupal no supusieran un aporte importante.

		Trabajo en grupo			
		1	2	3	Total
Metodología	1	0	0	1	1
	2	1	8	3	12
	2.5	0	0	1	1
	3	0	3	2	5
	Total	1	11	7	19

Se observa también, en la tabla, que la opinión sobre la metodología no influye en la opinión sobre la utilidad del trabajo en grupo. YG, el estudiante que calificó la metodología de “Poco adecuada” encuentra el trabajo en grupos “Muy útil”. Y las opiniones de los 5 estudiantes que la calificaron como “Muy adecuada” se reparten entre “Útil” y “Muy útil”. De este modo, parece una conjetura razonable pensar que la actitud de SD se debe al nivel de sus compañeras habituales de trabajo grupal.

Se analiza a continuación las opiniones relativas a los aspectos más identificadores de nuestra Ingeniería: uso de ejemplos y contraejemplos, fomento de la participación y del debate, uso de conocimientos previos y del registro gráfico.

Tan sólo la estudiante MI considera que no ha participado “Nada” en clase. 9 estudiantes consideran que han participado “Cuando he podido” y tan sólo 2 (JB y JH) opinan que han participado “Mucho”. Esto prueba que los estudiantes son críticos con respecto a su participación, pues en nuestra opinión hay muchos otros estudiantes que han participado con bastante frecuencia.

		Fomentar debates			
		1	2	3	Total
Grado de participación	0	1	0	0	1
	1	5	2	0	7
	2	4	3	2	9
	3	1	1	0	2
	Total	11	6	2	19

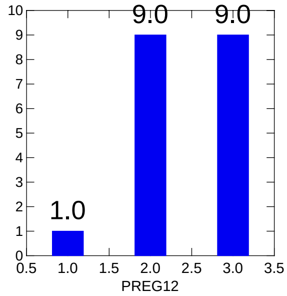
Es muy positivo que ningún estudiante está en contra del uso del debate, aunque 11 opinan que habría que realizarlos “Alguna vez” y 6 opinan que “De forma frecuente”. Paradójicamente, son RA y SM quienes opinan que, además, debería formar parte de la enseñanza y de la evaluación.

Por otro lado, se observa que la mayor razón para que los estudiantes no participen, como se había previsto, es la inseguridad. Las explicaciones ofrecidas se agrupan como sigue:

- Porque no he estudiado: MI.

- A veces no sabía la respuesta / No he sabido responder a las cuestiones planteadas: CC, AG, AC.
- Sólo hablo cuando tengo las cosas claras / No tenía clara la respuesta: EG, RA, YC, WD.
- No estoy seguro de saber las cosas / No quiero arriesgarme a equivocarme: NG, NB, CF.
- Me da vergüenza hablar en clase: SD, NA.
- No me siento a gusto con una cámara filmándome: AB[282].
- Se aclaran muchas dudas si las comentas al profesor: JB[283].
- Sin explicación: LP, YG, SM, JH.

Se aprecia que entre los estudiantes hay un cierto temor al ridículo y equivocarse en clase, además de inseguridad en lo que saben. En este sentido, consideramos que el nivel de participación conseguido ha sido un éxito, y estas respuestas explican por qué no se ha llegado al nivel de un debate científico en las sesiones.



En cuanto al uso de ejemplos y contraejemplos, vemos que se ha desarrollado una actitud muy positiva entre los estudiantes. Tan sólo 1 estudiante (LP) considera su uso "Nada útil" (para él, también, los contenidos han quedado "algo confusos"). Sin embargo, en el test sobre contraejemplos, contesta que sí se siente seguro utilizándolos ("*De esta manera, confirmo si una proposición es verdadera o es falsa*") y, aunque no considera el método efectivo ("*Tengo la sensación de que este método no es muy efectivo, quizás sea porque cometo errores al aplicarlos*"), le gustaría que formara parte de la evaluación ("*Hace que la asignatura sea más amena e interesante*").

El resto de los estudiantes se ha repartido entre "Útil" y "Muy útil", lo que nos parece muy positivo.

Otro de los aspectos característicos de nuestro diseño es el uso explícito de conocimientos previos para reconstruir los nuevos, y usar éstos para revisar los antiguos.

		Series			
		2	3	4	Total
Integral definida	2	4	2	0	6
	3	5	4	0	9
	4	1	1	1	3
	Total	10	7	1	18

La tabla muestra que ningún estudiante[284] ha marcado las casillas con menor puntuación en las cuestiones sobre la revisión de los conceptos de integración definida y series.

La casilla mayoritaria sobre integración definida es que la Ingeniería ha ayudado "Bastante" a revisar los contenidos. Para series, la casilla mayoritaria es "Un poco". WD es la única estudiante que afirma que la secuencia le ha servido "Bastante y he aclarado dudas" tanto para series como para integrales definidas.

En vista de estos datos, opinamos que se ha conseguido otro de los objetivos de la Ingeniería: 12 estudiantes opinan que les ha ayudado "Bastante" a revisar los contenidos de integración definida y 8 estudiantes (6 son de los anteriores) opinan que "Bastante" a revisar los de series.

[282] Paradójicamente, esta estudiante opina que ha participado "Casi nada", mientras que en nuestra opinión es una de las estudiantes que más ha participado.

[283] Que es uno de los estudiantes que opinan que ha participado "Mucho".

[284] La estudiante MI no respondió a ninguna de las dos preguntas.

Finalmente, las respuestas sobre el uso del registro gráfico se reparten como se muestra:

	PREG17A	PREG17B
N of cases	19	17
Minimum	2.000	2.000
Maximum	3.000	3.000
Median	2.000	3.000
Mean	2.474	2.588
Standard Dev	0.513	0.507
Variance	0.263	0.257

		Utilidad			
		Blanco	2	3	Total
Interés	2	1	5	4	10
	3	1	2	6	9
	Total	2	7	10	19

Dos estudiantes no responden el segundo apartado (JB y CF). La mediana en el primer apartado (sobre su interés) se sitúa en 2, por lo que más de la mitad de los estudiantes lo consideran "Interesante" o "Muy interesante y útil". La parte más positiva es que de los 17 estudiantes que responden el segundo apartado (sobre su utilidad), la mediana se sitúa en 3, por lo que más de la mitad de los encuestados considera que el uso del registro gráfico "Ayuda mucho a entender las cosas".

Casi un 50% de los estudiantes considera que el uso del registro gráfico es "Muy interesante y útil" y más del 50% considera que "Ayuda mucho a entender las cosas". Obsérvese, además, que la casilla con mayor índice de respuesta es la que combina estas dos respuestas, con 6 estudiantes (NB, RA, YG, JH, AC y WD)[285].

5.4.2. Descripción y análisis de las preguntas del test sobre contraejemplos

Este test se pasó a los estudiantes como parte de un estudio internacional sobre el uso activo de ejemplos y contraejemplos en la enseñanza universitaria (ver Gruenwald y Klymchuk, 2003) y en la Sección 2.2.1. se citan algunos de sus resultados principales. Como esta actividad formaba uno de los elementos de nuestro diseño, se decidió tomar parte también en este estudio y obtener información más detallada sobre la actitud de los estudiantes hacia el uso de esta metodología.

Este test consta de tres preguntas, que se presentan en el Anexo 5 y fue entregado a los estudiantes después de la primera sesión con *Maple V* y recogido durante las siguientes sesiones de Ingeniería. El número de estudiantes que lo completan en el grupo 1-A es de 16, siendo 6 chicos y 10 chicas.

Análisis de las respuestas obtenidas

Las respuestas obtenidas se agrupan de la siguiente forma:

		Seguro: S			
		Evaluación			
		N	S	SN	Total
Efectivo	N	0	1	0	1
	S	0	7	0	7
	Total	0	8	0	8

		Seguro: N			
		Evaluación			
		N	S	SN	Total
Efectivo	N	0	0	0	0
	S	3	4	1	8
	Total	3	4	1	8

Se observa que los estudiantes se han dividido a partes iguales entre los que se sienten seguros utilizando contraejemplos y los que no. Se observa, además, que todos los estudiantes que se sienten seguros opinan que deberían formar parte de la evaluación. En el caso de los estudiantes que no se sienten seguros, hay 4 que opinan que deberían formar parte de la evaluación, 3 que opinan que no y 1 estudiante (JH) ha señalado ambas casillas. Por otro lado, se

[285] Se encuentran en este grupo YG (estudiante que desde la primera sesión ha mostrado razonamientos en este registro) y WD y JH (de los que se ha visto una aceptación progresiva de este registro en las sesiones y el material escrito).

observa que todos los estudiantes, salvo 1 (LP) consideran efectivo el método de utilizar contraejemplos.

La principal razón dada para no sentirse seguros utilizándolos ha sido "*Son difíciles de encontrar / Me es difícil encontrar uno apropiado*" (señalada por 6 de los 8 estudiantes). La razón dada por los otros dos estudiantes es "*A menudo, no estoy seguro de que lo que intento expresar con ellos es cierto*". Otras razones señaladas por estudiantes de este grupo se listan a continuación:

- "*Son difíciles de encontrar / Me es difícil encontrar uno apropiado*": YG, DC, CC, WD, CF, EG.
- "*En la mayoría de los casos, son difíciles y extraños*": CC.
- "*Son un método seguro*": WD.
- "*A menudo, no estoy seguro de que lo que intento expresar con ellos es cierto*": JH, YC.
- "*No estoy acostumbrado a este método*": EG.

Sin embargo, entre los estudiantes que se sienten seguros, las razones que dan son más optimistas:

- "*Son útiles para comprobar algo falso / Muestran 'fácilmente' que algo es falso*": AC, JB, LP, AB, NA, RA, SD.
- "*Forma fácil de aprender una propiedad / Ayudan a recordar y entender la teoría*": AB, NA, SM.
- "*Ayudan a agilizar el conocimiento*": SM.

La cuestión donde mayor consenso ha habido es la segunda (efectividad). 15 estudiantes consideran que son un método efectivo para aprender. Las razones más repetidas son:

- "*Si encuentras uno, significa que la propiedad no es cierta*": AC, JB, DC, RA, EG.
- "*Ayudan a estudiar – comprender / Son un complemento a las cuestiones teóricas*": NA, CF, SD, EG.
- "*Tienen un carácter visual y rápido / Fáciles de comprender, claros*": AB, WD, NA.
- "*Agilizan el conocimiento / Ayudan a resolver diferentes problemas*": SM, YC, CF.
- "*Ayudan a evitar el uso de largas demostraciones*": AC, WD.
- "*Son efectivos*": JB, SD.

La razón dada por el estudiante que no los considera efectivos es que "*tengo la sensación de que este método no es muy efectivo, quizás sea porque cometo errores al aplicarlo*".

Finalmente, sobre su uso en la evaluación, se observa que los estudiantes que no querrían que se utilizaran son estudiantes que no se sienten seguros con ellos (sólo 3). Hay 12 estudiantes que sí opinan que deberían formar parte de la evaluación y un estudiante que marca ambas posibilidades.

Las razones en contra de su uso muestran una actitud de preferir preguntas "fáciles" en los exámenes:

- "*Sería difícil de responder*": YG, JH, CC, YC.
- "*En un examen no tenemos la tranquilidad suficiente para buscar casos extraños*": YG, CC.

Sin embargo, las razones a favor de su uso en la evaluación son:

- "*Muestran si un estudiante ha aprendido realmente / Ayudan a los estudiantes a razonar*": JB, DC, WD, SD
- "*A favor si se usan para evaluar positivamente*": NA, EG.
- "*Vuelven la materia más entretenida e interesante*": LP.
- "*A veces son más sencillos que una larga demostración*": AC.
- "*Nos dan una visión más amplia de las Matemáticas*": CF.
- "*Nos ayudan a participar más*": SM.

Nuestros resultados están en sintonía con los del estudio internacional de Gruenwald y Klymchuk (2003), en donde la gran mayoría de participantes contestó que el método de los contraejemplos es muy efectivo y volvió el aprendizaje de las Matemáticas más estimulante, interesante y creativo. Los estudiantes de la población total también afirman mayoritariamente que el uso de contraejemplos ayuda a comprender mejor los conceptos, prevenir errores en el futuro, desarrollar un pensamiento lógico y crítico y a hacer más activa su participación en clase. Todos estos argumentos están presentes también entre nuestros estudiantes.

CAPÍTULO 6

DIMENSIÓN INSTRUMENTAL DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el diseño de las sesiones realizadas con nuestros estudiantes en el aula de ordenadores y el análisis de las dos sesiones desarrolladas.

Se comienza con una breve revisión de la literatura sobre el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y se muestran algunos resultados de investigaciones previas, tras lo que se exponen los fundamentos teóricos que rigen nuestro diseño.

Finaliza el capítulo con el análisis de datos de las sesiones con Maple V y el análisis de las respuestas de los estudiantes a un test de opinión sobre estas sesiones y sobre el uso de ordenadores en su aprendizaje, en general.

6.1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad hay muchos trabajos sobre qué uso educativo hacer de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC en adelante). Sin embargo, la gran cantidad de trabajos existentes en este terreno contrasta con la ausencia general de una comprensión precisa de lo que realmente sucede cuando se introducen las TIC en el aula (Lagrange *et al*, 2001). Es evidente que hay una discrepancia entre las grandes capacidades que poseen las TIC y su difícil integración en la enseñanza. Algunas preguntas que es necesario responder, y a las que haremos referencia durante este capítulo, son:

- ¿Cómo se utilizan las TIC dentro del sistema educativo?
- ¿Cambian la naturaleza del aprendizaje?
- ¿Modifican las nociones y métodos?
- ¿Cuál es su influencia en los estudiantes y los profesores?

En la enseñanza universitaria, en general, el uso de las TIC ha sido visto como un medio de renovar prácticas pedagógicas y de evitar un estilo de enseñanza que ha sido demasiado formal o algorítmico. Algunas de los potencialidades de las TIC, señaladas en el informe del *working group* del ICMI, son:

- Promueven un aprendizaje más activo utilizando aproximaciones experimentales, junto con la posibilidad de ayudar a los estudiantes a formar conexiones entre distintas formas de expresión (visual, simbólica...)[286];
- Provocan aproximaciones construccionistas al aprendizaje de las Matemáticas, en las que los estudiantes aprenden mediante la construcción, la depuración y la reflexión [...];
- Motivan explicaciones ante un *feedback* "sorprendente": comienza un proceso de argumentación que puede conectarse (con la debida atención) a la demostración formal;
- Promueven el trabajo cooperativo, animando la discusión de distintas soluciones y estrategias; el trabajo al ordenador es más visible y fácilmente "transmitido" entre profesor y estudiantes;
- Abren una ventana a los procesos de pensamiento de los estudiantes [...]. La forma en que los estudiantes interactúan con el ordenador y responden al *feedback* puede dar una idea de sus concepciones y sus creencias sobre las Matemáticas y el papel de los ordenadores.

King *et al* (2001), pág. 350

[286] En este sentido fueron elaborados los trabajos Camacho y González-Martín (2001a, 2001b); Camacho, González-Martín y Rojas (2003); González-Martín y Camacho (2001).

Aún aparecen ciertos trabajos en los que se cree que el uso de la tecnología siempre ayuda en el aprendizaje y que el estudiante aprende rápidamente a utilizarla. Como contrapartida, Goldenberg[287] ya señaló que "*los estudiantes a menudo malinterpretaban lo que veían en las representaciones gráficas de funciones. Dejados solos a experimentar, podrían inducir reglas que son erróneas*". El comportamiento ideal con el que el estudiante aprende rápidamente a utilizar las tecnologías no se da de forma natural, y menos en los estudiantes con más dificultades; además, los efectos de la visualización pueden ser considerablemente más complejos de lo que generalmente se cree. Es por eso que en la actualidad existe el desafío de convertir las representaciones visuales de las nuevas TIC tanto en un heurístico como en una herramienta pedagógica, en especial para los estudiantes menos capaces.

Al igual que la enseñanza y el aprendizaje implican procesos complejos, la introducción de la tecnología añade más dificultad a este entorno. Guin y Trouche (1999) señalan que "*transformar cualquier herramienta en un instrumento matemático implica para los estudiantes un complejo proceso de 'instrumentación' que no necesariamente lleva a una mejor comprensión matemática. Se hace necesario un análisis de las restricciones y del potencial del artefacto para señalar el conocimiento matemático implicado en el uso de una calculadora*". Por esta razón, en el diseño de nuestras sesiones con el uso de ordenadores se utiliza un marco teórico de referencia que nos permita observar algunos fenómenos.

Por otro lado, también señalan que los nuevos entornos de aprendizaje ofrecen la posibilidad de desarrollar varias actividades matemáticas novedosas, incluyendo la interacción entre los marcos algebraico, gráfico y tabular con el objetivo de promover un trabajo experimental.

Las nuevas acciones han de ser verbalizadas y se debe desarrollar un lenguaje apropiado para discutir los nuevos fenómenos que conlleva el uso de un *software*. También se han de construir conexiones con las matemáticas "oficiales". En este caso, debido a lo reciente de algunos términos teóricos, consideramos que es preferible el enunciado de nuestros objetivos e hipótesis después de la revisión bibliográfica y de la exposición de los fundamentos teóricos de nuestro trabajo. Por otro lado, la justificación de por qué la dimensión instrumental de nuestro trabajo forma un bloque casi independiente del diseño de la Ingeniería Didáctica será explicitada en las Secciones 6.5.1. y 6.5.2.

6.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS *COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS*

Un *Computer Algebra System*[288] es un *software* que desarrolla cálculos algebraicos y manipulaciones de fórmulas. Estos *software* suelen disponer de opciones para cálculos numéricos y elaboración de gráficos y están disponibles tanto para PCs como para aparatos más portátiles, como calculadoras simbólicas. Algunos bien conocidos son el *Maple, Mathematica, Mathcad, Derive, TI-Interactive*, etc.. Aunque los aparatos portátiles son compatibles con los paquetes informáticos en lo que se refiere a poder algebraico, las dimensiones de la pantalla, la resolución y la capacidad de memoria los vuelven más limitados comparados con los ordenadores de mesa.

Los *Computer Algebra Systems* (CAS en adelante) fueron desarrollados en los años 50 con propósitos científicos. A partir de paquetes específicos para alguna rama matemática, los CAS gradualmente se desarrollaron hasta convertirse en entornos completos que en la actualidad

[287] Goldenberg, E. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs, *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME11), Montréal, vol. 1, pp. 197-204. Citado en Guin y Trouche (1999).

[288] O *Système de calcul formel*, *SCF*, en la literatura francesa y *Programa de Cálculo Simbólico*, *PCS*, en la hispana.

también ofrecen opciones para cálculos numéricos y gráficas. Recientemente, estos paquetes han sido incluidos en entornos que permiten incluso el procesamiento de textos y la comunicación vía Internet. También se han producido libros electrónicos que permiten el trabajo de los estudiantes a través de un entorno.

Drijvers (1994) señala que al principio de los años 90 la atención se centró en las calculadoras gráficas, aunque la investigación consideraba a los CAS en general, y señala algunas diferencias y similitudes entre ambos. Las diferencias principales que enumera son:

- La mayoría de funciones que una calculadora gráfica tiene por lo general se restringen a los *outputs* numéricos y gráficos. Un CAS, por su parte, también ofrece características simbólicas (permitiendo derivación simbólica, resolución exacta de ecuaciones...).
- En general, la familiaridad del usuario es mayor con las calculadoras simbólicas que con los CAS (hay menos botones que apretar y menos opciones disponibles).
- La pantalla de los CAS tiene ventajas, comparada con la pequeña pantalla de las calculadoras. Las gráficas son mayores y más suaves, los menús no están ocultos y es posible ver gráficas y fórmulas a la vez.
- En cuanto a diferencias prácticas, una calculadora gráfica es un aparato de mano que puede ser utilizado en cualquier lugar en cualquier momento. Para un CAS la situación es más complicada y se ha de planificar su uso por adelantado e invirtiendo un tiempo en el traslado, siendo a veces los laboratorios lugares no aptos para una discusión entre los estudiantes.
- Su formato afecta también a su uso. La mayoría de aulas de ordenadores no disponen de un aparato para cada estudiante, lo que obliga a los estudiantes a cooperar. Una calculadora gráfica favorece un trabajo más individual. Y la cooperación estimula el aprendizaje.
- Para el profesor es más fácil manejar una clase con pequeños grupos que trabajan frente a pantallas de PCs que una clase de 30 estudiantes que trabajan individualmente en su pequeña calculadora.

Las similitudes que Drijvers distingue son:

- Son instrumentos muy potentes para hacer Matemáticas y ambos afectan tanto la práctica de enseñanza como al aprendizaje.
- Las cuestiones y posibilidades que ofrecen a la educación matemática son similares: ¿Qué importancia tiene el cálculo manual?, ¿Cómo usamos la visualización?, ¿Habrá más opciones de recurrir a matemáticas realistas, de enriquecer la resolución de problemas?, ¿Pueden los estudiantes centrarse en la abstracción cuando los ejercicios rutinarios se vuelven menos importantes?
- La disponibilidad de ambos instrumentos disminuye la importancia de las habilidades manuales, aunque otras habilidades permanecen siendo importantes: traducir un enunciado al lenguaje matemático e interpretar los resultados en términos del contexto original, saber de qué forma la tecnología puede ser útil, conservar una visión general de lo que se hace y tener una idea adecuada de la estrategia a seguir.

6.2.1. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL USO DE CAS

Muchos trabajos han identificado previamente algunas de las ventajas que supone el uso de nuevas tecnologías para el aprendizaje de las Matemáticas. La mayoría de estas ventajas se mantienen para el uso de CAS. Las dos primeras ventajas citadas a continuación son particulares de los entornos CAS:

- Como su propio nombre indica, los CAS permiten el uso de álgebra, lo que permite una aproximación flexible y sofisticada a problemas algebraicos que no es posible en otros entornos tecnológicos.
- Como consecuencia de lo anterior, se libera al estudiante de la realización de cálculos algebraicos, por lo que el CAS ofrece oportunidades para concentrarse en la estrategia de resolución de problemas y en la construcción de conceptos. El estudiante puede pensar en el siguiente paso del proceso de resolución de problemas sin preocuparse de la ejecución real, lo que en un entorno lápiz-papel requiere atención y puede originar errores molestos.
- El uso de CAS afecta la relación entre conceptos y habilidades y permite *resecuenciar* (véase la Sección 6.3. y Drijvers, 2003) los conceptos y las habilidades. Monaghan[289] discute que el uso de los CAS ayuda a distinguir conceptos y habilidades. Muchos otros estudios indican que aprender en un entorno informático permite hacer énfasis en la comprensión conceptual, dejando que los cálculos sean un medio y no un fin.
- Otro beneficio frecuentemente mencionado es un incremento en la eficiencia y una reducción del tiempo empleado en cálculos algebraicos (aunque esto se puede cuestionar en la Enseñanza Secundaria, donde se trata de usuarios novatos tanto en lo matemático como en lo informático).

Drijvers (2003) señala cuatro desventajas principales en el uso de CAS:

- En primer lugar, el entorno de un CAS tiende a tener el carácter de herramienta verticalista (*top-down*). Esto quiere decir que, realmente, "todo está hecho", inventado, en un CAS. Además, un CAS es a menudo bastante rígido en lo que concierne a la sintaxis y no favorece las notaciones informales. En este sentido, un CAS es una herramienta más exploratoria que expresiva. Hay varias características desfavorables que pueden frustrar la motivación de un estudiante para la construcción y la reinvención, a menos que se tomen medidas didácticas adecuadas.
- Relacionado con lo anterior, está el carácter de *caja negra* de los CAS[290]. Un CAS no ofrece normalmente una intuición sobre la forma en la que obtiene sus resultados; el *software* es una caja negra que no muestra sus métodos, que son a menudo (incluso en problemas sencillos) mucho más sofisticados que los que los estudiantes utilizarían. En consecuencia, los estudiantes pueden percibir una pérdida de transparencia: se ven incapaces de "investigar" la forma en que el CAS llega a tales resultados y no pueden relacionarlos con su propia experiencia con técnicas lápiz-papel. Esto puede llevar a experimentar una ausencia de congruencia entre el entorno informático y el entorno lápiz-papel: las técnicas en ambos entornos son vistas como no relacionadas, en vez de como distintas implementaciones de la misma técnica[291].
- Guin y Trouche (1999) describen un CAS como un *micromundo cerrado* y los estudiantes no ligan automáticamente este micromundo con el mundo matemático o con el "mundo real". Por supuesto, esto también se da con otras herramientas

[289] Monaghan, J. (1993). New technology and mathematics education: New secondary directions, en *Issues in mathematics education* (Orton, A. y Wain, G., eds.), London: Cassell, pp. 193-209. Citado en Drijvers (2003).

[290] Véase las Secciones 6.3. y 6.4.4. para más detalles.

[291] Los conceptos de congruencia y transparencia se describen en la Sección 6.4.4.

tecnológicas, aunque normalmente con una extensión menor. La percepción del CAS como un micromundo en sí mismo puede llevar a los fenómenos de *pseudo-transparencia* y de *doble referencia*, que se discuten en la Sección 6.3.

- Menos relacionado directamente con la máquina, está el riesgo de que los estudiantes simplemente presionen los botones y no necesiten ya pensar. Las experiencias muestran que los estudiantes, de hecho, a veces presentan el "comportamiento del pescador", probando diversos comandos con la esperanza de que uno de ellos llevará a la respuesta correcta. Sin embargo, esta táctica rara vez funciona.

En los inicios de las investigaciones sobre el uso de CAS, casi siempre se hacía énfasis en los supuestos beneficios de su uso, pero no era usual destacar sus inconvenientes. Es importante, por tanto, prestar atención a los inconvenientes que la introducción de un CAS puede desarrollar. De acuerdo con Artigue[292], un análisis de las limitaciones es relevante para comprender las potencialidades de una herramienta tecnológica. La relación entre los potenciales de los entornos CAS y los obstáculos que pueden generar es importante, pues los errores y dificultades de los estudiantes pueden ser oportunidades para un aprendizaje real y pueden también proveer datos intuitivos para el profesor o el investigador[293].

Quedan, por tanto, muchas cuestiones sin responder. Por ejemplo, ¿cuál es la relación entre el trabajo lápiz-papel y el trabajo en el entorno informático? ¿Cómo afecta el uso de CAS al currículum? ¿Cómo afecta a la comprensión conceptual? ¿Qué conocimiento previo se requiere para usar un CAS de forma productiva?

El Documento de Discusión del 12^th^ ICMI Study titulado "*The future of the teaching and learning of Algebra*"[294] señaló las siguientes cuestiones:

- ¿Para qué estudiantes y cuándo es apropiado introducir el uso de un CAS? ¿Cuándo las ventajas de usarlo sobrepasan el esfuerzo que hay que poner en aprender a utilizarlo? ¿Hay actividades utilizándolos que pueden ser realizadas con provecho por estudiantes más jóvenes?
- ¿Qué intuiciones algebraicas y "sentido simbólico" necesita el usuario de un CAS y qué intuiciones despierta el uso de éstos?
- Una fortaleza de los CAS es que favorecen múltiples representaciones de conceptos matemáticos. ¿Cómo se puede utilizar esto correctamente? ¿Puede ser "sobreutilizado"?
- ¿Cuáles son las relaciones e interacciones entre distintas aproximaciones y filosofías de la enseñanza de las Matemáticas con el uso de CAS?
- Los estudiantes que utilizan distintas herramientas informáticas resuelven problemas y piensan en conceptos de forma distinta. Los profesores tienen más opciones sobre cómo enseñar. ¿Qué impacto tiene esto en la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué tipos de herramientas favorecen qué tipos de aprendizaje? ¿Pueden ser caracterizadas teóricamente estas diferencias?
- ¿Cómo debería ser un currículum de álgebra en un país donde los CAS están disponibles libremente? ¿Qué habilidades "manuales" deberían retenerse?

---

292 Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage, *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 133-169. Citado en Drijvers (2003).

293 Véase la Sección 6.4.4. a este respecto.

294 Chick, H., Stacey, K., Vincent, Ji. y Vincent, Jo. (eds.) (2001). *Proceedings of the 12th ICMI study conference: the future of the teaching and learning of algebra*, The University of Melbourne. Citado en Drijvers (2003).

Otras preguntas de carácter más general han sido enunciadas por el *working group* sobre tecnología del ICMI:

- ¿Cómo se puede utilizar la tecnología para enseñar conceptos teóricos?
- La génesis de los obstáculos epistemológicos es cultural. ¿Cambiarán los obstáculos epistemológicos ahora que la cultura tiene nuevas herramientas?
- ¿Cómo cambia la tecnología a las Matemáticas (lo que se considera “Matemáticas”, cómo se hacen...)?
- ¿Presenta la literatura existente argumentos convicentes para el uso de la tecnología?
- ¿Cómo se caracterizan las interacciones profesor-estudiante con tecnología [...]?
- ¿Deberíamos centrarnos en el currículum actual y cómo integrar en él la tecnología, o se debería considerar cómo podría ser el currículum ahora que tenemos tecnología?
- ¿Qué se necesita saber para utilizar la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas correctamente?
- ¿Cómo cuestionamos las Matemáticas a la luz de la tecnología?
- ¿Qué estrategias [...] hay para utilizar la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas?
- ¿Cómo se diseña la tecnología y se incorpora en el currículum?

King *et al* (2001), pp. 355-356

Además, hay muchos *software* matemáticos disponibles en la actualidad, lo que plantea la cuestión de cuál elegir para la enseñanza-aprendizaje de un tópico concreto y qué problemas potenciales para la comprensión y el razonamiento puede generar (King *et al*, 2001). Es claro, pues, que la integración de CAS en la educación matemática hace emerger muchas cuestiones que aún están por responder. En los apartados siguientes mostramos algunas aproximaciones teóricas que intentan dar respuesta a estas preguntas.

6.3. EVOLUCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE ENTORNOS INFORMÁTICOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección, además de resumir algunos trabajos que se han desarrollado sobre el uso de CAS en la enseñanza, se describen algunos conceptos didácticos que el uso de estas herramientas ha provocado.

Es en los años 80 cuando los educadores matemáticos comienzan a considerar seriamente el uso de CAS con finalidades educativas. En general, los interesados en la integración de la tecnología en la educación matemática no estaban implicados en la investigación y puede ser por esta razón que se perdiera contacto entre la temprana “comunidad de *computer algebra*” y las tendencias didácticas, conceptos y opiniones contemporáneas. Esto provocó un desarrollo de conceptos didácticos específicos para la integración de CAS en la educación matemática, de los que se considera que los dos que han dominado el debate durante los años 90 son el concepto de *resecuenciación* y la dialéctica *white box/ black box*.

El concepto de ***resecuenciación*** se reseña en un artículo de Heid[295], que se considera como comienzo de la investigación sobre el uso de los CAS en la educación matemática. Heid mostró que la integración de la tecnología en cursos de Cálculo para estudiantes de primer año de Universidad en Negocios y Arquitectura, entre otros, permitía *resecuenciar* el curso, pudiendo seguirse una aproximación donde se centrara más la atención en los conceptos que en los algoritmos. Los sujetos del grupo experimental de su estudio afirmaron que el uso de CAS se encargaba del trabajo computacional, les hacía sentirse más seguros de su trabajo y les ayudaba a concentrarse en el proceso global de resolución de problemas. Posteriormente, trabajos como el de Keller y Russell (1997) han utilizado también el concepto de *resecuenciación* sobre conceptos

[295] Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool, *Journal for Research in Mathematics Education,* 5 (4), pp. 217-249. Citado en Drijvers (2003).

y habilidades, ajustando el equilibrio entre unos y otras; su trabajo muestra evidencias de las diferencias en las habilidades de estudiantes para resolver problemas con y sin el uso de un CAS (TI-92 en su caso), en un curso de Ingeniería. En su investigación, casi sin excepción, los estudiantes del grupo experimental tuvieron mayor índice de éxito en la resolución de problemas simbólicos y sus resultados indican que el uso integrado de CAS en la enseñanza, enfatizando una aproximación en la que se da sentido a las Matemáticas, puede potenciar la resolución de problemas simbólicos por los estudiantes más allá del simple apoyo computacional.

A pesar de esta visión tan optimista, trabajos más recientes, como la experiencia de Drijvers (2003) *resecuenciando* un curso de optimización, indican que, aunque ciertos estudiantes desarrollan una comprensión de la estrategia de resolución de problemas, algunos se sienten incómodos aceptando las respuestas que devuelve la máquina, que no pueden verificar (relacionado con el carácter *black box*). La cuestión de la transferencia durante el desarrollo de conceptos desde el entorno computacional a las técnicas lápiz-papel resultó también interesante.

La dialéctica *white box/ black box* se refiere al papel que el CAS puede jugar en el proceso de aprendizaje y, en particular, la relación con el trabajo lápiz-papel. Buchberger[296] discute que, durante el proceso de aprendizaje de un nuevo concepto, el estudiante debe desarrollar los cálculos relevantes a mano[297]. El peligro de usar un CAS en esta fase es que el estudiante puede perder control y comprensión. Opina que el CAS puede ser utilizado una vez que el individuo controla varios aspectos (*white box*) para desarrollar el trabajo (no trivial), en particular al estudiar un tópico de nivel superior. Según Buchberger, el CAS se utiliza en tal caso como una *caja negra* (*black box*) que permite al estudiante centrarse en nuevos aspectos sin ser distraído por los detalles que ya se conocen. Por otro lado, se puede utilizar para obviar algunas carencias en el aprendizaje anterior. Hillel (citado en King *et al*, 2001) sugiere también que esta característica de *black box* puede ser aprovechada como una oportunidad para el aprendizaje[298].

Además, la secuencia *white box/ black box* puede ser invertida. Los que apoyan esta aproximación sugieren un uso del CAS como generador de ejemplos y herramienta exploradora que confronta al estudiante con nuevas situaciones. Esta fase de *caja negra* puede llevar a descubrimientos que formen la base de la fase de explicación, donde los hallazgos son ordenados y probados, o llevar al desarrollo de nuevos conceptos, que es la fase de *caja blanca*. Las experimentaciones de Drijvers[299] con esta aproximación para descubrir la regla de la cadena muestran que es efectiva en el sentido de que los estudiantes descubrieron el procedimiento; sin embargo, este descubrimiento tuvo el carácter de reconocimiento de patrones sin un significado intrínseco relativo al concepto de derivada. A pesar de ello, opina que esta aproximación puede ser fructífera en los casos en que el descubrimiento de un patrón apenas pueda realizarse sin explicar el procedimiento realizado y el razonamiento empleado.

Dos estudios tempranos sobre el uso de CAS en la educación abrieron una vía para construir un puente entre la investigación sobre el uso de CAS y la investigación general en

---

[296] Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules?, *Sigsam Bulletin*, 24 (1), pp. 10-17. Citado en Drijvers (2003).

[297] De hecho, Buchberger sugiere que los estudiantes deberían utilizar el CAS sólo para tareas que son capaces de desarrollar a mano. Sólo cuando el nuevo tópico se domina manualmente, se puede utilizar el CAS para desarrollar el trabajo (ahora trivial) que ha de desarrollarse.

[298] En particular, Hillel la utilizó en la enseñanza del Teorema de Cayley-Hamilton en Álgebra Lineal, pidiendo a los estudiantes, en primer lugar, que usaran *Maple* para construir una evidencia inductiva del teorema.

[299] Drijvers, P. (1992). De kettingregel met Derive: een lesverslag [The Chain rule with Derive: A lesson report], *Euclides*, 67, pp. 242-247. Citado en Drijvers (2003).

educación matemática; son los trabajos de Repo sobre diferenciación y de Pozzi sobre álgebra. La investigación de Repo (1994) se basa en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget y hace uso de una descomposición genética del concepto de derivada, desarrollando una secuencia de enseñanza que incorpora el uso de CAS con estudiantes de 16-19 años. Repo concluye que la comprensión conceptual del grupo experimental fue significativamente superior a la de los grupos de control y que desarrollaron mejor las habilidades algorítmicas.

El trabajo de Pozzi[300] describe cómo dos estudiantes no muy brillantes en matemáticas descubrieron los mecanismos de la regla del producto y del cociente para derivación usando *Derive*. El trabajo de Pozzi adelanta aspectos sobre la relación entre el uso de CAS y el desarrollo conceptual, esencial en la teoría de la instrumentación, de la que hablamos en las Secciones 6.4.2. y 6.4.3.

Artigue[301] realiza una revisión de la investigación francesa sobre la integración de CAS en la enseñanza y describe los fenómenos de *pseudo-transparencia* y de *doble referencia*.

Pseudo-transparencia quiere decir que la técnica en el entorno informático es similar a la de lápiz-papel, pero no exactamente igual y a veces presenta diferencias bastante sutiles (por ejemplo, el uso de paréntesis en las entradas del CAS). Como consecuencia de esta *pseudo-transparencia*, los estudiantes muchas veces, en vez de descubrir matemáticas, están descubriendo el *software* con sus peculiaridades. Esto es lo que quiere decir la ***doble referencia***: referirse a las representaciones específicas del CAS en lugar de a los conceptos matemáticos.

Otro estudio que reporta dificultades algebraicas similares es el de Heid *et al* (1998). En él, los estudiantes trabajan sobre problemas no rutinarios y tienen dificultades interpretando las respuestas (*outputs*) del CAS (en este caso, la calculadora simbólica TI-92). Para poder dar un sentido a los resultados obtenidos con la herramienta, los estudiantes entrevistados tuvieron que desarrollar la habilidad de reconocer el modo típico en que el CAS devuelve sus respuestas y cómo representa habitualmente fórmulas y expresiones.

El estudio a pequeña escala de Boers-van Oosterum[302] investiga si los estudiantes pueden desarrollar una comprensión rica del concepto de variable a través de una aproximación con un uso intensivo del ordenador. Los estudiantes del grupo experimental mostraron una comprensión conceptual de variable mejor que la de los estudiantes del grupo de control.

En una aproximación con un uso intensivo del ordenador similar, O'Callaghan[303] investigó la comprensión del concepto de función de estudiantes de álgebra de nivel *college* sobre el concepto de función. Concluyó que los estudiantes mostraban una comprensión mejorada del concepto de función y mejores habilidades de resolución de problemas (aunque para ellos fue muy difícil *reificar* funciones).

---

[300] Pozzi, S. (1994). Algebraic reasoning and CAS: Freeing students form syntax?, en *Derive in education: Opportunities and strategies* (Heugl, H. y Kutzler, B., eds.), Bromley, UK: Chartwell-Bratt, pp. 171-188. Citado en Drijvers (2003).

[301] En Artigue, M. (1997), ver nota 292, y en Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (5), pp. 204-211. Citados en Drijvers (2003).

[302] Boers-van Oosterum, M.A.M. (1990). *Understanding of variables and their uses acquired by students in traditional and computer-intensive algebra*, Tesis Doctoral, MA: Universidad de Maryland. Citado en Drijvers (2003).

[303] O'Callaghan, B.R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, pp. 21-40. Citado en Drijvers (2003).

Lagrange (1999) considera que el aprendizaje de técnicas (a menudo descartado en las enseñanzas con tecnología) es un medio para conectar las tareas y las teorías matemáticas. La enseñanza de técnicas para utilizar una calculadora simbólica, por ejemplo, en relación con las técnicas "tradicionales" es considerado como una ayuda a los estudiantes para que desarrollen esquemas instrumentales y también en entornos lápiz-papel, más ricos en significados matemáticos y que puedan dar sentido a los cálculos simbólicos, así como a las aproximaciones numéricas y gráficas.

En la actualidad, los currículos de Matemáticas de muchos países tienen en cuenta el uso de las tecnologías. En USA, el movimiento para la reforma en la enseñanza del Cálculo (*the calculus reform movement*) recomienda incorporar el uso de calculadoras gráficas y PCs a la enseñanza de las Matemáticas, con el objetivo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, así como su motivación y participación, permitiendo además el énfasis en ideas y conceptos. El estudio desarrollado por Quesada y Maxwell (1994) se llevó a cabo con estudiantes universitarios en un curso de pre-Cálculo e investigaba las diferencias en el desempeño de los estudiantes que siguieron un curso donde se utilizaban calculadoras gráficas activamente y los estudiantes de un curso tradicional con calculadora científica en un examen comprensivo común. La introducción de estas calculadoras permitió, por otro lado, la realización de algunos cambios didácticos. Además, su uso permitió una presentación más interactiva de los contenidos, promover la exploración y experimentación y la introducción de algunos procedimientos atípicos de resolución de problemas. Su experimento tuvo una duración de tres semestres y participaron 710 estudiantes.

Los instructores proyectaban su propia calculadora en una pantalla, lo que permitía la presentación de nuevas características de la calculadora y la replicación por parte de los estudiantes de lo que se proyectaba. En el grupo experimental, además, se completó un test sobre la percepción del uso de calculadoras gráficas, investigando si éstas habían permitido realizar mayores exploraciones e investigaciones, si ayudaban a comprender los contenidos, si les gustaría tomar más cursos de Matemáticas con esta herramienta, si su desempeño había sido mayor que en otros cursos de Matemáticas y si habían dedicado más tiempo a hacer matemáticas en este curso que en los previos. Las medias indican que los estudiantes opinaron que habían realizado más exploraciones, que creían que la calculadora les había ayudado a comprender mejor los conceptos y que seguirían más cursos con calculadoras.

En cuanto al test de contenidos, las máximas puntuaciones se consiguieron en el grupo experimental; las puntuaciones fueron considerablemente superiores, salvo en las preguntas multiopción. Entre las posibles razones para la mejoría en las puntuaciones, los autores mencionan la presentación más interactiva de los contenidos que la calculadora permite, el *feedback* inmediato y la posibilidad de comprobar las respuestas que la calculadora devuelve y el desarrollo de habilidades de visualización.

Fuglestad (2004) muestra algunos resultados de un proyecto de tres años de duración realizado en Noruega, con el que se pretende desarrollar la competencia de los estudiantes en el uso de TIC en Matemáticas, de forma que sean capaces de elegir ellos mismos la herramienta más adecuada para diferentes problemas; se investiga también su conocimiento sobre los diversos *software* introducidos y su habilidad de decidir qué herramienta es más adecuada en cada momento (en el proyecto se utilizaron hojas de cálculo, *Excel*, un graficador, *Grafbox*, y geometría dinámica, *Cabri*). En este país el currículum menciona explícitamente el uso de herramientas como hojas de cálculo, graficadores y calculadoras y los estudiantes deben desarrollar una independencia y auto-confianza en su aprendizaje. Se anima, por tanto, a los estudiantes a que cuestionen e investiguen diversas representaciones en su trabajo y desarrollen actividades explorativas y experimentales.

Esta investigación considera las TIC como reorganizadores, que conllevan una mayor actividad en un meta-nivel, con mayor énfasis en los métodos de planificación y juicio. Las TIC se vuelven una parte del sistema cognitivo; por ejemplo, las visualizaciones en el ordenador extienden la cognición de los estudiantes y estarán disponibles en su memoria posteriormente. Enfatizan también el potencial de estas herramientas para promover la matematización y su naturaleza multi-representativa, que permite hacer manipulaciones de objetos y transformaciones entre diferentes representaciones.

Su trabajo también es consciente de que la introducción de nuevas herramientas cambia las situaciones tanto de aprendizaje como de enseñanza; no se puede introducir una nueva herramienta y esperar que todo permanezca igual. Un buen uso de las herramientas implica cambios en la enseñanza, en los modos de trabajo y en las tareas presentadas a los estudiantes.

En este sentido, Muller (2001) presenta cómo en su institución (Department of Mathematics at Brock University) se ha integrado el uso de *Maple* en la enseñanza universitaria, tomando en cuenta dos de las sugerencias de Tall (1991a) para mejorar la enseñanza de las Matemáticas:

- la construcción de fundamentos intuitivos apropiados de los conceptos avanzados de las Matemáticas a través de una aproximación que equilibra el desarrollo cognitivo y una apreciación del desarrollo lógico,
- el uso de la visualización, particularmente usando un ordenador, para dar a los estudiantes una visión general de los conceptos y permitir métodos más versátiles de manejar la información.

Tall (1991a), pág. *xiv*

Este programa se comenzó a utilizar en 1988 y desde entonces se ha convertido en un requisito para todos los cursos del primer año. El objetivo de la implantación del *Maple* en los cursos no era duplicar la enseñanza tradicional con la tecnología, sino más bien utilizar este medio para ofrecer a los estudiantes nuevos senderos de aprendizaje que antes no eran posibles. Su propuesta, por otro lado, no pretende cambiar radicalmente los cursos ni en aproximaciones ni en contenidos. Un área en que ha habido buenos resultados es en estadística aplicada, donde las ideas y actividades que se presentan se utilizan para fomentar el desarrollo de los fundamentos intuitivos de los conceptos estadísticos. La simulación, junto con representaciones visuales adecuadas de los resultados, ofrece un entorno rico para que el estudiante desarrolle intuiciones.

La elección de *Maple* se basa en que ofrece un entorno muy distinto para hacer matemáticas, y también ofrece oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje que no están disponibles en lápiz-papel[304]. Con él, se presta mayor atención a cuestiones relativas a la educación matemática, como el desarrollo de representaciones mentales de los conceptos matemáticos, pues la institución se dio cuenta de que *Maple* permite usar, con relativa facilidad, diferentes representaciones (numéricas, algebraicas, gráficas), permite el paso de unas a otras, y ofrece medios de explorar las deficiencias de una u otra representación en situaciones particulares[305]. Las actividades de los estudiantes se diseñan de forma que estos procesos se hagan explícitamente y se anima a los profesores a realizar muestras de éstos en su enseñanza,

[304] El autor plantea la metáfora del transporte. Tanto el coche como el avión ofrecen diferentes oportunidades para viajar. El primero ofrece ocasiones de detenerse y explorar el paisaje local, mientras que el segundo permite un acceso rápido a áreas que no estarían normalmente accesibles si se quisiera ir sólo en coche.

[305] Aunque estos atributos no son evidentes, ya que *Maple* fue desarrollado por matemáticos para matemáticos. Por esta razón, los estudiantes deben ser guiados a través de actividades en las que las diferentes representaciones se señalen.

trabajando bajo la premisa de que las representaciones mentales de un concepto son más útiles cuando relacionan varios aspectos de dicho concepto.

El impacto de *Maple* en la institución se califica de *sustancial* y se afirma que la gran mayoría de participantes puede enumerar algo en lo que el programa ha sido particularmente de ayuda en su aprendizaje de las Matemáticas.

Smith (2001) describe también la experiencia de enseñanza en un aula interactiva con ordenadores (*Interactive Computer Classroom, ICC*), diseñada para el trabajo práctico de los estudiantes con los ordenadores. Las características que diferencian este aula de otros laboratorios de ordenadores son:

- cada mesa tiene espacio para dos estudiantes, pero sólo un ordenador;
- las mesas con ordenadores están dispuestas en forma de doble U, de cara a las paredes de la sala, de forma que el instructor puede ver todas las pantallas. En consecuencia, los estudiantes no se distraen con los ordenadores cuando se vuelven para mirar la parte frontal del aula;
- hay mesas vacías que facilitan el trabajo en grupo sin ordenadores, así como experimentos de toma de datos que requieren algún montaje físico [...];
- además de la tradicional pizarra y retroproyector, hay un *podium de conferencias* desde el que el instructor puede proyectar materiales del ordenador incorporado, o el portátil, vídeo, láser-disk o DVD;
- todos los ordenadores están conectados a una red local con acceso rápido a Internet.

Smith (2001), pág. 167

Esta estructura permite al instructor administrar un curso multifacético con múltiples estrategias de aula, herramientas de evaluación y una mezcla de trabajo individual y grupal. También permite a los estudiantes estar en contacto entre ellos y con el instructor, lo que promueve un sentido de comunidad. En general, el autor considera que los estudiantes consiguen progresos en los siguientes objetivos:

- aplicar conocimientos de Matemáticas [...];
- conducir experimentos matemáticos y analizar e interpretar los datos de estos experimentos;
- identificar, formular y resolver problemas;
- funcionar efectivamente como miembro de un equipo;
- comunicar interpretaciones matemáticas efectivamente, tanto oralmente como por escrito; [...]
- utilizar las técnicas, habilidades y herramientas modernas necesarias para la práctica en Ingeniería, especialmente un CAS.

Smith (2001), pág. 177

Aunque en los principios muchos trabajos se centraban en las posibilidades de mejorar el aprendizaje de los estudiantes gracias a la tecnología, pocos abordaban la problemática de cómo su uso modifica las prácticas de los enseñantes. Kendal *et al* (2002) desarrollan una investigación sobre cómo la introducción de una herramienta tan potente necesita del cambio de numerosos elementos de la estructura de enseñanza. Para ello, describen cómo tres profesores australianos adaptaron su metodología para integrar el uso de un CAS, abordando las siguientes cuestiones:

- las distintas formas de organizar la clase,
- las distintas aproximaciones del aprendizaje de un CAS,
- el aumento del número de métodos disponibles para la resolución de problemas y para la enseñanza,
- las diferencias entre la utilización de una calculadora gráfica y una simbólica,
- el lugar dado a las habilidades de cálculo en el entorno lápiz-papel,
- el tiempo dedicado a las Matemáticas y a la tecnología,
- los cambios necesarios en los currícula y en los exámenes escolares.

Es claro que, con un CAS, los estudiantes tienen la ocasión de desarrollar su potencial matemático evitando la parte ingrata del trabajo operativo. Pero también los profesores competentes podrán llamar la atención de los estudiantes sobre los métodos, técnicas y actividades matemáticas que ayuden a construir y negociar un sentido para las matemáticas en cuestión. Sin embargo, hay que considerar que la tecnología puede favorecer múltiples formas de aprender y de enseñar (aumentando las diferencias habituales entre algunos profesores y algunos métodos), desde la enseñanza que privilegia las técnicas hasta la enseñanza que privilegia la comprensión.

En trabajos más recientes, se aborda la cuestión de la viabilidad de la integración de las calculadoras simbólicas en la clase. Artigue (2002b) muestra el trabajo de dos ingenierías didácticas desarrolladas en Secundaria (una sobre el cálculo exacto y aproximado, y la otra sobre la enseñanza de derivadas) y muestra cómo los problemas de integración de calculadoras simbólicas se plantean al afrontar la contingencia de los estudiantes en la clase.

La primera constó de tres sesiones que, además, constituían las sesiones de toma de contacto con la máquina, lo que restringe necesariamente las elecciones tomadas, pues obliga al enseñante a consacrar, en las primeras sesiones, un tiempo sustancial a la instrumentación de la máquina. La fase de instrumentación se desarrolló colectivamente, con la ayuda de una calculadora retroproyectable. En el análisis, se observa la distancia real entre la *identificación de potencialidades a priori* y su *realización efectiva* en una cierta clase. Se señala como fundamental que los fenómenos mostrados sean fácilmente detectables y que piquen suficientemente la curiosidad de los estudiantes para que el deseo de comprender no sea solamente del enseñante; también es necesario que el trabajo matemático sea accesible, con la ayuda de la máquina, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos e instrumentales de los estudiantes. En el análisis se muestra que estas condiciones no son fáciles de satisfacer, en particular si el *desfase cognitivo* es muy fuerte o si es posible refugiarse en tareas de ejecución o en ensayos poco controlados, y que el trabajo real de los estudiantes corre el riesgo de estar lejos de lo esperado por los investigadores.

La segunda ingeniería pretende una entrada intuitiva al Cálculo, pero que permita posteriormente las reestructuraciones necesarias. Uno de sus objetivos era estudiar cómo el uso de herramientas de cálculo simbólico puede ayudar a la realización de esta ambición e informar de sus *condiciones de viabilidad*. En el desarrollo, se articulan los puntos de vista local y global, explotando las visualizaciones gráficas permitidas por la calculadora (TI-92) para problematizar la noción de tangente e instalar el carácter local de la noción de derivada. Esta ingeniería se diferencia de la anterior, entre otras, en que los estudiantes han desarrollado previamente una instrumentalización de la herramienta y en su nivel de conocimientos. Por otro lado, una diferencia esencial se sitúa en la *gestión* de las sesiones: no hay un funcionamiento *a-didáctico*, en el sentido clásico de la Teoría de las Situaciones, no hay un problema *devuelto* al estudiante, durante cuya resolución progresa por el juego de interacciones con un cierto *medio*. Existe un problema global (dar sentido matemático a un cierto tipo de fenómenos numérico-gráficos), pero éste surge de una sucesión de subproblemas en un escenario *rigurosamente pilotado* por el enseñante; el *papel del enseñante* es *decisivo* y, aunque los estudiantes tienen autonomía maximal en cada fase, su trabajo está estrechamente ligado al del profesor.

Maschietto (2004) desarrolla una ingeniería didáctica y realiza un análisis del papel de los artefactos e instrumentos al realizar una entrada al Cálculo utilizando calculadoras gráfico-simbólicas en niveles pre-universitarios. En una primera sesión se identifica el fenómeno gráfico de linealidad local (basada en el uso del artefacto. La exploración, al comienzo, es guiada y, posteriormente, pueden usar los *zoom* más libremente) y en las dos siguientes se procede a su formulación matemática. Igual que en la ingeniería descrita arriba, se hace uso también del juego local-global y muestra cómo el uso de las calculadoras y del *zoom* favorecen la producción de gestos y metáforas que promueven los cambios entre los puntos de vista local y global; estos gestos y metáforas aparecieron también en las respuestas de los estudiantes a test en los que la calculadora no estaba disponible. Se observa, además, diferencias de comportamiento y en las metáforas utilizadas según el rol de los estudiantes (los que utilizaban lápiz y papel y los que utilizaban la calculadora) en los grupos de trabajo; el lenguaje utilizado también tenía un carácter más dinámico en los estudiantes que pilotaban los *zooms* en la calculadora.

Su trabajo parte de la *ergonomía cognitiva* y la idea de que el uso de un artefacto produce en el sujeto la activación de esquemas de uso que lo transforman en un instrumento.

6.4. ASPECTOS TEÓRICOS

Es evidente que el desarrollo de las Matemáticas ha sido dependiente del material y de las herramientas simbólicas disponibles para realizar los cálculos. Pero cualquier matemático profesional, o ingeniero, sabe bien que las nuevas y sofisticadas herramientas disponibles no se vuelven inmediatamente instrumentos matemáticos eficientes para el usuario; un uso controlado de éstas requiere de cierta experiencia. Los profesionales también aceptan que hay ciertos costos ligados al aprendizaje de efectivo de un nuevo *software* y, en sentido inverso, el uso de estas herramientas cambia progresivamente sus prácticas (Artigue, 2002a). Sin embargo, en el caso de la educación matemática, no se busca prioritariamente un uso eficiente de estas herramientas, sino que sirvan como instrumentos pedagógicos y que permitan aprender mejor contenidos matemáticos que fueron definidos sin tomar en cuenta estas herramientas[306].

El enfoque que tomamos contiene elementos del enfoque antropológico de Chevallard (consultar, por ejemplo, Chevallard, 1991), más sensible al papel jugado por los instrumentos en la actividad matemática y rehabilitar el papel del trabajo técnico. En este enfoque, el papel jugado por las cuestiones institucionales se vuelve esencial, pues los objetos matemáticos emergen de las prácticas en ciertas instituciones. Sin embargo, este enfoque no ha desarrollado aún herramientas suficientemente eficientes para considerar los procesos de instrumentación. Es la *ergonomía cognitiva*, que adopta también una perspectiva antropológica, la que emerge como referencia para el estudio de estos procesos.

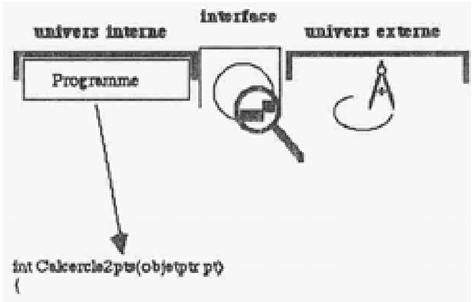
6.4.1. LA TRANSPOSICIÓN INFORMÁTICA

El proceso de la Transposición Didáctica, definido por Chevallard en 1985, es complejo y adapta los saberes de referencia a las restricciones de enseñabilidad y aprendizaje propios de los sistemas didácticos, conduciendo a la creación de objetos de enseñanza. De forma paralela, el desarrollo y uso de las tecnologías informáticas en las instituciones de enseñanza viene acompañado de nuevos fenómenos del mismo orden que los de la Transposición Didáctica. A las restricciones que acompañan la Transposición Didáctica se añaden, o se combinan, las de modelización e implementación informáticas, entre las que citamos las restricciones de la *modelización computable* y las restricciones de los programas y materiales de apoyo informático.

Balacheff (1994) define un *dispositivo informático* como el complejo formado tanto por los materiales como por los programas que hacen operativo un ordenador. Según él, tal dispositivo divide "el mundo" en tres regiones:

[306] Ciertamente, estas herramientas deben ayudar a aprender y a *comprender*, y no solamente a *hacer* o producir.

- *El universo interno*, hecho de diversos componentes electrónicos cuya articulación y puesta en marcha permiten el "funcionamiento" del dispositivo informático. De forma simplificada, Balacheff considera que una representación operativa de este universo viene dada por los lenguajes de programación.
- *La interfaz*, lugar de la comunicación entre el usuario humano y el dispositivo informático.
- *El universo externo*, donde se encuentra el usuario humano y donde le son accesibles otros dispositivos (en particular, en relación con los conocimientos en juego en el dispositivo informático).



La *interfaz* es el lugar de lo que se designa a menudo como la *reificación* de los conocimientos: *visualización* y *manipulación directa* de entidades abstractas que permiten ver comportamientos evocadores de sus propiedades. Los fenómenos que suceden en la *interfaz*, "ofrecidos" a la percepción, darían así una referencia concreta a los conceptos en juego.

<u>*La visualización*</u>

En Matemáticas la visualización juega un papel fundamental. No sólo se usa de forma natural para la representación gráfica de funciones o el trazado de figuras en geometría; es útil para mostrar algunos razonamientos bajo la forma de gráficas de inferencia.

Los sistemas de representación tienen sus propias características, el universo interno y la *interfaz* combinan efectos generadores y fenómenos no intrínsecos a las entidades representadas. Un ejemplo de esta interacción se produce en los programas que permiten el trazado de gráficas de funciones numéricas, pues se apoyan clásicamente en una representación aproximada de los números reales y en procedimientos de discretización que permiten *el dibujo* de las gráficas. Este doble *muestreo* produce inevitablemente efectos de *estroboscopia* que pueden conducir a efectos patológicos.

<u>*La manipulación directa*</u>

Popularizada en el diseño de videojuegos, abre el acceso a unas *interfaces* en las que todo sucede *como si* el usuario pudiera tener un acceso directo a los objetos; introduce una dimensión perceptiva-gestual en el repertorio de los medios posibles de comunicación. En Matemáticas esta aportación es muy significativa para la manipulación de representaciones gráficas. Por ejemplo, en los entornos de geometría dinámica, la capacidad de manipular y deformar las construcciones permite descubrir algunas propiedades invariantes.

Estas *interfaces* requieren la gestión de los problemas relativos al comportamiento de los objetos más allá de las restricciones tomadas en cuenta por los modelos matemáticos subyacentes.

> Por ejemplo, nuevamente en entornos de geometría dinámica, la cuestión sobre el lugar geométrico de un punto toma sentido. Esta fenomenología particular de la *interfaz* se convierte en una característica que se debe tener en cuenta en el análisis del *medio* cuya realización permite el dispositivo informático.
>
> Las *interfaces* que permiten la manipulación directa pueden ocasionar un nuevo problema: el de la relación entre el comportamiento de las representaciones y el comportamiento de los modelos que les dan sentido. En el contexto del aprendizaje, la *interfaz* no está bajo el control teórico del usuario; al contrario, puede convertirse en una referencia relativa a la cual se construye el conocimiento.

La complejidad del sistema de enseñanza en entornos informáticos puede ser analizada a la luz de la **transposición informática** (Balacheff, 1994), que pone en evidencia la modificación del conocimiento debido a las especificaciones del entorno (representaciones y concepción de la enseñanza) y a la puesta en marcha del dispositivo informático: "*Las características de estos entornos modelan y **restringen** las posibilidades de interacción con los objetos matemáticos y condicionan fuertemente las matemáticas que pueden ser producidas o adquiridas*"[307].

Para acceder a la transposición informática de estos entornos, se puede distinguir tres tipos de restricciones (Trouche, 1996)[308]:

- las restricciones internas (representación y tratamiento): ligadas de forma intrínseca al material y a las representaciones internas de los objetos y sus procesos de cálculo: limitaciones del programa, limitación de la memoria, naturaleza de la pantalla compuesta por un número finito de píxeles...
- aquéllas debidas a los comandos (elecciones implementadas): ligadas a las elecciones del constructor, que modelan las posibilidades de acción dadas al usuario: ciertos comandos están preprogramados, otros no...
- y aquéllas de organización (acceso y organización): ligadas también a las elecciones del constructor sobre el acceso a los comandos y su organización: la organización del teclado y de la pantalla instauran una jerarquía entre los distintos comandos disponibles.

Los dos últimos tipos de restricciones están ligados a la interfaz y pre-estructuran la acción. Como se puede deducir, el usuario no es "libre" de utilizar como quiera una herramienta dada: esta utilización está, relativamente, preestructurada por la herramienta misma. A continuación mostramos algunos ejemplos de cada tipo de restricción, tomados de Guin y Trouche (1998), que se refieren al uso de calculadoras gráficas y simbólicas.

> Restricciones internas:
>
> Los fenómenos de **discretización** que se producen.
>
> La manipulación de cálculos exactos está ligada a las elecciones internas de simplificación que son diferentes de las nuestras, dependiendo del contexto.

[307] Artigue, M. (1995). Une approche Didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement, *Actes du colloque: Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur 95*, Eyrolles, París, pp. 17-28. Citado en Balacheff (1994).

[308] Mientras que Balacheff (1994) distingue las restricciones ligadas al universo interno de la máquina y la *interface*, Trouche (1996) distingue estas restricciones, que actúan sobre el usuario.

La tecla ENTER induce una simplificación (ya sea de factorización, un desarrollo o una descomposición en elementos simples) que muchas veces dificulta la anticipación del resultado; esta simplificación no es evidente para un usuario novato.

La nueva tecla "infinito" da un nuevo estatus de número al infinito por la posibilidad de calcular $f(\infty)$ para toda función f[309].

<u>Restricciones de comando</u>:

Los requerimientos sintácticos son exigentes y tienen que ser memorizados (como es usual en los CAS), aunque el hecho de que se muestren por pantalla los *inputs* facilita el control sintáctico.

Las restricciones sintácticas exigen una distinción entre variable, parámetro, función, ecuación, etc., lo que induce las dificultades de los estudiantes, aún si se estima que este rigor es soporte de un aspecto positivo.

Los efectos de los comandos pueden conducir a los procedimientos de redondeo.

<u>Restricciones de organización</u>:

Teóricamente, la TI-92 le asigna al cálculo simbólico un lugar privilegiado. Así, las matemáticas están continuamente en juego dentro de la manipulación (ciertos objetos no son reconocidos si pasan por la aplicación HOME, como las sucesiones, por ejemplo) y la gestión de gráficas, del cálculo exacto y aproximado (dentro de ciertas aplicaciones, el cálculo exacto no es posible). Es el maestro quien puede explotar estas restricciones para elaborar las situaciones que integren la calculadora y favorezcan una reflexión matemática.

En este sentido, no aparecen muchos trabajos tratando de generalizar estas restricciones al uso de entornos informáticos. Como señalan Abbasian y Ionescu (2002), la mayoría de la literatura existente se centra en el poder de los CAS, el uso de sus comandos y, en menor medida, en los aspectos de programación. Poca bibliografía discute las limitaciones e inadecuaciones del *software* y el potencial para un uso incorrecto de los CAS o las falsas concepciones que pueden generar. De esta forma, el usuario novel, tal como el estudiante de primeros cursos universitarios, que carece de madurez matemática, asume a menudo erróneamente que la *caja negra*[310] puede resolver cualquier problema matemático de forma completa y precisa.

Sin embargo, sí se ha avanzado en la identificación de "defectos" de algunos *software*. Algunas restricciones, insuficiencias algorítmicas y limitaciones del *Maple*, junto con algunos usos incorrectos del *software* al ser utilizado como herramienta en la enseñanza de Matemáticas en la Universidad son los que se muestran[311]:

* <u>Resolución de ecuaciones</u>

Incluso ecuaciones tan sencillas como $x^2 = \pi.\tan(1) + \sin(1)$ no obtienen respuesta por el programa:

```
[> solve(x^2=Pi*tan(1)+sin(1),x);
[>
```

[309] Guin y Trouche (1998) describen cómo algunos estudiantes llegan a decir: "*el punto de intersección de dos curvas es* $(2, +\infty)$".

[310] Véase las Secciones 6.2.1., 6.3. y 6.4.4. para una explicación de este fenómeno.

[311] Los errores que se muestran a continuación se registran en la versión 5 del programa y han sido corregidos en la versión 7, salvo que se indique lo contrario.

También la ecuación $1.03x^{0.67}=67$ produce que el programa comience a realizar cálculos sin fin[312]:

```
> solve(1.03*x^0.67=67,x);
Warning, computation interrupted
>
```

* <u>Cálculo de límites</u>

El uso del programa de forma libre puede llevar también al desarrollo de concepciones erróneas. Por ejemplo, si se calcula el límite del producto de dos funciones cualesquiera, $f(x)$ y $g(x)$, en $x = 0$, se obtiene:

```
> limit(f(x)*g(x),x=0);
                                        f(0) g(0)
```

o incluso el límite cuando x tiende a infinito de la expresión $f(x).e^{-x}$, para una función $f(x)$ no definida es[313]:

```
> limit(f(x)*exp(-x),x=infinity);
                                        0
```

* <u>Elementos del Cálculo</u>

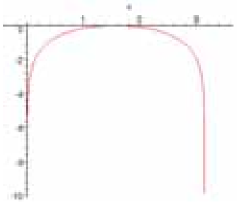
El cálculo de series claramente no convergentes también da lugar a algunos errores del programa. Por ejemplo, la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ da el resultado ½ y la suma de $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ da un valor complejo:

```
> sum((-1)^(n+1),n=1..infinity);
                                        1/2
> sum(n!,n=0..infinity); evalf(%);
                              hypergeom([1, 1], [ ], 1)
                           .6971748832 - 1.155727350 I
```

Incluso la siguiente integral, $\int_0^{\pi}\log(\sin(x))dx$ produce un valor complejo:

```
> int(log(sin(x)),x=0..Pi);
                                  -2 I π^2 - π ln(2)
```

cuando es obvio, en vista de la gráfica de la función, que se trata de una integral impropia (que resulta ser convergente) de una función definida en el intervalo, con asíntota en cada extremo. El valor real de la integral es $-\pi.\ln(2)$.



312 Este error sigue presente en la versión 7 del programa. Una forma eficiente de evitarlo que se propone en Abbasian y Ionescu (2002) es resolver la ecuación paramétrica $1.03x^p = 67$ y luego darle al parámetro el valor $p = 0.67$.

313 Estos dos fallos del programa siguen presentes en la versión 7 del programa.

Este tipo de resultados erróneos (o restricciones internas) pueden originar falsas concepciones en un usuario no experto (piénsese, por ejemplo, en la afirmación de que $\lim_{x \to 0} f(x).g(x) = f(0).g(0)$ para cualesquiera dos funciones).

Nosotros, en el diseño de nuestras sesiones con el *software Maple V*[314] tratamos de evidenciar a los estudiantes algunas de las restricciones internas propias de este programa con el objetivo de ampliar las perspectivas de enseñanza y aprendizaje de la integral impropia.

6.4.2. La génesis instrumental

Guin y Trouche (1998) muestran, en el caso de las calculadoras simbólicas, los efectos posibles de un artefacto sobre los procesos de conceptualización y ponen en evidencia los elementos de la transposición informática en términos de restricciones para el pensamiento y la acción, como se ha visto en la sección precedente. Trabajos previos sobre el uso de calculadoras de forma habitual por los estudiantes afirman que su empleo sistemático puede reforzar el estudio de cuestiones numéricas; no sólo son útiles para efectuar cálculos, sino que también sirven para verificar resultados o alimentar el trabajo de investigación, actividades que debe motivar el profesor.

Por otro lado, muestran también que el control de estos efectos necesita una intervención explícita del profesor, desembocando en una nueva organización del espacio y de tiempo de estudio teniendo en cuenta la exigencia de una socialización de los procesos de instrumentación. Según Trouche (2000a), algunos principios que guían la construcción de un curso de Matemáticas con el uso de calculadoras son:

- Utilizar los potenciales de las calculadoras para multiplicar los puntos de vista.
- Elegir actividades que demanden la combinación del recurso al instrumento y del recurso a la teoría.
  El campo de los aprendizajes elementales se desplaza; el campo de los problemas también.
- Volver a las fuentes de la actividad científica.
  El aspecto *experimental* toma una importancia más grande que en el cuadro matemático usual.
- Una nueva organización.

La Ingeniería que hemos diseñado se complementa con algunas sesiones con ordenador, por lo que para el diseño de las actividades desarrolladas en tales sesiones trataremos de promover lo que se denomina **génesis instrumental**. No se trata de dejar a los estudiantes desenvolverse solos, sino de mostrarles progresivamente cómo las máquinas permiten aprehender mejor los problemas propuestos. Una de las aportaciones de la **teoría de la instrumentación** es que proporciona una forma específica de observar la interacción entre el estudiante y la herramienta tecnológica y, en particular, muestra, aparentemente, cómo los obstáculos técnicos pueden relacionarse con dificultades conceptuales (Drijvers, 2002). Por tanto, prestar atención a los obstáculos técnicos implicará a menudo aspectos conceptuales, lo que puede provocar un desarrollo conceptual.

Desde esta perspectiva, en la enseñanza de los conceptos utilizando CAS se distingue entre un artefacto tecnológico y el instrumento que un ser humano es capaz de construir a partir

[314] Las razones por las que este *software* ha sido elegido se explican en la Sección 6.5.1.

de él[315]. Mientras el *artefacto* se refiere a una herramienta objetiva, el *instrumento* se refiere a una construcción mental hecha por el usuario de la herramienta. El instrumento no viene dado con el artefacto, se construye mediante un proceso complejo que se denomina **génesis instrumental** y da forma a la actividad y el pensamiento matemático.

Cabe señalar que en los trabajos que fundamentan nuestra perspectiva teórica se utiliza el término *herramienta* en un sentido general, en lugar del término *máquina*, ya que esta última incluye ideas de complejidad y de manufactura industrial. Un martillo es una herramienta, un compás es una herramienta, una calculadora es una herramienta. El término *herramienta* tendrá el sentido de un objeto material que está disponible para la actividad humana.

El uso de *herramientas*, incluso elementales, crea automatismos y *procesos rutinarios*. Controlar estos automatismos es una cuestión real, en particular en los procesos de aprendizaje.

Por tanto, la **génesis instrumental** es el proceso que el usuario debe seguir mientras aprende a trabajar con una herramienta (tecnológica)[316] (Drijvers, 2002).

Con el objetivo de poder utilizar una herramienta de forma productiva, el aprendiz debe desarrollar esquemas de instrumentación. Estos esquemas, junto con la herramienta física, *el artefacto*, conforman el *instrumento*:

“*El instrumento no existe por sí mismo;* [*la herramienta*] *se convierte en un instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiárselo y lo ha integrado en su actividad*”

A menudo, este proceso (**la génesis instrumental**) requiere de tiempo y esfuerzo. Trouche (2000b) señala, en la confrontación entre un sujeto y un instrumento, los siguientes aprendizajes:

- Para el sujeto, hay aprendizajes en juego (sobre la herramienta, sobre los distintos elementos que la herramienta permite o no manipular, sobre el marco en el que se desarrolla la acción; finalmente sobre él mismo, los gestos y la coordinación de los gestos restringidos – relativamente – por la herramienta y la tarea a concluir);
- Para el espectador también hay aprendizajes en juego (las elecciones operadas por el protagonista principal de la escena dan informaciones precisas sobre su comportamiento y permiten adaptar, en consecuencia, la herramienta o la tarea para su realización efectiva).

Ya hemos mencionado el término *esquema*. Trouche (2000b), utiliza la noción de *esquema* que introduce Vergnaud[317]. Un esquema permite la puesta en relación de las competencias y de las concepciones; es una organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones. Tiene una intención y un objetivo y constituye una totalidad dinámica funcional. Sus componentes son:

- El objetivo, los sub-objetivos y las anticipaciones;
- Las reglas de acción, de toma de información y de control;

[315] Verillon y Rabardel son quienes señalan esta diferencia. En Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology in Education*, 9 (3), pp. 77-101. Citado en Artigue (2000a).

[316] Damos en esta sección tres definiciones complementarias de lo que es la génesis instrumental.

[317] Vergnaud, G. (1996). Au fond de l’apprentissage, la conceptualisation, *Actes de l’école d’été de didactique des mathématiques*, IREM, Clermont-Ferrand. Citado en Trouche (2000b).

- Los invariantes operativos;
- Las posibilidades de inferencia en situación.

Trouche (2000b) toma la noción de *esquema* como elemento de comprensión de la construcción de relaciones entre un individuo y una herramienta, apoyándose en particular en el trabajo de Rabardel[318].

Dentro de un esquema de instrumentación aparecen dos componentes mezcladas: la componente técnica y la componente mental. Drijvers (2002) argumenta que la relación entre las concepciones matemáticas implicadas y las habilidades técnicas depende de la herramienta que se utilice.

La parte técnica concierne la secuencia de acciones que se deben ejecutar en la máquina para obtener un cierto objetivo. En nuestro caso, consiste en los objetos matemáticos implicados y en una imagen mental del proceso de resolución del problema y las acciones de la máquina. Estas concepciones matemáticas forman parte del esquema de instrumentación y pueden incluso desarrollarse durante el desarrollo del esquema.

Por tanto, la génesis instrumental es el proceso de construcción de esquemas que consisten tanto en técnicas como en concepciones que dan sentido a estas técnicas.

Se define un ***esquema de utilización*** de una herramienta como un esquema mental que organiza la actividad con la herramienta con el objetivo de realizar una tarea dada. En particular, se distinguen los siguientes subesquemas:

Esquema de utilización

Esquemas de uso	Esquemas de acción instrumentada
(orientados al manejo de la herramienta: encender la calculadora, ajustar el contraste de la pantalla, ...)	(orientados al desarrollo de una tarea específica[319]: calcular el límite de una función, ...).

Debido al uso de estos esquemas, un instrumento rara vez está construido definitivamente, pues los esquemas pueden evolucionar. Trouche (2000b) muestra cómo el proceso de instrumentación y el de conceptualización dependen uno del otro y enfatiza específicamente:

- La importancia de la noción de *esquema,* analizando la acción instrumentada en la que acto y pensamiento están relacionados.

[318] Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, París (citado en Trouche, 2000b). De hecho, es él quien introduce los términos *artefacto* (herramienta técnica) e *instrumento* (que nace de la confrontación entre una herramienta, con sus potencialidades y restricciones, y un individuo, con sus conocimientos y hábitos de trabajo anteriores).

[319] Y cuya significación viene dada por el acto global que tiene por objetivo operar unas transformaciones sobre el objeto de la actividad (Rabardel, ver nota anterior).

- La importancia de la noción de *metaconocimiento*[320], analizando diferentes comportamientos de los estudiantes. Además, muestra una tipología de comportamientos de estudiantes y una lista de esquemas.

Por otro lado, también se distinguen los ***esquemas sociales***: "*elaborados y compartidos en comunidades de prácticas y pueden originar la apropiación por parte de los sujetos; incluso vienen bajo procesos de entrenamiento*". Se dice que los esquemas tienen siempre una parte social y, por tanto, <u>la génesis instrumental siempre tiene aspectos individuales y sociales</u>.

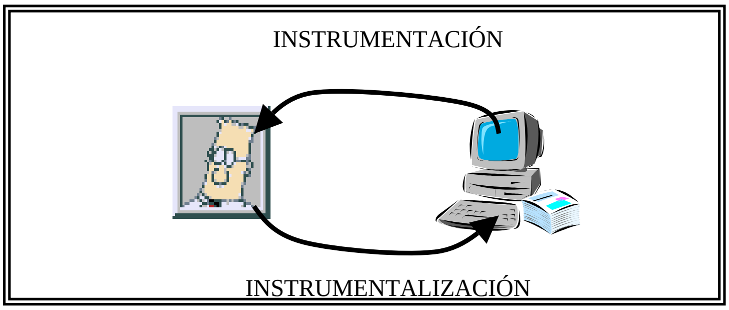
El balance entre estos dos aspectos depende de:

- Factores materiales (es obvio que las características de las pantallas de las calculadoras favorecen el trabajo individual más que las pantallas de un ordenador, que permite el trabajo en pequeños grupos).
- Disponibilidad de las herramientas (normalmente los estudiantes sólo utilizan calculadoras en las clases de Matemáticas, a veces prestadas o a veces propias).
- La actitud y el uso de la herramienta por el profesor y la integración que se construya en las actividades de aula.

Por tanto, un instrumento es el resultado de la construcción por un sujeto, en una comunidad de práctica, a partir de una herramienta dada, a través de un proceso, la génesis instrumental.

La génesis instrumental trabaja en dos direcciones:

* En la primera dirección, la génesis instrumental se dirige hacia el artefacto, cargándolo progresivamente con potencialidades; se llama a este proceso **instrumentalización** del artefacto.
* En la segunda dirección, la génesis instrumental se dirige hacia el sujeto y lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva a tareas dadas. Esto último es lo que se denomina propiamente **instrumentación**.



En sus experimentaciones, Guin y Trouche (1999) distinguen dos fases distintas de la génesis instrumental. La primera es la fase de descubrimiento de los distintos comandos, sus efectos y su organización, caracterizada por una fuerte dependencia en la máquina y donde los estudiantes a menudo no consideran otras fuentes de información; apenas se intenta comprender las herramientas, lo que revela un primer nivel de instrumentación con una gran diversidad de

[320] Trouche (2000b) aclara que un sujeto no se presenta ante una herramienta completamente "nuevo". Él tiene ya construidos conocimientos sobre su entorno y también sobre él mismo, los *metaconocimientos*. En sus trabajos, se da un papel central a este control que el individuo hace de su propia actividad.

estrategias y técnicas. Tan pronto como los comandos ganan significado matemático, los estudiantes centran su atención en un número limitado de éstos. Esta segunda fase es una fase de organización, que se caracteriza por una actitud reductora hacia las primeras estrategias y técnicas. Sucede simultáneamente con una toma de conciencia progresiva de las limitaciones efectivas y los usos potenciales y una creencia decreciente en los resultados de la máquina. Los estudiantes comienzan a organizar sus acciones en relación con menos comandos y a coordinarlas conscientemente, unas con otras y con las otras herramientas de información, por medio de lo que llaman *comprender las herramientas*. El estudiante comienza a considerar toda la información inmediatamente disponible, no sólo de la calculadora, sino también de otras fuentes, y a buscar consistencia matemática entre ellas. El perfil matemático de los estudiantes determina cuánto tiempo tomará llegar más allá del primer nivel.

6.4.3. La orquestación instrumental como guía para la génesis instrumental

Evidentemente, la mera introducción de un recurso tecnológico en el aula no va a mejorar de forma instantánea la comprensión de los estudiantes. Los profesores son investidos de una responsabilidad importante dentro de la elección de situaciones para acompañar el proceso individual de instrumentación que transformará el artefacto en un instrumento matemático eficaz. Por tanto, la intervención del profesor dentro de este proceso supone las condiciones **ecológicas**, esto es, una **reorganización** del espacio y del tiempo de estudio en fases de naturaleza diferente para una articulación apropiada del trabajo lápiz-papel y del trabajo con la herramienta tecnológica. Más allá de la elección de las situaciones, el papel del profesor está fuertemente modificado, pero ciertamente no es simple: él debe subrayar las contradicciones no percibidas, incitar a una reflexión para encontrar una coherencia matemática, ayudar a los estudiantes a acceder a esta coherencia, introducir los nuevos conocimientos matemáticos necesarios y administrar las dificultades que surjan dentro del nuevo entorno.

La observación de los estudiantes revela, en general, un trabajo esencialmente mono-registro (gráfico, algebraico o numérico) y las dificultades de conversión entre registros semióticos siguen frecuentemente subestimadas por los profesores. Igual que Duval[321] alienta el favorecer una diferenciación y coordinación de representaciones externas entre diferentes registros semióticos, se intenta organizar un trabajo análogo para las diferentes aplicaciones de las herramientas tecnológicas insistiendo en las pasarelas entre aplicaciones. Esta reorganización del tiempo y del espacio de estudio puede, pues, ser una motivación para adquirir los conocimientos matemáticos necesarios que se vislumbran para convertir el artefacto en un instrumento matemático eficaz: el rol del profesor se ve como el director de orquesta de la socialización de este proceso de instrumentación.

Trouche (2002) introduce el término *orquestaciones instrumentales* para señalar la necesidad (para una institución dada: un profesor en su clase, por ejemplo) de una *guía externa* de las génesis instrumentales de los alumnos.

Esta necesidad raramente se tiene en cuenta; en los artículos de investigación pocas veces se da información sobre la organización ambiental (la organización del espacio y el tiempo del profesor y los alumnos, ...).

Una *orquestación instrumental* viene definida por *configuraciones didácticas* (como la disposición de las herramientas disponibles en el entorno, una disposición para cada fase del tratamiento matemático) y por los *modos de explotación* de estas configuraciones.

[321] Ver la Sección 2.2.

Para cada orquestación se distinguirán los *objetivos principales*, los fundamentos indispensables para la orquestación, y los *objetivos secundarios*, ligados a los modos de explotación escogidos.

La orquestación instrumental puede actuar en distintos niveles:

- El primer nivel, material (el nivel de la herramienta en sí).
- El segundo nivel (psicológico) de un instrumento o un conjunto de instrumentos.
- El tercer nivel (meta-nivel) de la relación de un sujeto con un instrumento o un conjunto de instrumentos.

Ejemplo de orquestación instrumental de segundo nivel:

El uso de calculadoras personales plantea el problema de la socialización de las acciones y producciones de los estudiantes. Con el uso de una pantalla de proyección se puede proyectar la pequeña pantalla de una calculadora en una gran pantalla, que toda la clase puede ver.

Una orquestación particular empleada hace descansar su configuración en la devolución de un rol particular a un alumno, el alumno *sherpa*[322], que pilota la calculadora proyectada. Él será utilizado, tanto por la clase como por el profesor, como referencia, guía, auxiliar y mediador.

Esta orquestación favorece la gestión colectiva de parte de los procesos de instrumentación e instrumentalización: lo que un estudiante hace con su calculadora es visto por todos, lo que permite comparar las distintas técnicas instrumentadas y da al profesor información de los esquemas de acción instrumentada construidos por el alumno *sherpa*.

Otras ventajas son:

- El profesor es responsable de guiar, a través de la calculadora del estudiante, las calculadoras de la clase entera. Así, el profesor cumple las funciones de un director de orquesta.
- Para su enseñanza, el profesor puede combinar los resultados lápiz-papel obtenidos en la pizarra y los obtenidos por el alumno *sherpa* en la pantalla. Esto facilita, incluso para los estudiantes, la combinación del trabajo lápiz-papel y con calculadora en sus respectivos sitios.

Evidentemente, esta nueva organización conlleva una reorganización del tiempo de estudio: las distintas fases (observación, confrontación de resultados, testeo de diferentes estrategias) son más largas. El profesor tiene que mantener en mente tanto los potenciales como límites de la calculadora. Esto requiere del profesor tener un conocimiento cuidadoso de la calculadora.

Algunos modos de explotación de esta estructura se pueden considerar. El profesor puede organizar las fases de trabajo en distintos tipos:

- A veces la calculadora está apagada (incluso la proyectada): es momento del trabajo lápiz-papel.
- A veces las calculadoras están encendidas, así como la proyectada, y el trabajo se guía estrictamente por el alumno *sherpa* bajo la supervisión del profesor (los alumnos

[322] El término *sherpa* se refiere, en realidad, a la persona de un pueblo de Nepal, cuyos habitantes suelen participar como guías y porteadores en las expediciones en el Himalaya. Por extensión, se usa el término “guía o porteador *sherpa*”.

deben tener en sus pantallas exactamente lo mismo que se está proyectando). Los procesos de instrumentación e instrumentalización están limitados en gran medida.

- A veces las calculadoras están encendidas, así como la proyectada, y el trabajo es libre en un tiempo dado. Los procesos de instrumentación e instrumentalización están relativamente limitados (por el tipo de actividades y refiriéndose a la calculadora del alumno *sherpa*, que está visible).
- A veces las calculadoras están encendidas y el proyector apagado. Los procesos de instrumentación e instrumentalización están débilmente limitados.

Otras variables a definir son: ¿jugará el rol de *sherpa* el mismo estudiante durante la sesión entera o, según los resultados anunciados, se debería conectar otra calculadora al proyector?, ¿debe el alumno *sherpa* sentarse en primera fila, o debe estar en su sitio habitual?, ¿juegan este rol todos los estudiantes por turnos, o sólo debe privilegiarse a un estudiante concreto?

Guin y Trouche (1999) señalan que las relaciones tradicionales del aula son alteradas y aparecen nuevas relaciones entre el estudiante *sherpa* y los otros, así como entre el estudiante *sherpa* y el profesor. Este nuevo contexto favorece los debates en la clase, señala los distintos comportamientos de los estudiantes y es esencial para contra-equilibrar las relaciones más bien individuales que los estudiantes tienden a tener con su pequeña pantalla. Esta organización también permitió al profesor ser más consciente de los distintos pasos en el proceso de apropiación de los estudiantes del instrumento y refuerza el aspecto social de esta construcción.

En cuanto a la institucionalización, afirman que el profesor tiene nuevos roles. Por ejemplo, comparar distintas estrategias, señalar la contribución de cada equipo y sugerir cuestiones diseñadas para hacer que los estudiantes discutan los resultados inconsistentes y busquen una consistencia matemática en los resultados encontrados. Esta síntesis colectiva es crucial porque permite al profesor proponer la institucionalización (reconocimiento de las producciones de los estudiantes que deben ser retenidas como conocimiento) y la descontextualización del conocimiento matemático deseado.

Esta nueva forma de contrato didáctico requiere de tiempo para convertirse en una característica aceptada del trabajo del estudiante. De forma similar, ser consciente de la necesidad de una prueba matemática en este nuevo entorno educativo no es inmediata para los estudiantes: no es hasta más tarde que los estudiantes consideran las calculadoras como una ayuda para conjeturar o comprobar, pero no como una exención de la prueba. Por tanto, la administración del trabajo experimental en el aula es un proceso a largo plazo que requiere de tiempo considerable para observar, intercambiar y reflexionar sobre los datos recogidos. Varias dificultades emergen en confrontación con las dificultades institucionales, requiriendo el diseño de nuevas reglas específicas.

Los estudiantes deben ser conscientes de las limitaciones y potenciales de la herramienta. Por ejemplo, en estudiantes de bajo nivel el hallazgo de un resultado sorprendente no necesariamente inducirá una pregunta. Hay que reconocer que los estudiantes de menor nivel a menudo descartan la idea de comprender el significado de los comandos y lo que hacen. En consecuencia, se observan algunas estrategias de evasión:

- Traducciones automáticas de las preguntas en términos de traducciones en comandos del enunciado, palabra por palabra.
- Generalizar la validez de un comando (por ejemplo, el uso del comando *Solve* para resolver una inecuación, aunque los estudiantes saben que este comando es específico para ecuaciones).

- Intentos aleatorios y *zapping* a otros comandos en el mismo menú.

Sin duda, este comportamiento es distinto del que se tiene en un entorno lápiz-papel, donde intentar otra estrategia requiere de un pensamiento cuidadoso. La principal diferencia entre los dos entornos es precisamente lo que ocurre con la calculadora: el estudiante pierde conciencia de la tarea y hay poco trabajo matemático en su actividad. Es notable el hecho de que la calculadora no induce automáticamente a un mayor cuestionamiento y actitud reflexiva[323].

Sea como sea, en las experimentaciones realizadas se observa, para la mayoría de los estudiantes, los efectos inducidos por el proceso de instrumentación socializada dentro del marco experimental:

- Una **diversificación**, un **equilibrio** del punto de vista de los diferentes metaconocimientos puestos en marcha o llevados a cabo dentro de la actividad matemática.
- Una modificación de la concepción de las calculadoras y su utilización:
    - "*Antes de este año, una calculadora me parecía inútil, no diría que mi calculadora me ha sido indispensable, pero es una buena herramienta de verificación*".
    - "*La calculadora me permite conjeturar*".
    - "*Ellas se han vuelto para mí unas verdaderas herramientas que ayudan a la reflexión*".
    - "*Es una herramienta útil y eficaz, pero no reemplaza una reflexión metódica*".
- Se observa también una **modificación profunda de la concepción de las Matemáticas y de su enseñanza**.
    - "*La mezcla teoría-práctica-calculadora vuelve más apasionantes a las Matemáticas*".
- El marco de estudio ha permitido también un registro de los puntos de vista de los diferentes estudiantes y un reequilibrio de los diferentes comportamientos dentro de la clase.

Adaptado de Guin y Trouche (1998).

6.4.4. OBSTÁCULOS EN EL USO DE CAS

El uso de un CAS no es tan sencillo como podría parecer. Una pregunta que surge de forma natural, teniendo en cuenta los elementos de la génesis instrumental, es si los estudiantes pueden desarrollar estos procesos sin encontrar complicaciones. En otras palabras: ¿Qué obstáculos encuentran los estudiantes cuando trabajan en un entorno de cálculo simbólico y cómo puede manejarlos el profesor?

En este sentido, Drijvers (2002) da la siguiente definición de obstáculo[324] dentro del trabajo con una herramienta tecnológica:

<u>Obstáculo:</u> Barreras provistas por el CAS que impiden al estudiante desarrollar el esquema de utilización que tiene en mente.

Esta definición se completa añadiendo que, como consecuencia, el obstáculo detiene el proceso de paso entre matemática "pura" y la situación-problema. Los obstáculos pueden ser técnicos, pero a menudo tienen una componente matemática o conceptual. El lenguaje también puede estar implicado: el cambio de vocabulario o notación puede ser (parte de) un obstáculo.

Bajo los fundamentos de la teoría de la instrumentación, esta definición podría ser reformulada de la siguiente forma (Drijvers, 2002):

---

[323] Artigue, M. (1997). Computer environments and learning theories in mathematics education, en *Teaching Mathematics with Derive and the TI-92, Proceedings of the International Derive and TI-92 Conference* (Barzel, B., ed.), Bonn, pp. 1-17. Citado en Trouche (2002).

[324] Propuesta inicialmente en Drijvers (2000).

Teoría de la instrumentación

Un obstáculo sucede cuando las partes técnica y conceptual de un esquema de instrumentación no están equilibradas, ya sea debido a que la técnica no está acompañada por un significado apropiado y concepción, o porque las habilidades técnicas para la ejecución de la idea conceptual están ausentes[325].

En este sentido, los obstáculos son oportunidades para aprender. El hecho de hacer explícitos los obstáculos encontrados y tratar de superarlos conduce a un desarrollo conceptual.

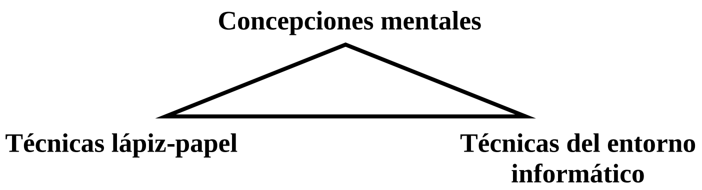
Drijvers señala dos tipos de obstáculos:

* Los **obstáculos globales** se relacionan con poder hacer que la máquina trabaje para el usuario de forma general y con la relación entre el plan de resolución de problemas y la implementación en el entorno del ordenador.
* Los **obstáculos locales** se relacionan con un tópico matemático en particular y la forma en que éste es tratado por el CAS.

Intentando relacionar su definición con otras definiciones ya existentes de obstáculo, se arrojan las siguientes preguntas:

- ¿Vienen los obstáculos dados exclusivamente por el uso de un CAS?
- ¿O son más bien obstáculos cognitivos ya existentes que simplemente se vuelven manifiestos y más importantes cuando se trabaja en un entorno de cálculo simbólico?

En general, los estudiantes que comienzan a trabajar con un CAS ya tienen bastante experiencia con técnicas en otro medio: las técnicas "a mano" usando lápiz y papel. Por tanto, éste es su marco de referencia, por lo que Drijvers (2002) considera apropiado considerar la relación entre las nuevas "técnicas de la pantalla" y las antiguas "técnicas de lápiz-papel":



En oposición a lo que se puede pensar, las técnicas ya conocidas no desaparecen o pierden relevancia en un entorno CAS[326]. Los tres vértices del triángulo dibujado deberían estar conectados y apoyarse unos a otros.

A la hora de manejar una herramienta tecnológica de forma eficiente, entre las técnicas de lápiz-papel y del entorno informático han de darse dos condiciones: la técnica del entorno

[325] Esta definición es más simétrica que la anterior, pues no "responsabiliza" únicamente al CAS de los problemas que surgen. Además, también sugiere que el desarrollo conceptual forma parte del proceso de instrumentación en general y de los procesos de superación de los obstáculos en particular.

[326] Drijvers (2002) cita como ejemplo el caso de una investigación desarrollada en Francia. En ésta se probó que no había mejorías claras sobre los aspectos técnicos del trabajo ni una mejora definida en la reflexión conceptual de los estudiantes. En su lugar, las dificultades técnicas en el uso del CAS sustituyeron a las dificultades habituales que los estudiantes encuentran en los cálculos lápiz-papel.

informático ha de ser **congruente** con la técnica lápiz-papel y la técnica del entorno informático ha de ser **transparente** para el estudiante.

*** Congruencia:** La técnica desarrollada en los dos entornos ha de ser reconocida como tal y percibida como distintas implementaciones de la misma técnica, en lugar de dos técnicas distintas no relacionadas[327]. Para ello, hay que tomar en cuenta tanto la flexibilidad del entorno lápiz-papel como la potencia del entorno informático.

* **Transparencia:** El estudiante es capaz de mirar a través de la forma en que el entorno informático encuentra y muestra sus resultados basándose en su experiencia en el entorno lápiz-papel. Algunas características del *software*, tales como la presentación de resultados de forma comprensible y el proporcionar información sensible a errores eventuales podrían promover esta transparencia.

Bajo estas dos condiciones, los estudiantes pueden relacionar los distintos tipos de técnicas, por ejemplo transfiriendo sus aproximaciones para la resolución de problemas en lápiz-papel al entorno informático, o utilizando las notaciones del entorno informático en su trabajo lápiz-papel. Sin embargo, a estas dos condiciones se oponen otras[328]:

- La *pseudo-transparencia* de los CAS: significa que la técnica en el entorno CAS es cercana a la técnica del entorno lápiz-papel, aunque no es exactamente la misma, con diferencias a veces bastante sutiles.
- El fenómeno de *doble referencia*: es una consecuencia del anterior. Muchas veces los estudiantes no descubren matemáticas, como se espera, sino que están descubriendo el *software*, con todas sus peculiaridades. Se refiere a las representaciones específicas del CAS en vez de referirse a los conceptos matemáticos.
- El carácter de *caja negra* de los CAS: puede impedir que el estudiante vea la congruencia entre el uso de la máquina y las técnicas lápiz-papel. Parece ser un obstáculo para los estudiantes, que no se sienten muy cómodos cuando no pueden realizar ciertas técnicas a mano y tienen que "confiar en la tecnología" sin tener medios de verificación.

Algunos obstáculos que Drijvers (2002) señala en su trabajo los podemos clasificar de la siguiente forma:

Locales		Globales	
1	La diferencia entre las representaciones algebraicas provistas por el CAS y las que los estudiantes esperan y conciben como "simples".	5	Las limitaciones del CAS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudar al CAS a superar estas limitaciones[329] → Convertir el útil en un instrumento.

[327] Esta condición parece relacionada con la *congruencia* que menciona Duval (2004; ver Sección 2.2.4.) y que puede producir el obstáculo de la conversión.

[328] Ya descritas en la Sección 6.3.

[329] En estos casos, se hace necesaria una cooperación entre la habilidad (o conocimiento práctico) del usuario y las capacidades del CAS para hallar una solución.

2	La diferencia entre los cálculos numéricos y algebraicos y la forma implícita en que el CAS maneja la diferencia.	6	La incapacidad de decidir cuándo y cómo el uso del CAS puede ser útil[330] $\rightarrow$ Convertir el útil en un instrumento.
3	La concepción flexible de variables y parámetros que el uso de un CAS requiere.	7	El carácter de "caja negra" del CAS.
4	La tendencia a aceptar sólo soluciones numéricas y no soluciones algebraicas.	11	La difícil transferencia entre las técnicas del CAS y lápiz-papel debidas a la ausencia de congruencia entre las técnicas en ambos medios. Algunos factores para este fenómeno son el carácter de "caja negra" y la no-transparencia de la herramienta tecnológica.
8	La concepción limitada de *sustitución algebraica*.	12	La dificultad para interpretar las salidas del CAS.
9	La concepción limitada de *solución algebraica*.		
10	La concepción de una expresión como un proceso.		

En primer lugar, ha de quedar claro que el inventario mostrado de obstáculos locales es dependiente del área de estudio. En este caso, se han mostrado obstáculos relativos al estudio del Álgebra. Sin embargo, se conjetura que éstos tienen un carácter dual que sobrepasa las dependencias con el tema de estudio. Todos estos obstáculos que aquí se presentan pueden aparecer de forma aislada o interferir unos con otros. Por otro lado, estos obstáculos muestran las fuertes relaciones entre las dificultades técnicas y conceptuales.

De forma general, los obstáculos locales llevan a la distracción y pérdida de la estrategia global de solución de un problema.

Los obstáculos más serios muestran cuándo los problemas técnicos están relacionados con la concepción de las matemáticas implicadas.

También hay que tomar en cuenta que los obstáculos pueden crear fuertes emociones que impiden al estudiante avanzar en su trabajo.

De esta forma, el profesor ha de motivar que los obstáculos ofrecen oportunidades para el aprendizaje. Trabajar en superar un obstáculo a menudo significa trabajar también en el desarrollo conceptual de las matemáticas implicadas.

6.5. DISEÑO DE LAS SESIONES CON *MAPLE V*

6.5.1. INTRODUCCIÓN

Al diseñar nuestra Ingeniería Didáctica, se planteó como objetivo el uso de las nuevas tecnologías en ella[331], además de la conjugación de los registros gráfico y simbólico y el recurso explícito a los conocimientos sobre series e integrales. Apoyándonos en los resultados de otros investigadores, consideramos que el uso de un CAS puede ser de utilidad para favorecer las coordinaciones entre los registros gráfico y algebraico por parte de los estudiantes, además de para operacionalizar algunos resultados institucionalizados en las sesiones de Ingeniería.

[330] Drijvers (2002) señala que, normalmente, los usuarios noveles no tienen el sentido de lo que se puede esperar razonablemente de la herramienta.

[331] Véase la Sección 1.1.

De acuerdo con Artigue (1999)[332], opinamos que el uso de la tecnología informática (después de haber reflexionado cuidadosamente sobre su uso) puede jugar un importante papel en el desarrollo de una articulación flexible entre los registros algebraico y gráfico y hacer de esta articulación un instrumento eficiente de la actividad matemática. Obviamente, la viabilidad de estas nuevas estrategias de enseñanza requiere de cambios importantes en el estatus del registro gráfico, que han sido promovidos en el desarrollo de las sesiones de Ingeniería.

Sin embargo, como se señala en la Sección 1.2., a pesar de la gran cantidad de trabajos que investigan en la actualidad el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza (y usando, en particular, nuestra perspectiva, *la génesis instrumental*), la mayoría se centran en el uso de calculadoras simbólicas y no en el uso de programas informáticos y los resultados sobre la socialización de la *génesis instrumental*, en su mayoría, aparecen en contextos de calculadoras simbólicas. Debido a esto, el diseño de las condiciones ecológicas de nuestras sesiones con *Maple* se reveló más laborioso de lo esperado y se decidió no recurrir al *software* como mediador y productor de conocimientos matemáticos susceptibles de institucionalización, sino como una herramienta que permitiese operacionalizar algunos resultados teóricos institucionalizados en clase e ilustrar algunos razonamientos.

El programa *Maple V* ha sido elegido por varias razones[333], entre las que están su potencial gráfico y analítico. Otro motivo para su elección es su disponibilidad en nuestras aulas de cómputo y su menor dificultad de sintaxis en comparación con otros programas, en particular el *Mathematica*, que facilitará el trabajo con los ejemplos y contraejemplos elegidos y no dificultará demasiado su introducción a los estudiantes (que se realiza en la primera sesión). Por otro lado, las experiencias ya llevadas a cabo en nuestra Universidad con su uso (véase Camacho y González-Martín, 2002a) han producido reacciones positivas en los estudiantes.

Por otro lado, el desarrollo de la Ingeniería Didáctica nos reveló que el nivel académico de los estudiantes era más bajo de lo previsto, observándose fuertes carencias algorítmicas y ausencias de significado importantes. Esta otra condición también resultó decisiva en el diseño de nuestras sesiones, confirmando la opción de aprovechar el *software* para reforzar resultados teóricos y operacionalizar el registro gráfico.

Además, como se explica en la Sección 6.5.2., la utilización de las aulas de informática en nuestra Facultad no es inmediata, por lo que no es fácil planificar cuándo se podría utilizar.

Después de estas acotaciones, los objetivos principales de nuestra experimentación con el uso de *software* son[334]:

1. Reforzar el uso de criterios mediante la resolución de problemas más difíciles de resolver con lápiz-papel e incorporando funciones no prototípicas.
2. Mostrar las limitaciones del *software* para decidir la convergencia de algunas integrales, lo que motiva el interés del aprendizaje y el uso de criterios.
3. Reforzar el uso del registro gráfico en las actividades y revisar contenidos institucionalizados.
4. Analizar si es posible adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la *génesis instrumental* a un contexto de aprendizaje con ordenadores.

[332] Citado en la Sección 1.1.

[333] Véase también González-Martín y Camacho (2005b).

[334] Véase la Sección 1.2. para más detalles.

5. Analizar la viabilidad para la observación de *génesis instrumentales* y la posibilidad de generalizar algunos obstáculos observados en entornos de calculadoras gráficas en un contexto de aprendizaje con ordenadores.

6.5.2. DISEÑO DE LA EXPERIMENTACIÓN

RESTRICCIONES INSTITUCIONALES

La organización de las sesiones con el ordenador implicó aliviar las dificultades institucionales, ya que en nuestra Facultad las aulas de ordenadores se encuentran altamente ocupadas; la sincronización del recurso al aula de ordenadores y del recurso al aula habitual se hacía muy complicada, por lo que podía peligrar el diseño de nuestra Ingeniería. Las fechas en que se desarrolla nuestra Ingeniería se concretan durante el segundo semestre del curso 2002/03, por lo que las aulas de ordenadores ya están reservadas por otras asignaturas; esta razón apoya la decisión de diseñar las sesiones con la máquina como complemento a las clases teóricas, en vez de diseñar secuencias teóricas donde se utilice el ordenador de forma activa. De esta forma, al ser las sesiones con *Maple* un complemento, el momento del uso de los ordenadores se vuelve más flexible (quedando como cuestión abierta para posteriores realizaciones de la Ingeniería el uso activo de la tecnología).

Aparte de las restricciones físicas, hay que considerar que los estudiantes de Primer Curso no conocen, en general, *software* matemáticos, lo que obliga a incorporar en el diseño de las sesiones una breve introducción a su funcionamiento y sintaxis, lo que delimita la extensión de contenidos a tratar durante estas sesiones. Se intenta también que haya el menor número posible de estudiantes por ordenador para favorecer las experimentaciones individuales, aunque se pueda trabajar en pequeños grupos.

Debido a las restricciones de horarios y de disponibilidad de los estudiantes, se organizan dos sesiones de trabajo con los ordenadores:

- La primera, con una duración de una hora y media, desarrollada en la tarde del jueves 5 de junio. Su duración es mayor, pues se tiene en cuenta que ha de presentarse el *software* y su utilización básica y dejar que los estudiantes tengan su toma de contacto con la máquina (promoviendo la instrumentación de la máquina), lo que restringe las elecciones tomadas[335].
- La segunda, con una duración de una hora, desarrollada en horario de clase el lunes 9 de junio.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DISEÑO

En primer lugar, dadas las características cognitivas de los estudiantes (observadas durante el desarrollo de las sesiones de ingeniería didáctica), el tiempo del que se dispone y la necesidad de una socialización de la toma de contacto con el programa, la *gestión* de las sesiones con *Maple V* es completamente diferente de la seguida en el aula.

A lo largo de las dos sesiones no se produce un funcionamiento *a-didáctico*, no hay un problema *devuelto* al estudiante, por lo que no se han diseñado *medios* para estas sesiones. En la primera sesión, después del acercamiento al *software*, se muestra a los estudiantes un problema

[335] Se observa que se reproducen algunos de los fenómenos descritos por Artigue (2002b), en su descripción de la primera ingeniería didáctica (ver Sección 6.3.).

global, consistente en superar las limitaciones del programa para decidir el carácter de determinadas integrales. Sin embargo, el trayecto hasta la presentación del problema está fuertemente controlado por el enseñante y, en general, se trata de un escenario *rigurosamente pilotado*: el *papel del enseñante* es *decisivo* y, aunque los estudiantes tienen autonomía maximal al final de cada fase (instrumentación del *software* y búsqueda de un método para estudiar el carácter de las integrales presentadas), su trabajo está estrechamente ligado al del profesor.

En la primera sesión se dedica un tiempo considerable a la instrumentación del *software*. Esta fase se desarrolla de forma colectiva, con momentos de trabajo individual-grupal. La problemática que se ha escogido para la segunda fase, tras la presentación, consiste en mostrar las limitaciones del programa para decidir la convergencia de varias integrales, considerando que este fenómeno puede motivar a los estudiantes a operacionalizar los conocimientos institucionalizados en búsqueda de una solución al problema. Por otro lado, consideramos que el trabajo matemático implicado es accesible, con la ayuda de la máquina, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos e instrumentales de los estudiantes (en la primera fase se presentan los comandos necesarios para desarrollar la segunda).

La segunda sesión tiene un carácter más "complementario" de los contenidos de las sesiones en el aula. En la primera fase se pretende visualizar la serie asociada a una función y dejar que el programa realice los cálculos, mientras los estudiantes se centran en la visualización de las acotaciones superiores e inferiores. En la segunda fase, se realiza un acercamiento a la convergencia de las integrales $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ y $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$, que es un invariante en los programas de la asignatura. Después de constatar las dificultades operativas de un gran número de estudiantes, se ha considerado que realizar parte de la demostración con la ayuda del ordenador puede ayudar a centrar la atención de los estudiantes en los aspectos conceptuales más importantes de la prueba.

LA ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL

Evidentemente, no se espera que la introducción del recurso tecnológico mejore instantáneamente la comprensión de los estudiantes; es por ello que se han elegido cuestiones ya tratadas en el aula, de forma que sea más sencillo para los estudiantes realizar conexiones con el conocimiento institucionalizado (en las dos sesiones) y operacionalizar los criterios de convergencia (en la primera sesión).

Para favorecer los procesos individuales de instrumentación se han organizado las condiciones ecológicas, esto es, temporales y espaciales, en fases distintas. El rol del profesor, entre otras, ha de favorecer las pasarelas entre los registros simbólico y gráfico en el trabajo con la máquina, como una continuación del trabajo de coordinación de registros realizado en la Ingeniería.

Por otro lado, el profesor distribuye también los distintos momentos para optimizar la organización ambiental y guiar externamente las génesis instrumentales de los estudiantes (en particular, en la primera sesión). Las elecciones globales tomadas son las siguientes:

- Los estudiantes ocuparán un ordenador cada uno (salvo que el número de estudiantes supere el de ordenadores funcionales, caso en que algunos estudiantes compartirán máquina). Esta condición no afectará (salvo por impedimentos físicos obvios) el trabajo en pequeños grupos, en particular con los compañeros situados al lado[336].

[336] En las salas de ordenadores que se usan, los ordenadores se encuentran en filas de cinco o seis, una tras otra.

- Para promover la socialización de las distintas estrategias, se proyectará la pantalla de un ordenador en un panel de proyección, siendo este ordenador pilotado por un estudiante *sherpa*. Este estudiante será utilizado, tanto por la clase como por el profesor, como referencia, guía y auxiliar.
- El rol de *sherpa* lo jugarán estudiantes distintos en cada sesión, escogidos al azar. En cada sesión el ordenador conectado al proyector será diferente, y el estudiante que lo ocupe será designado *sherpa*. Por cuestiones prácticas, no se cambiará de *sherpa* a lo largo de una misma sesión, ya que este cambio supone desconectar el proyector, esperar a que se enfríe, reiniciar otro ordenador y conectarlo.
- Por cuestiones prácticas (longitud de los cables, disposición del laboratorio...), el ordenador conectado a la pantalla estará en la primera fila, aunque no aislado. El estudiante *sherpa* puede interactuar normalmente con los compañeros sentados en su misma fila.
- El profesor mostrará a los estudiantes no sólo los potenciales del programa, sino también algunas restricciones para motivar el trabajo con resultados matemáticos.
- En determinados momentos, el profesor guiará las acciones de toda la clase tomando como referencia el ordenador del estudiante *sherpa*.
- El profesor, de forma general, combinará el trabajo en la pizarra (presentación de comandos, revisión de resultados, razonamientos...) y los resultados obtenidos en la pantalla del estudiante *sherpa*. Estos trabajos serán combinados con fases de trabajo personal de los estudiantes, tanto de experimentación y familiarización con el *software* como de búsqueda de soluciones a los problemas propuestos.
- La pantalla proyectada, por razones de tiempo, permanecerá siempre encendida. En algunos momentos el profesor guiará el trabajo de toda la clase supervisando el trabajo del estudiante *sherpa* y en otros el trabajo será libre, aunque siempre estará visible la pantalla proyectada.

6.5.3. DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES

En esta Sección mostramos el análisis *a priori* de las sesiones desarrolladas en el aula de ordenadores. Al ser sesiones con el trabajo de los estudiantes más limitado, su diseño coincide, en general, con su desarrollo.

Cada sesión se divide en dos fases distintas y, antes de describirlas, se muestran sus objetivos generales y las formas de trabajo previstas. Los análisis *a posteriori* de estas sesiones se muestran en la siguiente Sección.

Algunos resultados parciales del análisis de las sesiones se presentan en González-Martín (2005b).

PRIMERA SESIÓN

Fase 1:

Duración prevista:
40 minutos, aproximadamente.

Objetivos:

- Presentación de los elementos básicos, y los comandos que se utilizarán en la segunda fase, del *Maple V*.

- Operacionalización de estos comandos y comienzo de la instrumentalización del programa y de los procesos de instrumentación.
- Prestar atención a la sintaxis del programa y comentar algunos errores usuales a los estudiantes.
- Observar los errores que aparezcan y tratar de establecer relaciones con los obstáculos distinguidos por Drijvers.

Formas de trabajo:

- El profesor combinará el trabajo en la pizarra (para presentar los diferentes comandos y hacer aclaraciones) con la referencia a la pantalla proyectada del estudiante *sherpa*, guiando así el progreso de la clase.
- Los estudiantes alternarán el trabajo lápiz-papel para anotar los comentarios sobre los comandos con el trabajo en el ordenador. Este último trabajo se puede realizar de forma individual o comparando los resultados con los compañeros más cercanos, en pequeños grupos. En algunos momentos su trabajo estará fuertemente limitado, debiendo ejecutar los comandos preparados en el fichero o lo que se muestre en la pantalla proyectada, y en otros será más libre, pudiendo elegir libremente los elementos con los que trabajarán y producir sus propios ejemplos.

Descripción:

Nociones básicas:

En primer lugar, el profesor presenta a los estudiantes el programa y algunas de las aplicaciones de éste. Tras esto, se hace una presentación del entorno del programa, los modos *texto* y *matemático* y cómo *Maple* presenta las entradas (*inputs*) y las salidas (*outputs*) y la función del "**;**". Finalmente, se presenta la sintaxis de las operaciones básicas y se pide a los estudiantes que realicen los siguientes cálculos:

$2 + 5$	Este ejemplo permite observar cómo *Maple* devuelve las respuestas a los cálculos y el formato que utiliza.
$10/3$	Este ejemplo permite introducir la noción de *aritmética exacta* y comentar las ventajas de los CAS frente a otras herramientas. La posibilidad de trabajar con valores aproximados se consigue con la orden ***evalf***.
$2.(3 + 5) + 2.\frac{5}{3}$	Este ejemplo permite introducir el uso de los paréntesis y estudiar las diferencias en los resultados si no se utilizan.
$2^3 + 3.5 - \frac{3^2}{5}$	Este ejemplo permite combinar las operaciones básicas y, como el anterior, notar las primeras diferencias de sintaxis: el exponente se introduce con el **^** y el producto con el *****.
$\sqrt{3} - \frac{3}{5}$	Aparecen más diferencias con la escritura habitual, en este caso para los radicales y permite introducir cómo trataría *Maple* raíces generales.

Se comprueban los resultados y se comparan los resultados diferentes (si los hubiera), analizando qué se ha escrito de forma diferente. Posteriormente, para operacionalizar la orden ***evalf***, se propone calcular el valor exacto y una aproximación de $\sqrt{5} + \frac{3}{7} - 3^{(-2)}$. Con este ejemplo se introduce también el operador "**%**", que permite recuperar el último resultado ejecutado (aclarando con un ejemplo en la pizarra que el último resultado ejecutado no es, necesariamente, el de la línea inmediatamente anterior).

Se finaliza con la presentación de las constantes y símbolos implementados en *Maple*: **π, *e*, *i*,** ∞.

Funciones con Maple:

El profesor muestra combinando la pantalla proyectada y la pizarra las principales funciones implementadas en *Maple* y su sintaxis, remarcando el uso de paréntesis. Se da un tiempo para implementar las siguientes operaciones:

$\sin x - \frac{3^x}{5}$	
Valor exacto de $\tan(\pi) - \sqrt{3}.e^{\pi}$	
Escritura y cálculo de $e^{i.\pi} - 1$	Se pretende que los estudiantes comiencen a conectar el trabajo realizado en la sesión con sus conocimientos matemáticos.

Tras este momento, se explica la sintaxis para definir funciones en *Maple* y se pide a los estudiantes que definan la función $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \sqrt{x}$ y la evalúen para x = 1, 10, π. Tras comprobar que esta sintaxis se ha entendido, se da un tiempo a los estudiantes para que definan libremente dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, y el profesor aprovecha para acercarse a ellos y ver qué tipo de errores cometen.

Finaliza este bloque con la introducción de la orden **plot** para dibujar una o varias funciones. Para socializar el uso de este comando, se pide que todos los estudiantes dibujen la función $f(x)$ definida en el intervalo [-5, 5] y, posteriormente, se da un tiempo de trabajo para dibujar las funciones g y h que cada estudiante ha definido, comentando algunos aspectos significativos (si los hubiera).

Cálculo con Maple:

Se presenta la orden **limit** y su sintaxis y se operacionaliza con dos ejemplos:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$	Con este ejemplo se ilustra que el programa es capaz de resolver también algunas indeterminaciones.
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	

Se presenta, finalmente, la orden **int**, que permite calcular integrales tanto definidas como indefinidas, y cómo varía la sintaxis en cada caso. Se operacionaliza calculando:

$\int f(x).dx = Si(x) - \frac{2}{3}x^{3/2}$	Que permite ilustrar que el programa no siempre devuelve las respuestas que se esperan, sino que tiene su propia idiosincrasia. De hecho, esta situación será la que motivará el desarrollo de la segunda fase de la sesión.

$\int_0^{\pi} f(x).dx$	Que permite recordar a los estudiantes que el programa utiliza muchas expresiones numéricas, aunque no vengan dadas como números decimales. Esto obliga a hacer uso del comando **evalf** para obtener aproximaciones decimales.
$\int_1^{\pi} \frac{x^3+2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\ln(\pi^2+1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$	Este ejemplo permite combinar los comandos **Int** e **int** e ilustrar que hay casos en que sí se obtienen las respuestas esperadas por el usuario.

Dificultades:

Durante la primera parte, es de esperar que los estudiantes tengan problemas para familiarizarse con la sintaxis del programa, el uso de paréntesis y las traducciones necesarias del lenguaje lápiz-papel al lenguaje *Maple*.

Durante la segunda parte, aparte de las citadas anteriormente, es posible que algunos estudiantes tengan dificultades para interpretar las salidas del programa, al no obtenerse resultados en números decimales en muchas operaciones.

Durante la tercera parte, aparte de las ya citadas, pensamos que muchas dificultades vendrán ocasionadas por el carácter *black box* de algunos cálculos, aunque la mayoría podrían ser desarrollados a mano (o incluso ser predichos sin realizar cálculos, como con los límites). Es posible que la atención en la sintaxis y en escribir bien distraiga a muchos estudiantes y no ejerzan un control sobre los resultados que se obtienen.

Acciones esperadas de los estudiantes:

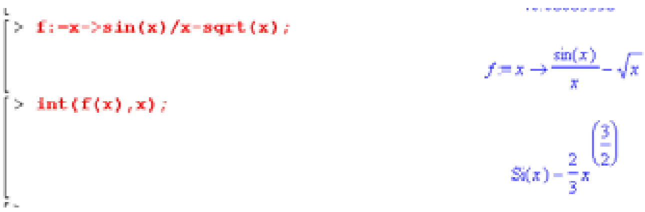
Durante la primera parte, se esperan errores causados por una mala escritura de las operaciones, especialmente con el uso de paréntesis.

Durante la segunda parte, es posible que haya errores por el empleo de **pi** (carácter tipográfico en *Maple*) en vez de **Pi** (la constante numérica). Del mismo modo, es probable que muchos no puedan prever que $\tan(\pi) - \sqrt{3}.e^{\pi} = -\sqrt{3}.e^{\pi}$, por dos posibles factores:

- Falta de práctica con las razones trigonométricas elementales;
- Focalización en la sintaxis del programa, y no en los cálculos que se realizan.

De igual modo, se espera el mismo efecto con el cálculo de $e^{i.\pi}$ - 1.

En la tercera parte, se esperan las mismas dificultades para predecir algunas respuestas del programa, así como para poder interpretar la respuesta que da *Maple* al siguiente cálculo:



debido a que viene dado como expresión de otra función, que es desconocida para ellos.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor va gestionando la socialización de la génesis instrumental, diferenciando los momentos de trabajo en la pizarra y con lápiz-papel de los momentos de trabajo con el ordenador y de atención a la pantalla proyectada.

También resuelve las cuestiones que surjan individualmente y controla que todos los equipos estén en el mismo punto cuando se introducen nuevos elementos.

Fase 2:

Duración prevista:

45 minutos, aproximadamente.

Objetivos:

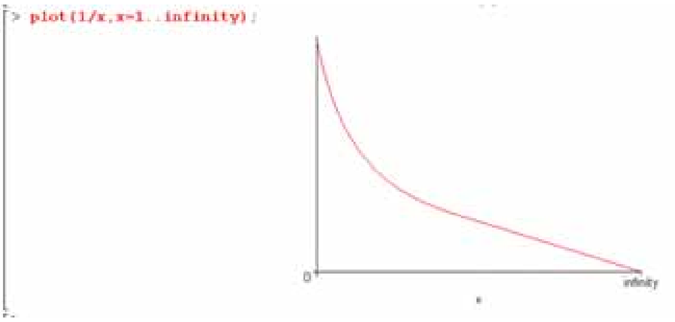
- Toma de conciencia de que *Maple* no va a resolver todas las preguntas que se planteen (y, a veces, su respuesta no será la adecuada), por lo que es importante combinar los conocimientos matemáticos con el uso de esta herramienta.
- Trabajo con dos ejemplos de funciones no prototípicas para operacionalizar el uso de los criterios de convergencia institucionalizados.
- Observación de algunas génesis instrumentales y procesos de instrumentalización para resolver la tarea propuesta.
- Observar los errores que aparezcan y tratar de establecer relaciones con los obstáculos distinguidos por Drijvers.

Formas de trabajo:

- El profesor, en la primera parte, combinará el trabajo en la pizarra (para presentar la situación) con la referencia a la pantalla proyectada del estudiante *sherpa*, guiando así la introducción al problema a tratar. Posteriormente, cuando comienza el trabajo en grupos, resolver las dudas que surjan y asistir a los grupos en el trabajo, si hace falta.
- Tras el seguimiento de la exposición en la pizarra y la pantalla proyectada, los estudiantes contarán con un tiempo de trabajo al ordenador para decidir el carácter de dos integrales. En caso de estancamiento, se les instará a que usen lápiz-papel para buscar funciones adecuadas. La primera parte está fuertemente limitada, pues los estudiantes han de repetir lo que hace el estudiante *sherpa*; en la segunda parte los procesos de instrumentación e instrumentalización están débilmente limitados.

Descripción:

En primer lugar, el profesor plantea a los estudiantes que guarden los cambios efectuados al fichero y que no borren lo que escriban, sino que vuelvan a empezar en una nueva línea cada vez que se equivoquen. Tras esto, el profesor comenta que, aunque por el momento parezca que el programa puede ser infalible, no es cierto y, como todos los programas, comete errores, por lo que es importante saber Matemáticas para poder controlar estos errores. Usando la pantalla del *sherpa*, el profesor plantea a la clase que dibujen la función $1/x$ en el intervalo $[1, \infty)$ y observen qué sucede:

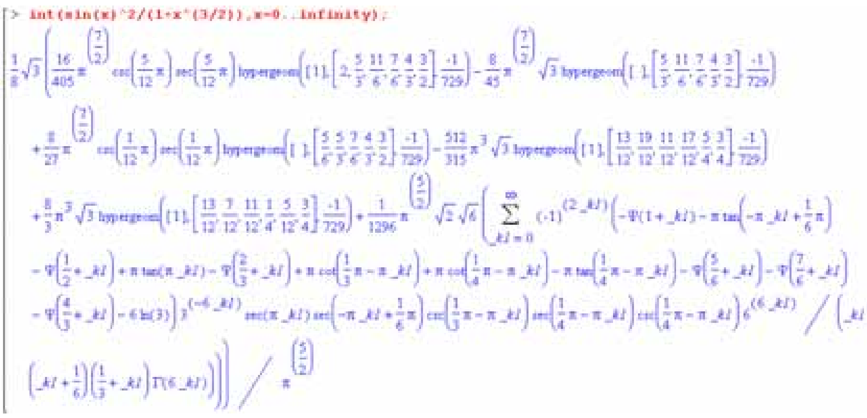


y se comenta la gráfica que se obtiene, observando cómo corta al eje y cambia de concavidad. También les pregunta qué carácter tiene la suma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ y pide al alumno *sherpa* que copie la sintaxis de esta suma en la pizarra:

```
> sum((-1)^(n+1),n=1..infinity);
                                        1/2
```

Por tanto, hay que ser conscientes de que los *software* tienen limitaciones, por lo que es necesario tener conocimientos matemáticos. El profesor plantea a los estudiantes que se va a tratar de decidir el carácter de las integrales $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^{3/2}}dx$ y $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{1+\sqrt{x}}dx$. Para operacionalizar el registro gráfico, pide que se dibujen, de forma que quede patente el carácter oscilante (y no monótono) de estas funciones, de forma que se roma con la presencia exclusiva de funciones monótonas.

El profesor pide a los estudiantes que calculen la primera integral usando el programa:



De esta forma, se observa una de las limitaciones del programa, pues aunque parece haber calculado el valor, la respuesta no tiene un formato que permita su interpretación. Además, en este caso, el uso de **evalf** no es de ayuda y la salida sigue sin ser útil.

El profesor comenta algunas estrategias usuales para forzar al programa a dar respuestas con decimales (combinar **evalf** e **int**, y **evalf** e **Int**), siendo la segunda la que produce una respuesta adecuada:

```
> evalf(Int(sin(x)^2/(1+x^(3/2)),x=0..infinity));
                                        1.117915171
```

Sin embargo, comenta que no siempre estas estrategias son útiles, que un usuario novel no conoce estos “trucos” y que, quizá, la respuesta podría ser no válida (como en el caso de la serie previamente sumada). Por tanto, para asegurarse de que el programa no se ha equivocado, plantea el uso de algún criterio visto en clase, eligiendo una función adecuada para comparar, para probar la convergencia de la integral inicial.

Con la participación de los estudiantes, se recuerda en la pizarra el Criterio del Cociente, que es el que se propone para utilizar.

La segunda parte se basa en el trabajo de los estudiantes individualmente o en pequeños grupos, probando diferentes posibilidades hasta que puedan concluir algo. El profesor asistirá a los grupos, dando ideas y sugerencias.

Al final, habrá una puesta en común de los métodos utilizados y una institucionalización de la solución.

Para la segunda integral se prevé una actuación similar. Sin embargo, en este caso los estudiantes trabajan a ciegas, pues ni siquiera la combinación de las órdenes **evalf** e **Int** permite asegurar el carácter de ésta. De este modo, los estudiantes no comprobarán el carácter, sino que tendrán que decidirlo ellos mismos.

Dificultades:

Se trata, en este caso, de un problema abierto y los estudiantes tienen varias posibilidades de abordarlo, aunque en la pizarra estará el Criterio del Cociente. Esta situación inicial puede provocar la indecisión de algunos estudiantes.

Por otro lado, se integra una función no prototípica, con lo que se intenta que los estudiantes revisen su repertorio de funciones y puedan ampliarlo.

Obsérvese también que el intervalo de integración es $[0, \infty)$, luego esto ha de ser tenido en cuenta si se quiere comparar con la familia $1/x^k$. De esta forma, se quiere reforzar que los estudiantes se aseguren de que se dan las hipótesis para aplicar los Criterios[337].

Finalmente, la combinación de un problema no trivial para ellos junto con las órdenes del programa puede ocasionar dificultades.

Acciones esperadas de los estudiantes:

Se espera, en primer lugar, que entre todos sea posible rescribir en la pizarra el enunciado del Criterio del Cociente.

En segundo lugar, se esperan también errores debidos a incorrecciones en la sintaxis de los comandos que se escriben.

En cuanto a la aplicación del Criterio, se espera que la mayoría compare con funciones del tipo $1/x^k$, por lo que es posible que muchos tengan dificultades al integrar en un intervalo $[0, \infty)$ y obtener que son divergentes (que aprovechará el profesor para hacerles reflexionar sobre las condiciones de aplicación). Dado el restringido repertorio de funciones con que los estudiantes cuentan, en un primer momento se esperan dificultades para encontrar funciones adecuadas que permitan obtener resultados útiles. Se espera que algunos estudiantes comparen con $\sin^2 x$ para eliminar las oscilaciones; sin embargo, esta función tiene una integral divergente y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{3/2}} = 0$, por lo que no se podría aplicar el Criterio.

[337] Pues se ha observado a partir de la Sesión 3 (Sección 5.2.3.) que los estudiantes se centran más en el criterio a aplicar y la función con la que comparar que en verificar que se dan las condiciones de aplicación del criterio.

A pesar de las dificultades iniciales, pensamos que los razonamientos que desarrollen los estudiantes para superarlas ayudarán en los procesos de instrumentación y de instrumentalización.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor presenta la tarea inicial y las limitaciones del *software* para tratarla, haciendo que los estudiantes sigan la pantalla del estudiante *sherpa*. Con la ayuda de los estudiantes rescribe el Criterio del Cociente en la pizarra y promueve la búsqueda de funciones adecuadas con las que comparar, haciendo que los estudiantes se aseguren de que se cumplen las condiciones del Criterio.

SEGUNDA SESIÓN

Fase 1:

Duración prevista:

25 min. aprox.

Objetivos:

- Revisar y operacionalizar el Test Integral y el concepto de serie asociada a una función.
- Mostrar a los estudiantes, de forma controlada, cómo abordar estos contenidos con la ayuda de *Maple*.

Formas de trabajo:

El profesor combina el trabajo en la pizarra y en la pantalla proyectada del alumno *sherpa*, presentando los resultados y motivando la reflexión de los estudiantes.

Los estudiantes trabajan en el ordenador y ejecutan los comandos necesarios. Habrá sólo un pequeño momento de reflexión, en que deberán pensar cuántos rectángulos encajar en un intervalo dado para obtener que la suma de las áreas de los rectángulos coincide con la suma de serie asociada, haciendo coincidir los extremos de cada rectángulo con los enteros en el intervalo.

Descripción:

El profesor anuncia que se va a revisar algunos contenidos vistos en clase sobre series e integrales con dos funciones usuales: $1/x$ y $1/x^2$. En esta ocasión se va a tratar de probar algunos resultados que ya se conocen (el carácter de la integral de ambas funciones) pero sin utilizar la definición de integral impropia ("*vamos a suponer que no sabemos integrar*"), sino los resultados de series.

Se dibuja la función $1/x$ en el intervalo [1, 10] y se pregunta a los estudiantes qué carácter tiene la integral de la función en $[1, \infty)$. Se pide también al programa que calcule dicha integral.

El profesor explica el concepto de "librería" o "paquete" en *Maple* y que se va a trabajar con órdenes del paquete **student**, para dibujar rectángulos, visualizar la serie asociada y calcular su suma. Se explica también la sintaxis de los comandos **rightbox**, **leftbox**, **rightsum** y **leftsum**.

Con esto, el profesor plantea a los estudiantes dibujar la función $1/x$ en el intervalo [1, 10] y, usando el comando **rightbox**, dibujar un número de rectángulos minorantes cuyos extremos coincidan con los valores de $f(n)$ y calcular el área de estos rectángulos (los comandos están escritos en el fichero; los estudiantes sólo deberán definir el intervalo y pensar cuántos rectángulos dibujar).

Tras un tiempo de reflexión, cuando el profesor se asegura de que todos los estudiantes han dibujado los 9 rectángulos esperados, plantea con ayuda de la pizarra que al ser la función decreciente, si se tendiera a infinito se mantendrá la situación, por lo que el área de los infinitos rectángulos es menor que el área bajo la curva. Sin embargo, el área bajo los rectángulos coincide con $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ (pregunta cuánto vale esta suma y qué se puede decir entonces del carácter de la integral), lo que prueba la divergencia de la integral:

```
> Limit(rightsum(1/x,x=1..n+1,n),n=infinity)=limit(rightsum(1/x,x=1..n+1,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i}=\infty$$

Tras esto, plantea hacer un trabajo similar con $1/x^2$, pero en este caso para probar la convergencia. Por tanto, se tratará de dibujar rectángulos sobre la función (luego en este caso hay que utilizar el comando **leftbox**, que toma como altura el valor de la función en el extremo izquierdo y, por ser decreciente, serán los valores máximos de cada intervalo).

Plantea dibujar la función en el intervalo [1, 10] y observar las similitudes (misma forma) y diferencias (ésta parece aplastarse más) con la gráfica anterior. Pregunta a los estudiantes qué área encierra esta función en $[1, \infty)$ y luego se pide al programa que calcule la integral.

Nuevamente se da un tiempo para que los estudiantes dibujen la función en [1, 10] con los rectángulos correspondientes y piensen cuántos habría que encajar (obsérvese que el hecho de dibujar rectángulos mayorantes o minorantes no cambia el número de rectángulos necesarios). Cuando todos lo han hecho, el profesor expone el mismo razonamiento y argumenta que el límite de las áreas de los rectángulos mayorará el área bajo de la curva y se pide a *Maple* que calcule esta suma:

```
> Limit(leftsum(1/x^2,x=1..n+1,n),n=infinity)=limit(leftsum(1/x^2,x=1..n+1,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{5}{3}-O(1)$$

Sin embargo, *Maple* no da en esta ocasión un valor exacto, sino que tolera un error de orden 1. El profesor especifica qué quiere decir esto y, para comprobarlo, se calcula el valor exacto de la suma y se restan ambos resultados, para comprobar que la diferencia es menor que una décima:

```
> Pi^2/6-5/3;
```

$$\frac{1}{6}\pi^2-\frac{5}{3}$$

```
> evalf(%);
```

$$-.021732599$$

```
>
```

Finalmente, se relaciona todo el trabajo realizado con el Test Integral, verificando las hipótesis y los resultados que se han obtenido.

Dificultades:

Principalmente, recordar los resultados que se utilizarán a lo largo de esta fase. No se esperan dificultades con la sintaxis del programa puesto que la mayoría de las órdenes a utilizar están escritas (o parcialmente escritas, a falta de completar algún parámetro) en el fichero.

En la parte en que los estudiantes deberán pensar cuántos rectángulos encajar, no se esperan grandes dificultades. En cualquier caso, si no se acierta a la primera o no se razona cuántos usar para que coincidan sus extremos con los enteros, el mero ensayo-error llevará a la solución en un tiempo razonable.

Acciones esperadas de los estudiantes:

El profesor pedirá intervenciones sobre la convergencia de las integrales de $1/x$ y de $1/x^2$ y de las series correspondientes y se espera que haya respuestas correctas.

En el momento de calcular los rectángulos, se espera respuestas acertadas en una media de dos intentos por estudiante.

Para el primer ejemplos, al ser los rectángulos minorantes y contar con más ayuda del profesor, se espera que los estudiantes acierten directamente que hacen falta 9 rectángulos.

Para el segundo ejemplo, al pensar que los rectángulos son ahora mayorantes, es posible que varios estudiantes piensen que cambia el número de rectángulos, aunque esperamos que un segundo intento conduzca a 9.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor presenta los contenidos con la pizarra y la pantalla proyectada y promueve el uso del razonamiento gráfico. Resuelve dudas cuando surjan. Relación del trabajo desarrollado con el Test Integral.

<u>Fase 2</u>:

Duración prevista:

25 min. aprox.

Objetivos:

- Probar que la integral de $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ es condicionalmente convergente, probando que $\int_0^\infty |f(x)|.dx$ es divergente[338].
- Combinación del trabajo lápiz-papel y del ordenador para obtener este resultado.
- Revisión del ejemplo construido en clase (Sesión 6) de función con integral condicionalmente convergente y construcción con *Maple*.

Formas de trabajo:

El profesor alterna el trabajo en la pizarra con la pantalla proyectada del alumno *sherpa*, desarrollando los razonamientos de la prueba de la divergencia de la integral (en la primera parte) y de deducción de la expresión y construcción de la función discontinua construida con integral condicionalmente convergente.

Los estudiantes desarrollan con *Maple* los cálculos que se pidan (en esta ocasión, sólo hay que pulsar la tecla ENTER, pues no se quiere desviar su atención del razonamiento que se sigue).

Descripción:

El profesor plantea que se va a estudiar el ejemplo típico de función con integral condicionalmente convergente: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. En clase ya se probó que esta función tiene integral

338 En la Sesión 7 (Sección 5.2.7.) se probó que $\int_0^\infty f(x).dx$ converge.

convergente y en esta sesión se probará la divergencia de la integral del valor absoluto usando el ordenador para desarrollar los cálculos necesarios.

Como primera aproximación, se dibuja la función y se calcula el valor de su integral[339]:

```
> int(sin(x)/x,x=0..infinity);
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

Tras esto, se dibuja su valor absoluto y se calcula la integral, obteniendo una respuesta ambigua por parte del programa:

```
> int(abs(sin(x)/x),x=0..infinity);
                                        undefined
> evalf(%);
                                        Float(undefined)
> evalf(Int(abs(sin(x)/x),x=0..infinity));
                                        3.748852506
>
```

De hecho, si se combinan los comandos **evalf** e **Int**, como en la sesión precedente, obtenemos un error por parte del programa, que dice que es convergente. El profesor remarca este hecho y dice que se va a probar algebraicamente, y con ayuda del programa, que la integral es divergente.

Para ello, se va a acotar la integral $\int_0^{n.\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ y, posteriormente, se hará tender n a infinito. En primer lugar, al ser la función x siempre positiva en el intervalo considerado, se puede quitar el valor absoluto: $\int_0^{n.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$ y se plantea la integral como una suma de integrales:

$$\int_0^{n.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1).\pi}^{i.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

Ahora bien, la función $1/x$ es decreciente, en particular en cada intervalo considerado, por lo que su mínimo se alcanza en el extremo derecho de cada uno ($i.\pi$), luego se puede acotar:

$$\int_0^{n.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1).\pi}^{i.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.\pi}\int_{(i-1).\pi}^{i.\pi}|\sin x|dx$$

Como la función sin$x$ es periódica, todas las integrales propuestas tienen el mismo valor, por lo que se puede calcular una cualquiera de ellas. Se pide entonces a *Maple* que calcule la integral en el intervalo $[0, \pi]$:

```
> int(abs(sin(x)),x=0..Pi);
```

$$2$$

Por tanto, sustituyendo en la expresión anterior nos queda:

$$\int_0^{n.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1).\pi}^{i.\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.\pi}\int_{(i-1).\pi}^{i.\pi}|\sin x|dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{i.\pi}=\frac{2}{\pi}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

[339] En clase sólo se probó que es convergente, pero no se calculó su valor.

que, cuando *n* tiende a infinito, no está acotado. De esta forma, quedaría probada la divergencia de la integral de partida, mostrando un nuevo error de *Maple*.

Tras resolver las posibles dudas que aparezcan, el profesor recuerda la función discontinua construida en clase, la dibuja en la pizarra y, con la colaboración de los estudiantes, construye su expresión analítica, pidiendo a los estudiantes que la definan en *Maple* y la dibujen.

Dificultades:

Es probable que los estudiantes tengan algún problema con los razonamientos de la prueba reproducida, en vista de sus limitaciones observadas en las sesiones de Ingeniería. Por esta razón, se preguntará a cada paso si se entiende el proceso.

Del mismo modo, es posible que haya dificultades con la construcción de la expresión de la función del final.

Acciones esperadas de los estudiantes:

La división de la integral en una suma de integrales puede no ser evidente a los estudiantes, al igual que la acotación que se realiza. Por otro lado, es posible que alguno no comprenda por qué todas las integrales tienen el mismo valor, por lo que el cálculo de una de ellas proporciona el valor de todas.

Se espera de los estudiantes que pregunten las dudas y que colaboren en la segunda parte, para construir la expresión de la función. No es seguro que los estudiantes trabajen fácilmente con la función parte entera.

Acciones esperadas del profesor:

El profesor desarrolla los contenidos combinando los razonamientos en la pizarra con la referencia a la pantalla del alumno *sherpa*. Pregunta a los estudiantes si tienen dudas y responde las que surjan.

6.5.4. ANÁLISIS DE LAS SESIONES

Dado que las sesiones diseñadas están fuertemente limitadas, no hay grandes diferencias entre el desarrollo previsto y el real. Por tanto, pasamos directamente al análisis y las diferencias se comentarán oportunamente.

PRIMERA SESIÓN

En esta sesión hay presentes 18 estudiantes y se desarrolla el jueves 5 de junio por la tarde. El estudiante *sherpa*, en este caso, es IG.

Los elementos a analizar son:

- Posibilidad de adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la *génesis instrumental* a un contexto de aprendizaje con ordenadores.
- Presentación y operacionalización de elementos básicos de *Maple* y comienzo de la instrumentalización del programa y de los procesos de instrumentación.
- Exposición de limitaciones del *software*, en particular para decidir la convergencia de algunas integrales.
- Uso del registro gráfico y revisión de contenidos institucionalizados mediante la resolución de problemas más difíciles e incorporando funciones no prototípicas.
- Análisis de la viabilidad para la observación de *génesis instrumentales*.
- Identificación de errores y relación con los obstáculos distinguidos por Drijvers.

Posibilidad de adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la génesis instrumental a un contexto de aprendizaje con ordenadores:

En nuestra opinión, es posible adaptar las condiciones ecológicas en nuestras aulas de ordenadores para favorecer la socialización de la génesis instrumental. La conexión de uno de los ordenadores a una pantalla de proyección permite la designación de un estudiante *sherpa* al que se hará referencia, alternando el profesor el trabajo en la pizarra con la referencia a la pantalla proyectada.

A pesar de la disposición de los ordenadores en nuestra sala, los estudiantes pueden seguir trabajando en pequeños grupos con los compañeros que ocupan la misma fila, aunque la distribución no sea óptima para que el profesor pueda ver las pantallas. Una disposición como la descrita en Smith (2001) facilitaría realmente que el profesor pudiera examinar las pantallas desde una posición cómoda. Además, sería necesario habilitar mayor espacio para que los estudiantes pudieran trabajar en el entorno lápiz-papel (a ser posible, en grupos, para discutir una estrategia antes de implementarla en el ordenador).

Sin embargo, opinamos que en este primer diseño la ecología ha sido favorable y se han producido génesis instrumentales adecuadas y los momentos de trabajo grupal, individual y guiados por el *sherpa* quedan bien diferenciados.

Presentación y operacionalización de elementos básicos de Maple y comienzo de la instrumentalización del programa y de los procesos de instrumentación:

El programa se ha presentado, comentando algunas de sus aplicaciones y capacidades y los elementos básicos de *Maple* han sido presentados tal como se había previsto. Analizando los ficheros de los estudiantes, se puede afirmar que los estudiantes han utilizado, en general, correctamente los comandos presentados (salvo los errores típicos con la sintaxis y el no saber interpretar los mensajes de error del programa, que no se pretendía mostrar en estas sesiones).

De forma general, los estudiantes han definido correctamente las funciones con las que iban a comparar y han calculado correctamente (en términos de comandos de *Maple*) sus integrales y el límite del cociente, además de hacer las gráficas, como se muestra más adelante. Durante la primera fase y las actividades de instrumentación, se observan evoluciones en los estudiantes. Cuando se proponen los primeros cálculos, YG comenta que "*acabamos con el punto y coma*", que denota una asimilación de esta regla sintáctica. Cuando se comienza la segunda parte y el profesor pide que dibujen la función $1/x$, una estudiante comenta también "*con el plot*", que denota una apropiación de este comando.

Se ha observado, en general, un primer nivel de instrumentación: los estudiantes descubren los comandos y sus efectos, aunque no tienen en cuenta otras fuentes de información (las hipótesis de los criterios o los resultados institucionalizados). En algunos estudiantes se observa, además, más adelante un intento de *comprensión de la herramienta* y de combinación de los elementos teóricos con los comandos aprendidos, resolviendo el problema de no encontrar una función adecuada para el Criterio del Cociente mediante el uso del Criterio de Comparación, lo que puede constituirse en los primeros pasos hacia la instrumentalización.

En esta dirección, creemos que la estrategia escogida, mostrar a los estudiantes las limitaciones de la máquina e intentar superarlas mediante el uso de Criterios, ha resultado beneficiosa para promover los comienzos de la instrumentación y la instrumentalización.

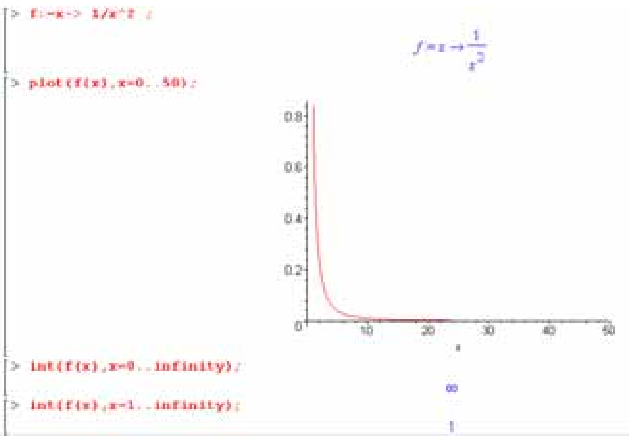
Para lograr la génesis colectiva de estos procesos, pensamos que la elección de un estudiante *sherpa* ha sido fundamental. En este caso ha sido IG, una estudiante de nivel académico destacable, que ha servido de referencia a varios estudiantes en su trabajo. También ha sido útil la presencia de una pantalla proyectada, a la que el profesor ha podido referirse en varias ocasiones para situar a todos los estudiantes en el mismo punto antes de continuar la exposición de contenidos y para presentar las limitaciones del *software*.

Algunos de los problemas que la propia sintaxis del programa ofrece y que pueden dificultar la génesis de estos procesos se comentan más adelante.

Es cierto también que las carencias propias de los estudiantes pueden dificultar estos procesos, por lo que la intervención del profesor resulta indispensable en ciertos momentos. Se observa, por ejemplo, que cuando se presenta a los estudiantes el cálculo $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$, muy pocos son capaces de predecir el resultado de este límite, lo que puede suscitar visiones del ordenador como una *black box*. También cuando el profesor presenta la suma de $(-1)^n$ y pregunta qué carácter tiene ésta, hay que esperar varios segundos y ha de aclarar "*a ver, si yo sumo* 1 – 1 + 1 – 1 *y sigo así...*" hasta que YG dice "*oscilante*". Este tipo de carencias pueden impedir que los estudiantes sean conscientes de ciertos errores del programa.

Por cuestiones de tiempo, la mayoría de los estudiantes sólo ha abordado la primera de las integrales. Sin embargo, pensamos que ha sido un ejemplo muy rico y que ha promovido bastante trabajo y reflexiones en general.

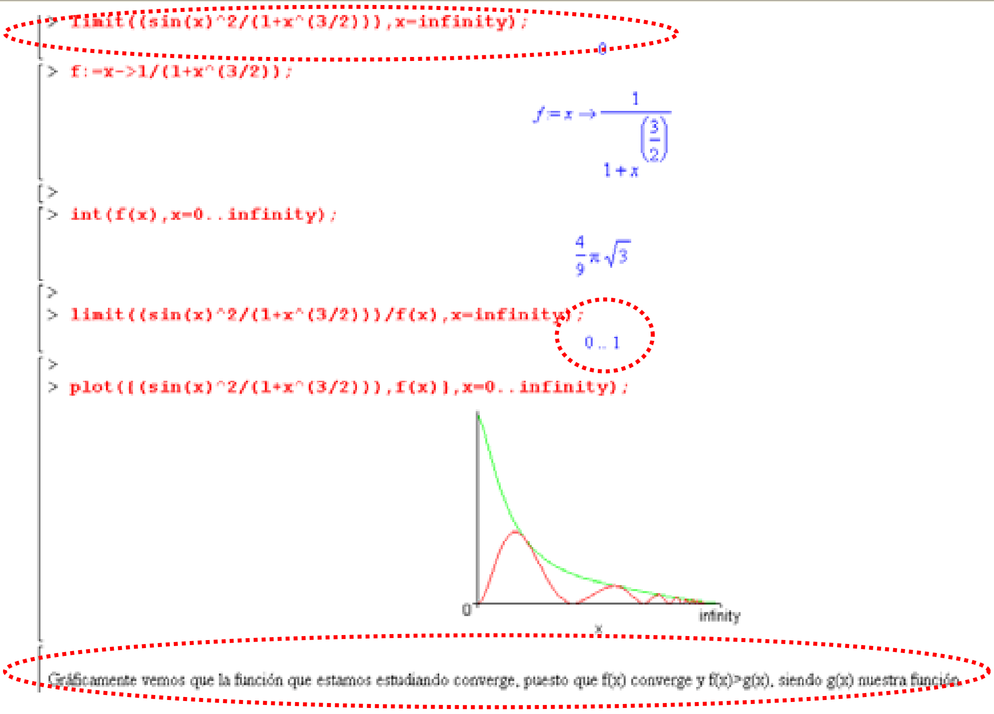
La estudiante IG comienza definiendo la función $1/x^2$, ejemplo prototípico de función con integral convergente (probablemente, motivada sabiendo que la integral de partida es convergente). Sin embargo, el cálculo de su integral le da una respuesta no esperada, que motiva una mayor coordinación entre la teoría y los comandos de *Maple*:



y, finalmente, integra en [1, ∞), obteniendo la *congruencia* entre el conocimiento institucionalizado y la respuesta del *software*. Sin embargo, el límite del cociente le da *undefined*, por lo que elige otra función.

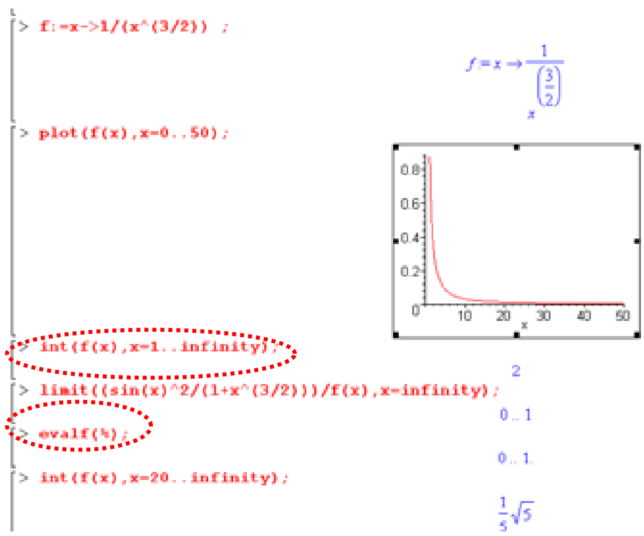
La segunda opción es $1/x$ y no calcula la integral, sino que directamente calcula el límite del cociente, que le da 0. Sabiendo que si la integral es divergente y el límite da 0 no se puede concluir nada, continúa la búsqueda. Prueba con e^{-x} (obtiene límite *undefined*), x (límite igual a 0) y x^4 (límite igual a 0).

Después de trabajar en lápiz-papel, cambia de estrategia. Parece darse cuenta de la importancia del denominador de la función de partida (calcula el límite de esta función y obtiene que es 0) y compara con una función que anule el denominador $\left(f(x) = \frac{1}{1 + x^{3/2}} \right)$:



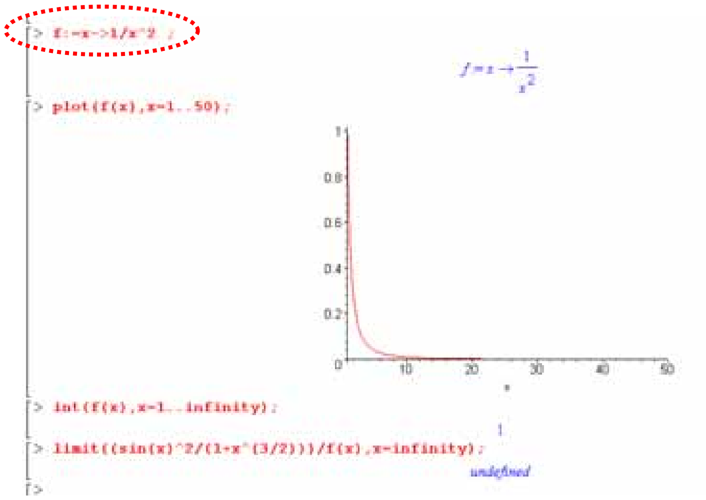
Obtiene que la integral de *f*(*x*) es convergente, pero el límite del cociente le da una respuesta que no puede interpretar (0..1), por lo que opta por utilizar otra forma de probar la convergencia de la integral de partida y el registro gráfico se la proporciona, por medio del Criterio de Comparación. Consideramos que, en este proceso, se ha producido una evolución en la instrumentalización de la herramienta y la estudiante la ha utilizado de forma adecuada, implementando otro resultado teórico que le ha permitido concluir la tarea.

Del mismo modo proceden CF, RA, WD e YG, que tras probar con varias funciones prueban con $f(x)=\dfrac{1}{1+x^{3/2}}$ y, al no interpretar la salida, utilizan el Criterio de Comparación. RA, como primera elección, elige $f(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}}$ y, al no saber interpretar la respuesta del programa, utiliza en primer lugar **evalf**, lo que interpretamos como una interiorización de que esta orden "transforma" respuestas no comprensibles en resultados numéricos. Por otro lado, aplica correctamente las hipótesis de la convergencia de la familia $1/x^k$ e integra en $[1, \infty)$:



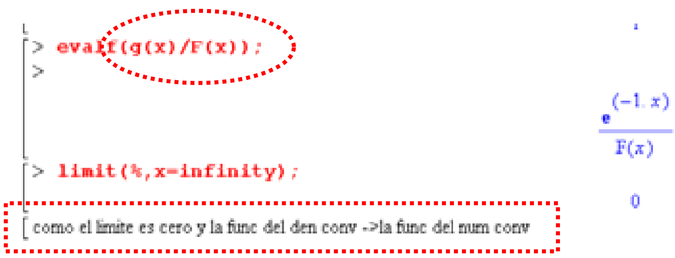
Finalmente, utiliza también el Criterio de Comparación y prueba gráficamente la convergencia de la integral de partida.

Una estudiante que es engañada por uno de los errores del programa es AB. En primer lugar, en busca de una *congruencia* entre el Criterio escrito en la pizarra y su trabajo en el ordenador, define dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Pero olvida que previamente ha definido una función $f(x)$:



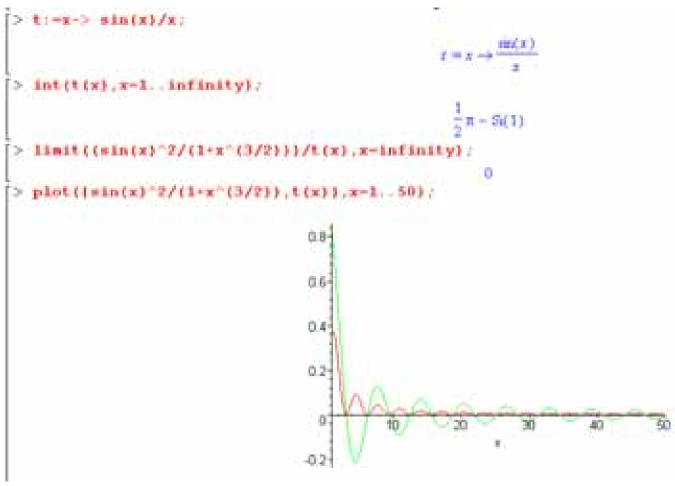
Da muestras de conocer el Criterio y su uso, y comienza comparando con una función de integral convergente. Pero le asigna a esta función el nombre $f(x)$. Su siguiente paso es buscar otra función conocida con integral convergente. Decide comparar con la exponencial y le asigna un nombre:

Y es en el paso siguiente donde comete su error. En busca de una *congruencia* con el Criterio enunciado en la pizarra (y habiendo definido la función $g(x)$ de la que se conoce el carácter de la integral), calcula el límite de $\frac{g(x)}{f(x)}$ y, en este momento, no se da cuenta de que la función $f(x)$ no es la que ella espera (la función del problema: $\frac{\sin^2 x}{1+x^{3/2}}$), sino la que había definido previamente. En segundo lugar, comete un error de sintaxis y escribe una mayúscula:



Y es en este momento que *Maple* comete uno de los errores comentados en la Sección 6.4.1. La función $F(x)$ no está definida, pero *Maple* asigna automáticamente al $\lim_{x\to\infty} F(x).e^{-x}$ el valor 0. De este modo, el no control sobre las funciones definidas y un error interno de *Maple* llevan a AB a concluir erróneamente la convergencia de la integral inicial.

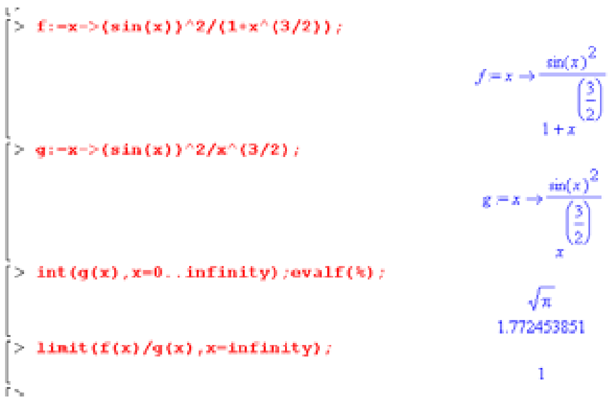
Un caso particular es el de la estudiante NA. Su primera elección es la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ y prueba su convergencia en [1, ∞); sin embargo, el límite del cociente le da *undefined*, por lo que cambia de función y prueba con $1/(2x^2)$ y 2^{x+1} (quizá revelando aquí el *comportamiento del pescador* que describe Drijvers, 2003) y, finalmente, con $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Obtiene que su integral es convergente y que el límite del cociente de ambas funciones es 0; sin embargo, al dibujarlas se da cuenta de que su función no es positiva, por lo que no concluye nada:



lo que puede interpretarse como que se ha dado cuenta de que no se cumplen las hipótesis de aplicación.

AC es un estudiante que, en su primer intento, trata de anular el carácter oscilatorio del límite con la función $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+x}$ pero, al obtener que el cociente del límite es 0 y su integral divergente, cambia de estrategia y prueba con la familia $f(x)=\dfrac{1}{1+x^k}$ y, al final, no concluye nada.

Al final, en la puesta en común, los estudiantes que han obtenido algún resultado (o han tenido problemas significativos) lo exponen y se institucionalizan los razonamientos y resultados correctos. Señalamos que AB no comenta su resultado. Sólo comentan los estudiantes que han obtenido **0..1** como respuesta, los que han usado el Criterio de Comparación y algunos estudiantes que no supieron cómo concluir (y estudiantes que integraron $1/x^2$ en [0, ∞); a estos estudiantes son sus propios compañeros los que les responden). Como no se ha encontrado una función apropiada para aplicar el Criterio del Cociente, el profesor propone usar $\dfrac{\sin^2 x}{x^{3/2}}$ y se comprueba que esta vez el programa puede ejecutar los cálculos y se concluye la convergencia:



<u>Exposición de limitaciones del software, en particular para decidir la convergencia de algunas integrales</u>:

Desde el comienzo se muestran a los estudiantes algunas características del programa que hacen necesario un uso cuidadoso de éste. Así, la definición de $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\sqrt{x}$ y su posterior integración pretenden mostrar que, incluso con casos que ellos pueden considerar "sencillos", la respuesta del *software* no siempre tiene que ser la esperada.

En la segunda fase, se empieza con un ejemplo evidente de fallo del programa al pedir la gráfica de $1/x$, y se producen comentarios entre los estudiantes cuando la visualizan. En este caso, se trata de un conocimiento bien adquirido y los estudiantes reconocen que la respuesta no encaja con la gráfica que ellos esperan. Se comenta en voz alta, usando como referencia la pantalla *sherpa*, que "*sabemos que nunca corta al eje y es cóncava hacia arriba*".

Sin embargo, el caso de la serie $(-1)^n$, que se consideraba "inmediato", no lo es en un primer momento para los estudiantes, que no parecen recordar el carácter de su serie. Sin embargo, la pequeña explicación dada hace que lo razonen.

Estos ejemplos ayudan a crear una sensibilidad que hace que la respuesta que da *Maple* al calcular la primera integral impropia prevista no resulte demasiado extraña a los estudiantes. Por otro lado, la elección de este problema para promover el interés de los estudiantes en resolver el problema usando la teoría que ya conocen nos ha parecido adecuada y se ha observado una implicación de éstos para superar las limitaciones de la máquina, que promueve también las tareas de instrumentación.

<u>Uso del registro gráfico y revisión de contenidos institucionalizados mediante la resolución de problemas más difíciles e incorporando funciones no prototípicas</u>:

A lo largo de toda la sesión se realizan gráficos y, de hecho, algunos estudiantes recurren a este registro, finalmente, para probar la convergencia de la primera integral, lo que muestra su aceptación.

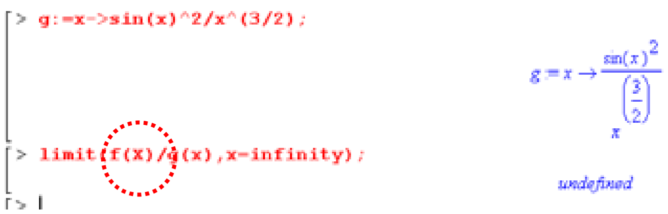
En la primera fase, cuando los estudiantes crean sus propias funciones y las dibujan, el profesor comenta con algunos qué pueden deducir del carácter de su integral. Por ejemplo, YG tiene una función que se mantiene sobre una constante y deduce que su integral será divergente, operacionalizando así el Criterio de Divergencia.

En la segunda fase, el profesor hace uso de la *memoria colectiva* de la clase para enunciar el Criterio del Cociente (se escribe con la colaboración de AC, WD, AB y YG) y varios estudiantes lo utilizan correctamente y no sacan conclusiones cuando no se puede. Además, se ve que la mayoría conoce los resultados de convergencia para $1/x^k$ (aunque algunos se equivocan al principio con el intervalo, muchos lo corrigen) y otros usan el Criterio de Comparación.

Por otro lado, los ejemplos propuestos acuden a funciones no prototípicas, no monótonas, que dificultan la labor. Y se ve también que algunos estudiantes se adaptan a la situación y recurren también a funciones no prototípicas para abordar el problema:

- AC hace uso de $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+x}$.
- CF recurre a $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.
- JH recurre a $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ y $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^{3/2}}$.
- NA utiliza $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Destacamos que JH recurre a la función que muestra el profesor para resolver el problema. Sin embargo, al calcular el límite la sintaxis le juega una mala pasada y escribe una mayúscula indebida:



por lo que el programa no calcula el límite y se queda bloqueado. No prueba con más funciones porque poco después se produce la puesta en común de resultados y estrategias.

<u>Análisis de la viabilidad para la observación de génesis instrumentales</u>:

Consideramos que el diseño previsto, las elecciones globales tomadas y la orquestación seguida han permitido observar algunos procesos de instrumentación y de instrumentalización en los estudiantes, como se muestra en los otros objetivos a evaluar.

Esta experiencia se trata solamente de una primera aproximación, pero los resultados alientan el diseño de otras sesiones en el futuro donde los estudiantes tengan mayor libertad y puedan movilizar su conocimiento, de forma que se pueda observar las génesis instrumentales. Además, será conveniente darles fichas de trabajo para completar por escrito, de forma que se motive también el trabajo lápiz-papel y sea más fácil analizar sus producciones y razonamientos. Sin embargo, la construcción de un fichero en *Maple* donde los estudiantes tuvieran que escribir y realizar sus razonamientos también ha sido útil, pues nos ha permitido recoger material "espontáneo" del trabajo de los estudiantes.

<u>Identificación de errores y relación con los obstáculos distinguidos por Drijvers</u>:

Hemos encontrado diferentes errores en los estudiantes que parecen estar de acuerdo con los obstáculos distinguidos por Drijvers (2002), lo que permitiría una generalización de éstos al trabajo con el ordenador. Por otro lado, Drijvers conjetura que los obstáculos locales identificados podrían tener un carácter que sobrepasa el campo del Álgebra. Nuestros datos apoyan también esta conjetura.

En primer lugar, destacamos que en el caso de un *software*, aparecen nuevas dificultades que quizá son menos evidentes en el uso de calculadoras, debidos a la sintaxis propia del *software*. En los primeros cálculos, el estudiante JH dice que el programa no ha calculado el valor de la suma pedida; se trata, en esta ocasión, de un desconocimiento de que *Maple* presenta la respuesta en el centro de la pantalla (y con otro tipo de caracteres, por defecto) y no a la izquierda, como se esperaba. El uso de "**;**" al final de cada orden, al principio, causa problemas (en los primeros cálculos, con YG y, posteriormente, con otros estudiantes) y el mensaje de error del programa hace pensar que hay algo mal escrito. También se observa que algunos estudiantes traducen casi directamente lo que ven en la pantalla como una operación realizada. El equipo de SD, AG y MI define las dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, pero no ejecuta ENTER. Así, al verlas escritas y definidas en pantalla asumen que el ordenador las ha aceptado y, al ejecutar el **plot**, el programa devuelve un mensaje de error:

```
> plot(g(x),x=0..Pi);
Plotting error, empty plot
>
```

que no pueden interpretar, señalando que el **plot** está "vacío", pues no se ha definido la función.

De igual forma, el uso de paréntesis ofrece problemas (al principio, SM tiene dificultades para escribir $\sqrt{5}+\frac{3}{7}-3^{(-2)}$ y algunos estudiantes no se dan cuenta de que, por ejemplo, la escritura de $1/x^4 + 1$ producirá la salida $\frac{1}{x^4}+1$ (en lugar del esperado $\frac{1}{x^4+1}$), con integral divergente en $[1, \infty)$, que no se corresponde con lo esperado, y, posteriormente, se produce un abuso de éstos (muchos estudiantes escriben $1/(x^2)$ o, incluso, $(1/x^2)$).

El símbolo "**%**" es también fuente de errores y, aunque se explicite que se refiere al último comando *ejecutado* y no al inmediatamente superior, los estudiantes acaban mostrando el comportamiento *generalizador* señalado por Guin y Trouche (1999) y lo aplican en circunstancias en que se ha explicitado que no son válidas.

Entre las funciones implementadas, en el caso de *Maple*, la extracción de raíces requiere una sintaxis que para un usuario novel no anglófono no es evidente (**sqrt**) y que, a veces, lleva a cometer errores ortográficos. De igual forma, la función **exp** ofrece una forma poco "natural" de calcular potencias con base *e* y se ha detectado que algunos estudiantes tienden a escribir ***e*^*a***, en vez de utilizar la sintaxis adecuada **exp(*a*)**. De hecho, la insistencia en que el número *e* se escribe como **exp(1)** produce que, posteriormente, algunos estudiantes escriban **exp(1)^Pi** para referirse a **exp(Pi)**. También se observa la escritura **exp^Pi**, que se muestra como una combinación del patrón erróneo y el correcto.

Otro problema de sintaxis observado en JH y YG es la diferencia entre **Pi** y **pi**. Para *Maple* la expresión **pi** es sólo un carácter tipográfico, sin valor numérico, por lo que la escritura de **sin(pi)** produce, ciertamente, la salida **sin(π)**, pero sin valor numérico (del mismo modo que podría escribir **sin(*a*)**). Sin embargo, esta diferencia no es obvia para el estudiante, que se sorprende de que la respuesta a **evalf(sin(pi))** sea **sin(π)** y no 0:

```
> sin(0);
                                   0
> sin(pi);
                                sin(π)
> evalf(sin(pi));
                                sin(π)
>
```

En relación con los obstáculos locales de Drijvers, encontramos:

1. *La diferencia entre las representaciones algebraicas provistas por el CAS y las que los estudiantes esperan y conciben como "simples"*: más adelante (obstáculo 4) comentamos el caso de la integral de sin$x$/x. Los estudiantes parecen percibir como más complicado que una integral indefinida venga dada como una función, pues ellos esperan un desarrollo similar al que harían a mano (a pesar de tratarse de una función cuya integral no es evidente). Este ejemplo también se relaciona con el obstáculo 11.

2. *La diferencia entre los cálculos numéricos y algebraicos y la forma implícita en que el CAS maneja la diferencia*: el ejemplo en que se pide una aproximación de $e^{i.\pi}$ muestra algunas dificultades que los estudiantes tienen con el cálculo aproximado. En un primer momento son YG, JH y AC quienes muestran este problema, pero posteriormente también lo muestran SM y IG. Estos estudiantes ejecutan **evalf(exp(1)^(Pi*I))** y no comprenden por qué no les da el esperado –1:

```
> exp(1)^(Pi*I);
```

$$(e)^{(I\pi)}$$

```
> evalf(%);
```

$$-1.000000000 + .1202932385\ 10^{-9}\ I$$

```
>
```

En este caso, *Maple* realiza simultáneamente una aproximación decimal del número *e* y de π y calcula la potencia, por lo que hay algunos decimales que no se ajustan. En el caso de ejecutar **evalf(exp(Pi*I))**, *Maple* calcula primero la expresión $e^{i.\pi}$ (que vale –1) y luego calcula una aproximación decimal (que coincide con el valor exacto: -1).

3. *La concepción flexible de variables y parámetros que el uso de un CAS requiere*: muchos estudiantes no tienen clara la diferencia entre variable y parámetro y, además, parecen identificarlos con ciertas letras exclusivas (así, una variable sólo se puede designar por *x*, *y* o *z*, mientras que un parámetro sólo se puede designar por *a*, *b*, *c* o *t*). Un ejemplo de esto lo encontramos en YG cuando se define la función $f(x)$ y se operacionaliza dándole valores. YG, por error, escribe **Sin(*x*)** (con mayúscula), por lo que el programa no lo interpreta como una función, sino como una constante. De esta forma, al darle valores, **Sin** permanece invariable:

```
> f:=x->Sin(x)/x-sqrt(x);
```

$$f := x \to \frac{\mathrm{Sin}(x)}{x} - \sqrt{x}$$

```
> f(1);
```

$$\mathrm{Sin}(1) - 1$$

```
> f(Pi);
```

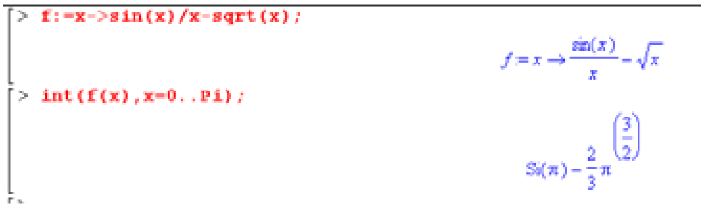
$$\frac{\mathrm{Sin}(\pi)}{\pi} - \sqrt{\pi}$$

```
> evalf(%);
```

$$.3183098861\ \mathrm{Sin}(\pi) - 1.772453851$$

Al evaluar su función en $x = \pi$, YG no obtiene el $-\sqrt{\pi}$ esperado y, al pedir una evaluación numérica, observa que **Sin(π)** permanece y pregunta por qué no lo calcula. El profesor le explica que para *Maple* **sin** es una función, mientras que **Sin** es una constante cualquiera, lo que le produce un problema: "*pero si es el seno*". El estudiante para asociar exclusivamente con las constantes arbitrarias ciertas letras y no acepta que una expresión *parecida* al nombre de una función sea tomada como constante.

4. *La tendencia a aceptar sólo soluciones numéricas y no soluciones algebraicas*: esto lo encontramos al final de la primera fase, cuando se pide a los estudiantes que integren la función *f*(*x*) definida y obtener la siguiente respuesta:



A pesar de que previamente se ha calculado la integral indefinida de *f*(*x*) y se comentó que la respuesta venía como una función (*Si*(*x*)), algunos estudiantes se sorprenden con esta nueva respuesta de *Maple* y algunos, como YG, preguntan por qué no les da un valor.

En relación con los obstáculos globales, hemos observado:

5. *Las limitaciones del CAS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudar al CAS a superar estas limitaciones*: en la segunda fase de la sesión se muestra a los estudiantes la limitación del programa para decidir la convergencia de ciertas integrales y se proporcionan estrategias para superarlo, como la implementación de los criterios. Sin embargo, vemos que los estudiantes, debido a sus propias carencias, tienen dificultades para implementar el Criterio del Cociente y eliminar el carácter oscilatorio de la función inicial, dividiendo por una función de integral convergente.

De este modo, aunque un usuario experto pueda contar con diversas estrategias para superar las limitaciones del CAS, para un estudiante en situación de aprendizaje no es tan obvio, ya que las tareas de instrumentalización se mezclan con las propias dificultades.

7. *El carácter de "caja negra" del CAS*: en el siguiente párrafo comentamos un ejemplo relacionado con este obstáculo. Opinamos que las carencias de los estudiantes pueden provocar también una visión del *software* como *black box*, al no ser capaces de predecir ciertas operaciones y considerar las salidas como "inesperadas". Esto se ha observado, por ejemplo, en el cálculo de los límites pedidos, cuyos resultados debían haber sido predecibles para todos los estudiantes.

11. *La difícil transparencia entre las técnicas del CAS y lápiz-papel*: en el obstáculo 4 mostramos un ejemplo que se relaciona con este obstáculo. La forma en que el CAS ha calculado la integral y la expresa no tiene que ver con las técnicas que los estudiantes han aprendido para calcular primitivas, por lo que no se ve la congruencia y el resultado es rechazado.

12. *La dificultad para interpretar las salidas del CAS*: se observa que la integración de la función $\frac{\sin x}{x}$ devuelve la función Si(*x*). Para muchos estudiantes se convierte en una dificultad aceptar que la integral de una función no venga dada explícitamente, sino en forma de función desconocida, por lo que la respuesta es rechazada inicialmente (YG y JH preguntan por qué les da esta respuesta).

Otra manifestación de este obstáculo se produce cuando algunos estudiantes calculan el límite del cociente de $\frac{\sin^2 x}{1+x^{3/2}}$ y $\frac{1}{1+x^{3/2}}$, que *Maple* devuelve como **0..1**. Esto se relaciona con el obstáculo 7 (*el carácter de "caja negra" del CAS*), en particular cuando el estudiante confía en la tecnología sin controlar los resultados[340]. En este caso, es fácil darse cuenta de que el cociente de las dos funciones da $\sin^2 x$ y su límite no existe (*Maple* señala que el límite es el intervalo [0, 1]).

En general, se observa que los obstáculos que Drijvers (2002) reseña en el uso de CAS (y que describe en entornos de calculadoras gráficas) aparecen también en el contexto de trabajo con ordenadores y que algunos de los obstáculos locales aparecen también en nuestro tema de estudio, lo que apunta en la dirección de la conjetura de que estos obstáculos tienen un carácter dual que sobrepasa las dependencias con el tema de estudio.

SEGUNDA SESIÓN

Esta sesión se desarrolla el lunes 9 de junio y cuenta con la presencia de 22 estudiantes, siendo RA la alumna *sherpa* en esta ocasión. Al tratarse de una sesión fuertemente limitada, no hay diferencias entre la descripción *a priori* y el desarrollo de la misma. Como se había previsto, los estudiantes calculan en un tiempo razonable los rectángulos necesarios que hay que dibujar en los intervalos y las dudas que surgen durante la sesión se resuelven.

Como se había previsto, es el desarrollo de la segunda fase el que necesita de más aclaraciones, pero se intenta que queden los pasos de la prueba lo más claros posibles.

La evaluación de esta sesión se realiza mediante la Pregunta 2 del Test de contenidos (ver Sección 5.3.3.). Tal como se vio en la Sesión 5, las dificultades de los estudiantes para visualizar la serie asociada a una función (y su confusión con las sumas de Riemann) son ciertamente profundas. Sólo 7 estudiantes son capaces de interpretar correctamente la gráfica provista y de resolver la cuestión utilizando los datos proporcionados. Se ve que hay 4 estudiantes que afirman que el valor de la serie coincidirá con el de la integral; este razonamiento apunta a una confusión con las sumas de Riemann.

Sin embargo, se observan algunas evoluciones. SD, en su Ficha 3 fue de los estudiantes que afirmaba que "*la suma de los términos de la sucesión es una parte de la integral*" y esta respuesta parece mostrar que el registro gráfico le ha ayudado a aclarar esta concepción. Éste es también el caso de JB, que en la Ficha 3 escribe la definición de integral de Riemann e intenta cambiar las sumas de Riemann por la serie asociada. IG y EG también pertenecían a su grupo, y en sus Fichas afirmaban que "*Si la integral converge para* $\mathbb{R}$, *entonces converge para* $\mathbb{N}$ *que son menos*". Del mismo modo, las estudiantes AB y WD, en sus Fichas, escribieron "*la integral se puede considerar como una serie en la que la diferencia entre los términos es infinitesimal*", mostrando confusiones entre las sumas de Riemann y la serie asociada.

La situación de YG fue diferente, y en la Ficha 3 mostró concepciones continuas y monótonas que le llevaron a conclusiones erróneas.

Aunque el número total de estudiantes no sea elevado, sí pensamos que ha habido una mejoría y una evolución clara. Quizá el desarrollo de actividades donde se visualicen conjuntamente series y funciones sea de ayuda para ayudar a los estudiantes a progresar en sus concepciones. De acuerdo con Leung y Wah Chan (2004), creemos que se pueden utilizar las características de los entornos informáticos como un pivote en el proceso de razonamiento visual que, en este caso, puede ayudar a una mejor comprensión de los conceptos implicados; además, las imágenes visuales variables que ofrecen estos entornos pueden estimular la intuición.

[340] RA, por ejemplo, trata de ver su valor numérico con **evalf**, pensando que quizá sea una expresión algebraica.

Hay también que citar que de los 7 estudiantes que responden correctamente a la primera parte, SD, en la segunda, cree que la serie asociada a $1/x^2$ coincidirá con el valor de la integral. Esta respuesta se puede deber, principalmente, a dos razones:

- No saber realizar la gráfica adecuada, y optar por una respuesta "rápida" y "sencilla".
- Quizá la dificultad para distinguir la serie asociada y las sumas de Riemann sigue presente y en algunos casos surge.

Es claro que estas dificultades no previstas de los estudiantes para visualizar conjuntamente series y funciones (y su confusión entre la serie asociada y las sumas de Riemann) han oscurecido la introducción del Test Integral y su operacionalización y, además, se muestran resistentes. Por tanto, es importante desarrollar más experiencias de enseñanza en el futuro donde se tenga en cuenta esta situación para ofrecer estrategias que permitan a los estudiantes superar estas dificultades.

6.5.5. Los estados de opinión de los estudiantes

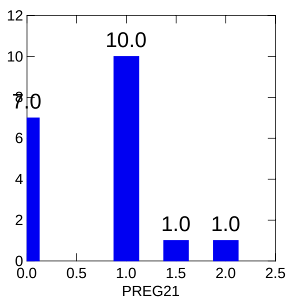
Mostramos en esta Sección el análisis de las preguntas del test de opinión que se refieren al uso de la tecnología, que no se presentó en el Capítulo 5.

La primera pregunta, que mide el grado de familiaridad de los estudiantes con *Maple* o con otros programas de cálculo simbólico revela que sólo JH, AB y CF conocían ya el programa. En cuanto al uso de otros, AG no contesta y, del resto, sólo LP, AC y CF dicen haber usado otros programas: *Derive* (LP y CF) y *Statistica* (AC[341]). Teniendo en cuenta la falta de familiaridad de los estudiantes con este tipo de programas, nos parece que los niveles de instrumentalización mostrados en la primera sesión son positivos.

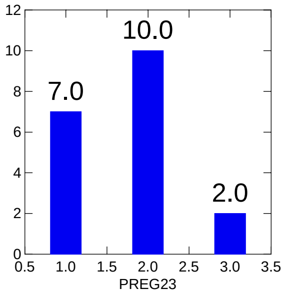
Las preguntas 21, 23, 25, 27, 28 y 29 tratan de recabar información sobre su opinión respecto al uso del ordenador como herramienta de aprendizaje matemático. La primera pregunta se refiere a la dificultad de uso y la utilidad para aprender Matemáticas que creen que el uso de un ordenador ofrece. No se ha alcanzado el máximo (3), luego ningún estudiante está "Muy de acuerdo" con la afirmación de que el uso del ordenador es complicado y ayuda poco. Se observa que la mediana es 1, luego más de la mitad está "Muy en desacuerdo" o "En desacuerdo" con la afirmación. La distribución exacta de las respuestas es la siguiente:

	PREG21
N of cases	19
Minimum	0.000
Maximum	2.000
Median	1.000
Mean	0.711
Standard Dev	0.608

Tan sólo un estudiante (JB) está "De acuerdo" con la afirmación y, además, AB señala dos casillas, pero especificando que está "En desacuerdo" con que el uso del ordenador es complicado, pero está "De acuerdo" en que ayuda poco a aprender Matemáticas. Del resto, 10 estudiantes están "En desacuerdo" y 7 estudiantes "Muy en desacuerdo", lo que muestra una actitud positiva hacia el uso de las tecnologías en el aprendizaje.



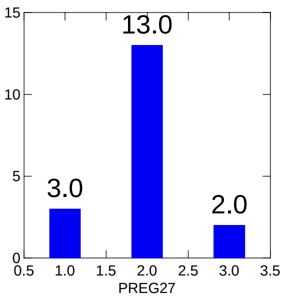
[341] Que también menciona *Pascal* y *Fortran*, que son lenguajes de programación y no programas de cálculo simbólico.



Por otro lado, la mayoría es favorable también al uso del ordenador para facilitar el trabajo matemático (pregunta 23) y está “De acuerdo” o “Muy de acuerdo” en que el uso del ordenador ayuda a que las personas con dificultades de cálculo puedan hacer Matemáticas. La relación de las respuestas a esta pregunta y la anterior se muestra en la tabla adjunta:

		Preg. 23			
		1	2	3	Total
Preg. 21	0	2	4	1	7
	1	3	6	1	10
	1.5	1	0	0	1
	2	1	0	0	1
	Total	7	10	2	19

Se observa una estructura diagonal en la distribución de las respuestas, mostrando la coherencia general de las respuestas de los estudiantes. JB es muy negativo frente al uso y utilidad de ordenadores (pregunta 21) y, en consecuencia, no cree que ayude a las personas con mayores dificultades de cálculo (Pregunta 23). De igual forma sucede con AB. Sin embargo, de los estudiantes que opinan que sí es útil, obsérvese que la mayoría opina que puede ayudar a las personas con mayores dificultades de cálculo.



La pregunta 25, sobre si *Maple* ayuda a descubrir reglas algebraicas ha obtenido tres abstenciones. Del resto, 10 están “De acuerdo” y 6 están “En desacuerdo”. Sin embargo, de los 18 estudiantes que han respondido a la pregunta 27, vemos una actitud muy positiva sobre su utilidad para entender Matemáticas, estando 13 “De acuerdo” y 2 (RA y NA) “Muy de acuerdo”. Entre los tres estudiantes que están “En desacuerdo” figuran EG, YC y JB. Este último estudiante parece tener una actitud muy negativa frente al uso del ordenador para aprender Matemáticas. En cuanto a EG y YC, su respuesta probablemente se ve influenciada por sus factores personales, pues en la pregunta 21 se mostraron “En desacuerdo” con que el uso del ordenador es complicado y ayuda poco a aprender Matemáticas, pero en la pregunta 23 también “En desacuerdo” con que ayude a las personas con dificultades a hacer Matemáticas.

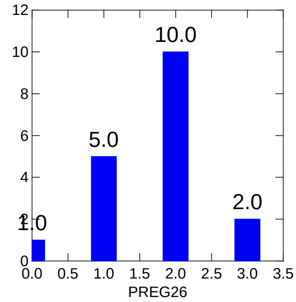
		Preg. 29			
		1	2	3	Total
Pr. 28	1	4	3	0	7
	2	2	7	2	11
	Total	6	10	2	18

Finalmente, en cuanto al trabajo diferente que se puede hacer con el ordenador (preguntas 28 y 29), la opinión es favorable en general. 11 estudiantes están “De acuerdo” (frente a 7 “En desacuerdo”) con que el ordenador permite resolver problemas en lugar de ejercicios repetitivos y 12 estudiantes están “De acuerdo” o “Muy de acuerdo” con el hecho de que el ordenador permite pensar en Matemáticas de una forma distinta. Entre los 6 que no están de acuerdo con esta afirmación, se encuentran JB y YC, además de NB, LP, JH y WD.

		Preg. 24					
		0	1	1.5	2	3	Total
P. 22	0	2	4	0	1	1	8
	1	3	6	1	0	0	10
	Total	5	10	1	1	1	18

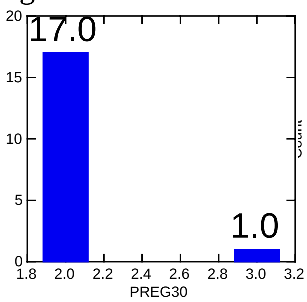
Las respuestas a las dos preguntas que evalúan la actitud crítica frente al uso del ordenador (preguntas 22 y 24)se muestran en la tabla adjunta. Se observa que ningún estudiante es favorable al hecho de que si el ordenador no da respuesta, el problema no tiene solución (Pregunta 22), lo que está en la dirección de nuestro intento de mostrar a los estudiantes las limitaciones de los programas. En cuanto a la pregunta 24 (*cuando escribimos correctamente en el ordenador lo que queremos hacer, entonces podemos confiar plenamente en el resultado* *obtenido*), se observa también una actitud crítica, con 15 respuestas desfavorables. YG está "Muy en desacuerdo" con la 22, pero "De acuerdo" con la 24; JB está "En desacuerdo" con la 22, pero marca las casillas "En desacuerdo" y "De acuerdo" en la 24; finalmente, CF está "Muy en desacuerdo" con la 22, pero "Muy de acuerdo" con la 24.

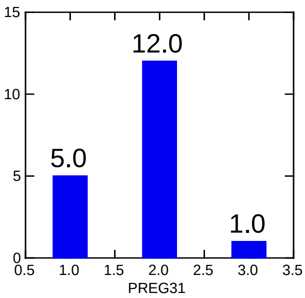
En cuanto a la motivación que produce el uso del ordenador, aparte de las preguntas 27, 28 y 29, ya comentadas, la pregunta 26 (*el uso del ordenador incrementa mis ganas de trabajar en Matemáticas*) produce las respuestas que se muestran. La estudiante "Muy en desacuerdo" es AB, aunque está "De acuerdo" en que su uso le ayuda a entender Matemáticas[342]; parece mostrarse crítica frente a su uso, pues señaló que está "De acuerdo" en que su uso ayuda poco a aprender Matemáticas, "En desacuerdo" con que su uso ayuda a las personas con dificultades de cálculo a hacer Matemáticas[343] y "De acuerdo" con que *Maple* ayuda a descubrir reglas algebraicas "*siempre y cuando tengamos en cuenta los algoritmos utilizados y sus posibles errores*".

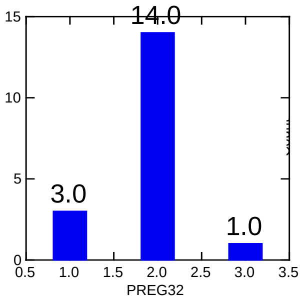


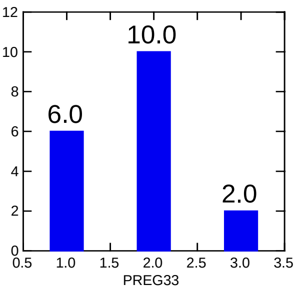
Los estudiantes "En desacuerdo" son NB, SD, YC, JB y AC que, en su mayoría, han mostrado algún aspecto negativo en su actitud frente al ordenador.

Las siguientes preguntas abordan los contenidos de las dos sesiones en el aula de ordenadores y la actitud hacia experiencias futuras (Preguntas 30 a 33). En cuanto a las preguntas 30 (*Maple es útil porque permite dibujar una gráfica mientras trabajamos con integrales impropias*), 31 (*Maple permite tener una idea aproximada del resultado de un cálculo antes de hacerlo*), 32 (*Maple ayuda a resolver problemas sin perderse en los cálculos*) y 33 (*Maple es útil para comprobar el resultado de los cálculos*), las respuestas se agrupan como sigue:



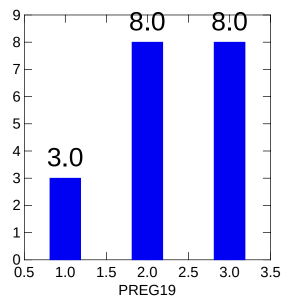






El uso de gráficas se percibe como una gran utilidad y todas las respuestas están "De acuerdo" o "Muy de acuerdo", lo que además parece apoyar nuestra conjetura de que se ha producido una aceptación del registro gráfico por parte de los estudiantes. La pregunta 33 es la que parece tener mas estudiantes en contra, quizá debido al hecho de que se han mostrado limitaciones del *software* y los estudiantes han desarrollado una actitud demasiado crítica.

Finalmente, en cuanto a la valoración de las sesiones con *Maple* (pregunta 19), las respuestas se agrupan como se muestra en el gráfico adjunto. Los estudiantes, en su mayoría, opinan que la experiencia de trabajar las Matemáticas a través del ordenador les ha gustado "Bastante"



[342] Y aclara: "*con funciones difíciles de manejar. Ej. Coord. polares...*".

[343] Señalando que "*Si no saben sumar, restar... sí, pero hay que tener idea aproximada de la solución para saber si ésta es 'real'*".

o "Mucho". Sólo hay 3 estudiantes que opinan que les ha gustado "Poco": JB, AC y AB. Las razones que dan son:

- JB: "*Porque si un día se va la luz, el ordenador no te sirve de nada. Mejor es el lápiz y el papel*". Se confirma entonces la conjetura de que este estudiante tiene una actitud general negativa frente al uso de la tecnología y, por otra parte, no parece estar descontento con el contenido de las sesiones en sí, sino que su descontento se debe a su actitud.
- AC: "*Porque nosotros no tuvimos que hacer casi nada, además estábamos iniciándonos con los comandos del Maple V*", lo que se corresponde con algunas de las limitaciones y elecciones tomadas que señalamos en el diseño de las sesiones: el trabajo de los estudiantes estuvo (particularmente en la segunda sesión) fuertemente limitado.
- AB: "*Me parece que es útil con funciones más o menos difíciles o a la hora de hacer un problema más visual, pero creo que las dudas mejor se resuelven sobre un papel con un razonamiento escalonado basado en axiomas y teoremas*", que se corresponde con su actitud crítica señalada anteriormente.

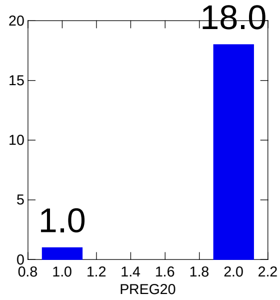
Los otros 16 estudiantes han dado las siguientes razones:

Bastante	Es algo que no había hecho antes	YC, SM
	La máquina trabaja con mayor rapidez	CC
	Es entretenido, interesante	YC, SM, JH
	Es más visual y práctico	EG[344]
	En algunos casos nos damos cuenta de cosas que antes no apreciábamos	CC
	Hace más interesante la asignatura	LP
	Te ayuda a resolver dudas de las clases teóricas	SD, CF
Mucho	Blanco	NG, MI
	Es interesante y divertido	AG, YG
	Ves una aplicación práctica de la teoría	NA
	El programa lo da todo detallado y con la explicación del profesor lo entiendes mejor	NB
	He aclarado dudas	RA
	Ayuda a entender mejor los conceptos de teoría	AG, RA
	En la mayoría de libros no hay ejemplos que se salgan de lo normal y aquí puedo crear mis propios ejemplos	WD

Lo que confirma que, aparte del aspecto novedoso, para varios estudiantes estas sesiones han constituido efectivamente un apoyo a los conceptos mostrados, que era uno de los objetivos de estas sesiones. Quince de los estudiantes señalan razones de su satisfacción con las sesiones desarrolladas relacionadas con los objetivos propuestos: refuerzo del aspecto gráfico de los conceptos, desarrollo de las intuiciones y observar detalles, fomentar el interés por los conceptos estudiados, aclarar conceptos de las sesiones teóricas y fomentar la actividad de experimentación por parte de los estudiantes.

[344] Que, además, señala "*aunque hay que saber cómo detectar errores*", lo que revela una actitud crítica y que es consciente de que los programas se equivocan.

En cuanto al grado de dificultad (pregunta 20), también se ha conseguido proporcionar actividades que no fueran demasiado complicadas para los estudiantes, y sólo WD opina que las actividades con el ordenador han sido "Difíciles", aunque cabe señalar que ella fue una de los estudiantes que concluyó la convergencia de la integral propuesta en la primera sesión utilizando el Criterio de Comparación.



Las dos últimas preguntas confirman que los estudiantes consideran que las prácticas les han sido útiles y un buen apoyo y que, en general, el uso de ordenadores estimula el aprendizaje. En cuanto a si les habría gustado dedicar más horas al uso del ordenador en la asignatura, 15 estudiantes dicen que sí, 2 dicen que no y 2 dejan la cuestión en blanco. Las respuestas se agrupan del siguiente modo:

Sí	Se aprende más	LP, SD[345], AC
	Habría resuelto más dudas y tendría más claras las cosas	RA, WD[346], CF
	Las clases que tuvimos fueron bastante interesantes	CC
	El ordenador anima más a interesarnos por la asignatura y las Matemáticas	AG[347], SM
	Es más ameno	YG, SM
	Dos clases no es suficiente	CF
	Para poder aplicarlo en casa cuando queramos	EG
	Habría estado bien	JH
	También me habría gustado saber de qué forma utilizan otras disciplinas las integrales impropias	NA
	Para aprender más sobre *Maple V*	YC
	Sin explicación	NG
No	Me gusta más resolver y ver yo los problemas, no que un programa los haga por mí	JB
	No es mi herramienta habitual y preferiría haber dedicado más tiempo a resolver ejercicios a mano y ver "trucos"	AB[348]
Blanco		NB, MI

Diez de las razones obtenidas están de acuerdo con las explicaciones dadas en la preguntas 19: estos estudiantes reiteran que consideran que el uso de la tecnología es útil para motivar su aprendizaje y resolver dudas, además de ser un elemento que aumenta el interés hacia las Matemáticas; por otro lado, les permite ser más protagonistas de su aprendizaje y crear sus propios ejemplos (como afirmó WD), lo que contribuye a hacer las clases más amenas.

[345] Esta estudiante añade que, de hecho, "*aprendí más en el ordenador que en las clases teóricas*".

[346] Esta estudiante le ha dado una gran importancia al registro gráfico y su respuesta dice: "*Sí, hubiésemos aprendido mejor los conceptos a base de más ejemplos gráficos*".

[347] Este estudiante añade la expresión: "*¡Crea afición!*".

[348] Esta estudiante justifica su respuesta negativa como sigue: "*No es mi herramienta habitual de trabajo, y preferiría haber dedicado más tiempo a resolver ejercicios a mano, a ver 'trucos', que es en definitiva lo que vamos a realizar en el examen. Esto no significa que no haya que usar ordenadores, lo veo algo útil, pero siempre supeditado al entendimiento del problema y a tener ya una idea aproximada del resultado*". Aunque es crítica frente a su uso, lo ve útil bajo un uso razonado. Sin embargo, prefiere dedicar el tiempo a lo que prevé que será materia de examen, busca una adaptación al contrato didáctico usual y un aprendizaje de técnicas, en lo que parece una forma económica de adaptación (Artigue, 1999).

Finalmente, su opinión sobre el uso activo del ordenador en la enseñanza de la asignatura, las opiniones se reparten como sigue:

Sí	Para entender mejor los conceptos	RA, JH, WD
	Forma de aprender más rápida y efectiva	SD, NA[349]
	Se ven los ejemplos y contraejemplos con mayor rapidez	NA
	Ayuda a ver las gráficas mejor que en la pizarra	CC[350], WD
	Es más divertido y ameno trabajar problemas con ordenador. La asignatura sería más divertida	AG, LP, SM
	Para poder aplicarlo en casa cuando queramos	EG
	Sólo como apoyo a las clases teóricas, si los alumnos están interesados	CF
	Sin explicación	NG, YG
No	Lleva tiempo que nos quitan para estudiar	YC, AC
	La asignatura no tiene muchas horas	AB
	Me gusta más resolver y ver yo los problemas, no que un programa los haga por mí	JB
Blanco		NB, MI

Nueve de los argumentos recogidos refuerzan una vez más los aspectos positivos del uso del ordenador y la opinión generada por las sesiones desarrolladas. El uso del ordenador ayuda a entender y aprender los conceptos y permite trabajar con ejemplos y contraejemplos. También se señalan los aspectos motivacionales, que pueden repercutir, sin duda, en una mayor comprensión y un aumento de la participación. Por último, se vuelve a destacar que el uso del ordenador ayuda también a visualizar los conceptos, lo que de seguro es un elemento clave para lograr una mayor coordinación entre registros. Destacamos el comentario de la estudiante WD, que dice: "*Sí. Por lo que he dicho anteriormente* [*hubiésemos comprendido mejor los conceptos a base de más ejemplos gráficos*]. *No estamos limitados a cuatro ejemplos tipo dados en los libros, sino que entre nosotros podemos crear cosas distintas que se salgan de los tópicos y así tener una visión más amplia a la hora de resolver problemas sobre todo que impliquen dibujar gráficas (sobre todo porque a mí personalmente me cuesta mucho imaginarme gráficas y recintos en 3 dimensiones)*".

De esta forma, queda confirmada nuestra conjetura sobre la aceptación del registro gráfico por parte de esta estudiante. Su no uso inicial (en las primeras sesiones de Ingeniería; véase la construcción de la tabla de convergencias en la Sesión 2) se puede deber a que, como ella dice, le cuesta imaginarse gráficas. Sin embargo, poco a poco se ha visto su progresiva aceptación y uso para producir respuestas más económicas que las que supondría el recurso al registro algebraico. Se observa que esta alumna está satisfecha con el *descubrimiento* del uso de este registro, pues recalca en varias ocasiones en el test de opinión lo útil que es y que ayuda a entender mejor los conceptos.

349 Esta estudiante menciona el beneficio de ver ejemplos y contraejemplos con mayor rapidez y añade: "*al implementar nuevas funciones y obtener con rapidez los resultados se me ocurren nuevas funciones que verifiquen el ejercicio con el que esté trabajando*".

350 Aunque esta estudiante menciona que organizar sesiones de ordenador implicaría tomar horas por las tardes y "*el tiempo escasea*".

CAPÍTULO 7

APORTACIONES, IMPLICACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

Se concluye esta Memoria con una valoración y reflexión finales acerca de la investigación realizada. En este capítulo se hace un balance sobre el grado de consecución de los objetivos propuestos, remarcando algunos de nuestros resultados. Posteriormente, se realiza una evaluación global sobre nuestra propuesta de enseñanza y la viabilidad de su implementación en la enseñanza Universitaria.

Sigue una clasificación de las dificultades, obstáculos y errores que se han identificado en el análisis de datos, mostrando la resistencia de algunos de éstos. Finaliza el capítulo con algunas cuestiones que nuestra investigación plantea y que se pueden constituir en líneas de investigación futuras.

7.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 se señala cómo el problema inicial de investigación, debido a una serie de limitaciones externas tuvo que ser acotado, prevaleciendo en todo momento la concepción inicial de generar una propuesta de enseñanza con el objetivo de mejorar el aprendizaje del concepto de integral impropia y permitiendo, a su vez, realizar una investigación sobre el grado de aprendizaje. En la Sección 1.2. se presentó este objetivo fundamental y se organizó alrededor de varios objetivos generales.

Somos conscientes de la amplitud y generalidad del objetivo general de esta Memoria, que, en parte, se debe a la ausencia de trabajos de investigación previos sobre el aprendizaje de los conceptos relativos a la integración impropia, razón por la que la identificación de algunos obstáculos, dificultades y errores ligados a la integral impropia nos parece importante como base a futuras investigaciones.

Por estos motivos, aunque se aborden todos los objetivos trazados al principio de la investigación, dándose respuestas (más o menos parciales) a todos ellos, también quedan abiertas algunas cuestiones, que motivarán sin duda el desarrollo de posteriores investigaciones.

7.2. CONCLUSIONES

7.2.1. EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS GENERALES

De manera global, podemos afirmar que, a partir del análisis de los datos recogidos a lo largo de la investigación, que nos ayudan a dar respuesta a las expectativas iniciales, que las hipótesis de partida que habíamos considerado para nuestro trabajo son válidas, por lo que afirmamos, en general, que:

1. Es posible mejorar el aprendizaje de los estudiantes si entienden los conceptos en estudio, los objetivos y cómo serán evaluados.

2. La educación y ejercitación de un pensamiento matemático complejo y flexible requiere el desarrollo de la capacidad de utilizar al menos dos representaciones en paralelo.
3. La visualización juega un papel fundamental en la actividad matemática y es un proceso mediante el cual las representaciones mentales se pueden hacer presentes.
4. Las variaciones en el contrato didáctico usual y la explotación del *medio* pueden provocar una mejora en la actitud de los estudiantes e incentivar un aprendizaje más activo.
5. El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquece las experiencias de los estudiantes y los prepara para tareas no rutinarias.
6. Es posible transmitir a los estudiantes de Universidad una visión de las Matemáticas como una ciencia que permite la observación, la experimentación y el descubrimiento.
7. Un uso responsable de los ordenadores puede contribuir a una mejora de la significatividad del aprendizaje.

Hacemos a continuación referencia a las aportaciones que hemos hecho con nuestra investigación, organizadas en torno a cada uno de los objetivos generales planteados al comienzo de esta Memoria. Se establecerán entonces nuestras conclusiones apoyándonos en los datos obtenidos tras el análisis e interpretación de las sesiones y del material recogido.

1. Generar una propuesta de enseñanza del concepto de integral impropia que incorpore los sistemas de representación gráfico y simbólico. Esta propuesta se complementa con sesiones en un entorno computacional para reforzar los contenidos.

En la Sección 1.1. se plantea que el propósito principal de nuestra investigación es doble; de una parte, analizar los procesos de pensamiento matemático avanzado involucrados en el desarrollo y manipulación de integrales impropias (y localizar dificultades, obstáculos y errores que surgen en este contexto) y, por otro lado, desarrollar una secuencia de enseñanza que modifique el esquema de enseñanza habitual de este concepto, acorde con algunos resultados de la investigación. Nuestra secuencia se diseña bajo la idea general de que los elementos del Cálculo Avanzado deben introducirse tratando de generalizar las experiencias previas de los estudiantes (Rasslan y Tall, 2002) y resulta estar más acorde con la epistemología del concepto “integral impropia”, teniéndose en cuenta los efectos de la *sobre-generalización* naturales al definir un concepto como extensión de otro.

Por otro lado, nuestro diseño intenta combatir algunos de los *mitos* de la educación universitaria expuestos por Alsina (2001)[351], para lo que:

- Se contextualizan los contenidos a enseñar (no sólo en el amplio edificio matemático, sino también en la situación cognitiva del grupo de estudiantes al que se dirige la Ingeniería),
- Se invierte el orden que una *organización deductiva* podría suponer (se genera un acercamiento informal al concepto, siendo los estudiantes los que construyen la definición y una tabla con los primeros ejemplos, antes de formalizar la teoría),
- La evaluación no queda condensada en un test rutinario final (sino que se realiza analizando la evolución personal de los estudiantes en las sesiones),
- Se rompe con el paradigma de la *master-class*, dándole al estudiante un papel central en el diseño y repartiendo las responsabilidades entre el profesor y los estudiantes.

[351] Ver Sección 1.2.

En este sentido, podemos afirmar que la propuesta generada ha cumplido con sus dos funciones principales: 1) ser una alternativa a la enseñanza habitual en la Universidad del concepto de integral impropia; 2) ser un instrumento de investigación que nos permitiera observar el aprendizaje de los estudiantes y localizar algunas dificultades, obstáculos y errores que su aprendizaje conlleva.

Algunas de las dificultades no previstas en su implementación se han debido más a factores externos que a factores de organización. Un elemento de gran importancia que afectó el (re)diseño de diversas situaciones y actividades resultó ser el nivel de conocimientos de los estudiantes, que se mostró más bajo del esperado no sólo a nivel conceptual, sino incluso a nivel de manipulación algebraica y algorítmico. También afectó la presencia de exámenes de otras materias en la fase final del desarrollo de la Ingeniería, que pareció producir un efecto distractor en algunos estudiantes.

Sin embargo, podemos afirmar que en líneas generales la Ingeniería diseñada ha cumplido con las expectativas, a pesar de las dificultades señaladas, y se han producido muchas de las retroacciones esperadas, observándose evoluciones en varios estudiantes. Hay que tener en cuenta, también, la extensión de nuestra Ingeniería, que la convierte en una *macroingeniería*, multiplicándose las dificultades en su implementación. Tal como se indica en la Sección 4.1.1., la investigación a partir de *macroingenierías* permite combinar la complejidad de los fenómenos locales de clase con la de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones en los procesos de enseñanza-aprendizaje, aunque conlleva dificultades institucionales y metodológicas.

Independientemente de estos factores, se ha logrado crear una secuencia que incorpore los elementos novedosos que habíamos previsto:

- *Conjugar de forma más equilibrada los registros gráfico y algebraico*: Nuestra propuesta ofrece un papel privilegiado al registro gráfico y a su uso como registro de predicción y control, favoreciendo en gran medida las actividades de coordinación entre registros. Tomando en cuenta los orígenes históricos de la integración impropia, este concepto se introduce no sólo como una generalización, sino desde una perspectiva gráfica que permite dar sentido a una serie de herramientas que facilitarán el cálculo de áreas de figuras no acotadas.

  Además, tal como se muestra en los análisis *a posteriori* y en el análisis de la opinión de los estudiantes, los alumnos han ido aceptando, en líneas generales, su uso en la actividad cotidiana junto con el registro algebraico, y además les ha ayudado a entender muchos conceptos de teoría, siendo su uso útil e interesante, tal y como ellos señalan. Se observan numerosas evoluciones y aceptaciones progresivas de este registro. En la Sesión 1, el estudiante YG realiza un razonamiento gráfico en la pizarra para argumentar una conjetura y pocos estudiantes lo aceptan. Sin embargo, se pudo observar poco después, al analizar la Ficha 1 (Sección 5.2.3.), que todos los estudiantes usan gráficos para apoyar sus razonamientos[352]. También se pudo observar cómo, en la construcción de la tabla de convergencias, los estudiantes aceptaron la economía que este registro puede aportar.

  Por otro lado, las preguntas planteadas en los problemas y en el Test de contenidos en donde aparece explícitamente el uso de este registro obtienen un mayor índice de respuesta y los estudiantes utilizan también este registro para construir algunos ejemplos y contraejemplos.

  En las sesiones organizadas en el aula de ordenadores también se promovió el uso de este registro, fomentando las coordinaciones entre los resultados teóricos y su

[352] Dando muestras de realizar inferencias figurales.

interpretación gráfica. Se comprobó también que varios estudiantes acudían al Criterio de Comparación por medio de gráficas para solucionar las cuestiones planteadas. Sus comentarios en el test de opinión confirman que los estudiantes, al finalizar nuestra instrucción, consideran el uso del registro gráfico interesante o muy interesante y más de la mitad de los estudiantes participantes afirma que este registro ayuda mucho a entender las cosas. Las opiniones sobre las sesiones con el CAS indican también que el *software* ha constituido un apoyo visual a muchas cuestiones y que les ha ayudado a entender mejor muchos conceptos.

Podemos decir, como consecuencia de todo lo anterior, que el registro gráfico ha recibido una revaloración positiva por parte de la mayoría de los estudiantes participantes y una aceptación como registro de predicción, control y argumentación de algunas cuestiones, que permite respuestas económicas a determinadas preguntas.

- *Usar de forma activa ejemplos y contraejemplos, en especial los que promueven el uso del registro gráfico*: Una de las elecciones tomadas para fomentar los cambios de registro fue el uso activo de ejemplos y contraejemplos que permitieran ofrecer respuestas económicas a los engaños de la intuición y la *sobre-generalización*, tomando como idea principal el concepto de área. De este modo, se ha podido construir:

  - funciones no acotadas con área finita,
  - funciones que se aplastan con área infinita,
  - funciones cuya serie asociada ($f(1) + f(2) + ...$) converge, pero que encierran un área infinita, etcétera.

Maschietto (2001) afirma que el registro gráfico tiene un papel potencial en la resolución de problemas y, en nuestro contexto, la construcción de contraejemplos muestra gran parte de este potencial. También nos ha permitido enfrentar al estudiante a problemas que lo sitúan frente a un conflicto, un elemento fundamental en el diseño de situaciones y *medios* adecuados.

Con estas actividades se ha limitado el dominio ejercido por los ejemplos concretos en la enseñanza que mencionan Tall (1992a) y Artigue (1995a) y se enriquecen las experiencias activas y creativas de los estudiantes mediante el trabajo con funciones discontinuas, no monótonas, no acotadas...

Benbachir y Zaki (2001) afirman que la construcción de ejemplos y contraejemplos permite un aprendizaje más rico que el que se consigue con la enseñanza tradicional, y estamos de acuerdo con ellos en el sentido de que esta actividad nos ha permitido enfrentar a los estudiantes a *sobre-generalizaciones* “tentadoras” y, como respuesta de los estudiantes, hemos visto que pueden responder a problemas de corte no rutinario o incluso dar ejemplos y contraejemplos a cuestiones relativas a la definición de integrabilidad local (siendo algunos estudiantes capaces de aportar “ejemplos triviales”, en el sentido de Selden y Selden, 1998). También, en algunos casos de no ser capaz de construir un contraejemplo, hemos observado que algunos estudiantes han superado esta barrera buscándolo en libros (SM en el problema 28, que luego retoma EG en el Test de contenidos).

Afirmamos que los estudiantes han reconocido la utilidad del uso de ejemplos y contraejemplos: 18 de los 19 estudiantes que rellenan el test de opinión afirman que el uso de ejemplos y contraejemplos es útil o muy útil. Aunque sólo la mitad de los que responden el test sobre el uso de contraejemplos dice sentirse seguro usándolos, el 93.75% opina que es un método efectivo para el aprendizaje. Algunas razones que se dan son que “*son útiles para mostrar que algo es falso*”, “*ayudan a recordar y entender la teoría*” o que “*ayudan a agilizar el conocimiento*”. Aparecen también respuestas que reconocen el potencial y la economía del registro gráfico: “*son un complemento a las cuestiones teóricas*”, “*Tienen un carácter visual y rápido*”, “*ayudan a evitar el uso de largas demostraciones*”.

Los estudiantes también señalan que los contraejemplos les ayudan a comprender mejor los conceptos y a aclarar ideas, lo que está acorde con las conclusiones del estudio internacional realizado por Gruenwald y Klymchuk (2003) en el que hemos participado.

- *Uso de problemas no rutinarios para mejorar la significatividad del aprendizaje*: Además de la construcción de ejemplos y contraejemplos, se han planteado cuestiones de corte no rutinario a los estudiantes durante las sesiones, al igual que en los problemas seleccionados para entregar y en el Test de contenidos. De acuerdo con Duval, no es suficiente proponer actividades de conversión para que el estudiante construya la articulación entre representaciones. La resolución de problemas puede poner en juego y motivar las actividades de cambio de registro; en la resolución de problemas, la representaciones están en el corazón mismo de la actividad matemática. Y, de acuerdo con Hitt (2000a), es en la resolución de problemas donde se pone a prueba todo el conocimiento del estudiante.

  Por otro lado, también ha resultado importante presentar al estudiante situaciones que lo sitúen frente a un conflicto. Para provocar las fases de desequilibrio del conocimiento que harán avanzar al estudiante hemos presentado problemas para los cuales los conocimientos del estudiante eran insuficientes (de modo que su resolución produzca, en consecuencia, nuevo conocimiento). También hemos conseguido nuestro objetivo incluyendo tareas cuyas soluciones entran en contradicción con una respuesta anticipada del resultado. En nuestra selección y construcción de problemas no rutinarios hemos tenido en cuenta las características de un “buen” problema que da Porier (2001), tratando de ofrecer a los estudiantes desafíos razonables. Como se ha visto en los análisis *a posteriori* de las sesiones, los estudiantes se han implicado y han debatido con intensidad para encontrar soluciones a las tareas propuestas en clase y en el aula de ordenadores y, en muchos casos, sus soluciones han dado paso posteriormente a conocimientos susceptibles de institucionalización:

  - los primeros ejemplos de la Sesión 1 permitieron plantear la pregunta sobre la forma de las funciones que dio lugar a la institucionalización del Criterio de Divergencia;
  - la resolución de la Ficha 1 permitió introducir un contraejemplo de que una función no acotada puede encerrar un área finita;
  - la resolución de la Ficha 2 permitió reflexionar sobre la extensión de la linealidad al caso impropio (siendo algunos estudiantes capaces de probar el resultado);
  - la Ficha 3 permitió responder a la *sobre-generalización* de que las series y las integrales se comportan siempre igual y un grupo de estudiantes creó un contraejemplo que permitió introducir posteriormente el Test Integral (que fue utilizado posteriormente por algunos estudiantes en el Test de contenidos; mostrando que los estudiantes aceptan las producciones de sus compañeros).

También se ve que algunos estudiantes utilizaron preguntas de la segunda parte del Test de Contenidos para combatir el obstáculo de *homogeneización de dimensiones* y afirmar que existen figuras de área infinita capaces de generar volúmenes finitos.

Aunque algo más de la mitad de los estudiantes encuestados opinan que las preguntas planteadas en clase por el profesor eran difíciles, creemos que han sido útiles para generar conocimientos y reconstrucciones. 15 de los 18 encuestados opinan que los problemas seleccionados para entregar fueron interesantes o muy interesantes. Sobre las cuestiones trabajadas en pequeños grupos, todos los estudiantes afirman que les han ayudado a entender luego la teoría, además de que han sido interesantes.

No sólo los estudiantes opinan que las cuestiones han sido útiles para su aprendizaje, sino que los resultados avalan esta idea. De los 15 estudiantes que entregan los problemas, 10 tienen un rendimiento superior al 45% (habiendo 6 estudiantes por encima del 70%) y de los 20 estudiantes que rellenaron el Test de contenidos, 11 están por encima del 50% (habiendo 6 por encima del 70%). Además, opinamos que los problemas entregados fueron útiles, pues de los 15 estudiantes que entregaron problemas, 10 mejoraron su rendimiento en el Test de contenidos.

- *Recurrencia al software matemático Maple V para reforzar los contenidos y favorecer la coordinación entre registros*: Hemos encontrado evidencias de que un uso reflexivo de la tecnología puede ayudar a realizar articulaciones flexibles entre los registros algebraico y gráfico (Artigue, 1999). Además, las características de muchos entornos informáticos pueden jugar un papel de pivote en el proceso de razonamiento visual (Leung y Wah Chan, 2004), gracias a su naturaleza multi-representativa (Fuglestad, 2004).

  A pesar de que en las sesiones diseñadas fue necesario incorporar una toma de contacto con la máquina, fue posible revisar contenidos teóricos e incluso organizar un momento donde la actividad de los estudiantes no estuviese demasiado restringida, con el objetivo de resolver un problema causado por las limitaciones de la máquina. Se tuvo en cuenta que el trabajo matemático implicado fuese accesible a los estudiantes.

  Las dos sesiones diseñadas permitieron reforzar contenidos de clase, y la mayoría de los estudiantes afirma que les resultaron útiles y les permitieron aclarar muchas dudas. Además, las actividades propuestas favorecían el uso de dos registros y se ha observado que varios estudiantes, ante la imposibilidad de resolver algunas tareas propuestas en el registro algebraico, fueron capaces de transformarla al registro gráfico para resolverlas, aplicando el Criterio de Comparación.

  Por otro lado, 17 de los 19 encuestados opinan que el uso del ordenador es útil para aprender Matemáticas y 12 estudiantes afirman que el uso del ordenador incrementa sus ganas de trabajar en Matemáticas. En cuanto a su uso para favorecer la coordinación entre registros, todos los estudiantes encuestados valoraron positivamente el potencial gráfico del ordenador. Y en cuanto al objetivo de reforzar los contenidos teóricos, 15 de los encuestados aluden al refuerzo del aspecto gráfico de los conceptos, darse cuenta de detalles, aclarar conceptos y fomentar la experimentación. Algunas de las opiniones recogidas entre nuestros estudiantes coinciden con las de los estudiantes de las experimentaciones de Guin y Trouche (1998).

2. Identificar los obstáculos, dificultades y errores ligados al concepto en cuestión que se muestran más resistentes.

La secuencia de enseñanza utilizada y el diseño y desarrollo de la investigación resultó ser muy útil para profundizar en la clasificación iniciada en González-Martín (2002). Debido a su extensión, se presenta en la Sección 7.3.

3. Estudiar hasta qué punto las modificaciones en el contrato didáctico cambian la actitud de los estudiantes en el aprendizaje de las integrales impropias.

La Teoría de Situaciones toma en cuenta que el estudiante no experimentado en el funcionamiento a-didáctico ha de ser preparado poco a poco. Para implicar al estudiante, éste no debe conocer de antemano las respuestas esperadas; el profesor debe conseguir que el estudiante acepte la responsabilidad de buscar una resolución a los problemas o ejercicios de los que ignora la respuesta.

Aunque la participación de los estudiantes en la primera sesión fue un tanto escasa, se observó que a partir de la segunda sesión los estudiantes incrementaron paulatinamente su implicación en el desarrollo de la Ingeniería, mostrándose cada vez más activos. Parece también que la experiencia de ser ellos mismos los constructores del conocimiento (la definición de la integral impropia, el Criterio de Divergencia, la tabla de convergencias, el Criterio de Comparación y sus corolarios, algunos contraejemplos, ...) resulta muy motivadora. De hecho, hemos observado que los resultados más utilizados por los estudiantes en sus producciones son los que se han creado en fases a-didácticas.

También es patente la responsabilización de las tareas propuestas, dado que los estudiantes rellenan siempre las Fichas de trabajo utilizando los resultados institucionalizados. Cabe señalar el hecho de que uno de los principales motivos de retraso en las primeras sesiones fue que los debates grupales se alargaban, lo cual era debido a que efectivamente se producían interacciones entre los estudiantes e intentos de resolver las cuestiones planteadas. Los pequeños grupos de trabajo fueron el lugar privilegiado para el debate, y los análisis *a posteriori* muestran que muchos estudiantes reacios a participar (tal vez por cuestiones de personalidad) en el gran grupo participaban, sin embargo, activamente en los pequeños grupos.

La implicación de los estudiantes en la resolución y entrega de los materiales suministrados para resolver fuera de las sesiones de clase refleja también la aceptación de la responsabilidad dada. De los 21 estudiantes que asisten a 6 sesiones o más, son 16 los que entregan las tablas de convergencia y 15 los que entregan los problemas propuestos.

Nuestro diseño favoreció también el trabajo grupal. Poirier (2001) plantea la importancia de enfrentar a los estudiantes a situaciones conflictivas reconociendo la importancia de las interacciones en clase. Del mismo modo, Artigue (1999, 2001) remarca la eficiencia de diversas situaciones no sólo gracias a las características de los problemas elegidos, sino también a las características de los escenarios desarrollados, en particular cuando participan del carácter social de los procesos de aprendizaje.

En cuanto al establecimiento de debates científicos, no ha sido posible llegar con plenitud al desarrollo de éstos, aunque sí creemos que se ha producido una dinámica favorable al intercambio y que ha habido una evolución visible en las intervenciones de los estudiantes. En los análisis *a posteriori* se registra que los estudiantes participaron más de forma progresiva y que, por lo general, una vez animados a participar continúan haciéndolo en sesiones posteriores. Hemos constatado, tal como señala Legrand (2001), que el establecimiento de debates científicos en el aula es un proceso lento que requiere de una gran inversión de tiempo y esfuerzo por parte del profesor.

Como se muestra en el análisis de los test de opinión de los estudiantes (Sección 5.4.1.), más de la cuarta parte de los estudiantes participantes en nuestra Ingeniería considera la metodología muy adecuada y más de un 60% la considera adecuada[353]; por otro lado, un 37.5% de los estudiantes que repiten curso la ha considerado muy adecuada, opinión en la que está presente un conocimiento sobre la forma tradicional de enseñar estos conceptos. Algunos elementos que nos llevan a afirmar que los estudiantes han desarrollado una actitud positiva hacia la integración impropia han sido comentados previamente, declarando el interés que ha despertado en ellos los problemas y actividades propuestos.

Los estudiantes también han valorado positivamente uno de los aspectos novedosos de nuestro diseño, y que supone un cambio importante en el contrato didáctico usual: el fomento del trabajo cooperativo en pequeños grupos. 18 de los estudiantes encuestados lo han encontrado útil o muy útil, afirmando que ha servido para aclarar algunas o muchas cosas. En cuanto al uso de debates, todos los encuestados opinan que habría que desarrollar debates y 8, que debería hacerse, además, frecuentemente.

4. Analizar si el uso activo de ejemplos y contraejemplos en la enseñanza, así como el uso del registro gráfico como registro de trabajo matemático válido, producen mejoras en el aprendizaje de los estudiantes.

Como se comenta en el punto 1, los estudiantes han valorado positivamente el uso del registro gráfico y reconocen su utilidad e interés para entender los contenidos. Más allá de ser una mera opinión, los análisis *a posteriori* muestran una verdadera apropiación de este registro y auténticas evoluciones en su uso (destacando la aceptación de la estudiante WD).

Todos los estudiantes respondieron la cuestión planteada en la Ficha 1 recurriendo al registro gráfico y al Criterio de Divergencia; los estudiantes aceptaron el potencial de este registro y la economía que supone su uso en determinadas cuestiones (en particular, en la construcción de contraejemplos). La construcción de la tabla de convergencias propició también la operacionalización del registro gráfico y del Criterio de Divergencia. Se ha observado también que el Criterio de Comparación es uno de los resultados que mejor han comprendido los estudiantes, dado que han sido capaces de aplicarlo en situaciones gráficas (Problema 21, Anexo 1, y en las sesiones de *Maple*) y situaciones planteadas en el registro algebraico (pregunta 5 del Test de contenidos).

Se esperaba que los estudiantes fueran capaces de construir contraejemplos a cuestiones sencillas planteadas. En la Ficha 3, se pudo observar que los estudiantes AB, CF y WD construyen un contraejemplo no trivial operacionalizando el registro gráfico y realizando transferencias de los resultados de series. Destacamos también que en la pregunta 6 del Test de contenidos, todos los estudiantes que recuerdan la definición de integrabilidad local son capaces de dar un ejemplo y un contraejemplo a las siguientes cuestiones.

Se ha observado también que el uso de contraejemplos ha ayudado a varios estudiantes a evitar algunos obstáculos habituales en el aprendizaje de la integración impropia, como creer que si una integral es convergente, entonces la función tiende a cero, o que si una función tiende a cero tendrá integral convergente.

[353] Conviene destacar también que los cinco estudiantes que opinan que los conceptos les quedaron algo confusos, a pesar de ello, califican la metodología de adecuada.

Destacamos también que los índices de abandono en las preguntas planteadas en el registro gráfico han disminuido considerablemente con respecto a los estudiantes que tomaron parte en nuestro estudio sobre la dimensión cognitiva (Sección 3.3.4.). El Problema 21 se plantea en el registro gráfico (gráfica con función informativa; ver Elia y Philippou, 2004) y todos los estudiantes la abordaron, movilizando el uso de este registro. Del mismo modo, en la Pregunta 24 hay estudiantes (WD, YG) que producen respuestas económicas pasando al registro gráfico y respondiendo con la interpretación.

De los 20 estudiantes que rellenan el Test de contenidos, sólo 2 estudiantes dejan en blanco la pregunta 2 y 5 la pregunta 8. La comparación con los estudiantes que participaron en el estudio realizado en el 2001 (González-Martín, 2002) muestra una disminución considerable en el índice de abandono:

	Año 2001		**Año 2003**	
Participantes en el Test	31		20	
	Preg. 2	Preg. 8	Preg. 2	Preg. 8
Abstenciones	12	14	2	5
Porcentaje	38.71%	45.16%	10%	25%

Elia y Philippou (2004) afirman que una resolución efectiva de problemas, haciendo uso de dibujos, depende de la relación entre el dibujo y el problema y del conocimiento y habilidades previos de los estudiantes. Probablemente, uno de los principales factores que motiva estas diferencias viene determinado por el hecho de que los estudiantes participantes en la Ingeniería han desarrollado habilidades de reconocimiento del registro gráfico y de interpretación de gráficas.

5. Analizar si es posible adaptar las condiciones ecológicas para la socialización de la génesis instrumental a un contexto de aprendizaje con ordenadores.

Como se muestra en el Capítulo 6, pensamos que ha sido posible organizar las condiciones ecológicas de un aula para generar una secuencia en donde los estudiantes puedan combinar los trabajos lápiz-papel con el ordenador y donde el profesor pueda combinar el trabajo en la pizarra con la referencia a una pantalla proyectada. Además de esto, nuestro diseño nos ha permitido socializar algunos aspectos de la génesis instrumental gracias al uso de un alumno *sherpa* y a las referencias explícitas a su ordenador proyectado. También fue posible facilitar no sólo el trabajo en pequeños grupos y que los estudiantes compartan estrategias, sino también las observaciones del profesor, así como la puesta en común y el uso de ficheros en donde los estudiantes pudieran escribir y probar las veces que necesitaran. Todos estos elementos, conjuntamente, nos han facilitado la observación de algunos procesos de instrumentación e instrumentalización, adaptaciones de los estudiantes y búsqueda de estrategias alternativas para superar sus propias limitaciones algebraicas.

En este sentido, el desarrollo previo de varias sesiones de Ingeniería resultó ser extremadamente útil para saber qué bagaje tenían los estudiantes, pudiendo diseñar actividades en las que el trabajo matemático implicado fuera accesible a los estudiantes (y no sólo desde el punto de vista matemático, sino también instrumental, para lo que se diseñaron las actividades de toma de contacto). De esta forma, se minimizaron los efectos de un posible *desfase cognitivo* (Artigue, 2002b). Nuestras sesiones de Ingeniería también fueron útiles para operacionalizar el trabajo en el registro gráfico, que ha sido al final el privilegiado en las estrategias buscadas por los estudiantes.

Aunque las condiciones de nuestras aulas de ordenadores no sean óptimas (conviene la presencia de mesas en donde los estudiantes puedan desarrollar trabajo en entorno lápiz-papel y discutir entre ellos, o una distribución que permita al profesor un acceso más rápido a las pantallas de los estudiantes; véase Smith, 2001), sí se ha conseguido adaptar las condiciones ecológicas tanto físicas como temporales (principalmente, la distribución de los distintos trabajos) para producir una toma de contacto no muy complicada y unos procesos de instrumentación observables. El dispositivo basado en ficheros donde los estudiantes tuviesen las explicaciones y, además, tuviesen espacio para experimentar que, posteriormente, pudiesen ser analizados, se ha mostrado también positivo, aunque habría convenido también el uso de materiales escritos para recoger más información sobre los procesos de pensamiento.

6. Analizar la viabilidad para la observación de génesis instrumentales y la posibilidad de generalizar algunos obstáculos observados en entornos de calculadoras gráficas en un contexto de aprendizaje con ordenadores.

Como hemos comentado en el punto anterior, la organización y elección de actividades de la primera sesión con *Maple* nos permitió observar algunas génesis instrumentales y procesos de adaptación al nuevo entorno en los estudiantes, quienes, además, muestran su gran satisfacción con el uso de esta herramienta y con el diseño de las sesiones, que les ha ayudado a comprender mejor aspectos teóricos de la Ingeniería.

Por otro lado, con la recolección de los ficheros de trabajo de los estudiantes hemos podido observar también algunas manifestaciones de obstáculos que parecen estar en relación con los observados por Drijvers (2003), apoyando su conjetura de que los obstáculos locales tienen un carácter general que se extiende a otras áreas de estudio aparte del Álgebra.

Como señala Drijvers (2003), hay que tener en cuenta el carácter *top-down* de los CAS que, en el caso de un programa informático como *Maple*, se acentúa. Las notaciones informales están más desfavorecidas y hay que prestar mayor atención a la sintaxis del programa. En este contexto también influye la *pseudo-transparencia* y hay muchas técnicas del entorno informático similares a las del entorno lápiz-papel, pero diferentes en detalles sutiles para un usuario novel. El uso de paréntesis, o el empleo de mayúsculas (además del uso del “**;**”) han provocado algunas reacciones en los estudiantes e, incluso, resultados incorrectos.

Pensamos, en vista de los resultados, que la elección hecha de presentar a los estudiantes algunas restricciones internas del *software* ha sido acertada y ha motivado su exploración para superar estas limitaciones mediante la implementación de resultados institucionalizados. Se tomaron en cuenta algunas de las indicaciones que Trouche (2000a) hace para la construcción de un curso de Matemáticas con el uso de calculadoras:

- Utilizar los potenciales de la herramienta para multiplicar los puntos de vista.
- Elegir actividades que demanden la combinación del recurso al instrumento y del recurso a la teoría.
- Reforzar el aspecto *experimental*.
- Nueva organización. Intervención explícita del profesor, desembocando en una nueva organización del espacio y tiempo de estudio, teniendo en cuenta la exigencia de una socialización de los procesos de instrumentación.

que resultaron ser muy útiles para promover algunos procesos de instrumentación, como se señala en la Sección 6.5.4.

7.2.2. EN RELACIÓN CON LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

En la Sección 5.3. explicamos las razones que nos movieron para considerar el diseño de una Ingeniería Didáctica para llevar a cabo nuestra investigación. Esta Ingeniería, implementada en el Primer Curso de la Titulación de Matemáticas, tiene un claro carácter de diagnóstico y los datos recogidos no sólo nos permiten estudiar el aprendizaje de los estudiantes, sino también la misma puesta en escena de la Ingeniería.

Nuestro diseño, como se explicita en el Capítulo 3 ha sido construido teniendo en cuenta las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva de la integral impropia.

La dimensión epistemológica nos permitió la reconstrucción de una secuencia que estuviera más acorde con los orígenes del cálculo de integrales impropias, tomando las nociones de generalización y de área como elementos motivadores. De esta forma, se le dio un rol más activo al registro gráfico y se pudo producir la génesis de resultados susceptibles de institucionalización a partir del estudio de situaciones gráficas. La idea de área nos permite también recurrir a la teoría de series para generalizar resultados y construir contraejemplos a ciertas intuiciones erróneas y obstáculos que surgen al extender la noción de área (y volumen) al campo de figuras no acotadas.

Mediante el estudio de la dimensión didáctica pudimos analizar la evolución de los programas en nuestra Universidad y encontrar razones que expliquen la forma en que habitualmente se enseña la integral impropia (algunas motivadas, posiblemente, por la propia evolución histórica del concepto).

El estudio de la dimensión cognitiva nos permitió evaluar el aprendizaje de la integral impropia en los estudiantes universitarios y realizar una primera clasificación de las dificultades, obstáculos y errores que este aprendizaje puede generar. Teniendo en cuenta la revisión de investigaciones más o menos recientes sobre la importancia de la visualización, la construcción de ejemplos y contraejemplos, las interacciones en la clase, el aprendizaje no algorítmico y algunas dificultades ligadas al mismo concepto de integral definida, y basándonos en las dos dimensiones anteriores, pudimos diseñar una secuencia que tenga en cuenta explícitamente las dificultades que el aprendizaje de la integral impropia puede provocar.

Nuestra experimentación, aunque deba ser reforzada con la retroalimentación de datos obtenidos en esta ocasión, ha mostrado la viabilidad teórica de un tipo de enseñanza universitaria en donde el contrato didáctico usual sufra alteraciones sustanciales y el estudiante se responsabilice de su propio aprendizaje (con la ayuda del profesor y la colaboración con otros estudiantes), así como de las reconstrucciones necesarias. También se ha mostrado la viabilidad de una secuencia en donde se dé un papel privilegiado al registro gráfico, que ha mostrado haber mejorado las concepciones de los estudiantes y proveerlos de nuevas estrategias para abordar problemas de diferente tipo (gracias a la construcción de ejemplos y contraejemplos gráficos, a la posibilidad de buscar interpretaciones gráficas o de poder prever y controlar sus resultados), a las cuestiones no algorítmicas y a la reflexión grupal para introducir nuevos conceptos.

Es cierto que todo este diseño ha restado tiempo al desarrollo de habilidades algorítmicas, pero desde las primeras sesiones fue obvio que los estudiantes no contaban previamente con estas habilidades, así que el desarrollo de un aprendizaje conceptual a la vez que algorítmico, en el tiempo previsto, parece una tarea imposible. Sin embargo, el uso del registro gráfico y de ejemplos y contraejemplos parece haber dotado a algunos estudiantes de nuevos recursos para abordar problemas que antes aparecían como imposibles de abordar. Por otro lado, también se ha mostrado que los cambios realizados en la secuencia habitual han generado el interés de los estudiantes (a pesar del aumento en la dificultad conceptual).

Sin embargo, no todo viene dado automáticamente y este tipo de enseñanza ha de superar también dificultades para sobrevivir. En primer lugar, es indispensable generar una actitud positiva de los estudiantes desde el principio, que permita tanto su implicación progresiva en las tareas como el aumento de su responsabilidad. Ha de tenerse en cuenta la gran inversión de tiempo que requiere la implementación de debates científicos, por lo que es conveniente preparar a los estudiantes *antes* del desarrollo efectivo de este tipo de experiencias. Durante el desarrollo, ha sido claro que uno de los puntos delicados es la gestión del tiempo. La búsqueda de un equilibrio entre los momentos de trabajo grupal, las discusiones colectivas y la institucionalización de resultados ha provocado un *desfase* en la organización de las primeras cuatro sesiones que ha llevado a suprimir actividades colectivas en las siguientes cuatro sesiones para poder abordar todos los contenidos que exige nuestra institución. A pesar de esto, no hay que ver este *desfase* como una especie de fatalidad, sino como un elemento positivo causado por la implicación de los estudiantes en las tareas propuestas y la riqueza de las discusiones grupales, que han permitido la institucionalización de resultados y la presentación de contraejemplos a la intuición. Esta situación apoya nuestra conjetura de que es posible hacer que los estudiantes universitarios se impliquen realmente en su aprendizaje y se conviertan en productores de conocimiento.

También es indispensable poder reorganizar los contenidos, conocer el estado *real* de conocimientos de los estudiantes y enfrentarse a ciertas restricciones institucionales: el estatus habitual dado al registro gráfico, el papel del debate y del trabajo en grupos, el papel del estudiante en la generación de conocimiento, la formación fuertemente algorítmica (pero con graves deficiencias) y poco conceptual... que suponen una primera barrera a superar en la integración de este tipo de secuencias.

En cuanto a las dos conjeturas principales que han guiado el diseño y puesta en escena de nuestra Ingeniería, a saber:

1. El uso del registro gráfico de forma más activa durante la instrucción y en los ejercicios y problemas propuestos puede paliar algunas de las carencias detectadas en nuestros estudiantes.
2. El aprendizaje de los nuevos conceptos puede utilizarse para reforzar los conocimientos previos de los estudiantes.

los datos recogidos y las observaciones realizadas parecen apoyar su pertinencia.

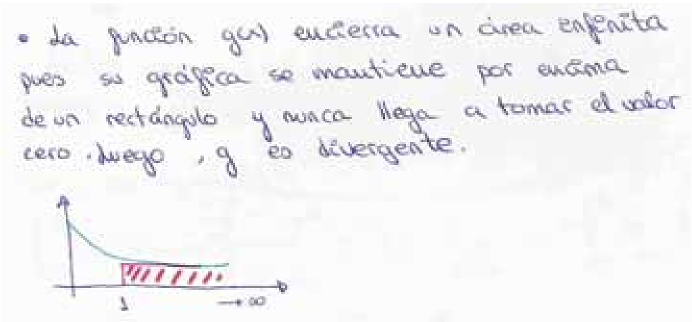
Una de las cuestiones que se plantean como consecuencia de todo lo anterior, es la de la viabilidad de nuestra Ingeniería como secuencia de enseñanza habitual. Como se ha visto, su diseño rompe claramente no sólo con la presentación tradicional de los contenidos (y la cultura matemática existente habitualmente en la Universidad), sino también con la metodología universitaria tradicional (véanse los *mitos* que señala Alsina, 2001). Sin embargo, la experimentación nos ha permitido ver que los estudiantes aceptan de buen grado estos cambios y que, temporalmente, es posible la implementación.

La transmisión del diseño, manteniendo la riqueza de los *medios* construidos, y equilibrando más los momentos grupales de las primeras y las últimas sesiones, se plantea como una de las cuestiones más naturales para el futuro.

7.3. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES

Los resultados de nuestra dimensión cognitiva (González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2004a, 2004f, 2005a) no se contradicen con los de otras investigaciones. Orton (1983) ya detectó el dominio del modo de trabajo algebraico sobre el gráfico en las producciones de los estudiantes, que puede originar dificultades posteriores. Pensamos que esta situación no es sino una consecuencia de los hábitos de enseñanza y de las formas económicas de adaptación de los estudiantes. Calvo (1997) ya señala que hay que enseñar a los estudiantes a comprender los aspectos visuales de los conceptos que aprenden, pues no es algo que realicen solos, a pesar de que el trabajo gráfico suela ser dejado para el trabajo privado del estudiante (Maschietto, 2001).

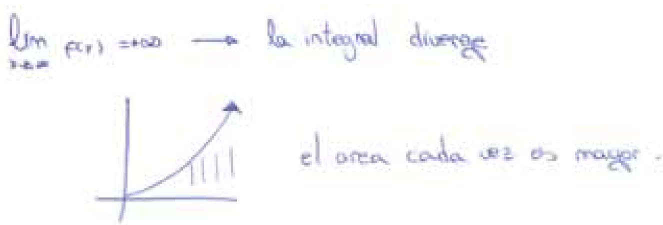
En un contexto como el nuestro, en donde se trabaja con figuras no acotadas, unas habilidades de visualización no desarrolladas pueden dar lugar a numerosos errores y falsas conclusiones. La falta de coordinación entre registros (o el no reconocimiento del registro gráfico) también dificulta la respuesta a tareas propuestas en el registro gráfico. Por ejemplo, en el Problema 21 se sitúa una función $g(x)$ desconocida bajo la curva de $1/x$ y se pide estudiar el carácter de su integral. CF, en presencia de la gráfica, ignora la información algebraica:



Sin embargo, pensamos que intervenciones didácticas adecuadas pueden aliviar estas dificultades. Ya vimos que en la Sesión 1 muchos estudiantes tienen problemas para aceptar el argumento gráfico de YG, aunque posteriormente muestran su aceptación de argumentos gráficos y los mismos estudiantes los utilizan en sus respuestas.

Otra de las dificultades que señalamos en González-Martín (2002) provenía de la ausencia de significado de herramientas fundamentales para comprender el concepto de integral impropia (límites, convergencia, integral definida, series...), sin las cuales el desarrollo de una comprensión adecuada es más costoso.

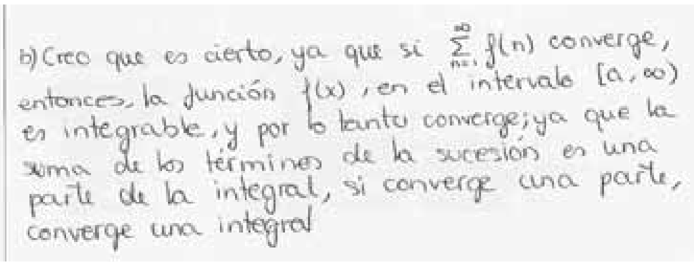
En el caso de los procesos límite, el uso del infinito potencial (combinado con la idea de área) puede llevar a *sobre-generalizaciones* y a afirmar que una figura infinita, como siempre se añade área, no tendrá un área acotada, a pesar de haber desarrollado técnicas específicas para la evaluación de esta cuestión. Vimos en estudiantes como AC y YC el uso de la frase "*el área cada vez es mayor*" que, aunque en principio se interpretó como un comentario casual:



posteriormente hizo a estos estudiantes concluir la divergencia de ciertas integrales argumentando el mismo razonamiento.

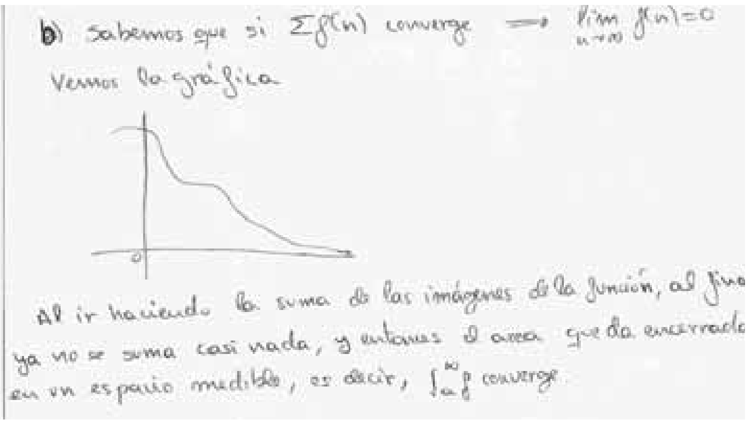
Un concepto que causa más dificultades de las previstas es el de suma de Riemann (Bezuidenhout y Olivier, 2000) y el de serie asociada a una función. Estas dificultades, que se pueden volver verdaderos obstáculos (como se ha observado en algunos estudiantes y la recurrencia con que aparecen), tienen un origen claramente didáctico. Los estudiantes aprenden formalmente el concepto de suma de Riemann sin realizar actividades de visualización. Calvo (1997) ya señala que los estudiantes manejan aspectos formales sin desarrollar ideas intuitivas y, en la definición de integral definida, no se recalca qué elementos son necesarios y cuáles no.

Por otro lado, hemos comprobado que muchos estudiantes no tienen imágenes visuales de la suma de una serie. Por tanto, prevalece la idea de "suma" (al estar los dos conceptos carentes de una imagen) y los estudiantes tienden a confundirlos:

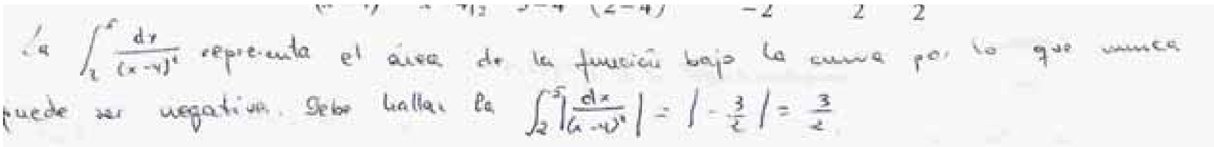


lo que les lleva a razonamientos erróneos.

Relacionado con la anterior está el dominio de una enseñanza prototípica con ejemplos continuos y monótonos (Tall, 1991b, 1992a; Artigue, 1995a; Evangelidou *et al*, 2004). Estos ejemplos reducen el repertorio de los estudiantes, que basan todos sus razonamientos en gráficas continuas y monótonas, lo que les lleva también a falsas conclusiones:



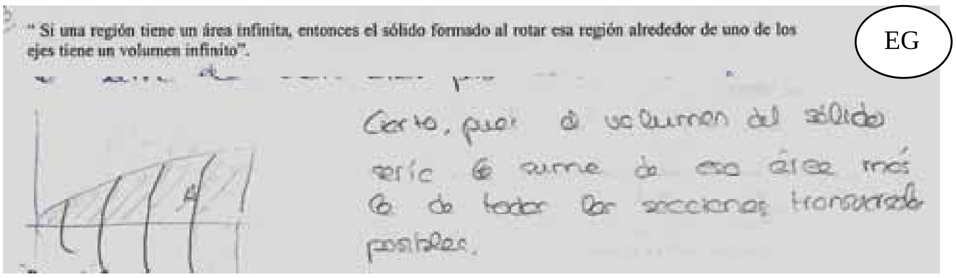
Entre los obstáculos que ya habíamos localizado, está el generado por la concepción errónea de que la integral definida es siempre un área, y por tanto ha de dar un valor positivo. Su origen nos parece claramente didáctico y ya ha sido reportado por Calvo (1997), Turégano (1998) y Bezuidenhout y Olivier (2002). Sin embargo, parece mostrarse posteriormente resistente y vemos cómo, después de haber desarrollado nuestras sesiones haciendo hincapié en los signos de la función, aún hay estudiantes que afirman que la integral debe dar un valor positivo.


La $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$ representa el área de la función bajo la curva por lo que nunca puede ser negativa. Debo hallar la $\int_2^5 \left|\frac{dx}{(x-4)^2}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Las concepciones meramente operativas de la integral pueden también constituirse posteriormente en obstáculo, pues impiden al estudiante conceptualizar la función integral $F(x)$ y darle un carácter dinámico (Calvo, 1997; Carlson, Persson y Smith, 2003; Evangelidou *et al*, 2004).

Dos obstáculos que ya habíamos localizado, relacionados directamente con la integral impropia, son los de *homogeneizar dimensiones* y de *ligación a la compacidad* (Sección 3.3.4.), que aparecen también en el devenir histórico (Sección 3.1.2.) y se relacionan, sin duda, con el obstáculo de *heterogeneidad de las dimensiones* (Schneider, 1991) y el uso del infinito potencial (Tall, 1992a, 1992b).

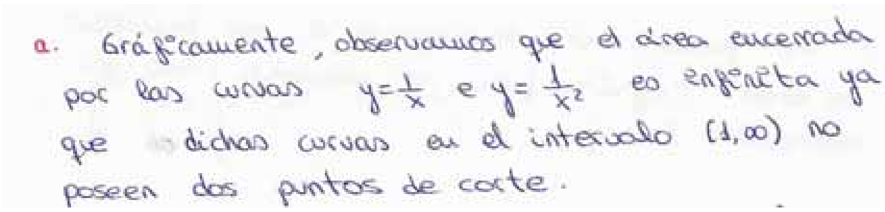
En cuanto a la *homogeneización de dimensiones*, aparece el efecto que Schneider (1991) describe y algunos estudiantes conciben un volumen como el agregado de muchas superficies, lo que les lleva a conclusiones erróneas:


“ Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito”.

EG

Cierto, pues el volumen del sólido sería la suma de esa área más la de todas las secciones transversales posibles.

Relacionado con la *ligación a la compacidad*, observamos que algunos estudiantes, después de haber mostrado saber realizar los cálculos algebraicos necesarios, argumentan que el área entre $1/x$ y $1/x^2$ en el intervalo $[1, \infty)$ es infinita porque las curvas no se cortan:


a. Gráficamente, observamos que el área encerrada por las curvas $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{1}{x^2}$ es infinita ya que dichas curvas en el intervalo $(1,\infty)$ no poseen dos puntos de corte.

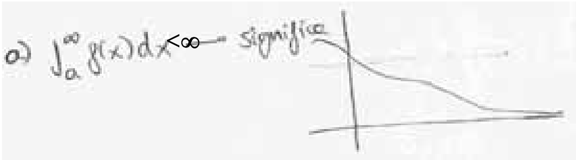
Hemos encontrado evidencias de que una forma de combatirlos es el trabajo explícito combinando los registros gráfico y algebraico, para que el estudiante cuente con un repertorio amplio de funciones que le ayuden a contradecir las falacias de la intuición. En el caso de la estudiante EG, son las propias preguntas del Test de contenidos las que le hacen darse cuenta de su respuesta incorrecta. Sin embargo, estos obstáculos parecen haberse mostrados resistentes. En las sesiones se ha escrito claramente que:

“*área acotada* $\not\Rightarrow$ *función acotada*

$$\int_a^\infty f(x)dx < \infty \not\Rightarrow f(x) < k\text{”}$$

pero estas concepciones siguen apareciendo en los estudiantes.

La presencia de concepciones monótonas y continuas agrava los efectos de este obstáculo:



Entre los obstáculos que han aparecido más resistentes de lo esperado en nuestro diseño, señalamos la concepción de que $f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$ (que también aparece en el campo de las series). A pesar de mostrar a los estudiantes ejemplos sencillos que prueban la falsedad de este enunciado, esta concepción ha vuelto a aparecer en el Test de contenidos (incluso en estudiantes que no respondieron así en los problemas entregados). En este caso, el contraejemplo típico ($1/x$) es fácil de comprobar, por lo que si se desarrolla una actitud de comprobar las propias afirmaciones con ejemplos (Alcock, 2004) se podría combatir esta situación.

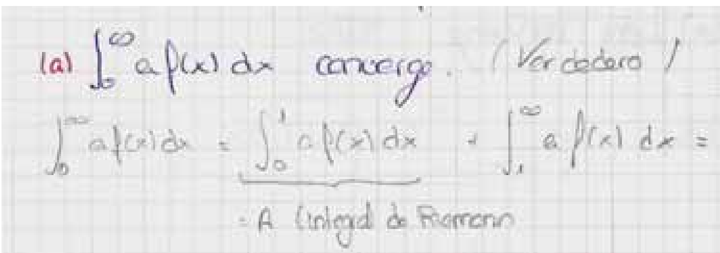
Entre los errores que hemos encontrado, aparece una tendencia a aplicar resultados en situaciones en que no son válidos, o técnicas en casos innecesarios.

Ya se había registrado (González-Martín, 2002) el caso de estudiantes que dividen una integral en dos y calculan su valor calculando sólo una de las dos integrales, pues así se hace para estudiar el carácter (para estudiar el carácter de la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, si se compara con la integral de $1/x^2$, es necesario separar la integral y tomar un intervalo que no contenga al 0).

También se producen errores por la no comprobación de que se dan las condiciones para aplicar un resultado. Así, varios estudiantes comparan con las funciones $1/x^k$ sin asegurarse de que el intervalo de integración no contenga al 0. De este modo, pueden comparar con $1/x^2$ en $[0, \infty)$ y afirmar que la integral será divergente (a pesar de que se sabe que su integral es convergente).

Esta tendencia a no comprobar si el 0 puede o no estar en el intervalo de integración se observó en la Sesión 4, al enunciar el criterio de comparación del $\lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$.

En cuanto al uso de técnicas no necesarias, se observa que EG tiende a dividir el intervalo de integración (como extensión de los casos anteriores) en situaciones donde no es necesario:



También algún estudiante (CF, NG) ha confundido los criterios de convergencia de la familia $1/x^k$ y $\frac{1}{(x-b)^r}$ (precisamente, el uso de parámetros distintos, k y r, obedece a evitar estas confusiones) y ha concluido resultados erróneamente.

Destacamos también el caso de SM, que parece desarrollar la impresión de que la forma correcta de responder a las preguntas es usar los resultados “formales”. De este modo, para deducir el carácter de una integral hay que usar un Criterio o para calcularla, hay que usar cambio de variable.

Finalmente, señalamos errores no esperados en el cálculo de primitivas (Camacho y Aguirre, 2001) y otros errores que son de carácter meramente aritmético.

7.4. LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

En primer lugar, conviene recordar la cuestión mencionada en la Sección 4.3.1. sobre la posibilidad de implementar nuestra Ingeniería, tras las adaptaciones pertinentes, con estudiantes de otras titulaciones, como Física o Ingenierías, lo que podría enriquecer el tipo de situaciones que se proponen e incluso las problemáticas planteadas.

Como ya comentamos en la Sección 7.2.2., una de las cuestiones que queda abierta es la de la transmisión de nuestro diseño a otros enseñantes y su implementación regular en la enseñanza universitaria, teniendo en cuenta los datos que nuestra investigación aporta y logrando un mayor equilibrio entre las situaciones a-didácticas de las diferentes sesiones y menores *desfases* entre los análisis *a priori* y *a posteriori* (que, en esta implementación, nos han aportado gran cantidad de datos sobre el aprendizaje de los estudiantes y algunas dificultades y obstáculos que no se habían previsto).

Los análisis *a posteriori* indican que sería conveniente realizar unas sesiones preliminares donde se revisase con los estudiantes los contenidos mínimos que se van a utilizar. Estas sesiones servirían de ayuda para estimar el estado *real* de sus conocimientos y adaptar los *medios* para que fueran lo más efectivos posibles.

Por otro lado, la integración de nuestra secuencia en un proyecto mayor, podría conseguir que los estudiantes se habituaran a participar en clase *antes* de su realización, con lo que se estaría en condiciones más favorables para alcanzar el desarrollo de debates científicos.

También se citan en la Sección 1.2. algunos factores que nos llevaron a acotar nuestro campo de investigación. Uno de ellos era la ausencia de trabajos de investigación centrados en el concepto de integral impropia; sin embargo, el desarrollo de esta investigación ha arrojado una gran cantidad de elementos que pueden utilizarse para futuros proyectos y diseños.

Esta situación nos permitiría tomar en cuenta también el registro numérico, que serviría de apoyo a las nociones de convergencia, y que aparece tardíamente en la evolución histórica, con el desarrollo de los métodos de cálculo aproximado y las fórmulas de cuadratura.

En González-Martín (2002) se realiza un trabajo exploratorio que nos permite clasificar algunas dificultades, obstáculos y errores. La implementación de nuestra Ingeniería nos ha permitido confirmar la presencia de éstos, pero han aparecido nuevas dificultades, obstáculos y errores que amplían la primera clasificación y que se relacionan con otras áreas del Cálculo. Parece, pues, que futuros estudios puedan ayudar a completar nuestra clasificación y a aportar formas de aliviar sus efectos.

Es también destacable la cuestión del uso activo de la tecnología en nuestro diseño. Pensamos que se han favorecido unas condiciones ecológicas que han permitido una socialización de la *génesis instrumental* y unas producciones de los estudiantes, que muestran su satisfacción con las sesiones desarrolladas con *Maple V* y su interés en desarrollar más debido a los aportes que éstas producen.

Nuestras contribuciones podrían sentar un precedente en nuestra institución para la organización de aulas con condiciones físicas más favorables para la socialización de las técnicas de instrumentación (y permitiendo de forma más flexible la combinación del recurso al ordenador y del recurso al lápiz-papel). Además, bajo unas condiciones favorables, el uso de un CAS podría convertirse en un entorno favorable para la integración y operacionalización de los tres registros (algebraico, numérico y gráfico) para lograr un aprendizaje mucho más significativo de la integral impropia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBASIAN, R. O. y IONESCU, A. (2002). Case studies in the shortcomings of *Maple* in teaching undergraduate mathematics, *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICTM2), Hersonisos (Grecia), CD Proceedings (Wiley, J., ed.).

ALCOCK, L. (2004). Uses of example objects in proving, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 17-24.

ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991). Research on Mathematical Proof, en *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.Sd, pp. 215-230.

ALSINA, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 3-12.

APOSTOL, T. M. (1986). *Calculus, vol. 1*, Editorial Reverté, Barcelona.

ARNAUDIÈS, J. M. y FRAYSSE, H. (1988). *Cours de mathématiques – 2. Analyse (Classes préparatoires 1er cycle universitaire)*, Dunod Université, París.

ARTIGUE, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*, Thèse d'Etat (première partie), Université Paris 7.

ARTIGUE, M. (1989). Une recherché d'Ingénierie Didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire, *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 107, pp. 184-209.

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2.3), pp. 241-286.

ARTIGUE, M. (1991). Analysis, en *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pp. 167-198.

ARTIGUE, M. (1992a). The importance and limits of epistemological work in didactics, *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME16), Durham (UK), vol. 3, pp. 195-216.

ARTIGUE, M. (1992b). Didactic Engineering, en *Research in Didactics of Mathematics* (Douady, R. y Mercier, A., eds.), La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 41-65.

ARTIGUE, M. (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en *Ingeniería didáctica en educación matemática* (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., eds.), "Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamericano, México, pp. 97-140.

ARTIGUE, M. (1995b), The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education, en *Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (Pottier, Y. M., ed.), University of Western Ontario, pp. 7-22.

ARTIGUE, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education, *Notices of the AMS*, vol. 46 (3), pp. 1377-1385.

ARTIGUE, M. (2000). *Didactic engineering and the complexity of learning processes in classroom situations*. Comunicación en MADIF2, Gothenburg, Enero 2000.

ARTIGUE, M. (2001). What can we learn from educational research at University level?, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 207-220.

ARTIGUE, M. (2002a). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), pp. 245-274.

ARTIGUE, M. (2002b). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques, en *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (Guin, D. y Trouche, L., eds.), La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 243-276.

ARTIGUE, M. y LAGRANGE, J.-B. (1997). The use of computer álgebra in middle secondary mathematics (Pupils Learning Algebra with DERIVE. A Didactic Perspective), *ZDM*, 97 (4), pp. 105-112.

ASIALA, M., BROWN, A., DeVRIES, D., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education, *CMBS Issues in Mathematics Education*, Volume 6, pp. 1-32.

BALACHEFF, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique, en *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (Artigue, M., Gras, Laborde, C. y Tavignot, eds.), La Pensée Sauvage, Grenoble.

BECK, B. y SELON, I. (1999). *Analyse*, Hachette Supérieur, Francia.

BENBACHIR, A. y ZAKI, M. (2001). Production d'exemples et de contre-exemples en Analyse: Étude de cas en première d'Université, *Educational Studies in Mathematics*, 47, pp. 273-295.

BEZUIDENHOUT, J. y OLIVIER, A. (2000). Students' conceptions of the integral, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Japón, vol. 2, pp. 73-80.

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations (Recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence), en *Actes de la 11ième École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. y Floris, R., eds.) (versión electrónica en CD), La Pensée Sauvage, Francia.

BOREL, E. (1901). *Leçons sur les séries divergentes*, (reedición: IREM de París 7 Denis Diderot (1995), *Mnemosyne*, 10, pp. 5-26).

BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), pp. 77-123.

BOSCHET, F. (1997). *Exercices d'analyse: calcul intégral*, Masson, París.

BROUSSEAU, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), pp. 309-336

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (2004). *Research in mathematical education*, Regular Lecture en el *10th International Congress on Mathematics Education* (ICME10), Dinamarca (*proceedings* por aparecer).

CALVO, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales* (Tesis de Maestría), Universitat Autònoma de Barcelona (sin publicar).

CAMACHO, A. y AGUIRRE, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), 4 (3), pp. 237-265.

CAMACHO, M., DEPOOL, R. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2002). Un estudio exploratorio sobre los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para el concepto de integral definida. Póster presentado en el Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME2002).

CAMACHO, M., DEPOOL, R. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2004). A teaching sequence for the definite integral using technological tools, *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (ICME10), Dinamarca (*proceedings* por aparecer).

CAMACHO, M., DEPOOL, R. y SANTOS-TRIGO, M. (2004). Promoting students' comprehension of definite integral and area concepts through the use of *DERIVE* software, *Proceedings of the 26th North American Chapter of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA26), vol. 2, pp. 447-454, Toronto (Canadá).

CAMACHO, M. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2001a). Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92, *Números*, 45, pp. 61-68.

CAMACHO, M. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2001b). Análisis de problemas de optimización en libros de Bachillerato y resolución con la TI-92, *Aula*, 10, pp. 137-152.

CAMACHO, M. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2002a). *Análisis de una experiencia con Maple en primer curso de Ingeniería Técnica Industrial: las opiniones de los estudiantes.* Póster. Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME2002), Puerto de la Cruz (Tenerife).

CAMACHO, M. y GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2002b). Use of a competence model to describe students' understanding of concepts related to improper integration, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME26), Norwich (UK), vol. 1, pág. 219.

CAMACHO, M., GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y ROJAS, M. (2003). Posibilidades de la calculadora simbólica TI-92 para la enseñanza de las Matemáticas. Propuestas de trabajo, en *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV*, Ed. Campus, Tenerife, pp. 57-78.

CARLSON, M. P., PERSSON, J. y SMITH, N. (2003). Developing and connecting Calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the Fundamental Theorem of Calculus, *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME27), Hawaii, vol. 2, pp. 165-172.

CHEVALLARD, Y. (1991). *Concepts fondamentaux de didactique: perspectives apportées par une perspective anthropologique*, Conferencia en la Vième École d'Été de didactique des mathématiques, Plestin les Grèves, Francia.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique, en *Actes de l'U. E. de la Rochelle: Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, pp. 91-119.

DHOMBRES, J. (1993a). Is one proof enough? Travels with a mathematician of the Baroque period, *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 401-419.

DHOMBRES, J. (1993b). Las progresiones infinitas: el papel del discreto y del continuo en el siglo XVII, *LLULL*, 16, pp. 43-114.

DHOMBRES, J. (1995a). Chemins occitans de Gerbert à Fermant, en *Adégaliser en Occitanie* (Cassinet, J., ed.), Toulouse, pp. 161-200.

DHOMBRES, J. (1995b). L'innovation comme produit captif de la tradition: entre Apollonius et Descartes une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-Vincent, en *Geometria, Flussioni e Differenziali (Osservazioni sul rapporto fra tradizione e innovazione nella Matatematica del Seicento)* (Panza, M. y Roero, C. S., eds.), Edizioni "La città del Sole", Nápoles, pp. 17-101.

DHOMBRES, J. (2000). La question du repère chez Descartes et dans la postérité cartésienne. Essai sur le concept de banalisation en histoire des sciences, en *Les "enfants naturels" de Descartes* (Radelet-de Grave, P. y Stoffel, J.-F. (eds.), *Réminisciences* , 4, Brepols, pp. 27-77.

DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, en *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, pp. 25-41.

DRIJVERS, P. (1994). The use of Graphic Calculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities, *International DERIVE Journal*, 1, pp. 71-82.

DRIJVERS, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5 (2), pp. 189-209.

DRIJVERS, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities, *ZDM*, 34 (5), pp. 221-228.

DRIJVERS, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*, Doctoral Thesis, Freudenthal Institute, Utrecht.

DUBINSKY, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics, en *Mathematical Thinking and Problem Solving* (Schoenfeld, A., ed.), Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 221-243.

DUBINSKY, E., SCHWINGENDORF, K. y MATHEWS, D. (1995). *Calculus, concepts and computers (Second Edition)*, McGraw-Hill, USA.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et Penseé Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Neuchatel: Peter Lang.

DUVAL, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education, Conferencia Plenaria, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Hiroshima (Japón), vol. 1, pp. 55-69.

DUVAL, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register, Regular Lecture en el *10th International Conference on Mathematics Education* (ICME10), Dinamarca (*proceedings* por aparecer).

EISENBERG, T. y DREYFUS, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics, en *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Zimmermann, W. y Cunnigham, S., eds.), Washington, pp. 25-37.

ELIA, I. y PHILIPPOU, G. (2004). The functions of pictures in problem solving, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 327-334.

EVANGELIDOU, A., SPYROU, P., ELIA, I. y GAGATSIS, A. (2004). University students' conceptions of function, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 351-358.

FERNÁNDEZ, J. (1990). *Análisis Matemático I* (Tomos 1 y 2), UNED, Madrid.

FUGLESTAD, A. B. (2004). ICT tools and students' competence development, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 439-446.

FURINGHETTI, S. y MORSELLI, F. (2004). Between affect and cognition: Proving at University level, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 3, pp. 369-376.

GARBÍN, S. (1998). *Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de Bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio*. (Tesis de Maestría), Universitat Autònoma de Barcelona (sin publicar).

GIL, N. (2003). *Creencias, actitudes y emociones en el aprendizaje matemático*, Memoria de Proyecto de investigación de Doctorado, Departamento de Psicología y Sociología de la Educación, Universidad de Extremadura.

GOLDIN, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research, en *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (Kelly, A. E. y Lesh, R. A., eds.), Lawrence Erlbaum Associates, London, pp. 517-546.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia* (Tesina), Universidad de La Laguna (sin publicar).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2005a). Aprendizaje no rutinario en el nivel universitario. El caso de la integral impropia, *Actas del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (CIBEM V), Oporto (Portugal) (por aparecer).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2005b). The use of technology and mathematical results in parallel. A case with improper integration, aceptado para ser presentado en la *57th CIEAEM Conference*, Sicilia (Italia).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (2005c). Use of examples and counterexamples in University teaching. The Improper Integral, aceptado para ser presentado en el *27th North American Chapter of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA27), Virginia (USA).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. (Ed.) (2005d). *Money Puzzles* (Klymchuk, S.), Colección "El Rompecabezas", Ed. Nivola (por aparecer).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2001). Temas matemáticos para el Bachillerato: Caos y fractales, una introducción, en *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, Ed. Campus, Tenerife, pp. 81-98.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2002a). The improper integral. An exploratory study with First-Year University Students, *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICTM2), Hersonisos (Grecia), CD Proceedings (Wiley, J., ed.).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2002b). The comprehension of the concept of improper integral in Mathematics students: representation and transference, *Proceedings of the 54th CIEAEM Conference*, Granada: Ed. Proyecto Sur (por aparecer).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2003). Non-routine situations and new technologies in University teaching. The improper integral, *Proceedings of the 55th CIEAEM Conference*, Płock (Polonia) (por aparecer).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004a). What is First-Year Mathematics students' actual understanding about improper integration?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (1), pp. 73-89.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004b). A teaching experience at university level promoting the use of different representation systems, *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (ICME10), Dinamarca (*proceedings* por aparecer).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004c). Legitimisation of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 2, pp. 479-486.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004d). La enseñanza y aprendizaje de la Integral Impropia: algunos resultados de investigación relacionados con el registro gráfico, *Actas del Grupo de Trabajo de Cálculo del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), La Coruña (España) (por aparecer en formato CD).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004e). Research and practice at University level. The improper integral, *Proceedings of the 26th North American Chapter of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA26), vol. 1, pp. 186-187, Toronto (Canadá).

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2004f). La integral impropia: algunos resultados de investigación, *Épsilon*, 57, 19 (3), pp. 391-406.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2005a). Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 23 (1), pp. 81-96.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2005b). La integral impropia. Una ingeniería didáctica para su enseñanza, en *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (Hitt, F. y Cortés, C., eds.), Morevallado Editores, México, pp. 265-283.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. y CAMACHO, M. (2005c). The understanding of improper integration. A case study, *Journal of Mathematical Behavior* (en revisión).

GROUPE AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse*, De Boeck Wesmael, Bruselas.

GRUENWALD, N. y KLYMCHUK, S. (2002). Using Counter Examples to Enhance Students' Conceptual Understanding in Engineering Undergraduate Mathematics: A Parallel Study, *Proceedings of the Second International Conference on Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level* (ICTM2), Hersonisos (Grecia), CD Proceedings (Wiley, J., ed.).

GRUENWALD, N. y KLYMCHUK, S. (2003). Using Counter-Examples in Teaching Calculus, *The New Zealand Mathematics Magazine*, 40 (2), pp. 33-41.

GUIN, D. y TROUCHE, L. (1998). Environnements "Calculatrice symbolique", *Actes du Colloque Francophone Européen: Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques* (Guin, ed.), Montpellier (Francia), pp. 61-78.

GUIN, D. y TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, pp. 195-227.

GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas, en *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática* (Gutiérrez, A., ed.), Editorial Síntesis, Madrid, pp. 149-194.

de GUZMÁN, M. y RUBIO, B. (1992). *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático* (2)*: funciones, integrales, derivadas*, Ediciones Pirámide, Madrid.

HAUCHECORNE, B. (1988). *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses, París.

HAYEK, N. (1986). *Una introducción al Análisis Matemático*, Campus, La Laguna.

HEID, M. K., BLUME, G.W., FLANAGAN, K., ISERI, L. y KERR, K. (1998). The Impact of CAS on Nonroutine Problem-Solving by College Mathematics Students, *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 5 (4), pp. 217-249.

HITT, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum, *Revista Educación Matemática*, 10 (2), pp. 23-45.

HITT, F. (2000a). *Construcción de conceptos matemáticos y de Estructuras Cognitivas*, segunda versión del artículo presentado en el *Working Group*: *Representations and mathematics visualization* del PME-NA22, Tucson (Arizona), pp. 131-147.

HITT, F. (2000b). *Construcción de conceptos matemáticos y uso de calculadoras simbólicas*, presentado en *The Fourth International DERIVE-TI89/92 Conference* (UK).

HITT, F. (2000c). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones, en *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*, sobre el XXV Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México DF.

HITT, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática, en *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (Gómez, P. y Rico, L., eds.), Granada, Editorial Universidad Granada, pp. 165-177.

HITT, F. (2005). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*, en *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (Hitt, F. y Cortés, C., eds.), Morevallado Editores, México, pp. 81-107.

HITT, F. y BORBÓN, A. (2004). Teachers' conceptions related to differential calculus' concepts, *Proceedings of the 26th North American Chapter of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA26), vol. 1, pp. 143-149, Toronto (Canadá).

HUGHES-HALLET, D., GEASON, A. M., McCALLUM, W. G. *et al* (2002). *Single and Multivariate Calculus*, John Wiley and Sons, New York.

IMAZ, C. (2001). ¿Qué pasa con el infinito?, *Avance y perspectiva*, 20, pp. 305-311.

KELLER, B. A. y RUSSELL, C. A. (1997). Effects of the TI-92 on Calculus Students Solving Symbolic Problems, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 4 (1), pp. 77-97.

KENDAL, M., STACEY, K. y PIERCE, R. (2002). L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, en *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (Guin, D. y Trouche, L., eds.), La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 243-276.

KING, K., HILLEL, J. y ARTIGUE, M. (2001). Technology. A working group report, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 349-356.

KLYMCHUK, S. (2001). Counter examples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes: A case study, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME25), Utrecht (Holanda), vol. 1, pág. 326.

KLYMCHUK, S. (2004). *Counter-examples in Calculus*, Math Press, Auckland (New Zealand).

LAGRANGE, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, pp. 51-81.

LAGRANGE, J-B., ARTIGUE, M., LABORDE, C. y TROUCHE, L. (2001). *A Meta Study on IC Technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration*, Contribución en la *25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME25), Utrecht (Holanda).

LEGRAND, M. (1997). *La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique*, en REPÈRES-IREM, nº 27.

LEGRAND, M. (2001). Scientific debate in Mathematics courses, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 127-135.

LEUNG, A. y WAH CHAN, K. (2004). Visual reasoning in a computational environment: a case of graph sketching, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 3, pp. 233-240.

LOVE, W. P. (1989), Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces, *Mathematics Teacher,* 82 (1), pp. 60-65.

MARGOLINAS, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement, en *Actes de l'U. E. de la Rochelle: Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques,* pp. 3-16.

MASCHIETTO, M. (2001). Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'Analyse à l'Université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (1.2), pp. 123-156.

MASCHIETTO, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycee: les debuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*, Tesis Doctoral, Université Paris 7 y Università di Torino, IREM Paris 7.

MASCHIETTO, M. (2004). The introduction of Calculus in 12th Grade: The role of artefacts, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 3, pp. 273-280.

MASON, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level: working group report, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 71-86.

MONAGHAN, J., JOHNSON, P., BERRY, J. y MAULL, W. (1999). Routine questions and examination performance, *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME23), Israel, vol. 2, pp. 105-112.

MULLER, E. R. (2001). Reflections on the sustained use of technology in undergraduate mathematics education, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 381-394.

NERIA, D. y AMIT, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 3, pp. 409-416.

ORTEGA, J. (1993). *Introducción al Análisis Matemático*, Labor, Barcelona.

ORTON, A. (1983). Students' understanding of integration, *Educational Studies in Mathematics*, 14 (1), pp. 1-18.

PIER, J.-P. (1996). *Histoire de l'intégration – Vingt-cinq siècles de Mathèmatiques,* Masson, París.

POIRIER, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques*, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc. (ERPI), Canadá.

QUESADA, A. y MAXWELL, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in Precalculus, *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 205-215.

RASSLAN, S. y TALL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME26), Norwich (UK), vol. 4, pp. 89-96.

REPO, S. (1994). Understanding and Reflective Abstraction: Learning the Concept of Derivative in the Computer Environment, *International DERIVE Journal*, 1 (1), pp. 97-113.

RICHARD, P. R. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics*, 57, pp. 229-263.

ROBERT, A. y SPEER, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 283-299.

RUDIN, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*, McGraw-Hill, México.

RUIZ, M. L. (2003). Aprendizaje y matemáticas, en *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (Chamorro, M. C., ed.), Pearson Educación, Madrid, pp. 31-68.

SALIN, M.-H. (2002). Répères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations, en *Actes de la 11ième École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. y Floris, R., eds.) (versión electrónica en CD), La Pensée Sauvage, Francia.

SCHLOEGLMANN, W. (2004). Routines in non-routine problem solving processes, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen (Noruega), vol. 4, pp. 161-168.

SCHNEIDER, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" de surfaces et de solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (2.3), pp. 241-294.

SCHOENFELD, A. (2001). Purposes and methods of research in Mathematics Education, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 221-236.

SELDEN, A. y SELDEN, J. (1998). The Role of Examples in Learning Mathematics, *Research Sampler*, 5 (http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html).

SELDEN, A. y SELDEN, J. (2001). Terciary mathematics education research and its future, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 237-254.

SELDEN, J., MASON, A. y SELDEN, A. (1989). Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?, *Journal of Mathematical Behavior*, 8, pp. 45-50.

SELDEN, A., SELDEN, J., HAUK, S. y MASON, A. (1999). *Do Calculus students eventually learn to solve non-routine problems*, Technical Report: Department of Mathematics (5), Tennessee Technological University.

SIMMONS, G. F. (2002). *Cálculo y Geometría Analítica*, Madrid: McGraw Hill.

SKEMP, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Ed. Morata, Madrid.

SMITH, D. A. (2001). The active / interactive classroom, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 167-178.

SOCAS, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, en *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (Rico, L. y otros, eds.), Horsori, Barcelona, pp. 125-154.

SOCAS, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna (sin publicar).

SPIVAK, M. (1987). *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Editorial Reverté, Barcelona.

TALL, D. (Ed.) (1991a). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London.

TALL, D. (1991b). The psychology of advanced mathematical thinking, en *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pp. 3-21.

TALL, D. (1992a). *Students' Difficulties in Calculus*, Presentación plenaria en el *Working Group* 3, *7th International Congress on Mathematics Education* (ICME7), Québec (Canadá).

TALL, D. (1992b). The transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grouws, D. A., ed.), MacMillan Publishing Company, New York, pp. 495-514.

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

TERRACHER, P.-H. y FERACHOGLOU, R. (1998). *Math. Enseignement Obligatoire. Terminale S*, Hachette Éducation: Collection Terracher, París.

THOMAS, G. B. y FINNEY, R. L. (1996). *Calculus and Analytic Geometry* (*9th Edition*), USA: Addison-Wesley Publishing Company.

TROUCHE, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice": Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de Doctorat, IREM, Université Montpellier II.

TROUCHE, L. (2000a). *Calculatrices « symboliques ». Un défi Mathématique*, Ed. Reseau Académique Languedoc-Rousillon, Collection Accompagner au Lycée.

TROUCHE, L. (2000b). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics*, 41, pp. 239-264.

TROUCHE, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, en *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (Guin, D. y Trouche, L., eds.), La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 243-276.

TURÉGANO, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo, *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), pp. 233-249.

VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics, en *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London.

WATSON, A. y MASON, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME26), Norwich (UK), vol. 4, pp. 378-385.

ZILL, D. G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*, México: Grupo Editorial Iberomérica.

OTROS DOCUMENTOS CONSULTADOS:

BOE nº 242, 9 de octubre de 1969.

BOE nº 237, 4 octubre 1971.

BOE nº 214, 7 septiembre 1995.

[GU1] Guía Académica, Curso 1994/95. Facultad de Matemáticas – Universidad de La Laguna, sin publicar.

[GU2] Guía Académica, Curso 2001/02. Facultad de Matemáticas – Universidad de La Laguna, sin publicar.

[GU3] Guía Académica, Curso 2002/03. Facultad de Matemáticas – Universidad de La Laguna, sin publicar.

[GU4] Guía Académica, Curso 2004/05. Facultad de Matemáticas – Universidad de La Laguna, sin publicar.

[P7] Université Paris 7 – Denis Diderot, UFR de Mathématiques, CAPES Mathématiques 2003-2004. Intégration – Rappels.

PÁGINAS WEB CONSULTADAS:

[GA1] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/De_Beaune.html

[GA2] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tacquet.html

[MA] http://www.fmat.ull.es

[UL] http://www.ull.es

[VU] http://www.vuibert.com/DOC/46-40problemes.pdf

RESUME DE THESE :

LA GENERALISATION DE L'INTEGRALE DEFINIE DEPUIS LES PERSPECTIVES NUMERIQUE, GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE EN UTILISANT DES ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES.

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT ET D'APPRENTISSAGE.

ALEJANDRO S. GONZALEZ-MARTIN

Chapitre 1
Présentation de la recherche

1.1. CONSIDERATIONS GENERALES

Lors de la réalisation du Mémoire de Maîtrise intitulé *Difficultés, obstacles et erreurs dans l'apprentissage du concept d'intégrale impropre* (González-Martín, 2002) nous avons précisé que ce travail n'abordait que la problématique de l'apprentissage de l'intégrale impropre. En conséquence, une des questions qui restait ouverte était celle de la construction d'une séquence d'enseignement - apprentissage, où l'utilisation des différents registres et le travail avec des exemples et des contre-exemples soit explicite. De plus, la combinaison avec le recours à un environnement informatique semblait très intéressante.

Ce Mémoire faisait clairement apparaître la préférence chez les étudiants pour un travail dans le registre algébrique, qui est assez souvent beaucoup plus algorithmique (et cela malgré leurs déficiences dans ce registre). L'emploi de graphes comme aide aux raisonnements n'est pas un outil habituel chez les élèves, qui parfois refusent même le travail dans le registre graphique (quelques-uns semblent ne pas le reconnaître comme un registre de travail mathématique).

En prenant en compte notre cadre théorique (qui est explicité dans le deuxième chapitre), nous pensons que la compréhension d'un concept mathématique a besoin de la coordination d'au moins deux de ses représentations. Notre séquence d'enseignement essaye d'engendrer ces coordinations chez les élèves.

Nous pouvons alors dire que les objectifs principaux de notre recherche sont l'analyse des processus de pensée mathématique avancée impliqués dans le développement et la manipulation d'intégrales impropres considérées comme une généralisation des intégrales définies ainsi que l'observation des obstacles, des difficultés et des erreurs les plus communs apparaissant dans ce contexte, pour développer postérieurement une séquence d'enseignement qui fasse usage des nouvelles technologies, modifiant de cette manière le schéma d'enseignement qui a lieu d'habitude à l'Université. Les apports principaux de notre dessin consistent en :

- L'utilisation systématique d'exemples et de contre-exemples,
- La conjugaison des registres de représentation graphique et algébrique,
- Le recours explicite aux connaissances antérieures sur les séries et les intégrales définies,
- La dotation de l'élève d'une plus grande responsabilité dans son processus d'apprentissage,
- L'utilisation du logiciel *Maple V*.

Les recherches développées jusqu'à présent montrent bien que, même s'il est relativement aisé d'apprendre aux élèves des techniques pour calculer des dérivées et des intégrales, il y a de grandes difficultés à faire véritablement entrer les étudiants dans le champ de l'Analyse et à leur faire atteindre une compréhension satisfaisante des concepts et méthodes de pensée qui sont le centre de ce champ. Face aux difficultés rencontrées, l'enseignement traditionnel (plus particulièrement universitaire) tend à se centrer sur des pratiques algorithmiques et algébriques et à évaluer essentiellement les compétences acquises dans ces activités. Ces pratiques sont la source chez les élèves de certaines difficultés dont notre étude montre la persistance.

Ce travail a été développé à travers cinq phases. Tout d'abord, notre étude a été délimitée par le manque de recherches dédiées au concept d'intégrale impropre (ce qui nous a amené à nous concentrer sur l'utilisation des registres graphique et algébrique, en laissant de côté le registre numérique, qui n'apparaît pas dans la genèse historique de ce concept). D'autre part, notre étude a été contrainte par le manque de travaux sur la *genèse instrumentale* et sa socialisation dans un environnement d'ordinateurs et pour d'autres questions de temps. Finalement, les objectifs généraux de notre recherche sont :

1. Générer une séquence d'enseignement du concept d'intégrale impropre qui incorpore les systèmes de représentation graphique et symbolique. Cette séquence se complète avec des séances dans un environnement informatique pour renforcer les contenus.
   a. Notre séquence conjugue d'une façon plus équilibrée les registres graphique et symbolique.
   b. On a recourt d'une manière active à l'usage d'exemples et de contre-exemples, en particulier ceux qui favorisent l'utilisation du registre graphique.
   c. Les deux éléments antérieurs induisent l'emploi de problèmes non-routiniers pour améliorer la signification de l'apprentissage.
   d. On a recourt au logiciel *Maple V* pour renfoncer les contenus et favoriser la coordination entre registres.
2. Identifier les obstacles, difficultés et erreurs les plus persistants liés à notre concept.
3. Étudier à quel point les modifications du *contrat didactique* changent l'attitude des étudiants dans l'apprentissage des intégrales impropres.
4. Analyser si l'utilisation active d'exemples et de contre-exemples dans l'enseignement, de même que l'utilisation du registre graphique comme registre de travail mathématique valable, produisent des améliorations dans l'apprentissage des étudiants.
5. Analyser s'il est possible d'adapter les conditions écologiques pour la socialisation de la *genèse instrumentale* dans un contexte d'apprentissage avec des ordinateurs.
6. Analyser la viabilité pour l'observation des *genèses instrumentales* et la possibilité de généraliser quelques obstacles observés dans un contexte de calculatrices graphiques à un contexte d'apprentissage avec des ordinateurs.

La mise en œuvre de notre recherche tente de répondre aux questions qui surgissent à partir de la prise en compte de ces objectifs.

1.2. ANTECEDENTS

Cette partie est consacrée à une brève revue de littérature concernant quelques concepts utilisés dans notre séquence d'enseignement. Tous ces travaux de recherche nous ont permis de constater que l'apprentissage de l'Analyse est difficile pour les étudiants, indépendamment du pays où ils habitent (Robert et Speer, 2001).

Depuis les premières recherches développées, les concepts de limite, fonction, dérivée et intégrale (un peu plus tard) ont été traités. Orton (1983) trouve déjà que, même si les étudiants peuvent atteindre des progrès dans le mode algébrique de travail (malgré de grandes difficultés avec l'algèbre), les interprétations graphiques sont absentes ou manquent de signification quand elles sont présentes. Calvo (1997) estime aussi que l'élève n'a pas assez de temps pour se familiariser avec tous les nouveaux concepts qui lui sont montrés. Par exemple, quand on introduit la définition d'intégrale définie, l'habitude veut que l'on présente une courbe sans pathologies, dans un intervalle positif, avec un nombre raisonnable de rectangles… mais on n'insiste pas sur quels sont les éléments vraiment nécessaires. De plus, l'identification de l'intégrale comme une aire peut donner lieu à de fausses attributions de signification et créer un obstacle à la compréhension consistant en la croyance que l'intégrale sera toujours positive (ce qui a aussi été remarqué par Turégano, 1998, et Bezuidenhout et Olivier, 2000).

Par rapport aux intégrales impropres, il semble d'après Orton (1983), Rasslan et Tall (2002), Camacho et Aguirre (2001) et Hitt (2005) que les étudiants (et même certains professeurs !) ne soient pas habitués à vérifier si la fonction à intégrer est bien définie dans l'intervalle d'intégration (ce qui peut signifier une ignorance des conditions sous lesquelles on définit l'intégrale de Riemann, ou une absence d'images des fonctions avec lesquelles ils travaillent). Pour les étudiants qui ne connaissent pas ce concept, il n'y pas de méthodes disponibles pour les calculer et parfois ils ne sont pas sensibles aux contradictions que la règle de Barrow peut entraîner.

Calvo (1997) indique aussi qu'après que l'étudiant est appris à estimer l'aire sous une courbe moyennant un nombre adéquat de rectangles, la variation d'une des bornes d'intégration peut provoquer des difficultés. Ceci est en lien avec l'étude menée par Artigue (1995a), qui remarque que les élèves arrivent à l'Université avec une conception de l'intégrale comme opération inverse de la dérivation et comme aire, deux conceptions assez statiques. En conséquence, la simple conception de la fonction intégrale ($F(x)=\int_a^x f(t).dt$) peut occasionner des difficultés parce qu'elle nécessite de concevoir une intégrale avec une de ses bornes variable.

Les recherches montrent également que l'absence de connections explicites des concepts mathématiques avec leurs aspects visuels est une source de difficultés (Eisenberg et Dreyfus, 1991). Une des raisons pour lesquelles les étudiants évitent la visualisation est qu'elle exige des efforts cognitifs supérieurs à ceux requis dans l'activité algorithmique. De plus, le registre graphique est d'habitude sous-estimé chez beaucoup d'institutions (qui en plus d'être plus difficile à enseigner, peut être considéré comme non mathématique). Maschietto (2001) montre bien qu'habituellement le rôle des représentations graphiques se limite à celui de simples objets à produire durant les séances d'exercices provenant d'études de fonction ou alors comme moyen d'illustrer les fonctions « usuelles » durant le cours. Certains manuels les associent à des activités spécifiques (comme l'étude locale de fonctions).

Hitt (1998) argumente également que les élèves des premières années universitaires ne réussissent pas à créer des articulations cohérentes entre différents systèmes de représentation liés à des concepts de ce niveau. D'autres auteurs (voir Eisenberg et Dreyfus, 1991) concluent que les élèves n'interprètent pas en général les graphes donnés, on peut même s'attendre à ce que certains élèves possédant un bon niveau mathématique ne prennent pas en compte leurs propres graphes, même ceux qu'ils produisent avant la résolution d'un problème, et qui pourrait leur être utile.

En dernier lieu, Elia et Philippou (2004) analysent chez des élèves de l'École Primaire différentes formes de résolution de problèmes incluant un dessin. Ces problèmes sont répertoriés selon la fonction du dessin (*décorative, représentative, organisatrice, informative*) et montrent que les élèves reconnaissent à la fonction *représentative* un rôle d'appui pour leurs processus de résolution.

Concernant le *Débat Scientifique*[1], Alibert et Thomas (1991) indiquent que l'usage de cette méthodologie nous permet de comprendre comment les élèves se représentent un certain concept mathématique et qu'elle leur permet de se débarrasser des fausses conceptions qu'ils pourraient avoir. De plus, ces chercheurs affirment que la démonstration est véritablement un outil qui peut s'employer pour améliorer les idées et éliminer les fausses intuitions.

L'expérience menée par Legrand (voir Artigue, 1995a, 1999, 2001) sur le concept d'intégrale définie est un bon exemple pour montrer que la discussion en groupe et le jeu collectif permettent aux étudiants de trouver une solution dans un temps raisonnable et que c'est le travail conjoint qui régule la dynamique de la situation (ce qui pourrait ne pas avoir lieu si les étudiants devaient résoudre le problème individuellement).

Quant à l'utilisation des problèmes routiniers, Vinner (1991) affirme que face à ce type de tâche, l'élève ne pense pas à la définition du concept impliqué, mais à son schéma d'action (qui habituellement l'amène à la réponse correcte). Ce sont les problèmes non-routiniers qui obligent l'individu à dépasser le schéma d'action. Benbachir et Zaki (2001) proposent la production d'exemples et de contre-exemples comme tâche non-routinière, en signalant que cette activité encourage le changement de registres (raison pour laquelle certains élèves ont rencontré des difficultés à cause de leur manque de pratique dans le registre graphique). Alcock (2004) montre également que l'usage d'exemples n'est pas une activité fréquente chez les élèves universitaires ; elle explique ce comportement par un manque d'expérience de leur part et l'absence de liaisons entre les énoncés mathématiques et les objets auxquels ils sont appliqués.

Ce chapitre se termine avec des travaux qui exposent les difficultés des élèves avec le concept de fonction (qui exerce une influence sur leurs apprentissages ultérieurs, puisque certaines faiblesses dans la compréhension des concepts de l'Analyse peuvent provenir d'autres concepts en rapport). Artigue (1995a) et Evangelidou *et al* (2004) montrent que beaucoup d'étudiants à l'Université ont du mal à identifier ce qu'est une fonction et que leurs critères de vérification sont liés à des prototypes communs (continuité dans le registre graphique, présence de la variable x dans le registre algébrique…). Ces difficultés produisent des contraintes à l'heure d'interpréter le Théorème Fondamental du Calcul (Carlson, Persson et Smith, 2003) et, bien sûr, un manque d'opérationalisation de la fonction intégrale ($F(x) = \int_a^x f(t).dt$).

[1] Méthodologie dont nous parlerons dans le quatrième chapitre.

Chapitre 2
Cadre théorique de la recherche

Notre cadre théorique s'articule sur deux points principaux, qui nous aident à modéliser tant les processus d'apprentissage que d'enseignement pour améliorer la compréhension des Mathématiques.

2.1. THEORIE DE DUVAL SUR LES REGISTRES DE REPRESENTATION SEMIOTIQUE

Avant Duval, d'autres auteurs (Skemp, 1980 ; Hiebert et Carpenter[2]) ont signalé l'importance des représentations dans la construction de la connaissance mathématique. Duval (2004) indique que les objets mathématiques sont des objets de la connaissance et qu'« il n'y a pas de connaissance sans représentation ». Les objets mathématiques n'étant jamais directement accessibles, on ne peut les appréhender qu'à partir de leurs représentations. Il est cependant absolument capital pour l'apprentissage des Mathématiques d'être capable de distinguer les objets mathématiques de leurs représentations.

Duval (1993) caractérise alors les représentations sémiotiques en les distinguant des représentations mentales et explique ce qu'est un registre de représentation grâce à trois activités fondamentales : la **formation** d'une représentation, le **traitement** dans le même registre et la **conversion** en une représentation d'un autre registre (conservant la totalité ou une partie de la signification initiale). Comme chaque représentation est partielle par rapport à ce qu'elle représente, l'interaction entre différentes représentations est indispensable pour la formation d'un concept. L'acquisition d'un concept chez un individu réussit au moment où il y a une coordination libre de contradictions entre les différentes représentations de l'objet.

Duval considère que l'enseignement traditionnel ne prend en compte que les deux premières activités (formation et traitement), dans l'idée que la conversion entre représentations serait automatique et qu'elle n'aurait pas de véritable importance pour la compréhension (car son résultat se limite à un changement de registre). Cependant, dans une phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel pour la conceptualisation. Si les élèves ne développent pas des activités de conversion, ils imagineront que deux représentations différentes d'un même objet sont deux objets complètement distincts.

D'un autre côté, nous prenons également en compte les apports d'autres auteurs à la théorie des registres de représentation, comme ceux de Hitt (2000a, 2000b), qui considère qu'en dehors des activités de traitement et de conversion, la confrontation avec des exemples et des contre-exemples est aussi très importante, puisqu'ils permettent la compréhension des définitions et l'abstraction de concepts. La création d'exemples et de contre-exemples est une activité non algorithmique qui exige une pensée plus flexible. Elle permet de plus de mettre en œuvre différents registres, ce qui favorise leur coordination. En outre, il est bon d'apprendre aux élèves à construire des exemples et à les utiliser pour enrichir leurs conceptions, car la tendance dans l'enseignement traditionnel est de n'utiliser que des exemples prototypiques, ce qui nuit à l'apprentissage des élèves, qui croient que seules les propriétés découlant de ces exemples existent.

[2] Voir Hitt (2001).

Hiebert et Lefevre (voir Hitt, 2000a) définissent l'importance du transfert pour la construction d'un réseau interne de connaissances. Le transfert devient très important lorsqu'on résout un « vrai » problème, car il permet d'utiliser les connaissances disponibles et de s'adapter aux nouvelles situations. Dès lors, la résolution de problèmes prend la valeur d'une activité fondamentale pour un apprentissage conceptuel. Nous mentionnons à ce sujet les travaux de Poirier (2001), Pian (voir Robert et Speer, 2001), Artigue (2001), Monaghan *et al* (1999) et Douady (voir Poirier, 2001), qui donnent les caractéristiques d'un vrai et un bon problème ainsi que les activités qu'il favorise chez un élève.

À notre avis, compte tenu de notre cadre théorique, la résolution de problèmes non-routiniers représente une activité fondamentale, qui permet la mise en œuvre de différents registres et le transfert à partir d'autres connaissances (notamment les suites et intégrales définies). De plus, cette activité nous permettra d'observer les erreurs commises par les élèves, que nous interprétons comme les traces des difficultés ou des obstacles présents (voir Chapitre 3).

2.2. La Theorie des Situations Didactiques

Pour le développement effectif de notre séquence d'enseignement nous allons nous référer aux idées de Brousseau (1988, 1998, 2004), qui reconnaît que d'habitude l'étudiant s'adapte aux situations d'enseignement en s'appuyant non seulement sur ses connaissances mathématiques, mais aussi sur ses connaissances du système éducatif pour deviner les attentes de son professeur (voir le « contrat didactique »). Il faut alors que l'étudiant adapte sa pensée et non seulement son comportement.

Artigue (2000) résume les caractéristiques principales de cette théorie ainsi que son objet fondateur, le concept de « situation ». Nous définissons les concepts de situation adidactique et de situation didactique, ainsi que les processus de *dévolution* et d'*institutionnalisation*, qui organisent les relations entre les niveaux didactique et adidactique. Un autre concept central de la théorie est celui de « milieu », système qui réagit aux actions des étudiants, tant d'une façon collaboratrice qu'antagoniste.

Dans notre approche, nous donnons un rôle privilégié au *milieu* adidactique, qui a été construit pour produire les rétroactions les plus riches possible avec les étudiants. Un élément qui sera très utilisé pour la construction de *milieux* effectifs (et qui permettra la reconstruction de l'objet « intégrale impropre ») est la résolution de problèmes non-routiniers qui servent à introduire des intuitions et de nouveaux résultats. De cette façon, l'élève est mis dans une situation problématique qui l'oblige à s'adapter en cherchant des stratégies optimales (dont l'institutionnalisation produira des connaissances sur l'intégrale impropre). De plus, nous organisons des activités pour lesquelles les moyens de résolution les plus économiques impliquent le recours au registre graphique, lui donnant un rôle de registre de travail mathématique valable chez les étudiants.

Comme nous l'avons déjà dit dans le premier chapitre, l'un de nos objectifs est la construction d'une séquence qui donne plus de responsabilité aux étudiants, et qui conjugue de manière plus équilibrée les registres graphique et algébrique. La Théorie des Situations nous offre des moyens (comme des situations qui requièrent l'utilisation de contre-exemples, d'exemples, la résolution de problèmes et la coordination entre registres) pour mettre en scène une telle séquence. Cette dernière est basée sur des analyses épistémologique, didactique et cognitive dont nous montrons les résultats dans le chapitre suivant.

Chapitre 3
Les dimensions de l'Intégrale Impropre

3.1. DIMENSION EPISTEMOLOGIQUE

La révision historique que nous avons développée montre bien que l'intégrale impropre est apparue sur la scène mathématique de forme naturelle, par une généralisation des techniques habituelles de calcul d'aires et par l'utilisation d'outils de calcul déjà connus, sans systématisation, et que certains paradoxes furent présents.

Le XVII$^{\text{ème}}$ siècle ne connaît que les calculs à partir de fonctions potentielles (sauf lorsqu'on considère la fonction logarithme) et c'est Grégoire de Saint-Vincent (précurseur de Fermat) qui a traité explicitement des intégrales impropres, motivé par l'idée d'effectuer des recherches sur ce sujet et d'en généraliser les résultats. Chez lui, le calcul d'aires de figures infinies est fortement lié à des considérations géométriques et à l'utilisation des séries. On remarque qu'en l'absence d'une théorie développée et consistante, il est contraint d'utiliser des outils déjà connus.

Fermat développe des calculs généraux pour déterminer l'aire sous des paraboles et des hyperboles à l'infini, en utilisant les progressions géométriques : il se limite à l'étude de ces courbes parce qu'elles conservent ces progressions. Torricelli est un autre mathématicien à obtenir des mesures des figures infinies, dans son cas le volume, arrivant à des valeurs finies. L'auteur ajoute une formule rhétorique pour attirer l'attention du lecteur sur ce résultat étonnant. Par ailleurs, vers le milieu du siècle, le mathématicien Wallis et le philosophe Hobbes sont les protagonistes d'une controverse sur la nature d'une figure infinie ayant un volume fini.

La nouvelle approche du XVIII$^{\text{ème}}$ introduit les développements en séries et, à partir de ce moment, le point de vue sur les intégrales impropres change. On utilise des arguments formels (l'intégrale devenant une anti-dérivée), et non plus géométriques. De plus, on ne considère plus les problèmes posés par une intervalle infinie (première espèce), mais la bonne définition de la fonction à intégrer (deuxième espèce). Bien qu'Euler réintroduise déjà des considérations géométriques (qui seront présentes chez Riemann, Cauchy et Lebesgue), l'approche formelle englobe ces considérations.

Notre approche essaye de retourner aux racines historiques de l'intégrale impropre et de l'introduire d'une façon naturelle, comme une généralisation de l'intégrale de Riemann permettrant le calcul de magnitudes infinies, l'interprétation graphique étant alors à nouveau présente. De plus, avant la systématisation d'une théorie, nous développons des intuitions chez les élèves qui leur permettront plus tard de recourir aux connaissances antérieures et de faire appel à des cas particuliers. Après cette première approche, nous rendrons ces intuitions compatibles avec le langage formel institutionnel.

3.2. DIMENSION DIDACTIQUE

C'est en 1969 qu'un programme en Mathématiques fut mis en place à l'Université de La Laguna, mais ce n'est qu'avec la reforme de 1973 que l'intégrale impropre fit son apparition dans l'enseignement en première année. Les programmes sont nés dans un paradigme d'enseignement qui continue d'être en vigueur à l'Université. Même si on consacre plus de temps à l'étude des intégrales impropres, le registre graphique est presque absent et les rapports entre séries et intégrales ne sont habituellement pas pris en compte.

3.3. DIMENSION COGNITIVE[3]

Notre étude s'est centrée sur l'emploi des registres graphique et algébrique chez les élèves de première année universitaire en lien avec les intégrales impropres. Nous avons fait l'hypothèse que les étudiants étaient seulement habitués au travail sur le registre algébrique. Les questions principales qui guidèrent cette étude furent :

- Les étudiants utilisent-ils des éléments intuitifs ?
- Articulent-ils les deux registres de représentation considérés dans des situations relatives aux intégrales impropres ?
- Réalisent-ils des processus de transfert à partir d'autres concepts préalables ?

L'étude a été développée pendant l'année 2000/01, 31 étudiants ayant suivi le premier cours de Mathématiques, en particulier le cours *Analyse Mathématique II* dans lequel l'intégrale impropre est abordée, y ont participé. Pour recueillir les données, nous avons établi un questionnaire dont l'analyse nous a permis ensuite la passation de six entretiens (dans le sens de Goldin, 2000) avec six étudiants. Nous étant intéressé à répertorier les difficultés, les obstacles et les erreurs les plus importants surgissant dans ce contexte, nous avons pris des références théoriques (Socas, 1997 ; Duval, 1993) pour effectuer la classification.

L'analyse de ces données permet de relever la préférence des étudiants pour les énoncés clairs et directs (de type algorithmique), et pour le registre algébrique (malgré leurs déficiences). Les étudiants n'abordent pas de manière satisfaisante les questions demandant un raisonnement, ou une interprétation des résultats. De plus, les questions non-routinières présentant un autre registre (en ce cas, le graphique) ont causé de grandes difficultés chez les étudiants, ceux-ci n'étant pas habitués au travail dans ce registre.

L'emploi de graphes n'est pas un outil habituel. Nous avons également observé une résistance à utiliser les graphes donnés. Il se trouve en effet que certains étudiants ne reconnaissent même pas le registre graphique comme un registre de travail mathématique.

Nous avons identifié quelques difficultés, obstacles et erreurs liés au concept d'intégrale impropre. L'emploi des conceptions statiques pour les processus limites devient un obstacle pour comprendre la notion de convergence d'une intégrale.

Il y a aussi deux obstacles, profondément liés à l'intégrale impropre et que l'on trouve dans l'histoire. Le premier est l'obstacle *de liaison à la compacité*, consistant à croire qu'une aire finie ne doit appartenir qu'à une figure fermée et bornée. Le deuxième est l'obstacle d'*homogénéisation des dimensions*, où l'élève attribue à un volume les propriétés de l'aire qui le génère par révolution (ou à une aire, de la ligne qui la délimite), de sorte que l'étudiant pensera qu'une figure ayant une aire infinie doit générer nécessairement des volumes infinis. Ces deux obstacles sont liés à l'obstacle d'*hétérogénéité des dimensions* (Schneider, 1991), à cause duquel on peut considérer que des périmètres égaux donnent des aires égales (et que des aires égales génèrent des volumes égaux).

Ces obstacles, présents dans l'apprentissage, peuvent être affrontés dans des activités de conversion et de coordination qui seront explicitées dans l'enseignement.

[3] Les données utilisées pour l'étude de cette dimension proviennent de González-Martín (2002) et ont été aussi publiées en Camacho et González-Martín (2002b) et González-Martín et Camacho (2002a, 2002b, 2004a, 2004f, 2005a, 2005c).

Chapitre 4
Méthodologie

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des fondements théoriques menant à la construction d'ingénieries didactiques, ainsi qu'à la description de leurs différentes phases et de leurs caractéristiques comme méthodologie de recherche.

Nous mettons l'accent sur les difficultés que rencontre la recherche à partir de macro-ingénieries, car elle implique des contraintes institutionnelles et méthodologiques, bien qu'elle permette de prendre en compte la complexité des phénomènes associés à la durée des processus d'enseignement-apprentissage. Par ailleurs, l'extension d'ingénieries didactiques au niveau universitaire fait apparaître de nouveaux problèmes. D'habitude, il est difficile que l'élève travaille de façon autonome (du moins, dans un temps raisonnable) et les médiations du professeur, même dans les phases adidactiques, jouent un rôle plus important. Normalement, la gestion efficiente des séances requiert des médiations importantes de la part du professeur et la modélisation des situations a besoin d'une intégration de l'enseignant dans les modèles didactique et adidactique comme un acteur complet de la situation, dont le rôle ne se réduit pas à l'administration de la dévolution et des processus d'institutionnalisation.

Nous décrivons aussi les bases et les suppositions pour la mise en place du débat scientifique (Legrand, 2001) comme méthode d'enseignement qui essaye de changer l'attitude passive des étudiants en les amenant à être les auteurs des énoncés mathématiques.

Legrand indique que l'implantation des débats scientifiques est un processus lent qui requiert beaucoup de temps et d'effort de la part du professeur, ainsi qu'un accord entre le professeur et les étudiants d'accepter les risques. Même si leur succès n'est pas immédiat, les débats ont la capacité de transformer la compréhension qu'ont les élèves de la science et de leur permettre d'imaginer le concept de vérité et de démonstration.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous décrivons les caractéristiques de notre séquence d'Ingénierie Didactique et les raisons qui nous ont amenés à choisir l'Ingénierie à visée diagnostique.

La description du contexte présente les causes qui nous ont fait choisir la Faculté de Mathématiques comme scénario général de la recherche et les caractéristiques du public auquel s'adresse notre Ingénierie. C'est ce contexte et les analyses menées qui nous font prendre les choix macro-didactiques suivants :

- Légitimation du registre graphique et articulation de ce registre avec l'algébrique.
- Reconstruction de la connaissance, qui nous fait choisir comme problématique d'introduction la généralisation de l'intégrale définie pour le calcul d'aires de figures non bornées.
- Établissement de relations explicites avec d'autres connaissances (séries et intégrales définies).
- Prise en compte des obstacles cognitifs et didactiques liés au statut du registre graphique (qui est peu utilisé) à travers une introduction graduelle, de sorte que son usage soit institutionnalisé peu à peu.
- Attention portée à la complexité des techniques liées à l'absence de primitive, ainsi qu'à la visualisation de fonctions non élémentaires à travers l'assistance d'un logiciel informatique.

- Prise en compte des limitations de temps moyennant une réduction du contenu dans la résolution algébrique, ce qui origine un changement dans le statut privilégié donné à la résolution directe.
- Partage plus équilibré des responsabilités entre professeur et étudiants.
- Recours au débat scientifique pour traiter les problèmes qui donneront lieu à de nouvelles techniques.

sous les hypothèses que :

- L'emploi plus actif du registre graphique pendant les séances, durant les exercices et dans le choix des problèmes proposés peut pallier quelques-unes des difficultés observées chez les élèves.
- L'apprentissage des nouveaux concepts peut renforcer les connaissances antérieures des étudiants, une rétroaction se produisant de cette façon entre les connaissances.
- Dans ce processus de généralisation, une vraie responsabilité peut être donnée aux étudiants.

Comme nous l'avons déjà précisé dans le Chapitre 2, la résolution de problèmes ainsi que la construction d'exemples et de contre-exemples jouent un rôle fondamental dans notre séquence, car ils permettront d'opérationaliser tant le registre algébrique que le graphique, ainsi que de mobiliser les connaissances institutionnalisées et les antérieures.

Par ailleurs, la construction d'une définition de l'intégrale impropre comme :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx}_{(1)} = \lim_{b\to\infty}\left[F(x)\right]_a^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)}_{(2)}$$

(s'il existe une primitive $F(x)$ de $f(x)$ et l'on veut l'utiliser), nous permet de développer deux familles de techniques, selon la définition ((1) ou (2)) utilisée. La définition (2) permet de développer des techniques de calcul direct, en mobilisant notamment le calcul de primitives et de limites. Cependant, la définition (1) permet de mettre en œuvre des techniques basées sur la comparaison, ce qui donne un rôle privilégié au registre graphique.

Ces deux définitions divisent la problématique initiale en sous-problèmes. La première considération sera de ne prendre en compte que des fonctions $f(x)$ positives, ce qui met le calcul d'aires au cœur des techniques. On s'interrogera ensuite sur les techniques nécessaires pour (1) et (2), internes et externes à l'intégration (en mobilisant aussi les connaissances sur les séries). Après cela, l'étude de l'intégrale des fonctions changeant de signe, suivant la théorie des séries, permettra d'introduire les définitions de convergence absolue et conditionnelle.

Pour essayer de produire un apprentissage plus satisfaisant chez les étudiants, nous utiliserons également des confrontations directes avec des cas qui contredisent l'intuition et qui sont une conséquence de la *sur-généralisation* (des figures non bornées ayant une aire finie, par exemple).

Chapitre 5
Analyse de données

Ce chapitre présente l'analyse de données recueillies pendant l'expérimentation. Nous commencerons par une description générale de la durée de l'Ingénierie et des instruments d'observation mis en place. En moyenne par session, sur les 42 étudiants inscrits dans le cours *Analyse Mathématique II*, 20 ont participé à cette recherche.

L'analyse des données se présente en deux parties. La première présente les analyses *a posteriori* des huit séances développées. Chacune de ces analyses se divise en deux autres parties : la première décrivant le déroulement effectif de la séance par épisodes et la deuxième en montrant l'analyse, en prenant en compte les objectifs généraux de la séance.

La seconde partie du chapitre présente l'analyse des matériaux écrits recueillis pendant l'expérimentation, qui nous permettent de mieux comprendre le niveau d'apprentissage atteint par les élèves. Tout d'abord nous analysons les tables de convergence construites pendant la deuxième séance. Ensuite, nous analysons les trois problèmes demandés aux étudiants (qui opérationalisent le registre graphique, le Critère de Convergence et de Divergence et qui favorisent les coordinations entre registres) et les réponses à un questionnaire de contenus, qui sert à réviser les concepts principaux présentés aux étudiants. Ce chapitre se termine avec l'analyse des réponses des étudiants à un test d'opinion sur les aspects les plus caractéristiques de notre Ingénierie, ainsi que sur son déroulement général.

Les analyses *a posteriori* des séances montrent bien que le niveau de connaissances des étudiants était plus bas que prévu, ce qui nous a forcé à faire des adaptations de certaines des situations prévues. Malgré cela, la plupart des *milieux* a montré son effectivité, provoquant les interactions prévues et des réponses optimales, qui nous ont permis d'institutionnaliser des connaissances.

Nous avons observé une acceptation de la responsabilité donnée aux étudiants et des vraies *dévolutions* se sont produites. L'organisation des étudiants en petits groupes de travail leur a permis de travailler les questions posées et d'en discuter entre eux, en faisant référence aux résultats institutionnalisés. L'analyse des Fiches de travail montre aussi des évolutions chez les étudiants.

D'autre part, bien que les étudiants aient montré au début des résistances face à l'utilisation du registre graphique, nous avons vu une vraie évolution et une acceptation progressive de celui-ci. Les étudiants ont énoncé le Critère de Divergence et son opérationalisation a donné un rôle plus important au registre graphique, qui dans certaines situations permet de donner des réponses plus économiques.

La construction d'exemples et de contre-exemples a aussi été une activité bien accueillie par les étudiants, qui reconnaissent son utilité pour mobiliser les connaissances et son effectivité dans l'apprentissage.

L'activité la plus difficile à développer a été l'entrée des étudiants dans le débat scientifique. En effet, comme l'indique Legrand (2001), cette activité requiert un certain temps avant de trouver un déroulement effectif. De plus, les échanges dans ce cours d'Analyse n'étaient pas courants, les élèves n'étant pas habitués à participer. Le processus en a donc été ralenti. A cause de cela, nous avons envisagé de les faire participer autant que possible et l'observation des séances montre qu'un grand nombre d'élèves se sont impliqués. De plus, nous avons observé des échanges dans les petits groupes de travail, qui ont produit de très riches discussions.

Une autre question difficile à gérer a été l'administration du temps, qui nous a obligé à réduire le nombre des moments adidactiques dans les dernières séances. Mais cela n'est pas provenu uniquement des difficultés des étudiants (qui ont eu besoin de plus de temps que prévu pour entrer dans les problèmes proposés), mais aussi de la richesse des discussions de groupe qui nous ont demandé beaucoup de temps, reflétant l'acceptation des étudiants pour les tâches proposées.

L'analyse des séances, ainsi que celle des matériaux écrits nous a permis de localiser et d'identifier des difficultés et des obstacles chez les étudiants. Certains d'entre eux avaient déjà été identifiés dans González-Martín (2002), mais nous en avons trouvé des nouveaux, dont nous parlerons dans le Chapitre 7.

Quant aux résultats des étudiants dans la résolution de problèmes ainsi qu'au Questionnaire de contenus, nous constatons la présence de résultats très positifs. Des 15 étudiants qui ont remis les problèmes, 10 obtiennent des moyennes supérieures à 45% (6 supérieures à 70%).

Parmi les 15 étudiants qui ont remis les problèmes, 10 d'entre eux ont amélioré leurs résultats dans le Questionnaire (une étudiante ne l'a pas rempli, un étudiant conserve une moyenne supérieure à 50% malgré sa baisse de résultat et, des trois qui ont baissé jusqu'à moins de 50%, l'un avoue ne pas s'être rendu compte que la première feuille avait des questions sur les deux côtés). Le Questionnaire de contenus a été rempli par 20 étudiants, parmi lesquels 11 ont obtenu une moyenne supérieure à 50% (6 supérieure à 70%, les quatre moyennes les plus baisses, appartenant à des étudiants ne remettant pas les problèmes).

L'opinion des étudiants sur l'Ingénierie est également très positive. Parmi les 19 étudiants qui ont répondu au Test d'opinion, plus d'un quart considère la méthodologie « très adéquate » et 12 étudiants la considèrent « adéquate ».

15 étudiants ont affirmé que les questions proposées pendant les séances ont été « intéressantes » ou « très intéressantes », ce qui montre une attitude très positive. Tous les étudiants s'accordent à dire que le travail en petits groupes a contribué à une meilleure compréhension des concepts.

Au sujet des aspects principaux de notre séquence, 8 étudiants affirment qu'ils ont pu réviser le contenu sur les séries et 12 le contenu sur l'intégration définie. 18 étudiants qualifient l'emploi d'exemples et de contre-exemples d'« utile » ou de « très utile » et tous les étudiants considèrent l'emploi du registre graphique « utile », puisqu'il les a aidé à mieux comprendre les contenus (plus de la moitié affirme que son emploi a permis de « beaucoup comprendre les choses ».

Chapitre 6
Dimension instrumentale de notre recherche

Ce chapitre s’organise en deux parties.

La première commence avec la définition de ce que l’on nomme un SCF et nous montrons les différences et les similitudes principales que Drijvers (1994) note entre les calculatrices graphiques et les SCF en général, ainsi que les avantages et les inconvénients que lui-même (Drijvers, 2003) distingue dans leur utilisation.

Ensuite, nous faisons une brève revue de la littérature existante sur l’introduction des TIC dans l’enseignement des Mathématiques, en distinguant des concepts importants qui ont surgi (*reséquentiation, dialectique white box/ black box, pseudo-transparence, double référence…*). Nous présentons également des expériences d’intégration des TIC dans les curriculums (Fuglestad, 2004 ; Muller, 2001 ; Smith, 2001) ainsi que des résultats sur l’effet que cette intégration a sur les pratiques des enseignants (Kendal *et al*, 2002) et quelques ingénieries didactiques conçues avec le recours aux TIC (Artigue, 2002b ; Maschietto, 2004).

Dans cette partie nous présentons également les fondements théoriques concernant l’utilisation de la technologie dans l’apprentissage. En partant du concept de *Transposition Informatique* (Balacheff, 1994) et des possibilités de restriction d’interaction avec les objets mathématiques, on distingue trois types de contraintes qui pré-structurent l’action (Trouche, 1996) : les contraintes internes, les contraintes de commande et les contraintes d’organisation. Abbasian et Ionescu (2002) ont montré quelques-unes de ces contraintes internes qui apparaissent dans l’utilisation du logiciel *Maple V*, auquel nous recourons pendant nos séances sur ordinateur.

La construction de ces séances a été guidée par la *théorie de l’instrumentation* (Guin et Trouche, 1998), qui fournit un moyen spécifique d’observer l’interaction entre l’étudiant et l’outil technologique, montrant en particulier comment les obstacles techniques peuvent être mis en rapport avec des difficultés conceptuelles (Drijvers, 2002). Afin d’organiser une socialisation des *genèses instrumentales*, nous prenons en compte le concept d’*orchestration instrumentale* et essayons d’organiser les conditions écologiques des séances pour permettre le recours à la machine ainsi qu’à la théorie.

Cette première partie se clôt sur la définition de ce qu’est un *obstacle* dans le travail avec un outil technologique (Drijvers, 2002) et sur une description des principaux obstacles identifiés.

La deuxième partie de ce chapitre présente la construction de nos deux séances avec *Maple V*, en précisant les contraintes et les caractéristiques de notre séquence, ainsi que nos objectifs principaux :

- Renforcer l’utilisation de critères moyennant la résolution de problèmes plus difficiles à résoudre avec papier-crayon et en incorporant des fonctions non prototypiques.
- Montrer les contraintes du logiciel dans la conclusion de la convergence de certaines intégrales, ce qui motive l’intérêt de l’apprentissage et de l’utilisation de critères.
- Renforcer l’utilisation du registre graphique dans les activités et réviser certains contenus institutionnalisés.
- Analyser s’il est possible d’adapter les conditions écologiques pour la socialisation de la *genèse instrumentale* à un contexte d’apprentissage sur ordinateur.

- Analyser la viabilité pour l'observation de *genèses instrumentales* et la possibilité de généraliser quelques obstacles observés dans un contexte de calculatrices symboliques à un contexte d'apprentissage sur ordinateur.

Après avoir montré les éléments les plus importants de notre séquence, nous développons la description et l'analyse *a posteriori* des deux séances, précisant qu'il s'agit de séances où l'activité de l'étudiant est assez contraint par des questions de temps et du besoin d'introduire des activités où les étudiants puissent se familiariser avec le logiciel.

Nos résultats principaux montrent la possibilité d'adapter les conditions écologiques pour la socialisation des genèses instrumentales, dont nous décrivons quelques exemples. Les activités proposées ont également permis aux étudiants d'opérationaliser le registre graphique et de réaliser des changements de registre pour dépasser leurs propres contraintes. De plus, il semble que le choix de présenter aux étudiants les contraintes internes du logiciel face au calcul d'intégrales impropres ait joué un rôle motivant, les étudiants s'engageant dans les activités.

Ce chapitre se termine sur l'analyse des réponses des étudiants à notre Test d'opinion à propos des séances avec *Maple V* et de l'utilisation des outils informatiques dans l'enseignement de manière générale. Nous pouvons dire que les étudiants montrent des opinions très positives envers l'utilisation des TIC dans leur apprentissage, remarquant leur potentiel graphique et l'aide à la compréhension que cela suppose.

Chapitre 7
Apports, implications et perspectives futures

7.1. INTRODUCTION

Dans le Chapitre 1 nous signalons comment le sujet initial de recherche, à cause d'une série de limitations externes, a dû être borné, en privilégiant à tout moment le projet initiale qui était la génération d'une séquence d'enseignement avec pour objectif l'amélioration de l'apprentissage du concept d'intégrale impropre, permettant à la fois de développer une recherche sur le niveau d'apprentissage. Cette objectif fondamental se présente dans la Section 1.2. et s'y organise autour de quelques objectifs principaux.

Nous sommes conscient de l'amplitude et de la généralité de l'objectif général de ce travail, qui est dû en partie au manque de travaux de recherche préalables sur l'apprentissage des concepts relatifs à l'intégration impropre, raison pour laquelle l'identification de quelques obstacles, difficultés et erreurs liés à l'intégrale impropre nous a semblé important comme une base pour des recherches futures.

Pour ces motifs, bien que tous les objectifs proposés au début de la recherche aient été abordés, après avoir répondu à tous (plus ou moins partiellement), quelques questions restent ouvertes, ce qui donnera lieu sans doute au développement de recherches postérieures.

7.2. CONCLUSIONS

7.2.1. EN RELATION AVEC LES OBJECTIFS GENERAUX

De façon globale, nous pouvons affirmer que, à partir de l'analyse des données recueillies au long de la recherche, qui nous aident à répondre aux expectatives initiales, que les hypothèses de départ que nous avons pris en compte pour notre travail sont valides, ce qui nous permet d'affirmer qu'en général :

1. Il est possible d'améliorer l'apprentissage des étudiants s'ils comprennent les concepts étudiés, les objectifs et comment ils seront évalués.
2. L'éducation et l'entraînement d'une pensée mathématique complexe et flexible requiert le développement de la capacité à utiliser au moins deux représentations en parallèle.
3. La visualisation joue un rôle fondamental dans l'activité mathématique et c'est un processus moyennant lequel les représentations mentales peuvent être présentes.
4. Les variations dans le contrat didactique usuel et l'exploitation du *milieu* peuvent provoquer une amélioration dans l'attitude des étudiants ainsi que stimuler un apprentissage plus actif.
5. L'utilisation active d'exemples et de contre-exemples enrichit les expériences des étudiants et les prépare pour les tâches non-routinières.
6. Il est possible de transmettre aux étudiants universitaires une vision des Mathématiques comme une science qui permet l'observation, l'expérimentation et la découverte.
7. Un usage responsable des ordinateurs peut contribuer à une amélioration de la signification de l'apprentissage.

Nous faisons ensuite référence aux apports que nous avons faits avec notre recherche, organisés autour de chacun des objectifs généraux posés au début de ce Mémoire. Nos conclusions seront établies alors en nous appuyant sur les données obtenues après l'analyse et l'interprétation des séances et sur les matériaux recueillis.

1. Générer une séquence d'enseignement du concept d'intégrale impropre qui incorpore les systèmes de représentation graphique et symbolique. Cette séquence se complète avec des séances dans un environnement informatique pour renforcer les contenus.

Dans la Section 1.1. nous établissons que le but principal de notre recherche est double ; d'une part, analyser les processus de pensée mathématique avancée impliqués dans le développement et la manipulation d'intégrales impropres (et localiser des difficultés, des obstacles et des erreurs qui surgissent dans ce contexte) et, d'une autre part, développer une séquence d'enseignement qui modifie le schéma d'enseignement habituel de ce concept, en accord avec quelques résultats de la recherche. Notre séquence a été dessinée sous l'idée générale que les éléments de l'Analyse avancée doivent être introduits en essayant de généraliser les expériences préalables des étudiants (Rasslan et Tall, 2002) de sorte qu'elle soit plus en accord avec l'épistémologie du concept d'« intégrale impropre », en prenant en compte les effets de la *sur-généralisation* naturels lorsqu'on définit un concept en tant qu'extension d'un autre.

Par ailleurs, notre séquence essaye de combattre quelques-uns des *mythes* de l'éducation universitaire exposés par Alsina (2001), par conséquent :

- Nous replaçons dans son contexte les contenus à enseigner (non seulement dans le vaste bâtiment mathématique, mais encore dans la situation cognitive du groupe d'étudiants auquel s'adresse notre Ingénierie),
- Nous inversons l'ordre qu'une *organisation déductive* pourrait impliquer (on génère une approche informelle du concept, les étudiants devenant ceux qui construisent la définition et une table avec les premiers exemples, avant de formaliser la théorie),
- L'évaluation ne reste pas condensée dans un test routinier final, mais elle se réalise en analysant l'évolution personnelle des étudiants durant les séances,
- Nous rompons avec la paradigme de la *master-class*, en donnant à l'étudiant un rôle central dans la séquence et en partageant les responsabilités entre professeur et étudiants.

En ce sens, nous pouvons affirmer que la séquence générée a rempli ses deux fonctions principales : 1) être une alternative à la séquence pour le concept d'intégrale impropre habituelle à l'Université ; 2) être un instrument de recherche qui nous permette d'observer l'apprentissage des étudiants et de localiser quelques difficultés, obstacles et erreurs que cet apprentissage induit.

Quelques-unes des difficultés non prévues dans son déroulement ont été dues plus à des facteurs externes qu'à des facteurs d'organisation. Un élément d'une grande importance qui a affecté le (re)dessin de situations diverses et d'activités a été le niveau de connaissances des étudiants, qui s'est montré plus bas qu'attendu non seulement au niveau conceptuel, mais encore au niveau de la manipulation algébrique et algorithmique. La présence d'examens d'autres sujets a aussi eu des effets dans la phase finale du déroulement de l'Ingénierie, ce qui semble avoir produit un effet de distraction chez certains étudiants.

Néanmoins, nous pouvons affirmer qu'en ligne générale l'Ingénierie dessinée a accompli les expectatives, malgré les difficultés signalées, et beaucoup des rétroactions attendues se sont produites, des évolutions observables chez plusieurs étudiants en ont attesté. Il faut prendre en compte également l'extension de notre Ingénierie, qui la convertit en une *macro-ingénierie*, multipliant les difficultés de son implémentation. Comme nous l'indiquons dans la Section 4.1.1., la recherche à partir de *macro-ingénieries* permet de combiner la complexité des phénomènes locaux de la classe avec celle des phénomènes associés à la durée des relations dans les processus d'enseignement-apprentissage, bien qu'elle implique des difficultés institutionnelles et méthodologiques.

Indépendamment de ces facteurs, nous avons réussi à dessiner une séquence incorporant les nouveaux éléments que nous avions prévus :

- *Conjuguer d'une façon plus équilibrée les registres graphique et algébrique* : Notre séquence donne un rôle privilégié au registre graphique et à son utilisation comme registre de prédiction et de contrôle, en favorisant en grande mesure les activités de coordination entre registres. En prenant en compte les origines historiques de l'intégration impropre, ce concept est introduit non seulement comme une généralisation, mais encore depuis une perspective graphique qui permette donner du sens à une série d'outils qui faciliteront le calcul d'aires de figures non bornées.
  De plus, tel que nous le montrons dans les analyses *a posteriori* et dans l'analyse de l'opinion des étudiants, ils ont accepté, en général, son utilisation dans l'activité quotidienne près du registre graphique et, de plus, il les a aidé a comprendre beaucoup de concepts de la théorie, son usage étant utile et intéressant, selon leurs affirmations. Nous observons de nombreuses évolutions et acceptations progressives de ce registre. Dans la Séance 1, l'étudiant YG développe un raisonnement graphique sur le tableau pour argumenter une conjecture et peu d'étudiants l'acceptent. Pourtant, nous avons pu observer, un peu plus tard, pendant l'analyse de la Fiche 1 (Section 5.2.3.), que tous les étudiants utilisent des graphes comme appui à leurs raisonnements[4]. Nous avons pu également observer comment, dans la construction de la table de convergences, les étudiants acceptent l'économie que ce registre peut offrir.
  Par ailleurs, les questions où l'utilisation de ce registre apparaît explicitement posées dans les problèmes et dans le Questionnaire de contenus obtiennent un taux plus haut de réponses et les étudiants utilisent aussi ce registre pour construire quelques exemples et contre-exemples.
  Durant les séances organisées dans la salle d'ordinateurs l'utilisation de ce registre a aussi été promu, en encourageant les coordinations entre les résultats théoriques et leurs interprétations graphiques. Nous avons également constaté que plusieurs étudiants se rendaient au Critère de Comparaison moyennant des graphes pour résoudre les questions posées. Leurs commentaires dans le test d'opinion confirment que les étudiants, à la fin de notre instruction, considèrent l'usage du registre graphique intéressant ou très intéressant et plus de la moitié des étudiants participants affirme que ce registre aide beaucoup à comprendre les choses. Les opinions sur les séances avec le SCF indiquent aussi que le logiciel a constitué un appui visuel à beaucoup de questions et qu'il les a aidé a mieux comprendre les concepts.
  Nous pouvons dire, comme conséquence de tout ce qui précède, que le registre graphique a reçu une estimation positive de la part de la majorité des étudiants participants et une acceptation en tant que registre de prédiction, de contrôle et d'argumentation à quelques questions, qui permet de donner des réponses économiques à certaines questions.

[4] Donnant des évidences de développer des inférences figurales.

- *Recours d'une manière active à des exemples et des contre-exemples, en particulier ceux qui favorisent l'utilisation du registre graphique* : Une des élections prises pour favoriser les changements de registre fut l'emploi actif d'exemples et de contre-exemples permettant de donner des réponses économiques aux fausses intuitions et de la *sur-généralisation*, en prenant comme idée principale le concept d'aire. De cette façon, on a pu construire :

    - des fonctions non bornées avec une aire finie,
    - des fonctions s'aplatissant avec une aire infinie,
    - des fonctions dont la série associée ($f(1) + f(2) + \dots$) converge, mais enfermant une aire infinie, etc.

    Maschietto (2001) affirme que le registre graphique a un rôle potentiel dans la résolution de problèmes et, dans notre contexte, la construction d'exemples et de contre-exemples montre bien une grande partie de ce potentiel. Cela nous a également permis de mettre les étudiants face à des problèmes les plaçant devant un conflit, un élément fondamental dans le dessin de situations et de *milieux* adéquats.

    Avec ces activités se limite la domination effectuée par les exemples concrets dans l'enseignement habituel, rapportée par Tall (1992a) et Artigue (1995a) et les expériences actives et créatives des étudiants sont enrichies moyennant le travail avec des fonctions discontinues, non monotones, non bornées…

    Benbachir et Zaki (2001) affirment que la construction d'exemples et de contre-exemples permet un apprentissage plus riche que celui atteint avec l'enseignement traditionnel, et nous sommes d'accord avec eux dans le sens que cette activité nous a permis de mettre les étudiants face à des *sur-généralisations* « tentantes » et, comme réponse des étudiants, nous avons observé qu'ils peuvent répondre à des problèmes non routiniers ou même donner des exemples et des contre-exemples à des questions relatives à la définition d'intégrabilité locale (certains étudiants étant capables de fournir des « exemples triviaux », dans le sens de Selden et Selden, 1998). De plus, dans quelques cas de ne pas être capables de construire un contre-exemple, nous avons vu que certains étudiants on dépassé cette barrière en le cherchant dans les livres (SM dans le problème 28, qui est ensuite repris par EG dans le Test de contenus).

    Nous affirmons que les étudiants ont reconnu l'utilité de l'utilisation d'exemples et de contre-exemples : 18 étudiants d'entre les 19 qui remplissent le test d'opinion affirment que l'utilisation d'exemples et de contre-exemples est utile ou très utile. Bien que seulement la moitié de ceux qui remplissent le test sur l'utilisation de contre-exemples affirme se sentir sûr en les utilisant, un 93.75% pense que c'est une méthode effective pour l'apprentissage. Quelques-unes des raisons données sont qu'« *ils sont utiles pour montrer que quelque chose est faux* », « *ils aident à se rappeler et à comprendre la théorie* » ou « *ils aident à rendre la connaissance plus agile* ». On trouve également des réponses qui reconnaissent le potentiel et l'économie du registre graphique : « *sont un complément aux questions théoriques* », « *ils ont un caractère visuel et rapide* », « *ils aident à éviter l'utilisation des longues démonstrations* ».

    Les étudiants signalent aussi que les contre-exemples les aident à mieux comprendre les concepts et à éclaircir les idées, ce qui est d'accord avec les conclusions de l'étude internationale développée par Gruenwald et Klymchuk (2003) à laquelle nous avons participé.

- *Utilisation de problèmes non-routiniers pour améliorer la signification de l'apprentissage* : D'ailleurs la construction d'exemples et de contre-exemples, des questions de type non-routinier ont été posées aux étudiants durant les séances, de même que dans les problèmes choisis pour remettre et dans le Questionnaire de contenus. En accord avec Duval, proposer des activités de conversion ne suffit pas pour que l'étudiant construise l'articulation entre représentations. La résolution de problèmes peut favoriser et motiver les activités de changement de registre ; dans la résolution de problèmes les représentations se trouvent au cœur même de l'activité mathématique. Et, selon avec Hitt (2000a), c'est dans la résolution de problèmes où toute la connaissance de l'étudiant est mise à l'épreuve.

  Par ailleurs, présenter à l'étudiant des situations le plaçant devant un conflit a été très important. Nous les avons présentées à l'étudiant, pour provoquer les phases de déséquilibre de la connaissance qui le feront avancer, des problèmes pour lesquels ses connaissances étaient insuffisantes (de manière à ce que sa résolution produise, comme conséquence, de nouvelles connaissances). Nous avons également atteint notre objectif en incluant des tâches dont les solutions sont en contradiction avec une réponse anticipée du résultat. Pendant notre sélection et construction de problèmes non-routiniers nous avons pris en compte les caractéristiques d'un « bon » problème données par Poirier (2001), en essayant d'offrir aux étudiants des défis raisonnables. Comme nous l'avons déjà vu dans les analyses *a posteriori* des séances, les étudiants s'y sont impliqués et ils ont débattu avec intensité pour trouver des solutions aux tâches posées en classe et dans la salle d'ordinateurs et, dans beaucoup de cas, leurs solutions ont donné lieu à des connaissances susceptibles d'institutionnalisation :

  - les premiers exemples de la Session 1 ont permis de poser la question de la forme des fonctions, ce qui donna lieu à l'institutionnalisation du Critère de Divergence ;
  - la résolution de la Fiche 1 a permis l'introduction d'un contre-exemple montrant qu'une fonction non bornée peut enfermer une aire finie ;
  - la résolution de la Fiche 2 a permis de réfléchir sur l'extension de la linéarité au cas impropre (quelques étudiants étant capables de démontrer le résultat) ;
  - la Fiche 3 a permis de répondre à la *sur-généralisation* que les séries et les intégrales ont toujours le même comportement et un groupe d'étudiantes a crée un contre-exemples qui a permis d'introduire ensuite le Test Intégral (utilisé plus tard par certains étudiants dans le Questionnaire de contenus, ce qui montre que les étudiants acceptent les productions de leurs collègues).

  Nous avons également observé que quelques étudiants ont utilisé des questions de la seconde partie du Questionnaire de contenus pour combattre l'obstacle d'*homogénéisation des dimensions* et affirmer qu'il y a des figures d'aire infinie capables de générer des volumes finis.

  Bien qu'un peu plus de la moitié des étudiants remplissant le test d'opinion croie que les questions posées par le professeur pendant les séances étaient difficiles, nous croyons qu'elles ont été utiles pour générer des connaissances et des reconstructions. 15 parmi les 18 enquêtés affirment que les problèmes à remettre étaient intéressants ou très intéressants. Par rapport aux questions travaillées par petits groupes, tous les étudiants affirment qu'elles les ont aidés à comprendre ensuite la théorie, en plus d'être intéressantes.

  Non seulement les étudiants pensent que les questions leur ont été utiles pour leur apprentissage, mais encore les résultats confirment cette idée. Parmi les 15 étudiants remettant les problèmes, 10 obtiennent une moyenne supérieure à 45% (6 étudiants dépassant le 70%) et parmi les 20 étudiants remplissant les Questionnaire de contenus, 11 obtiennent une moyenne supérieure à 50% (6 obtenant plus de 70%). De plus, nous pensons que les problèmes remis furent utiles, car parmi les 15 étudiants remettant ces problèmes, 10 ont amélioré leur moyenne dans le Questionnaire de contenus.

- *Recours au logiciel Maple V pour renforcer les contenus et favoriser la coordination entre registres* : Nous avons trouvé des évidences qu'un usage réflexif de la technologie peut aider à réaliser des articulations flexibles entre les registres algébrique et graphique (Artigue, 1999). De plus, les caractéristiques de beaucoup d'environnements informatiques peuvent jouer un rôle de pivot dans le processus de raisonnement visuel (Leung et Wah Chan, 2004), grâce a leur nature multi-représentative (Fuglestad, 2004).
  Bien que dans les séances dessinées il fut nécessaire d'incorporer une entrée en contact avec la machine, il a été possible de réviser des contenus théoriques et même d'organiser un moment où l'activité des étudiants n'était pas trop contrainte, avec le but de résoudre un problème provoqué par les limitations de la machine. Nous avons pris en compte que le travail mathématique impliqué était accessible aux étudiants.
  Les deux séances développées ont permis de renforcer des contenus de l'Ingénierie et la majorité des étudiants affirme qu'elles leur ont été utiles pour dissiper beaucoup de doutes. De plus, les activités proposées favorisaient l'utilisation de deux registres et nous avons observé que plusieurs étudiants, face à l'impossibilité de résoudre certaines tâches posées dans le registre algébrique, furent capables de les transformer dans le registre graphique pour les résoudre, en appliquant le Critère de Comparaison.
  Par ailleurs, 17 étudiants parmi les 19 enquêtés pensent que l'utilisation de l'ordinateur est utile pour l'apprentissage des Mathématiques et 12 étudiants affirment que l'usage de l'ordinateur accroît leurs envies de travailler en Mathématiques. Par rapport à son utilisation pour favoriser la coordination entre registres, tous les étudiants enquêtés on estimé positivement le potentiel graphique de l'ordinateur. Et quant à notre objectif de renforcer les résultats théoriques, 15 étudiants font allusion au renfort de l'aspect graphique des concepts, se rendre compte des détails, éclaircir les concepts et fomenter l'expérimentation. Quelques-unes des opinions recueillies parmi nos étudiants coïncident avec celles des étudiants participant aux expériences de Guin et Trouche (1998).

2. Identifier les obstacles, difficultés et erreurs les plus persistants liés à notre concept.

La séquence d'enseignement utilisée et le dessin et développement de la recherche se sont montrés très utiles pour approfondir la classification commencée dans González-Martín (2002). Dû à son extension, cette classification se présente dans la Section 7.3.

3. Étudier à quel point les modifications du contrat didactique changent l'attitude des étudiants dans l'apprentissage des intégrales impropres.

La Théorie des Situations prend en compte que l'étudiant non habitué au fonctionnement adidactique doit être préparé peu à peu. Pour impliquer l'étudiant, il ne doit pas connaître d’avance les réponses attendues ; l’enseignant doit atteindre une acceptation par l’étudiant de la responsabilité de chercher une solution aux problèmes ou exercices dont il ignore la réponse.

Bien que la participation des étudiants pendant la première séance ait été un peu limitée, nous avons observé qu’à partir de la seconde séance les étudiants ont augmenté au fur et à mesure leur implication dans le développement de l’Ingénierie, se montrant de plus en plus actifs. Il nous semble également que l’expérience d’être eux-mêmes les constructeurs de la connaissance (la définition d’intégrale impropre, le Critère de Divergence, la table de convergences, le Critère de Comparaison et ses corollaires, quelques contre-exemples, …) est très motivante. En fait, nous avons observé que les résultats les plus utilisés par les étudiants dans leurs productions ont été ceux crées dans les phases adidactiques.

La responsabilisation des tâches posées est aussi évidente, étant donné que les étudiants remplissent toujours les Fiches de travail en utilisant les résultats institutionnalisés. Il y a lieu de signaler que l’une des raisons principales du retard pendant les premières séances fut que les débat par groupes s’allongeaient, ce qui était dû aux interactions produites entre les étudiants et aux tentatives des étudiants de résoudre les questions posées. Les petits groupes de travail ont été le lieu privilégié pour le débat et les analyses *a posteriori* montrent que beaucoup d’étudiants réticents à participer dans le grand groupe (peut-être pour des questions de personnalité) participaient cependant activement dans les petits groupes.

L’implication des étudiants dans la résolution et la remise des matériaux fournis pour sa résolution en dehors les séances de cours montre également l’acceptation de la responsabilité donnée. Parmi les 21 étudiants assistant à 6 séances ou plus, 16 remettent les tables de convergence et 15 remettent les problèmes proposés.

Notre séquence a aussi favorisé le travail en groupe. Poirier (2001) explique l’importance de mettre les étudiants face à des situations de conflit, en reconnaissant l’importance des interactions de classe. De la même manière, Artigue (1999, 2001) distingue l’efficacité de diverses situations non seulement grâce aux caractéristiques des problèmes choisis, mais encore aux caractéristiques des scénarios développés, en particulier quand ils participent du caractère social des processus d’apprentissage.

Quant au déroulement de débats scientifiques, il n’a pas été possible d’arriver complètement à ce point, bien que nous croyions qu’une dynamique favorable aux échanges se soit produite ainsi qu’une évolution visible dans le nombre d’interventions des étudiants. Dans les analyses *a posteriori* on peut voir que les étudiants ont participé d’une manière progressive et qu’en général, après leur première participation ils continuaient à participer dans les séances suivantes. Nous avons constaté, comme l’indique Legrand (2001), que le déroulement de débats scientifiques dans les cours est un processus lent qui requiert d’un grand investissement de temps et d’effort de la part du professeur.

Comme l’analyse des tests d’opinion le montre, plus d’un quart des étudiants participant à notre Ingénierie considère que la méthodologie a été très adéquate et plus d’un 60% la considère adéquate[5] ; par ailleurs, le 37.5% des étudiants redoublant le cours la considèrent très adéquate, avis où se trouve présente une connaissance sur la manière traditionnelle d’enseigner ces concepts. Quelques éléments nous amenant à affirmer que les étudiants ont développé une attitude positive vers l’intégration impropre ont été déjà remarqués, relevés dans leurs déclarations sur l’intérêt des problèmes et activités proposés.

Les étudiants ont également estimé positivement l’un des aspects nouveaux de notre séquence qui suppose un changement important dans le contrat didactique habituel : l’encouragement du travail coopératif par petits groupes. 18 parmi les étudiants interrogés l’ont

[5] Il convient de dire que les cinq étudiants pour lesquels les concepts sont restés un peu confus, en dépit de cela, qualifient la méthodologie d’adéquate.

trouvé utile ou très utile, en affirmant qu'il a servi a éclaircir quelques ou beaucoup de choses. Quant à l'utilisation de débats, tous les enquêtés affirment qu'on devrait dérouler débats en classe et 8 étudiants affirment, de plus, que cela devrait être fait fréquemment.

4. Analyser si l'utilisation active d'exemples et de contre-exemples dans l'enseignement, de même que l'utilisation du registre graphique comme registre de travail mathématique valable, produisent des améliorations dans l'apprentissage des étudiants.

Comme nous le disons dans le point 1 de cette liste, les étudiants on évalué positivement l'utilisation du registre graphique et ils reconnaissent son utilité et son intérêt pour comprendre les concepts. Au-delà d'être une simple opinion, les analyses *a posteriori* montrent une véritable appropriation de ce registre et des vraies évolutions dans son utilisation (se détachant l'acceptation de l'étudiante WD).

Tous les étudiants répondit à la question posé dans la Fiche 1 en ayant recours au registre graphique et au Critère de Divergence ; les étudiants acceptèrent le potentiel de ce registre et l'économie que son utilisation suppose dans certaines questions (en particulier, dans la construction de contre-exemples). La construction de la table de convergences rendit également propice à l'opérationalisation du registre graphique et du Critère de Divergence. Nous avons aussi observé que le Critère de Comparaison est l'un des résultats mieux compris par les étudiants, étant donné qu'ils ont été capables de l'utiliser dans des situations graphiques (Problème 21, Annexe 1, et dans les séances avec *Maple*) ainsi que dans des situations posées dans le registre algébrique (question 5 du Questionnaire de contenus).

Nous nous attendions à ce que les étudiants soient capables de construire des contre-exemples à des questions simples posées. Dans la Fiche 3 nous avons pu observer que les étudiantes AB, CF et WD construisent un contre-exemple non-trivial en opérationalisant le registre graphique et en réalisant des transferts à partir les résultats de séries. Nous remarquons également que dans la question 6 du Questionnaire de contenus, tous les étudiants se rappelant de la définition d'intégrabilité locale sont capables de fournir un exemple et un contre-exemple aux questions suivantes.

Nous avons également observé que l'utilisation de contre-exemples a aidé plusieurs étudiants à éviter quelques obstacles habituels dans l'apprentissage de l'intégration impropre, comme la croyance que si une intégrale est convergente, la fonction tend alors vers zéro, ou que si une fonction tend vers zéro son intégrale sera convergente.

Nous remarquons aussi que les taux de non-réponse dans las questions posées dans le registre graphique ont diminué d'une manière considérable par rapport aux étudiants participant dans notre étude sur la dimension cognitive (Section 3.3.4.). Le problème 21 est posé dans le registre graphique (graphe avec fonction informative ; voir Elia et Philippou, 2004) et tous les étudiants l'ont abordé, en mobilisant l'usage de ce registre. Du même, dans le problème 24 il y a des étudiants (WD, YG) qui donnent des réponses économiques en passant au registre graphique et en répondant avec l'interprétation.

Parmi les 20 étudiants remplissant le Questionnaire de contenus, seulement 2 étudiants ne répondent pas à la question 2 y 5 ne répondent pas à la question 8. La comparaison avec les étudiants participant dans l'étude développé l'année 2001 (González-Martín, 2002) montre une diminution considérable sur le taux de non-réponse :

	Année 2001		**Année 2003**	
Participants dans le Questionnaire	31		20	
	Quest. 2	Quest. 8	Quest. 2	Quest. 8
Non-réponse	12	14	2	5
Pourcentage	38.71%	45.16%	10%	25%

Elia et Philippou (2004) affirment qu'une résolution effective de problèmes, faisant usage des dessins, dépend de la relation entre le dessin et le problème ainsi que des connaissances et des habiletés préalables des étudiants. Probablement, l'un des facteurs principaux qui motive ces différences vient déterminé par le fait que les étudiants participant à notre Ingénierie ont développé des habiletés de reconnaissance du registre graphique ainsi que d'interprétation de graphes.

5. Analyser s'il est possible d'adapter les conditions écologiques pour la socialisation de la genèse instrumentale dans un contexte d'apprentissage avec des ordinateurs.

Comme nous le montrons dans le Chapitre 6, nous pensons qu'il a été possible d'organiser les conditions écologiques de la classe pour générer une séquence où les étudiants puissent combiner les travaux papier-crayon avec l'ordinateur et où le professeur puisse combiner le travail sur le tableau avec la référence à un écran projeté. De plus, notre dessin nous a permis de socialiser quelques aspects de la genèse instrumentale grâce à l'utilisation d'un étudiant *sherpa* et aux références explicites à son ordinateur projeté. Il a été également possible de faciliter non seulement le travail en petit groupes et le partage de stratégies par les étudiants, mais encore les observations de la part du professeur, ainsi que de faire un bilan et d'utiliser des fichiers où les étudiants puissent écrire et essayer toutes les fois dont ils en aient besoin. Tous ces éléments, conjointement, nous ont facilité l'observation de quelques processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, d'adaptations des étudiants et de recherche de stratégies alternatives pour dépasser leurs propres limitations algébriques.

Dans ce sens, le développement préalable de quelques séances d'Ingénierie a résulté être extrêmement utile pour savoir le bagage de connaissances que les étudiants avaient, nous permettant le dessin d'activités où le travail mathématique impliqué était accessible aux étudiants (et non seulement du point de vue mathématique, mais aussi de l'instrumental, pour lequel des activités de prise de contact furent dessinées). De cette façon, les effets d'un possible *décalage cognitif* (Artigue, 2002b) ont été minimisés. Nos séances d'Ingénierie ont également été utiles pour opérationaliser le travail dans le registre graphique, qui a été enfin privilégié dans les stratégies recherchées par les étudiants.

Bien que les conditions physiques de nos salles d'ordinateurs ne soient pas optimales (il serait convenable la présence des tables où les étudiants puissent développer son travail papier-crayon et discuter entre eux, ou une distribution qui permette au professeur un accès plus rapide aux écrans des étudiants, voir Smith, 2001), il y a eu une réussite à adapter les conditions écologiques tant physiques que temporelles (principalement, la distribution des différents travaux) pour produire une prise de contact non très compliquée et des processus d'instrumentation observables. Le dispositif basé sur des fichiers où les étudiants aient les explications et, de plus, aient de la place pour expérimenter, susceptibles d'être plus tard analysés s'est montré aussi positif, même s'il aurait aussi été convenable l'utilisation des matériaux écrits pour recueillir plus d'information sur les processus de pensée.

6. Analyser la viabilité pour l'observation des genèses instrumentales et la possibilité de généraliser quelques obstacles observés dans un contexte de calculatrices graphiques à un contexte d'apprentissage avec des ordinateurs.

Comme nous l'avons remarqué dans le point précédant, l'organisation et le choix d'activités pour la première séance avec *Maple* nous ont permis d'observer quelques genèses instrumentales et des processus d'adaptation au nouvel environnement chez les étudiants, qui, de plus, montrent leur grande satisfaction avec l'utilisation de cet outil et avec le dessin des séances, qui les ont aidé à mieux comprendre les aspects théoriques de l'Ingénierie.

Par ailleurs, avec le recueil des fichiers de travail des étudiants nous avons pu aussi observer quelques manifestations d'obstacles qui semblent être en rapport avec ceux observés par Drijvers (2003), ce qui renforce sa conjecture que les obstacles locaux ont un caractère général qui s'étend à d'autres sujets d'étude à part l'Algèbre.

Comme l'indique Drijvers (2003), il est nécessaire de prendre en compte le caractère *top-down* des SCF qui, dans le cas d'un logiciel informatique comme *Maple*, s'accentue. Les notations informelles se voient plus défavorisées et il faut faire attention à la syntaxe du logiciel. Dans ce contexte, la *pseudo-transparence* a aussi une influence et il y a beaucoup de techniques de l'environnement informatique similaires à celles de l'environnement papier-crayon, mais différentes en détails subtils pour un utilisateur novice. L'usage des parenthèses, ou l'emploi des majuscules (de plus de l'usage du « **;** ») ont provoqué quelques réactions chez les étudiants ainsi que, même, des résultats incorrects.

Nous pensons, en regard aux résultats, que le choix fait de présenter aux étudiants certaines contraintes internes du logiciel a réussi et que cela a motivé leur exploration pour dépasser ces contraintes moyennant l'implémentation de résultats institutionnalisés. Nous avons pris en compte certaines des indications que Trouche (2000a) donne pour la construction d'un cours de Mathématiques avec l'utilisation de calculatrices :

- Utiliser les potentiels de l'outil pour multiplier les points de vue.
- Choisir des activités demandant la combinaison du recours à l'instrument et du recours à la théorie.
- Renforcer l'aspect *expérimental*.
- Une nouvelle organisation. Intervention explicite du professeur, débouchant en une nouvelle organisation de l'espace et du temps d'étude, prenant en compte l'exigence d'une socialisation des processus d'instrumentation.

qui ont montré être très utiles pour favoriser quelques processus d'instrumentation, comme nous l'indiquons dans la Section 6.5.4.

7.2.2. PAR RAPPORT A LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Dans la Section 5.3. nous expliquons les raisons qui nous amènent à considérer le dessin d'une Ingénierie Didactique pour le déroulement de notre recherche. Cette Ingénierie, implanté dans le premier année de la Faculté des Mathématiques, à visée clairement diagnostique et les données recueillies nous permettent non seulement d'étudier l'apprentissage des étudiants, mais encore d'étudier la même mise en scène de l'Ingénierie.

Notre séquence, comme nous l'explicitons dans le Chapitre 3 a été construite en prenant en compte les dimensions épistémologique, didactique et cognitive de l'intégrale impropre.

La dimension épistémologique nous a permis la reconstruction d'une séquence plus conforme avec l'origine du calcul d'intégrales impropres, en prenant les notions de généralisation et d'aire comme éléments motivants. De cette manière, le registre graphique a été donné un rôle plus actif et il a été possible de produire la genèse de résultats susceptibles d'institutionnalisation à partir l'étude de situations graphiques. L'idée d'aire permet également de faire appel à la théorie de séries pour généraliser des résultats et construire des contre-exemples à certaines intuitions erronées et obstacles qui surgissent quand on étend la notion d'aire (et de volume) au champ de figures non-bornées.

Grâce à l'étude de la dimension didactique, nous avons pu analyser l'évolution des curriculums dans notre Université et trouver des raisons expliquant la façon dont l'intégrale impropre et habituellement enseignée (quelques-unes motivées, possiblement, pour la propre évolution historique du concept).

L'étude de la dimension cognitive nous a permis d'évaluer l'apprentissage de l'intégrale impropre chez les étudiants universitaires et de réaliser une première classification des difficultés, obstacles et erreurs que cet apprentissage peut provoquer. En prenant en compte la revue de recherches plus ou moins récentes sur l'importance de la visualisation, la construction d'exemples et de contre-exemples, les interactions dans la classe, l'apprentissage non-algorithmique et quelques difficultés liées au concept même d'intégrale définie, ainsi qu'en nous fondant sur les deux dimensions précédentes, nous avons pu dessiner une séquence prenant en compte explicitement les difficultés que l'apprentissage de l'intégrale impropre peut produire.

Notre expérience, bien qu'elle doive être renforcée avec la retro-alimentation des données recueillies dans cette occasion, a montré la viabilité théorique d'un type d'enseignement universitaire où le contrat didactique habituel souffre des altérations substantielles et l'étudiant se responsabilise de son propre apprentissage (avec l'aide du professeur et la collaboration avec d'autres étudiants), ainsi que des reconstructions nécessaires. Nous avons également montré la viabilité d'une séquence où un rôle privilégié soit donné au registre graphique, qui a montré avoir amélioré les conceptions des étudiants et les avoir fourni des nouvelles stratégies pour aborder des problèmes d'un type différent (grâce à la construction d'exemples et de contre-exemples, à la possibilité de chercher des interprétations graphiques ou de pouvoir prévoir et contrôler leurs résultats), aux questions non-algorithmiques et à la réflexion groupale pour introduire des nouveaux concepts.

C'est vrai que notre dessin a enlevé du temps pour le développement d'habiletés algorithmiques, mais il fut évident dès les premières séances que les étudiants n'avaient pas préalablement ces habiletés, donc le développement d'un apprentissage conceptuel ainsi qu'algorithmique, dans le temps prévu, nous semble une tâche impossible. Néanmoins, l'utilisation du registre graphique et d'exemples et de contre-exemples nous semble avoir doué aux étudiants des nouveaux ressources pour aborder des problèmes qui, avant, apparaissaient impossibles d'aborder. Par ailleurs, nous avons également montré que les changements effectués dans la séquence habituelle ont généré l'intérêt des étudiants (en dépit de l'augmentation en la difficulté conceptuelle).

Pourtant, tout ne vient pas donné automatiquement et ce type d'enseignement doit aussi dépasser des contraintes pour survivre. Tout d'abord, il est indispensable générer une attitude positive chez les étudiants dès le début, permettant tant leur implication progressive dans le tâches que l'augmentation de leur responsabilité. Il faut prendre en compte la grande inversion de temps que le déroulement de débats scientifiques requiert, donc il est convenable d'y préparer aux étudiants *avant* le déroulement effectif de ce type d'expériences. Pendant son déroulement, il fut clair que l'un des points délicats est la gestion du temps. La recherche d'un équilibre entre les moments de travail groupale, les discussions collectives et l'institutionnalisation de résultats a provoqué un *décalage* dans l'organisation des premières quatre séances qui nous a amené à supprimer des activités collectives dans les quatre séances suivantes pour pouvoir couvrir tous les contenus qui exige notre institution. En dépit de cela, on ne doit pas voir ce *décalage* comme une espèce de fatalité, mais comme un élément positif causé par l'engagement des étudiants dans les tâches proposées et la richesse des discussions groupales, qui ont permis l'institutionnalisation de résultats et la présentation de contre-exemples à l'intuition. Cette situation appuie notre conjecture qu'il est possible de faire que les étudiants universitaires s'impliquent vraiment dans son apprentissage et qu'ils deviennent des producteurs de connaissances.

Il est également indispensable de pouvoir réorganiser les contenus, de connaître l'état *réel* de connaissances des étudiants et de faire face a certaines restrictions institutionnelles : le statut habituel donné au registre graphique, le rôle du débat et du travail par groupes, le rôle de l'étudiant dans la génération de connaissances, la formation fortement algorithmique (mais avec de fortes déficiences) et peu conceptuelle… qui supposent une première barrière à dépasser pour intégrer ce type de séquences.

Quant aux deux conjectures principales qui ont guidé le dessin et la mise en scène de notre Ingénierie :

1. L'utilisation du registre graphique d'une manière plus active pendant l'instruction et dans les exercices et problèmes posés peut pallier quelques manques détectés chez nos étudiants.
2. L'apprentissage des nouveaux concepts peut être utilisé pour renforcer les connaissances préalables des étudiants.

les données recueillies et les observations développées nous semblent montrer leur pertinence.

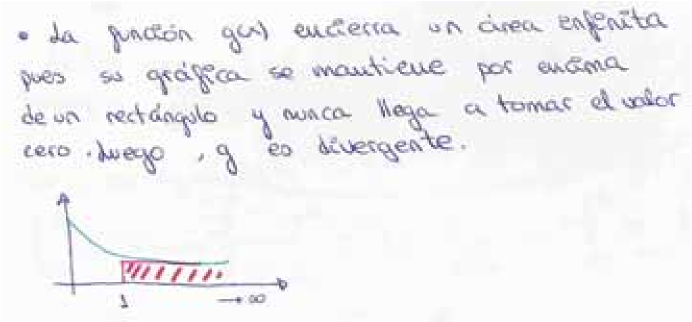
Une des questions qui peuvent être posées comme conséquence de l'antérieur, c'est celle de la viabilité de notre Ingénierie comme séquence d'enseignement habituelle. Comme il a été vu, notre dessin rompt clairement non seulement avec la présentation traditionnelle des contenus (et la culture mathématique existante à l'Université), mais encore avec la méthodologie universitaire traditionnelle (voir les *mythes* indiqués par Alsina, 2001). Néanmoins, l'expérience nous a permis de voir que les étudiants acceptent de bon gré ces changements et que, d'un point de vue temporel, son implantation est possible.

La transmission de notre dessin, en maintenant la richesse des *milieux* construits, ainsi qu'en plus équilibrant les moments groupales des premières et des dernières séances, se pose comme l'une des questions plus naturelles pour le futur.

7.3. DIFFICULTES, OBSTACLES ET ERREURS

Les résultats de notre dimension cognitive (González-Martín, 2002 ; González-Martín et Camacho, 2004a, 2004f, 2005a) ne contredissent pas ceux d'autres recherches. Orton (1983) avait déjà détecté la domination du mode de travail algébrique sur le graphique dans les productions des étudiants, ce qui peut donner naissance à des difficultés ultérieures. Nous pensons que cette situation n'est qu'une conséquence des habitudes d'enseignement et des formes économiques d'adaptation des étudiants. Calvo (1997) indique qu'on doit apprendre aux étudiants à comprendre les aspects visuels des concepts qu'ils apprennent, car ceci n'est pas une activité qu'ils puissent développer tout seuls, en dépit de la tendance de laisser le travail graphique comme un travail privée de l'étudiant (Maschietto, 2001).

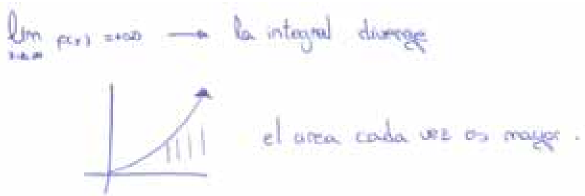
Dans un contexte comme le nôtre, où on travaille avec des figures non-bornées, des habiletés de visualisation non-développées peuvent causer de nombreuses erreurs et de fausses conclusions. Le manque de coordination entre registres (ou la non reconnaissance du registre graphique) rend également difficile la réponse à des tâches proposés dans le registre graphique. Par exemple, dans le Problème 21, une fonction $g(x)$ inconnue se place sous la courbe de $1/x$ et se demande l'étude du caractère de son intégrale. CF, en présence du graphe, ignore l'information algébrique :



Pourtant, nous pensons que des interventions didactiques adéquates pourraient soulager ces difficultés. Nous avons déjà vu dans la Séance 1 que beaucoup d'étudiants ont des problèmes pour accepter l'argument graphique de YG, bien que postérieurement ils montrent leur acceptation d'arguments graphiques et les utilisent dans leurs réponses.

Une autre des difficultés indiqués dans González-Martín (2002) provenait du manque de signification d'outils fondamentaux pour comprendre le concept d'intégrale impropre (limites, convergence, intégrale définie, séries…), sans lesquels le développement d'une compréhension adéquate sera plus coûteux.

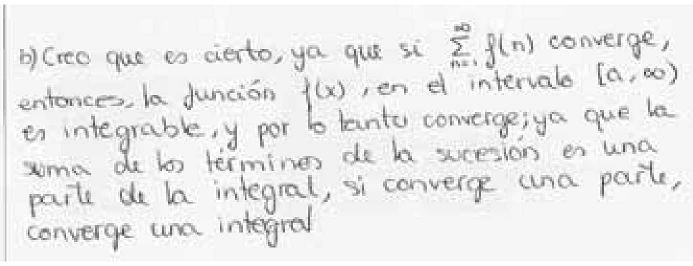
Dans le cas des processus limites, l'usage de l'infini potentiel (en combinaison avec l'idée d'aire) peut emmener à des *sur-généralisations* et à affirmer qu'une figure infinie, comme on y ajoute toujours de l'aire, n'aura pas une aire bornée, en dépit d'avoir développé des techniques spécifiques pour l'évaluation de cette question. Nous avons vu chez les étudiants AC et YC l'utilisation de la phrase « *l'aire est de plus en plus grande* » que, bien qu'au début nous interprétâmes comme un commentaire casuel :



postérieurement a fait à ces étudiants conclure la divergence de certaines intégrales en argumentant le même raisonnement.

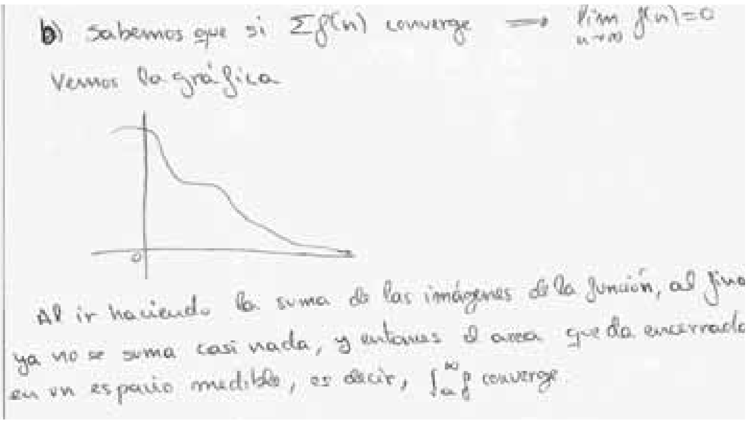
Un concept qui produit des difficultés plus fortes que prévu est celui de somme de Riemann (Bezuidenhout et Olivier, 2000) et celui de série associée à une fonction. Ces difficultés, qui peuvent devenir de vrais obstacles (comme nous l'avons observé chez quelques étudiants et avec la récurrence avec laquelle ils apparaissent), ont un origine clairement didactique. Les étudiants sont appris le concept de somme de Riemann formellement sans développer des activités de visualisation. Calvo (1997) indique que les étudiants manient des aspects formels sans développer des idées intuitives et, avec la définition d'intégrale définie, on ne remarque pas quels sont les éléments nécessaires ni quels ne le sont pas.

Par ailleurs, nous avons constaté que beaucoup d'étudiants n'ont pas d'images visuelles de la somme d'une série. Par conséquent, c'est l'idée de « somme » qui prévaut (car les deux concepts manquent d'une image) et les étudiants tendent à les confondre :


b) Creo que es cierto, ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, entonces la función $f(x)$, en el intervalo $[a,\infty)$ es integrable, y por lo tanto converge; ya que la suma de los términos de la sucesión es una parte de la integral, si converge una parte, converge una integral

ce qui les amène à des raisonnements erronés.

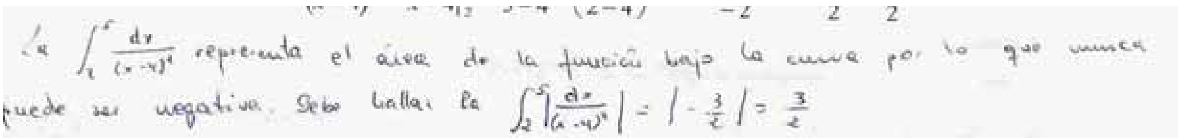
Rattaché avec l'antérieur se trouve la domination d'un enseignement prototypique avec des exemples continus et monotones (Tall, 1991b, 1992a ; Artigue, 1995a ; Evangelidou *et al*, 2004). Ces exemples réduisent le répertoire des étudiants, qui basent tous leurs raisonnements sur des graphes continus et monotones, ce qui les amène également à de fausses conclusions :


b) Sabemos que si $\Sigma f(n)$ converge $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)=0$

Vemos la gráfica

Al ir haciendo la suma de las imágenes de la función, al final ya no se suma casi nada, y entonces el área queda encerrada en un espacio medible, es decir, $\int_a^{\infty} f$ converge

Entre les obstacles que nous avions déjà localisé, se trouve celui généré par la conception erronée que l'intégrale définie est toujours une aire et, en conséquence, doit donner une valeur positive. Son origine nous semble clairement didactique et il a été déjà identifié par Calvo (1997), Turégano (1998) et Bezuidenhout et Olivier (2002). Cependant, il semble se montrer résistent et on voit comment, après avoir développé nos séances en insistant les signes des fonctions, il y a encore des étudiants affirmant que l'intégrale doit donner une valeur positive.

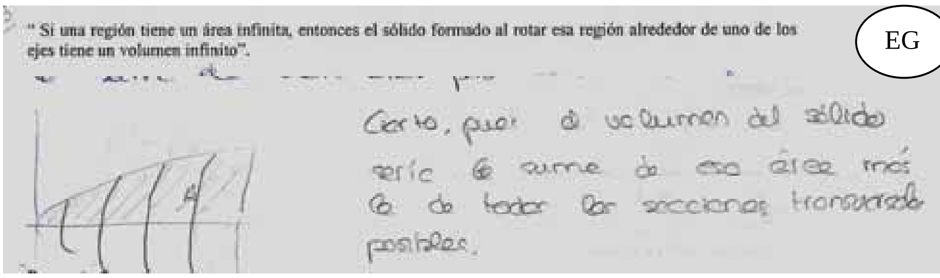

La $\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$ representa el área de la función bajo la curva por lo que nunca puede ser negativa. Debo hallar la $\left|\int_2^5 \frac{dx}{(x-4)^2}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Les conceptions simplement opérationnelles de l'intégrale peuvent également devenir des obstacles, car elles empêchent l'étudiant de conceptualiser la fonction intégrale $F(x)$ et de lui donner un caractère dynamique (Calvo, 1997 ; Carlson, Persson et Smith, 2003 ; Evangelidou *et al*, 2004).

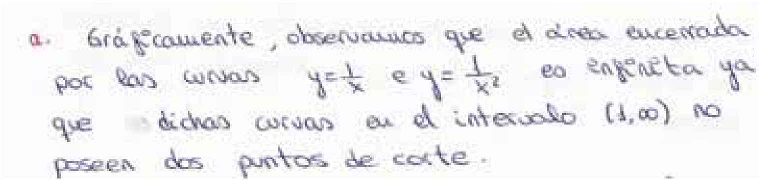
Deux obstacles que nous avions déjà trouvé, directement en rapport avec l'intégrale impropre, sont ceux d'*homogénéisation des dimensions* et de *liaison à la compacité* (Section

3.3.4.), apparaissant également dans l’histoire (Section 3.1.2.) et se rattachant, sans doute, avec l’obstacle d’*hétérogénéité des dimensions* (Schneider, 1991) et l’utilisation de l’infini potentiel (Tall, 1992a, 1992b).

Quant à l’*homogénéisation des dimensions*, l’effet décrit par Schneider (1991) apparaît et quelques étudiants conçoivent un volume comme l’agrégé de beaucoup de surfaces, ce qui les amène a des conclusions erronées :



En rapport avec la *liaison à la compacité*, nous avons observé que certains étudiants, après avoir montré être capables de réaliser les calculs algébriques nécessaires, argumentent que l’aire entre $1/x$ et $1/x^2$ dans l’intervalle $[1, \infty)$ est infinie car les courbes ne se touchent pas :



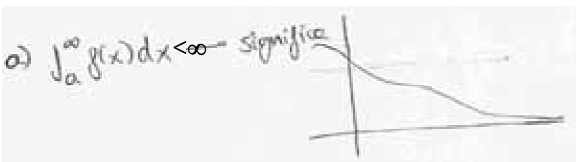
Nous avons trouvé des évidences de qu’une manière de les combattre est le travail explicite en combinant les registres graphique et algébrique, afin que l’étudient compte sur un vaste répertoire de fonctions qui l’aident à contredire les tromperies de l’intuition. Dans le cas de l’étudiante EG, ce sont les mêmes questions du Questionnaire de contenus qui la font se rendre compte de sa réponse incorrecte. Néanmoins, ces obstacles semblent s’être montrés résistants. Pendant les séances on a écrit clairement que :

« *aire bornée* $\not\Rightarrow$ *fonction bornée*

$$\int_a^\infty f(x)dx < \infty \not\Rightarrow f(x) < k \text{ »}$$

mais ces conceptions continuent à apparaître chez les étudiants.

La présence des conceptions monotones et continues aggrave les effets de cet obstacle :



Parmi les obstacles qui se sont montrés plus résistants que prévu dans notre dessin, nous signalons la conception que $f(x) \to 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$ (qui apparaît également dans le champ des séries). En dépit d’avoir montré aux étudiants des exemples simples qui montrent la fausseté de cet énoncé, cette conception est réapparue dans le Questionnaire de contenus (même chez certains étudiants qui ne répondirent pas de cette façon dans les problèmes remis). Dans ce cas, le contre-exemple typique ($1/x$) est facile à vérifier, ce qui fait que si l'on développait une attitude de vérifier les propres affirmations avec des exemples (Alcock, 2004), cette situation pourrait être combattue.

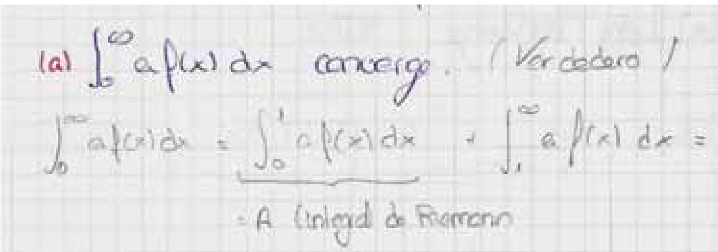
Entre les erreurs que nous avons trouvé, il y a une tendance à appliquer des résultats dans des situations où ils ne sont pas valides, ou des techniques dans des cas où elles ne sont pas nécessaires.

Nous avions déjà remarqué (González-Martín, 2002) le cas des étudiants divisant une intégrale en deux et en calculant sa valeur ne calculant qu'une seule des deux intégrales, car on fait ainsi pour l'étude du caractère (pour étudier le caractère de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, par comparaison avec l'intégrale de $1/x^2$, il est nécessaire de diviser l'intégrale en deux et prendre une intervalle ne pas contenant le 0).

Également, des erreurs se produisent à cause de la non vérification que les conditions pour utiliser un résultat se remplissent. Ainsi, plusieurs étudiants comparent avec les fonctions $1/x^k$ sans s'assurer que l'intervalle d'intégration ne contienne pas le 0. De cette manière, ils peuvent comparer avec $1/x^2$ dans $[0, \infty)$ et affirmer que l'intégrale sera divergente (en dépit que l'on sache que son intégrale est convergente).

Cette tendance de ne pas vérifier si le 0 peut ou ne peut pas être dans l'intervalle d'intégration fut observé pendant la Séance 4, quand le critère de comparaison avec la $\lim_{x\to\infty} x^k . f(x)$ fut énoncé.

Quant à l'utilisation de techniques non nécessaires, nous observons qu'EG tend à diviser l'intervalle d'intégration (comme une extension des cas antérieurs) dans des situations où cela n'est pas nécessaire :



Il y a également des étudiants (CF, NG) confondant les critères de convergence de la famille $1/x^k$ et de la famille $\frac{1}{(x-b)^r}$ (précisément, l'utilisation de paramètres différents, *k* et *r*, fut choisie pour éviter ces confusions), arrivant à des résultats erronés.

Nous signalons aussi le cas de SM, qui semble avoir développé l'idée que la manière correcte de répondre aux questions est en utilisant les résultats « formels ». De cette manière, pour déduire le caractère d'une intégrale il faut utiliser un critère ou pour la calculer, il faut utiliser un changement de variable.

Enfin, nous remarquons des erreurs non attendus dans le calcul de primitives (Camacho et Aguirre, 2001) et d'autres erreurs ayant un caractère simplement arithmétique.

7.4. LIMITATIONS ET PERSPECTIVES DE FUTUR

Tout d'abord, il est convenable de rappeler la question mentionnée dans la Section 4.3.1. sur la possibilité d'implanter notre Ingénierie, après avoir effectué les adaptations pertinentes, avec des étudiants d'autres Facultés, comme Physique ou Ingénierie, ce qui pourrait enrichir le type de situations proposées et même les problématiques proposées.

Comme nous le commentons dans la Section 7.2.2., une des questions qui reste ouverte est celle de la transmission de notre séquence à d'autres enseignants et son implantation régulière dans l'enseignement universitaire, en prenant en compte les données que notre recherche apporte et en atteignant un plus grand équilibre entre les situations adidactiques des séances différentes et des plus petits *décalages* entre les analyses *a priori* et *a posteriori* (qui, dans notre déroulement, nous ont fourni d'une grande quantité de données sur l'apprentissage des étudiants et sur quelques difficultés et obstacles que nous n'avions pas prévus).

Les analyses *a posteriori* indiquent qu'il serait convenable de développer des séances préliminaires où les contenus à utiliser étaient révisés avec les étudiants. Ces séances seraient une grande aide pour estimer l'état *réel* de leurs connaissances et pour adapter les *milieux* afin qu'ils soient les plus effectifs que possible.

Par ailleurs, l'intégration de notre séquence dans un projet majeur pourrait atteindre que les étudiants s'habituaient à participer en classe *avant* de son déroulement, ce qui fournirait des conditions plus favorables pour le déroulement de débats scientifiques.

Nous montrons aussi dans la Section 1.2. quelques facteurs qui nous amenèrent à borner notre problème de recherche. L'un d'eux était le manque de travaux de recherche centrés sur le concept d'intégrale impropre ; néanmoins, le développement de notre recherche fait apparaître une grande quantité d'éléments qui peuvent être utilisés dans d'autres projets et séquences futurs.

Cette situation nous permettrait de prendre aussi en compte le registre numérique, qui servirait d'appui aux notions de convergence, et qui apparaît tardivement dans l'évolution historique, avec le développement des méthodes de calcul approché et les formules de quadrature.

En González-Martín (2002) nous développons un travail explorateur qui nous a permis de classifier quelques difficultés, obstacles et erreurs. L'implantation de notre Ingénierie nous a permis de vérifier leur présence, mais de nouveaux difficultés, obstacles et erreurs ont apparu, agrandissant notre première classification et se rattachant avec d'autres sujets de l'Analyse. Il semble, alors, que des études futurs pourraient aider à compléter notre classification et à apporter des formes de soulager leurs effets.

Il est également importante la question de l'usage actif de la technologie dans notre séquence. Nous pensons que des conditions écologiques se sont vues favorisées, ce qui a permis une socialisation de la *genèse instrumentale* et des productions des étudiants, qui montrent leur satisfaction avec les séances développées avec *Maple V* et son intérêt à en développer plus à cause des apports qu'elles produisent.

Nos contributions pourraient établir un précédant dans notre institution pour l'organisation de salles avec des conditions physiques plus favorables pour la socialisation des techniques d'instrumentation (ainsi que permettant d'une manière plus flexible la combinaison des recours à l'ordinateur et aux techniques papier-crayon). De plus, sous des conditions favorables, l'utilisation d'un SCF pourrait devenir un environnement favorable pour l'intégration et l’opérationalisation des trois registres (algébrique, numérique et graphique) pour atteindre un apprentissage beaucoup plus significatif de l’intégrale impropre.

ANEXOS

ANEXO 1: HOJAS DE PROBLEMAS

FACULTAD DE MATEMÁTICAS **ANÁLISIS MATEMÁTICO II**

INTEGRACIÓN IMPROPIA: EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de las siguientes integrales impropias:

   a) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ c) $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ d) $\int_1^\infty x^{-1/3}dx$

   d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ e) $\int_0^\infty \frac{arctg x}{x^2+1}dx$ f) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

2. La velocidad del movimiento de un punto es $v = t.e^{-0'01t}$. Hallar el camino recorrido por dicho punto desde que comenzó a moverse hasta que se pare totalmente.

3. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje de abscisas la gráfica de la función

$$y = \frac{18x}{9+x^2}.$$

4. La razón r con la que la gente enferma durante una epidemia de gripe puede ser aproximada por $r = 1000t.\ e^{-0.5t}$, donde r se mide en personas/día y t en días a partir del comienzo de la epidemia.
   a) Dibuja una gráfica de r como función de t.
   b) ¿En qué momento enferma la población más rápido?
   c) ¿Cuántas personas enferman en total?

5. Un paciente recibe una inyección de imitrex, una medicina para la migraña, a razón de $r(t) = 2te^{-2t}$ ml/ seg, donde t es el número de segundos desde que comienza la inyección.
   a) Haciendo tender t a infinito, estimar la cantidad total de imitrex inyectada.
   b) ¿Qué fracción de esta dosis ha recibido el paciente al cabo de 5 segundos?

6. Sabiendo que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, calcular el valor exacto de $\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-a)^2/b}dx$.

7. Calcular el valor de a (con tres cifras decimales) que se debe tomar para que $\int_{-\infty}^\infty a.e^{-x^2/2}dx = 1$.

8. a) La función $g(x) = a.e^{-(x-6)^2/2}$ se utiliza en Estadística para calcular errores y también probabilidades. Calcular el valor de a que se debe tomar, con tres cifras decimales, para asegurar que

$$\int_{-\infty}^\infty g(x)dx = 1.$$

   b) ¿Es el resultado diferente del obtenido en el problema anterior? ¿Por qué?

9. a) Hallar una cota superior de $\int_3^\infty e^{-x^2}dx$.
   [Pista: $e^{-x^2} \le e^{-3x}$ para $x \ge 3$]
   b) Para cualquier positivo n, generalizar el resultado del apartado anterior para hallar una cota superior de $\int_n^\infty e^{-x^2}dx$ utilizando que $nx \le x^2$ para $x \ge n$.

10. a) Calcular el número real

$$I(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx,$$

   donde $\alpha > 0$ y $f(x) = \frac{e^x}{|e^x - 1|}$.
   b) Obtener $\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha)$.
   c) Interpretar geométricamente el resultado. ¿Podrías haber predicho este valor?

11. La energía E requerida para separar dos partículas cargadas, originalmente separadas por una distancia a, a una distancia b viene dada por la integral

$$E = \int_a^b \frac{k.q_1.q_2}{r^2}dr,$$

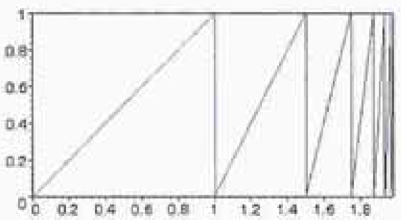
   donde q_1 y q_2 son las magnitudes de las cargas y k es una constante. Si q_1 y q_2 vienen en culombios, a y b en metros y E en julios, el valor de la constante k es de 9.10^9.

   Un átomo de hidrógeno consiste en un protón y un electrón, con cargas opuestas de magnitudes $1'6.10^{-19}$ culombios. Calcular la energía necesaria para separar un átomo de hidrógeno (esto es, para mover el electrón de su órbita a una distancia infinita del protón). Suponer que la distancia inicial entre el electrón y el protón es el radio de Bohr, $R_B = 5'3.10^{-11}$ metros.

12. Calcular la energía necesaria para separar dos cargas eléctricas opuestas de magnitud 1 culombio. Las cargas están inicialmente a una distancia de 1 metro y una es empujada a una distancia infinita de la otra.

13. Calcular $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{1}{x^4+4}dx$.

14. Se denomina **supersólidos** a determinadas figuras sólidas acotadas (en el sentido de que pueden ser encerradas dentro de una esfera con radio finito) con la propiedad de tener un volumen finito pero un área superficial infinita. Construyamos uno y comprobemos esta propiedad.
   El **supercono** se construye tomando una secuencia infinita de triángulos rectángulos en el intervalo [0, 2] de forma que el primero tenga como base 1 y altura 1; cada triángulo sucesivo tendrá una base la mitad del anterior.



Si hacemos girar esta secuencia de triángulos obtendremos el supercono.

a) Calcular la base, la altura y la hipotenusa de cada triángulo T_n.

b) Utilizando la fórmula del volumen del cono ($V = \frac{1}{3}$.área base. altura), probar que la suma de volúmenes es finita, por lo que el supercono tiene volumen finito.

c) Utilizando la fórmula del área del cono (A = área base + área lateral = π. radio^2 + π. radio. longitud lateral), probar que la suma de áreas no está acotada, por lo que el supercono tiene un área superficial infinita.

15. Determinar el área de la superficie generada al girar la curva $y = e^x$ alrededor del eje OX, entre $x = 0$ y $x = +\infty$.

16. Suponiendo $a > 0$, demostrar que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si, y sólo si, $p > 1$.

17. Demostrar que $\int_a^{\infty} e^{-px}dx$ converge si $p > 0$ y diverge si $p \leq 0$.

18. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ c) $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ e) $\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{x^2+1}dx$ f) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

19. Determinar el carácter convergente o divergente de las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4}$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ e) $\int_4^{\infty} \frac{dt}{(\ln t)-1}$ f) $\int_1^{\infty} \frac{(\sin x)+3}{\sqrt{x}}dx$

20. En la Ley de Radiación de Planck encontramos la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5(e^{1/x}-1)}$.

a) Explicar por qué la gráfica de la recta tangente a e^t en $t = 0$ nos dice que, para todo t: $1 + t \leq e^t$.

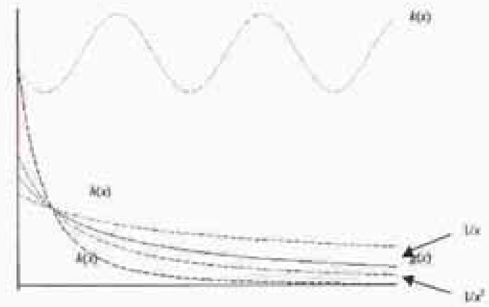
b) Sustituyendo $t = 1/x$, probar que para todo x: $e^{1/x} - 1 > \frac{1}{x}$.

c) Utilizar el criterio de comparación para probar que la integral inicial es convergente.

21. Las gráficas de $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ y las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ se muestran en la gráfica adjunta.

a) ¿El área encerrada entre $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, \infty)$ es finita o infinita? Explicar.

b) Utilizando la gráfica, decidir si la integral de cada una de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ en el intervalo $[1, \infty)$ converge, diverge o si no se puede decir.



22. ¿Es cierto siempre que $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$?

23. Probar que si $f(x)$ es integrable en todo intervalo de números reales y si a y b son números reales con $a < b$, entonces:

a) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ convergen si, y sólo si, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ y $\int_b^{\infty} f(x)dx$ convergen.

b) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$ cuando las integrales implicadas son convergentes.

24. Supongamos que f es una función continua para todo número real y que $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge. Sea a un número positivo cualquiera. Decidir la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados. Dar explicaciones para cada respuesta.

a) $\int_0^{\infty} a.f(x)dx$ converge. b) $\int_0^{\infty} f(a.x)dx$ converge.

c) $\int_0^{\infty} f(a+x)dx$ converge. d) $\int_0^{\infty} (a+f(x))dx$ converge.

25. a) Mostrar que si f es par y las integrales necesarias existen, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2.\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

b) Probar que si f es impar y las integrales necesarias existen, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

26. **$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ puede no ser igual a $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$**

Probar que la integral $\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$ es divergente y, por tanto, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$ diverge.

27. Aquí tenemos un argumento de que *ln 3* es igual a $\infty - \infty$. ¿Dónde falla el argumento? Da razones para tu respuesta:

$$\begin{aligned}
\ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln \frac{1}{3} &= \\
= \lim_{b\to+\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3} &= \\
= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b &= \\
= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln(x-2) - \ln x\right]_3^b &= \\
= \lim_{b\to+\infty}\int_3^b\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx &= \\
= \int_3^{\infty}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx &= \\
= \int_3^{\infty}\frac{1}{x-2}dx - \int_3^{\infty}\frac{1}{x}dx &= \\
= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln(x-2)\right]_3^b - \lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_3^b &= \\
= \infty - \infty.
\end{aligned}$$

28. Sea $I = [a, +\infty)$ y f continua en I. Probar que:

a) Si f tiene límite l en $+\infty$ y f es integrable sobre I, entonces $l = 0$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ no es suficiente para asegurar la integrabilidad de f.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ no es tampoco una condición necesaria de integrabilidad de f.

29. ¿Es cierto que si $\int_{0}^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$?

30. ¿Es cierto que si $\sum f(n)$ converge, entonces $\int_{0}^{+\infty} f$ converge también?

31. Sabemos que $\int_{a}^{a+2\pi}$ sin $x.dx = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Entonces: ¿$\int_{0}^{\infty}$ sin $x.dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k}^{k+2\pi}$ sin $x.dx = 0$?

32. Sea $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ impar.

Es cierto que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, $\forall a > 0$. ¿Entonces, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$?

33. Definimos la función $F(x)$ de la siguiente forma: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

¿Es cierto entonces que $F'(x) = f(x)$? ¿Bajo qué condiciones?

34. Sabemos que si $\int_{a}^{b} f(x).dx$ existe, entonces también existe $\int_{a}^{b}|f(x)|.dx$.

¿Se conserva esta propiedad en el caso en que $b = \infty$?

35. Probar que la integral $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos x.dx$ es convergente y calcular su valor.

36. Decidir la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_{0}^{+\infty} x.\cos x.dx$ b) $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}dx$ c) $\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}.\sin x}{\sqrt{1+x}}dx$

d) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1+6.\sin 2x}{3x^3+x^2}dx$ e) $\int_{0}^{+\infty} x.\sin x^4 dx$

37. Probar que $\int_{\pi}^{\infty}\frac{senx}{x^2}dx$ y $\int_{1}^{\infty}\frac{senx}{x}dx$ son convergentes.

38. <u>**Teorema:**</u>

Sean f y g continuas en $[a, b)$ y g con derivada continua en $[a, b)$. Supongamos:

i) $\exists K > 0, \forall x \in [a, b): F(x) = \left|\int_{a}^{x} f(t)dt\right| \le K.$

ii) $g(t) \to 0, t \to b^-$

iii) $\forall x \in [a, b): \int_{a}^{b}|g'(t)|dt \le K.$

Entonces, la integral $\int_{a}^{b} f(t).g(t)dt$ converge.

<u>**Corolario (Criterio de Dirichlet):**</u>

Sean f y g continuas en $[a, b)$, g con derivada continua, y supongamos que:

i) $\exists K > 0: |F(x)| \le K, \forall x \in [a, b)$

ii) $g_{\downarrow}$ monótona decreciente y $g(t) \to 0$

Entonces, la integral $\int_{a}^{b} f(t).g(t)dt$ converge.

Utilizando estos resultados, probar la convergencia de $\int_{0}^{\infty}\frac{senx}{x}dx$.

39. Estudiar la convergencia y, en su caso, evaluar la siguiente integral impropia: $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

40. Demostrar que, si $p > 0$:

a) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge si, y sólo si, $p < 1$.

b) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si, y sólo si, $p < 1$.

41. ¿Para qué valores de p convergen o divergen las siguientes integrales? ¿Cuál es el valor de la integral cuando converge?

a) $\int_1^{\infty} x^p . \ln x\, dx$ b) $\int_0^1 x^p . \ln x\, dx$

42. Determinar el carácter convergente o divergente de las siguientes integrales:

a) $\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ c) $\int_0^1 \frac{x.\arctan(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$

43. Estudiar la naturaleza de la integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$.

44. Estudiar la convergencia o divergencia de $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$

45. Determinar el carácter de la siguiente integral: $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}dx$

46. Estudiar la convergencia y, en su caso, evaluar la siguiente integral impropia: $\int_1^3 \frac{dz}{z-2}$

47. Decidir la convergencia o divergencia de:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}$. b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

48. Sabiendo que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, obtener las siguientes igualdades:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx = \frac{\pi}{3}$

49. Suponiendo $a > 0$, calcular el área comprendida entre la curva $x\,(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ y su asíntota.

50. Probar que las integrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$$

convergen y tienen el mismo valor.

51. Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\int_1^x \frac{1}{t}.\tan\frac{\pi t}{2t+1}dt$.

52. Discutir la convergencia y calcular, si es posible, el valor de la integral $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$.

53. Evaluar las integrales

a) $\int_0^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy$ b) $\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx$

54. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2} . x^2 dx$.

55. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ b) $\int_0^1 x^3 . \ln x\, dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$ e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ f) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2 . (1-x)}}$

ANEXO 2: TRANSPARENCIAS

¿Cuáles de estas integrales no se pueden calcular con la definición de Riemann?

a) $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x dx$

c) $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ d) $\int_0^{5} \frac{1+2x}{x^2+1} dx$

e) $\int_0^{1} \frac{1}{x} dx$ f) $\int_{-1}^{3} E[x] dx$

g) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ h) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

i) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ j) $\int_1^{e} \ln x dx$

k) $\int_4^{6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-1}}$ l) $\int_0^{10} (1+5x)^7 dx$

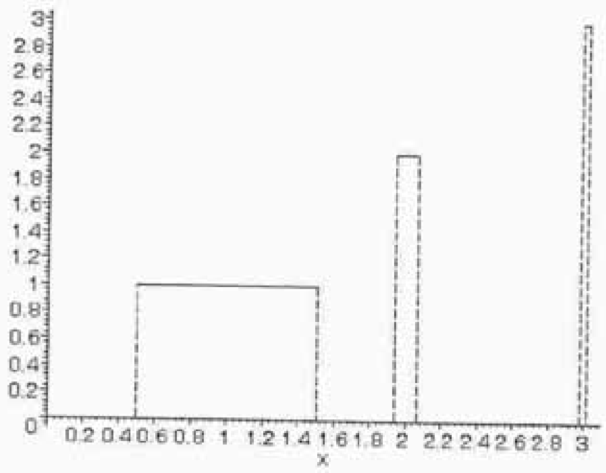
m) $\int_1^{\infty} x^{-1/3} dx$ n) $\int_{-1}^{1} (1-|x|) dx$

o) $\int_0^1 f(x)dx$, con $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [0,1] \cap I \\ 0, \text{ si } x \in [0,1] \cap Q \end{cases}$

Transparencia 1

Ejemplo de función que no tiene límite, pero cuya integral impropia converge

$$f(x) = \begin{cases} n, \text{ si } x \in \left[n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}\right], \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



Transparencia 2

ALGUNOS CRITERIOS PARA SERIES

Teorema:

Si $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Proposición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge, $\forall\, k > 1$.

Si $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Proposición:

Sea la suma $\sum \frac{1}{n^k}$.

Entonces, la suma es convergente $\forall\, k > 1$.
divergente $\forall\, k \leq 1$.

Teorema:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos converge si, y sólo si, sus sumas parciales están acotadas superiormente.

Transparencia 3

Test de comparación:

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos.

a) $\sum a_n$ converge si hay una serie convergente $\sum c_n$, con $a_n \leq c_n\ \forall\, n \geq N$, para algún N.

b) $\sum a_n$ diverge si hay una serie divergente de términos no negativos, $\sum d_n$, con $a_n \geq d_n\ \forall\, n \geq N$, para algún N.

Corolario:

Sean $a_n > 0$ y $b_n > 0$, $\forall\, n \geq N$ (N natural).

1.- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen simultáneamente.

2.- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

3.- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

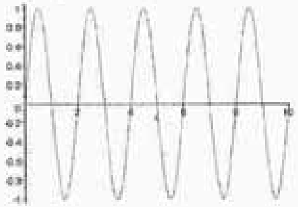
Teorema:

Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ son series convergentes, entonces $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$.

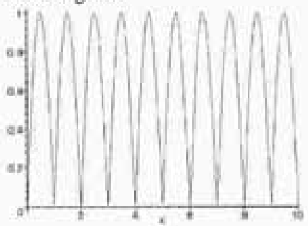
Transparencia 4

LA CONVERGENCIA DE LA SERIE ASOCIADA NO IMPLICA LA CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL

La integral de $f(x) = \sin \pi x$ no existe; sin embargo, da origen a la serie de términos nulos, que es convergente. Su gráfica es:

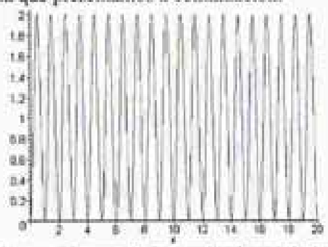


Su valor absoluto da lugar a función no negativa, que se anula en todos los enteros y cuya integral es divergente:



Otro contraejemplo continuo es la función $f(x) = \sin\left(\left(2x - \frac{1}{2}\right)\pi\right) + 1$

cuya gráfica es la que presentamos a continuación:



La serie asociada es nula, pero la integral sobre cada intervalo $[k, k+1]$ vale 1.

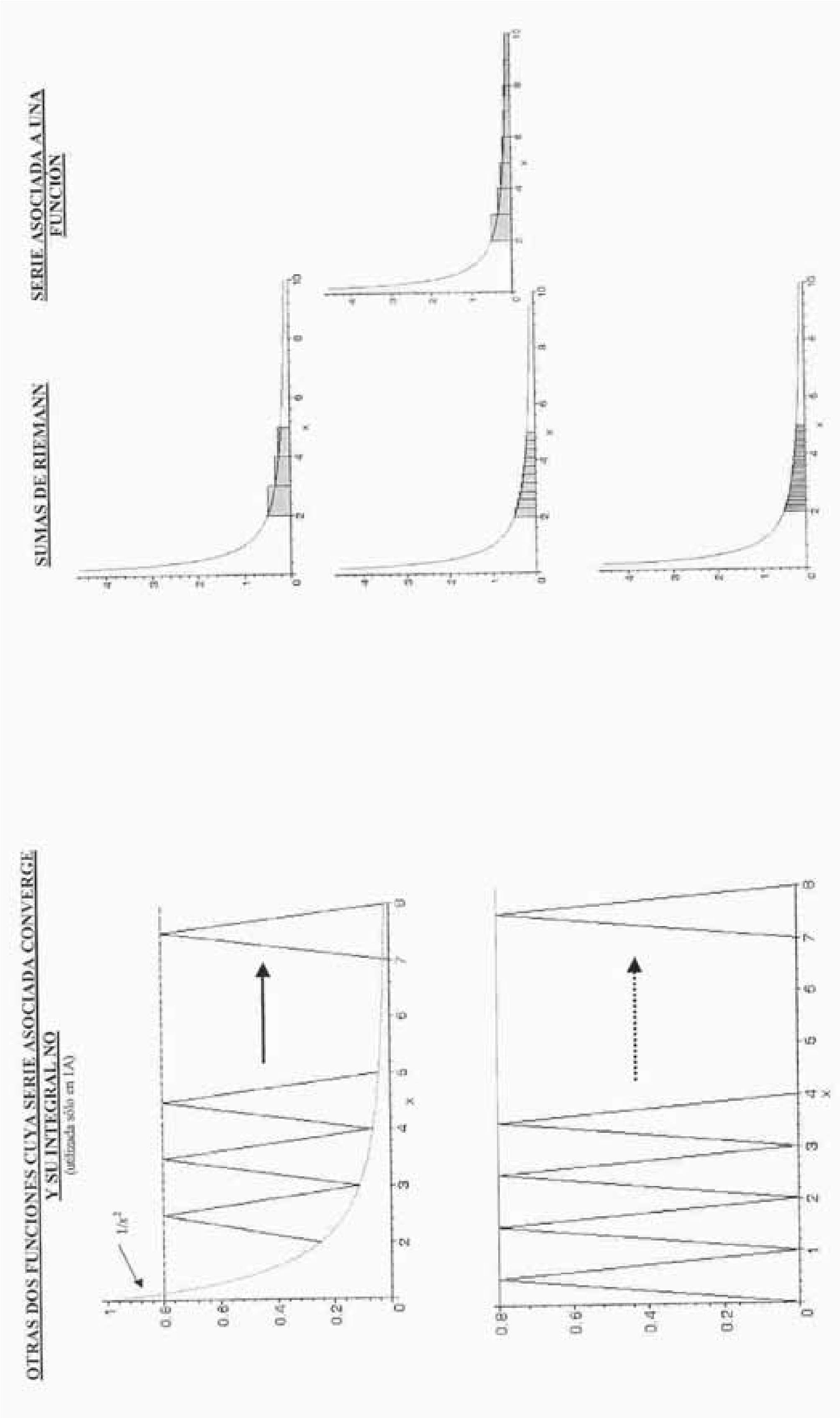
Transparencia 5

Teorema (Test Integral):

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Supongamos que $a_n = f(n)$, donde f es una función continua, positiva y decreciente en x, para todo $x \geq N$ (N un entero positivo).

Entonces la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Transparencia 6



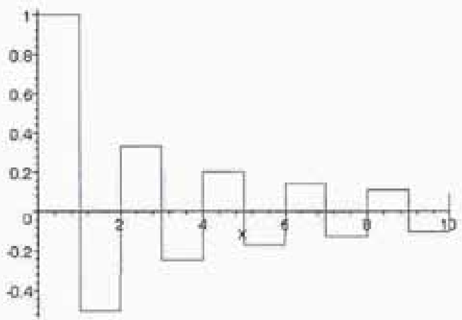
Transparencia 7

Transparencia 8

Función cuya integral converge, pero no converge absolutamente

Se puede construir a partir de una serie que sepamos que no es absolutamente convergente (el ejemplo típico: $\frac{(-1)^n}{n}$). Así, construimos una función que represente esta serie y tendríamos el ejemplo.

En nuestro caso, sea $f(x)=\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x+1\rfloor}$, cuya gráfica es



y cuya integral resulta convergente. Sin embargo, el valor absoluto de esta función da lugar a la serie armónica, que es divergente.

Transparencia 9

HERRAMIENTAS PARA DEMOSTRAR EL TEOREMA "CONVERGENCIA ABSOLUTA ⇒ CONVERGENCIA USUAL"

Criterio de Cauchy (series):

Para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es necesario y suficiente que para todo número positivo ε se pueda encontrar un número natural n_0 tal que para todo par de número naturales p y q mayores que n_0 se verifique

$$|a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_{p+q}|<\varepsilon$$

Criterio de Cauchy:

Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$. La integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ es convergente si, y sólo si, para cada $\varepsilon>0$ existe b_0: $a<b_0<b$ tal que

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon,\ \forall x_1,x_2 : b_0<x_1<x_2<b.$$

Proposición (Integral del valor absoluto):

Sea f integrable en $[a, b]$. Entonces, $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y:

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

Transparencia 10

HERRAMIENTAS PARA PROBAR LA CONVERGENCIA DE
$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ Y $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Proposición:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f, g dos funciones no negativas y localmente integrables en $[a, b)$. Además, se cumple que: $0 \leq f(x) \leq k.g(x)$. Entonces:

1) $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.

2) $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge.

Teorema de integración por partes:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f y g continuas en $[a, b)$ y g con derivada continua en $[a, b)$. Supongamos que F es una primitiva de f en $[a, b)$.

Entonces, si existen **y son finitos** dos de los tres límites:

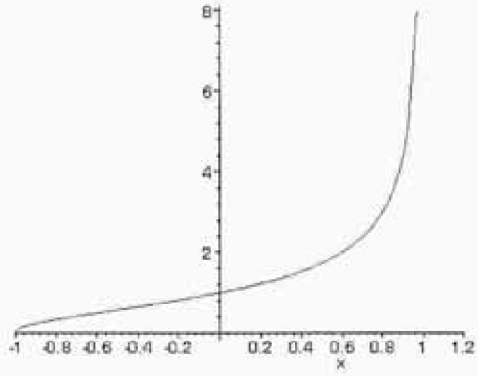
i) $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t).g(t)dt$ *ii)* $\lim_{x \to b^-} F(x).g(x)$ *iii)* $\lim_{x \to b^-} \int_a^x F(t).g'(t)dt$

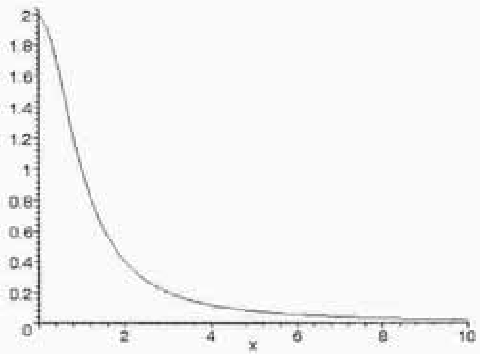
existe el tercero, **es finito** y se verifica:

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x).g(x) - F(a).g(a) - \int_a^b F(t).g'(t)dt$$

Transparencia 11

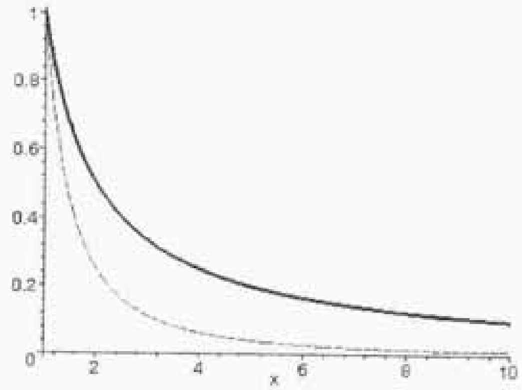
COMPARACIÓN GRÁFICA ENTRE LA INTEGRAL DE PRIMERA ESPECIE Y LA DE SEGUNDA ESPECIA

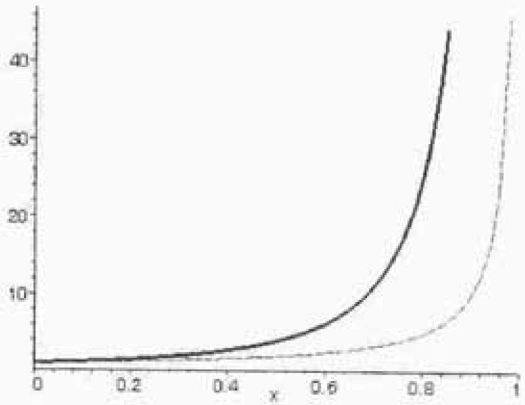




Transparencia 12

CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA Y DE SEGUNDA ESPECIE





Transparencia 13

COROLARIO GENERALIZADO DEL CRITERIO DE COMPARACIÓN:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f, g no negativas y localmente integrables en $[a, b)$. Suponemos que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$. Entonces $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ tienen el mismo carácter.

De cualquier forma, si $C = 0$ y $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es convergente. Y si $C = \infty$ y $\int_a^b g(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es divergente.

Demostración:

Sea C distinto de cero y de infinito; se tiene que, en un entorno de b:

$$C - \varepsilon < \underset{g\ \text{positiva}}{\frac{f(x)}{g(x)}} < C + \varepsilon \Rightarrow (C - \varepsilon).g(x) \underset{i}{<} f(x) \underset{d}{<} (C + \varepsilon).g(x)$$

Ahora estamos en las condiciones del teorema anterior.

i) Si $G(x)$ diverge, también lo hará $F(x)$. Y si $F(x)$ está acotada, también lo estará $G(x)$.

ii) Si $G(x)$ está acotada, también lo estará $F(x)$. Y si $F(x)$ diverge, también lo hará $G(x)$.

Por otro lado, si $C = 0$, se tendrá que, en un entorno de b:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon.g(x) < \underline{f(x) < \varepsilon.g(x)}$$

y volvemos al teorema anterior.

Finalmente, si $C = \infty$, se tiene que: $M < \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow M.g(x) < f(x)$

y concluimos lo mismo.

Transparencia 14

EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN INTEGRAL SE MANTIENE TANTO EN PRIMERA COMO EN SEGUNDA ESPECIE

Teorema:

Supongamos que f es localmente integrable y no negativa en $[a, b)$.

Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge si, y sólo si, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \le x < b$, está acotada en $[a, b)$.

Si F diverge, lo hace necesariamente hacia $+\infty$.

Demostración:

Veamos que $F(x)$ es creciente. Sean $x_1 < x_2$:

$$F(x_2) = \int_a^{x_1} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}}_{\ge 0} = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \ge F(x_1)$$

"$\Rightarrow$" Se tiene:

$$\lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \underset{converge}{\le} +\infty,$$

luego $F(x)$ está acotada, al ser creciente y tener un valor finito en el extremo derecho.

"$\Leftarrow$" Se hace igual.

$F(x)$ es creciente y está acotada, luego tiene límite finito cuando $x \to b$. Por tanto, la integral $\int_a^b f(t)dt$ converge.

La segunda parte del teorema es obvia. Al ser F creciente, si no tiende hacia un valor finito, necesariamente tiende a infinito.

Transparencia 15

COMPARACIÓN DEL ENUNCIADO DE UN CRITERIO QUE DIFIERE PARA PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE

Proposición:

Sea $a > 0$ y f no negativa y localmente integrable en $[a, \infty)$. Sea $\lambda = \lim_{x \to \infty} x^k . f(x)$. Entonces:

Si $\lambda \neq \infty \wedge k > 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Si $\lambda \neq 0 \wedge k \le 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Proposición:

Sea $f(x) \ge 0$ y localmente integrable en $[a, b)$ / $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$. Sea $\lambda = \lim_{x \to b^-} |x - b|^r . f(x)$. Entonces:

Si $\lambda \neq \infty \wedge r < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.

Si $\lambda \neq 0 \wedge r \ge 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ diverge.

Transparencia 16

LAS PROPIEDADES GENERALES DE LA INTEGRAL IMPROPIA NO CAMBIAN

Teorema:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sea f definida y localmente integrable en $[a, b)$.

Sea $a < c < b \leq \infty$. Entonces, la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\int_c^b f(x)dx$ converge.

Teorema:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f y g integrables en sentido impropio en $[a, b)$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\lambda f + \mu g$ es integrable en sentido impropio y se tiene:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Teorema de integración por partes:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Sean f y g continuas en $[a, b)$ y g con derivada continua en $[a, b)$. Supongamos que F es una primitiva de f en $[a, b)$.

Entonces, si existen y son finitos dos de los tres límites:

i) $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t).g(t)dt$ *ii)* $\lim_{x\to b^-} F(x).g(x)$ *iii)* $\lim_{x\to b^-} \int_a^x F(t).g'(t)dt$

existe el tercero, es finito y se verifica:

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = \lim_{x\to b} F(x).g(x) - F(a).g(a) - \int_a^b F(t).g'(t)dt$$

Teorema:

Sea $b \in \mathbb{R}$ ó $b = +\infty$.

Si $\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ es convergente.

Transparencia 17

ANEXO 3: TEST DE CONTENIDOS

PRIMERA PARTE:

NOMBRE: **GRUPO:**

Pregunta 1:

¿Cómo le explicarías a un compañero el significado de $\int_a^b f(x).dx$?

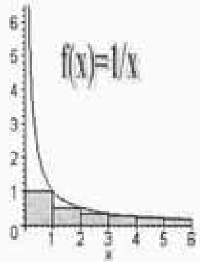
¿Y cómo le explicarías el de $\int_a^{\infty} f(x).dx$?

Pregunta 2:

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

En vista de estos resultados, ¿qué puedes decir del valor de $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ y $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$?

Ayúdate de la gráfica adjunta.



Pregunta 3:

¿Encuentras algún fallo en el siguiente razonamiento?

$$\int_2^5\frac{dx}{(x-4)^2}=\left.\frac{-1}{x-4}\right|_2^5=\frac{-1}{5-4}-\left(\frac{-1}{2-4}\right)=-1+\frac{1}{-2}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

Pregunta 4:

¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso? ¿Por qué?

" Si una región tiene un área infinita, entonces el sólido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito".

Pregunta 5:

Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^{\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

SEGUNDA PARTE:

NOMBRE: **GRUPO:**

Pregunta 6:
Se dice que una función $f(x)$ es localmente integrable en un intervalo $[a, b)$ cuando...

Dar un ejemplo de una función $f(x)$ y un intervalo $[a, b)$ tal que f no sea localmente integrable en $[a, b)$.

¿Si $f(x)$ es localmente integrable en $[a, b)$, entonces su integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ es convergente?

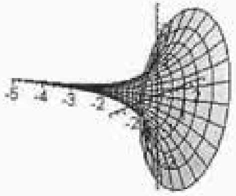
Pregunta 7:
Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

Si $f(x) \to 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $f(x) \to 0$.

Si $f(x)$ es continua y cumple que $f(1) + f(2) + f(3) + ... = \sum_{n=1}^\infty f(n)$ da un valor finito, entonces $\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente.

Pregunta 8:
La siguiente figura muestra el resultado de hacer girar la curva $y = e^x$ alrededor del eje OX en el intervalo [-5, 1].
Vamos a calcular el volumen que se formaría si siguiéramos prolongando la figura hacia la <u>izquierda</u> (hacia $-\infty$).



Cada sección circular tiene un radio de e^x. Por tanto, el área de cada sección es

$$A(x) = \pi.(\text{radio})^2 = \pi.(e^x)^2 = \pi.e^{2x}.$$

Si sumamos ahora todas las áreas, obtendremos:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{1} A(x)dx = \int_{-\infty}^{1} \pi.e^{2x}dx = \pi.\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{1} e^{2x}dx.$$

Concluye los cálculos. Interpreta el resultado.

Pregunta 9:
Analiza los métodos siguientes de resolución de la misma integral. ¿Son ambos correctos? ¿Por qué?

1.- $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)}} = \int_4^5 (x-4)^{-1/2}dx = \left[\frac{(x-4)^{1-1/2}}{1-1/2}\right]_4^5 = \left[\frac{(x-4)^{1/2}}{1/2}\right]_4^5 = 2\left(\sqrt{5-4}-\sqrt{4-4}\right) =$
$= 2\left(\sqrt{1}-0\right) = 2.$

2.- $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)}} = \int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^{1/2}} = \lim_{b\to4}\int_b^5 \frac{dx}{(x-4)^{1/2}} = \lim_{b\to4}\left[\frac{(x-4)^{1-1/2}}{1-1/2}\right]_b^5 =$
$\displaystyle= \lim_{b\to4}\frac{1}{1/2}\left((5-4)^{1/2}-(b-4)^{1/2}\right) = 2.\lim_{b\to4}\left(\sqrt{1}-\sqrt{b-4}\right) = 2\left(\sqrt{1}-0\right) = 2.$

Pregunta 10:
Calcula el valor o el carácter de las siguientes integrales: $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x-1}dx \qquad \pi.\int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}dx$

Interpreta gráficamente resultados a los que has llegado. ¿Hay alguna relación entre ambas integrales?

ANEXO 4: TEST DE OPINIÓN

GRUPO:

En el siguiente cuestionario queremos recoger tu opinión sobre los diversos aspectos del desarrollo del tema sobre *Integrales impropias*. Rellénalo marcando la casilla más adecuada a tu opinión y respondiendo a las cuestiones planteadas.
Muchas gracias por tu colaboración.

1.- ¿Cómo valoras tu formación matemática anterior al comienzo de este curso?

Muy mala	Defectuosa	Apropiada	Muy buena

¿Por qué? ¿Cómo te ves en relación a la formación de tus compañeros?

2.- ¿Es tu primer año en la Universidad?
Si no lo es, ¿en qué otras titulaciones has estado y por cuánto tiempo?

¿Has hecho alguna rama de FP?
Si es así, especifica cuál.

3.- ¿Qué opinas del nivel de este Primer curso de Matemáticas? ¿Por qué?

4.- ¿Qué grado de dificultad tiene la asignatura *Análisis Matemático II* para ti en relación con las demás? ¿Por qué?

5.- En general, la metodología de las clases sobre *Integrales impropias* me ha parecido

Muy poco adecuada	Poco adecuada	Adecuada	Muy adecuada

6.- Los conceptos e ideas presentados me han quedado

Nada claros	Algo confusos	Claros	Muy claros

7.- Las cuestiones planteadas por el profesor en clase me han parecido

Muy difíciles	Difíciles	Normales-Fáciles	Muy fáciles

8.- Los problemas seleccionados para resolver personalmente en casa y entregar me han resultado

Muy difíciles	Difíciles	Normales-Fáciles	Muy fáciles

Nada interesantes	Poco interesantes	Interesantes	Muy interesantes

9.- Los problemas seleccionados para resolver personalmente en casa y entregar me han ayudado a entender mejor los aspectos teóricos

En nada. Al revés, me han liado	En nada	Un poco	Bastante	Mucho

10.- Las cuestiones que se han trabajado en clase mediante fichas que luego eran recogidas por el profesor me han parecido

Muy difíciles	Difíciles	Fáciles	Muy fáciles

Nada interesantes	Poco interesantes	Interesantes	Muy interesantes

Sólo sirven para liarnos	No son útiles	Me han ayudado un poco a entender luego la teoría	Me han ayudado mucho a entender luego la teoría

11.- El trabajo en pequeños grupos con los compañeros me ha parecido

Inútil	Poco útil. Se pierde tiempo	Útil. Se aclaran cosas	Muy útil. Me ha servido de mucho

12.- El uso de ejemplos y contraejemplos en clase me ha parecido

Nos lía	Nada útil	Útil	Muy útil

13.- En clase he participado

Nada	Casi nada	Cuando he pedido	Mucho

¿Por qué?

14.- ¿Crees que habría que fomentar más debates y discusión en clase?

No, nunca	Alguna vez	Sí y de forma frecuente	Sí y debería ser parte de la enseñanza y evaluación

15.- El desarrollo del tema me ha ayudado a revisar los contenidos de integración definida

Me ha liado más	Nada	Un poco	Bastante	Bastante y he aclarado dudas

16.- El desarrollo del tema me ha ayudado a revisar los contenidos de series

Me ha liado más	Nada	Un poco	Bastante	Bastante y he aclarado dudas

17.- El uso de gráficas como parte del trabajo matemático me ha parecido

Nada interesante. No es formal	Poco interesante	Interesante	Muy interesante y útil

Me ha liado	Indiferente	Ayuda algo a entender las cosas	Ayuda mucho a entender las cosas

18.- ¿Conocías ya el software *Maple.V*?
¿Sabes manejar algún otro software de cálculo simbólico?

19.- La experiencia de trabajar las Matemáticas a través del ordenador te ha gustado:

Nada	Poco	Bastante	Mucho

¿Por qué?

20.- Las actividades con el ordenador te han resultado:

Muy fáciles	Fáciles	Difíciles	Muy difíciles

21.- El uso del ordenador es complicado y ayuda poco a aprender Matemáticas.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

22.- Si el ordenador no da una respuesta, entonces el problema no tiene solución.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

23.- El uso del ordenador ayuda a que las personas con dificultades de cálculo puedan hacer Matemáticas.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

24.- Cuando escribimos correctamente en el ordenador lo que queremos hacer, entonces podemos confiar plenamente en el resultado obtenido.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

25.- El uso del *Maple V* es una ayuda para descubrir reglas algebraicas.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

26.- El uso del ordenador incrementa mis ganas de trabajar en Matemáticas.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

27.- El uso del ordenador me ayuda a entender las Matemáticas.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

28.- Utilizando el ordenador puedo resolver problemas en vez de resolver ejercicios repetitivos.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

29.- Con el uso del ordenador puedo pensar en las Matemáticas de una forma distinta.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

30.- *Maple V* es útil porque podemos dibujar una gráfica mientras trabajamos con integrales impropias.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

31.- *Maple V* me permite tener una idea del resultado de un cálculo antes de hacerlo.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

32.- *Maple V* me ayuda a resolver problemas sin perderme en los cálculos.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

33.- *Maple V* es una herramienta útil para comprobar el resultado de mis cálculos.

Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo

34.- ¿Te habría gustado dedicar más horas al uso del ordenador en esta asignatura? ¿Por qué?

35.- ¿Te gustaría que el ordenador formase parte activa de la enseñanza de esta asignatura y no se utilizase sólo en ocasiones aisladas? ¿Por qué?

ANEXO 5: TEST SOBRE EL USO DE CONTRAEJEMPLOS

El propósito de este cuestionario **anónimo** es recoger tus impresiones sobre el método del uso de contraejemplos para una comprensión más profunda y eliminar posibles concepciones erróneas.
Los resultados de este cuestionario serán utilizados en un estudio internacional.

Cuestión 1. ¿Te sientes seguro utilizando contraejemplos?

a) Sí Da las razones:

b) No Da las razones:

Cuestión 2. ¿Consideras este método efectivo?

a) Sí Da las razones:

b) No Da las razones:

Cuestión 3. ¿Te gustaría que este tipo de actividades formara parte de la evaluación?

a) Sí Da las razones:

b) No Da las razones:

Muchas gracias por tu participación en el estudio.