

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

«Estimación de la estructura temporal de tipos de interés. Propuestas alternativas»

Autora: Sandra Morini Marrero
Director: Dr. D. Francisco Pérez Calatayud

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

D. Francisco Pérez Calatayud, Catedrático de Economía Financiera de la Universidad de La Laguna.

CERTIFICA: Que la presente memoria titulada “ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS. PROPUESTAS ALTERNATIVAS”, presentada por Sandra Morini Marrero, licenciada en Ciencias Económicas y Empresariales, ha sido realizada bajo mi dirección, contiene material original y suficiente y reúne las condiciones de forma exigidas, por lo que autorizo sea admitida a trámite para su lectura y defensa con el fin de obtener el grado de doctor en Ciencias Económicas y Empresariales.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, firmo la presente en La Laguna a uno de Junio de mil novecientos noventa y ocho.

Fdo: Dr. Francisco Pérez Calatayud

A la memoria de Maye

“Hasta el infinito y más allá”
Buzz Lightyear

AGRADECIMIENTOS

Aunque las personas que de algún modo me han ayudado en la realización de este trabajo conocen mi gratitud, es mi voluntad hacer público mis agradecimientos aprovechando la oportunidad que se me brinda.

En primer lugar, doy las gracias al Profesor Francisco P. Calatayud, Director de este trabajo, no sólo por la labor realizada como tal sino, sobre todo, por la confianza que ha tenido en mi capacidad como investigadora desde que cursaba los estudios de la licenciatura.

Al Profesor José Ignacio González Gómez por seguir de cerca el trabajo realizado y animarme a seguir adelante en los momentos difíciles, su apoyo moral fue tan importante como la ayuda intelectual, que nunca me faltó del Profesor Francisco P. Calatayud en el plano financiero ni del Profesor Manuel García en la parte matemática de este trabajo. En este sentido, también, merece una mención especial la Profesora Concepción González Concepción por haber realizado una lectura minuciosa de este trabajo, sus comentarios han sido muy enriquecedores y han contribuido a mejorar los contenidos de esta memoria.

No olvido a los compañeros del Departamento de Economía Financiera y Contabilidad, en especial doy las gracias al Profesor Néstor Bruno y a Mariano Cejas por su amistad, a las Profesoras Teresa R. Ferrer y M^a Carmen Hernández por su “*¿Cómo va eso, Sandrita?*”, al Profesor Javier Giner por darme a conocer el *Matlab*[®] y al Profesor Francisco Calero por proporcionarme alguno de los datos empleados en el análisis empírico.

Para finalizar, quiero agradecer a mis padres el esfuerzo realizado para poner los medios necesarios a mi alcance, sin su ayuda nada de esto hubiese sido posible.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
---------------------------	----------

CAPÍTULO 1:

LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

1.1 INTRODUCCIÓN.....	24
1.2 CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS	28
1.3 DETERMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS	32
1.3.1 Metodología de determinación.....	33
1.3.2 Funciones de aproximación	38
1.3.3 El efecto impositivo y otros aspectos a considerar	44

CAPÍTULO 2:

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

2.1 INTRODUCCIÓN.....	57
2.2 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN.....	60
2.2.1 La interpolación de funciones.....	60
2.2.2 La aproximación mínimo cuadrada y mínimo máxima	61
2.3 ALGUNAS FUNCIONES DE APROXIMACIÓN	66
2.3.1 Polinomios	66
2.3.2 Funciones racionales y exponenciales.....	67
2.3.3 Polinomios ortogonales.....	69
2.3.4 Funciones splines	72
2.4 CONSIDERACIONES FINALES	89

CAPÍTULO 3:

MODELOS DE ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

3.1 INTRODUCCIÓN.....	95
3.2 MODELOS NO ECONOMÉTRICOS	97
3.2.1 Títulos de renta fija.....	99
3.2.2 FRA's.....	102
3.2.3 Swaps.....	104
3.2.4 Futuros.....	105
3.3 MODELOS DE RENDIMIENTO.....	105
3.3.1 Cohen, Kramer y Waugh (1966).....	110
3.3.2 Fisher (1966).....	114
3.3.3 Bradley y Crane (1973).....	115
3.3.4 Echols y Elliott (1976)	118
3.3.5 Analistas Financieros Internacionales (1993).....	121
3.3.6 Hunt (1995a).....	123
3.4 MODELOS DE PRECIOS	125
3.4.1 McCulloch (1971, 1975)	126
3.4.2 Schaefer (1981)	133
3.4.3 Fong y Vasicek (1982).....	137
3.4.4 Carleton, Chambers y Waldman (1984)	144
3.4.5 Shea (1984).....	147
3.4.6 Nelson y Siegel (1987)	152
3.4.7 Steeley (1991).....	158
3.4.8 Svensson (1994)	160
3.4.9 Hunt (1995b).....	161
3.5 OTRAS PROPUESTAS DE MODELIZACIÓN	163
3.5.1 Banco de Inglaterra [Mastronikola (1991)]	164
3.5.2 Dahlquist y Svensson (1994).....	166
3.5.3 Adams y Van Deventer (1994)	167
3.5.4 Fisher, Nychka y Zervos (1995).....	168
3.5.5 Waggoner (1997).....	169

**CAPÍTULO 4:
NUEVAS PROPUESTAS PARA LA MODELIZACIÓN DE LA ETTI**

4.1 INTRODUCCIÓN.....	173
4.2 ANÁLISIS DE LOS MODELOS DE RENDIMIENTO	175
4.3 ANÁLISIS DE LOS MODELOS DE PRECIOS.....	180
4.4 DESARROLLO DE NUEVAS PROPUESTAS ALTERNATIVAS ...	191
4.4.1 Funciones de Laguerre modificadas	191
4.4.2 Funciones exponenciales	195
4.4.3 Funciones definidas en el intervalo [0,1].....	198
4.4.4 Polinomios de Legendre	203

**CAPÍTULO 5:
ANÁLISIS EMPÍRICO DEL MERCADO ESPAÑOL DE DEUDA
PÚBLICA ANOTADA**

5.1 INTRODUCCIÓN.....	213
5.2 OTROS ANÁLISIS EMPÍRICOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS	214
5.2.1 El problema de la elección de la muestra.....	215
5.2.2 Resultados obtenidos en otros estudios.....	220
5.3 CARACTERIZACIÓN DE LA MUESTRA EMPLEADA	225
5.4 APLICACIÓN DE LOS MODELOS.....	233
5.4.1 Adaptación de los modelos de rendimientos.....	234
5.4.2 Modelos de precios.....	235
5.4.3 Aplicación de las alternativas propuestas.....	249
5.5 EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS	251
5.5.1 Comparación entre modelos	251
5.5.2 Resultados en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada....	259

CONCLUSIONES

REFERENCIAS

ANEXO 1: EL MERCADO ESPAÑOL DE DEUDA PÚBLICA ANOTADA.....	317
ANEXO 2: COMPOSICIÓN DE LAS MUESTRAS	327
ANEXO 3: FUNCIONES EMPLEADAS	339
ANEXO 4: TABLAS DE RESULTADOS (ERRORES)	349
ANEXO 5: GRÁFICAS DE ERRORES DE ESTIMACIÓN EN PRECIOS.....	369
ANEXO 6: CURVAS DE TIPOS SPOT Y FORWARD ESTIMADOS....	417

INTRODUCCIÓN

En el campo de la investigación financiera, uno de los temas que, sin duda alguna, ha motivado un mayor número de trabajos es la estructura temporal de tipos de interés. Bien directamente (análisis de las teorías sobre la forma de la curva de tipos, modelización de la misma, ...) o indirectamente (modelos de gestión de carteras de renta fija, modelos de valoración de activos financieros, ...) los tipos de interés han sido objeto de estudio en muchas de las investigaciones desarrolladas en las últimas décadas. Y su importancia se ha intensificado en los últimos años con el gran auge de los mercados financieros, al ser un elemento fundamental en la valoración de los activos que en ellos se negocian.

Básicamente, los tipos de interés se han analizado desde cuatro perspectivas estrechamente relacionadas. Un primer enfoque agrupa aquellos trabajos que bien tratan de establecer una relación entre el valor de determinados tipos significativos o de referencia y las variables macroeconómicas nacionales e internacionales que caracterizan las economías, o bien estudian la relación entre los tipos de interés y las políticas monetarias dictadas por las autoridades. Una segunda línea de investigación la forman los estudios que tratan de testar algunas de las hipótesis existentes sobre la forma de la curva. Estas teorías pueden englobarse, con matices, en dos grupos principales: la teoría de las expectativas y la teoría de segmentación del mercado. En cierto sentido, estos dos enfoques, principalmente el primero, analizan la curva desde una perspectiva económica.

En otro grupo podemos situar aquellos estudios que se centran en la relación intertemporal de los tipos de interés. Los trabajos realizados en este campo se pueden enfocar, básicamente, desde dos ópticas vinculadas muy estrechamente. Por un lado, desde el punto de vista estático, objeto de estudio del presente trabajo, se trata de determinar la forma de la curva en relación

únicamente con la variable tiempo o transformaciones de ésta, de tal modo que, dentro de las limitaciones propias de considerar como único determinante de los tipos de interés el plazo al que hacen referencia, se intenta establecer relaciones tipo-plazo tales que nos permitan conocer lo más acertadamente posible el valor de cualquier tipo de interés aunque no se negocie en el mercado. Por otro lado, desde una perspectiva dinámica se trata de establecer los movimientos de la curva en relación a unos determinados factores desconocidos cuyo comportamiento puede aproximarse a través de algún tipo de interés de plazo significativo.

Este último enfoque es el que mayor atención ha recibido por parte de los investigadores en los últimos años, contabilizándose una gran cantidad de trabajos con grandes avances en el modo de abordar el tema. Salvo unas pocas excepciones, estos estudios toman la curva de tipos actual como dada y tratan de modelizar los movimientos que presentará la misma con el fin, principalmente, de integrarlos en los modelos de valoración de activos. Sin embargo, la curva de tipos cupón-cero no es observable directamente en el mercado por lo que muchos de los análisis empíricos efectuados para valorar estos modelos ofrecen resultados sesgados derivados del uso de tipos de interés sustitutos.

En este sentido, creemos necesario, a fin de que los resultados obtenidos ganen en fiabilidad, profundizar en el estudio de la caracterización estática de la curva de tipos de interés antes de comenzar a analizar su dinámica. Además, aún cuando los tipos cupón-cero fuesen observables, seguiría siendo necesario establecer una forma funcional que nos permita “conocer” tipos cupón-cero para los vencimientos no negociados, aunque evidentemente el problema que nos ocupa se simplificaría enormemente.

Otro aspecto importante que justifica esta investigación es el carácter eminentemente práctico que presenta la estimación de la estructura temporal, ya que su conocimiento no sólo es necesario desde un punto de vista académico, sino que cada vez más, analistas e inversores demandan estimaciones y predicciones de los tipos de interés más precisas que les permitan una mejor gestión y valoración de sus carteras de activos.

Así, aunque en un primer momento la modelización de la curva de tipos despertó un gran interés, en la actualidad ha perdido importancia relativa en favor de los modelos dinámicos. Sin embargo, recientemente se han publicado algunos trabajos sobre el tema que se centran no tanto en la especificación de una función de aproximación alternativa, sino en el desarrollo de nuevas propuestas metodológicas para la determinación de los parámetros del modelo.

Se podría decir que el gran avance en el estudio de la determinación de la curva de tipos cupón-cero lo desarrolló McCulloch con su trabajo de 1971 al ser el primero en tratar de extraer los tipos cupón-cero a partir de las cotizaciones de los títulos de renta fija en los mercados. Los trabajos posteriores, en su mayoría, se han limitado a proponer diferentes funciones de aproximación, sin tener en cuenta, en ocasiones, las características específicas del problema analizado, por lo que, generalmente, no se obtenían mejoras en los resultados.

Se ha de señalar que este tipo de estudios tienen una clara limitación originada porque sólo se tiene en cuenta la relación de los tipos con el tiempo al que hacen referencia, por lo tanto no se puede pretender una caracterización de los tipos de interés totalmente precisa en el sentido que, si bien los tipos dependen del plazo que representan, existen otros factores que intervienen en su valor.

Considerando todo lo anterior, el objetivo de este trabajo de investigación es triple. En primer lugar se tratan de analizar teóricamente las diferentes propuestas formuladas, a fin de tratar de valorar cuál de ellas, a priori, puede ser más apropiada para la determinación de la estructura temporal de tipos de interés y tratar de valorar qué aspectos del modelo originan determinados resultados “negativos” que se suelen observar de forma independiente a la muestra utilizada. En segundo lugar, una vez analizado el problema objeto de estudio y los modelos desarrollados para su solución, proponemos otras alternativas de modelización tomando en consideración tanto fundamentos económicos como matemáticos, con el fin de subsanar, principalmente, los problemas de convergencia detectados en la mayoría de las alternativas planteadas hasta el momento. Por último, se trata de valorar empíricamente los modelos planteados en el mercado español de Deuda Pública Anotada, a fin de corroborar los resultados teóricos presentados. Además, este análisis empírico nos permite obtener las series históricas de los tipos cupón-cero a vencimientos no negociados en el mercado que sirven de materia prima para otros estudios.

Se ha intentado estructurar el trabajo de modo que refleje, en la medida de lo posible, la secuencia seguida en la investigación y facilite la comprensión del problema tratado. De este modo, se pueden diferenciar dos partes: la que comprende los dos primeros capítulos y que se corresponde con la presentación del problema analizado y la introducción a las herramientas matemáticas disponibles para su resolución y una segunda parte donde se presentan y evalúan las diferentes propuestas, a la vez que, se proponen algunas modelizaciones alternativas.

Así, en el primer capítulo se introduce el concepto y caracterización de la estructura temporal de tipos de interés, además de la importancia y dificultades de su determinación. Se

analiza en detalle la metodología a seguir, el tipo de funciones que pueden emplearse para la aproximación de la curva y los aspectos que hay que tener en cuenta para la elección de las mismas. Por último, se examinan los diferentes aspectos a considerar a la hora de modelizar la curva de tipos, prestando especial atención al efecto impositivo.

Una vez establecido que la determinación de la estructura temporal requiere la utilización de alguna función que aproxime cualquiera de los elementos a través de los cuales se puede definir la misma, el segundo capítulo debe dedicarse a introducir algunos conceptos básicos sobre los métodos matemáticos de aproximación de funciones. El objetivo de este capítulo es ayudar a valorar la capacidad y características de los modelos que se estudiarán en el capítulo siguiente. Así, después de una breve introducción, se comentan los métodos más usuales que se diferencian por el tratamiento que realizan del error de aproximación. Nos detenemos, brevemente, en la caracterización de los polinomios ortogonales que por sus características pueden ser adecuados para el fin que nos ocupa y estudiamos detenidamente las funciones splines ya que son las más comúnmente empleadas en la aproximación de la estructura temporal. En este apartado, se explica el procedimiento de construcción de cualquier función spline y sus propiedades; así como, algunas caracterizaciones típicas que se suelen utilizar en multitud de campos de investigación. Finalizamos este capítulo con una exposición de los aspectos más importantes a tener en cuenta en la elección, definición y construcción de las funciones de aproximación.

En el tercer capítulo, se retoma el estudio de la estructura temporal y se exponen las diferentes propuestas de estimación de la curva de tipos. Se incluyen a título informativo otras metodologías como los métodos no econométricos, que no buscan

la especificación de una función sino el conocimiento discreto de los valores de los tipos cupón-cero que extraen de modo iterativo a partir de los precios de diferentes activos. El tercer apartado se dedica a los modelos de rendimiento que representan los primeros intentos de modelización indirecta de la curva de tipos a través de la curva de rendimientos, mientras que los modelos de precios se analizan en el cuarto apartado donde se hace un estudio detallado de los trabajos más importantes.

En el cuarto capítulo se recogen dos de los objetivos perseguidos: el análisis teórico-matemático de los modelos expuestos en el capítulo anterior y la propuestas de nuevas especificaciones alternativas para abordar el problema de la modelización de la estructura temporal de tipos de interés. El estudio realizado en este capítulo revela que un gran número de modelos se han formulado arbitrariamente, o al menos sin tener en cuenta las características del problema analizado. Este resultado nos invita a proponer otras alternativas de modelización en base a las características del problema estudiado y las posibilidades que ofrece la teoría de aproximación desarrolladas en los dos primeros capítulos de este trabajo. Entre todas las alternativas matemáticamente adecuadas que se desarrollan en este capítulo destacan principalmente dos por su sencillez de aplicación, no requieren la utilización de técnicas no lineales. Ambas se caracterizan por la utilización de polinomios, aunque en un intervalo diferente al original, de tal modo que éstos no presentan los problemas de convergencia que sufre cuando se definen en un intervalo no acotado como es $[0, \infty)$.

En el capítulo cinco se analizan empíricamente todos los modelos presentados en el marco del Mercado Español de Deuda Pública Anotada para el periodo 1991-1996 que comprende un total de 1486 muestras, dando lugar al mayor estudio realizado para este mercado no sólo en número de modelos analizados sino

en periodo considerado. Comenzamos este capítulo exponiendo los resultados y datos empleados en los análisis empíricos efectuados por otros investigadores, lo que nos sirve de referencia para determinar el modo en que deben construirse las muestras y qué resultados cabe esperar de los modelos. El resto del capítulo expone de forma secuencial los pasos a seguir en el análisis empírico, así en el apartado tres se caracteriza la muestra, en el siguiente se explica el modo en que se han aplicado los diferentes modelos y en el quinto se presentan y evalúan los resultados.

Como conclusión de este trabajo se expone un resumen de los aspectos más importantes tratados en cada uno de los capítulos anteriores y de los resultados más relevantes que se han obtenido. Y por último, en forma de anexo se ofrecen: una breve introducción al Mercado Español de Deuda Pública Anotada como marco de referencia de los datos empleados en el análisis empírico, un resumen de la composición de las muestras, la especificación de las funciones empleadas, las tablas y gráficas de los resultados obtenidos y la representación tridimensional anual de las curvas de tipos cupón-cero y forwards que generan cada uno de los modelos en base a las estimaciones efectuadas.

CAPÍTULO 1:
LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

La estructura temporal de los tipos de interés, en adelante ETTI, es un elemento de gran importancia, tanto en el campo académico como en la práctica de los mercados, por ser pieza fundamental en la valoración de activos. Son muchos los estudios que se han dedicado directa o indirectamente a avanzar en el conocimiento de los tipos de interés, su estructura, evolución e interrelaciones.

Los estudios en torno a la ETTI han evolucionado profundamente en los últimos años y en la actualidad van encaminados a tratar de recoger de forma parsimoniosa, a través de modelos estocásticos, la evolución dinámica que presentan los tipos de interés como parte integrada en los modelos de valoración de activos financieros.

Dentro de este ámbito destacan, entre otros muchos, los trabajos de Vasicek (1977), Langetieg (1980), Cox, Ingersoll y Ross (1981) y (1985) o Ahn y Thompson (1988) que presentan modelos de equilibrio; Dothan (1978), Richard (1978), Ho y Lee (1986) o Heath, Jarrow y Morton (1992) que emplean el argumento del arbitraje; Ghysels y Ng (1996) que emplean especificaciones semiparamétricas, Barkoulas y Baum (1996) que optan por las no paramétricas y Goldstein (1997) que utiliza el concepto de cuerpos aleatorios para modelizar la dinámica de los tipos de interés.

Sin embargo, en cualquier estudio que se realice sea cual sea su dimensión, sigue habiendo un problema latente¹: la inexistencia de tipos cupón cero para vencimientos a medio y largo plazo. Por tanto, sigue siendo necesario analizar y valorar los modelos que se

¹ Cabe destacar que algunos modelos de valoración como el de Ho y Lee (1986) o Heath, Jarrow y Morton (1992) están diseñados para replicar perfectamente la estructura temporal actual por lo que integran el análisis de la dinámica de la curva con su determinación.

han propuesto para la extracción de curvas cupón cero a partir de la información disponible en el mercado. En este sentido, el objetivo de este capítulo es tanto introducir una serie de conceptos básicos relacionados con la estructura temporal como profundizar en la problemática de su determinación.

1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar a desarrollar cualquier trabajo es necesario delimitar su elemento de estudio. En esta ocasión, además, la delimitación es absolutamente necesaria ya que el término *estructura temporal de tipos de interés* por su amplitud conceptual puede generar confusión.

La ambigüedad reside en que esta expresión se utiliza indistintamente para indicar tanto la relación estática (en un momento del tiempo) de los tipos de interés con el plazo al que hacen referencia como el comportamiento dinámico de la misma, entendido éste como la evolución de los tipos a un mismo plazo a través de diferentes momentos de observación. Así mismo, también se habla de estudios de la estructura temporal cuando se analizan las diferentes hipótesis propuestas para explicar la forma de la curva, entre las que destacan por su importancia: las expectativas puras [Fisher (1930)² y Lutz (1940)] y la segmentación del mercado [Culbertson (1957)] de las que se derivan, en cierta medida, la preferencia por la liquidez³ [Hicks (1939)] y la llamada teoría del hábitat preferido [Modigliani y Sutch (1966)]⁴.

² Cfr. Berges y Manzano (1988, p.17).

³ Algunos autores como Ezquiaga (1991, p.176) o Brigham (1995, p.132) la considera un caso particular de la teoría del hábitat preferido, otros como Freixas (1992) o Barreira, Meneu y Navarro (1992, p.35) la relacionan estrechamente con la hipótesis de las expectativas.

⁴ Cfr. Freixas (1992) y Barreira, Meneu y Navarro (1992, p.36).

Este trabajo estudia el primer problema y quizás sería más apropiado referirnos a la curva de tipos cupón-cero y dejar el término estructura temporal de tipos de interés para el enfoque dinámico; sin embargo, siguiendo la nomenclatura de los trabajos precedentes ambos términos se utilizarán en lo que sigue de modo indistinto.

Entonces, llamaremos ETTI o curva de tipos cupón-cero a la relación que existe entre los tipos *spot*, al contado o cupón-cero y el tiempo al que éstos hacen referencia. En la medida en que la negociación en el mercado se realiza de modo continuo, la estructura temporal como reflejo del mismo varía en cada instante. Esto es, la estructura temporal está asociada a un momento (instante) de “observación”; generalmente el periodo más pequeño de referencia es el día. Por otro lado, para que la estructura temporal sea representativa y aporte información debe construirse en base a referencias o títulos con características homogéneas: fiscalidad, liquidez, riesgo de impago, etc. Por tanto, la ETTI es un reflejo en un momento determinado de los tipos de interés homogéneos, salvo en sus vencimientos, que se negocian en el mercado.

Dado que uno de los principales usos de la ETTI es la valoración de activos, se construye en base a activos financieros libres de riesgo de insolvencia⁵: títulos del Estado o garantizados por éste. De este modo se obtiene una referencia base o *benchmark* sobre la que se pueden ir cargando diferentes primas o diferenciales para valorar otros activos con riesgo. La ventaja de utilizar Deuda del Estado es, además de no tener riesgo de crédito, que se negocia en mercados secundarios activos y existe para un conjunto de plazos relativamente amplio.

⁵ Aquellos en los que la probabilidad de que los pagos reales se desvíen de los prometidos es nula.

En cuanto a su forma, cabe suponer que la curva no sea plana, es decir, que el tipo de interés no sea independiente del plazo hasta el vencimiento. No existe una forma característica de la curva. Es “usual” que la estructura temporal sea creciente, sin embargo, también es frecuente la existencia de curvas de tipos decrecientes o mixtas⁶ y en general, se suele observar que en los tipos a largo plazo la curva tiende a hacerse plana. Por ello, no se puede generalizar la forma de la curva, sino que ésta adopta pendientes positivas o negativas en función de la información disponible en cada momento y las expectativas que el mercado mantiene sobre su comportamiento futuro.

La curva de tipos se representa gráficamente en un sistema de coordenadas bidimensional en el que los diferentes valores que adoptan los tipos de interés se representan en el eje de ordenadas y los plazos hasta el vencimiento en el eje de abscisas. Esta representación es estática ya que se refiere a la forma de la curva en un instante determinado. Para ver la evolución dinámica de la ETTI nos ayudamos de un tercer eje que recoge las diferentes fechas en que se calcula la curva, obteniéndose así un gráfico tridimensional que permite observar mejor la tendencia de los tipos del mismo vencimiento a lo largo del tiempo⁷.

Para finalizar este apartado queremos resaltar que el conocimiento de la curva de tipos cupón-cero no sólo es importante desde un punto de vista práctico, en la medida que sirve de guía a los agentes para realizar sus operaciones, sino que también lo es en el campo académico. En concreto, existen muchos temas de investigación en finanzas que emplean la ETTI

⁶ También denominadas con jorobas por presentar uno o más máximos y/o mínimos.

⁷ En el Anexo 6 se puede observar esta representación tridimensional.

como parte fundamental de sus modelos, de modo que una buena aproximación de la misma puede ayudar a hacer más fiables los resultados obtenidos. Entre los trabajos que utilizan la curva de tipos como elemento fundamental Fong y Vasicek (1982) citan, entre otros, a Fisher y Weil (1971) que estudian las rentabilidades de las carteras, el análisis de los rendimientos que realizan Dobson, Sutch y Vanderford (1976), Fama (1976) que valora la precisión de los pronósticos implícitos en el mercado, Brennan y Schwartz (1977) que valoran los contratos de futuros y la valoración de títulos de renta fija realizada por Houglet (1980).

Por otro lado, Carleton y Cooper (1976) recogen algunas de las aplicaciones de la estructura temporal: construcción y contrastación de modelos relacionados con las teorías sobre la forma de la ETTI, contrastación de modelos sobre los efectos de la fiscalidad en los instrumentos financieros, análisis de los efectos del riesgo de insolvencia de los activos financieros o modelos que analizan la existencia de oportunidades de arbitraje entre títulos de renta fija.

En general, se puede decir que a pesar que en los últimos años los estudios en torno a la estructura temporal se han centrado en su enfoque dinámico, la caracterización estática de la misma sigue siendo de gran importancia y absolutamente necesaria para valorar corrientes de flujos no negociadas en el mercado e incluso testar las teorías de evolución estocástica de la estructura temporal. Que la estimación de la ETTI sigue siendo un tema central y de gran importancia en la investigación financiera, se pone de manifiesto en que existe poca diferencia entre los comentarios de Echols y Elliott (1976) y los de Bliss (1996). Los primeros consideran que el desarrollo de un procedimiento objetivo para estimar la curva de tipos es un tema de máxima prioridad para avanzar en el estudio de los tipos de interés y el segundo opina que la estimación de la curva de tipos es el punto de partida

necesario tanto para testar los modelos dinámicos, como para aplicar éstos a la valoración de bonos o coberturas con derivados.

1.2 CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

Como sabemos, el valor actual de un pago futuro es la cantidad de dinero que debe invertirse hoy para recibir ese pago en una fecha futura predeterminada. Este valor viene determinado por la tasa de descuento o tasa de interés aplicada para descontar o actualizar ese pago futuro, el intervalo de tiempo que resta hasta la fecha de pago y la frecuencia en que se paga y reinvierte el interés que puede ser respecto al tiempo discreta o continua en función de que los pagos se realicen en momentos concretos o en cada instante. El factor de descuento es el concepto que recoge los tres elementos anteriores y define totalmente el valor del dinero en el tiempo. En este sentido, la ETTI, al recoger la relación plazo-tipo de interés, es en última instancia quien determina el valor del dinero en el tiempo.

No existe una única estructura temporal de tipos ya que no sólo puede definirse una curva de tipos particular para cada clase de bonos de determinadas características, principalmente elegidos en función de su riesgo de crédito, sino que, además, si la curva se construye empleando frecuencia de actualización discreta se obtiene una curva para cada frecuencia. Si, por el contrario, se emplea actualización continua la curva de tipos es única para cada clase de bonos⁸.

Independientemente de esta multiplicidad, la ETTI se calcula en base a los tipos cupón-cero que representan la tasa de interés

⁸ La relación entre el tipo spot compuesto de forma continua, i_c , y el tipo spot compuesto anualmente, i_a , es: $i_a = e^{i_c} - 1$.

implícita pagada por un bono al descuento o bono cupón-cero (título de renta fija que genera un único pago a su vencimiento equivalente a su nominal).

En el caso discreto, la relación entre el precio, P_t , de un bono al descuento que vence en T y cuyo nominal, sin pérdida de generalidad, es de 1 u.m. y el tipo cupón-cero correspondiente, $h(T)$, es directa⁹: $P_t = (1 + h(T))^{-T}$.

Dado que la relación precio - tipo de interés no es lineal, generalmente, se prefiere trabajar con los factores de descuento: $d_T = [1 + h(T)]^{-T}$ que coincide con el precio del título, si éstos son bonos cupón-cero.

Además de la estructura de tipos al contado o tipos cupón-cero, podemos obtener la de tipos forward. Los tipos forward son los tipos de interés futuros implícitos en la estructura de los tipos al contado. En concreto, es el tipo de interés que tendría en ausencia de arbitraje un contrato de futuro consistente en comprar o vender en la fecha t_1 un bono cupón-cero que vence en t_2 , es decir, con $t_2 - t_1$ años de vida: $f(t_1, t_2)$. Se calcula a partir de los tipos al contado para los periodos t_1 y t_2 partiendo de la siguiente igualdad:

$$[1 + h(t_2)]^{t_2} = [1 + h(t_1)]^{t_1} [1 + f(t_1, t_2)]^{t_2 - t_1}$$

Otro concepto importante es el de tipo forward instantáneo que describe la tasa de rentabilidad de una inversión a muy corto plazo, $t_2 = t_1$, y coincide con el tipo spot para el plazo correspondiente: $f(t_1, t_1) = h(t_1)$.

En general, todos estos conceptos (tipo spot, tipo forward y factor de descuento) están estrechamente relacionados por lo que

⁹ Salvo que se especifique lo contrario, en lo que sigue los tipos de interés son anuales y el tiempo se mide en años.

a partir de cualquiera de ellos se pueden calcular los restantes. Se cumple la siguiente relación:

$$(1+h(t_m))^{t_m} = (1+f(t_{m-1}, t_m))(1+h(t_{m-1}))^{t_{m-1}} = \\ (1+f(t_0, t_1))(1+f(t_1, t_2))\dots(1+f(t_{m-1}, t_m))=d_{t_m}^{-1},$$

donde se observa que los tipos spot son una media geométrica de los tipos forward implícitos a un periodo. Además, esta relación pone de manifiesto que los tipos forward representan la tasa de crecimiento de los factores de descuento en el periodo: $f(t_1, t_2) = (d_{t_1} - d_{t_2})/d_{t_2}$.

Desde un punto de vista teórico, sin embargo, es habitual trabajar de forma continua ya que se simplifican enormemente los cálculos (por ejemplo, no hay que tener en cuenta el cupón corrido) y las relaciones son más fáciles de establecer. Manteniendo la misma nomenclatura empleada anteriormente, se tiene que el precio de un bono al descuento con vencimiento en T se expresa como: $P_t = e^{-Th(T)}$.

De forma equivalente al caso discreto, los factores de descuento bajo capitalización continua, se calculan a partir del tipo spot del periodo al que hacen referencia, t , a partir de la siguiente expresión: $d_t = e^{-th(t)}$.

En general, desde la perspectiva de nuestro trabajo es más adecuado referirnos a la función de descuento, $D(t)$, que a los factores de descuento. La función de descuento es una función continua que asigna a cada valor de t un factor de descuento de tal forma que $D(t) = d_t$. Esta función presenta determinadas propiedades: está acotada en el intervalo $(0, 1)$ para $t \in [0, \infty)$, en concreto $D(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, y es monótona decreciente ya que

se supone que se prefieren los pagos más próximos que tienen, por tanto, más valor¹⁰.

En cuanto a los tipos forward, igual que en el caso discreto, se calculan a partir de los tipos al contado para los periodos de referencia t_1 y t_2 , a partir de la siguiente expresión:

$$\exp[-t_2 h(t_2)] = \exp[-t_1 h(t_1)] \exp[-f(t_1, t_2)(t_2 - t_1)].$$

Por otro lado, el tipo forward instantáneo en el momento t se define como: $f(t) = h(t) + t h'(t)$, que es, en definitiva, la tasa de decrecimiento de la función de descuento en cada momento del tiempo: $f(t) = -D'(t)/D(t) = [\ln(D(t))]'$.

Otras relaciones que se verifican para los tipos forward son:

$$f(t) = h(t) \text{ si } h'(t) = 0,$$

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{s=t_1}^{t_2} f(s) ds = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{D(t_1)}{D(t_2)}.$$

Y en cuanto al tipo spot:

$$h(t) = \frac{1}{t} \int_{s=0}^t f(s) ds = -\frac{1}{t} \ln D(t)$$

Otro concepto, empleado en algunos trabajos, es el de curva a la par. Se dice que un bono está a la par cuando su precio en el mercado equivale a su nominal, esto sucede cuando su TIR coincide en cuantía con el cupón. Se puede derivar el rendimiento a la par combinando la ecuación de valoración del título con la de la TIR obteniéndose:

$$y_t = \frac{N(1 - d_t)}{\sum_{j=1}^t d_j}$$

¹⁰ Sobre la monotonía de la función de descuento véase Boenawan y Ritchken (1990).

La curva de rendimiento a la par, $Y(t)=y_t$, indica el cupón que se pide a un bono con vencimiento en t , para que éste cotice a la par.

La estimación de la estructura temporal de tipos de interés puede realizarse sobre cualquiera de estos cuatro elementos (función de descuento, curva cupón-cero, curva de tipos forward o curva de rendimientos a la par) ya que el conocimiento de uno de ellos supone el conocimiento de cualquiera de los restantes. A pesar de esta equivalencia, algunos investigadores como Svensson (1994) consideran más importantes los tipos forward ya que, aunque su curva contiene la misma información que la curva de tipos spot, presenta la información de un modo que facilita su interpretación y permite separar más fácilmente las expectativas para los diferentes tramos temporales: corto, medio y largo plazo. En cualquier caso ninguna de estas variables se observa directamente por lo que deben derivarse del precio de los bonos en el mercado.

1.3 DETERMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

La importancia del conocimiento de la ETTI, tanto en el campo académico como en el financiero, es indudable; sin embargo, la estructura temporal no es directamente observable en el mercado sino que es necesario estimar su valor. En general, no existen títulos cupón-cero con vencimientos superior a un año por lo que en este apartado trataremos de ver en qué forma se puede determinar la curva de tipos y las diversas consideraciones que hay que tener en cuenta para realizar este trabajo.

Cuando los agentes valoran instrumentos financieros están, explícita o implícitamente, revelando información sobre los tipos de interés que ellos consideran apropiados para las transacciones

que realizan, pero estos precios reflejan otros factores como el efecto de los impuestos o el riesgo que perciben, por lo que aislar los tipos interés implícitos no es una tarea sencilla. Sin embargo, se puede asumir que existe un único tipo teórico subyacente para cada vencimiento que define la ETTI.

Bajo esta perspectiva, al estimar la estructura temporal se requieren tres decisiones:

- Qué función de valoración relaciona los precios de los bonos con el tipo de interés, a través de los pagos prometidos y, quizás, otros factores como los impuestos o las primas.
- Qué forma funcional se empleará para aproximar cualquiera de los elementos que definen la estructura temporal y sobre qué elemento se actuará.
- Qué método econométrico se utilizará para estimar los parámetros de la función elegida.

Todas estas decisiones afectan, en mayor o menor grado, a las estimaciones obtenidas por la estructura temporal. A continuación estudiaremos cada una de estas cuestiones.

1.3.1 Metodología de determinación

Hay un punto en común en todas las propuestas de estimación de la ETTI, el empleo del teorema fundamental de valoración como base del desarrollo del modelo de estimación. Este teorema implica que bajo certeza y mercados sin fricciones, la ausencia de arbitraje es equivalente a la existencia de una regla de valoración lineal $d_t > 0$ " t , tal que el precio de un activo, P_t , se corresponde con el valor actual de sus flujos, Q_{it} :

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} d_t .$$

representado s_i la primera fecha en que se recibe un pago después de la compra del título y T_i el vencimiento de éste.

Haley y Schall (1979)¹¹ analizan las condiciones bajo las que el principio de aditividad del valor es válido; en general, bajo condiciones de equilibrio y eficiencia de los mercados. Bliss (1996) considera que la hipótesis de mercados sin fricciones no concuerda con lo observado en el mercado, por tanto, la ecuación no se cumple de forma exacta para cualquier función de descuento razonable. Esto es, si los mercados son incompletos existen múltiples conjuntos de factores de descuento, d_t , que satisfacen esta ecuación, por tanto no es posible encontrar una función de descuento que valore exactamente todos los bonos.

La literatura sobre estimación de la estructura temporal ha explicado este fenómeno en términos de fricciones tales como tasas, restricciones sobre ventas a corto o existencia de primas de liquidez. Para permitir estas desviaciones se añade a la expresión anterior un término de error, e_i , que justifica, por otro lado, el empleo del análisis de regresión y permite que los precios observados se desvíen de los teóricos.

Independientemente de estas consideraciones, otra fuente de error son las propias cotizaciones empleadas en los modelos, que reflejan promedios de las valoraciones efectuadas por los agentes a lo largo del día pero no constituyen precios de liquidación a los que efectivamente se negocian los títulos. Esta característica del mercado junto a la existencia de diferenciales entre los precios de

¹¹ Cfr. Carleton *et al.* (1984).

oferta y demanda ponen de manifiesto la imprecisión del concepto de precio único.

En lo que sigue, se supondrá que deseamos estimar los factores de descuento, d_t , o más concretamente, como veremos a continuación, la función de descuento $D(t)$. La decisión de abordar el problema desde la perspectiva de los factores de descuento se basa fundamentalmente en que, al contrario de lo que sucede cuando se toma como variable los tipos cupón-cero, la relación con el precio es lineal. Esto evita que se tengan que emplear métodos de regresión no lineales como los mínimos cuadrados no lineales (que no garantizan la insesgadez del estimador ni la existencia de una única solución) o la máxima verosimilitud (que exige determinar, a priori, la distribución de probabilidades del término de error).

Partiendo de la ecuación de valoración se obtiene un sistema de ecuaciones que determina cuál es el valor de los factores de descuento que igualan el valor actual del título con su precio:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_{11}d_{t11} \\ P_2 &= Q_{21}d_{t21} + Q_{22}d_{t22} \\ &\vdots \\ P_n &= Q_{n1}d_{tn1} + Q_{n2}d_{tn2} + \dots + Q_{nm}d_{tnm} \end{aligned}$$

donde el primer subíndice hace referencia al título correspondiente y el segundo al orden del pago, así Q_{21} representa al primer flujo recibido por el título 2.

Este sistema tiene solución si el número de incógnitas (fechas de pago) no supera el número de ecuaciones (títulos de la muestra); esto es, si los títulos pagasen cupones en las mismas fechas: $t_{1j} = t_{2j} = \dots = t_{nj}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Esta metodología es la que emplean Carleton y Cooper (1976) quienes observan que en EE.UU. las emisiones de títulos de renta fija del Tesoro presentan una estructura de vencimientos de cupón normalizada¹², por lo que se evita, siempre que se elijan cuidadosamente los títulos de la muestra, el problema de la singularidad¹³ en la matriz de coeficientes. Sin embargo, en España no se observa esta normalización de las emisiones¹⁴ y para poder aplicar este método es necesario subsanar este aspecto.

En general, tenemos dos alternativas para hacer frente a la singularidad: bien seleccionar los títulos que van a formar parte de la muestra de modo que se incluya en cada fecha de pago al menos un vencimiento (en cierto sentido como proponen Carleton y Cooper (1976)) o bien imponer una restricción funcional a los factores de descuento; esto es, definir a priori una función que sea representativa de los valores que toman los tipos spot. De este modo no se estima el valor en cada momento, sino los parámetros que caracterizan a la función que trata de aproximarlos.

En el primer caso sólo se obtienen valores discretos de la curva de tipos y esto no es apropiado ni desde el punto de vista empírico (inicialmente permite valorar únicamente activos cuyas fechas de devengo coincidan con los standard) ni desde una perspectiva teórica (se requiere de una especificación de la relación y no valores concretos de ésta). Por tanto, la alternativa más adecuada para evitar la singularidad es asociar una forma funcional a los factores de descuento. Esto es, modelizar la función de descuento, de modo que a través de unos cuantos parámetros se pueda recoger la estructura de la misma.

¹² Las emisiones vencen los días 15 de Febrero, Mayo, Agosto y Noviembre.

¹³ Jordan (1980) [Cfr. Carleton *et al.* (1984)] analiza en profundidad las condiciones que debe cumplir la matriz de coeficientes para evitar la singularidad.

¹⁴ En España, aunque existe cierta normalización no es suficiente (véase el Anexo 1).

Una posible solución si se opta por la primera alternativa es tratar de aproximar los valores discretos obtenidos a través de algún método de aproximación que permita disponer de factores de descuento en otros vencimientos y se obtenga para los estudios teóricos una forma funcional con la que trabajar. La opción más eficiente sigue siendo la segunda que evita la singularidad y ofrece una forma funcional en un solo paso.

De este modo, sustituyendo los factores de descuento por la forma funcional, $G(t)$, que los caracteriza obtenemos:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} G(t) + e_i .,$$

que bajo el supuesto de que $G(t)$ está compuesta por una combinación lineal de $n+1$ funciones, $g_j(t)$, linealmente independientes, se puede expresar como:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} [a_0 g_0(t) + a_1 g_1(t) + \dots + a_n g_n(t)] + e_i$$

o tomando $X_{ij} = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} g_j(t)$ en forma de ecuación de regresión:

$$P_i = \sum_{j=0}^n a_j X_{ij} + e_i$$

donde a_j representan los parámetros a estimar que se corresponden con el peso o importancia de cada función que forma la combinación.

Esta sencilla especificación, que no fue empleada hasta 1971 por McCulloch y que nos permite extraer de un modo directo los

tipos cupón-cero de los precios de los bonos que devengan cupón, es la base de la gran mayoría de las propuestas que se diferencian en el modo en que especifican la función de aproximación, $G(t)$.

1.3.2 Funciones de aproximación

Como se ha visto en el apartado anterior, establecer una forma funcional es, además de deseable teórica y empíricamente, la mejor alternativa para evitar problemas en la estimación. Sin embargo, no todas las funciones están igualmente capacitadas para aproximar la estructura temporal. En este apartado, se estudiarán algunos tipos de funciones y el modo en que deben especificarse las mismas¹⁵.

La primera cuestión que se plantea es sobre qué variable se va a actuar. Para Deacon y Derry (1994) elegir entre ajustar la curva de rendimientos a la par y ajustar la función de descuento es en cierto modo un tema de preferencias. Sin embargo, es importante destacar que si bien la aproximación de la función de descuento es consistente explícitamente con la teoría económica, puede ser muy difícil de estimar y la curva de tipos forward es muy sensible a pequeños cambios en la misma. Por otro lado, la aproximación de los rendimientos, aunque menos atractiva teóricamente, es más robusta en la práctica y se puede justificar si se cree que esa es realmente la práctica del mercado.

Para McCulloch (1971) la estimación de la función de descuento es más sencilla que la de los tipos cupón-cero que conllevan la utilización de técnicas no lineales que pueden ser excesivamente complejas. Además, una vez determinada la función de descuento la obtención de los tipos cupón cero es extremadamente sencilla.

¹⁵ El desarrollo matemático puede encontrarse en el Capítulo 2.

Hunt (1995B) opina que hay un argumento para tomar como base del modelo la curva de tipos forward y es que las restricciones se pueden aplicar directamente a la forma de la misma. Resulta muy conveniente, por ejemplo, restringir que los tipos forward se estabilicen en su tramo a largo. Sin embargo, desde su punto de vista, el hecho de que la estimación de la curva spot es mucho más fácil supera todas las ventajas de la consideración anterior.

Un factor importante cuando se decide proponer una determinada modelización de la curva de tipos es equilibrar la suavidad con la capacidad de respuesta del modelo, es decir, el modelo debe ser suave en el sentido que no se vea excesivamente afectado por la existencia de ruidos en las observaciones, sin embargo, a la vez debe ser lo suficientemente flexible como para que recoja los verdaderos movimientos que el mercado descuenta. En palabras de Deacon y Derry (1994) la estructura temporal debe ser suave pero no hasta el punto que no esté bien representada. Bliss (1996) opina de modo similar y considera la flexibilidad de la estructura temporal un arma de doble filo porque los modelos pueden incorporar información sobre factores específicos de un título que no son relevantes para valorar otros títulos del mercado, por lo que es necesario plantearse si es mejor utilizar modelos más parsimoniosos que sólo recojan la *esencia* del mercado (forma y nivel aproximados de los tipos).

En principio, lo más sencillo es tratar de aproximar la estructura temporal a través de un polinomio. Sin embargo, determinadas características de los mismos y la naturaleza de los datos tratados han hecho que se considere más aconsejable emplear funciones más flexibles en la modelización de la estructura temporal.

En efecto, debido a las peculiaridades de los tipos a corto que los diferencian de los tipos a largo y a la concentración de un

mayor número de observaciones en el corto plazo en comparación con la dispersión que existe en el tramo a medio y largo plazo, puede resultar conveniente, para mejorar el grado de ajuste, utilizar funciones splines en vez de una única función para todo el intervalo.

Si se utiliza una única función para estimar todo el rango de la ETTI nos podemos encontrar con que la misma aproxima muy bien la parte del intervalo que contiene más observaciones y no ajustar bien la parte del rango donde las observaciones son escasas. Sin embargo, cuando se utilizan funciones splines se define una función para cada subintervalo en el que se divide el rango total de estudio. Esto hace que sea más fácil acomodar la función utilizada a la forma que toma la curva en cada tramo y mejore el ajuste.

Los polinomios tienen como ventaja que la determinación de los coeficientes de los mismos es sencilla. Sin embargo, como McCulloch (1971) observa, no son capaces de aproximar bien simultáneamente ambos extremos (corto y largo) de la función de descuento. Los polinomios tienden a ajustar mejor el tramo a corto, olvidándose del rango a largo de la curva. Por otro lado, los polinomios tienden a aumentar el error de aproximación en los extremos del intervalo de estudio y presentan problemas de convergencia y fuertes oscilaciones.

Un tipo de polinomios que parece comportarse mejor son los de Bernstein, empleados por Schaefer (1981). Éstos gozan de la ventaja de aproximar con bastante precisión las derivadas, lo cual es importante desde la perspectiva de obtener los tipos forward.

Si se pretende utilizar funciones splines hay que determinar qué tipo de splines vamos a utilizar: polinómicos, exponenciales, ... ; cómo construiremos los mismos: a partir de las condiciones de

continuidad y otras restricciones o a partir de alguna base; cuál será el grado mínimo para garantizar un ajuste suficientemente suave, etc.

Una vez más, lo natural, en principio, es emplear splines polinómicos. Sin embargo, a efectos prácticos, se han de tener en cuenta varias cuestiones, que hacen que Fong y Vasicek (1982) planteen como alternativa la utilización de splines exponenciales:

1.- Si bien la utilización de splines polinómicos permite ajustar mejor la curva que los polinomios puros, en la medida que se pueden forzar para que se aproximen, en un intervalo finito, a una curva exponencial eligiendo un número suficientemente grande de nodos, el ajuste local dentro de cada subintervalo vuelve a presentar los mismos inconvenientes que se derivan del uso de polinomios, aunque a menor escala.

2.- Sus propiedades asintóticas siguen siendo no deseables. Los splines polinómicos no pueden forzarse a que converjan asintóticamente hacia un determinado valor, como es el caso de una exponencial.

3.- Los splines polinómicos comúnmente proporcionan estimaciones de la estructura de tipos forward inestables. Los valores obtenidos fluctúan ampliamente y en el extremo a largo del intervalo presenta saltos de valor muy elevados, llegando incluso a obtenerse tipos forward negativos.

En favor de los splines polinómicos se suele decir que son adecuados cuando la estructura temporal estimada se va a utilizar para testar hipótesis alternativas sobre la misma, porque los supuestos bajo los que ha sido estimada son más generales y no sesgan los resultados de la investigación principal.

La utilización de splines exponenciales, en teoría, hace frente a estos problemas, sin embargo, el modelo deja de ser lineal y por tanto es necesario utilizar métodos de estimación no lineales o, como proponen Fong y Vasicek (1982), realizar un cambio de variable para linealizar el modelo. En la práctica Shea (1985) ha demostrado que las estimaciones de la ETTI con splines exponenciales no sólo no son más estables que las que se obtienen con splines polinómicos sino que las propiedades asintóticas de los primeros son frecuentemente poco reales. En resumen, empíricamente la aproximación a través de splines exponenciales no parece ser superior a la realizada con splines polinómicos, obteniéndose estimaciones de la ETTI prácticamente idénticas.

La elección apropiada de los nodos es un tema crucial cuando se emplean splines, si el número de nodos es demasiado bajo, el modelo no podrá adaptarse a formas complejas de la curva, mientras que si es demasiado alto se corre el riesgo de que se tienda a modelizar los *outliers*. La mayoría de los trabajos emplean la metodología de McCulloch (1971) y eligen el número de nodos como la raíz cuadrada del número de observaciones; sin embargo, el Banco de Inglaterra [Mastronikola (1991)] usa seis nodos fijos equiespaciados.

Para Deacon y Derry (1994) el método de McCulloch (1971, 1975) tiene como ventaja que la posición de los nodos cambia con la estructura de las emisiones, sin embargo, un inconveniente es que se mueven todos los días por lo que pueden dar la falsa impresión que la estructura temporal ha cambiado. También consideran sorprendente la poca importancia que se le ha dado en la literatura a la localización de los nodos y el número óptimo de éstos, teniendo en cuenta que existen técnicas para tal fin¹⁶. Además, tanto el número de nodos como la localización de los

¹⁶ Véase De Boor (1978).

mismos parece ser un factor altamente importante ya que se observan diferencias considerables en las estructuras estimadas para los mismos datos cuando estos factores varían.

En relación al grado de las funciones, éstas deben ser al menos cúbicas para garantizar que la estructura de tipos forward resultante sea continua y derivable.

Dada la gran flexibilidad de los splines que les permiten adaptarse, eligiendo un número de nodos suficientemente grande, a cualquier forma, puede parecer que la especificación utilizada carece de importancia desde el punto de vista de la bondad del ajuste. Sin embargo, es necesario elegir adecuadamente el modelo porque no todas las bases de splines están igualmente capacitadas para definir regresores útiles. Algunas bases de splines, como la de potencias truncadas, generan una matriz de regresores con columnas casi colineales, que pueden dar lugar a problemas de singularidad. Una buena acción correctora puede ser usar como base los B-splines.

Por otro lado, no todas las funciones se pueden restringir con la misma facilidad. Debido a la naturaleza de la aproximación polinómica es difícil establecer restricciones sobre las estimaciones para que simultáneamente satisfagan el nivel y la forma de la curva resultante. Por ejemplo, en la base utilizada por McCulloch (1971, 1975) es fácil imponer restricciones en la pendiente de la curva de rendimientos, pero se hace difícil derivar rápidamente restricciones en los niveles de la misma. Sin embargo, las propiedades que presentan los B-splines hacen que la imposición de restricciones tanto en niveles como en pendiente sea más fácil; además su cálculo se simplifica porque hay menos coeficientes del modelo implicados en las restricciones.

En resumen, es fundamental disponer de medios que permitan cambiar a posteriori las propiedades locales y sobre todo el intervalo de las funciones utilizadas para obtener estimaciones más precisas.

Aunque a la vista de las propuestas planteadas por los diferentes autores pueda parecer que básicamente la elección se limita a emplear o no funciones splines, la determinación de una buena función de aproximación va más allá. El tipo de función empleada y en gran medida las restricciones impuestas juegan el papel más importante en la estimación.

En cualquier caso, tanto cuando se elige el tipo de función como el método utilizado en la estimación hay que tener en cuenta para qué se quiere la misma. En otras palabras, qué grado de precisión necesitamos. Un aumento de la precisión en el ajuste puede suponer una carga computacional tan elevada que no se corresponda con la mejora que finalmente se obtiene, por lo que también habrá que tener en cuenta este factor a la hora de elegir nuestras funciones de aproximación.

Una buena idea es seguir los consejos de Dahlquist y Svensson (1994) quienes opinan que un modo operativo y fácil de estimar la estructura temporal es empezar con una forma sencilla y juzgar si el ajuste es suficientemente bueno y si no es así intentarlo con una forma funcional más compleja para ver si se logra la precisión deseada.

1.3.3 El efecto impositivo y otros aspectos a considerar

En este apartado se recogen algunos aspectos que pueden afectar a las estimaciones y el modo en que algunos autores han tratado de introducirlos en los modelos. Hasta ahora se ha obviado un aspecto muy importante que influye en el precio de los

activos financieros, la fiscalidad de los mismos. El tratamiento fiscal de los rendimientos obtenidos por un activo depende de muchos factores por lo que resulta difícil tratar de modelizar éste. Por un lado, hay que tener en cuenta la naturaleza de los rendimientos (por capital o por intereses); por otro, las características de su poseedor (persona física o jurídica) y el periodo de tiempo de obtención de las rentas.

Generalmente, no sólo en España sino en otros países, los inversores pagan impuestos sobre los cupones percibidos, pero las ganancias de capital están gravadas a tipos menores o incluso exentas. En general, y sin ánimo de profundizar, podemos decir que las ganancias de capital tributan a tipos inferiores que los devengos de intereses¹⁷, soportando éstos, además, retención en la fuente. Por otro lado, los intereses tributan en su totalidad mientras que sobre las ganancias de capital se aplican coeficientes reductores que disminuyen la fiscalidad en función del tiempo de tenencia del activo.

Este diferente tratamiento fiscal hace que los inversores prefieran títulos con cupones más bajos y estén dispuestos a pagar una prima por ello. También hay que tener en cuenta el plazo, ya que para los títulos a más largo plazo el impacto de las ganancias de capital frente a las rentas por cupón es más pequeño, en general, que en títulos con plazos más cortos.

En este sentido, Schaefer (1981) observa un fenómeno en el tramo a largo para niveles impositivos altos consistente en un decrecimiento de la curva aún cuando la estructura antes de impuestos sea creciente, debido al mayor efecto penalizador, en términos relativos, de las rentas por cupón.

¹⁷ En IRPF, ya que en IS el tipo impositivo es igual en ambos casos.

Cuando se emplean títulos que devengan cupón este efecto es muy importante y es necesario sustraerlo para obtener estimaciones adecuadas de la estructura de tipos. De hecho, el efecto impositivo se pone de manifiesto en la estimación de la ETTI a raíz de que es necesario emplear títulos que devengan cupón para su aproximación, por lo que también se conoce como efecto cupón.

Para Niebuhr y Robichek (1970) el sesgo causado por los impuestos puede alterar sustancialmente la forma de la curva si se construye con cotizaciones de títulos que están bajo la par que implican ganancias de capital positivas. Este aspecto puede hacer que las conclusiones adoptadas sobre las expectativas del mercado antes de tener en cuenta la tributación sean totalmente diferentes a las obtenidas considerando las tasas. Además, Caks (1977) advierte que si existen diferencias impositivas entre las rentas por cupón y las ganancias de capital los flujos percibidos en la última fecha de devengo, que corresponden a ambas categorías, no deben descontarse a la misma tasa; lo que da lugar a que, debido al efecto impositivo, coexistan dos tipos de interés para el mismo plazo y, en la necesidad de disponer de un único valor, se genere un sesgo.

Siguiendo a Deacon y Derry (1994) podemos considerar que los esfuerzos en la literatura encaminados a tener en cuenta el efecto de los impuestos se deben, principalmente, a McCulloch (1975), Schaefer (1981) y Mastronikola (1991).

Aunque, también se deben citar a Dermody y Prisman (1988) que defienden la existencia de múltiples estructuras temporales de tipos originadas tanto por los impuestos como por los costes de transacción y a Prisman (1990) que desarrolla una metodología para estimar la estructura temporal en un mercado con fricciones: impuestos, comisiones y costes de transacción en general, que no tienen porqué ser simétricos en el tiempo.

McCulloch (1975) es el primero en proponer una metodología para el tratamiento del efecto impositivo ya que un ajuste de la curva de tipos que obvie su existencia falla en la estimación de los precios de los bonos que se encuentran apreciablemente bajo la par. Parte de la hipótesis de que las ganancias de capital tributan a un tipo r_g y los cupones a una tasa r y calcula el modelo tomando los flujos después de impuestos. Para ello distingue entre bonos negociados a la par, bajo la par y sobre la par, ya que el tratamiento fiscal de las ganancias de capital es diferente. Dado que los participantes del mercado tienen diversas cargas impositivas (algunos son instituciones exentas, otros empresas que tributan a un tipo fijo y la mayoría inversores individuales que soportan diferentes tipos según su situación particular) algunos títulos les resultarán más atractivos a unos que a otros.

McCulloch (1975) considera importante la obtención de un tipo impositivo que explique toda la estructura de precios observada, τ , que representaría un tipo impositivo efectivo global del mercado. La ecuación de regresión del modelo debe modificarse para tener en cuenta este aspecto quedando expresada como:

$$P_i = (1 - t) c_i \int_0^{T_i} D(t) dt + N_i D(T_i).$$

Esta tasa, t , se calcula dentro del proceso de estimación del modelo, como aquella que minimiza la suma de los cuadrados de los errores entre los precios observados y los calculados, lo que obliga a emplear métodos no lineales para encontrar su valor óptimo.

Aunque McCulloch (1975) considera que esta técnica es sustancialmente mejor que no tener en cuenta ningún ajuste, para Deacon y Derry (1994) su metodología tiene, principalmente, dos

puntos débiles: no queda claro qué representa el tipo impositivo efectivo calculado por el modelo y éste no varía con el plazo hasta el vencimiento.

Schaefer (1981) para cada tipo impositivo específico determina qué títulos son eficientes (aquellos cuyo precio es menor o igual a la valoración que el inversor hace del mismo) y cuales no (aquellos cuyo precio de mercado es mayor que el valor del título para el inversor). Esto es, debido a las cargas fiscales que debe soportar un inversor existen determinados títulos que tal como están valorados por el mercado no interesa poseer y otros que sí.

Schaefer (1981), al contrario que McCulloch (1975), considera que no existe una única estructura sino que existe una curva de tipos específica para cada tipo impositivo y que en su cálculo únicamente deben tenerse en cuenta aquellos títulos que el inversor de forma eficiente mantendría en su cartera.

Esta metodología choca con la anterior, de hecho Schaefer (1981) critica a McCulloch (1975) que sólo calcula la curva para una categoría de inversores (aquellos que pagan la tasa impositiva efectiva) e ignora la existencia de múltiples estructuras y que la tasa impositiva empleada es una especie de media de todos los tipos impositivos soportados por los inversores en vez de la tasa marginal, que es la que debería determinar el precio de los bonos.

Además, para Schaefer (1981) la tasa de impuestos efectiva es función del plazo y se calcula como el complemento a la unidad del cociente del tipo spot después y antes de impuestos para cada plazo.

Para Deacon y Derry (1994), este modelo es apropiado para la toma de decisiones individuales sobre qué bonos incorporar a la cartera y cuáles no, pero no para la identificación de la curva de tipos del mercado. Para su obtención, sería necesario bien

identificar todas las clases de contribuyentes o asumir que una estructura determinada es representativa del mercado, con el inconveniente de que los bonos no eficientes no son tenidos en cuenta, a pesar que se negocian efectivamente en éste.

En general, ambos modelos, sufren de dos inconvenientes. Por un lado, requieren una función que especifique los flujos requeridos por al menos una clase de inversores en todos los periodos, esta decisión es altamente arbitraria y no está claro que efecto tiene sobre los resultados el uso de una especificación u otra. Y en segundo lugar, el método de estimación depende de un modo crucial de la hipótesis que los bonos no están infravalorados y esto puede dar lugar a sesgos en las estimaciones, como el propio Schaefer (1981) reconoce.

El Banco de Inglaterra [Mastronikola (1991)] también se ha preocupado por este aspecto y bajo la hipótesis de que las ganancias de capital están exentas y que, por tanto, todo el efecto impositivo se manifiesta a través de los cupones trata de corregir el mismo intentando modelizar no sólo la relación tipo-plazo, sino también la relación tipo-cupón. De esta manera, el modelo no estima una curva de tipos sino una superficie, permitiendo que el efecto del cupón varíe con el vencimiento.

Para modelizar la relación cupón - tipo spot emplean curvas de capital-renta que describen el equilibrio entre la ganancia de capital, suponiendo que el título se mantiene hasta el vencimiento, $(\frac{N}{p}) - 1$, y la renta generada por el mismo, $\frac{c}{p}$. De este modo, determinar la relación entre ganancias de capital y renta es equivalente a determinar la relación entre tipos cupón-cero y el cupón, ya que para un vencimiento dado éstas son las únicas variables que intervienen en las especificaciones anteriores.

Este modelo se diferencia del anterior en que no determina a priori diversas tasas impositivas y calcula una estructura de tipos para cada una de ellas, sino que define cómo las diferentes clases de inversores interactúan y ofrece una única estructura temporal que es representativa del mercado en su conjunto. A modo de crítica, cabe decir que esta metodología no es rigurosa desde un punto de vista teórico.

Aunque estas metodologías para el tratamiento del efecto impositivo han sido formuladas como parte de propuestas concretas, no existe ninguna limitación para combinar cada una de ellas con alguna otra especificación funcional para la curva de tipos.

En resumen, la dificultad de modelizar el efecto impositivo es evidente y las propuestas planteadas no solucionan completamente el problema, por lo que en nuestra opinión consideramos que es preferible no realizar ningún tipo de ajuste arbitrario tomando determinados tipos impositivos de referencia, ya que esto tan solo puede perjudicar la credibilidad de las estimaciones al añadirles un sesgo. Ahora bien, desde el punto de vista del inversor individual la propuesta de Schaefer (1981) parece la que más ayuda ofrece para la valoración del efecto impositivo y la formación de carteras.

Otro efecto que también habría que tener en cuenta cuando se emplean bonos con cupón es el *efecto duración*. Éste surge porque dos bonos con igual vencimiento pero con cupones diferentes tienen duraciones diferentes y por tanto la exposición de cada uno al riesgo de tipos de interés también lo es. Este efecto no se ha considerado directamente en ninguno de los modelos propuestos, quizás porque se considera que el efecto impositivo es el más relevante.

Finalmente, otro factor a tener en cuenta se deriva de la naturaleza de los datos empleados en la determinación de la estructura temporal. El problema surge por la inexistencia de un único precio de liquidación o precio de cierre al que se realizan todas las operaciones efectuadas a lo largo del día por un título. Cada operación se negocia de forma independiente y al cierre del mercado se dispone del precio máximo y mínimo negociado para cada bono sobre los que se calcula la media. La cuestión es qué precio es representativo, sobre cuál se realizará la regresión. Todos los autores coinciden en emplear el precio medio como la mejor alternativa al recoger el punto de equilibrio entre el precio más alto de venta negociado y el más bajo de compra¹⁸. Donde no existe consenso es en el impacto que ese diferencial entre precio de oferta y demanda tiene sobre las estimaciones realizadas.

Para algunos, por ejemplo McCulloch (1971, 1975), este diferencial, junto con la existencia de comisiones, afecta sustancialmente al modelo de regresión que se manifiesta en la presencia de heteroscedasticidad. Esto es, se observa que la varianza de los errores no es constante en toda la muestra y esto puede generar conclusiones erróneas sobre los resultados obtenidos ya que si bien los estimadores siguen siendo insesgados dejan de ser eficientes o de varianza mínima afectando a los resultados de los tests de significación conjunta e individual de los parámetros. Para otros, como Schaefer (1981), este diferencial no es tan grande como para que tenga un efecto relevante en las estimaciones y puede no ser tenido en cuenta.

En general, las opiniones sobre la heteroscedasticidad y sus causas son diversas. Así, mientras Fong y Vasicek (1982) suponen que ésta se encuentra más relacionada con la sensibilidad del título

¹⁸ Bliss (1996) utiliza en sus regresiones el precio medio pero considera que el precio máximo y mínimo definen un intervalo de precios “verdaderos” del bono.

al riesgo de interés que con el *spread* de precios, opinión que comparte Bliss (1996) que pondera los errores con la inversa de la duración, Carleton *et al.* (1984) consideran que cada muestra debe ser analizada por separado y no establecer un mecanismo de corrección general a priori. En cambio, Shea (1984) opina que se gana más precisión determinando correctamente los nodos, detectando observaciones anómalas y eligiendo las restricciones apropiadas que experimentando con la especificación del término de error.

Para finalizar este capítulo introductorio queremos reiterar que la ETTI modelizada debe ser, en la medida de lo posible, una curva-tipo o curva de referencia, en el sentido que debe estar construida sobre títulos homogéneos y no recoger ningún tipo de efecto que pueda sesgar los resultados en uno u otro sentido. Así, para su elaboración, tomamos como datos los precios medios de las negociaciones efectuadas en títulos libres de riesgo de insolvencia; de modo que el inversor que desee valorar su inversión deberá tener en cuenta las características de sus activos (riesgo de insolvencia, liquidez, etc.) y de su situación fiscal para corregir en consecuencia el valor obtenido a partir de la curva estimada.

Adicionalmente, es muy difícil medir el grado de liquidez implícito en la estimación de la ETTI ya que en el mercado se negocian títulos con diferente liquidez y ésta no se mantiene a lo largo de toda la vida de éste sino que fluctúa constantemente. En cualquier caso, la “liquidez” de la curva estimada dependerá del criterio o filtro utilizado para la inclusión o no en la muestra de los títulos. Si exigimos un grado de liquidez mínimo, medido por el número de operaciones realizadas en el día y el volumen total de las mismas, obtenemos una estimación de la ETTI que valora títulos con esa liquidez mínima, pero corremos el riesgo, sobre todo en un mercado como el nuestro, de limitar demasiado el

número de observaciones disponibles. Por otro lado, si utilizamos todos los títulos negociados, nuestra estimación puede venir sesgada por las preferencias individuales de algunos agentes y no recoger la globalidad del mercado.

Capítulo 2:
MÉTODOS MATEMÁTICOS DE APROXIMACIÓN DE
FUNCIONES

Dado que el objetivo principal de nuestro trabajo es asignar una forma funcional adecuada a cualquiera de los elementos a través de los cuales se puede definir la ETTI, se introducen brevemente en este apartado los métodos y procedimientos que la teoría de aproximación de funciones nos ofrece para tal fin. Debido a la amplitud del tema centraremos nuestra atención en aquellas funciones, métodos y conceptos que por sus características pueden parecer, a priori, más adecuados en el ámbito de nuestro estudio, prestando especial atención a las funciones splines que se emplean en la mayor parte de los modelos de estimación de la estructura temporal que se presentarán en el capítulo siguiente.

Conviene aclarar que existe cierta controversia en torno al tratamiento de la interpolación, algunos autores como Schwarz (1989), Atkinson (1989) o Flannery *et al.* (1994) consideran la interpolación de funciones como un elemento relacionado pero independiente de la teoría de aproximación de funciones, mientras que otros [Björck y Dahlquist (1978) o Cheny y Kincaid (1994)] sin dejar de prestarle la importancia que le corresponde no ven en la interpolación más que un caso particular de una teoría muy general como es la aproximación; nosotros nos adherimos a la opinión de estos últimos.

2.1 INTRODUCCIÓN

La aproximación forma parte del problema de ajustar un modelo matemático a unos datos dados y otros factores conocidos. Básicamente la aproximación consiste en encontrar una función $f^*(x)$ cuyos valores, forma y comportamiento sean los más parecidos posibles a los de la función a aproximar $f(x)$. Ésta puede ser una función desconocida pero de la que se tienen valores observados, en cuyo caso es deseable que el conjunto de observaciones disponibles no venga impuesto por las condiciones del problema estudiado sino que se puedan escoger los datos

libremente, o conocida pero demasiado compleja para tratarla directamente.

Se puede distinguir, en función del tipo de relación existente entre los parámetros, entre aproximación lineal y aproximación no lineal. Esta última origina problemas que requieren procedimientos más complejos para determinar su solución. Los modelos no lineales pueden transformarse en lineales a través de diversas técnicas, sin embargo, en muchas ocasiones cuando la complejidad del modelo original es elevada, éstas no son aplicables. Por otro lado, la aproximación lineal es más sencilla y consiste en aproximar una función $f(x)$ a través de otra $f^*(x)$ que se expresa como una combinación lineal de $n+1$ funciones $j_0(x), \dots, j_1(x)$:

$$f^*(x) = c_0 j_0(x) + c_1 j_1(x) + \dots + c_n j_n(x)$$

Desde el punto de vista metodológico, quizás, resulta más conveniente realizar la distinción en base al tratamiento del error de aproximación definido como la diferencia entre el verdadero valor o valor observado y el valor que presenta la función de aproximación empleada. Podemos distinguir básicamente tres métodos: la interpolación que impone como restricción que el error en los puntos de soporte sea nulo, la técnica mínimo-máxima que escoge aquella función con el menor error global máximo y la metodología mínimo-cuadrática que elige aquella función que minimiza la suma de los cuadrados de los errores.

Otra subdivisión más sencilla es tener en cuenta simplemente el tipo de función empleada: polinomios puros, funciones racionales, funciones splines, etc.

En cualquier caso, resulta de gran importancia elegir adecuadamente qué método se va a emplear con el fin de obtener

resultados satisfactorios. La elección dependerá, fundamentalmente, de las características que presenten los datos estudiados, por tanto, es esencial un conocimiento previo lo más detallado posible del problema analizado.

A modo de resumen, concluir que la aproximación de $f(x)$ a través de $f^*(x)$ construida como una combinación de $n+1$ funciones, $j_i(x)$, es el punto de partida de todos los métodos, que irán perfilando sus características según se establezcan relaciones lineales o no y según las restricciones que se impongan sobre el error. Si, por ejemplo, establecemos, en la relación lineal definida anteriormente, que: $j_i(x) = x^i$ obtenemos:

$$f^*(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

que se corresponde con la aproximación lineal polinómica. Además, según cuál sea la restricción que se imponga al error de aproximación estaremos ante aproximación por interpolación, aproximación por mínimos cuadrados o aproximación mínimo-máxima o minimax.

En cualquier caso, se tendrá que resolver un sistema de ecuaciones para obtener los parámetros que caracterizan a $f^*(x)$. Si se disponen de $m+1$ observaciones y se estructura $f^*(x)$ como una combinación lineal de $n+1$ funciones se obtiene un sistema de $m+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= c_0j_0(x_0) + c_1j_1(x_0) + \dots + c_nj_n(x_0) \\ &\vdots \\ f(x_m) &= c_0j_0(x_m) + c_1j_1(x_m) + \dots + c_nj_n(x_m) \end{aligned}$$

que tiene solución cuando:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{j}_0(x_0) & \cdots & \mathbf{j}_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{j}_0(x_m) & \cdots & \mathbf{j}_n(x_m) \end{bmatrix} = \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{j}_0(x_0) & \cdots & \mathbf{j}_n(x_0) & f(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{j}_0(x_m) & \cdots & \mathbf{j}_n(x_m) & f(x_m) \end{bmatrix}$$

Esta solución será única si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el número de incógnitas y existirán múltiples soluciones cuando siendo iguales el rango de ambas matrices, su valor difiera del número de incógnitas. Si lo anterior no se cumple (si el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada no coinciden) el sistema no tiene solución, pero los coeficientes, $\{c_j\}_{0 \leq j \leq n}$, pueden calcularse de modo aproximado empleando mínimos cuadrados o minimax.

2.2 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Existen diversas formas, desde la perspectiva del tratamiento del error, de abordar el problema de la aproximación de funciones, entre las que destacan: la interpolación, la aproximación mínimo-máxima y la aproximación mínimo cuadrática. En el estudio que nos ocupa se ha empleado, tradicionalmente, la aproximación mínimo cuadrática que se refleja en el uso de regresión por mínimos cuadrados para la estimación de los coeficientes de los modelos propuestos.

2.2.1 La interpolación de funciones

La interpolación es un método ampliamente utilizado para la asignación de funciones a datos tabulados. Sin embargo, para la determinación de la curva de tipos carece de utilidad ya que

nuestro objetivo es determinar qué función aproxima mejor una serie de datos que no son directamente observables sino cuyos valores se encuentran implícitos en otro conjunto de datos. Una posibilidad consiste en interpolar los valores de las TIR's de los títulos, obteniendo así una forma funcional para la curva de rendimientos que, siguiendo la tónica de los primeros modelos propuestos para la determinación de la curva de tipos, puede considerarse representativa de la curva de tipos cupón-cero.

En general, la interpolación se caracteriza por establecer, como condición para la determinación de los coeficientes de la función de aproximación, que el error de aproximación en los puntos de soporte x_i sea nulo: $f(x_i) - f^*(x_i) = 0$. Las funciones empleadas pueden tomar cualquier forma, aunque generalmente se emplean polinomios ya que bajo ciertas condiciones su existencia y unicidad están garantizadas y su cálculo no es excesivamente complejo. No ocurre lo mismo en el caso de que se empleen funciones exponenciales o racionales que no presentan las condiciones anteriores y son no lineales en los coeficientes.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que aunque el error de aproximación en los puntos de soporte se anula, en el resto del intervalo puede ser arbitrariamente grande. En este sentido, puede resultar más apropiado perder un poco de precisión en la aproximación de los puntos observados a cambio de obtener alguna mejora en la magnitud del error en todo el intervalo y suavizar el comportamiento de la función. La aproximación mínimo cuadrada y mínimo máxima son un ejemplo de métodos que se basan en esta idea.

2.2.2 La aproximación mínimo cuadrada y mínimo máxima

Tal y como acabamos de comentar existen diversos métodos que se centran en el tratamiento del error en todo el intervalo de

estudio no sólo en puntos concretos. Esto es, tratan de buscar una función $f^*(x)$ tal que la norma del error $\|f^*(x)-f(x)\|$ sea lo más pequeña posible.

El concepto de norma está ligado al de distancia entre dos vectores; en la medida que las funciones pueden ser vistas como tales, se puede emplear la distancia entre $f(x)$ y $f^*(x)$ para medir la bondad de una aproximación.

Dos de las normas más utilizadas en la aproximación de funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ son la *norma máxima*¹⁹:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

y la *norma euclídea* o L_2 :

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b f(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

Entre los métodos basados en este concepto se encuentran la aproximación mínimo cuadrática y la mínimo máxima. Estas dos técnicas establecen una restricción en el error de aproximación totalmente diferente a la propuesta por la interpolación. Desde el punto de vista de estos procedimientos la interpolación se basa en una restricción del error que da lugar a estimaciones del mismo poco reales y por tanto destruye la confianza de los parámetros estimados. La idea fundamental es que exigir a las funciones de aproximación que tomen determinados valores en determinados puntos las obliga a adoptar formas poco estables, sobre todo si éstas son polinomios, que son más sensibles a la existencia de observaciones anómalas, originando que el error en todo el intervalo pueda verse perjudicado.

¹⁹ También conocida como norma ∞ , norma de Chebyshev o norma uniforme porque proporciona un límite uniforme sobre la desviación a lo largo de todo el intervalo.

En este sentido, se va a establecer una condición del error más tolerante que permite la existencia de desviaciones en los puntos de soporte para tratar de conseguir, en contrapartida, una mayor suavidad (entendida como un comportamiento más estable y menos oscilatorio) en todo el intervalo.

En el caso del método de mínimos cuadrados esta condición establece que se escoja aquella función de aproximación, dentro de la clase propuesta, cuyo error, medido a través de la norma euclídea, sea de menor magnitud. Es decir, si se desea aproximar $f(x)$ a través de una función $f^*(x)$ los parámetros de ésta se deben determinar de modo que:

$$\|f^* - f\|_2^2 = \int |f^*(x) - f(x)|^2 \omega(x) dx = \text{Min!} ,$$

representando $\omega(x)$ una función peso determinada.

El método de los mínimos cuadrados fue desarrollado por Gauss en 1794 para suavizar los datos de problemas de astronomía y geodesia, aunque los primeros resultados publicados se deben a Legendre en 1806. En 1799 Laplace sugirió minimizar la suma de los valores absolutos de los errores, que equivale a realizar la aproximación, en el caso discreto, con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ cuya ventaja es la eliminación de la influencia en la estimación de un único error grande. Como la solución a este problema es difícil, Gauss propuso minimizar la suma de los cuadrados de los errores. Esta propuesta es, además, desde el punto de vista estadístico más adecuada ya que, como veremos a continuación, en el caso lineal cuando la función de ponderación vale la unidad se identifica con el método de los mínimos cuadrados ordinarios.

Björck y Dahlquist (1978) señalan que el método de los mínimos cuadrados es apropiado para el tratamiento de sistemas sobredeterminados²⁰, especialmente, cuando se considera que los errores están normalmente distribuidos.

Por otro lado, también recomiendan, para mejorar la aproximación cuando se emplean polinomios, utilizar este método y reducir el grado del polinomio de aproximación como alternativa a aumentar el grado del polinomio de interpolación. Otro aspecto positivo, es que el error cuando se utilizan mínimos cuadrados oscila en torno a cero, mientras que con la interpolación suele seguir un comportamiento potencial.

Si se tiene un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, c_1, c_2, \dots, c_n , podemos expresar el error de forma discreta como la diferencia entre el valor de la función de aproximación y el valor observado en cada punto:

$$e_i = \sum_{j=1}^n [x_j c_{ij}] - y_i, \quad i=1,2,\dots,m \text{ y } n < m;$$

donde $C = (c_{ij})_{i=1,\dots,m \ j=1,\dots,n}$ representa los coeficientes,

$X = (x_i)_{i=1,\dots,m}$ los puntos donde se toman las observaciones

$Y = (y_i)_{i=1,\dots,m}$ el valor de las mismas y

$E = (e_i)_{i=1,\dots,m}$ el error de aproximación en cada observación.

De tal modo que en forma matricial tenemos: $CX - Y = E$. Si la matriz de observaciones X tiene rango máximo n , es decir sus vectores son linealmente independientes, los parámetros C se pueden determinar de modo que se minimice la suma de los cuadrados de los residuos; esto es equivalente a minimizar el cuadrado de la norma euclídea del vector de residuos:

²⁰ Sistemas en los que el número de ecuaciones (observaciones) supera el número de incógnitas (funciones que forman la combinación).

$$E = \text{Infimo} \| CX - Y \|_2^2$$

Que se puede expresar como: $\text{Min } F(C) = E^t E = X^t C^t CX - 2(CX)^t Y + Y^t Y$. Por lo que los valores de los coeficientes vendrán determinados por: $C = (X^t X)^{-1} X^t Y$, que es el modo en que se estiman los parámetros de los modelos de regresión lineales cuando se emplean mínimos cuadrados ordinarios.

Cuando el modelo es no lineal la solución no se obtiene de una forma tan sencilla y directa y es necesario emplear algún método iterativo como el de *Gauss-Newton* que trata de acercarse paso a paso a la solución buscada. De forma breve, el método consiste en linealizar las ecuaciones del error proporcionando valores iniciales a los parámetros no lineales, de tal forma que el sistema se puede resolver más fácilmente. El valor de los parámetros se va modificando de forma iterativa, en base a los resultados obtenidos en la fase anterior, hasta que se considere que la mejora que se obtendrá en el próximo paso es lo suficientemente pequeña como para no ser tomada en cuenta. El único problema que presenta este tipo de métodos es que la secuencia de soluciones obtenidas no tiene porque converger hacia la solución deseada, aún cuando se elijan adecuadamente los valores iniciales con los que se comienza la iteración.

Otro método para determinar qué función $f^*(x)$ es mejor para aproximar una función, $f(x)$, continua en $[a, b]$ es la técnica mínimo máxima o minimax, cuya propuesta de restricción sobre el error sigue una pauta similar que el caso anterior, escogiendo aquella función cuyo error máximo sea más pequeño: $\text{Error} = \text{Infimo} \| f - f^* \|_{\infty}$. La aproximación minimax, sin embargo, exige cálculos más complejos que la aproximación mínimo cuadrática por eso se suele emplear ésta más frecuentemente.

2.3 ALGUNAS FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

Independientemente del método de aproximación empleado se debe determinar qué tipo de función se va a utilizar para aproximar $f(x)$. Existe una gran variedad de funciones que pueden ser empleadas para la aproximación de la ETTI, sin embargo, los modelos propuestos se han basado, principalmente, en el uso de funciones splines por lo que éstas serán tratadas con mayor detalle y profundidad. Por otro lado, también se comentan algunas funciones que, si bien no se han empleado directamente en la modelización de la curva de tipos, por sus propiedades y características podrían ser susceptibles de utilización.

2.3.1 Polinomios

De entre las diferentes clases de funciones disponibles, los polinomios son los que más comúnmente se emplean por su manejabilidad. Desde el punto de vista de la interpolación se demuestra que, para una serie de pares de valores o puntos de soporte $(x_i, y_i) \ i=0,1,2,\dots,n$ dados, se puede construir **siempre** un **único** polinomio de interpolación de a lo sumo grado n de la forma: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ que satisfaga que: $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \ \forall \ i=0,1,\dots,n$. Es decir, se garantiza la existencia y unicidad de un polinomio de interpolación.

Por otro lado, desde el punto de vista del error de aproximación, el teorema de aproximación de Weierstrass nos indica que cualquier tipo de función, $f(x)$, continua sobre un intervalo $[a,b]$ se puede aproximar en el mismo a través de un polinomio simple, $P_n(x)$, con un grado de error, $f(x^*) - P_n(x^*)$ para $x^* \in [a,b]$; $i=0,1, \dots, n$, arbitrariamente pequeño a medida que $n \rightarrow \infty$.

En contrapartida, hay que tener en cuenta que, en ocasiones, el error tiende a cero tan despacio que no resulta práctico tratar

de aproximar $f(x)$ a través de un polinomio, al menos en todo el intervalo $[a,b]$; mientras que en otros casos, el error ni siquiera presenta convergencia a cero cuando se aumenta el grado del polinomio, por ejemplo²¹ cuando se aproxima e^x en $[0,1]$ o $(1+x^2)^{-1}$ en $[-5,5]$.

Por otro lado, no se puede calcular el error de forma exacta pero su valor se puede acotar. Para ello se debe conocer una cota superior, k , del valor absoluto de la derivada de orden $n+1$ de la función en el intervalo más pequeño que contiene a x^* y a todos los nodos, ya que se satisface:

$$f(x^*) - P_n(x^*) = \frac{w(x^*)k}{(n+1)!}, \text{ donde } w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Sin embargo, hemos de tener en cuenta que cuando se quiere aproximar no una función concreta sino un conjunto de datos puede resultar difícil estimar el valor de la cota k y por tanto el error.

Como aspectos negativos se tienen que los polinomios suelen oscilar de forma apreciable dando lugar a aproximaciones poco estables que resultan de poca utilidad cuando se pretende valorar la función en puntos no observables, sobre todo cuando su grado es elevado. Esta característica da como resultado una función que oscila sobre la función a aproximar pero que no se tiende sobre ésta. Sin embargo, en relación a nuestro tema de estudio, quizás, la característica que más nos afecta negativamente es la falta de convergencia asintótica cuando $|x| \rightarrow \infty$.

2.3.2 Funciones racionales y exponenciales

²¹ Ejemplo expuesto por Runge en 1901 [Cfr. Cheny y Kinkaid (1994, p.296)].

A pesar de que las funciones polinómicas son las más ampliamente utilizadas por su facilidad de cálculo, en ocasiones dadas las características de los datos o función a aproximar resulta más conveniente emplear otro tipo de funciones más complejas como pueden ser las funciones racionales o exponenciales.

Las funciones racionales se definen como el cociente de dos funciones, generalmente polinomios, y presentan, por tanto, una forma no lineal:

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k}$$

Desde el punto de vista de la interpolación, no se puede, al contrario que en el caso polinómico, garantizar la existencia ni unicidad de la función. Por ejemplo, si el polinomio del denominador, $Q_k(x)$, tiene un cero en alguno de los puntos de soporte, el polinomio del numerador, $P_m(x)$, también debe tenerlo con multiplicidad igual o mayor porque en caso contrario en ese punto, denominado *punto inaccesible*, no se satisfará la condición de interpolación.

Por otro lado, dejando a un lado la mayor complejidad de cálculo de los coeficientes y la posibilidad de no encontrar una solución, la interpolación racional es más apropiada y ofrece mejores resultados que la interpolación polinómica cuando la función que se quiere aproximar tiende hacia cualquier tipo de asíntota: vertical, horizontal u oblicua. Este es el caso de la función de descuento, sin embargo, ninguna de las propuestas formuladas hasta ahora emplean este tipo de función en la aproximación de la ETTI.

Otro tipo de funciones que por sus características son, a priori, de gran interés para nuestro estudio son las funciones

exponenciales. En este caso, la función de aproximación se puede definir como una combinación de funciones exponenciales:

$$f^*(x) = a_0 e^{l_0 x} + a_1 e^{l_1 x} + a_2 e^{l_2 x}.$$

La principal dificultad de estas dos últimas especificaciones es su no linealidad que no puede salvarse con los procedimientos tradicionales de linealización lo que obliga a emplear métodos iterativos para buscar una solución que puede no ser óptima.

2.3.3 Polinomios ortogonales

Los polinomios ortogonales pueden ser útiles a la hora de derivar nuevas aproximaciones lineales no interpolativas. Su importancia reside en que forman un sistema de funciones linealmente independientes.

Se dice que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son *ortogonales* si su producto interior, (f, g) , es nulo, siendo:

$$(f, g) = \begin{cases} \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx; & \text{caso continuo} \\ \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i)w_i; & \text{caso discreto} \end{cases}$$

y representando $w(x)$ una función peso, continua y definida positiva en todo el intervalo (a, b) , respecto a la cual se cumple la condición.

Extendiendo esta definición, se dice que un conjunto de funciones g_0, g_1, \dots, g_n forman un *sistema ortogonal* si $(g_i, g_j) = 0$ " $i \neq j$ y $(g_i, g_i) = 1$ " i . Esto es, si cada función es ortogonal respecto a cada una de las restantes.

La implicación más directa de esta propiedad es que los conjuntos de funciones que forman un sistema ortogonal son linealmente independientes, lo cual nos permite evitar los problemas de singularidad que suelen presentarse en algunas bases como la de potencias truncadas. Este hecho trasladado al campo de la aproximación significa que la **solución** al problema de aproximación, desde el punto de vista de cualquier técnica lineal, es **única**.

Una familia de polinomios ortogonales es una familia triangular de polinomios que forma un sistema ortogonal con respecto a alguna función peso determinada. Una familia triangular de polinomios es una secuencia de polinomios g_0, g_1, \dots tal que verifica una relación recursiva a tres términos consecutivos, que permite conocer todos los polinomios a partir de g_0 y g_1 . La expansión de funciones en términos de polinomios ortogonales resulta muy útil ya que son fáciles de manejar, tienen buenas propiedades de estabilidad y convergencia hacia los valores de la verdadera función y suelen ser representaciones bien condicionadas de las funciones que aproximan.

En general, partiendo del concepto de polinomio ortogonal: $(P_i, P_j) = 0$ " $i \neq j$, y según la función peso que se tome y el intervalo de referencia, se pueden calcular diferentes polinomios ortogonales. De hecho, cada distribución peso tiene asociado un sistema ortogonal que es una familia triangular de polinomios.

Existen, por tanto, un gran número de polinomios ortogonales; sin embargo, desde el punto de vista de nuestro estudio, nos pueden interesar, a priori, aquéllos que se definen en el intervalo $[0, \infty)$. De este modo, nos encontramos con los polinomios de Laguerre que son ortogonales respecto a la distribución peso $w(x) = e^{-x}$ en $[0, \infty)$ y toman la forma:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

Los polinomios de grado superior se pueden calcular de modo iterativo conociendo los dos anteriores a través de la siguiente expresión:

$$L_{n+1}(x) = (n+1)^{-1} (2n+1-x)L_n(x) - (n/n+1)L_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

Otra característica es que su norma euclídea vale $1/n$. Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicación de la técnica de mínimos cuadrados, al ser su función peso distinta de la unidad, es necesario ponderar los valores para el cálculo del error. Por lo que puede resultar más interesante elegir alguna especificación cuya función peso sea la unidad. En este sentido, nos encontramos con los polinomios de Legendre que surgen a partir de considerar una distribución ponderada uniforme, $w(x)=1$, sobre el intervalo $[-1,1]$ y tienen la forma:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Se calculan recursivamente partiendo de $P_0(x)=1$ y $P_1(x)=x$ a través de la siguiente fórmula:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Una propiedad importante, desde el punto de vista de nuestro estudio es que $|P_n(x)| \leq 1$ para $x \in [-1,1]$, además $P_n(1) = 1 \quad n$.

Por otro lado, estos polinomios son apropiados cuando se desea aproximar una función continua $f(x)$ en $[-1,1]$ a través de mínimos cuadrados ordinarios con un polinomio de grado n , $g_n(x)$.

La función de aproximación se define como una combinación lineal de polinomios de Legendre:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$$

y los coeficientes, c_k , se determinan estableciendo que los errores de aproximación sean mínimos respecto a la norma euclídea:

$$\int_{-1}^1 [g_n(x) - f(x)]^2 dx = \text{Min!}$$

por lo que, vienen dados por:

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx$$

Como inconvenientes tenemos que la evaluación de la integral es bastante laboriosa y en nuestro caso que es necesario realizar una transformación de los datos. Si nuestro intervalo de estudio es $[a, b] \notin [-1, 1]$, podemos realizar la transformación estableciendo: $t = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x$; $t \in [a, b]$ y $x \in [-1, 1]$.

2.3.4 Funciones splines

A pesar de que, tanto las funciones racionales y exponenciales como los polinomios ortogonales por sus características y propiedades parecen ser adecuados para la modelización de la ETTI, los modelos más importantes de aproximación que se desarrollan en el capítulo siguiente emplean, principalmente, funciones splines. Por ello creemos necesario tratar con mayor profundidad la construcción, características y otros aspectos de este tipo de funciones.

La idea de utilizar funciones splines en la aproximación surge debido a que los polinomios de grado elevado fluctúan

fuertemente sobre el intervalo de aproximación, por lo que se busca la forma de disminuir los grados del polinomio de aproximación sin perder precisión. La solución propuesta es aproximar, en vez de todo el intervalo, secciones o trozos del mismo empleando polinomios de menor grado, teniendo en cuenta que éstos deben mantener al unirse en los extremos de los subintervalos (nodos) ciertas condiciones sobre la continuidad y derivabilidad de la función inicial.

Se considera que Rutishauser en 1960²² fue el primero en tratar el problema de interpolar suavemente una función a través de esta técnica empleando polinomios, aunque fue Schoenberg²³ en 1946 quien desarrolló la teoría en torno a las funciones splines. Posteriormente el concepto de función spline se ha ampliado a cualquier función definida a trozos sobre un intervalo, ya sea de forma polinómica o no, caso de los splines exponenciales, racionales, etc. y se ha dejado de considerar sólo el caso de la interpolación.

2.3.4.1 Conceptos básicos

En general un spline es cualquier función definida “a trozos” (definida de forma diferente en cada subintervalo en el que se divide el intervalo total de estudio) que cumple determinadas condiciones de continuidad en los extremos de los mismos. De este modo tenemos que:

²² Cfr. Schwarz (1989, p.126).

²³ Cfr. Atkinson (1989, p.183).

$$S(x) = f_i(x), \text{ para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \rightarrow$$

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = f_0(x), \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots \\ s_{n-1}(x) = f_{n-1}(x), \text{ para } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} .$$

Para proceder a una definición formal de spline es necesario definir previamente una partición $A = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ sobre el intervalo de estudio $[a, b]$. Un spline de grado k sobre A , $S(x)$, es una función real, $S(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple las siguientes propiedades:

- $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$; es decir, $S(x)$ es derivable con continuidad hasta el orden $k-1$ en el intervalo $[a, b]$
- $S(x)$ es en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, una función de a lo sumo grado k .

Un aspecto muy importante a tener en cuenta a la hora de definir una función spline es que la carga computacional varía según la especificación que se tome. Así, por ejemplo, no es apropiado definir $S_i(x) = a_i + b_i x$ porque x no varía intrínsecamente con respecto al intervalo de referencia del spline $[x_i, x_{i+1}]$. La forma $S_i(x) = a_i [(x_{i+1} - x) / (x_{i+1} - x_i)] + b_i [(x - x_i) / (x_{i+1} - x_i)]$, sin embargo, es adecuada en el caso de la interpolación ya que evita introducir ningún parámetro adicional al corresponderse $a_i = y_i$ y $b_i = y_{i+1}$.

También puede utilizarse una representación en forma cerrada que se mantiene para todo el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, se puede restringir que en cada uno de los intervalos el spline sea un polinomio lineal:

$$S_i(x) = a + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x - x_i)_+$$

$$\text{con } (x - x_i)_+ = \begin{cases} x - x_i, & \text{si } x \geq x_i \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Una representación análoga se obtiene estableciendo:

$$S_i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i N_i(x) \text{ con:}$$

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

De este modo el spline, $S_i(x)$, también está restringido a ser lineal en todos los subintervalos. Esta especificación lineal, también conocida como *camino poligonal* por su trazado con líneas rectas, es muy simple y tiene, además, propiedades positivas que algunos splines de grado elevado no poseen en cuanto a la preservación de la forma: se conserva la monotonía, la convexidad y el signo ($y_i > 0 \text{ @ } S_i(x) > 0 \text{ " } i = 1, \dots, n$) de la función a aproximar.

2.3.4.2 Construcción de splines

Existen dos maneras de abordar la construcción de una función spline: partir de las condiciones de continuidad, e interpolación si fuese el caso, que debe cumplir la misma en los nodos o hacer uso de una base en el espacio vectorial de splines. En el primer caso, el spline viene expresado según las condiciones impuestas; en el segundo, se expresa como una combinación lineal de las funciones que conforman la base.

Para ilustrar el primer caso desarrollaremos la construcción de un spline polinómico cúbico. Éstos son los que comúnmente se emplean en los desarrollos teóricos y los utilizados en algunos modelos de aproximación de la ETTI.

Un spline polinómico cúbico $S(x)$ que se define sobre una partición, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, del intervalo $[a, b]$ es una función que cumple las siguientes propiedades:

- $S(x) \in C^2[a, b]$. La función y sus dos primeras derivadas son continuas.
- $S(x)$ es un polinomio de a lo sumo grado 3 en cualquier subintervalo de la partición.

En relación a la interpolación, desarrollada a título informativo, estas condiciones originan un sistema sobredeterminado, esto es, no existe un único spline de interpolación para un conjunto de pares de valores (x_i, y_i) predeterminados:

- **Coefficientes:** el spline está definido por $4n$ coeficientes (4 coeficientes por cada subintervalo).
- **Condiciones:** en cada subintervalo se tienen dos condiciones de interpolación (una en cada nodo): $S(x_i) = f(x_i) = y_i$ y $S(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = y_{i+1}$, dando lugar a $2n$ condiciones. La continuidad de $S(x)$ no aporta nuevas condiciones porque están incorporadas en las de interpolación. La continuidad de la primera derivada, $S'(x)$, da lugar a una condición en cada nodo interior, $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$, por tanto se añaden $n-1$ condiciones. Por último, la continuidad de la derivada segunda, $S''(x)$, de forma análoga a la anterior añade $n-1$ condiciones.

En resumen, para determinar $4n$ coeficientes tenemos $4n-2$ condiciones, por tanto nos quedan dos grados de libertad, que tenemos que fijar con dos condiciones más para lograr una solución única.

A modo ilustrativo, si se establece que en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de longitud $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ el spline se define como:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

Los coeficientes, a_i , b_i , c_i y d_i , deben determinarse de modo que se cumplan las condiciones exigidas. Para ello se puede tomar como incógnitas las primeras derivadas o las segundas. En cualquier caso, se tiene un sistema de $n-1$ ecuaciones ($i = 1, \dots, n-1$) con $n+1$ incógnitas. En el caso particular de tomar como incógnitas las segundas derivadas, tenemos para dos nodos contiguos $x = x_i$ y $x = x_{i+1}$:

$S_i(x_i) = a_i = y_i$ y $S_i(x_{i+1}) = d_i h_i^3 + c_i h_i^2 + b_i h_i + a_i = y_{i+1}$ (a partir de la condición de interpolación) y

$S_i''(x_i) = 2c_i = y_i'' = z_i$ y $S_i''(x_{i+1}) = 6d_i h_i + 2c_i = y_{i+1}'' = z_{i+1}$
(condición de la derivada 2ª)

de donde:

$$a_i = y_i \quad c_i = \frac{z_i}{2} \quad d_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i} \quad y$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i [z_{i+1} + 2z_i]}{6}$$

Por tanto, para poder determinar los coeficientes necesitamos conocer los valores de z_i ; $i = 0, 1, \dots, n$. Éstos se pueden calcular teniendo en cuenta la condición de continuidad en los nodos de la primera derivada, $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$:

[Späth (1995, p.84)]; por lo que se considera más apropiado asignar valores a z_0 y z_n . Esto se puede hacer de diferentes formas²⁵, aunque de Boor (1978) recomienda, si no se conoce nada acerca de las derivadas de los extremos, emplear una condición *not-a-knot* que requiere que la tercera derivada del spline sea continua en x_1 y x_{n-1} .

Una vez determinados todos los z_i a partir de la restricción elegida, se puede conocer el valor de cada uno de los parámetros (a_i, b_i, c_i, d_i) y se obtiene una única función spline para todo el intervalo $[a, b]$, aplicando los valores obtenidos al polinomio cúbico definido anteriormente.

Este mismo procedimiento se puede hacer tomando como incógnitas las primeras derivadas y de forma similar se obtiene una matriz de coeficientes tridiagonal y diagonalmente dominante.

Sin embargo, en el estudio que nos ocupa, el interés se centra en la construcción de funciones splines no interpolativas; para ello se procede de forma similar al caso anterior pero se deben cumplir únicamente las condiciones de continuidad. Así, para el caso de una función de grado k , se tienen $k+1$ coeficientes en cada n subintervalo y $(k-1)(n-1)$ condiciones de continuidad en los nodos interiores $x_i, i=1, \dots, n-1$. Por tanto se disponen de $k+2n-1$ grados de libertad que no tienen porque restringirse si se emplean mínimos cuadrados.

Si se toma como ejemplo la construcción de un spline polinómico cúbico que en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de longitud $h_i = x_{i+1} - x_i, i=0, 1, \dots, n$ toma la forma:

²⁵ Información detallada sobre algunas de las restricciones más comúnmente empleadas se pueden consultar en Späth (1995) Capítulo 4 y de Boor (1978) Capítulo 4.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

y no se incorpora a las condiciones impuestas por la propia definición de spline ninguna otra restricción adicional, se tiene:

$$S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad [\text{a partir de la condición de continuidad}]$$

$$S'_i(x_{i+1}) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad [\text{condición de continuidad en la primera derivada}]$$

$$Y \quad S''_i(x_{i+1}) = 2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1} = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad [\text{de la continuidad en la segunda derivada}]$$

De esta forma podemos poner a_{i+1} , b_{i+1} y c_{i+1} en función de a_i , b_i , c_i y d_i . Por ejemplo, para el caso de que existan dos subintervalos, $[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$, tendríamos:

$$a_1 = a_0 + b_0(x_1-x_0) + c_0(x_1-x_0)^2 + d_0(x_1-x_0)^3, \quad b_1 = b_0 + 2c_0(x_1-x_0) + 3d_0(x_1-x_0)^2, \\ c_1 = c_0 + 3d_0(x_1-x_0)$$

Sustituyendo estos valores en $S_1(x)$, se obtiene la siguiente especificación del spline:

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_0 + b_0[h_0 + (x-x_1)] + c_0[h_0^2 + 2h_0(x-x_1) + (x-x_1)^2] + \\ + d_0 h_0[h_0^2 + 3h_0(x-x_1) + 3(x-x_1)^2] + d_1(x-x_1)^3 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Siendo a_0 , b_0 , c_0 , d_0 y d_1 los coeficientes a determinar para definir completamente el spline.

La ventaja de la especificación de los splines a través de sus condiciones de continuidad (e interpolación si fuese el caso) es que resulta extremadamente sencillo añadir restricciones adicionales que ayuden a mejorar la aproximación. Como inconveniente tenemos que el cálculo de los coeficientes, para la especificación completa de la función spline, es más tedioso. Este

cálculo es mucho más sencillo cuando se construye el spline a partir de alguna base.

Otra forma de construir una función spline se deriva del carácter vectorial del espacio de splines. La idea básica es construir los splines como combinaciones lineales de otros splines standard: *bases*. Se llama *base* de un espacio de funciones a todo sistema de funciones linealmente independiente a partir del cual se pueden construir el resto de funciones de ese mismo espacio. Si llamamos $g_{ij}(x)$ a las funciones que forman la base, podemos construir el spline como combinaciones lineales de las mismas:

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^k a_{ij} g_{ij}(x)$$

Una base particularmente sencilla es la formada por potencias truncadas, que en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se puede definir como:

$$j_{ij} = \frac{(x - x_i)_+^k}{k!}, \text{ siendo } (x - x_i)_+^k = (\max(x - x_i, 0))^k,$$

representando i el intervalo de referencia y k el grado.

Otro ejemplo de conjunto de funciones que forman una base son los *B-splines* o *Basic splines*. Los B-splines se denotan como B_i^k , siendo k el grado del spline y representando i el subintervalo al que hacen referencia. Su determinación es muy sencilla ya que se construyen en base a una relación de recurrencia sobre el B-spline de orden inmediatamente inferior. Para formar un spline a partir de esta base, simplemente se tomará, como en el caso anterior, una combinación lineal de la misma. Estos splines son de

gran importancia en nuestro estudio²⁶ y sus características serán tratadas en detalle a continuación.

También los polinomios de *Bernstein* forman una base, estos polinomios están estrechamente relacionados con los B-splines definidos en una secuencia de nodos que sólo admiten ceros y unos, como se verá en el apartado siguiente. Por otro lado, su utilidad para la estimación de la estructura temporal fue puesta de manifiesto por Schaefer (1981).

Un aspecto importante a tener en cuenta es la *condición* de la base que mide cómo de bien los cambios relativos de los coeficientes coinciden con los cambios relativos resultantes en el elemento representado. Cuanto mayor sea la coincidencia mejor condicionada será la base. Por ejemplo, supongamos que se quieren representar polinomios en un intervalo $[a,b]$ con a/b cercano a uno, elegir una base de potencias $1, x, x^2, \dots$ no es apropiado, ya que si nuestro intervalo es $[100, 101]$ un 0'1% de variación en los coeficientes de la función $f(x) = x - 100$ supone un cambio del 100%, mientras que si se emplea $f(x) = a + b(x - 100)$ supone un cambio del 0'1%. Por tanto la elección de una base apropiada es fundamental.

2.3.4.3 Algunos splines característicos

A través de las indicaciones que se acaban de reseñar se puede construir cualquier función spline; sin embargo, existen ciertos splines que por determinadas peculiaridades son de especial interés. Hasta ahora, el mayor avance en la aproximación de la estructura temporal ha sido la utilización de B-splines, pero existe toda una familia de splines con características propias

²⁶ Shea (1984, 1985) propone su utilización y Steeley (1991) realiza la aproximación de la estructura temporal de tipos de interés en base a ellos.

diferenciadas que quizás puedan ayudar a obtener mejores resultados. Aunque los mayores avances se han hecho en torno a la digitalización de imágenes y el diseño asistido, no existe ninguna razón para que el campo de las finanzas no aproveche, si fuese el caso, estas potentes herramientas de aproximación.

Los *B-splines* o *Basic splines* son funciones muy flexibles que se emplean en la aproximación y suavizado de otras funciones en muchos campos de las ciencias, entre ellos las finanzas. Los B-splines son muy utilizados, sobre todo, en CAD (Computer Assisted Design) para ajustar curvas que deben dibujarse por un ordenador porque al ser polinomios se pueden evaluar fácilmente y al estar definidos a trozos son muy flexibles. De Boor (1986) considera que fue Schoenberg en 1946 quien introdujo los B-splines; aunque éste reconoce que ya Favard en 1940 y Laplace anteriormente habían hecho uso implícito de este tipo de funciones.

La importancia de los B-splines es como su propio nombre indica su carácter básico, en el sentido que expresan de forma esencial el carácter de las funciones splines.

Schoenberg (1946)²⁷ introduce los B-splines como:

$$B_k(x) = \frac{1}{2^p} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u/2}{u/2} \right)^k e^{iux} du$$

Sin embargo, esta expresión ha derivado en otra más sencilla que permite calcular los B-splines de orden superior a partir de sus antecesores. En general, existen dos formas de definir los B-splines, a través de relaciones de recurrencia y como diferencias divididas de funciones de potencia truncada. De forma recursiva

²⁷ Cfr. de Boor (1986).

partiendo del B-spline de orden uno (grado cero) se pueden obtener todos los B-splines de orden superior. El B-spline de grado cero se expresa como:

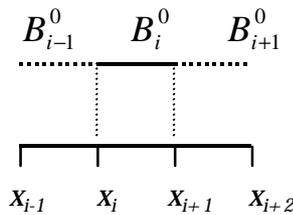
$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calculándose los B-splines de orden superior a partir de la siguiente expresión:

$$B_i^k(x) = V_i^k(x)B_i^{k-1}(x) + (1 - V_{i+1}^k(x))B_{i+1}^{k-1},$$

siendo:
$$V_i^k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}, & \text{para } x_i \neq x_{i+k} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La especificación de los B-splines es muy ingeniosa. Se parte de una definición muy básica y se van construyendo las funciones de grado superior a través de un procedimiento muy sencillo que consiste fundamentalmente en ir dando diferentes ponderaciones a las curvas de grado anterior que se definen en el intervalo de determinación y en sus adyacentes. Esta característica se aprecia mejor gráficamente. Se parte del spline de grado cero:



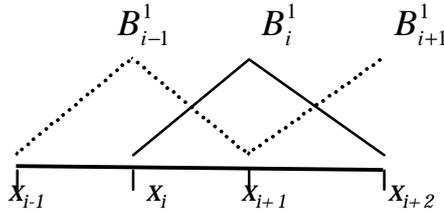
Ahora a partir de B_i^0 y B_{i+1}^0 y denotando $h_{i,j} = x_{i+j} - x_i$ se calcula B_i^1 , siguiendo la relación de recurrencia, como:

$$B_i^1 = \frac{x - x_i}{h_{i,1}} \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} + \left[1 - \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,1}} \right] \begin{cases} 1, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases},$$

esto es:

$$B_i^1 = \begin{cases} \frac{x - x_i}{h_{i,1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1 - \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,1}}, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

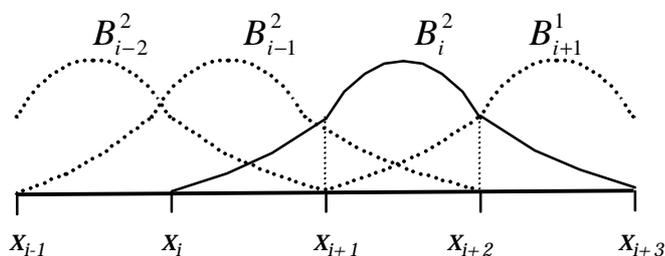
Se puede comprobar fácilmente que se cumplen las condiciones de continuidad en x_{i+1} . Gráficamente se tiene:



De un modo equivalente se construye el B-spline de grado 2:

$$B_i^2 = \begin{cases} \frac{x - x_i}{h_{i,1}} \frac{x - x_i}{h_{i,2}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{x - x_i}{h_{i,2}} \left[1 - \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,1}} \right] + \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,1}} \left[1 - \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,2}} \right], & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ \left[1 - \frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1,2}} \right] \left[1 - \frac{x - x_{i+2}}{h_{i+2,1}} \right], & x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

que gráficamente se representa así:



Así sucesivamente, se pueden ir construyendo todos los B-splines de grado superior, en general un spline de grado k estará definido sobre $k+1$ intervalos consecutivos.

Otra forma de expresar los B-splines es²⁸:

$$M_i^k(x) = \frac{k}{x_{i+k} - x_i} B_i^k(x).$$

Dependiendo de la especificación que se tome se pueden distinguir diferentes tipos de B-splines, por ejemplo cuando la secuencia de nodos x_i es del tipo $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ tenemos los *B-splines cardinales*, en cuyo caso la relación de recurrencia se simplifica:

$$C_i^k(x) = \frac{1}{k-1} [x_i C_i^{k-1}(x) + (k - x_i) C_i^{k-1}(x-1)].$$

Otro tipo de B-splines surgen de considerar esta secuencia de nodos: $(\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$. Para expresarlos se determina el número de veces que aparecen ambos nodos. Si se computan $+1$ ceros y $+1$ unos, tenemos:

$$B_{(m,n)}(x) = \binom{m+n}{m} (1-x)^m x^n \text{ para } 0 < x < 1$$

²⁸ De Boor (1993).

que también pueden calcularse de forma recurrente mediante la siguiente expresión:

$$B_{(m,n)}(x) = xB_{(m-1,n)}(x) + (1-x)B_{(m,1,n)}(x).$$

Para valores fijos de $m+n$ de la expresión anterior se obtienen las llamadas *bases de Bernstein* para polinomios de grado inferior o igual a esta suma. Esta forma de los polinomios de Bernstein también se conoce como *Polinomios de Bézier*.

Otros tipos de B-splines son los *B-splines trigonométricos* descritos por Schoenberg (1964) y los *B-splines de Chebyshev* formulados de modo independiente por Burchard (1968) y Karlin (1968).

Los B-splines gozan de características muy positivas: se calculan de forma recursiva a partir de los B-splines de orden inferior y mantienen sus propiedades independientemente del orden que tengan. A continuación se detallan las más importantes²⁹:

- Para $k \geq 1$ y $x \notin (x_i, x_{i+k+1})$, $B_i^k(x) = 0$; el spline se anula fuera del intervalo (x_i, x_{i+k+1}) .
- El valor máximo es 1 y el mínimo 0: $B_i^k(x) \in [0, 1] \forall x$.
- Para todo k , $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1$.
- Para $k \geq 1$, los $B_i^k(x)$ son de clase $k-1$.
- El conjunto de B-splines $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, \dots, B_{n-1}^k\}$, es linealmente independiente en $[a, b]$.

²⁹ Para un desarrollo más formal, véase Chen y Kincaid (1994, pp. 344 - 350).

Además, en opinión de Späth (1995), especialmente cuando los datos están equiespaciados, es mejor emplear B-splines que splines polinómicos de grado superior a tres. Por otro lado, son muy apropiados para la aproximación de funciones monótonas, característica que presenta nuestra función objeto de estudio.

Existen otras funciones splines como por ejemplo los splines racionales y los splines exponenciales que pueden, a priori, ser adecuados para aproximar la ETTI. Para Späth (1995) los splines racionales, especialmente diseñados, son más apropiados para reproducir la positividad, la monotonía y la convexidad que los splines polinómicos.

La función racional más sencilla definida en $[x_i, x_{i+1}]$ con cuatro parámetros es probablemente:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i[1 + d_i(x-x_i)]^{-1}.$$

A partir de esta expresión y teniendo en cuenta las condiciones de continuidad e interpolación, si fuese el caso, se puede obtener los valores de los coeficientes, aunque de un modo más complejo que en el caso de los splines polinómicos. Por otro lado, la relación no lineal entre los coeficientes añade más dificultad.

Al igual que en el caso de los B-splines existen diferentes variaciones: los splines racionales adaptativos surgen cuando se reemplaza, en ciertos intervalos o secuencias de éstos, el spline racional por polinomios cúbicos, este cambio es necesario cuando los datos requieren la existencia de puntos de inflexión que no se pueden reproducir con los segmentos racionales. Otro tipo de splines racionales más complejos son los llamados *spline cónicos*³⁰

³⁰ Véase en Johnson (1996) un desarrollo matemático detallado.

que se utilizan, básicamente, para representaciones gráficas de secciones cónicas y se pueden expresar en forma de splines racionales cuadráticos ponderados.

Otra clase de splines no lineales la forman los splines exponenciales. Estos splines se utilizaron en interpolación antes que los splines racionales y su objetivo es lograr una curva de interpolación visualmente agradable a través de la elección apropiada de ciertos parámetros de tensión que tienen el efecto de estirar la curva en los intervalos correspondientes. Al hacer uso de funciones exponenciales la carga computacional es mayor que la de los splines racionales cuya complejidad es ya bastante alta. Por este motivo los splines exponenciales no suelen considerarse una alternativa competitiva³¹.

2.4 CONSIDERACIONES FINALES

En cualquier caso, en la aproximación de funciones existen una serie de aspectos importantes a tener en cuenta. En primer lugar, hay que plantearse qué tipo de función puede ser, a priori, más adecuada, existen en este sentido dos aspectos fundamentales a considerar: la elección de la forma y la elección de la norma.

En cuanto a la norma es muy importante que se elija teniendo en cuenta, principalmente, para qué se va a emplear la función de aproximación, $f^*(x)$, y la carga computacional que la elección conlleva. Por ejemplo, la norma máxima del error en un intervalo $[a,b]$ no es relevante si pretendemos utilizar $f^*(x)$ para obtener estimaciones de $f(x)$ fuera de ese intervalo. Por tanto, es muy importante que la norma tenga en cuenta el valor de la función en el conjunto de puntos que se considere representativo del uso que se va a realizar de $f^*(x)$. Si esto se cumple, la elección entre

³¹ Véase Späth [(1995), Capítulo 7].

diferentes normas (euclídea, máxima, ...) o entre diferentes funciones peso es menos relevante.

La elección de la forma es un poco más intuitiva. En algunas ocasiones se pueden tener razones para creer que una determinada especificación es mejor pero en otras no existe a priori ningún indicio de peso. En otros casos, tan solo se desea obtener una forma funcional con la que sea fácil trabajar, entonces lo más natural es tratar de emplear un polinomio. Sin embargo, el uso de polinomios no siempre es posible, al menos en todo el intervalo. Muchas funciones o series de datos se aproximan de forma más apropiada “a trozos” utilizando funciones sencillas diferentes en los distintos subintervalos. En cuanto a los splines cabe destacar que únicamente se pueden considerar como posibles competidoras de los mismos aquellas funciones cuya primera derivada en los nodos de los extremos coincide en valor con las del spline.

Otro aspecto a tener en cuenta es que, en ocasiones, emplear transformaciones de la variable: $f(\log(x))$ o $\log(f(x))$ es más apropiado que utilizar la función original; cambios de variables apropiados pueden simplificar el trabajo enormemente. También hay que considerar para qué se va a emplear la aproximación. Para el cálculo de valores de una función las funciones racionales son, por regla general, más precisas y casi tan fáciles de manejar que un polinomio con el mismo número de parámetros; sin embargo, para el cálculo de integrales son menos convenientes. El problema de las funciones racionales es que sus parámetros son no lineales, aunque cuando se emplea la interpolación se pueden formular como un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas. Si se desea aproximar la función y su derivada son de utilidad las funciones splines.

Un aspecto de gran importancia cuando se emplean polinomios es la elección de su grado (n) y la localización de los puntos de soporte (x). Si el grado del polinomio es elevado puede reaccionar fuertemente a perturbaciones en las observaciones, cuando se toman $m+1$ valores equidistantes el polinomio no puede ser mucho mayor que $2\sqrt{m}$. A modo de ejemplo, cuando se toman datos equidistantes y polinomios de grado elevado se logra una buena aproximación cerca del centro del intervalo pero el ajuste empeora considerablemente en los extremos. Teóricamente este comportamiento se explica a través del llamado *fenómeno de Runge*³². Si se toman, sin embargo, las observaciones en las *abscisas de Chebyshev* la aproximación es mucho mejor tanto en el centro como en los extremos del intervalo y no existe riesgo en tomar $n=m$. Como norma general si se toma $n < 2\sqrt{m}$ (siendo n el grado del polinomio y m el número de observaciones) un polinomio ajusta bastante bien. Por lo tanto es importante determinar adecuadamente el grado de la función y los puntos de soporte (y nodos en el caso de splines).

Otro factor a tener en cuenta es qué funciones $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ se van a combinar para formar f^* ; algunas especificaciones derivan en sistemas de ecuaciones mal condicionados debido a la existencia de fuertes dependencias lineales entre las funciones de la combinación. Matemáticamente, emplear $f^*(x) = \sum_{j=0}^n b_j \left(\frac{9+x}{10}\right)^j$ o emplear $f^*(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x)$ es equivalente pero en el primer caso existe una dependencia lineal en los coeficientes.

³² Véase, por ejemplo, la figura 3.6 en Atkinson (1989, p. 159).

CAPÍTULO 3:
MODELOS DE ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA
TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

La modelización de la ETTI ha despertado un gran interés en el campo de la investigación financiera como se refleja en la gran cantidad de trabajos dedicados a este fin y la variedad de métodos empleados. Aunque en la actualidad, el foco de atención se dirige cada vez más al estudio del comportamiento dinámico de la curva, la estimación día a día de la misma sigue siendo un tema de gran importancia. Así, en este capítulo se expondrán las diferentes propuestas que se han desarrollado para la modelización de la curva de tipos cupón-cero.

3.1 INTRODUCCIÓN

La calidad de la aproximación y la metodología empleada, tanto desde el punto de vista matemático como econométrico, son los dos factores que permiten diferenciar los diversos trabajos propuestos. En este sentido, se podría establecer una clasificación de los trabajos propuestos en función de su elemento de estudio, de la metodología matemática empleada e incluso del entorno econométrico utilizado.

En el primer caso los trabajos se distinguen por proponer formas específicas sobre cualquiera de los cuatro elementos equivalentes por medio de los cuales se puede definir la estructura temporal: tipos *spot* o al contado, tipos *forward* o implícitos, factores de descuento y curva a la par. En relación al método empleado podemos diferenciar aquellas propuestas que aplican la teoría de aproximación de funciones y las que no lo hacen. Y en cuanto al marco econométrico podemos distinguir, básicamente, entre modelos lineales y no lineales.

Una clasificación que parece más clara y que es acorde, prácticamente, con el orden cronológico seguido en la aparición de los trabajos es la que agrupa los mismos de forma conjunta en función de la complejidad (matemático-econométrica) de éstos. De este modo,

podemos clasificar los diferentes trabajos propuestos en tres grandes grupos, según la metodología empleada:

- Modelos de rendimientos. Que centran su estudio en la curva de rendimientos, esto es, en la tasa interna de rentabilidad (TIR).
- Modelos de precios. Cuyo fin es derivar los tipos spot a partir del precio en el mercado de los títulos de renta fija.

Esta clasificación, no sólo indica el grado de elaboración matemático-económico del problema sino también la precisión de las propuestas. De este modo, los modelos recursivos son más sencillos pero su precisión o grado de ajuste es muy bajo, por lo que sólo se recomiendan para obtener una primera aproximación de la forma y niveles de la curva a título informativo. En el otro extremo, los modelos de precios son más complejos de aplicar pero ofrecen mejores estimaciones.

Hay que señalar que esta clasificación no está formada por compartimentos estancos ya que los modelos de rendimiento puede modificarse de manera sencilla para construir un modelo de precios; como única dificultad se tiene que el modelo resultante no es lineal.

Se considera que el primero en ofrecer estimaciones de la curva de tipos fue Durand (1942)³³ que elaboró la curva de tipos desde 1900 hasta 1942 a partir de los rendimientos de los bonos de empresas de alta calidad³⁴. El método empleado era poco riguroso, consistiendo en dibujar una curva bajo la nube de puntos de datos de un modo que fuese subjetivamente razonable; otros

³³ Cfr. Fisher-Weil (1971) y otros.

³⁴ Con clasificación A, Aa y Aaa (Moody's). Las calificaciones equivalentes de otras agencias y su descripción pueden encontrarse en Brown y Reilly (1997, p.499).

aspectos negativos a tener en cuenta es la utilización de títulos no homogéneos y la imposibilidad de evaluar estadísticamente la curva propuesta.

Por otro lado, Malkiel (1966) y McCulloch (1971) entre otros advierten, aunque ya el propio Durand (1958) lo reconoce, que la curva estimada por éste lleva implícita un sesgo derivado de la utilización de títulos de empresas no totalmente libres de riesgo. Esto hace que las curvas propuestas por Durand de forma sistemática queden por encima de las curvas derivadas por el Tesoro de los Estados Unidos, recogiendo de ese modo una prima de riesgo.

A este respecto, cabe señalar que el procedimiento que lleva a cabo esta institución es similar, aunque éstos emplean títulos del Tesoro y localizan la curva en medio del conjunto de datos. Los inconvenientes de esta metodología son los mismos que en Durand salvo en el sesgo por prima de riesgo. En ambos casos, las curvas no son apropiadas para derivar tipos forwards.

Posteriormente surgieron métodos más sofisticados que iban haciendo uso de los avances matemático-económicos. De este modo un siguiente paso fue tratar de modelizar la TIR como función del vencimiento, principalmente, y de otros factores, equiparando la curva resultante a la curva de tipos cupón-cero. Más adelante se consigue un avance importante, se afronta directamente el problema y se tratan de extraer de los precios de los títulos los tipos al contado que implícitamente se han utilizado para establecer tal precio.

3.2 MODELOS NO ECONÓMICOS

Estos modelos son extremadamente sencillos en la medida que no se emplea ninguna técnica econométrica ni función de

aproximación pero como contrapartida los resultados se obtienen de forma discreta. Como se obtienen sólo valores para vencimientos concretos, para conocer el valor del tipo spot para otro vencimiento es necesario interpolar entre los dos valores más cercanos. En relación a la interpolación, según Analistas Financieros Internacionales (1995A) no existe gran diferencia de resultados entre realizar una interpolación lineal o realizar una interpolación exponencial, aunque cuando se trata de factores de descuento esta última parece más acorde ya que la función de descuento se asemeja más a una función exponencial que a una lineal. Otra opción es emplear las técnicas matemáticas de interpolación y obtener la función de interpolación que pasa por todos los puntos obtenidos, de este modo se logra una forma funcional continua en el tiempo que puede emplearse en otros estudios.

Los modelos no econométricos se basan en la aplicación de un procedimiento iterativo que va extrayendo los valores de los tipos de interés para diferentes vencimientos comenzando por el más próximo. Estos modelos se aplican bien directamente sobre las cotizaciones de títulos de renta fija o bien sobre algunos de los instrumentos derivados que se negocian en el mercado (FRA's, swaps o futuros).

El procedimiento básicamente consiste en calcular el valor de los factores de descuento o de los tipos cupón-cero a partir de los precios de determinado instrumento financiero. Para ello se parte del título con vencimiento más cercano y se calculan los factores del siguiente a partir de la ecuación de valoración del mismo, sustituyendo el factor del primer pago por el valor calculado anteriormente quedando el factor del segundo pago como única incógnita. Para que esto sea posible, como veremos en el próximo apartado, es necesario que los títulos empleados cumplan determinadas condiciones.

3.2.1 Títulos de renta fija

Cuando nos enfrentamos al problema de extraer los tipos cupón-cero a partir de las cotizaciones observadas en el mercado empleando una metodología no econométrica, la idea más natural es actuar directamente sobre los títulos de renta fija. En la medida de que cada título puede ser equiparado a una cartera compuesta por títulos cupón-cero cuyas fechas de vencimiento coinciden con las fechas de pago de cupón de los mismos, se puede recurrir a un método secuencial que partiendo del título de menor vencimiento vaya calculando los diferentes tipos spot. La única condición que debe cumplirse es que el valor de mercado del título original tiene que coincidir con la suma de los valores actuales de cada uno de los activos cupón-cero en los que se descompuso. A esta técnica de descomposición y cálculo iterativo se le denomina *bootstrapping*³⁵ y se considera que fueron Bliss y Fama (1987) los primeros en aplicar este método para la extracción de tipos forward. Para Zangari (1997) el *bootstrapping* es probablemente la técnica más usada empíricamente para estimar los tipos spot a partir de un conjunto de bonos.

Para que el cálculo sea posible es necesario que la muestra empleada cumpla una serie de condiciones que garanticen que el sistema de ecuaciones formado por el conjunto de títulos no sea singular, esto es, que exista una solución. En general se requiere que los títulos que forman la muestra se escojan de modo que el número de factores de descuento a calcular no sea superior al número de títulos disponibles. Esto no basta, además en la construcción de la muestra debe observarse que:

- Uno de los títulos tenga un sólo pago pendiente. Esto es necesario para poder extraer el

³⁵ Fabozzi [(1996), p.91].

primer factor de descuento sobre el que comenzar la iteración. En un sentido estricto esta condición no tiene porque cumplirse siempre y cuando se cumpla una condición equivalente que garantice el conocimiento inicial de uno o más factores de descuento sobre los que iterar. En caso de que no sea posible cumplir esta condición, la muestra debe contener dos títulos con dos pagos pendientes (que venzan en la misma fecha), para poder extraer los dos primeros factores iniciales.

- En cada una de las fechas de pago debe vencer algún título. Si esto no sucede no se puede continuar el proceso de iteración, salvo que se tengan tantos títulos de igual vencimiento (alejado del vencimiento donde se produce esta carencia en ese mismo número de periodos) como número de periodos consecutivos en los que ocurre este hecho.

- Todos deben pagar cupón en las mismas fechas. Esta condición debe cumplirse estrictamente ya que de otro modo no es posible emplear los factores calculados en los pasos anteriores para continuar el proceso.

De forma general, se deben tener n títulos con n vencimientos, que forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_{11}d_1 \\ P_2 &= Q_{12}d_1 + Q_{22}d_2 \\ &\vdots \\ P_n &= Q_{1n}d_1 + Q_{2n}d_2 + \dots + Q_{nn}d_n \end{aligned}$$

donde P_i indica el precio del título i , Q_{ji} el pago realizado por el título i en el momento j , d_j indica el factor de descuento calculado en ese paso y d_j los factores ya conocidos de los pasos anteriores. Lógicamente, si las condiciones se cumplen el proceso iterativo no lo es en sentido estricto ya que se puede resolver el sistema de ecuaciones para obtener los valores de los diferentes factores de descuento.

Esta técnica es la base del modelo propuesto por Carleton y Cooper (1976), quienes únicamente aportan la inclusión de un término de error que supone, por tanto, la utilización de métodos econométricos.

Este método no es aplicable en España, ya que no existen suficientes títulos negociados que permitan construir una muestra con las características necesarias³⁶. Sin embargo, se han planteado diversas soluciones para poder aplicar el método recursivo sobre títulos de renta fija sin necesidad de que se cumplan las condiciones anteriores³⁷. La primera intención puede ser interpolar, sin embargo, esto sólo puede hacerse en el corto plazo ya que a medio y largo plazo no existen bonos cupón-cero que nos permita equiparar la TIR con el tipo spot. Por tanto, se propone como solución desplazar el sistema de coordenadas original de tal modo que se trabaje siempre con referencias (*vértices*) definidas en años enteros. Esto puede hacerse de dos maneras, desplazando el vencimiento del bono de forma que los flujos coincidan con los años exactos o descomponiendo cada uno de los flujos generados por el título en dos que se percibirían de forma hipotética en los vértices exactos anterior y posterior al vencimiento original; este

³⁶ Véase Capítulo 1, p.16.

³⁷ Un estudio detallado con ejemplos clarificadores se puede obtener en Lamothe y Soler (1996), pp.115-120.

último procedimiento se conoce como *mapping* o mapeado de flujos.

Para llevar a cabo el *mapping* correctamente debe cumplirse que el valor actual del flujo original coincida con la suma de valores actuales de su descomposición (calculados empleando la TIR) y que el resultado sea equivalente a emplear tipos cupón-cero. De este modo, para cualquier flujo se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas que definen de forma unívoca la descomposición del mismo. La estructura temporal para los vértices de años exactos se obtiene empleando *bootstrapping*.

La utilización del *mapping* es costosa en tiempo de cálculo por lo que se suele emplear otra alternativa más sencilla que consiste en la utilización de bonos teóricos a la par. Estos bonos se construyen estableciendo que sus cupones coincidan con las TIR's de los bonos observados para el mismo vencimiento. De esta forma se calculan, interpolando linealmente, las TIR's correspondientes a vencimientos en años exactos. Y a partir de éstas se calculan los tipos cupón-cero, también referentes a vencimientos exactos, tales que descontadas las primeras a estos tipos el precio del bono sea su nominal (100%).

Otro procedimiento relacionado con los títulos de renta fija es el llamado método de las TIR's que consiste, simplemente, en tomar directamente como tipo cupón-cero para el periodo t la TIR de un bono con t años de vida, interpolando para aquellos plazos en los que no se disponga de vencimientos. Los resultados de este método están sesgados por el efecto del cupón; este sesgo aumenta a medida que lo hace la cuantía del cupón y el plazo al que hace referencia el tipo cupón-cero.

3.2.2 FRA's

Los FRA's (Forward Rate Agreements) son contratos a plazo de tipos de interés y surgen del acuerdo entre dos partes que mantienen posiciones en el mercado cuya reacción es contraria ante la evolución de los mismos, siendo el objetivo de ambas neutralizar el impacto de los movimientos desfavorables de éstos intercambiando sus repercusiones.

En esta clase de contratos se acuerda el tipo de interés a un plazo determinado que se va a pagar a partir de una fecha futura preestablecida. En este sentido, la cotización de FRA's a diferentes plazos nos proporciona los tipos forward que se están negociando y por tanto de ellos se pueden derivar los tipos spots correspondientes.

Si $F_{t,t+m}$ representa la cotización de un FRA con fecha de inicio t y vencimiento en $t+m$, se tiene que conociendo el factor de descuento d_t se puede obtener d_{t+m} a partir de la siguiente expresión:

$$F_{t,t+m} = \frac{1}{a_{t,t+m}} \left[\frac{d_t}{d_{t+m}} - 1 \right] \Rightarrow d_{t+m} = \frac{d_t}{1 + a_{t,t+m} F_{t,t+m}}$$

siendo $a_{t,t+m}$ la fracción de año que corresponde al periodo que va desde t hasta $t+m$. De este modo conociendo diversas cotizaciones de FRA's se pueden obtener factores de descuento a diferentes vencimientos. Para conocer el primer factor con el que comenzar la iteración se puede recurrir, por ejemplo, al mercado monetario; se tomará el tipo del depósito cuyo plazo coincida con t .

El principal inconveniente para llevar a cabo este método en el mercado español es que tanto los plazos usuales de contratación como los de vigencia no superan el año; por tanto, sólo se podrán realizar estimaciones del tramo a corto de la curva. Para solucionar

este hecho, podemos recurrir a otro instrumento financiero: los swaps, que con ciertos matices pueden considerarse como operaciones reiteradas de contratos FRA's.

3.2.3 Swaps

Los swaps de tipos de interés o IRS (Interest Rate Swaps) son contratos de permuta financiera de intereses en el que las partes acuerdan el intercambio de dos flujos de pagos por intereses sobre un mismo nominal a lo largo de un periodo de tiempo determinado. Básicamente, en función de las características de los flujos intercambiados, destacan los *Coupon Swaps* (tipo fijo contra variable) y los *Basis Swaps* (tipo variable contra variable). Para nuestro estudio son los primeros los que nos interesan.

La rama fija del swap es equiparable a la compra de un título a la par emitido el día en que se negocia el contrato, con una vida igual al plazo de éste y con TIR y cupón equivalentes al tipo fijo negociado.

Al igual que en el caso anterior si disponemos de cotizaciones de swaps para diferentes plazos de forma recursiva podemos ir conociendo los tipos spot correspondientes a los mismos. La extracción de los factores de descuento se realiza a partir de la definición de swap que lleva implícita que el valor actual neto (VAN) de cada una de las ramas vale cero. Para el caso de un swap a T_i años con nominal N_i e interés fijo c_i :

$$VAN(\text{Swap}_i) = -N_i + c_i N_i a_{0,1} d_1 + c_i N_i a_{0,2} d_2 + \dots + c_i N_i a_{0,T_i} d_{T_i} = 0$$

De este modo, tomando diferentes títulos, $i=1, \dots, n$, se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$N_i = (1 + c_i) N_i a_{0,1} d_1$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= c_2 N_2 a_{0,1} [d_1] + (1 + c_2) N_2 a_{0,2} d_2 \\
&\vdots \\
N_n &= c_n N_n a_{0,1} [d_1] + c_n N_n a_{0,2} [d_2] + \dots + (1 + c_n) N_n a_{0,n} d_n
\end{aligned}$$

El principal inconveniente es que en la realidad no se negocian swaps a todos los plazos. En general, no existen cotizaciones para vencimientos a 6, 8 y 9 años, por lo que es necesario una interpolación previa, entre las cotizaciones de los vencimientos más próximos.

3.2.4 Futuros

De forma similar a los casos anteriores también se puede utilizar la información recogida en las cotizaciones de los futuros sobre tipos de interés para derivar los tipos spots implícitos en los mismos.

Si se conoce el precio de un contrato de futuros con vencimiento en t , P_i , y d_t es el factor de descuento asociado a esa fecha tenemos que:

$$100 - P_i = \frac{1}{a_{t,t+1}} \left[\frac{d_t}{d_{t+1}} - 1 \right] \Rightarrow d_{t+1} = \frac{d_t}{1 + a_{t,t+1} (100 - P_i)}$$

por lo que puede conocerse el factor asociado al vencimiento $t+1$ del siguiente contrato de futuros. Si se dispone de un número suficiente de contratos se pueden obtener factores de descuento para diferentes plazos. Al igual que en el caso de los FRA's para obtener el primer factor con el que comenzar la iteración se puede recurrir al mercado monetario.

3.3 MODELOS DE RENDIMIENTO

Una metodología sencilla consiste en asimilar la curva de tipos con la de rendimientos. Los modelos presentados a continuación utilizan la tasa interna de rentabilidad (TIR) de los títulos como medida de los tipos de interés al contado (tipos spot) del mercado. Estos modelos de estimación no se pueden considerar modelos de extracción de tipos cupón-cero, ya que simplemente le dan a la curva de rendimientos (curva formada por los diferentes valores de la TIR para los distintos vencimientos) una forma funcional determinada y consideran la función encontrada como una aproximación de la curva de tipos spot.

De un modo más exacto, estos modelos, implícitamente, tratan de estimar la curva de rendimientos a la par. Para que la estimación sea razonable el modelo debe definir de forma explícita la curva estimada como la curva de rendimientos a la par, tal y como hace Mastronikola (1991). En caso contrario la adecuación del mismo dependerá de las condiciones del mercado. Esto es, si los bonos se negocian en el mercado de tal modo que la TIR promedio en cada vencimiento es similar al rendimiento a la par para ese plazo, la hipótesis de estos modelos es razonable; en caso contrario cuanto menos se cumpla esta condición peor será la aproximación.

La única ventaja que se observa en esta técnica es su simplicidad, ya que las TIR's se calculan fácilmente. Como contrapartida tenemos que, si bien la TIR puede ser una buena medida de la rentabilidad de un título, no es un buen indicador de los tipos de interés. La relación que existe entre los tipos spot y la TIR es compleja e indirecta, siendo esta última una especie de promedio de todos los tipos al contado que corresponden a cada una de las fechas en las que el título genera flujos, por ello la identidad $TIR = \text{tipo spot}$ sólo es válida en los bonos cupón cero.

La utilización de la TIR como sustituta o como proxy de los tipos spot conlleva una serie de errores de sobra conocidos. Por un lado, no existe una relación clara y directa, salvo en el caso de títulos cupón cero, entre la TIR y el tipo spot correspondiente. La curva de rendimientos será tanto más parecida a la ETTI a medida que ésta sea más plana; sin embargo, la observación del mercado nos indica que existen diferencias significativas entre los tipos a corto y a largo.

Por otro, la TIR se deriva aritméticamente de un sólo título, mientras que los tipos spot se derivan de un conjunto de títulos porque hacen referencia al mercado. Esto es, la estructura temporal de tipos de interés asigna a cada vencimiento un factor de descuento, sin embargo las TIR's establecen una relación entre la tasa de rentabilidad y un activo determinado que en la mayoría de los casos no caracteriza el vencimiento del mismo.

Por último, el significado económico de la TIR es discutible³⁸; si bien es verdad que asociada a cada título existe una TIR, esta tasa no tiene porqué ser la tasa requerida por el mercado para cualquier otro título del mismo vencimiento ya que en su cálculo entra en juego otro factor: el cupón. En un mercado desarrollado pueden existir varias referencias con el mismo vencimiento y diferentes TIR's, sin que esto implique la existencia de diferentes valores de la estructura temporal para ese vencimiento.

En general, el proceso de promediar, por un lado, a lo largo del tiempo (cálculo de la TIR individual de cada título) y por otro lado, entre TIR's de igual vencimiento (media de todas las TIR's

³⁸ Caks (1977) es más rotundo y afirma que el concepto de TIR carece de significado económico.

individuales de igual vencimiento), destruye información y sesga los resultados.

Estos modelos presentan un problema común, el llamado *sesgo del cupón*³⁹, causado porque la TIR es función del tiempo hasta el vencimiento y los cupones devengados; de tal modo que las TIR's de títulos totalmente homogéneos en sus características (vencimiento, liquidez, fiscalidad, ...) salvo en su cupón, son diferentes.

Independientemente de esta relación puramente matemática, Echols y Elliott (1976) indican que una de las razones que explica el impacto del cupón sobre la TIR es el efecto impositivo. Para la mayoría de los inversores las ganancias de capital están gravadas a tipos impositivos más bajos que los ingresos por pago de cupones, produciéndose una preferencia neta por los títulos que ofrecen cupones menores. Esta preferencia neta conduce a un diferencial de rendimientos, de modo que los títulos que devengan cupones más altos suelen tener rendimientos más altos.

Como consecuencia de todo esto si se compara la curva de rendimientos con la curva de tipos cupón-cero se observa que existe una diferencia (sesgo) entre ambas debida al efecto del cupón. Así, la curva de rendimientos subestima cuando es creciente y sobrestima cuando es decreciente la verdadera estructura temporal, aumentando el sesgo con el vencimiento. Además cuanto mayor sea el cupón, mayor será el sesgo que depende de forma no lineal del importe del cupón y el periodo de vida del título. Por tanto, la curva de rendimientos será tanto más parecida a la estructura temporal cuanto más próximos a cero estén los cupones de los títulos empleados, porque más parecido tendrán con los títulos emitidos al descuento.

³⁹ Bierwag [(1991), p.275] desarrolla el signo de este sesgo.

Otro problema muy grave que presenta esta metodología se deriva de la propia especificación de la TIR, que incumple una condición fundamental como es que los pagos devengados en la misma fecha se descuenten a la misma tasa. Esto se ve muy fácil si tomamos dos bonos *A* y *B* con uno y dos periodos de vida respectivamente. La TIR de cada uno viene determinada por las siguientes expresiones:

$$P_A = Q_{1A}(1 + TIR_A)^{-1} \quad \text{y} \quad P_B = Q_{1B}(1 + TIR_B)^{-1} + Q_{2B}(1 + TIR_B)^{-2}.$$

Se tiene que TIR_A es representativa del tipo cupón-cero para el primer vencimiento ya que el título *A* es cupón-cero; sin embargo, en el caso del título *B*, el primer pago debería descontarse a TIR_A y se hace a TIR_B , por lo que se incumple una propiedad básica en la determinación de la curva de tipos. Si efectivamente, el primer pago del título *B* se descontase a TIR_A entonces el segundo pago, para que se cumpla la igualdad debe descontarse a un tipo diferente a TIR_B que sería el verdadero tipo cupón-cero para dos periodos⁴⁰, por lo que se demuestra que TIR_B no es representativa de éste y su diferencia será más acusada, como ya se ha dicho, a medida que más pendiente presente la curva de tipos.

Aunque en principio estos modelos están ideados para la estimación de la ETTI a través de la modelización de la curva de rendimientos, sus ecuaciones de regresión pueden incorporarse en la metodología de la estimación directa de la estructura temporal. Esto es, suponer que los tipos spot se modelizan a través de estas ecuaciones y estimar los valores de los parámetros tomando como variable endógena no la TIR sino el precio del título.

⁴⁰ Salvo que la curva de tipos sea plana.

El principal inconveniente que presenta esta alternativa es que se pierde la linealidad del modelo siendo necesaria su estimación por métodos de regresión no lineales. Esta perspectiva es la seguida por Carleton, Chambers y Waldman (1984) cuyo modelo se presentará posteriormente.

En los apartados siguientes se presentan de forma detallada los diferentes modelos propuestos, comentando los resultados obtenidos por los mismos en los estudios donde se han aplicado.

3.3.1 Cohen, Kramer y Waugh (1966)

Estos autores⁴¹ son los primeros que sugieren la utilización de técnicas econométricas de regresión para obtener la forma funcional de la curva de rendimientos a partir de las TIR's observadas en el mercado.

Realizan regresiones sobre diferentes ecuaciones tomando la TIR o su logaritmo como función del vencimiento, del cuadrado de éste o de su logaritmo. En base a análisis empíricos concluyen que la ecuación que en un mayor número de ocasiones se ajusta mejor a los datos es:

$$TIR_i = b_0 + b_1 T_i + b_2 [\ln(T_i)]^2 + e_i,$$

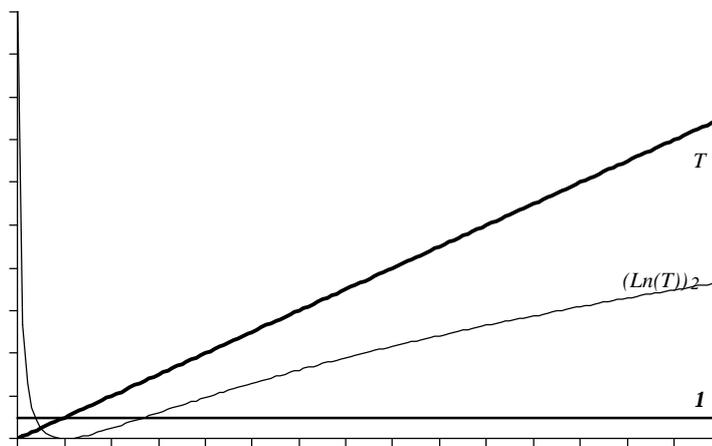
siendo T_i el tiempo hasta el vencimiento del título i .

La representación gráfica de las variables explicativas (*Gráfico 3.1*) nos ayuda a analizar el comportamiento de esta especificación. Se observa que el signo de b_1 , parámetro relacionado con el tiempo hasta el vencimiento (T_i), está estrechamente relacionado a la forma que adopta la curva de tipos. De modo que, si la curva de tipos es decreciente (creciente)

⁴¹ Cfr. Bierwag (1991, p. 267).

tenderá a tener signo negativo (positivo). De esta forma, el coeficiente b_1 es el factor de crecimiento o decrecimiento de los tipos de interés con respecto al tiempo. En función de la magnitud de variación que suele existir entre tipos de diferente vencimiento se espera que su valor esté próximo a cero y no supere la unidad.

Gráfico 3.1: Variables del modelo de Cohen, Kramer y Waugh



La inclusión de la segunda variable exógena da la posibilidad al modelo de recoger dos aspectos que, generalmente, se observan en la curva de rendimientos: la mayor variación que presentan los tipos a corto, entendida como una mayor pendiente de la curva en este tramo, y la tendencia de la misma a converger asintóticamente en su tramo final. Por tanto, el coeficiente b_2 es un factor de corrección de los tipos a muy corto plazo (inferiores a un año); que hace posible que la curva de rendimientos resultante se acomode a las diferentes formas que adopta en la realidad. Hay que tener en cuenta que la función que acompaña a este parámetro tiende a ∞ a medida que nos acercamos a cero, por tanto pueden surgir problemas de estimación en el muy corto plazo (tipo instantáneo).

Resulta muy difícil debido a la utilización de $[\ln(T_i)]^2$ como variable exógena establecer cuáles van a ser los signos esperados de los parámetros, porque en la construcción de la curva estimada también entra en juego la magnitud de los mismos. De este modo, parámetros que inicialmente derivan en una curva creciente pueden dar lugar a otra con forma convexa, si la magnitud de uno de éstos varía un poco.

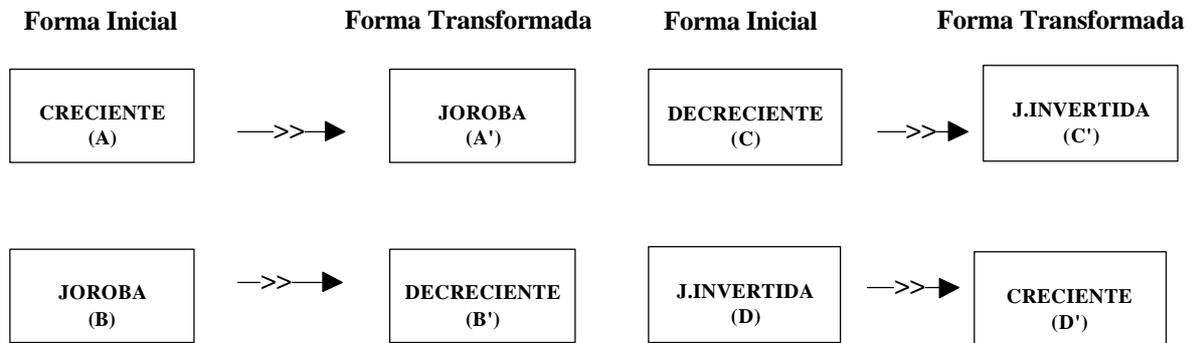
Un estudio detallado de signos, valores y relaciones entre ellos determinan el conjunto de resultados que se cumplen invariablemente (Tabla 3.1):

Tabla 3.1: Formas de la curva en función de los signos y relaciones entre los parámetros

Forma de la curva	Estado
Creciente	$b_1 > 0; b_2 < 0$ y $b_1 \gg b_2$
Joroba (cóncava)	$b_1 < 0; b_2 < 0$ y $b_2 \gg b_1$
Decreciente	$b_1 < 0; b_2 > 0$ y $b_1 \gg b_2$
Joroba Invertida (Convexa)	$b_1 > 0; b_2 > 0$ y $b_2 \gg b_1$

Existen otras combinaciones que producen este tipo de curvas pero su obtención depende de cuán grande sea el valor de un parámetro respecto al otro. El diagrama presentado en la Figura 3.1 recoge todos los movimientos que se producen.

Figura 3.1: Cambio en la forma de la curva cuando las diferencias entre los parámetros aumentan.



Cuando la diferencia entre los parámetros, mostrada en la Tabla 3.1, se amplía, la forma inicial se convierte en la transformada. A continuación, en la Tabla 3.2, se expresa un resumen de los estados anteriores.

Tabla 3.2: Valores y relaciones entre los parámetros

A	$b_1 > 0; b_2 < 0$ y $b_2 > b_1$	A'	$b_1 > 0; b_2 < 0$ y $b_2 >> b_1$
B	$b_1 < 0; b_2 < 0$ y $b_1 > b_2$	B'	$b_1 < 0; b_2 < 0$ y $b_1 >> b_2$
C	$b_1 < 0; b_2 > 0$ y $b_2 > b_1$	C'	$b_1 < 0; b_2 > 0$ y $b_2 >> b_1$
D	$b_1 > 0; b_2 > 0$ y $b_1 > b_2$	D'	$b_1 > 0; b_2 > 0$ y $b_1 >> b_2$

De este modo, con la inclusión de $[\ln(T)]^{\zeta}$ se consigue que el modelo sea capaz de representar cualquiera de las formas típicas de la curva de tipos.

Esta propuesta, al igual que el resto de modelos de curva de rendimientos que se analizan en este capítulo, ha sido testado empíricamente tomando datos del Mercado Español de Deuda Pública Anotada por Calatayud y Morini (1995) quienes observan que, en general, el modelo presenta una baja calidad de ajuste

global, es muy sensible a la existencia de observaciones anómalas y formas complejas de la curva.

3.3.2 Fisher (1966)

Fisher⁴² es el primero en introducir el sesgo del cupón, c_i , en la estimación de la curva de rendimientos, para ello propone el siguiente modelo:

$$TIR_i = b_0 + b_1 T_i + b_2 T_i^2 + b_3 T_i^3 + b_4 \ln(T_i) + b_5 c_i + b_6 c_i^2 + b_7 \ln(c_i) + e_i$$

que no contrasta globalmente sino a través del método *stepwise*; esto es, las variables se van introduciendo en el modelo una a una y en cada paso se eliminan de la regresión las que no alcanzan determinado nivel de significación preestablecido.

La finalidad perseguida al testar empíricamente este modelo es sustancialmente diferente a la que se persigue con los otros. El objetivo principal es determinar qué variable o combinación de éstas es más adecuada. Es decir, no se analiza la validez de un modelo dado sino que se busca qué ecuación de regresión caracteriza mejor la curva de rendimientos en cada caso.

A simple vista el modelo puede presentar dos inconvenientes. Por un lado, hay un riesgo elevado de presencia de multicolinealidad. Se pueden diferenciar claramente dos grupos de variables, las que están relacionadas con el plazo hasta el vencimiento y las que lo están con el cupón. Dentro de cada uno de estos grupos el grado de correlación puede ser muy fuerte. Y por otro, si en la regresión se incluyen finalmente la mayoría de las variables propuestas se deberán estimar más coeficientes reduciéndose los grados de libertad.

⁴² Cfr. Echols y Elliott (1976).

Aunque Fisher (1966) encuentra que en el Reino Unido el cupón es significativo en la mayoría de los casos, en el análisis empírico realizado por Calatayud y Morini (1995) con títulos españoles esta variable, tal y como se esperaba, no parece ser tan relevante debido a la composición de la muestra. La explicación es sencilla, si bien la TIR de un título está condicionada, fundamentalmente, por dos variables, el tiempo y la cuantía del cupón, en el estudio de la relación TIR - plazo es el tiempo la variable que más peso tiene, pasando el cupón a ocupar un segundo plano. El cupón sólo logra ser relevante cuando varios títulos coinciden en sus fechas de pago y amortización o éstas están muy próximas, por ser la única variable que explica la existencia de TIR's diferentes para un mismo vencimiento y en España no suele suceder que diferentes emisiones coincidan en sus vencimientos.

3.3.3 Bradley y Crane (1973)

De forma parecida a los anteriores, Bradley y Crane⁴³ proponen un modelo sencillo que se recoge en la siguiente ecuación de regresión:

$$\ln(1 + TIR_i) = b_0 + b_1 T_i + b_2 \ln(T_i) + e_i.$$

Así, no obtenemos directamente la curva de rendimientos pero su determinación es sencilla. Tomando exponenciales se obtiene:

$$TIR_i = T_i^{b_2} e^{(b_0 + b_1 T_i)} - 1.$$

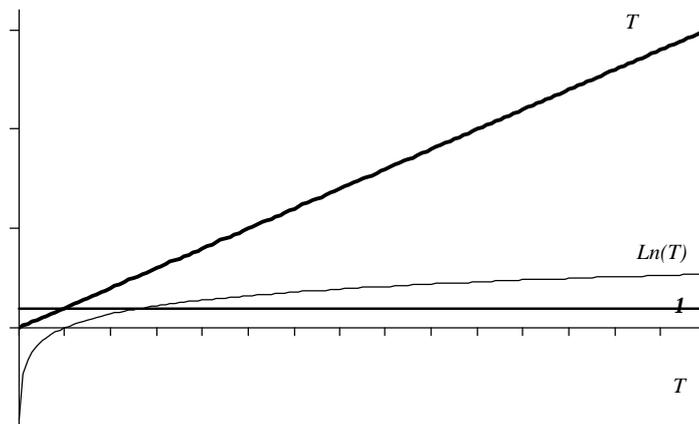
Al emplear como variable endógena una transformación de la TIR en vez de ésta directamente consiguen dos efectos interesantes. Por un lado, les permite estimar de modo lineal una especificación exponencial del comportamiento de la TIR y por otro, la utilización del logaritmo suaviza ligeramente los saltos que

⁴³ Cfr. Bierwag (1991, p.266).

presenta la curva facilitando su aproximación al disminuir el efecto de los mismos.

Sin embargo, este procedimiento presenta, fundamentalmente, dos inconvenientes: la significación económica de los parámetros estimados se anula; por ejemplo, b_1 es el logaritmo del factor de variación de la variable $(1+TIR)$ ante incrementos unitarios en el tiempo hasta el vencimiento (T), y si el ajuste logrado no es extremadamente bueno, al deshacer la transformación inicial para calcular la TIR estimada podemos obtener errores de estimación muy grandes. Esto se debe a que el error que en el modelo inicial tiene carácter aditivo pasa a tenerlo multiplicativo. Esto puede comprobarse fácilmente, si escribimos el modelo inicial de forma simplificada como: $\ln(1+TIR) = X + e$, obtendremos al deshacer la transformación una ecuación como: $TIR = (e^X e^e) - 1$. En la medida que e se aleje de 0, e^e se alejará de la unidad y el error en TIR aumentará.

Gráfico 3.2: Variables del modelo de Bradley y Crane



Como contrapartida, contamos con una ventaja derivada de la naturaleza de los datos: la forma de la curva resultante de la

transformación es similar a la curva de rendimientos observada; se diferencian sólo en el nivel y en la escala de los cambios. Esto simplifica el estudio de los signos de los parámetros. Como la TIR^{44} toma valores muy próximos a cero, $(1+TIR)$ toma valores muy próximos a la unidad; esto da lugar a que la utilización de $\ln(1+TIR)$ no afecte al estudio de los resultados porque su valor será aproximadamente equivalente al de la TIR^{45} correspondiente. Esto permite estudiar el comportamiento de la curva de rendimientos sin necesidad de realizar ningún tipo de transformación sino analizando directamente el comportamiento de $\ln(1+TIR)$.

En este sentido, se ofrece en el Gráfico 3.2 la representación de las variables explicativas empleadas a fin de facilitar el estudio de los signos de los parámetros y su incidencia en la forma de la curva de rendimientos.

De forma similar al modelo de Cohen *et al.* (1966), en este modelo tampoco resulta posible determinar la forma de la curva sólo en base a los signos de los parámetros y relaciones de desigualdad entre ellos. La magnitud de uno respecto al otro puede hacer variar la forma inicial de la misma. Sin embargo, existen resultados que se presentan de forma independiente de la magnitud de los parámetros e incluso de las relaciones entre ellos. Estos casos se presentan en la tabla siguiente:

Tabla 3.3: Magnitud de los parámetros y formas de la curva

Forma de la curva	Estado
Creciente	$b_1 > 0$ y $b_2 > 0$
Decreciente	$b_1 < 0$ y $b_2 < 0$

⁴⁴ En tanto por uno.

⁴⁵ Ambas expresiones y sus derivadas en $TIR=0$ coinciden.

Cuando los signos de los parámetros son opuestos sólo se puede afirmar qué forma tomará la curva en el caso que el valor de ambos coincida (forma inicial en Tabla 3.4). Cuando esto no ocurre la forma inicial de la curva pasará a presentar formas crecientes o decrecientes según cuál sea el parámetro que presenta mayor valor absoluto. Estos resultados se resumen en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Transformaciones sobre las formas iniciales observadas

Estado General	Forma Inicial	Estado Secundario	Forma Transformada
$b_1 > 0$ y $b_2 < 0$	Joroba invertida	$ b_1 \gg b_2 $	Creciente
		$ b_1 \ll b_2 $	Decreciente
$b_1 < 0$ y $b_2 > 0$	Joroba	$ b_1 \gg b_2 $	Decreciente
		$ b_1 \ll b_2 $	Creciente

De este modo, la inclusión de la segunda variable exógena permite a este modelo generar las formas más usuales de la curva de tipos.

En cuanto a los resultados observados en su aplicación empírica destaca su buena reacción ante la presencia de observaciones anómalas y formas complejas, debido a que la utilización del logaritmo suaviza ligeramente los saltos que presenta la curva facilitando por tanto su aproximación al disminuir el efecto de los mismos.

3.3.4 Echols y Elliott (1976)

Estos autores consideran esencial que el modelo no sólo ajuste los datos observados sino que sea consistente con la teoría

existente. En este sentido derivan su modelo a partir de una identidad básica en el estudio de la estructura temporal⁴⁶:

$$h(t) = [(1 + h(1))(1 + f(1,2)) \cdots (1 + f(t-1,t))]^{1/t}$$

Cuando se toman logaritmos queda:

$$\ln(1 + h(t)) = t^{-1} \ln(1 + h(1)) + t^{-1} \sum_{m=1}^{t-1} \ln(1 + f(m, m+1))$$

De este modo, para formular completamente el modelo sólo hay que establecer una expresión para la estructura de los tipos forward. Echols y Elliott (1976) proponen que en la ecuación anterior: $1 + f(m, m+1) = k_1 e^{mk_2}$. Por lo que se estima la curva de rendimiento a través de la siguiente ecuación de regresión lineal:

$$\ln(1 + TIR_i) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 T_i + \mathbf{b}_2 T_i^{-1} + \mathbf{e}_i \quad \mathbf{P} \quad TIR_i^{\textcircled{a}}$$

$$\exp[\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 T_i + \mathbf{b}_2 T_i^{-1}] - 1.$$

Este modelo que por la expresión empleada para caracterizar a los tipos forward denominan *exponencial* da lugar a una curva sesgada por el efecto del cupón. Echols y Elliott (1976) deciden modificarlo siguiendo el ejemplo de Fisher (1966), de modo que el impacto que tal sesgo produce sobre la curva de rendimientos sea evaluado estadísticamente. El, así denominado, *modelo exponencial modificado*, vendría dado por:

$$\ln(1 + TIR_i) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 T_i + \mathbf{b}_2 T_i^{-1} + \mathbf{b}_3 c_i + \mathbf{e}_i.$$

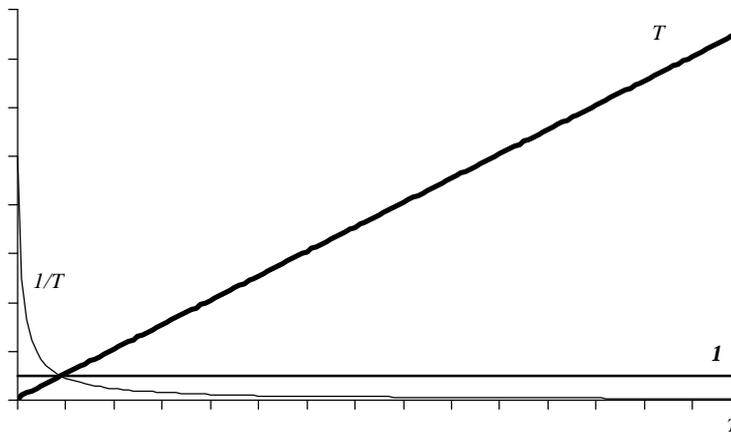
que supone aproximar la TIR a través de:

⁴⁶ Véase el Capítulo 1 p.12.

$$TIR_i \cong e^{(b_0 + b_1 T_i + b_2 T_i^{-1} + b_3 c_i)} - 1$$

Se modela la misma transformación de la TIR que en el caso anterior, así que todo lo dicho anteriormente para el modelo de Bradley y Crane (1973) en cuanto a ventajas e inconvenientes del empleo de $\ln(1 + TIR)$ y la relatividad de los resultados es aplicable a éste.

Gráfico 3.3: Variables del modelo de Echols y Elliott



El análisis de los signos de los parámetros y de las formas de las curvas de rendimientos obtenidas en este modelo se complica al entrar en juego una tercera variable exógena, el cupón. Sin embargo, un estudio detallado de los parámetros indica que el signo y magnitud del cupón no afecta a la forma de la curva sino a su pendiente. Por tanto en el análisis que desarrollamos a continuación, basado en el Gráfico 3.3 y que recogemos en la Tabla 3.5, para simplificar, no se tiene en cuenta esta variable.

Tabla 3.5: Transformaciones sobre las formas iniciales observadas

Estado General	Forma Inicial	Estado secundario	Forma Transformada
$b_1 > 0$ y $b_2 < 0$	Creciente		
$b_1 < 0$ y $b_2 > 0$	Decreciente		
$b_1 > 0$ y $b_2 > 0$	Joroba invertida	$ b_1 \gg b_2 $	Creciente
		$ b_1 \ll b_2 $	Decreciente
$b_1 < 0$ y $b_2 < 0$	Joroba	$ b_1 \gg b_2 $	Decreciente
		$ b_1 \ll b_2 $	Creciente

Por otro lado, se espera que el parámetro que acompaña al cupón, b_3 , sea positivo; no sólo porque la relación TIR-cupón es directa, sino por el efecto impositivo que éste recoge.

Echols y Elliott (1976) contrastan empíricamente ambos modelos con diferentes muestras y comparan los resultados obtenidos con el modelo de Cohen *et al.* (1966) modificándolo para que recoja también el efecto del cupón. Los resultados revelan que, para las muestras escogidas, el modelo exponencial de Echols y Elliott (1976) es mejor que el cuadrático de Cohen *et al.* (1966), y que en ambos casos cuando se tiene en cuenta el efecto del cupón el coeficiente de determinación de los modelos aumenta. En relación al mercado español, Calatayud y Morini (1995) destacan la gran capacidad del mismo para enfrentarse a las observaciones anómalas y formas complejas de la curva de rendimiento.

3.3.5 Analistas Financieros Internacionales (1993)

En nuestro país Analistas Financieros Internacionales (AFI) proponen, para la aproximación de la curva de rendimientos, un modelo que amplía el presentado por Cohen *et al.* (1966) para tener en cuenta el efecto que el cupón y la liquidez de los títulos

considerados tienen sobre su rendimiento. La ecuación de regresión utilizada es la siguiente:

$$TIR_i = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 T_i + \mathbf{b}_2 [\ln(T_i)]^2 + \mathbf{b}_3 c_i + \mathbf{b}_4 l_i + \mathbf{e}_i,$$

siendo l_i un indicador de liquidez que se mide por el volumen medio diario negociado en el mercado entre titulares de cuenta.

Previamente habían introducido en el modelo una variable que recogía el efecto fiscal, el diferencial entre TIR bruta y neta, pero al no obtener significación estadística suficiente deciden excluirla del modelo. Es de suponer, por lo comentado en apartados anteriores que parte del efecto fiscal quede recogido por el cupón.

A simple vista parece que el estudio de los signos y valores de los parámetros es más complejo debido al mayor número de variables a considerar; sin embargo, el análisis se simplifica cuando observamos que los parámetros relacionados con el cupón y la liquidez no afectan a la forma general de la curva sino a la magnitud de su pendiente. Esto hace que para el análisis sólo tengamos que tener en cuenta los parámetros relacionados con las variables temporales y por tanto las relaciones que se establecen son idénticas que para el caso del modelo de Cohen *et al.* (1966)⁴⁷. En cuanto a los signos, todas las variables ya han sido comentadas salvo la liquidez que mantiene una relación inversa con la rentabilidad del título por lo que se espera que \mathbf{b}_4 sea negativo.

AFI realiza este ajuste diariamente empleando los títulos a medio y largo plazo negociados en el Mercado Español de Deuda

⁴⁷ Véase, en este mismo capítulo, la Tabla 3.1 y Tabla 3.2 en la página 82.

Pública Anotada con el objeto de analizar si determinados títulos están sobre o infravalorados.

Por otro lado, Calatayud y Morini (1995) llegan a la conclusión que este modelo es junto al de Cohen *et al.* (1966) el más sensible a las observaciones anómalas y estructuras complejas de la TIR y destacan que la variable que recoge el efecto de la liquidez es relevante en escasas ocasiones y que el cupón tampoco parece ser una variable estructural.

3.3.6 Hunt (1995A)

Este autor propone una modelización alternativa de la curva de rendimientos que tiene en cuenta la sensibilidad del precio de los títulos a cambios en el tipo de interés para tratar de corregir el efecto distorsionador del sesgo del cupón cuando se toman TIR's de títulos no emitidos al descuento.

En concreto propone rectificar la relación TIR-plazo de modo que el efecto del cupón pueda ser corregido. Esto se puede hacer, bien ajustando el plazo para que refleje de una manera más precisa la longitud efectiva del título o bien ajustando los rendimientos para que representen de forma más precisa el rendimiento de un título cupón-cero a ese plazo⁴⁸. A la primera alternativa la denomina *método de la duración* y a la segunda *método del cupón-cero*, que se corresponde con los modelos de precios que se verán en el apartado siguiente.

Así, en el primer caso, se modeliza la TIR como función de la duración del título, mientras que en el segundo se deducen primero los tipos cupón-cero de los precios de los bonos con

⁴⁸ Véase la figura 1 en Hunt (1995A).

cupón y se modelizan éstos en función del plazo hasta el vencimiento.

El método de la duración se basa en que al ser ésta una medida del plazo medio de pago representa el tiempo de vida efectiva del título cupón cero subyacente en un bono que devenga cupones. En otras palabras, cuando se emplean bonos que devengan cupón, para que la curva de rendimientos resultante de éstos sea representativa de la curva de tipos cupón-cero, la medida representativa del tiempo no es el plazo hasta el vencimiento sino la duración de cada título.

Bajo esta perspectiva, Hsu y Chu (1993)⁴⁹ modelizan las TIR's de títulos del Gobierno de Estados Unidos como función de las duraciones de los mismos, a través de funciones de Laguerre⁵⁰ que son, básicamente, el producto de un polinomio y una exponencial. Hunt (1995A), en cambio, propone el siguiente modelo:

$$TIR_i = b_0 + b_1 D_i + b_2 D_i^2 + b_3 C_i + e_i$$

donde D_i es la duración del título i , y C_i es su convexidad.

En relación a los valores y signos de los parámetros se tiene que b_0 al representar al tipo a corto debe ser positivo. b_1 que indica la pendiente de la curva tomará valores en torno a cero, determinando si la curva de rendimientos es creciente ($b_1 > 0$) o decreciente ($b_1 < 0$). b_2 determina la velocidad de crecimiento o decrecimiento de la misma y b_3 al estar relacionado con la convexidad del título se espera sea negativo ya que se supone que

⁴⁹ Cfr. Hunt (1995A).

⁵⁰ Estas funciones ya habían sido empleadas por Lau (1983) [Cfr. Hunt (1995A)] y Nelson y Siegel (1987).

un inversor demandará menos rentabilidad a un título, *caeteris paribus*, cuanto mayor convexidad presente éste.

Los resultados empíricos realizados por Hunt (1995A) en el mercado australiano revelan que la convexidad no parece ser muy relevante, debido probablemente a que las diferencias en la convexidad de diferentes títulos no son lo bastante significativas como para que un inversor tenga en cuenta esta medida a la hora de elegir entre diferentes títulos.

3.4 MODELOS DE PRECIOS

Estos métodos son más sofisticados y hacen uso de la teoría matemática de aproximación de funciones. Estas propuestas tratan de estimar la curva de tipos cupón-cero de un modo que podemos calificar como directo en el sentido que no se modeliza en primer lugar la curva de rendimientos.

Debido a los grandes inconvenientes e imprecisiones que presenta la estimación de la ETTI a través de la TIR muchos autores han planteado una estimación directa de la primera a través de la observación en el mercado de los precios de los títulos libres de riesgo de insolvencia. El primero en realizar este tipo de estimación fue McCulloch (1971), al cual han seguido otros autores como Fong y Vasicek (1982), Carleton, Chambers y Waldman (1984) o Shea (1984).

Los modelos propuestos se diferencian entre sí, principalmente, en la especificación matemático-econométrica de los mismos, aunque la mayoría de los autores han realizado sus propuestas en torno a la modelización de la función de descuento a través de splines de uno u otro tipo, los menos como Carleton, Chambers y Waldman (1984) utilizan polinomios directamente sobre los tipos cupón-cero.

En los siguientes epígrafes se presentarán los supuestos básicos y la especificación teórica de cada uno de los modelos, según su orden cronológico de aparición, junto con las críticas formuladas y otras consideraciones de especial interés. Los comentarios sobre los análisis empíricos que se han realizado en torno a las diferentes especificaciones se incluirán en el siguiente capítulo, a fin de poder comparar la similitud de los resultados.

3.4.1 McCulloch (1971, 1975)

McCulloch, en 1971, es el primero en presentar una metodología para la estimación directa de la función de descuento a partir de los precios observados en el mercado de los títulos de renta fija de igual riesgo crediticio.

Lo que caracteriza a su modelo es la utilización de tipos de interés y pagos de cupón continuos⁵¹. Bajo estas hipótesis, la expresión de valor actual de un título i con nominal N_i , cupón c_i y tiempo hasta el vencimiento T_i queda como sigue:

$$P_i = N_i D(T_i) + c_i \int_{t=0}^{T_i} D(t) dt,$$

siendo $D(t)$ la función de descuento o función característica de los coeficientes de actualización, cuya aproximación desea realizar a través de la combinación lineal de m funciones, $g_j(t)$:

$$D(t) = 1 + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(t).$$

⁵¹ Esta especificación es muy útil conceptualmente ya que evita tener en cuenta la existencia del cupón corrido.

De forma general, sustituyendo esta especificación en la ecuación del precio y añadiendo un término de error, obtenemos la siguiente ecuación de regresión:

$$y_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j x_{ij} + \mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n \quad ,$$

siendo: $y_i = P_i - N_i - c_i T_i$

$$x_{ij} = N_i g_j(T_i) + c_i \int_{t=0}^{T_i} g_j(t) dt$$

McCulloch (1971), debido a las características del mercado estadounidense en el que basa su trabajo, considera que el término de error, \mathbf{e}_i , es independiente con distribución $N(0, \mathbf{sv}_i)$; es decir, incluye una corrección a la heteroscedasticidad, \mathbf{n}_i , que recoge el *spread* entre precio de oferta y demanda y los costes de negociación:

$$v_i = \frac{P_{0i}^a - P_{0i}^b}{2} + d \quad ,$$

donde d hace referencia a la comisión de negociación, a indica oferta (ask price) y b indica demanda (bid price).

La dependencia de la heteroscedasticidad con los costes de transacción también ha sido apuntada por otros autores como Carleton y Cooper (1975) y Carleton, Chambers y Waldman (1984). Sin embargo, Schaefer (1981) considera que tanto el *spread* de precios como los costes de negociación son lo bastante bajos como para que no afecten de modo excesivo, por lo que pueden obviarse⁵².

⁵² Hay que tener en cuenta que McCulloch (1971, 1975) trabaja con muestras del mercado norteamericano, mientras que Schaefer (1981) emplea títulos británicos.

Son dos los elementos que más influyen en la calidad del ajuste: la especificación de las funciones $g_j(t)$ y el número de éstas, m . En relación al primer punto, no todas las formas funcionales, como se ha visto en el Capítulo 2, son adecuadas para realizar el ajuste. En este sentido, McCulloch (1971) impone que las funciones utilizadas sean continuamente diferenciables, para lograr una forma funcional suave sin cambios bruscos, y que su valor en el origen, $t = 0$, sea $g_j(0)=0$, para que se cumpla que $D(0)=1$.

Dado que los títulos observados no están distribuidos de modo uniforme en todo el intervalo, para evitar los problemas que se detectan en el uso de polinomios simples, propone la utilización de splines polinómicos cuadráticos.

Para ello, establece un conjunto de nodos, d_j , que define cada uno de los subintervalos, (d_j, d_{j+1}) , en los que se divide el intervalo total de estudio, $[0, T_n]$: $0 = d_1 < d_2 < \dots < d_{m-1} < d_m = T_n$. De este modo, a partir de las siguientes expresiones se definen cada una de las funciones propuestas:

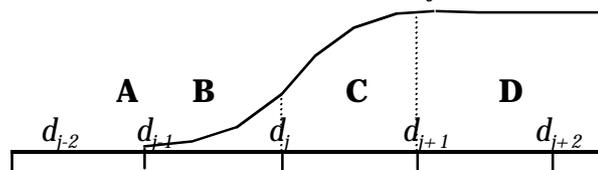
$$g_1(t) = \begin{cases} t - \frac{t^2}{2d_2}; & d_1 < t \leq d_2 \\ \frac{d_2}{2}; & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_j(t) = \begin{cases} 0; & 0 < t \leq d_{j-1} \\ \frac{(t-d_{j-1})^2}{2(d_j-d_{j-1})}; & d_{j-1} < t \leq d_j \\ \frac{(d_j-d_{j-1})}{2} + (t-d_j) - \frac{(t-d_j)^2}{2(d_{j+1}-d_j)}; & d_j < t \leq d_{j+1} \\ \frac{(d_{j+1}-d_{j-1})}{2}; & d_{j+1} < t \leq d_{j+2} \end{cases}$$

$j=2, \dots, m$

Gráficamente, de forma general, se puede representar cada una de las funciones $g_j(t)$ de la siguiente forma:

Gráfico 3.4: Forma de las funciones $g_j(t)$



De este modo cada función queda definida en determinados intervalos; si por ejemplo se tuviesen cinco funciones se tendría que $g_1(t)$ se representaría tomando los dos últimos tramos **C** y **D**; $g_2(t)$ abarcaría del **B** al **D**; mientras que $g_3(t)$ estaría representado por todas las secciones; $g_4(t)$, siguiendo el desplazamiento de derecha a izquierda, actuaría de **A** a **C**; de forma similar $g_5(t)$ estaría definida en **A** y **B**.

Con la utilización de splines surge otro factor muy importante a tener en cuenta, la elección del número de subintervalos y de los nodos que definen los mismos. McCulloch (1971) considera adecuado que todos los subintervalos tengan aproximadamente el

mismo número de observaciones, por esto determina los nodos, d_j , a través de la siguiente expresión: $d_j = t_i + q_j(t_{i+1} - t_i)$, siendo i la parte entera de: $^{(j-1)}/_{(m-1)}$ y $q_j = [^{(j-1)}/_{(m-1)}]n - i$.

En cuanto al número de funciones que se deben tomar, m , hay que tener en cuenta que si se toma un valor demasiado bajo no se podrá ajustar la función de descuento adecuadamente si ésta adopta formas complejas; mientras que, si es demasiado elevado puede perder suavidad al intentar englobar observaciones anómalas. Por tanto, se debe tender a que el valor de m se encuentre dentro de un intervalo razonable. McCulloch (1971) propone dos alternativas, por un lado, desde la perspectiva de la utilización de mínimos cuadrados se debe seleccionar aquél valor de m que minimice el estimador insesgado de la varianza de la regresión⁵³.

Por otro, una forma más sencilla y que obtiene, según McCulloch (1971), resultados similares consiste en definir m en función del número de observaciones, n , de modo que la estimación mejore cuando aumente el número de observaciones, esto es, $m(n)$ debe aumentar con n , y que el número de observaciones que se incluye en cada subintervalo aumente cuando aumenta el número total de éstas, por tanto, el ratio n/m también debe aumentar con n . Una forma de cumplir estas condiciones es definir $m(n)$ como el entero más cercano a la raíz cuadrada de n .

Se deben destacar como puntos fuertes de este modelo que es bastante completo en la medida que incluye un ajuste para la heteroscedasticidad y realiza la aproximación a través de splines para acomodarse mejor a las diferentes formas que adopta la curva en todo el rango de vencimientos. Además su especificación

⁵³ $s^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i - \hat{p}_i}{v_i} \right)^2$.

(interés y pago de cupones continuos) es muy útil desde el punto de vista teórico dado que no sólo anula la existencia de cupón corrido, sino que permite calcular fácilmente los tipos forward (instantáneo y medio) y los tipos cupón-cero a partir de la función de descuento $D(t)$.

Sin embargo, la principal crítica que se le formula es que las curvas de tipos forward que se obtienen presentan picos, derivados de la utilización de splines cuadráticos. Éstos generan curvas de tipos forward continuas pero no necesariamente derivables. McCulloch (1971) reconoce y asume este problema, que se soluciona aumentando el grado de las funciones splines utilizadas. De este modo, en un nuevo trabajo de 1975 utiliza splines cúbicos para corregir este problema. Las funciones utilizadas se definen de la siguiente manera:

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6d_2}; & d_1 \leq t \leq d_2 \\ d_2 \left(\frac{3t - d_2}{6} \right); & t \geq d_2 \end{cases}$$

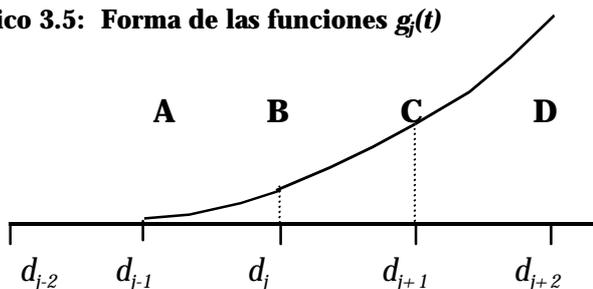
$$g_j(t) = \begin{cases} 0; & 0 \leq t \leq d_{j-1} \\ \frac{(t - d_{j-1})^3}{6h_{j-1}}; & d_{j-1} \leq t \leq d_j \\ \frac{h_{j-1}^2}{6} + \frac{h_{j-1}(t - d_j) + (t - d_j)^2}{2} - \frac{(t - d_j)^3}{6h_j}; & d_j \leq t \leq d_{j+1} \\ \left(d_{j+1} - d_{j-1} \right) \left(\frac{2d_{j+1} - d_j - d_{j-1}}{6} + \frac{t - d_{j+1}}{2} \right); & t \geq d_{j+1} \end{cases} \quad j=2, \dots, m-1$$

$$g_m(t) = t \quad 0 \leq t \leq T_n$$

siendo $h_j = d_{j+1} - d_j$.

De forma similar al caso cuadrático se puede representar gráficamente cada función como

Gráfico 3.5: Forma de las funciones $g_j(t)$



salvo $g_m(t)$ que representa la función identidad y es por tanto la recta bisectriz del primer cuadrante. Igual que en el caso anterior las diferentes representaciones de las funciones se obtienen evaluando los nodos para las diferentes j , por lo que, por ejemplo $g_1(t)$ se expresa sólo en los segmentos **C** y **D**, mientras que $g_3(t)$ queda definida en todos.

En este caso los diferentes subintervalos d_j se calculan de forma similar que en el caso cuadrático, pero tomando como denominador $m-2$, ya que ahora las ecuaciones son de grado cúbico. De este modo se tiene, igual que en el spline cuadrático: $d_j = t_i + \mathbf{q}_j(t_{i+1} - t_i)$, siendo, en este caso, i la parte entera de: $^{(j-1)}/_{(m-2)}$ y $\mathbf{q}_j = [^{(j-1)}/_{(m-2)}]n - i$.

Parece ser, por los estudios realizados, que el empleo de splines cúbicos dota de suavidad a la curva de tipos forward pero se siguen observando pendientes muy acusadas en el tramo final de la misma, obteniéndose en ocasiones tipos forward negativos⁵⁴. Para Deacon y Derry (1994) el problema reside en que esta especificación es demasiado flexible, tanto que no restringe que la

⁵⁴ Véase Shea (1985) o Núñez (1995).

función de descuento no sea creciente, por lo que los tipos forward pueden llegar a ser negativos.

Esta nueva especificación no ha estado exentas de críticas. Por un lado, Shea (1985) considera que la elección de las bases no es apropiada ya que puede generar una matriz de regresores casi perfectamente colineal que genere resultados poco precisos; Steeley (1991) también comenta este inconveniente y considera que las imprecisiones surgen por la resta de grandes números derivados de la utilización de bases de potencias truncadas. Además, Shea (1985) demuestra que las restricciones implícitas en el modelo de McCulloch (1975) no restringen que la función de descuento tenga pendiente negativa, por lo que los tipos forward generados a partir de ésta pueden tomar valores negativos. Por otro, Fong y Vasicek (1982) critican que los polinomios ofrecen un ajuste local pobre ya que no se tienden sobre la función de descuento sino que ondean sobre la misma produciendo tipos forward altamente inestables.

Por último, hay que destacar que, a pesar de estas deficiencias, el modelo goza de gran reconocimiento por parte de otros investigadores debido a que su aplicación es sencilla y los resultados que obtiene son bastante aceptables a corto y medio plazo, por lo que los tipos spot estimados por este método se toman normalmente como materia prima válida en otras investigaciones; Nelson y Schaefer (1983) y Elton *et al.* (1990) entre otros han empleado estos datos⁵⁵. En concreto, Waggoner (1997) opina que el modelo de McCulloch(1975) es una buena opción si lo que se busca es un método rápido y fácil de usar.

3.4.2 Schaefer (1981)

⁵⁵ McCulloch ofrece sus datos para el periodo 1947-1991 y vencimientos entre 1 mes y 40 años en <http://ecolan.sbs.ohio-state.edu/mccull.html>. Véase Kwon y McCulloch (1993).

Schaefer, de forma similar a McCulloch (1971, 1975), propone que la función de descuento, $D(t)$, sea aproximada por una combinación lineal de $m+1$ funciones $g_j(t)$:

$$D(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{a}_j g_j(t).$$

Para Schaefer (1981) es fundamental que la elección de las funciones $g_j(t)$ se haga de tal modo que la función de descuento estimada mantenga sus propiedades económicas. De este modo, para evitar tipos forward negativos, la función de descuento debe ser positiva y monótona decreciente.

Schaefer (1981), siguiendo las sugerencias de Hodges (1967) y Phillips y Taylor (1970) sobre la aproximación de funciones convexas, considera que las combinaciones no negativas de las siguientes funciones obtenidas de los polinomios de Bernstein aproximan cualquier función monótona decreciente con una precisión arbitraria:

$$g_j(x) = \mathbf{q}_j(x) = \sum_{r=0}^{m-j} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} \frac{x^{j+r}}{j+r}, \quad j=1, \dots, m;$$

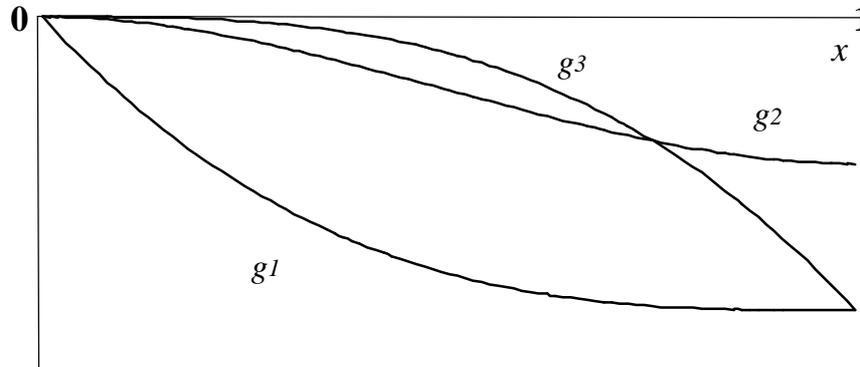
donde $x \in [0, 1]$ ⁵⁶ y $g_0(x) = 1$. Para garantizar que $D(0) = 1$ y $D(1) \geq 0$, añade dos restricciones a la ya existente, $a_j \geq 0$ "j:

$$a_0 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^m a_j g_j(1) \geq 0,$$

La representación gráfica (*Gráfico 3.6*) de las funciones empleadas no es tan sencilla como en el caso anterior ya que su valor depende del número de éstas. Por ejemplo, para el caso de $m=3$ se tienen las siguientes formas para $j=1, 2, 3$ a la que se añade $g_0(x) = 1$.

Gráfico 3.6: Forma de las funciones $g(x)$

⁵⁶ Schaefer (1981) no especifica qué cambio de variable emplea.



En caso de que m sea mayor la forma de las funciones $g_1(x)$ y $g_m(x)$ es similar a las presentadas, esto es a $g_1(x)$ y $g_3(x)$, respectivamente; y las funciones $g_j(x)$ con $j=2, \dots, m-1$ son similares, variando su curvatura, a la función $g_2(x)$ del gráfico anterior.

Para Schaefer (1981) el uso de este tipo de funciones basadas en los polinomios de Bernstein tienen una ventaja respecto a la aproximación polinómica tradicional. Si bien ambos métodos tienen errores similares en la aproximación en niveles, las funciones que propone ofrecen ajustes considerablemente mejores de las derivadas que los polinomios comunes. Esta característica cuando se trata de la aproximación de la función de descuento es fundamental, ya que los tipos forward dependen de la primera derivada de ésta.

Además, las restricciones impuestas aseguran que la curva de tipos forward nunca sea negativa, ya que ni la función de descuento lo es ni su primera derivada puede ser positiva. Sin embargo, estas restricciones no garantizan la estabilidad de la curva de tipos forward que pueden presentar, como Shea (1984) advierte, cambios muy acusados en su tramo a largo.

Para terminar de especificar el modelo es necesario determinar m , es decir, cuántas funciones de aproximación se van a emplear. Schaefer (1981), al contrario que McCulloch (1971, 1975) no determina el número de funciones a aproximar teniendo en cuenta las observaciones disponibles. Realiza una serie de pruebas y considera que es más arriesgado tomar m demasiado bajo que tomarlo demasiado alto, por lo que decide tomar $m=10$ para muestras con vencimiento máximo de veinticinco años.

Este modelo no ha sido tan profusamente estudiado como el de McCulloch (1975), a pesar de que, aparentemente, debido a las restricciones que impone sobre la función de descuento puede generar mejores resultados. Quizás el motivo radique en que Schaefer (1981) da más importancia al tratamiento de la carga impositiva sobre los cupones y ganancias de capital obtenidas de las inversiones en bonos que al propio modelo en sí mismo.

3.4.3. Fong y Vasicek (1982)

La principal aportación del trabajo de Fong y Vasicek (1982) es la utilización indirecta de splines exponenciales en la modelización de la función de descuento que, en teoría, deben aportar un ajuste más preciso de la misma.

La base de su propuesta es que la función de descuento presenta un decrecimiento aproximadamente exponencial, por tanto puede ajustarse mejor a través de funciones exponenciales que con polinomios⁵⁷. Sin embargo, para no perder la linealidad⁵⁸ del modelo no trabajan directamente sobre $D(t)$ sino sobre una nueva función, $G(x)$, obtenida de la anterior; que ajustan a través de splines polinómicos cúbicos.

⁵⁷ Shea (1985) no está de acuerdo ya que considera que un spline polinómico está capacitado para imitar una función exponencial.

⁵⁸ En realidad, como se verá más adelante, no logran que el modelo sea lineal.

Proponen la siguiente transformación: $t = -\alpha^{-1} \ln(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$; siendo α una constante, por lo tanto $G(x)$ queda definida como: $G(x) \circ D(t) = D(-\alpha^{-1} \ln(1-x))$.

$G(x)$ cumple las siguientes propiedades, derivadas de las características de la función de descuento: está definida en el intervalo $[0, 1]$, es una función monótona decreciente con $G(0) = 1$ (equivalente a $D(0) = 1$) y $G(1) = 0$ (equivalente a $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, un pago infinitamente lejano carece de valor).

Dado que $D(t)$ es aproximadamente exponencial: $D(t) \approx e^{-gt}$, $G(x)$ tiene forma aproximadamente potencial. Como $D(t) \circ G(x) \circ G(x) \approx \exp\left[\ln(1-x) \frac{g}{\alpha}\right]$ y además se tiene que $x = 1 - e^{-t}$, entonces:

$$\ln G(x) = \frac{g}{\alpha} \ln(1-x) \circ G(x) \approx (1-x)^{g/\alpha}.$$

Con esta transformación del argumento consiguen una función, $G(x)$, equivalente a la función de descuento, $D(t)$, que debido a su forma potencial, es más adecuada para ajustar por medio de splines polinómicos.

El modelo queda definido inicialmente por la siguiente ecuación que incorpora un ajuste para recoger el efecto impositivo y la posibilidad de cancelación anticipada.

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} D(t) Q_{it} - K_i - W_i + \mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n.$$

Siendo K_i la disminución en el precio del título i debida al efecto impositivo que proponen sea proporcional al rendimiento

actual (TIR), R_i , del título; quedando representada a través de la siguiente expresión:

$$K_i = \mathbf{b}_{m+1} \frac{c_i}{P_i} \frac{dP_i}{dR_i},$$

y W_i la disminución en el precio del título i debida a la amortización anticipada. Este fenómeno se recoge a través de una variable dummy, I_i , que toma valor nulo en los títulos que no presentan esta característica: $W_i = \mathbf{b}_{m+2} I_i$.

Otra de las características del modelo es que se incluye un tratamiento específico para evitar la heteroscedasticidad. Parten de la idea de que el modelo debe ser homocedástico en los rendimientos, por ello definen la varianza de los residuos como:

$$E[\mathbf{e}_i^2] = \mathbf{s}^2 v_i, \text{ donde } v_i = \left(\frac{dP_i}{dR_i} \right)^2.$$

Para la determinación de $G(x)$ definen una base formada por un conjunto de funciones polinómicas, $g_j(x)$, a partir de la cual se construye $G(x)$ como combinación lineal de las mismas:

$$G(x) = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(x); 0 \leq x \leq 1.$$

El modelo anterior queda, entonces, como sigue:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} \sum_{j=1}^m Q_{it} \mathbf{b}_j g_j(1 - e^{-at}) - \mathbf{b}_{m+1} \frac{c_i}{P_i} \frac{dP_i}{dR_i} - \mathbf{b}_{m+2} I_i + \mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n.$$

Siendo por tanto el modelo lineal en las b 's, pero no lineal en general debido al parámetro a . Por tanto, la estimación de los coeficientes, b_j , está condicionada por el valor de α que minimice la suma de los cuadrados de los errores de la estimación. Este parámetro debe estimarse conjuntamente con los otros parámetros del modelo y representa el tipo forward instantáneo a muy largo plazo. Esta interpretación surge al quedar recogidas las propiedades asintóticas del modelo a través del desarrollo de Taylor de primer orden de $G(x)$ en torno a la unidad: $G(x) = -G'(1)(1-x) + o(1-x)$; como $D(t) = G(x)$, se tiene $D(t) = -G'(1)e^{-at}$ y entonces si $G'(1) \neq 0$:

$$a = -\frac{D'(t)}{D(t)},$$

que es el tipo forward instantáneo.

Fong y Vasicek (1982) consideran que deben emplearse splines polinómicos cúbicos pero no especifican su forma. La utilización de éstos en el ajuste de la función $G(x)$ da lugar a que indirectamente se haya aproximado $D(t)$ por medio de splines exponenciales de tercer orden: $D(t) = a_0 + a_1e^{-at} + a_2e^{-2at} + a_3e^{-3at}$.

Aconsejan depurar la muestra, excluyendo las observaciones anómalas ya que los métodos de mínimos cuadrados son altamente sensibles a la existencia de datos erróneos. Por lo que, en su supuesto análisis empírico, eliminan de la muestra aquellas observaciones cuyos residuos superan cuatro veces la desviación típica.

El modelo, según sus autores, presenta propiedades asintóticas deseables para los vencimientos largos, muestra suficiente flexibilidad de ajuste a la gran variedad de formas que puede presentar la estructura temporal y robustez suficiente para

producir curvas de tipos forward estables. Fong y Vasicek (1982) aseguran que su modelo obtiene resultados empíricos satisfactorios, aunque no aportan información sobre los mismos ni los datos empleados.

El trabajo de Fong y Vasicek (1982), a pesar de su importante aportación a la modelización de la estructura temporal, ha sido duramente criticado por otros investigadores debido a la ausencia de análisis empíricos que corroboren sus afirmaciones y a la falta de transparencia en determinados aspectos de su metodología (determinación de la base, etc.). Shea (1985) es el que más profundamente ha estudiado este trabajo y el que formula las críticas más duras.

Shea (1985) demuestra, a través de análisis teóricos y empíricos⁵⁹, que ninguna de las dos ventajas principales que Fong y Vasicek (1982) anunciaban sobre su modelo se cumplen en la realidad. Ni se evita el uso de estimaciones no lineales, dado que $G(x)$ es no lineal en α ; ni el modelo presenta las esperadas propiedades asintóticas que mejoran la estimación de la estructura temporal.

Principalmente, las críticas se centran en cuatro aspectos: en primer lugar, la transformación del argumento no es acertada ya que frecuentemente condiciona de tal modo los datos que las aproximaciones obtenidas carecen de confianza. Para valores de α pequeños, los valores de x observados pueden llegar a estar tan agrupados que gran parte del intervalo $[0,1]$ puede estar vacío, conduciendo a tipos forward asintóticos inestables e irreales. Además, el mal condicionamiento de los datos, hace que difícilmente se pueda obligar a la solución proporcionada por la estimación no lineal a converger. A este respecto, Deacon y Derry

⁵⁹ Determina las diferentes funciones $g_j(x)$ a través de B-splines.

(1994) consideran que este resultado puede estar causado porque Shea (1985) elige los nodos de los subintervalos siguiendo la metodología de McCulloch (1975).

En segundo lugar, $G(x)$ no suele ser lineal. De hecho si Fong y Vasicek (1982) realmente hubieran creído que la función de descuento presentaba un decrecimiento exponencial no hubieran utilizado en la aproximación de $G(x)$ splines polinomiales sino un polinomio simple. La utilización de splines les permitía que la función de descuento se desviase de ese comportamiento tan estricto. En efecto, Shea (1985) encontró, que en la práctica, rara vez $G(x)$ era lineal o aproximadamente lineal; por tanto la utilización de splines exponenciales no es estrictamente necesaria.

Por otro lado, la restricción asintótica impuesta no es de gran ayuda, en la práctica no se derivan tipos forward tan estables como supone la teoría, ya que la misma sólo afecta a vencimientos más lejanos que los observados y tiene poca influencia sobre la forma o nivel de otros vencimientos. Y por último, si bien el modelo parece apropiado para capturar la forma de la función de descuento cuando ésta sigue un decrecimiento exponencial real, la estimación del mismo está condicionada a la elección de un nivel para los tipos forward (α). Por ello, para que este modelo pueda considerarse una técnica generalmente factible, podría ser necesario establecer restricciones sobre los niveles de la curva a aproximar.

Contreras y Navarro (1993) aplican este modelo al Mercado Español de Deuda Pública Anotada modificando algunos aspectos con el fin de adaptarlo a las peculiaridades de este mercado. Consideran sólo la existencia de un único nodo interior en $t = t_0$, expresan $G(x)$ como: $G(x) = (1-x) + \mathbf{b}_1 g_1(x) + \mathbf{b}_2 g_2(x) + \mathbf{b}_3 g_3(x)$ y definen cada una de las funciones de la combinación como splines polinómicos cúbicos que toman la siguiente forma:

$$g_1(x) = -x + x^2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$g_2(x) = \begin{cases} (x_0^3 - 3x_0^2 - 1)x + 3x_0x^2; & 0 \leq x \leq 1 - e^{-at_0} \\ -x_0^3 + (x_0^3 - 1)x + x^3; & 1 - e^{-at_0} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} (-x_0^3 + 3x_0^2)x - 3x_0x^2 + x^3; & 0 \leq x \leq 1 - e^{-at_0} \\ (1 - x)x_0^3; & 1 - e^{-at_0} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para determinar totalmente el modelo modifican la especificación de la variable que recoge el efecto fiscal, K_i , para acomodar los datos a las diferencias existentes entre las Letras y los Bonos y Obligaciones debidas a la retención⁶⁰ y eliminan la variable dummy que recoge el efecto de la amortización anticipada. De este modo, K_i toma, en el caso de las Letras, valor nulo y para los bonos y obligaciones⁶¹:

$$K_i = c_i (1 + TIR_i)^{-s_i/365} \sum_{j=1}^{P_i} (1 + TIR_i)^{-(j-1)}$$

Como resultado el modelo modificado queda como sigue:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} c_{it} (1 + x_{it}) + b_1 \sum_{t=s_i}^{T_i} c_{it} g_1(x_{it}) + b_2 \sum_{t=s_i}^{T_i} c_{it} g_2(x_{it}) + b_3 \sum_{t=s_i}^{T_i} c_{it} g_3(x_{it}) - b_4 K_i + e_i$$

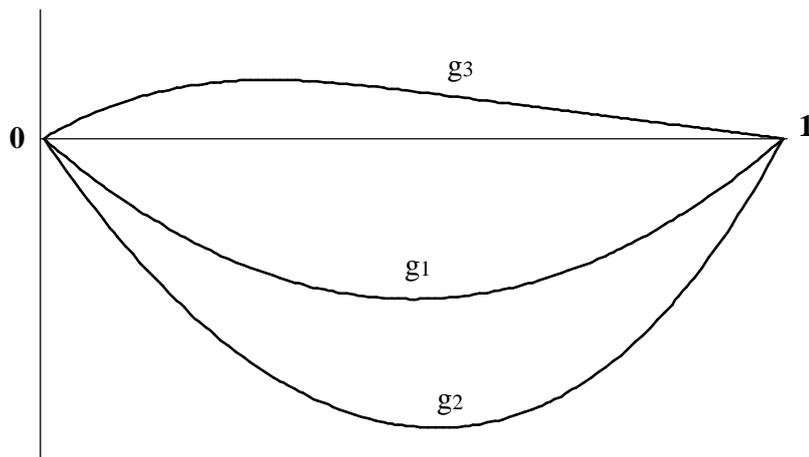
Partiendo de la especificación propuesta por Contreras y Navarro (1993), ya que se desconoce la empleada por Fong y

⁶⁰ Las Letras no soportan retención y los Bonos y Obligaciones soportan sólo en el caso de que el tenedor sea residente.

⁶¹ Representando s el número de días hasta el pago del primer cupón y p el número de pagos de cupón que genera el título.

Vasicek (1982), podemos representar gráficamente la forma aproximada de las funciones (Gráfico 3.7).

Gráfico 3.7: Forma de las funciones $g_i(x)$



Cabe destacar que la forma de $g_1(x)$ no depende de la elección de a ni t_0 , mientras que las funciones $g_2(x)$ y $g_3(x)$ disminuyen/aumentan su curvatura cuando disminuye/aumenta a o t_0 .

3.4.4. Carleton, Chambers y Waldman (1984)

Proponen que inicialmente la estimación de la ETTI se realice a través de un polinomio, aunque reconocen que las características de los mismos hacen que no sean capaces de ajustar correctamente ambos extremos de la curva. Observan que el problema principal no está en el uso de éstos sino en el método de estimación utilizado y en no tener en cuenta la existencia de heteroscedasticidad relacionada con el plazo hasta el vencimiento o hacerlo de modo general. Así, pretenden aproximar directamente los tipos spot a través de un polinomio de grado $k-1$:

$$h(t) = \sum_{j=1}^k a_j t^{j-1}.$$

Tenemos, entonces, que la función de descuento se aproxima a través de una función exponencial:

$$D(t) = \exp\left[-\sum_{j=1}^k a_j t^j\right],$$

por lo que la ecuación de regresión queda de la siguiente manera:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} e^{-\sum_{j=1}^k a_j t^j} + e_i.$$

El objetivo de esta primera regresión es determinar cuál es la longitud más apropiada que debe tener el polinomio de aproximación y comprobar si el procedimiento propuesto que emplea mínimos cuadrados no lineales es adecuado para estimar la estructura temporal de tipos en todo su rango. Para ello, hacen variar el grado del polinomio entre uno y cinco, mostrando el análisis de los residuos que la mayoría de las variaciones en los precios pueden explicarse por medio de un polinomio de tercer grado. Obtienen, así, valores razonables de los tipos forwards en todo el rango de estudio, excepto en el largo plazo donde se observa un comportamiento errático, derivado presumiblemente de la poca información disponible en este tramo del intervalo.

Por otro lado, el análisis de los residuos pone de manifiesto, principalmente, la existencia de heteroscedasticidad relacionada con el vencimiento y suponen, al igual que McCulloch (1971) y Carleton y Cooper (1975), que ésta puede ser debida a la existencia de un diferencial entre el precio de oferta y de

demanda. Diferencial que es más acusado en los títulos con vencimientos a más largo plazo, por lo que cualquiera de estas dos variables, *spread* o vencimiento, puede emplearse para corregir la heteroscedasticidad.

Por otro lado, observan que el polinomio tiende a ignorar la forma que toma la curva en el corto plazo y un incremento del grado del polinomio no parece mejorar la situación sino en el tramo a largo; concluyendo que la aparente incapacidad de los polinomios para ajustar simultáneamente ambos extremos de la curva se debe a la existencia de heteroscedasticidad, que no puede corregirse de modo general sino que debe examinarse individualmente en cada una de las muestras.

En consecuencia, incluyen un tratamiento para la heteroscedasticidad, $\mathbf{s}^2(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}^2(Z_i)^d$, y realizan una estimación máximo verosímil del modelo, siendo la función log-verosímil resultante a maximizar:

$$L(P_i, Q_{it} / \underline{a}, \mathbf{s}^2, d, k) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (d \log Z_i) - \frac{1}{2\mathbf{s}^2} \sum_{i=1}^N Z_i^{-d} \left[P_i - \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} e^{\sum_{j=1}^k a_j t^j} \right]^2$$

siendo $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)^t$.

En esta ocasión, los tests realizados revelan que un polinomio de aproximación de grado 6 parece ser el más indicado.

Carleton, Chambers y Waldman (1984) concluyen que el uso de polinomios para aproximar la ETTI no da buenos resultados si se usan regresiones mínimo cuadradas; por el contrario, el uso de estimación máximo verosímil parece solucionar los problemas detectados en la primera. Por otro lado, reconocen que la

desventaja de su método es la complejidad de cálculo e implantación que lleva implícita al no ser el modelo lineal.

3.4.5. Shea (1984)

Shea analiza en profundidad los inconvenientes de la utilización de splines tanto polinómicos [McCulloch (1971, 1975)] como exponenciales [Fong y Vasicek (1982)] en la modelización de la estructura temporal y propone una metodología alternativa que, si bien supone la estimación de un mayor número de parámetros para obtener resultados similares, permite incorporar más fácilmente las restricciones que sean necesarias para la obtención de una buena estimación de la estructura temporal.

La idea fundamental de su desarrollo es que si bien el spline a utilizar necesita de restricciones para poder obtener la identificación de los parámetros, éstas pueden no ser apropiadas para la aproximación de la función estudiada. La formulación de estas restricciones, de modo que se tenga en cuenta la función a aproximar, es más sencilla de establecer utilizando un modelo de mínimos cuadrados con polinomios cúbicos a trozos restringidos que utilizando directamente la metodología de los splines.

Lo que motivó su estudio fue la observación empírica de que muchos modelos tenían problemas en el tramo a más largo plazo de la curva, de modo que la función de descuento no conservaba su forma decreciente sino que tomaba pendiente positiva; esto daba lugar a tipos forward en el largo plazo altamente inestables con valores incluso negativos.

La propuesta de Shea (1984) consiste en utilizar la técnica de estimación de mínimos cuadrados definiendo los polinomios de aproximación en cada subintervalo en el que divide el intervalo total de estudio, $[0, T_n]$. Además establece una serie de

restricciones sobre el comportamiento de los mismos (básicamente las condiciones que debe cumplir toda función spline) y que el grado de estos polinomios sea cúbico.

De forma similar a McCulloch (1975)⁶² escoge $k-1$ nodos dentro del intervalo para determinar los $k-2$ subintervalos. Teniendo en cuenta esto y el grado de los polinomios de aproximación el número inicial de parámetros es $4k-8$. De este modo obtenemos la matriz de las variables independientes X que queda definida como sigue: $X = \text{Diag}(M_1, \dots, M_{k-2})$, siendo M_j la matriz de rango $n_j \times 4$ ⁶³ que recoge las observaciones presentes en el subintervalo j :

$$M_j = \begin{bmatrix} 1 & t_{ij} & t_{ij}^2 & t_{ij}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{n_j j} & t_{n_j j}^2 & t_{n_j j}^3 \end{bmatrix}$$

Si definimos la variable dependiente como $Y_{ij} = D(t_{ij}) - 1$, entonces la ecuación de regresión para el título i en el subintervalo j toma la siguiente forma:

$$Y_{ij} = b_{1j} + b_{2j}t_{ij} + b_{3j}t_{ij}^2 + b_{4j}t_{ij}^3; \quad " \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k-2.$$

Por otro lado, establece como restricciones que el valor de las funciones de aproximación y sus primeras y segundas derivadas en

⁶² Sigue la metodología de McCulloch (1975) tanto para determinar el número de nodos como su localización.

⁶³ n_j representa el número de títulos con vencimiento dentro del subintervalo (d_j, d_{j+1}) .

los nodos o extremos de los subintervalos sean iguales. Esto queda recogido en las tres ecuaciones siguientes:

$$b_{1,j} + b_{2,j}d_{j+1} + b_{3,j}d_{j+1}^2 + b_{4,j}d_{j+1}^3 = b_{1,j+1} + b_{2,j+1}d_{j+1} + b_{3,j+1}d_{j+1}^2 + b_{4,j+1}d_{j+1}^3$$

$$b_{2,j} + 2b_{3,j}d_{j+1} + 3b_{4,j}d_{j+1}^2 = b_{2,j+1} + 2b_{3,j+1}d_{j+1} + 3b_{4,j+1}d_{j+1}^2$$

$$2b_{3,j} + 6b_{4,j}d_{j+1} = 2b_{3,j+1} + 6b_{4,j+1}d_{j+1}.$$

Además, para garantizar que $D(0) = 1$, $b_{11} = 0$; esto hace un total de $3(k-3) + 1$ restricciones. Podremos aplicar mínimos cuadrados sobre este sistema cuando el número de observaciones, N , sea superior a k (parámetros - restricciones). El modelo queda:

Minimizar \underline{u} en $\underline{Y} = \underline{X}\underline{b} + \underline{u}$,

sujeto a: $\underline{R}\underline{b} = 0$.

Siendo: $\underline{Y} = [\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_{k-1}]^t$,

$\underline{b} = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{k-2}]^t$ con $\underline{b}_j = [\underline{b}_{1j}, \underline{b}_{2j}, \underline{b}_{3j}, \underline{b}_{4j}]^t$,

$\underline{u} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{k-2}]^t$,

$\underline{R} = [\underline{R}_0, \underline{R}_1, \underline{R}_2, \underline{R}_3]^t$.

\underline{R}_i representa cada restricción anterior, así tenemos:

$$\text{Para } i=0, 1, 2 \underline{R}_i = \begin{bmatrix} -\underline{e}_{2i} & \underline{e}_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\underline{e}_{3i} & \underline{e}_{3i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{e}_{-k-2,i} & \underline{e}_{-k-2,i} \end{bmatrix};$$

$$\underline{e}_{j0} = (1, d_j, d_j^2, d_j^3)$$

$$\text{donde: } \underline{e}_{j1} = (0, 1, 2d_j, 3d_j^2)$$

$$\underline{e}_{j2} = (0, 0, 2, 6d_j)$$

Para $i=3$ $R_3 = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

Así, el estimador restringido es:

$$\underline{\mathbf{b}}_R = \underline{\mathbf{b}} + (X'X)^{-1} R [R(X'X)^{-1}R']^{-1} [R\underline{\mathbf{b}}].$$

Este método es totalmente equivalente a los métodos que emplean funciones splines. Es posible probar que los estimadores de ambos son transformaciones lineales equivalentes del vector de variables dependientes \underline{Y} . La existencia de esta relación lineal entre los parámetros de ambos modelos hace que cualquier restricción lineal impuesta a la aproximación en uno de ellos se pueda transformar fácilmente en restricciones sobre el otro. Por otro lado, la estructura diagonal de la matriz de regresores del modelo de Shea (1984) nos muestra que los splines son expresiones más parsimoniosas que los polinomios a trozos; debido a esto, mientras que el modelo de Shea (1984) requiere la estimación de $4k-8$ parámetros el de McCulloch (1975), por ejemplo, sólo requiere la estimación de k parámetros.

Shea (1984) realiza análisis comparativos entre su propuesta y la de McCulloch (1975)⁶⁴ sobre una muestra de títulos cupón-cero negociados en el mercado japonés. Apoyándose en los resultados obtenidos y en los de otros autores [Rose y Schworm (1980) y Jordan (1981)] concluye que la obtención de estimaciones negativas de tipos de interés no son propias de un modelo ni de determinados datos o comportamientos anormales en los vencimientos a largo plazo.

⁶⁴ No tiene en cuenta la modificación referente al efecto impositivo.

Propone como solución utilizar restricciones que impongan comportamientos adicionales sobre la aproximación por splines. Estas restricciones pueden hacerse en muchos sentidos. Por un lado se puede variar la flexibilidad de la aproximación variando bien el grado de las funciones base (esta modificación afecta tanto al ajuste como a la continuidad de las derivadas de las funciones, por lo que no es apropiada para los modelos de equilibrio de la estructura temporal) o bien el número de nodos o su localización (esto último suele empeorar la bondad del ajuste). Por otro, se pueden diseñar restricciones adicionales que disminuyan el grado de dependencia local de la aproximación sobre datos en una zona de comportamiento anómalo. Un resultado satisfactorio, a menudo, se obtiene al establecer que la primera derivada de la función de descuento en diferentes fechas mantengan proporciones fijas. En concreto, establece que la primera derivada de la curva en el último nodo sea la mitad del valor que toma en el nodo anterior.

Shea (1984) defiende su metodología alegando que todas las variaciones sobre las restricciones se hacen *ad hoc*, por tanto es muy importante que el método utilizado en la estimación nos permita cambiar fácilmente tanto las propiedades locales de la aproximación como las que afectan a todo el intervalo; es decir, que nos facilite añadir nuevas restricciones. El método propuesto por Shea (1984) es, en este sentido, apropiado porque permite imponer las mismas simplemente añadiendo o suprimiendo filas de la matriz de restricciones.

Deacon y Derry (1994) critican este tipo de ajustes (realizados imponiendo restricciones *ad hoc*) porque si bien pueden ser aceptables en el contexto del desarrollo de un modelo de investigación desde el punto de vista práctico, donde las curvas deben calcularse en tiempo real, es de una utilidad limitada. Además, en ocasiones, determinados cambios en la curva pueden

atribuirse a hechos ocurridos en el mercado cuando en realidad se deben a los cambios impuestos en la especificación de las restricciones.

Por último, cabe destacar que Shea (1984) no añade a su modelo ninguna corrección a la heteroscedasticidad ya que considera que la estimación gana más en precisión localizando de un modo razonable los nodos, detectando los *outliers* y eligiendo restricciones adecuadas que experimentando con la especificación del término de error.

3.4.6. Nelson y Siegel (1987)

Para desarrollar su modelo se basan, de forma similar a Echols y Elliott (1976), en el concepto de tipo forward que motiva la teoría de las expectativas, sin que los resultados queden condicionados por el cumplimiento de esta hipótesis. La base del modelo es que el tipo forward instantáneo es solución de una ecuación diferencial (o en diferencias, caso discreto) de segundo orden con dos raíces iguales a través de la cual se pueden aproximar los tipos spots.

En otras palabras, Nelson y Siegel (1987) consideran razonable suponer que los tipos forward implícitos a cualquier plazo tienden asintóticamente hacia un cierto nivel, es decir, para horizontes lejanos los tipos forward suelen ser casi idénticos y esta condición sólo se cumple si el tipo forward instantáneo responde a las características anteriores. Cabe destacar que Jain y Livingston (1982) y Nelson y Siegel (1988) demuestran que la tendencia hacia una asíntota horizontal sólo es apropiada si los tipos forwards son finitos.

Inicialmente proponen modelizar los tipos forward como la solución a una ecuación diferencial de segundo orden con dos parámetros constantes:

$$f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 e^{-\frac{t}{t_1}} + \mathbf{b}_2 \frac{t}{t_2} e^{-\frac{t}{t_2}}$$

pero los análisis empíricos efectuados revelan que el modelo está sobrep parametrizado, el modelo tenía problemas de convergencia y modificaciones en el valor de los parámetros no lineales no variaban el resultado de la aproximación, por lo que eliminan una de las constantes⁶⁵, t_2 , tomando $t_2=t_1=t$, y definen los tipos forward instantáneos con vencimiento en t , $f(t)$, a través de la siguiente ecuación, que puede ser vista como una función de Laguerre⁶⁶ más un término constante:

$$f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 e^{-\frac{t}{t}} + \mathbf{b}_2 \frac{t}{t} e^{-\frac{t}{t}} .$$

siendo t , \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 los parámetros a estimar.

El tipo spot o tipo de interés correspondiente a un título cupón-cero con tiempo hasta el vencimiento t es equivalente al promedio de todos los tipos forward instantáneos⁶⁷ vigentes

⁶⁵ A pesar de esto, Svensson (1994) y Bliss (1996) consideran esa constante adicional al llevar a cabo análisis empíricos de este modelo.

⁶⁶ Este tipo de función es muy flexible, sin embargo, Hall (1989) y Bhar y Hunt (1994) [Cfrs. Hunt (1995B)] muestran que presenta inconvenientes en su aplicación empírica, encontrando que los modelos polinomiales superan los resultados obtenidos por éstas en la aproximación de la curva de rendimientos.

⁶⁷ Véase Capítulo 1, p. 12.

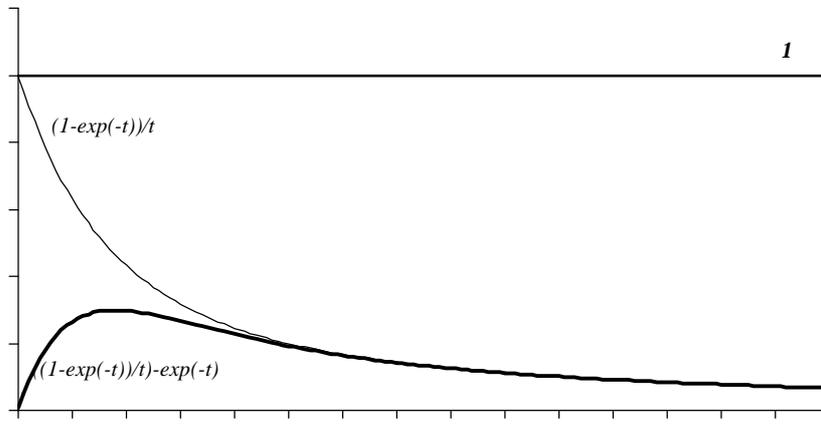
durante el periodo $(0,t)$, por lo que la curva de tipos queda definida a través de la siguiente ecuación:

$$h(t) = \mathbf{b}_0 + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \frac{t}{\tau} - \mathbf{b}_2 e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Esta especificación permite a la curva estimada tomar las diferentes formas que generalmente se observan en la realidad. Un modo de ver esta flexibilidad de la curva es interpretar los coeficientes que definen los tipos forward como la fuerza o incidencia que cada componente temporal (corto, medio y largo plazo) tiene sobre la curva de tipos forward instantáneos.

Nelson y Siegel (1987) consideran que \mathbf{b}_0 representa la contribución del componente a largo plazo, \mathbf{b}_1 la del componente a corto plazo y \mathbf{b}_2 la del componente a medio plazo. Esto es sencillo de ver cuando se analizan gráficamente (*Gráfico 3.8*) los componentes de la ecuación de regresión.

Gráfico 3.8: Variables del modelo de Nelson-Siegel



b_0 al ser una constante mantiene su valor de forma independiente a las variaciones en la variable tiempo hasta el vencimiento, t . Por tanto, al contrario que las demás, mantiene su valor en el largo plazo y por exclusión se considera representativa de este tramo temporal; de este modo, b_0 es el valor asintótico del tipo forward. De forma equivalente en la ecuación de regresión b_0 representa el valor asintótico del tipo spot. Este parámetro debe tener, por tanto, signo positivo y oscilar en torno a ciertos valores que se consideren acordes con la realidad.

b_1 (en la expresión del tipo forward) acompaña⁶⁸ a e^{-t} , curva que decrece muy rápidamente desde el valor uno en $t = 0$ hasta cero cuando b_1 es positivo (presenta un comportamiento equivalente pero en sentido creciente cuando es negativo). La suma de éste con el anterior es el tipo forward instantáneo (de forma equivalente el tipo spot) para un plazo infinitesimalmente pequeño.

⁶⁸ En la ecuación de regresión se corresponde con $(1-e^t)t^t$, que tiene un comportamiento similar.

b_2 acompaña⁶⁹ a $t \cdot e^{-t}$, función cóncava que crece rápidamente desde el origen y a partir de su máximo decrece suavemente hasta tomar valor cero cuando b_2 es positivo, siendo convexa cuando este parámetro es negativo. b_2 es el parámetro que determina la existencia o no de un extremo.

Se ha omitido del análisis anterior el parámetro t , porque no afecta a la forma general que toman las curvas sino a la velocidad de decrecimiento de la pendiente de las mismas. Valores de t pequeños corresponden a un rápido decrecimiento en los regresores, por tanto permite ajustar mejor los vencimientos a más corto plazo pero no se acomoda tan bien al tramo a largo; por el contrario valores de t elevados producen un decrecimiento lento de los regresores que pueden ajustar con más precisión los vencimientos a largo pero no son capaces de seguir la curvatura extrema del tramo a corto. En resumen, t representa la tasa a la que el tipo forward instantáneo se acerca a su nivel asintótico y debe tomar siempre valores positivos.

Nelson y Siegel (1987) analizaron este modelo en muestras formadas por títulos cupón cero. La principal ventaja, según sus autores, de este modelo frente a otros que utilizan más parámetros (como los polinomiales) es que, si bien el ajuste no es tan bueno como en éstos, tiene una capacidad de predicción mayor debido a que no intenta condicionarse a la forma exacta que se observan en los datos reales sino que asume una mayor suavidad en esta relación. En definitiva, la pérdida de precisión es necesaria para ganar capacidad predictiva.

Destacan, fundamentalmente, dos resultados: por un lado la escasa relevancia en cuanto a precisión que aporta el segundo

⁶⁹ En la ecuación de regresión es $[(1-e^{-t})t^t]-e^{-t}$, que tiene un crecimiento mucho más suave y prolongado.

término de la ecuación, sobre todo cuando existe una política monetaria que tiene como objetivo la estabilidad de los tipos de interés. Y por otro, que las diferencias observadas son demasiado grandes para atribuirlas al sesgo del cupón, por lo que sugieren que pueden deberse a que la curva estimada converge a su asíntota demasiado rápido.

En relación a la convergencia de los tipos hacia una asíntota horizontal, habría que señalar que esta convergencia sería en el tramo a largo, que no analizan Nelson y Siegel (1987) ya que sólo toman títulos cupón-cero a corto plazo, por lo que el resultado anterior (rápida convergencia) puede indicar un problema grave en el modelo. Además Fisher, Nychka y Zervos (1995) observan al aplicar este modelo que, a pesar de que éste fuerza a los tipos forward a que converjan asintóticamente, no se garantiza que los mismos sean positivos⁷⁰. Por otro lado, los resultados indican que el uso de funciones splines proporciona mejores ajustes que este modelo.

Se encuadra esta propuesta dentro de los modelos de precios aunque no parece ser que esa fuese la intención de los autores al proponerlo ya que en ningún momento hacen mención a esta metodología que por otro lado puede encontrarse encubierta ya que sólo consideran títulos cupón-cero: el empleo de títulos emitidos al descuento hace indiferente la distinción entre modelos de precios y rendimientos ya que en éstos la TIR coincide con el tipo cupón-cero del plazo correspondiente; sin embargo, cuando la muestra está formada por títulos que devengan cupón esta distinción es fundamental. De hecho la propuesta inicial de Nelson y Siegel (1987) no es testar la capacidad de ajuste del modelo sino su capacidad predictiva.

⁷⁰ En ocasiones el nivel de la asíntota se situaba en -10%.

Por otro lado, el hecho que Svensson (1994), quien realiza una modificación del modelo de Nelson y Siegel (1987), proponga un modelo similar que analiza a través de la metodología de los modelos de precios, y Núñez (1995) para el mercado español y Deacon y Derry (1994) para el mercado del Reino Unido hayan aplicado este modelo a precios de bonos obteniendo buenos resultados, puede justificar la inclusión de este modelo en la metodología de los modelos de precios.

La contrastación de este modelo se puede realizar bien a través de técnicas de estimación no lineales (mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud) o bien empleando directamente mínimos cuadrados ordinarios tal como proponen Nelson y Siegel (1987). En este último caso, hay que establecer de forma externa el valor del parámetro que afecta a la linealidad del modelo, τ ⁷¹.

3.4.7 Steeley (1991)

Steeley (1991) pone de manifiesto los problemas ocasionados por el empleo de cualquier base de splines para la aproximación de la función de descuento y siguiendo la propuesta de Shea (1984) recomienda el uso de los B-splines. Su principal ventaja es, según el propio autor, que toman valor cero en gran parte del intervalo de aproximación, previniendo así la pérdida de precisión debida a la cancelación que se observa en otros splines como los splines polinómicos cúbicos de McCulloch (1975). También influyen positivamente en la elección de los B-splines las buenas propiedades de convergencia que presentan.

⁷¹ Bruno y Morini (1997) aplican ambos procedimientos para el análisis de las curvas de rendimiento en muestras tomadas del Mercado Español de Deuda Pública Anotada no encontrando gran diferencia entre los resultados obtenidos; sin embargo, recomiendan el uso de MCO en vez de MCNL.

De este modo, la función de descuento se aproxima a través de estas funciones y se sustituye la especificación en la expresión de valor actual que, añadiendo un término de error, puede estimarse empleando mínimos cuadrados. Esto es, se aproxima la función de descuento, $D(t)$, a través de una combinación lineal de m funciones B-splines cúbicas:

$$D(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j B_j^3(t).$$

Para definir los B-splines es necesario tomar nodos extras fuera del intervalo $[0, T_n]$; es decir, es necesario habilitar k nodos por encima y k nodos por debajo del intervalo, siendo k el grado del B-spline. De este modo se necesita disponer de la siguiente secuencia de nodos: $d_{-k} < d_{-k+1} < \dots < d_0 < d_1 < \dots < d_n < d_{n+1} < \dots < d_{n+k}$, con $d_0 = 0$ y $d_n = T_n$. Steeley toma como límite superior del intervalo de estudio un plazo superior al del último vencimiento observado, T_n , a pesar que reconoce que las estimaciones más allá del último vencimiento, e incluso antes, son poco reales. En concreto establece el límite de una buena estimación en 18 años. En relación a los nodos extras, resulta curioso que Steeley (1991) efectivamente toma nodos fuera del intervalo de estudio, mientras que otros autores, por ejemplo Zangari (1997), cuando emplean B-splines igualan los nodos extras inferiores a d_0 y los superiores a d_n : $d_{-k} = d_{-k+1} = \dots = d_0 = 0$ y $d_n = d_{n+1} = \dots = d_{n+k} = T_n$.

Por otro lado, aunque comparte la opinión de que es deseable que las restricciones del modelo se apliquen en base a los tipos forward, tal como proponen Schaefer (1981) y Shea (1984), considera altamente peligroso establecer cualquier tipo de restricción, salvo que se incluyan *ad hoc*, ya que la única restricción natural que puede imponerse es que $D(0) = 1$; que incorpora al modelo en forma de restricción lineal para aplicar mínimos cuadrados restringidos.

Steeley (1991), al contrario que otros autores, no selecciona los nodos internos a través de la metodología de McCulloch (1975), sino que se basa en la práctica del mercado que clasifica los títulos en vencimientos a corto⁷², medio y largo, por lo que divide la muestra en tres subintervalos. Después de diversas consideraciones empíricas determina los nodos en los vencimientos a cinco y diez años, lo que supone, en el caso del mercado británico, un reparto equitativo de la muestra entre los tres subintervalos considerados. En definitiva, estableciendo este número de nodos y grado cúbico, el modelo emplea seis funciones, por lo que de forma equivalente es necesario estimar seis parámetros.

Este modelo se considera un gran avance en la modelización de la curva de tipos porque, según Steeley (1991), no obtiene ni tipos forward negativos ni poco estables, solucionando los problemas detectados en los modelos propuestos con anterioridad por otros autores.

3.4.8 Svensson (1994)

A pesar de que Nelson y Siegel (1987) se plantean la escasa utilidad del segundo término que contiene la ecuación del modelo que proponen, Svensson (1994) cree que es necesario no sólo mantener éste sino añadir un término adicional que aporte a la curva más flexibilidad; para ello, añade otro parámetro constante, t_2 . De este modo, la ecuación que define el tipo forward instantáneo es:

$$f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 e^{-\frac{t}{t_1}} + \mathbf{b}_2 \frac{t}{t_1} e^{-\frac{t}{t_1}} + \mathbf{b}_3 \frac{t}{t_2} e^{-\frac{t}{t_2}}.$$

⁷² Cabe destacar que considera corto plazo aquellos vencimientos inferiores a cinco años, aunque observa que en el mercado se consideran como tales los vencimientos inferiores a siete años.

Al igual que en el modelo anterior si integramos esta ecuación en el intervalo $(0,t)$ y dividimos por t obtenemos la ecuación de la curva de tipos:

$$h(t) = b_0 + (b_1 + b_2) \left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}\right) \frac{t_1}{t} - b_2 e^{-\frac{t}{t_1}} + b_3 \left[\left(1 - e^{-\frac{t}{t_2}}\right) \frac{t_2}{t} - e^{-\frac{t}{t_2}} \right]$$

La interpretación del nuevo parámetro b_3 es equivalente a la de b_2 , la única diferencia entre ambos es la pendiente de la curva a la que acompañan, que en el primer caso está condicionada por t_2 . La inclusión de este término adicional permite la existencia de más de un extremo, por lo que el modelo puede presentar, a la vez, un máximo y un mínimo. Como contrapartida el problema de correlación entre variables, ya preocupante en el modelo de Nelson y Siegel (1987), se ve amplificado; por otro, cuando t_2 toma valores próximos a t_1 no se pueden estimar los valores de los parámetros.

Otra diferencia respecto a la metodología de Nelson y Siegel (1987) es que estima todos los parámetros a través de máxima verosimilitud, aunque considera que también se podría emplear mínimos cuadrados no lineales o el método de los momentos generalizados.

3.4.9 Hunt (1995B)

Hunt (1995B) se centra en la modelización de los tipos forward y propone cuatro modelizaciones alternativas para seleccionar cuál de ellas es mejor empíricamente. Las dos primeras propuestas constan de cuatro parámetros y consisten en polinomios simples:

$$f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_3 t^3 \quad \text{y} \quad f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_3 t^4.$$

Esto es, analiza la especificación tradicional que emplea un polinomio cúbico y una variación de la especificación propuesta por Adams y Van Deventer (1994) que incluye el término de cuarto orden.

Para Hunt (1995B) el uso de polinomios tiene una serie de ventajas prácticas, entre las que destaca que la estructura para los tipos spot derivada de la forward es similar. Esto es fácil de comprobar ya que los tipos spot se calculan como el cociente entre la integral en el intervalo de los tipos forward y el plazo de referencia. En términos de tipos cupón-cero estos dos modelos quedarían:

$$h(t) = \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_1 t + \frac{1}{3} \mathbf{b}_2 t^2 + \frac{1}{4} \mathbf{b}_3 t^3 \quad \text{y}$$

$$h(t) = \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_1 t + \frac{1}{3} \mathbf{b}_2 t^2 + \frac{1}{5} \mathbf{b}_3 t^4.$$

La tercera especificación surge de considerar una función de Laguerre con tres parámetros: $f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 e^{b_2 t}$ que supone modelizar la curva de tipos como:

$$h(t) = \mathbf{b}_0 + \frac{1}{t} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2} (e^{b_2 t} - 1).$$

Para Hunt (1995B) el empleo de funciones de Laguerre tiene como ventaja principal que permite de forma natural la existencia de una asíntota en los tipos forward. Sin embargo, considera que la utilización de más de tres parámetros hace que el modelo sea empíricamente intratable, dando lugar a problemas de multicolinealidad que impiden lograr la convergencia del estimador máximo - verosímil.

Para finalizar propone el siguiente modelo:

$$f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 [t/(t+1)] \Rightarrow h(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 (t^{1/2}) + \mathbf{b}_2 \ln(t+1) t^{-1}$$

Y concluye que la especificación polinómica de cuarto orden con omisión del término cúbico es la más adecuada tanto desde la perspectiva de la curva de tipos cupón-cero como de la curva de tipos forward correspondiente. A este mismo resultado llegan Adams y Van-Deventer (1994).

Para la aplicación de estas propuestas hay que seguir la metodología empleada por Carleton, Chambers y Waldman (1984) ya que los modelos resultantes son no lineales.

3.5 OTRAS PROPUESTAS DE MODELIZACIÓN

En este apartado se recogen algunas de las propuestas más recientes formuladas en torno al estudio de la modelización de la estructura temporal de tipos de interés que por sus peculiaridades no son directamente clasificables dentro del conjunto de modelos estudiados anteriormente.

De forma general, podríamos diferenciar los trabajos que se desarrollarán a continuación en base a lo que se considera el centro de atención de su estudio; así, por un lado, nos encontramos con Mastronikola (1991) quien explica la metodología empleada por el Banco de Inglaterra que centra su interés en la obtención de la curva de rendimientos a la par o Dahlquist y Svensson (1994) que nos sirven de ejemplo de la aplicabilidad de los modelos de estimación de la ETTI al estudio de su dinámica al emplear la definición de la estructura temporal que proponen Longstaff y Schwartz (1992) en su modelo de equilibrio.

Por otro lado, se tienen los estudios cuyo fin principal no es proponer nuevas funciones de aproximación sino una metodología diferente para la estimación de los parámetros. En

este grupo se encuentran Adams y Van Deventer (1994) que son los primeros en proponer un criterio de elección de los parámetros del modelo basado no sólo en la minimización de los errores de estimación, como se había hecho hasta ahora, sino que incorporan un factor que mide la suavidad de la curva forward resultante. En el mismo sentido, trabajan Fisher, Nychka y Zervos (1995) o Waggoner (1997) que tratan de mejorar esta metodología.

3.5.1 Banco de Inglaterra [Mastronikola (1991)]

El Banco de Inglaterra modeliza la curva de rendimientos a la par⁷³ teniendo en cuenta el efecto impositivo y tomando como única hipótesis la racionalidad de los inversores que buscan maximizar su rentabilidad después de impuestos⁷⁴.

Dado que la TIR depende de dos factores: cupón y tiempo hasta el vencimiento, lo que debe considerarse es una superficie de rendimientos en vez de una curva de rendimientos; de tal modo que la curva de rendimientos a la par es la intersección de esta superficie con el plano que se forma al igualar los cupones con las TIR's, es decir, el plano donde se sitúan todos los bonos hipotéticos a la par⁷⁵. De este modo, con la consideración de una superficie de rendimientos, se puede observar tanto la relación precio-tiempo como precio-cupón.

En el primer caso, emplean una técnica algo compleja para ajustar un spline cúbico sobre las TIR's observadas en el mercado.

⁷³ Este concepto es equivalente al de curva de tipos cupón-cero [véase Capítulo 1]. En el anexo C de Deacon y Derry (1994) se deriva la curva de tipos forward a partir de esta especificación.

⁷⁴ A partir de ahora se obviará el tratamiento impositivo que ha sido desarrollado en el Capítulo 1.

⁷⁵ Véase el Diagrama A en Mastronikola (1991).

Al contrario que McCulloch (1975) quien define para todo el intervalo diferentes funciones base que pondera y suma, el Banco de Inglaterra usa un conjunto de funciones cúbicas que ajustan la curva en cada subintervalo a la vez que restringe que las segundas derivadas de las funciones adyacentes sean igual al nodo para conseguir una curva estimada suave. Además, se requiere que el tramo corto de la curva presente pendiente constante, para ello se obliga a que la segunda derivada tome valor cero, y que el tramo a largo sea plano, esto es, que su primera y segunda derivadas sean nulas.

En definitiva, emplean en la modelización splines polinómicos cúbicos definidos en un conjunto de seis nodos fijos⁷⁶ cuyos parámetros estiman minimizando la suma de los cuadrados de los residuos en términos de rendimientos a través de métodos no lineales. Para aplicar el modelo, proceden primero a una transformación del argumento de la función tal que: $u = 1 - e^{-st}$; donde s es un parámetro predeterminado⁷⁷, de este modo se traslada el intervalo de trabajo de $[0, \infty)$ a $[0, 1]$. El modelo original consta de doce parámetros a estimar ya que tiene en cuenta el efecto de los impuestos y otras consideraciones propias de los títulos británicos, de los que sólo seis se corresponden a la especificación de los splines.

Cabe destacar que su metodología es muy similar a la de Fong y Vasicek (1982) ya que en realidad emplean un spline exponencial de tercer orden, pero se termina ajustando la curva a través de splines polinómicos cúbicos debido a la transformación que realizan sobre el plazo de vencimiento de cada bono.

⁷⁶ Que establecen en 0, 2, 5, 10, 15 e ∞ , con lo que logran intervalos casi equiespaciados en el intervalo transformado.

⁷⁷ Parece ser que un valor de 0'1 es adecuado.

3.5.2 Dahlquist y Svensson (1994)

Estos autores analizan el modelo teórico de equilibrio de Longstaff y Schwartz (1992) y el de Nelson y Siegel (1987) para valorar cuál es el más adecuado desde el punto de vista del análisis de la política monetaria. Por tanto, al igual que Svensson (1994) su objetivo principal no es estimar la curva de tipos y esto hace que la precisión y suavidad exigida sea diferente que en otros estudios.

Dahlquist y Svensson (1994) no analizan el modelo de equilibrio de Longstaff y Schwartz (1992) que es bastante complejo, sino que usan la forma funcional propuesta por éstos sin comprobar si las restricciones teóricas del modelo se cumplen o no. Este modelo es muy flexible pero su mejora en el ajuste es marginal, su cálculo es complejo y la convergencia difícil de obtener, por lo que sólo se recomienda en caso de que la estructura temporal que se quiere aproximar tenga formas muy complejas y el ajuste con cualquier otro modelo sea de mala calidad.

El modelo de Longstaff y Schwartz (1992) parte de la hipótesis de que la dinámica de los tipos de interés se puede explicar a través de los cambios de dos variables de estado: el tipo spot instantáneo y la volatilidad del mismo. A partir de aquí podemos derivar la función de descuento en equilibrio como solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales⁷⁸. Esta especificación permite que el modelo tenga más de un extremo local.

La propuesta de Dahlquist y Svensson (1994) nos permite destacar la estrecha interrelación existente entre los modelos

⁷⁸ La formulación es bastante compleja y puede encontrarse en Dahlquist y Svensson (1994) o en el artículo original de Longstaff y Schwartz (1992).

estáticos y dinámicos de la estructura temporal, de tal modo que se podría haber adaptado cualquier otra especificación dinámica que incorpore la estimación de la curva a nuestro estudio.

3.5.3 Adams y Van Deventer (1994)

Estos autores no proponen un modelo en sí de aproximación de la curva de tipos sino una metodología alternativa a la utilización en la estimación de los parámetros de la minimización de la suma de los cuadrados de los errores. Se centran en el estudio de la curva de tipos forward y eligen la función que mejor ajusta en términos de la suavidad lograda por ésta. Para ello, definen la curva forward más suave en un intervalo $[0, T]$ como aquélla que minimiza la función objetivo:

$$Z = \int_0^T [f''(s)]^2 ds,$$

donde $f''(s)$ es la segunda derivada de la curva de tipos forward para un vencimiento s .

Para comprender porqué esta especificación es una medida natural de la suavidad podemos expresarla en forma discreta:

$$Z = \sum_{i=0}^T [f''(t_i) - 0]^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Como la segunda derivada mide la variación en la tasa de cambio de una curva, cuanto más cerca esta su valor de cero más suave será la misma. La suavidad también requiere que la segunda derivada sea pequeña en cada punto del tiempo de todo el intervalo $[0, T]$; por tanto deberíamos requerir que la suma o integral de las desviaciones al cuadrado respecto al cero de las segundas derivadas sea lo más pequeña posible. En la práctica la minimización de Z no tiene significado salvo que se integre en un

modelo de determinación de la estructura temporal; por lo que en este ámbito, estiman la ETTI modelizando los tipos forward a través de polinomios y estimando los parámetros del mismo minimizando la función objetivo:

$$\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2 + Z$$

La minimización de esta función es un intercambio entre minimizar el primer término que mide la bondad del ajuste y el segundo que mide la suavidad.

En general, usando esta función objetivo, se pueden determinar los parámetros de cualquier forma funcional de modo que produzca la curva de tipos forward más suave posible⁷⁹ consistente con el modelo y los datos empleados. Independientemente de esto, Adams y Van Deventer (1994) consideran que la forma funcional que produce curvas de tipos forward más suaves es un polinomio de cuarto grado sin término cúbico ni cuadrático.

3.5.4 Fisher, Nychka y Zervos (1995)

Estos autores proponen una técnica similar a los anteriores, trabajan directamente sobre los tipos forward que aproximan por splines que denominan “suavizados” porque llevan incorporados un castigo por exceso de variabilidad cuya magnitud se controla por un único parámetro; de tal modo que un aumento en la penalización reduce el número efectivo de parámetros del spline. Así permiten que sean los datos quienes determinen el número apropiado de parámetros que definen al spline. En los splines de

⁷⁹ Desde el punto de vista de la definición de suavidad proporcionada por estos autores.

regresión el comportamiento oscilatorio se reduce disminuyendo el número de nodos y controlando su espaciado; mientras que en los splines de suavizado la oscilación se controla a través de la penalización sin reducir el número de nodos.

Definen la penalización como:

$$\lambda \int_0^T [g''(s)]^2 ds.$$

Esta especificación sólo se diferencia de la propuesta por Adams y Van Deventer (1994) por la inclusión de la constante λ . Un inconveniente a tener en cuenta, en ambos métodos, es que la penalización reduce el comportamiento oscilatorio pero también reduce la precisión del ajuste.

Especifican la función de aproximación como un B-spline cúbico definido sobre un conjunto de nodos distribuidos en base a la distribución de los vencimientos de los títulos, siendo el número de nodos recomendado la tercera parte del número de nodos empleados en la estimación. Por ejemplo, para el caso de tres nodos, el nodo interior se correspondería con la mediana de los vencimientos. Y se define la función objetivo a minimizar de forma similar al caso anterior como:

$$\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2 + I \int_0^T [g''(t)]^2 dt$$

Realizan la aproximación tanto sobre la función de descuento como sobre el logaritmo de ésta y los tipos forward y encuentran que trabajando sobre esta última variable se gana en precisión y en fiabilidad.

3.5.5 Waggoner (1997)

Bliss (1996) estudia el modelo presentado por Fisher, Nychka y Zervos (1995) y considera que se podrían obtener mejores resultados si I dependiese del vencimiento, en concreto si $\lambda(t)$ fuese creciente en t . Waggoner (1997) sigue sus indicaciones y desarrolla teórica y empíricamente este modelo especificando una penalización pequeña en el corto plazo y un valor mayor en el largo, permitiendo, de este modo, que en el tramo a corto exista la flexibilidad suficiente pero que el largo plazo no presente movimientos oscilatorios. De forma similar a Fisher, Nychka y Zervos (1995) la función a minimizar es:

$$\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2 + \int_0^T I(t) [g''(t)]^2 dt$$

$$\text{con } \lambda(t) = \begin{cases} 0'1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10. \\ 100000 & t \geq 10 \end{cases}$$

La única dificultad de esta propuesta frente a la de Fisher, Nychka y Zervos (1995) es que el método es no lineal.

CAPÍTULO 4:
NUEVAS PROPUESTAS PARA LA MODELIZACIÓN DE
LA ETTI

En este capítulo se analizan teóricamente los modelos expuestos en el capítulo anterior y se proponen diversas especificaciones alternativas a éstos que, inicialmente, desde un punto de vista analítico, pueden generar mejores aproximaciones de la estructura temporal de tipos de interés.

Para llevar a cabo el análisis nos centramos en el estudio de los valores que toman las funciones de descuento y de tipos forward en los límites del intervalo temporal, como indicativos de la idoneidad del modelo para cumplir las condiciones que deben mostrar ambas curvas.

4.1 INTRODUCCIÓN

Para Deacon y Derry (1994) la elección de las funciones de aproximación es inevitablemente subjetiva, aunque es necesario cumplir ciertas propiedades esenciales: la función de descuento estimada debe ser positiva, monótona decreciente (para evitar tipos forward negativos) y su valor en $t=0$ debe ser: $D(0)=1$. Esta subjetividad define lo que mayoritariamente se ha hecho en la estimación de la ETTI. La mayoría de autores se han limitado a proponer diferentes especificaciones matemáticas sin tener en cuenta las características que debe cumplir la función a aproximar y el resto de elementos relacionados, especialmente los tipos forward.

Para Bhar y Chiarella (1996) la suavidad de los tipos forward es de extrema importancia no sólo por el creciente número de instrumentos financieros basados en éstos, como *caps*, *collars*, etc., sino también porque tanto la función de tipos forward como sus derivadas son *inputs* críticos en los modelos dinámicos de la estructura temporal del tipo de Heath, Jarrow y Morton (1992).

La mayor parte de los investigadores, amparados en la flexibilidad que proporcionan los splines, han ido probando con diferentes especificaciones de los mismos sin que los resultados se viesen mejorados. De hecho, algunos autores, como Núñez (1995), consideran que desde McCulloch (1975) poco se ha hecho por mejorar la estimación de la curva de tipos, a pesar de que cada vez se proponen modelos de mayor complejidad matemático-econométrica. En general, los métodos presentados no han proporcionado resultados superiores bien por carecer de flexibilidad, por implicar supuestos no contrastables o porque no se obtienen mejores resultados y en cambio suponen la aplicación de métodos de estimación complejos y costosos.

Desde nuestro punto de vista, el problema reside, principalmente, en que la mayoría de modelos se han enunciado sin tener en cuenta las características del problema estudiado. En este sentido, consideramos que cualquier propuesta de modelización de la curva de tipos ha de tener en cuenta las condiciones que debe cumplir la función de descuento a la vez que recoger la suavidad de la curva de tipos forward y su comportamiento asintótico en el largo plazo.

Además, es necesario que la forma funcional propuesta sea lo suficientemente flexible como para minimizar el error de aproximación, esto es, recoja con precisión los precios negociados en el mercado y lo suficientemente suave como para poder valorar plazos no negociados en el mercado, incluso los situados fuera del límite superior del intervalo.

Se debe, entonces, desde el punto de vista de la función de descuento, buscar una especificación que logre que:

$$D(0)=1, \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0 \quad \text{y} \quad D(t_1) > D(t_2) > \dots > D(t_n) \text{ tal que}$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Esto es, el valor de un flujo percibido hoy no necesita ser actualizado, los flujos recibidos en momentos muy lejanos del tiempo carecen de valor y la función de descuento debe ser monótona decreciente para evitar la existencia de tipos forward negativos.

A la vez que, en relación a los tipos forward se debe lograr que: $f(t) \geq 0$ y que $f(t)$ tienda asintóticamente a un valor acotado cuando $t \rightarrow \infty$.

Tal y como veremos a continuación de todos los modelos que se han propuesto hasta el momento sólo el de Contreras y Navarro (1993) cumple de un modo natural las condiciones anteriores. Mientras que los modelos de Schaefer (1981), Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) se comportan del modo adecuado únicamente si se cumplen ciertas relaciones entre los parámetros.

4.2 ANÁLISIS DE LOS MODELOS DE RENDIMIENTO

Los modelos de curvas de rendimientos pueden convertirse fácilmente en modelos de precios. Basta con considerar que la función de aproximación propuesta para la modelización de la TIR se corresponde a la que se debe emplear para la aproximación de los tipos cupón-cero.

El análisis previo de estos modelos nos puede ayudar a prever los resultados que se obtendrán en el análisis empírico efectuado en el siguiente capítulo. En concreto, nos interesa estudiar los valores que toman tanto la función de descuento como la curva de

⁸⁰ Esta condición también garantiza que $h(t) \geq 0$.

tipos forward en los casos extremos, esto es para $t = 0$ y cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso del modelo de Cohen, Kramer y Waugh (1966), $h(t) = b_0 + b_1 t + b_2 [Ln(t)]^2$, la función de descuento y la de tipos forward se definen, respectivamente, como:

$$D(t) = \exp[-(b_0 t + b_1 t^2 + b_2 [Ln(t)]^2 t)]$$

$$f(t) = b_0 + 2b_1 t + b_2 [2Ln(t) + [Ln(t)]^2]$$

cuyos límites para $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \infty$ son⁸¹:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} D(t) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & b_1 > 0 \\ 0, & b_1 = 0 \begin{cases} b_2 > 0 \\ b_2 = 0 \text{ y } b_0 > 0 \end{cases} \\ 1, & b_0 = b_1 = b_2 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

por lo que la función de descuento toma los valores esperados en el límite superior dependiendo del valor y relaciones entre los parámetros. Teniendo en cuenta que el signo de b_1 determina de forma más o menos directa el signo de la pendiente de la curva de tipos⁸², el cumplimiento de $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, implica una restricción muy fuerte sobre las formas que pueden adoptar las mismas.

En cuanto a los tipos forward, se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \pm \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \pm \infty$$

⁸¹ El caso $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ no tiene sentido porque supone la anulación del modelo y se expone únicamente para recoger todas las posibilidades.

⁸² Véanse las Tablas 3.1 y 3.2 y la Figura 3.1 [p.82, Capítulo 3].

En el primer caso, cuando $t \rightarrow 0^+$, el signo será positivo o negativo según lo sea b_2 . Y en el segundo, cuando $t \rightarrow \infty$, el signo viene determinado por b_1 también de forma directa.

En cualquier caso, se observa que los tipos asintóticos a largo no convergerían y que dado la existencia del logaritmo en la especificación de la curva existen problemas en el cálculo del tipo instantáneo.

El modelo de Fisher (1966), $h(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 \ln(t)$, obtiene resultados idénticos:

$$D(t) = \exp[-(b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3 + b_3 \ln(t))]$$

$$f(t) = b_0 + 2b_1 t + 3b_2 t^2 + b_3 [1 + \ln(t)]$$

Y por tanto, de forma similar al caso anterior:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} D(t) = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & b_2 > 0 \\ 0, & b_2 = 0 \begin{cases} b_1 > 0 \\ b_1 = 0 \begin{cases} b_3 > 0 \\ b_3 = 0, b_0 > 0 \end{cases} \end{cases} \\ 1, & b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \pm \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \pm \infty$$

En esta ocasión, la tendencia hacia $\pm\infty$ viene marcada, cuando $t \rightarrow 0^+$ de forma inversa por el signo de b_3 y cuando $t \rightarrow \infty$ de forma directa por el signo de b_2 .

Si analizamos el modelo de Bradley y Crane (1973), $h(t) = t^{b_2} e^{(b_0 + b_1 t)} - 1$, observamos que los resultados no sólo no son mejores sino que, desde el punto de vista de los tipos forward, el problema se complica aún más. Tenemos, por un lado, que la función de descuento toma la forma:

$$D(t) = \exp[-t(t^{b_2} e^{(b_0 + b_1 t)} - 1)]$$

por lo que: $D(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & b_1 > 0 \\ \infty, & b_1 \leq 0 \end{cases}$.

Esto es, para que se cumplan las propiedades de la función de descuento se tiene que imponer que $b_1 > 0$. Por otro lado, en relación a los tipos forward tenemos:

$$f(t) = e^{(b_0 + b_1 t)} t^{b_2} (1 + b_1 t + b_2) - 1$$

que da como resultado:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \begin{cases} -1, & b_2 > 0 \\ e^{b_0} - 1, & b_2 = 0 \\ \infty, & -1 < b_2 < 0 \\ b_1 e^{b_0} - 1, & b_2 = -1 \\ -\infty, & b_2 < -1 \end{cases}$$

por lo que, los casos que interesan suponen o bien la anulación del parámetro b_2 o establecer su valor en -1 . En cuanto al límite cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} \infty, & b_1 > 0 \\ -1, & b_1 < 0 \\ \infty, & b_1 = 0, b_2 > 0 \\ e^{b_0} - 1, & b_1 = 0, b_2 = 0 \\ -1, & b_1 = 0, b_2 < 0 \end{cases}$$

por lo tanto bajo cualquier supuesto, salvo que el modelo quede finalmente definido como $h(t) = e^{b_0} - 1$ no se logra la convergencia en los tipos forward. Además, para cumplir las propiedades de la función de descuento $b_1 > 0$, que no es compatible con la convergencia de los tipos forward.

Por último, la propuesta de Echols y Elliott (1976), $h(t) = e^{(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)} - 1$, presenta aún más dificultades. Para que la función de descuento, $D(t) = \exp[-t(e^{(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)} - 1)]$, en $t=0$ valga la unidad, $D(0) = 1$, es necesario restringir el parámetro b_2 de modo que $b_2 \leq 0$, en caso contrario se tiene $D(0) = 0$. También surgen problemas en el otro extremo del intervalo, donde se obtienen los siguientes resultados:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & b_1 > 0 \\ \infty, & b_1 < 0 \\ 0, & b_1 = 0 \text{ y } b_0 > 0 \\ 1, & b_1 = 0 \text{ y } b_0 = 0 \\ \infty, & b_1 = 0 \text{ y } b_0 < 0 \end{cases}$$

Así, para cumplir las propiedades exigidas a la función de descuento se debe establecer que $b_2 \leq 0$ y que $b_1 > 0$ o que $b_1 = 0$ y $b_0 > 0$.

En cuanto a la función de tipos forward:

$$f(t) = e^{(b_0 + b_1 t + b_2 t^{-1})} [1 + t b_1 - b_2 t^{-1}] - 1$$

se tiene:

$$f(0) = \begin{cases} e^{b_0} - 1, & b_2 = 0 \\ -1, & b_2 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} e^{b_0} - 1, & b_1 = 0 \\ \infty, & b_1 > 0 \end{cases}$$

Por lo que si queremos garantizar la convergencia de los tipos forward a largo plazo se debe eliminar el parámetro b_1 del modelo lo que significa, desde el punto de vista de la función de descuento, que b_0 debe ser positivo.

En definitiva, si bien la modificación de los modelos de curvas de rendimiento para su aplicación en los modelos de precios es relativamente fácil, las características de los mismos no parecen ser las más adecuadas para el ajuste de la curva de tipos forward ni, en ocasiones, de la función de descuento por lo que, en teoría, no se puede esperar que estos modelos obtengan resultados satisfactorios.

4.3 ANÁLISIS DE LOS MODELOS DE PRECIOS

Se analizan en este apartado el comportamiento en el límite de la función de descuento y la curva de tipos forward en los diferentes modelos de precios detallados en el capítulo anterior.

Las funciones empleadas para cada modelo se recogen de forma expresa, cuando se considera necesario, en el Anexo 3.

Respecto al modelo de McCulloch (1975) el estudio de las funciones de descuento y de tipos forward en los extremos del intervalo $[0, \infty)$ da como resultado, para la función de descuento que:

$$D(0) = 1 \text{ y}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \pm \infty, \text{ dependiendo directamente del signo de:}$$

$$\mathbf{b}_m + \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{b}_j (d_{j+1} - d_{j-1}) \quad [1].$$

Dado que no se logra la convergencia asintótica hacia cero, al menos sería deseable que la expresión anterior tenga signo negativo, es decir, tienda hacia $-\infty$, para que la función de descuento no supere la unidad.

Si la ecuación [1] vale cero, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \sum_{j=1}^{m-1} (d_{j+1} - d_{j-1}) \frac{(-d_{j+1} - d_j - d_{j-1})}{6} < 0.$$

En cuanto a los tipos forward se tiene que:

$$f(0) = -\mathbf{b}_m \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Esto obliga a que \mathbf{b}_m sea negativo para poder obtener un tipo forward instantáneo positivo. En cualquier caso la tendencia de la curva de tipos forward en el límite es hacer su valor cero.

En el modelo de Schaefer (1981) el estudio de los valores en los extremos se realiza, ante la falta de información sobre el cambio de variable a aplicar, bajo el supuesto de que éste es de

tipo exponencial, como el propuesto por Fong y Vasicek (1982); para $x\hat{I} [0, 1]$ y $t\hat{I} [0, \infty)$, $x(t) = 1 - e^{-t}$.

Para la función de descuento se tiene:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \lim_{x \rightarrow 1} G(x(t)) = 1 + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \sum_{r=0}^{m-j} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} \frac{1}{j+r}$$

cuyo resultado depende del valor de los parámetros \mathbf{b}_j , pero en ningún caso tiende a $\pm\infty$, ya que el sumatorio está acotado.

Y en el caso de la curva forward nos encontramos con:

$$f(0) = \mathbf{s} \mathbf{b}_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\mathbf{s} (1-x) \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \sum_{r=0}^{m-j} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} x^{j+r-1}}{1 + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \sum_{r=0}^{m-j} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} \frac{x^{j+r}}{j+r}} \right], \text{ este}$$

límite es cero salvo cuando:

$$1 + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \sum_{r=0}^{m-j} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} \frac{1}{j+r} = 0,$$

en cuyo caso vale \mathbf{s} .

En concreto, a modo de ejemplo, si se toma $m=3$ se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \lim_{x \rightarrow 1} G(x) = 1 - \frac{1}{6} \mathbf{b}_2 - \frac{1}{3} [\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3] \text{ y}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} s, & 1 - \frac{1}{6}b_2 - \frac{1}{3}[b_1 + b_3] = 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

El análisis empírico del modelo de Fong y Vasicek (1982) se ha desarrollado en base a tres modelizaciones diferentes⁸³. Una de ellas, propone estimar directamente la función de descuento a través de una combinación de funciones exponenciales:

$$D(t) = 1 + b_1[e^{-at} - 1] + b_2[e^{-2at} - 1] + b_3[e^{-3at} - 1]$$

Cuyos valores en los límites del intervalo son:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 1 - b_1 - b_2 - b_3 = 0 \hat{U} b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

En cuanto a los tipos forward, se observan los siguientes valores:

$$f(0) = a[b_1 + 2b_2 + 3b_3]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} 3a, & b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Por lo que, si se consigue que $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, entonces se logra automáticamente la convergencia de los tipos forward a un nivel **3a**.

En la segunda modelización analizada se realiza el cambio de variable exponencial propuesto por Fong y Vasicek (1982), pero se

⁸³ Una explicación detallada sobre las mismas se encuentra en el Capítulo 5.

siguen las indicaciones de Shea (1984) en la determinación de la función a emplear. De este modo, se aproxima la función de descuento transformada, $G(x(t))$, a través de un polinomio cúbico:

$$D(t) = G(1 - e^{-at}) \circ G(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

El valor de la función de descuento y tipos forward en los límites es bastante similar que en el caso anterior. Así tenemos, deshaciendo previamente el cambio de variable aplicado:

$$D(0) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 1 + b_1 + b_2 + b_3 = 0 \quad \hat{U} \quad b_1 + b_2 + b_3 = -1$$

$$f(0) = -b_1a \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} 3a, & b_1 + b_2 + b_3 = -1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Igual que cuando se emplea una combinación de funciones exponenciales sobre el intervalo original, si se logra que el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de $D(t)$ sea 0, se consigue la convergencia de los tipos forward.

Por último, se estudia la modelización que Contreras y Navarro (1993) proponen del modelo de Fong y Vasicek (1982) cuando lo estiman en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada.

El estudio de los límites es, a pesar que se emplean splines, bastante sencillo ya que existe una única especificación independientemente del número de observaciones disponibles y se define un único nodo interior, d . La función de descuento cumple sin restricciones⁸⁴ las propiedades buscadas:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$$

⁸⁴ Bajo el supuesto que, en el cambio de variable, a es positiva, característica que debe cumplir ya que representa el tipo a largo plazo.

Y en cuanto a los tipos forward se tiene que:

$$f(0) = a[1 + b_1 + b_2(1 + 3d^2 - d^3) + b_3(d^2(d-3))] \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$$

Por tanto, esta propuesta es, hasta el momento, la única que cumple las condiciones buscadas de un modo natural.

Carleton, Chambers y Waldman (1984) emplean directamente polinomios para la aproximación de los tipos spot por lo que cabe esperar a priori que la curva de tipos forward no converja asintóticamente en el largo plazo. En el caso que se emplee la siguiente modelización de la función de descuento:

$$D(t) = \exp[-(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3)]$$

se obtienen los siguientes valores en los límites:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \left\{ \begin{array}{l} b_3 > 0 \\ b_3 = 0 \end{array} \right. \begin{cases} b_2 > 0 \\ b_2 = 0, b_1 > 0 \end{cases} \\ 1, & b_1 = b_2 = b_3 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Por tanto, la convergencia a cero de la función de descuento se logra si el parámetro no nulo que acompaña al término de mayor grado es positivo.

En cuanto a los tipos forward, que se definen como $f(t) = b_1 + t(2b_2 + 3tb_3)$, se tiene:

$$f(0) = \mathbf{b}_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \pm\infty$$

Dependiendo este último directamente del signo del coeficiente de mayor grado no nulo. Esto es, de \mathbf{b}_3 o de \mathbf{b}_2 en el caso de que $\mathbf{b}_3 = 0$ o de \mathbf{b}_1 cuando $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 = 0$.

Tal y como adelantamos la utilización de polinomios no permite que los tipos forward a muy largo plazo tiendan asintóticamente hacia una constante.

El modelo de Shea (1984) no presenta dificultades en el cálculo de sus límites y obtiene resultados muy similares que McCulloch (1975). En relación a los valores que toma la función de descuento se tiene:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \pm\infty$$

Y para los tipos forward se obtienen los siguientes valores:

$$f(0) = -\mathbf{b}_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Por lo que se demuestra que la propuesta de Shea (1984), si bien soluciona la inestabilidad de los tipos a muy largo plazo, en la medida que tienden asintóticamente hacia un valor constante, este valor no es representativo del que deben tomar los tipos en vencimientos extremos, ni la función de descuento en el límite superior se comporta de forma adecuada.

El modelo de Nelson y Siegel (1987) presenta un comportamiento en el límite de los tipos forward estable y logra la convergencia deseada, siempre y cuando el parámetro no lineal, β , sea positivo. En relación a la función de descuento también se observan valores apropiados, cuando $\beta > 0$, condición bastante lógica si se tiene en cuenta que representa el tipo asintótico al que

convergen los tipos forward. Se obtienen para ambos casos los siguientes resultados:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \mathbf{b}_0 > 0 \\ e^{(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)t}, & \mathbf{b}_0 = 0 \\ \infty, & \mathbf{b}_0 < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{b}_0 \hat{U} t > 0$$

Así, si $t > 0$ se logra la convergencia de los tipos forward en cuyo caso cabe esperar que el valor de \mathbf{b}_0 sea positivo por lo que también se consigue que $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$.

Steeley (1991) emplea B-splines y obtiene resultados similares a los presentados por McCulloch (1975) y Shea (1984). Para la función de descuento se obtienen exactamente los mismos resultados:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \pm \infty$$

Mientras que para el caso de los tipos forward, varía el valor del tipo instantáneo, $f(0)$, y se mantiene el resultado cuando $t \rightarrow \infty$:

$$f(0) = \frac{3}{d_2} [\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2] \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

El modelo de Svensson (1994) es muy similar al de Nelson y Siegel (1987), concretamente es una ampliación del de estos autores para tratar de lograr una mayor flexibilidad en la estimación de la curva de tipos; por ello, sus resultados y comportamiento en el límite son muy parecidos. De este modo se tiene:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \mathbf{b}_0 > 0 \\ e^{(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)t + \mathbf{b}_3 t_1}, & \mathbf{b}_0 = 0 \\ \infty, & \mathbf{b}_0 < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{b}_0 \hat{U}t \text{ y } t_1 > 0$$

Por tanto, vuelve a ser necesario que los tipos forward presenten un comportamiento asintótico hacia un valor razonable (positivo) para que la función de descuento tienda asintóticamente hacia cero. Para ello basta con que t y t_1 sean estrictamente positivos.

Por último, aunque las diferentes propuestas presentadas por Hunt (1995B) no serán analizadas empíricamente al no proponer ninguna modelización que sea significativamente diferente a las ya aplicadas, se ha desarrollado el estudio de los valores en los límites para comprobar si, a priori, estas alternativas pueden ser apropiadas.

Para el caso de $f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_3 t^3$, se tiene que:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \begin{cases} \mathbf{b}_3 > 0 \\ \mathbf{b}_3 = 0 \begin{cases} \mathbf{b}_2 > 0 \\ \mathbf{b}_2 = 0 \begin{cases} \mathbf{b}_1 > 0 \\ \mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{b}_0 > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 1, & \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f(0) = \mathbf{b}_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = 0 \\ \infty & \begin{cases} \mathbf{b}_3 > 0 \\ \mathbf{b}_3 = 0, \mathbf{b}_2 > 0 \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 = 0, \mathbf{b}_1 > 0 \end{cases} \\ -\infty & \begin{cases} \mathbf{b}_3 < 0 \\ \mathbf{b}_3 = 0, \mathbf{b}_2 < 0 \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 = 0, \mathbf{b}_1 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Como puede observarse, esta propuesta es muy similar a la de Carleton, Chambers y Waldman (1984), la diferencia radica en que la aproximación a través de polinomios cúbicos se realiza sobre los tipos forward [Hunt(1995B)], en vez de sobre los tipos spot [Carleton, Chambers y Waldman (1984)]. En general, se observa que no es posible lograr la convergencia de los tipos forward.

Por otro lado, la segunda especificación propuesta, $f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_3 t^4$, es prácticamente idéntica a la anterior y se obtienen los mismos valores en los límites.

Para $f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 e^{\mathbf{b}_2 t}$, en cambio, los resultados varían obteniéndose:

$$D(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \mathbf{b}_2 > 0 \begin{cases} \mathbf{b}_1 > 0 \\ \mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{b}_0 > 0 \end{cases} \\ 1, & \mathbf{b}_2 < 0, \mathbf{b}_0 > 0 \\ & \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{b}_2 > 0 \\ e^{\frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_2}}, & \mathbf{b}_2 < 0, \mathbf{b}_0 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f(0) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_2 < 0 \\ \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2 = 0 \\ \infty & \mathbf{b}_2 > 0 \end{cases}$$

En consecuencia, únicamente es posible lograr a la vez la convergencia de la función de descuento y un comportamiento asintótico de los tipos forward cuando $\mathbf{b}_2 < 0$ y $\mathbf{b}_0 > 0$, por lo que podría ser una buena alternativa a analizar.

Por último, para $f(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 [t/(t+1)]$, se tienen:
 $D(0) = 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \begin{cases} 0, & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 > 0 \\ \mathbf{b}_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_0 > 0 \\ \mathbf{b}_0 = 0 \mathbf{b}_2 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ 1, & \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0 \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f(0) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_2$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \pm\infty$, dependiendo directamente del signo de \mathbf{b}_1 .

Por tanto, esta especificación no es apropiada desde el punto de vista matemático ya que no cumple las condiciones teóricas que deben presentar tanto los factores de descuento como los tipos forward. De este modo, podemos concluir que la única alternativa propuesta por Hunt (1995B) que podría ser interesante analizar es la tercera.

4.4 DESARROLLO DE NUEVAS PROPUESTAS ALTERNATIVAS

A la vista de los resultados que se acaban de presentar, se puede afirmar que pocos han sido los modelos que se han enunciado teniendo en cuenta las características del problema estudiado, a pesar que desde el punto de vista matemático, existen varias clases de funciones que apropiadamente definidas pueden presentar estas características. Las funciones exponenciales, racionales y combinaciones de éstas son algunos ejemplos.

4.4.1 Funciones de Laguerre modificadas

Una forma de lograr nuestro objetivo, centrándonos en la aproximación de la función de descuento, es emplear una

modificación de la función de Laguerre que sustituye el polinomio simple de ésta por un cociente de polinomios. Esto es, se propone modelizar la función de descuento a partir de:

$$D(t) = \frac{p(t)}{q(t)} e^{-at}$$

Esta especificación surge de considerar que el tipo forward es la derivada de una función, $F(t)$, que se define como⁸⁵:

$$f(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} \equiv F'(t) \Rightarrow F(t) = -\ln D(t) + c$$

De este modo, para la aproximación propuesta, $D(t) = \frac{p(t)}{q(t)} e^{-at}$, se tiene que:

$$F(t) = a + \ln[q(t)] - \ln[p(t)]$$

$$\begin{aligned} \text{Y como } f(t) = F'(t) \quad \mathbf{P} \quad f(t) &= a + \frac{q'(t)}{q(t)} - \frac{p'(t)}{p(t)} \\ &= a + \frac{p(t)q'(t) - p'(t)q(t)}{p(t)q(t)}, \text{ con lo que:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a}$$

Por lo que, a representa el nivel asintótico de los tipos forward en el largo plazo; como consecuencia, en lo que sigue se supondrá que a es siempre positivo.

Para completar la modelización de la función de descuento es necesario especificar los polinomios $p(t)$ y $q(t)$. Antes de proponer

⁸⁵ c representa la constante de integración.

ninguna especificación concreta podemos comprobar que ya se cumplen dos de los objetivos perseguidos:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{a}$
-

Para que $D(0)=1$ tenemos que restringir que: $p(0)q^{-1}(0)=1$, esto es que ambos polinomios tengan el mismo término independiente. Existen multitud de formas de considerar este cociente de polinomios; la más sencilla es tomar $p(t)=1$ y $q(t)=1+b_1t$. De este modo se tiene la siguiente expresión:

$$D(t) = \frac{1}{1+b_1t} e^{-at}$$

que genera la siguiente especificación para los tipos forward:

$$f(t) = \mathbf{a} + \frac{b_1}{1+b_1t}$$

Si analizamos ambas funciones en los límites, se tiene:

$$D(0)=1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0 \quad f(0) = \mathbf{a} + b_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{a}$$

Por lo que se cumplen, en principio, las condiciones requeridas. Esta modelización, sin embargo, presenta dos problemas: por un lado, debe restringirse que $b_1 > 0$, porque en caso contrario la función de descuento es negativa para algunos valores de t y alcanza un polo. Esta condición también garantiza que los tipos forward tomen siempre valores positivos. Por otro

lado, aunque siempre se logra la convergencia en el límite; como $f(0) = a + b_1$, esta función sólo es apropiada para aproximar curvas decrecientes, ya que es incapaz de representar una forma creciente sin alcanzar antes valores negativos.

Para tratar de dotar de flexibilidad a esta propuesta es necesario aumentar el grado de los polinomios del cociente, por ejemplo, para el caso $p(t) = 1$ y $q(t) = 1 + b_1t + b_2t^2$, se tiene que la función de descuento sigue cumpliendo las propiedades requeridas. En esta ocasión, una condición suficiente para que el polinomio $q(t)$ no se anule es: $b_1^2 < 4b_2$; así $D(t) > 0 \forall t$.

La función de tipos forward queda definida como:

$$f(t) = a + \frac{b_1 + 2b_2t}{1 + b_1t + b_2t^2}$$

por lo que, de nuevo:

$$f(0) = a + b_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$$

La convergencia siempre se consigue, pero si además: $b_1^2 < 4b_2 - \frac{4b_2}{a^2}$, los tipos forward serán positivos.

De este modo, se puede ir aumentando el grado de ambos polinomios, $p(t)$ y $q(t)$, para aproximar de forma más precisa la función de descuento. Sin embargo, el número de condiciones que deben cumplir los parámetros para garantizar analíticamente que el modelo no genere ni factores de descuento ni tipos negativos es cada vez mayor y el modelo se hace intratable.

Por ejemplo, para el caso de que se emplee un cociente de polinomios de segundo grado: $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ y $q(t) = a_0 + b_1t + b_2t^2$. Una condición suficiente para que éstos no tengan ceros, esto es, sean siempre positivos o en términos de nuestro estudio:

garantizar la positividad de la función de descuento, consiste en establecer que⁸⁶: $a_1^2 - 4a_2 < 0$ y $b_1^2 - 4b_2 < 0$. De este modo:

- Si $a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow p(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow D(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.
- Si $b_1^2 - 4a_0b_2 < 0 \Rightarrow q(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow D(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, este tipo de propuesta, si bien matemáticamente es correcta tiene como inconveniente su dificultad de aplicación, ya que el modelo resultante no es lineal y es necesario imponer demasiadas condiciones a los parámetros; al menos en el desarrollo teórico, ya que posiblemente en la aplicación empírica los parámetros tomarán de forma natural el signo y valores adecuados, que serán los acordes con lo observado en el mercado.

El motivo de emplear el producto de una exponencial y un cociente de polinomios y no tomar únicamente la aproximación racional se debe a que, aunque las funciones racionales son las que ofrecen mejores resultados cuando la función a aproximar tiene un comportamiento asintótico y son las más apropiadas para reproducir la positividad, monotonía y convexidad de la función original [Späth (1997)], desde el punto de vista del problema estudiado, dan lugar a que la convergencia de los tipos forward, si se logra sea en cero.

4.4.2 Funciones exponenciales

Otra forma, menos compleja, de abordar el problema y dado que los inconvenientes de la especificación anterior se originan por el uso del cociente de polinomios, consiste en aproximar la función de descuento a través de una combinación de funciones exponenciales. En la medida, en que la función de descuento

⁸⁶ Sin pérdida de generalidad consideramos $a_0 = 1$.

presenta un decrecimiento exponencial derivado, directamente, de su especificación en relación a los tipos spot, $D(t) = e^{-th(t)}$, esta alternativa puede ser bastante buena.

Para ello, por ejemplo, podemos emplear una combinación lineal de funciones exponenciales del tipo $g_i(t) = e^{-I_i t}$, de tal modo que:

$$D(t) = a_0 e^{-I_0 t} + a_1 e^{-I_1 t} + a_2 e^{-I_2 t}$$

Para que $D(0) = 1$, hay que modificar esta función, estableciendo $a_0 = 1 - a_1 - a_2$, por lo que:

$$D(t) = e^{-I_0 t} + a_1 [e^{-I_1 t} - e^{-I_0 t}] + a_2 [e^{-I_2 t} - e^{-I_0 t}]$$

Así, para la función de descuento, se tiene:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$$

Y para los tipos forward:

$$f(t) = \frac{(1 - a_1 - a_2) I_0 e^{-I_0 t} + a_1 I_1 e^{-I_1 t} + a_2 I_2 e^{-I_2 t}}{(1 - a_1 - a_2) e^{-I_0 t} + a_1 e^{-I_1 t} + a_2 e^{-I_2 t}}$$

que da como resultado⁸⁷:

$$f(0) = I_0(1 - a_1 - a_2) + I_1 a_1 + I_2 a_2 \quad \text{y} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \text{Max}\{I_0, I_1, I_2\}$$

Esta modelización es bastante más sencilla que la anterior y no requiere tantas restricciones, aunque sigue manteniéndose la no linealidad del modelo. Un modo de evitar esto, es emplear, en vez de directamente una función exponencial, una combinación de

⁸⁷ Bajo la hipótesis $I_0, I_1 \text{ y } I_2 > 0$.

potencias truncadas. Esta aproximación se basa en la definición de función exponencial como el límite de la siguiente serie:

$$e^x \approx \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Esta modelización es similar a la que proponen Rose y Schworm (1980) y Chan, Mason y Suits (1978)⁸⁸. El principal inconveniente es que es necesario truncar la serie en un término bastante alto para que la aproximación sea aceptablemente buena.

También se puede abordar el problema proporcionando una aproximación para los tipos forward, en vez de trabajar con la función de descuento. Una forma sencilla de representar los tipos forward es establecer:

$$f(t) = b_0 + b_1 e^{-b_2 t}$$

función que converge a una asíntota horizontal siempre que b_2 sea positivo; en caso contrario los tipos crecerán ilimitadamente a medida que $t \rightarrow \infty$:

$$f(0) = b_0 + b_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = b_0$$

Por otro lado, para la función de descuento, $D(t) = \exp\left[-b_0 t - \frac{b_1}{b_2}(1 - e^{-b_2 t})\right]$, se obtienen los siguientes valores:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0, \quad \text{siempre que } b_0, b_2 > 0$$

Este modelo, que se corresponde con los dos primeros términos del modelo de Nelson y Siegel (1987), presenta tres inconvenientes: el modelo resultante no es lineal en los parámetros, no permite sino aproximar curvas crecientes o decrecientes puras, ya que es incapaz de adoptar formas mixtas, y

⁸⁸ Cfrs. Shea (1984).

si bien, la restricción de $b_0 > 0$ es bastante natural porque es el valor hacia donde convergen los tipos forward, la de $b_2 > 0$ no lo es tanto y es absolutamente necesaria para lograr esta convergencia y la de los factores de descuento hacia cero.

En general, la combinación de esta función con otra exponencial o con una racional, para dotar de mayor flexibilidad al modelo, supone el aumento del número de restricciones necesarias para lograr la convergencia.

Así pues, tal y como se ha visto, la aproximación directa, tanto de la función de descuento como de la curva de tipos forward, no es un trabajo sencillo ya que el modelo resultante, en el mejor de los casos, es no lineal en los parámetros (excepto si se emplea la serie truncada de potencias, en cuyo caso, el inconveniente es el elevado número de términos que es necesario tomar para lograr una buena aproximación) y, en ocasiones, es necesario establecer restricciones en el signo de los mismos que pueden ser, empíricamente, algo forzadas. Por tanto es necesario plantear el problema de aproximación de la función de descuento desde otra perspectiva; por ejemplo, trabajando, en vez de en el intervalo original $[0, \infty)$, en algún intervalo finito $[a, b]$. En los dos apartados siguientes se utiliza esta técnica del cambio de variable para generar modelos acordes con el problema estudiado.

4.4.3 Funciones definidas en el intervalo $[0,1]$

Una manera sencilla de cumplir las propiedades en los límites de la función de descuento sin ningún tipo de restricción adicional es emplear algún tipo de función, $g(x)$, o combinaciones de éstas, definidas en un intervalo finito $[a, b]$ que en a valga la unidad: $g(a) = 1$ y en b corte el eje de abscisas: $g(b) = 0$.

De este modo se define $D(t)=g(x(t))$, con $t \in [0, \infty)$ y $x \in [a, b]$. Realizando un cambio de variable apropiado, $x=x(t)$, desde nuestro intervalo, $[0, \infty)$, hasta el intervalo $[a, b]$, se consigue que la función de descuento transformada cumpla esas propiedades. Un intervalo adecuado en el que resulta sencillo definir funciones que cumplan estas características es: $[0, 1]$. Schaefer (1981), Fong y Vasicek (1982) y Contreras y Navarro (1993) definen sobre éste intervalo sus modelos.

Un cambio de variable apropiado para trasladar $t \in [0, \infty)$ a $x \in [0, 1]$ es establecer⁸⁹:

$$x=1-e^{-at} \Leftrightarrow t=-\ln(1-x)a^{-1}$$

En cuanto a las funciones que se pueden emplear tenemos que cualquier función del tipo:

$$g(x)=1-x^d, \quad d \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

cumple: $g(0)=1$ y $g(1)=0$.

Desde el punto de vista de la función de tipos forward hay que tener en cuenta que:

$$f(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} \quad \text{P} \quad f(t) = -\frac{g'(x(t))x'(t)}{g(x(t))}$$

Y su valor en los extremos dependerá de la especificación concreta que se emplee para aproximar $D(t)$. En nuestra opinión, para que la forma de la curva sea lo suficientemente versátil es suficiente emplear una combinación de las siguientes funciones:

$$g_0(x(t))=1-x \quad g_1(x(t))=1-x^2 \quad g_2(x(t))=1-x^3 \quad g_3(x(t))=1-x^{1/2} \quad \text{y} \\ g_4(x(t))=1-x^{1/3}$$

⁸⁹ Con $\alpha > 0$. Diversas consideraciones sobre el efecto del cambio de variable pueden encontrarse en el Capítulo 5 (Figura 5.1).

De esta forma se expresa la función de descuento como:

$$D(t) = G(x(t)) = \mathbf{b}_0 g_0(x(t)) + \mathbf{b}_1 g_1(x(t)) + \mathbf{b}_2 g_2(x(t)) + \mathbf{b}_3 g_3(x(t)) + \mathbf{b}_4 g_4(x(t)) \\ = \mathbf{b}_0(1-x) + \mathbf{b}_1(1-x^2) + \mathbf{b}_2(1-x^3) + \mathbf{b}_3(1-\sqrt{x}) + \mathbf{b}_4(1-\sqrt[3]{x})$$

Para que se cumpla que $D(0) = G(0) = 1$, es suficiente establecer $\mathbf{b}_0 = 1 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4$ por lo que el modelo queda como sigue:

$$D(t) = G(x(t)) = (1-x) + \mathbf{b}_1(x-x^2) + \mathbf{b}_2(x-x^3) + \mathbf{b}_3(x-\sqrt{x}) + \mathbf{b}_4(x-\sqrt[3]{x})$$

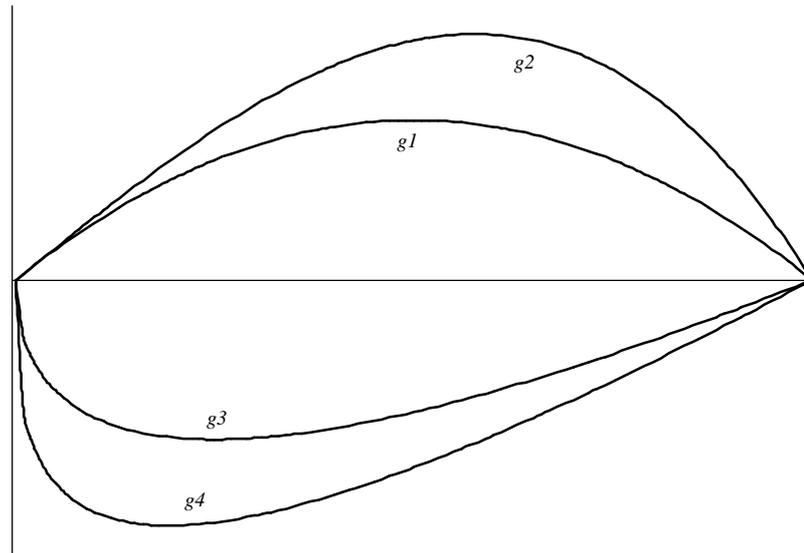
Y se tienen los siguientes valores en los límites:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \lim_{x \rightarrow 1} G(x(t)) = 0$$

Y para los tipos forward:

$$f(0) = [1 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4] \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{a}$$

Consiguiéndose así el cumplimiento de todas las condiciones de partida. Esta modelización presenta sólo un punto débil en relación a los tipos forward: éstos pueden tomar valores demasiado grandes en los vencimientos cercanos a cero. Este comportamiento está causado por el uso de las dos últimas funciones: $g_3(x(t))$ y $g_4(x(t))$. El problema se origina porque, en general, la primera derivada de x^d " $d < 1$, $d \neq 0$ toma valores arbitrariamente grandes cuando $x \rightarrow 0^+$.

Gráfico 4.1: Formas de las funciones $g_j(x(t))(x-1)$ 

Esto puede apreciarse en el Gráfico 4.1, donde se representan las funciones empleadas⁹⁰. Se observa que tanto $g3$ que representa a $g_3(x(t))(x-1)$, como $g4$ que representa a $g_4(x(t))(x-1)$ son suaves salvo cuando se aproximan a $x=0$ donde su pendiente se hace muy acusada.

Esta metodología es muy similar a la empleada por Contreras y Navarro (1993) para el análisis del modelo de Fong y Vasicek (1982), aunque estos autores emplean splines.

Otro tipo de funciones que pueden emplearse para la aproximación de la función de descuento en el ámbito de esta metodología lo componen los polinomios de Bernstein. Estos se pueden expresar como:

⁹⁰ Se omite la representación de $(1-x)$.

$$B_{i,j}(x) = x^j (1-x)^i = \sum_{r=0}^i (-1)^r \binom{i}{r} x^{j+r}, \quad j = \{1, \dots, n\}, \quad i = \{1, \dots, m\}.$$

Por ejemplo, para el caso de $i, j = \{1, 2\}$ se pueden construir cuatro funciones:

$$\begin{aligned} B_{1,1}(x) = g_1(x) &= x - x^2 & B_{1,2}(x) = g_2(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ B_{2,1}(x) = g_3(x) &= x^2 - x^3 & B_{2,2}(x) = g_4(x) &= x^2 - 2x^3 + x^4 \end{aligned}$$

A las que se puede añadir $B_{0,1}(x) = g_0(x) = 1 - x$ para aproximar la función de descuento por medio de una combinación de éstas:

$$\begin{aligned} D(t) = G(x(t)) &= g_0(x(t)) + \mathbf{b}_1 g_1(x(t)) + \mathbf{b}_2 g_2(x(t)) + \mathbf{b}_3 g_3(x(t)) + \mathbf{b}_4 g_4(x(t)) = \\ &= \\ (1-x) &+ \mathbf{b}_1 (x - x^2) + \mathbf{b}_2 (x - 2x^2 + x^3) + \mathbf{b}_3 (x^2 - x^3) + \mathbf{b}_4 (x^2 - 2x^3 + x^4) \end{aligned}$$

Esta aproximación cumple las condiciones:

$$D(0) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = \lim_{x \rightarrow 1} G(x(t)) = 0$$

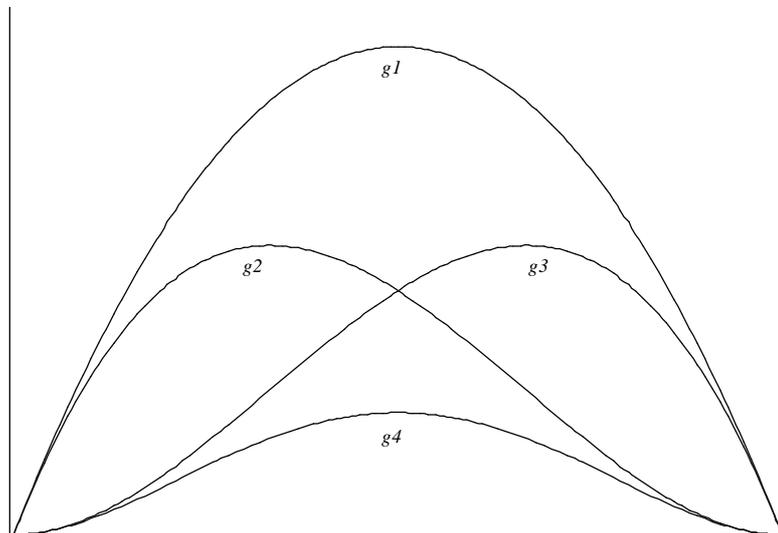
En cuanto a los tipos forward, se tiene:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{a} (1 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2), \quad \text{por tanto para que } f(0) > 0 \text{ } \textcircled{R} \text{ } \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 > 1, \\ \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

En principio, según se observa en el Gráfico 4.2, estas funciones no tienen porqué presentar ningún tipo de problema adicional⁹¹.

Gráfico 4.2: Formas de las funciones $g_j(x(t))$

⁹¹ Se vuelve a omitir la representación de $(1-x)$.



4.4.4 Polinomios de Legendre

Otra forma de abordar el problema de la modelización de la función de descuento, que también requiere la traslación de los datos originales a otro intervalo, es el uso de polinomios ortogonales que garantizan para una determinada norma, función peso y especificación de los coeficientes, un error mínimo definido éste como la norma ponderada.

Desde la perspectiva de la utilización de la técnica de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros del modelo, la elección más apropiada parece ser la de Legendre. Estos polinomios son ortogonales respecto a la función peso $w(x)=1$ y son por tanto apropiados para aproximación por norma euclídea o mínimos cuadrados. Como vimos en el Capítulo 2 si se desea aproximar una función continua, $f(x)$, definida en el intervalo $[-1,1]$, se puede emplear el siguiente polinomio de grado n ,

construido como una combinación lineal de polinomios de Legendre:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$$

donde $P_k(x)$ representa el polinomio de Legendre de grado k . Además, si se eligen los coeficientes, c_k , de tal modo que:

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx$$

se garantiza que el error de aproximación es mínimo:

$$\int_{-1}^1 [G_n(x) - f(x)]^2 dx = \text{Min!}$$

Desde el punto de vista de su aplicación esta alternativa presenta dos problemas, uno de fácil solución y otro algo más complejo. El primero es que tanto la función de descuento como los tipos spot y forward están definidos en el intervalo $t \in [0, \infty)$ y los polinomios de Legendre se definen en el intervalo $x \in [-1, 1]$; esto se soluciona simplemente aplicando un cambio de variable apropiado que traslade los valores de t al intervalo $[-1, 1]$. El segundo inconveniente es bastante más grave y surge porque para lograr que la función de aproximación sea la que genere el mínimo error es necesario especificar los coeficientes como se expresó anteriormente y esto sólo es posible si se conoce la función a aproximar, $f(x)$.

Por ejemplo, si se desea aproximar una exponencial del siguiente tipo: $g(t) = e^{-t}$ " $t \in [0, \infty)$, se tendría, en primer lugar, que definir el cambio de variable que se aplicará. Un modo de trasladar $t \in [0, \infty)$ a $x \in [-1, 1]$ es establecer: $x = 1 - 2e^{-t}$. De este modo se tiene que:

$$t = -\text{Ln}[(1-x)/2] \mathbf{a}^{-1} \Rightarrow g(t) = g(-\text{Ln}[(1-x)/2] \mathbf{a}^{-1})$$

$$^1) = g(x(t)) = \exp\left[\frac{g}{\mathbf{a}} \text{Ln}\left(\frac{1-x}{2}\right)\right] = \left[\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{g}{\mathbf{a}}}$$

Así, partiendo de las definiciones⁹² de los coeficientes, c_k , y de los polinomios de Legendre, $P_k(x)$, y considerando que es suficiente tomar $n=3$ se obtendrían los siguientes valores de los coeficientes:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{g}{\mathbf{a}}} dx = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} + g}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{g}{\mathbf{a}}} x dx = -3 \frac{\mathbf{a}g}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{g}{\mathbf{a}}} \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] dx = \frac{5}{2} \frac{\mathbf{a}(-2\mathbf{a}g + 2g^2)}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)(3\mathbf{a} + g)}$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{g}{\mathbf{a}}} \left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right] dx = \frac{7}{2} \frac{\mathbf{a}(-4\mathbf{a}^2g + 6\mathbf{a}g^2 - 2g^3)}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)(3\mathbf{a} + g)(4\mathbf{a} + g)}$$

Por tanto, al aproximar $g(t)$ a través de $G_3(x(t))$ que toma la forma:

$$G_3(x(t)) = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} + g} -$$

$$3 \frac{\mathbf{a}g}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)} x + \frac{5}{2} \frac{\mathbf{a}(-2\mathbf{a}g + 2g^2)}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)(3\mathbf{a} + g)} \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] +$$

$$+ \frac{7}{2} \frac{\mathbf{a}(-4\mathbf{a}^2g + 6\mathbf{a}g^2 - 2g^3)}{(\mathbf{a} + g)(2\mathbf{a} + g)(3\mathbf{a} + g)(4\mathbf{a} + g)} \left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right]$$

⁹² Véanse ambas expresiones en el Capítulo 2.

garantizamos que el error de aproximación, definido como la norma euclídea o suma de los errores al cuadrado, es mínimo respecto a la utilización de cualquier otra función de ese grado.

El problema para tratar de aplicar este método directamente es que se desconoce la forma funcional concreta que define a los factores de descuento, su conocimiento es precisamente nuestro objetivo, por tanto no es posible calcular el valor apropiado de los coeficientes de los polinomios de Legendre que garantizan un error de aproximación mínimo. Sin embargo, cabe suponer, dado que se emplea como método general de aproximación los mínimos cuadrados, que una buena aproximación a este óptimo pueda obtenerse de modo natural aproximando la función de descuento a través de una combinación de polinomios de Legendre, pero dejando que los coeficientes c_k sean determinados a través de la regresión como los parámetros a estimar.

Se espera que cuanto mayor sea el número de datos disponibles más se acercarán los valores obtenidos a sus valores óptimos y cuanto mayor sea el número de funciones empleadas en la combinación mejor será la aproximación.

Como ejemplo ilustrativo para explicar la metodología a seguir en la implantación de esta modelización podemos tomar un polinomio cúbico. De este modo, la función de descuento, $D(t)$ se aproxima a través de⁹³, $G_3(x(t))$:

$$\begin{aligned} D(t) = G_3(x(t)) &= \mathbf{b}_0 P_0(x(t)) + \mathbf{b}_1 P_1(x(t)) + \mathbf{b}_2 P_2(x(t)) + \mathbf{b}_3 P_3(x(t)) = \\ &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \mathbf{b}_2 \frac{1}{2} [3x^2 - 1] + \mathbf{b}_3 \frac{1}{2} [5x^3 - 3x] \end{aligned}$$

⁹³ El cambio de variable a aplicar puede ser el señalado anteriormente en el ejemplo.

donde los \mathbf{b}_k representan a los coeficientes c_k y $P_k(x(t))$ es el polinomio de Legendre de grado k .

Como la función de descuento debe cumplir $D(0)=1$ y $G_3(-1)=1$, el parámetro \mathbf{b}_0 debe definirse como: $\mathbf{b}_0=1+\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3$. Esto da lugar a que:

$$D(t)=G_3(x(t))=1+\mathbf{b}_1(1+x)+\mathbf{b}_2\frac{3}{2}[x^2-1]+\mathbf{b}_3\frac{1}{2}[5x^3-3x+1]$$

Además se debe verificar que: $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)=0$ y $G_3(1)=0$. Para ello, es necesario que:

$$\mathbf{b}_1 = -\frac{2\mathbf{b}_3+1}{2}$$

Por lo que la modelización final de la función de descuento queda:

$$D(t)=G_3(x(t))=\frac{1}{2}(1-x)+\mathbf{b}_2\frac{3}{2}[x^2-1]+\mathbf{b}_3\frac{5}{2}[x^3-x]$$

Esta función, cumple por definición, que:

$$D(0)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)=0$$

Los tipos forward quedan definidos como:

$$f(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} = -\frac{g'(x(t))x'(t)}{g(x(t))} = \frac{\mathbf{a}(1-x)\left[-\frac{1}{2}+3x\mathbf{b}_2+\frac{5}{2}\mathbf{b}_3(3x^2-1)\right]}{\frac{1}{2}(1-x)+\frac{3}{2}\mathbf{b}_2(x^2-1)+\frac{5}{2}\mathbf{b}_3(x^3-x)}$$

siendo $x = 1 - 2e^{-at}$. Por tanto, se tienen los siguientes valores en los límites:

$$f(0) = a(1 + 6b_2 - 10b_3) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$$

por lo que se logra la convergencia de los tipos en un nivel a .

Esta misma metodología puede emplearse para grados superiores al considerado, $n > 3$; por ejemplo, en el caso de $n = 4$ se tiene:

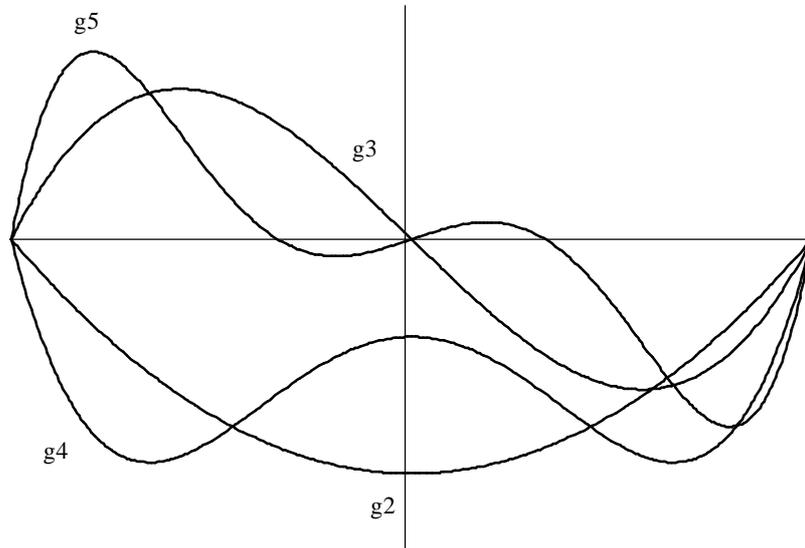
$$D(t) = G_4(x(t)) = \frac{1}{2}(1-x) + b_2 \frac{3}{2}[x^2 - 1] + b_3 \frac{5}{2}[x^3 - x] + b_4 \frac{5}{8}[7x^4 - 6x^2 - 1]$$

$$D(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0 \quad f(0) = a(1 + 6b_2 - 10b_3 + 20b_4)$$

$$\text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a$$

A modo de ejemplo, la representación gráfica para $n = 5$ se recoge en el Gráfico 4.3, donde se ha omitido $(1/2)(1-x)$.

Gráfico 4.3: Formas de las funciones $g_j(x(t))$



Cualquiera de las alternativas planteadas a lo largo de este epígrafe son igualmente válidas; sin embargo, algunas requieren una metodología más compleja para su aplicación. En nuestra opinión, la utilización de polinomios de Legendre en la aproximación de la función de descuento puede ser la elección más acertada desde el punto de vista del objetivo perseguido. Ya que, cumple las deseadas propiedades de convergencia, no requiere el empleo de métodos no lineales en su estimación salvo que se quiera determinar el cambio de variable (a) de modo que se minimice el error de aproximación y existe una alta probabilidad de que a medida que aumenta el número de observaciones disponibles los valores de los coeficientes, estimados por mínimos cuadrados, se aproximen a su valor óptimo y por tanto el error de aproximación sea mínimo.

En cualquier caso, las diferentes alternativas expuestas no generan un conjunto cerrado de posibles formas de abordar el problema, existen otras muchas funciones que definidas de forma apropiada pueden cumplir los requisitos exigidos. Lo más

destacable de este capítulo es que la mayoría de los modelos propuestos no son teóricamente apropiados para abordar el problema analizado. En nuestra opinión se ha prestado gran atención a la búsqueda de funciones de aproximación cada vez más flexibles con vistas a reducir el error de aproximación, pero se ha olvidado tener en cuenta algo fundamental como es la adecuación del modelo a las características del objeto de estudio.

CAPÍTULO 5:
ANÁLISIS EMPÍRICO DEL MERCADO ESPAÑOL DE
DEUDA PÚBLICA ANOTADA

El análisis empírico de los modelos expuestos anteriormente en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada (en adelante MEDPA) es la última aportación de este trabajo de investigación. Así, en este capítulo se comentan los resultados obtenidos por el mismo. El estudio se ha desarrollado sobre muestras diarias recogidas durante el periodo 1991-1996 en el MEDPA. También se expone la forma en que se han construido las muestras y los resultados obtenidos en otros trabajos similares. Así mismo, se detallan las diferentes fases en las que se ha estructurado el análisis: el estudio del mercado, la construcción de la muestra y la implantación de los modelos.

5.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de este trabajo es valorar los diferentes modelos que se han venido proponiendo para la estimación de la estructura temporal de tipos de interés en un marco empírico homogéneo. La gran mayoría de los modelos presentados en el capítulo anterior han sido, con uno u otro fin, analizados empíricamente; sin embargo, los datos empleados han sido diversos, por lo que no es posible realizar una comparación entre los mismos.

Desde nuestro punto de vista valorar de forma conjunta los resultados que presentan las diferentes propuestas es importante y supera el hecho de obtener una clasificación que informe sobre qué modelo es superior a cuál en qué aspecto. Su relevancia se manifiesta en que permite analizar si los problemas o deficiencias presentados por los modelos son propios de los mismos o se deben a un comportamiento generalizado del mercado que los modelos son incapaces de representar.

Además, este trabajo supone un estudio amplio del mercado español de renta fija y destaca tanto por el periodo abarcado (seis

años y estimaciones diarias) como por el número de modelos considerados (la práctica totalidad de los modelos presentados en la literatura y algunas de las alternativas propuestas). La realidad es que el mercado español sólo ha sido centro de atención por parte de los investigadores nacionales; quizás, en gran parte, por el escaso número de títulos que se negocian en comparación a otros mercados internacionales, quizás porque las propuestas de modelización han corrido a cargo, mayoritariamente, de los investigadores norteamericanos y británicos quienes, lógicamente, estudian los mercados de sus respectivos países.

En este sentido cabe decir que el mercado español ha sido analizado por Contreras y Navarro (1993)⁹⁴ que se basan exclusivamente en el estudio del modelo de Fong y Vasicek (1982) para, en principio, un conjunto reducido de muestras que después amplían; por Ezquiaga, Gómez y Jara (1994) que analizan exclusivamente el método de McCulloch (1975) durante un periodo de diecinueve meses y por Núñez (1995) que analiza los modelos de McCulloch (1975), Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) para un periodo de algo más de cuatro años.

Por último, en Calatayud y Morini (1995) se analizan los modelos de curva de rendimiento junto con el de McCulloch (1971) y (1975) para un periodo de cuatro años y en Bruno y Morini (1997) los modelos de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) para el mismo periodo.

5.2 OTROS ANÁLISIS EMPÍRICOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

⁹⁴ Posteriormente han realizado otros trabajos donde siguen aplicando esta metodología a un periodo de estudio mayor: Contreras, Ferrer, Navarro y Nave (1994 A, B) o Ferrer, Navarro y Nave (1995).

Los trabajos empíricos en torno a la modelización de la curva de tipos son numerosos. La mayoría de los autores que han propuesto algún modelo teórico han acompañado el mismo de un estudio del mercado. Además otros autores han realizado trabajos donde se analizan empíricamente las diferentes propuestas.

Si hacemos una revisión de los estudios realizados se comprueba que la composición de la muestra, la frecuencia en que se toma y el mercado objeto de estudio son, también, variados.

En este apartado, se recoge de forma breve alguno de los estudios empíricos más relevantes a fin de poder contrastar posteriormente, en la medida de lo posible, la concordancia de nuestros resultados con los de éstos.

5.2.1 El problema de la elección de la muestra

Un tema fundamental en todo análisis empírico es la construcción de la muestra; su importancia es tal que en determinados estudios la elección de una muestra u otra puede hacer variar totalmente las conclusiones y resultados obtenidos. Desde esta perspectiva hay que poner mucho cuidado en la construcción de la misma para que los datos que la conforman no estén sesgados por los objetivos pretendidos por el investigador.

Afortunadamente en el estudio que nos ocupa la posibilidad de manipulación de la muestra es casi inexistente y se limita, fundamentalmente, a tener en cuenta o no la existencia de *outliers* y el considerar u obviar determinados tipos de títulos considerados no homogéneos. Esto garantiza que los resultados obtenidos son fiables.

Otro tema de especial relevancia es la frecuencia en que se toman los datos. Generalmente, las investigaciones empíricas realizadas toman muestras mensuales, algunas datos semanales,

pero casi ningún estudio analiza la estructura de tipos diariamente; a pesar que la obtención diaria de la curva de tipos permitiría construir series temporales de los tipos a cualquier vencimiento.

Donde todos los estudios coinciden es en emplear el precio medio de la sesión como representativo del conjunto de negociaciones efectuadas en el mercado. Básicamente, los agentes negocian dos precios: uno de oferta y otro de demanda, representando el diferencial, en cierta medida, la liquidez del título. Al final del día, se conocen para cada título el precio más alto de negociación (precio máximo) y el precio mínimo, siendo el precio medio la media aritmética de ambos.

Quizás el precio medio no sea el más adecuado para representar las negociaciones realizadas en el mercado; posiblemente la mediana sea una medida que aporte más información y para ser más precisos se debería tener en cuenta el volumen de negociación a cada precio a fin de realizar ponderaciones. Sin embargo, la diferencia en los resultados, posiblemente, no sería apreciable y en cambio el precio medio se obtiene más fácilmente.

McCulloch (1971) inicia su análisis empleando como observaciones bonos del ferrocarril, pero desde Diciembre-46 hasta Marzo-66 toma muestras mensuales formadas por los precios medios de títulos del Tesoro americano. En 1975 modifica la muestra y toma datos mensuales de los títulos del Gobierno americano desde Junio-65 hasta Julio-73 empleando, de nuevo, precios medios.

Carleton y Cooper (1976) para evitar esta decisión construyen muestras para cada uno de los precios (oferta, demanda y medio) observados en el mercado. Incluyen en las muestras, además de

los títulos emitidos por el Tesoro con vencimientos standard, títulos garantizados por éste emitidos por la FHLB (Federal Home Loan Bank), que se diferencian de los anteriores en la liquidez y los vencimientos⁹⁵. Además imponen como condición que los títulos no tengan un vencimiento superior a 4 años para evitar posibles problemas de singularidad en la matriz de coeficientes.

Echols y Elliott (1976) construyen las muestras en base a los precios medios de los títulos del Tesoro americano negociados en la última sesión de cada mes durante el periodo 1964-1972. Para mantener cierto grado de homogeneidad, excluyen las emisiones que se encuentran en los extremos del intervalo temporal: en el largo plazo, por ser emisiones de bajo cupón, con características vitalicias y con ventajas fiscales; y en el extremo a corto, los bonos con vencimiento inferior a un mes porque presentan un error de medida desproporcionado.

Schaefer (1981) toma sus muestras el último día de cada mes durante el periodo que abarca desde Enero-55 hasta Diciembre-77. Las muestras están formadas por todos los títulos del Gobierno británico negociados en el mercado; por lo que no son completamente homogéneas ya que algunas emisiones están sometidas a la posibilidad de cancelación anticipada a conveniencia del emisor.

Carleton, Chambers y Waldman (1984) emplean muestras formadas por títulos del Tesoro americano con vencimientos standard⁹⁶. Eligen los títulos de tal modo que su plazo hasta el vencimiento sea inferior a 10 años, correspondan a emisiones superiores a un billón de dólares (para evitar problemas de falta

⁹⁵ Para homogeneizar los títulos utilizan la siguiente expresión: $VA_t^F = (1-a)^t VA_t$, donde a es una constante a estimar y VA_t^F y VA_t representan los valores actuales del pago con vencimiento en t de los títulos de la FHLB y el Tesoro, respectivamente.

⁹⁶ Véase p. 16 en el Capítulo 1.

de liquidez), no disfruten de ventajas fiscales y no tengan posibilidad de amortización anticipada. El periodo de análisis abarca cuatro años, desde 1976 hasta 1980, y las observaciones se toman trimestralmente.

Shea (1984, 1985) para evitar problemas con los devengos de cupón y el efecto impositivo emplea los precios medios de las emisiones cupón-cero a largo plazo de la NTT (Nippon Telegraph and Telephone) cuyas ganancias de capital y pagos de intereses se encuentran libres de impuestos.

Nelson y Siegel (1987) únicamente incorporan en sus muestras, tomadas el cuarto jueves de cada mes desde Enero-81 hasta Octubre-87, Letras del Tesoro de Estados Unidos por lo que sólo estudian el tramo a corto de la curva. Además omiten de las muestras los vencimientos a 3 y 10 días porque presentan rendimientos excesivamente altos causados, posiblemente, por el efecto de los costes de transacción.

Steeley (1991), al igual que Schaefer (1981) estudia el mercado británico pero al contrario que éste restringe las muestras a aquellos títulos con cupón elevado para evitar problemas con el efecto impositivo, ya que los títulos con bajo cupón y vencimiento próximo son preferidos por los inversores que pagan tasas de impuestos elevadas pudiendo presentar distorsión en sus precios. El periodo de estudio abarca desde Marzo-86 hasta Octubre-87 y toma las muestras cada cuatro semanas.

Svensson (1994) estudia principalmente el mercado sueco entre Mayo-92 y Junio-94, aunque también realiza algunas estimaciones puntuales para comparar resultados del mercado alemán, británico, francés y americano. Esta misma muestra es empleada por Dahlquist y Svensson (1994).

Fisher, Nychka y Zervos (1995) estudian el mercado de títulos del Gobierno americano durante el periodo comprendido entre Diciembre-87 hasta Septiembre-94. Excluyen de la muestra tanto los títulos con posibilidad de amortización anticipada como los que presentan algún tipo de ventaja fiscal, además de aquellos con vencimientos inferiores a un mes.

Bliss (1996) construye sus muestras a partir de las cotizaciones de los títulos del Gobierno americano el último día de cada mes para el periodo Enero-70 hasta Diciembre-95, eliminando aquellos con problemas de liquidez (bonos con vencimiento inferior a un año y letras con vencimiento inferior a un mes) y con ventajas fiscales o posibilidad de amortización anticipada. Esta muestra también es empleada por Waggoner (1997).

Otros mercados analizados han sido el australiano, a cargo de Hunt (1995B) que estudia las cotizaciones el último miércoles de cada mes desde Enero-89 hasta Noviembre-94 y Bhar y Chiarella (1996) que construyen muestras desde Junio-88 hasta Agosto-96 todos los miércoles de cada semana. Los títulos del mercado sudafricano han sido analizados por McLeod (1990)⁹⁷ y el mercado canadiense por Rose y Schworm (1980)⁹⁸.

En el ámbito del mercado español, Contreras y Navarro (1993) efectúan su análisis sobre las muestras extraídas los días de mayor volumen de negociación de la última semana de cada mes desde Octubre-92 hasta Febrero-93. Para evitar observaciones anómalas sólo forman parte de la muestra aquellos títulos cuyo volumen de negociación es superior a 500 millones de pesetas o registran más de una operación. Posteriormente, Contreras, Ferrer, Navarro y Nave (1994A y B) construyen sus muestras a

⁹⁷ Cfr. Ferrer, Navarro y Nave (1995).

⁹⁸ Cfr. Shea (1984).

partir de los precios medios diarios de las operaciones al contado del Mercado Español de Deuda Pública Anotada efectuadas el último día de negociación de cada semana del periodo Enero-93 y Junio-94; siguiendo también el criterio de eliminar de la muestra los títulos poco líquidos.

Ezquiaga, Gómez y Jara (1994) toman los precios medios de los valores más líquidos para construir sus muestras durante el periodo de Noviembre-92 hasta Junio-94. Debido al escaso número de bonos cotizados en el corto plazo incorporan en la muestra cotizaciones de bonos cupón-cero teóricos contruidos a partir de los tipos de interés negociados en las operaciones simultáneas.

Por último, Núñez (1995) elabora sus muestras diariamente para el periodo Enero-91 hasta Mayo-95 tomando la mediana de los precios cruzados durante todo el día hasta Marzo-95, cuando emplea el precio medio de las cotizaciones registradas a las tres de la tarde. Además, teniendo en cuenta que las operaciones al contado se realizan con fecha valor entre 5 y 7 días actualiza el precio al tipo de interés de las operaciones simultáneas a una semana y utiliza también estas operaciones (simultáneas) para los vencimientos menores a tres meses para evitar la poca actividad de negociación de las Letras en ese plazo.

En general y a modo de resumen puede concluirse que en la construcción de las muestras se evita incorporar títulos con características no homogéneas y aquéllos que se encuentran en algún extremo del intervalo temporal.

5.2.2 Resultados obtenidos en otros estudios

En relación a los resultados obtenidos, si bien se han obtenido sobre muestras heterogéneas, ayudan a analizar el

comportamiento de los modelos en diferentes mercados. El modelo que más profusamente se ha analizado es, sin lugar a dudas, el de McCulloch (1975). Otros modelos que también han despertado el interés de los investigadores son los propuestos por Fong y Vasicek (1982), Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994).

McCulloch (1975) al aplicar su modelo logra, en ocasiones, curvas de tipos forwards inestables en el corto plazo y que presentan una débil propiedad asintótica. En el mismo sentido, Shea (1984) encuentra que este modelo obtiene curvas de descuento que no son monótonas decrecientes lo que da lugar a que los tipos forward sean altamente inestables en el largo plazo y lleguen incluso a tomar valores negativos. Deacon y Derry (1994) también detectan un comportamiento poco estable de la curva de tipos forward, sin embargo no obtienen tipos negativos, sino pendientes fuertemente ascendentes en el tramo final de la curva, recomendando el modelo utilizado por el Banco de Inglaterra que obtiene curvas forward muy estables en ese tramo temporal.

Bliss (1996) también estima el modelo de McCulloch (1975) que se revela como el mejor de su clase en términos de errores en precios. Sin embargo, no obtiene resultados tan buenos, aunque la precisión y la estabilidad son razonables, cuando se emplean datos que no forman parte de la muestra sobre la que se estiman los parámetros. Por otro lado, Bliss (1996) centra su estudio en el análisis de los errores por lo que no aporta información sobre las formas de las curvas de tipos cupón-cero ni forwards. El mismo resultado es dado a conocer por Waggoner (1997) que opina que la estabilidad de los tipos forward es más un deseo de los agentes del mercado que prefieren que la curva no exhiba un comportamiento oscilatorio que un resultado corroborado por la teoría, al menos en lo que se refiere al medio y corto plazo.

Ezquiaga, Gómez y Jara (1994), para el mercado español, observan una desviación considerable entre precio observado y estimado para los vencimientos inferiores a un año sobre todo cuando la pendiente en ese tramo es fuertemente negativa, a la vez que detectan una pendiente acusada en los plazos a largo que llevan a la obtención de curvas forwards extremadamente inestables. De un modo similar se manifiesta Núñez (1995) que también observa que las curvas de tipos forward presentan con frecuencia pendientes muy acusadas en el largo plazo cuando se espera un comportamiento asintótico en este tramo; además detecta que este modelo junto con el de Svensson (1994) presenta mayores errores en el corto plazo que el modelo de Nelson y Siegel (1987).

Carleton y Cooper (1976) debido a la utilización de un modelo que proporciona resultados discretos de los factores de descuento no obtiene ninguna función para la curva de tipos forward sino valores puntuales de ésta que unidos proporcionan una gráfica que muestra grandes saltos; por lo tanto, obtiene tipos forward altamente inestables y que no presentan propiedades asintóticas.

Schaefer (1981) también parece encontrar problemas en la estabilidad de los tipos forward en el largo plazo donde o bien la curva desciende abruptamente en el último vencimiento o bien presenta una subida muy acusada. En cualquier caso, nunca obtiene tipos forward negativos aunque sí excesivamente altos para recoger condiciones normales de mercado. Este comportamiento es observado, también, por Deacon y Derry (1994) que analizan entre otros este modelo.

El modelo de Fong y Vasicek (1982) obtiene según sus autores resultados satisfactorios aunque no aportan información sobre las muestras empleadas ni los resultados obtenidos. Shea (1985)

analiza en profundidad este modelo y encuentra que las curvas de tipos forwards son altamente inestables sobre todo en el corto plazo y en ocasiones existen problemas en el tramo a largo donde no se aprecia convergencia a la asíntota, además de obtenerse en ocasiones tipos forward negativos. Sin embargo, Contreras y Navarro (1982) obtienen, para el mercado español, resultados altamente satisfactorios, tanto en las propiedades econométricas del modelo como en la obtención de una ETTI suave sin fuertes oscilaciones. Si bien, hay que tener en cuenta que estos autores, aunque siguen la metodología de Fong y Vasicek (1982) adaptan ésta al mercado español y no emplean sus mismas funciones.

La propuesta de Carleton, Chambers y Waldman (1984) debido a su dificultad de aplicación y carga computacional tan solo ha sido analizada por éstos quienes obtienen resultados satisfactorios tanto en relación a la curva de tipos cupón-cero como en la curva de tipos forward que no presenta fuertes oscilaciones y es bastante estable en su tramo final.

Nelson y Siegel (1987) dicen obtener buenos resultados en la aplicación de su modelo, sin embargo, hay que tener en cuenta que sólo forman parte de las muestras títulos cupón-cero cuyos vencimientos no superan el año. Svensson (1994) encuentra que en la mayoría de los casos este modelo es suficiente para obtener un ajuste satisfactorio, siendo únicamente necesaria la aplicación de su propuesta cuando la estructura temporal es más compleja en cuyo caso el ajuste mejora de forma apreciable.

Bliss (1996), desoyendo las indicaciones de los autores sobre la sobreparametrización, analiza la propuesta original de Nelson y Siegel (1987) que contempla la utilización de dos parámetros no lineales y encuentra que sus resultados son similares a los obtenidos con la aplicación del modelo de McCulloch (1975) con

la ventaja que es más parsimonioso por lo que obtiene mejores resultados en las muestras de control.

Núñez (1995) también analiza este modelo para muestras de títulos que devengan cupón y recomienda el uso del mismo por ser el que obtiene los mejores resultados entre las propuestas analizadas, a pesar que, en el corto plazo los errores medidos en términos de TIR son algo elevados y se ve superado por el método de Svensson (1994) que obtiene de resto resultados muy similares.

Otro aspecto positivo a destacar del modelo de Nelson y Siegel (1987) es que la no linealidad no es un inconveniente tan grave ya que Dahlquist y Svensson (1994) observan que la convergencia es bastante rápida y que el método es relativamente estable.

La utilización de B-splines analizada por Steeley (1991) obtiene buenos resultados en términos de tipos cupón-cero. Los errores de estimación no alcanzan el 1% del precio observado, pero se observan curvas de tipos forward con tendencia descendente acusada en el tramo a largo aunque no llega a tomar valores negativos.

Según los análisis empíricos llevados a cabo por Bliss (1996) el modelo de Fisher, Nychka y Zervos (1995) presenta dificultades en el ajuste a corto plazo y se ve más afectado que otros modelos por errores de medida en los datos. Fisher, Nychka y Zervos (1995) encuentran que aplicar una especificación spline a la función de descuento, a su logaritmo o a los tipos forward es casi indiferente en términos de la curva de tipos cupón-cero obtenida; sin embargo cuando se modeliza la función de descuento la curva de tipos forward parece mejorar en el tramo a largo aunque sigue presentando un comportamiento inestable y pendientes muy acusadas en ese plazo, siendo los tipos forward siempre positivos.

En definitiva, salvo el modelo que estima la curva de rendimientos a la par aplicado por el Banco de Inglaterra que logra la deseada convergencia asintótica de la curva de tipos forward y la propuesta de Contreras y Navarro (1993) para el mercado español, el resto de modelos parecen incapaces de presentar este comportamiento. Así pues, independientemente de que la mayoría de las nuevas aportaciones hayan mejorado la calidad del ajuste no parece haberse logrado una solución satisfactoria al problema de los tipos forward.

5.3 CARACTERIZACIÓN DE LA MUESTRA EMPLEADA

El contraste empírico de los modelos se ha efectuado a partir de los datos disponibles de las operaciones de compraventa simple al contado sobre Bonos y Obligaciones efectuadas en el Mercado Español de Deuda Anotada en el periodo comprendido entre 1991 y 1996.

En un primer momento el periodo muestral incluía el año 1990 pero debido a la poca liquidez del mercado y el escaso número de títulos negociados, que en muchas ocasiones no hacía posible la estimación de los modelos, se optó por excluir el mismo del análisis. Estas complicaciones también se detectan a comienzos de 1991 donde algunas muestras son eliminadas; aún así, determinados modelos con un número de parámetros elevado no han podido ser estimados para este año.

Las muestras se han construido diariamente, de modo que se ha trabajado con un total de 1486 muestras que contienen una media de 15 observaciones. En el Anexo 2 se recoge el número de observaciones que componen cada muestra así como un breve análisis descriptivo de la composición de las mismas.

Como ya se ha comentado no existe un único precio de liquidación al que se hacen efectivas todas las operaciones efectuadas a lo largo del día con cada título, sino que las diversas operaciones realizadas se efectúan a precios diferentes producto de la oferta y la demanda del momento y al final de cada sesión se pueden observar para cada título negociado tres precios: el máximo y el mínimo de la sesión y la media de éstos. En este trabajo, siguiendo la tendencia de los anteriores, se ha optado por utilizar este último como representativo de todos los negociados. Esta alternativa no es la única⁹⁹ ni la mejor, pero sí la más sencilla.

Otra cuestión que es importante resaltar es el hecho de que en la construcción de las muestras sólo se han tenido en cuenta los Bonos y Obligaciones que han sido objeto de negociación al contado en el mercado. Reconocemos que la inclusión de las operaciones al contado con Letras y de las operaciones simultáneas hubieran ampliado el número de observaciones muestrales, pero existen, por otro lado, varios motivos para su exclusión. Las Letras presentan negociación estrecha, normalmente una sola operación de bajo volumen, por lo que los datos que aportan pueden estar sesgados. Cabe destacar que la mayoría de los investigadores que han analizado el mercado español también han optado por eliminar estos títulos de sus muestras. Otro motivo de exclusión se basa en sus características fiscales. Las Letras son títulos al descuento que no soportan retención, por lo que su inclusión en una muestra compuesta por Bonos y Obligaciones que no presentan esta característica rompe la homogeneidad de la muestra y hace necesario incluir en el análisis variables *dummy* que permitan tener en cuenta esta diferencia.

⁹⁹ En el apartado anterior pueden encontrarse otras propuestas.

En cuanto a las operaciones simultáneas, existe un problema de homogeneidad respecto a las operaciones de compraventa simple al contado, ya que el objetivo de la realización de las mismas es, generalmente, diferente. Una operación simultánea tiene su origen en una necesidad coyuntural de inversión-financiación (colocar una punta de tesorería y/o adquirir liquidez de modo puntual) y no en una estrategia planificada de cartera, como puede ser la adquisición de Bonos y Obligaciones.

Otro argumento que apoya la decisión de eliminar los vencimientos a muy corto plazo, representados en su mayor parte por simultáneas y operaciones al contado con Letras, es lograr una mejor distribución temporal de las observaciones disponibles, de modo que los vencimientos que forman la muestra se encuentren en la medida de lo posible uniformemente distribuidos; esta decisión ha sido adoptada de forma mayoritaria en los diferentes trabajos empíricos realizados.

En la elaboración de las muestras, si bien se ha tratado de incluir todas las operaciones registradas en el mercado para los títulos y plazos mencionados anteriormente, se han eliminado algunas de las observaciones para lograr la homogeneidad de las mismas. En concreto se han eliminado las referencias con emisión anterior a 1990 ya que son emisiones con cupones semestrales y con más de una amortización del nominal, características que en cierta medida pueden distorsionar el precio de los títulos.

En general, la mayoría de estos títulos vencían antes de 1991, quedando en esta fecha, aproximadamente, veinte referencias vivas, de las que el 50% finalizaban ese año, por lo que la incidencia de la eliminación de estos títulos no es muy relevante.

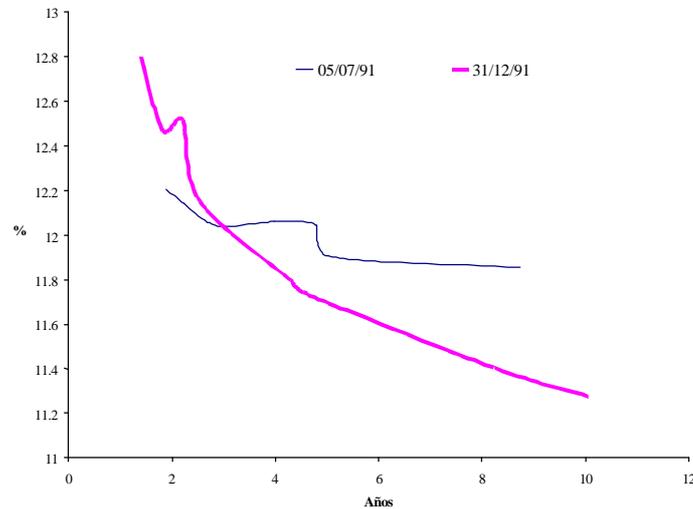
Además su negociación es estrecha, presentando operaciones pocos días al año (menos del 10% de los negociados)¹⁰⁰.

El resto de los títulos, aquellos con pago anual de cupón y una sola amortización, se han tomado en su totalidad, aunque sus precios pareciesen poco acordes con la tendencia del mercado, dejando que fuese el proceso de estimación el que estableciese el filtro de exclusión en base al error computado.

Un aspecto importante de la curva de tipos es que puede adoptar cualquier forma. En este sentido y como primera aproximación consideramos de especial interés observar qué forma típica presenta la curva de rendimientos a lo largo del periodo de estudio para valorar posteriormente el comportamiento de los modelos ante las diferentes formas de la misma.

Gráfico 5.1 Curvas de rendimiento 1991

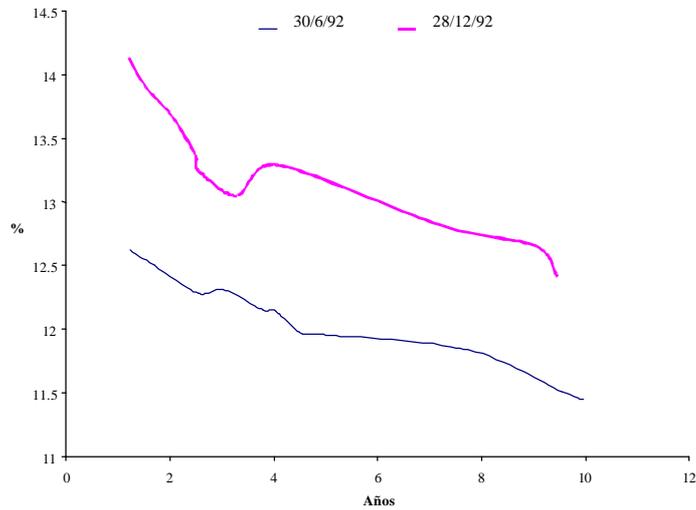
¹⁰⁰ Salvo algunas referencias como los Bonos: B12, vto. 1992 [ES0000011173-2] y B12.5, vto. 1992 [ES0000011207-2] en 1991 y 1992 o la Obligación O9.95 con vto. 1994 [ES0000010910-2] para 1993 y 1994 que presentan negociaciones en torno al 37% de las veces.



La forma de la estructura temporal a lo largo del tiempo no varía de modo brusco, de un día para otro no cambia la forma básica de la misma. Así una curva creciente acaba derivando en una convexa para pasar a ser decreciente y posteriormente cóncava y volver a empezar el ciclo o recorrerlo en cualquier momento a la inversa.

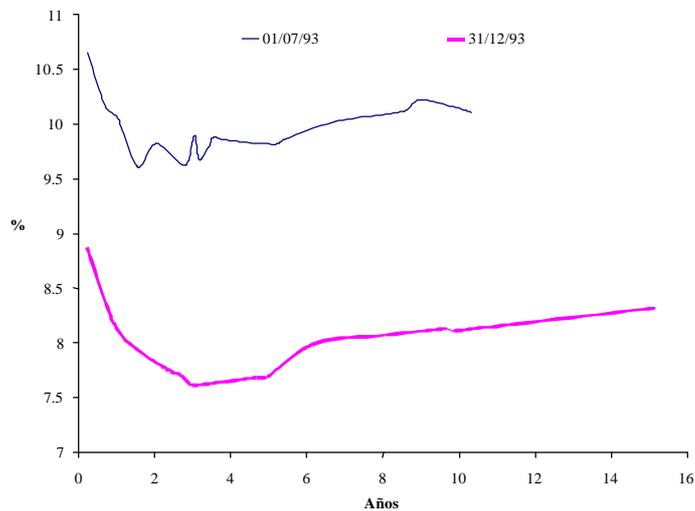
Respecto a esta cuestión, cuando se analizan los datos observados durante el periodo de estudio, podemos establecer que en 1991 la curva de rendimientos, y por aproximación la curva de tipos, es claramente decreciente como puede verse en el Gráfico 5.1.

Gráfico 5.2 Curvas de rendimiento 1992



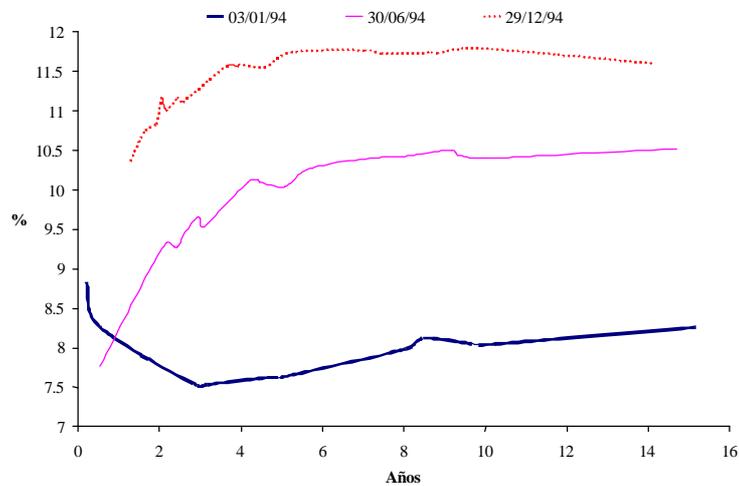
Este mismo comportamiento se observa a lo largo de todo el año 1992 (Gráfico 5.2). Aunque se observa que la disminución en el nivel de los tipos alcanzada a finales de 1991 se pierde a finales de este año donde toman valores entre el 14 y el 13%.

Gráfico 5.3 Curvas de rendimiento 1993



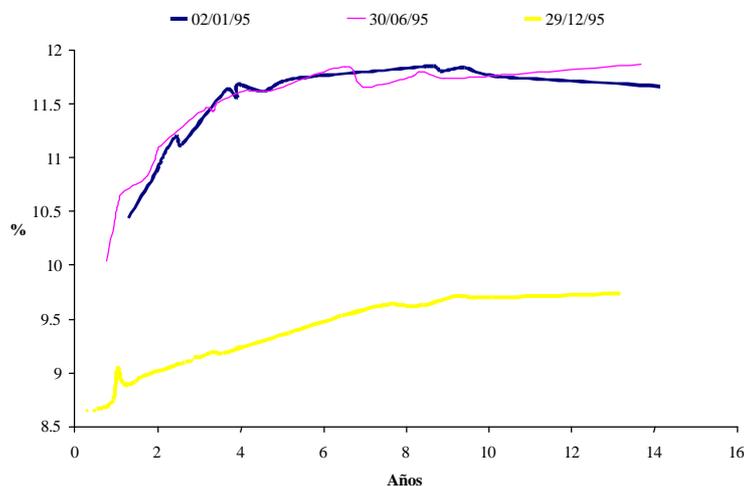
En 1993, la curva sufre la primera transformación importante pasando de ser decreciente hasta aproximadamente mediados de Mayo donde comienza a observarse una ligera convexidad en la misma que se mantiene durante el resto del año (Gráfico 5.3). Se vuelve a observar durante 1993 una disminución de los niveles de la curva hasta valores inferiores al 9%.

Gráfico 5.4 Curvas de rendimiento 1994



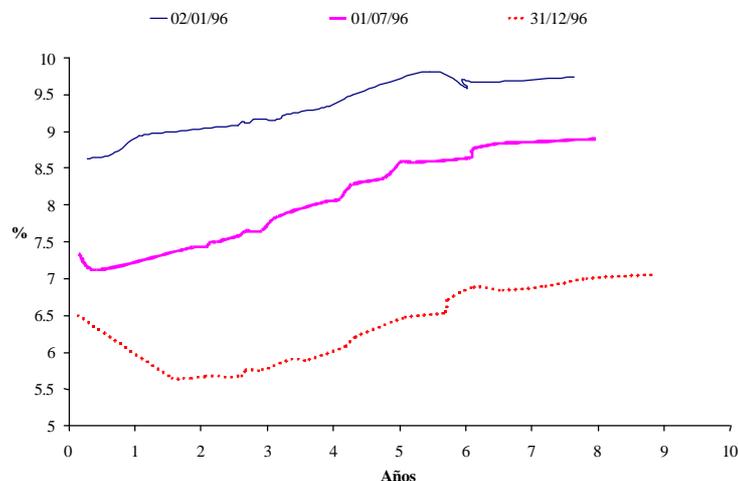
Durante el siguiente año la forma cóncava se mantiene hasta aproximadamente los dos primeros meses, pasando paulatinamente a presentar formas crecientes y apreciándose en los últimos días un leve decrecimiento en los plazos a largo de la misma, tal y como se recoge en el Gráfico 5.4, y un incremento general en los niveles de los tipos que vuelven a subir en torno del 11%.

Gráfico 5.5 Curvas de rendimiento 1995



Durante 1995 la forma creciente se mantiene prácticamente a los mismos niveles durante los primeros seis meses del año para ir disminuyendo paulatinamente como se observa en el Gráfico 5.5.

Gráfico 5.6 Curvas de rendimiento 1996



Por último, en 1996 se observa (Gráfico 5.6) que a partir de la segunda mitad del año comienza a apreciarse de nuevo una forma convexa en la curva que se hace más patente en Diciembre. Por

otro lado se observa la importante reducción que han tenido los tipos de interés, reducción que se ha ido manteniendo durante 1997 y a lo largo de este año, en el que la curva de rendimientos sigue presentando formas ligeramente convexas.

5.4 APLICACIÓN DE LOS MODELOS

A la hora de estudiar los diferentes modelos en el mercado español se ha intentado seguir, en lo posible, la metodología de estimación propuesta por los diferentes autores. No existe mucha variedad en relación a los pasos necesarios para la aplicación empírica de los mismos ya que todos siguen una metodología más o menos homogénea y se suelen diferenciar tan sólo en el tipo de función propuesta y el elemento en que basan el estudio de la estructura temporal.

El método básicamente consiste en minimizar una función objetivo sujeta, en ocasiones, a una serie de restricciones. Por lo general, la función objetivo es la suma de los errores de estimación al cuadrado, pero los últimos métodos propuestos¹⁰¹ toman como función objetivo ésta más un término que mide la suavidad de la curva, para tratar de lograr un equilibrio entre precisión y suavidad.

Esta minimización se puede realizar a través de los métodos usuales empleados en programación matemática, pero lo más común es emplear las herramientas econométricas de regresión para obtener al mismo tiempo la significación conjunta e individual de los parámetros estimados.

De forma muy general la metodología a seguir es la siguiente, una vez construida la muestra y seleccionado el modelo que

¹⁰¹ Adams y Van Deventer (1994) y Fisher, Nychka y Zervos (1995).

queremos estimar, se deben calcular los valores que toman tanto la variable dependiente como las variables explicativas. El valor de la variable dependiente estará compuesto por el precio medio del título más/menos la parte “constante” de la forma funcional empleada, entendiendo ésta como la parte de la función que no acompaña a ningún parámetro del modelo. Mientras que las segundas se corresponden con la suma del producto de los flujos por el valor de la función correspondiente calculada para cada fecha de pago. El siguiente paso es aplicar el método de regresión que se considere más adecuado y una vez estimados los parámetros se puede calcular el valor estimado de la estructura temporal de tipos de interés.

Lógicamente, algunos modelos necesitan un proceso de preparación inicial más complejo para el cálculo de los valores de las variables y de los parámetros, pero en esencia ésta es la base de la metodología.

5.4.1 Adaptación de los modelos de rendimientos

Como ya se ha comentado en los Capítulos 3 y 4, los modelos de curva de rendimiento pueden modificarse para su aplicación como modelos de precios. La conversión es sencilla y consiste en tomar la función de aproximación propuesta para la TIR como representativa de los tipos cupón-cero. Sin embargo, su estimación puede complicarse debido a que el modelo resultante es no lineal. La ecuación de regresión es del tipo:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_{it} e^{-t_i g(t_i)} + e_i$$

donde $g(t)$ es la función de aproximación propuesta para los tipos spot, P_i el precio medio del título i y Q_{it} el pago recibido en el momento t . En concreto se han empleado las siguientes

especificaciones para cada una de las propuestas que se han estimado a través de mínimos cuadrados no lineales:

- Cohen, Kramer y Waugh $\rightarrow g(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 [\text{Ln}(t)]^2$
- Fisher $\rightarrow g(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_3 \text{Ln}(t)$
- Bradley y Crane $\rightarrow g(t) = t^{\mathbf{b}_2} e^{(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t)} - 1$
- Echols y Elliott $\rightarrow g(t) = e^{(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^{-1})} - 1$

En la aplicación de los modelos de Fisher (1966) y Echols y Elliott (1976) no se ha respetado la propuesta inicial de los autores, que incluían como variable explicativa el cupón devengado por los títulos. Además en el modelo de Fisher (1966) se ha eliminado t^3 por considerar suficiente la utilización de un polinomio de grado dos que supone la aproximación de la función de descuento a través de una exponencial de tercer grado y para reducir el número de parámetros del modelo, que aún así no es estimable en todas las muestras de 1991. Esta decisión, además, se apoya en el estudio realizado por Calatayud y Morini (1995) que encuentran que esta variable es escasamente significativa en la mayoría de las muestras analizadas donde se aplica este modelo para la obtención de la curva de rendimientos.

5.4.2 Modelos de precios

En este apartado se expondrán los criterios e hipótesis adoptados en la aplicación de los diferentes modelos de precios analizados y los pasos a seguir para efectuar el análisis empírico de los mismos.

En general, podemos distinguir tres clases de modelos en base al proceso que es necesario seguir para su implantación: por un lado, se encuentran las propuestas de McCulloch (1975), Shea (1984), Steeley (1991) o similares, que se caracterizan por ser

lineales y estar definidas en el intervalo original, $[0, \infty)$. Por otro, están las propuestas no lineales de Carleton, Chambers y Waldman (1984), Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) cuya metodología de implantación es idéntica a la empleada en los modelos de rendimiento modificados. Y por último, podemos agrupar aquellos modelos que realizan algún tipo de cambio de variable para trasladar el intervalo original a otro más adecuado, donde se encuadran nuestras propuestas junto con las de Contreras y Navarro (1993) o Schaefer (1981).

Para la aplicación del modelo de McCulloch (1975) se ha procedido en primer lugar a la discretización de la capitalización, a la vez que se ha obviado la propuesta que realiza en relación al efecto impositivo¹⁰², de tal modo que la ecuación de valoración a estimar queda:

$$P_i = c_i \sum_{t=s_i}^{T_i} D(t) + 100D(T_i) \quad [1]$$

donde c_i es el pago por cupón del título i .

Para derivar la ecuación de regresión cuyos parámetros se estimarán por mínimos cuadrados, se debe sustituir la función de descuento, $D(t)$, por su aproximación:

$$D(t) = 1 + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(t) \quad [2]$$

Aunque esta especificación depende del valor del parámetro m como veremos posteriormente, ya se puede establecer cuál va a ser

¹⁰² En general todas las propuestas que incluyen algún tratamiento corrector para los impuestos se han testado sin tener en cuenta el mismo.

la variable dependiente del modelo de regresión: $y_i = P_i - 100 - M_i c_i$, donde M_i indica el número de pagos pendientes que tiene el título i .

Para la determinación de las variables exógenas habrá que considerar la forma funcional concreta que se asigna a cada función $g_j(t)$. Hasta ahora tenemos:

$$y_i = c_i \sum_{t=s_i}^{T_i} \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(t_i) + 100 \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(T_i) = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \left[\sum_{t=s_i}^{T_i} c_i g_j(t_i) + 100 g_j(T_i) \right] = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j X_{ij} \quad [3]$$

por lo que para poder seguir aplicando el modelo se debe determinar el número de funciones a emplear y la forma que adoptan las mismas. Se han seguido en ambos casos las indicaciones del autor y se ha tomado $m = {}_R\text{Ent}[\ddot{O}n]$ como una aproximación válida del número de funciones a utilizar en la aproximación, representando ${}_R\text{Ent}$ el entero más cercano del resultado de la raíz, y n el número de títulos que componen la muestra.

Una vez establecido el número de funciones quedan definidos, automáticamente, el número de subintervalos en que se divide el intervalo de estudio¹⁰³ $[0, T_n]$, $m-2$, y la localización exacta de los nodos:

$$d_j = T_i + \mathbf{q}_j (T_{i+1} - T_i),$$

siendo: $\mathbf{q}_j = [^{(j-1)}/_{(m-2)}]n - i$. Y i la parte entera de $^{(j-1)}/_{(m-2)}$.

¹⁰³ T_N es el vencimiento a más largo plazo observado en la muestra.

De este modo, se consigue que cada subintervalo tenga el mismo número de observaciones. A título informativo cuando se disponen de doce o menos observaciones sólo se emplea un subintervalo y hasta veinte observaciones dos subintervalos.

Una vez establecido todo lo anterior, se determinan las variables exógenas del modelo sumando el producto de los pagos recibidos por el valor de la función correspondiente en la fecha de pago quedando como parámetros a estimar los b_j 's. La especificación de estas funciones para los tres casos presentados en el estudio empírico se encuentra en el Anexo 3.

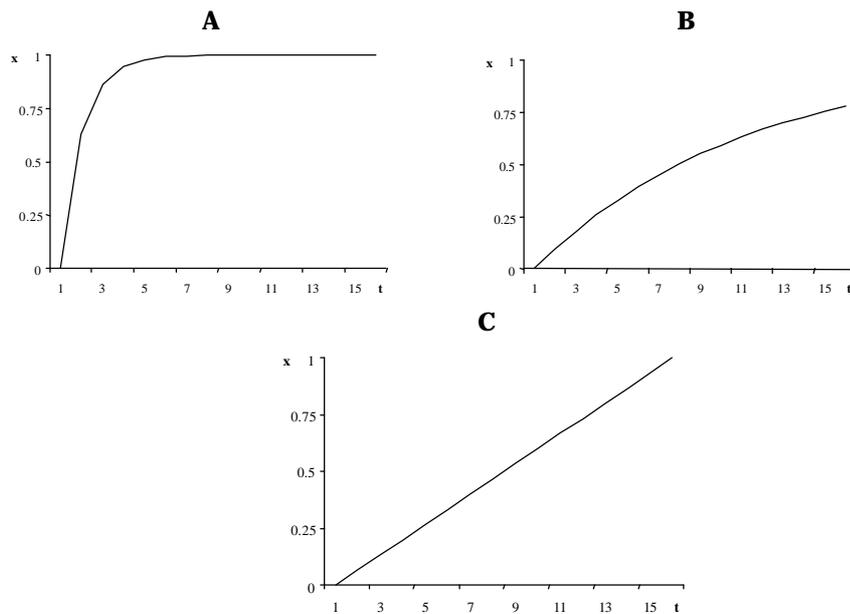
Schaefer (1981) propone emplear combinaciones lineales de diez funciones en la aproximación de la función de descuento; sin embargo, dadas las características de nuestras muestras este número parece excesivo y se opta por escoger el número de funciones a emplear en función del número de observaciones disponibles siguiendo el criterio de McCulloch (1975). De este modo el procedimiento a seguir es muy similar al comentado anteriormente.

Las variables dependientes en ambos modelos coinciden y se calculan como en el caso anterior a partir de las expresiones [1] y [2]; igualmente la determinación de las variables exógenas se realiza a partir de la expresión [3], pero en esta ocasión, no cambian únicamente las funciones empleadas¹⁰⁴ sino que siguiendo a Schaefer (1981) es necesario realizar previamente un cambio de variable para trabajar en el intervalo $[0,1]$ donde se definen las mismas. Schaefer (1981) no especifica el tipo de cambio a realizar por lo que se ha valorado el modelo en base a dos alternativas. Por un lado, siguiendo a Fong y Vasicek (1982) que realizan una transformación similar, se emplea un cambio de

¹⁰⁴ Véase Anexo 3.

variable de tipo exponencial: $t\hat{I} [0, \infty) \hat{U}_x \hat{I} [0, 1] @ x = 1 - e^{-t}$. Este cambio da lugar a que gran parte de las observaciones originales se agrupen en el límite superior del intervalo, ya que los valores en t tienden excesivamente rápido a la unidad. Por tanto gran parte del intervalo queda vacío como muestra el ejemplo recogido en la Figura 5.1 (A). La utilización de este cambio origina errores de estimación en precios excesivamente elevados debido a que prácticamente no existe diferencia, una vez realizado el cambio, entre un vencimiento a cinco años y otro a quince.

Figura 5.1 Representación gráfica de algunos cambios de variable



Una alternativa dentro de esta línea que mejora considerablemente los resultados es ponderar, como hacen Fong y Vasicek (1982), el argumento de la exponencial: $x = 1 - e^{-st}$. En concreto, este parámetro adicional no negativo, s , controla la

velocidad a la que cada función se aproxima a su nivel asintótico. Para Mastronikola (1991) un buen valor de σ puede ser 0'1 porque no desvirtúa excesivamente la escala original como podemos observar en la Figura 5.1 (B). En cualquier caso, sería recomendable si se utiliza este tipo de cambio no imponer a priori el valor de σ , sino que éste sea determinado junto al resto de parámetros del modelo. Esto dificulta un poco la estimación ya que se pierde la linealidad del modelo.

Otra opción que ofrece, en nuestra opinión, resultados menos sesgados es emplear un cambio de variable lineal de tal modo que: $x = t / T_n$, siendo T_n el vencimiento más largo considerado o un valor que represente el vencimiento más lejano. De este modo, se mantienen la escala inicial y el resultado del modelo no se ve tan condicionado por el cambio de variable empleado (véase Figura 5.1 (C)).

En el análisis empírico del modelo de Schaefer (1981) se han empleado las dos últimas alternativas, presentando ambas resultados similares en términos de error en precios, siendo ligeramente mejores los resultados obtenidos a través de la transformación exponencial por lo que en los anexos se exponen éstos. Además esta transformación condiciona menos la representación gráfica de las curvas de tipos cupón-cero y forward estimadas, ya que no se precisa conocer para su elaboración el vencimiento más lejano considerado en la determinación de las funciones, como sucede en el caso de realizar la transformación lineal.

El cambio de variable se realiza para cada una de las fechas de pago de cada título que compone la muestra y se procede al cálculo de la variable dependiente como se explicó en el caso anterior. De este modo, se tiene que la especificación general de

las funciones empleadas por el modelo queda representada a través de la siguiente expresión:

$$g_j(t) = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{r+1} \binom{m-j}{r} \frac{(1 - e^{-st})^{j+r}}{j+r}$$

Respecto al modo en que el cambio de variable afecta a la forma de estas funciones, nos podemos referir al gráfico representativo incluido en el tercer Capítulo (Gráfico 3.6), teniendo en cuenta que, a medida que s crece la asíntota de cada curva se alcanza más cerca del origen de coordenadas. Al igual que en el método de Fong y Vasicek (1982) si no se desea establecer el valor de σ a priori se puede estimar su valor conjuntamente con el resto de parámetros del modelo pero se pierde la linealidad del mismo. En nuestra opinión, el coste de implantación de esta metodología no compensa la posible mejora en los resultados.

El principal problema en la aplicación del modelo de Fong y Vasicek (1982) es la falta de información sobre el tipo de función que emplean. Los autores sólo concretan que la función de descuento se estima indirectamente a través de funciones exponenciales y que es necesario, al igual que en el modelo anterior, realizar un cambio de variable. Como ejemplo se tiene que Contreras y Navarro (1993) proponen la utilización de splines con un solo nodo intermedio, mientras que Shea (1985) utiliza B-splines.

Otro problema que surge al tratar de implantar el modelo es el modo en que se va a llevar a cabo la estimación del mismo. El modelo es no lineal, salvo que se fije el valor de a externamente; esto no sería un problema, ya que existen métodos no lineales de estimación, si no fuese porque la no linealidad afecta también a la determinación de los nodos del spline y por tanto a la especificación de la propia función a utilizar. Por lo que se requiere integrar la estimación de los parámetros con la determinación de las variables exógenas. Este procedimiento, habida cuenta que es necesario calcular las funciones para cada fecha de pago de todos los títulos que componen la muestra, es bastante costoso.

Una alternativa que puede plantearse es hacer variar el parámetro no lineal, a , en un rango de valores que se considere apropiado y estimar para cada uno de esos valores la función de descuento tomando finalmente el resultado que genere un error de estimación menor. Este método no nos proporciona la mejor estimación dado un criterio sino una aproximación a la misma ya que la calidad del resultado depende de la frecuencia en que se tomen los valores de a . Si la frecuencia es muy alta, más cercano estará el valor obtenido del óptimo pero más costoso será de implantar el método.

Una buena aproximación de este valor, que representa en el caso español, según Contreras y Navarro (1993) la tendencia de los tipos en los plazos finales de la curva, puede ser la TIR del título con más vencimiento. Si se considera que esta aproximación es más o menos precisa se puede optar por fijar el valor de a , con lo que se linealiza el modelo y su estimación se simplifica enormemente.

Por tanto, en el desarrollo empírico, debido a la poca información que aportan sus autores y en base a los estudios

realizados por otros investigadores, se ha optado por analizar tres alternativas diferentes. Por un lado, dado que independientemente del tipo de función que se emplee, el cambio de variable no soluciona el problema de la no linealidad, sino que lo causa, se puede optar por estimar de entrada el modelo no lineal que indirectamente se estima cuando se realiza el procedimiento propuesto por Fong y Vasicek (1982). Esto es, aproximar la función de descuento a través de un polinomio exponencial:

$$D(t)=g(t)=b_0+b_1e^{-at}+b_2e^{-2at}+b_3e^{-3at}$$

Como, al menos, se debe garantizar que $D(0)=1$, se tiene que imponer que el término independiente sea: $b_0=1-b_1-b_2-b_3$, por lo que la representación final queda:

$$D(t)=g(t)=1+b_1[e^{-at}-1]+b_2[e^{-2at}-1]+b_3[e^{-3at}-1]$$

De forma similar a como se detalló para McCulloch (1975), para obtener el modelo de regresión, simplemente se sustituye en la ecuación de valoración $D(t)$ por la función propuesta. La única dificultad es la necesidad de emplear métodos de regresión no lineales.

La siguiente alternativa que se ha analizado consiste en aproximar $G(x)$ directamente a través de un polinomio simple de al menos grado tres, ya que como Shea (1985) indica el uso de splines en $G(x)$ no está justificado teóricamente, salvo que se crea que el comportamiento de la función de descuento no siga un decrecimiento exponencial.

Para aplicar esta propuesta es necesario realizar en primer lugar el cambio de variable propuesto por Fong y Vasicek (1982): $x = 1 - e^{-at}$. Para ello, con el fin de evitar que el modelo sea no lineal y siguiendo la interpretación de α que realizan Contreras y Navarro (1993) para el caso español, se toma para cada muestra analizada como valor representativo de este parámetro la TIR del título con mayor vencimiento.

De este modo se analiza la siguiente especificación:

$$D(t) = G(1 - e^{-TIR_N}) \circ G(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

El procedimiento a seguir es idéntico al realizado en el resto de modelos y tan sólo hay que tener en cuenta el cambio de variable realizado, por tanto la metodología empleada es muy similar a la señalada anteriormente para Schaefer (1981).

Por último, se analiza la propuesta de Contreras y Navarro (1993), aunque se aplicará una metodología ligeramente diferente. En primer lugar, a fin de evitar la no linealidad del modelo y reducir su coste de aplicación, asumiendo el riesgo de perder un poco de precisión en las estimaciones, el parámetro α se determinará exógenamente tomando como aproximación, igual que en el caso anterior, la TIR del título con mayor vencimiento de la muestra bajo la hipótesis de que, a pesar de las inconsistencias de la TIR, su magnitud es la información más objetiva de la que se dispone para valorar la tendencia de los tipos a largo plazo. Por otro lado, como las muestras empleadas no contienen Letras se omite la variable *dummy* de su modelo. En último lugar, para reducir la complejidad y no tener que integrar la estimación del modelo con la determinación de las funciones empleadas, el nodo intermedio de los splines no se toma de modo que se minimice la suma de los errores cuadráticos de estimación sino que se establece éste de forma similar a McCulloch (1971)

como aquél que deja igual número de observaciones a uno y otro lado del intervalo.

La aplicación de este modelo es bastante similar a los anteriores y sólo cambia la variable dependiente debido a la definición de $G(x)$ propuesta. De modo breve, los pasos a seguir comprenden la determinación de α como la TIR del título con mayor vencimiento de la muestra, TIR_N ; la realización del cambio de variable $x = 1 - e^{-tTIR_N}$ para cada uno de las fechas en la que se devenga cupón; la elección del nodo intermedio t_0 como el punto que deja igual número de observaciones a un lado y otro del mismo; el cálculo del valor de las funciones para cada fecha de pago y a partir de ellas las variables exógenas y por último el cálculo de la variable dependiente que en este caso queda definida como:

$$y_i = P_i - 100 - M_i c_i + \sum_{j=1}^{M_i} Q_{ij} x_j .$$

Esto es, la parte de la función $G(x)$ que no incorpora ningún parámetro a estimar, igual que en los modelos anteriores, pasa a formar parte de la variable dependiente.

La propuesta de Carleton, Chambers y Waldman (1984) no necesita ningún tipo de preparación previa para su aplicación. Siguiendo las indicaciones de los autores, que después de diversos análisis consideran que el uso de un polinomio cúbico tiene capacidad de representación suficiente, se han empleado éstos en el desarrollo empírico del modelo.

De este modo, la función de descuento se define como:

$$D(t) = e^{-(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3)} ,$$

que se sustituye en la función de valoración, dando lugar a la siguiente ecuación de regresión:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_i e^{-(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3)} + e_i .$$

Para los autores un elemento importante de la estimación es el método empleado, por lo que se han seguido sus recomendaciones en cuanto al empleo de la técnica de máxima verosimilitud para la realización de las estimaciones; aunque también se han empleado mínimos cuadrados no lineales.

Shea (1984) en su trabajo propone más que una especificación funcional en sí, una forma de realizar la estimación para poder incorporar restricciones adicionales de un modo más sencillo sin tener que recalcular todas las funciones empleadas. Su propuesta es totalmente equivalente a los modelos de splines tradicionales propuestos por McCulloch (1971, 1975) o Steeley (1991).

La conversión entre ambas metodologías es sencilla. En términos generales, los modelos tipo McCulloch aproximan la función de descuento de la forma:

$$D(t) = 1 + b_1 g_1(t) + \dots + b_m g_m(t)$$

donde b_j son los parámetros a estimar y $g_j(t)$ tienen la forma:

$$g_j(t) = \begin{cases} a_j, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ b_j, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Por otro lado, Shea (1984) especifica la función de descuento como:

$$D(t) = 1 + g(t)$$

siendo $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} \mathbf{b}_1 a_1 + \mathbf{b}_2 b_1 + \dots, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \mathbf{b}_1 a_2 + \mathbf{b}_2 b_2 + \dots, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Así pues ante especificaciones equivalentes de: a_j , b_j , ... se obtienen los mismos resultados con ambos métodos.

Shea (1984) propone en su trabajo, para tratar de evitar la obtención de tipos forward negativos, que se establezca una restricción sobre la pendiente de la función de descuento en el último nodo de tal modo que sea la mitad de la pendiente de la curva en el nodo anterior. Por tanto, para la aplicación de su propuesta se ha tenido en cuenta esta restricción, junto a las de continuidad en los nodos de la función y sus dos primeras derivadas.

Para determinar la función de aproximación se debe aplicar la metodología de construcción de splines explicada en el Capítulo 2 e incorporar esta restricción adicional que según la nomenclatura seguida en ese capítulo puede expresarse como:

$$1/2 b_{n-1} + 2c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 = 0$$

Las especificaciones de cada una de las funciones según el número de subintervalos se pueden consultar en el Anexo 3 expresadas en la forma de McCulloch (1975). También en esta ocasión para la determinación del número de subintervalos a emplear se ha seguido el procedimiento propuesto por éste. Esto garantiza, en cierto modo, que la obtención de mejores o peores resultados por parte de los modelos que emplean splines se deba a la especificación concreta de éstos y no a una localización diferente de los nodos dentro del intervalo.

El análisis de los modelos de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) es muy similar al efectuado en los modelos de rendimientos modificados, que no presentan mayores complicaciones en su estimación, salvo la utilización de técnicas de regresión no lineales.

La ecuación de regresión, en el primer caso, es:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_i \exp \left[-t \left(\mathbf{b}_0 + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \left(1 - e^{-\frac{t}{t}}\right) \frac{t}{t} - \mathbf{b}_2 e^{-\frac{t}{t}} \right) \right] + \mathbf{e}_i$$

Y para el modelo de Svensson (1994) se tiene:

$$P_i = \sum_{t=s_i}^{T_i} Q_i \exp \left[- \left(\mathbf{b}_0 t + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}\right) t_1 - \mathbf{b}_2 e^{-\frac{t}{t_1}} + \mathbf{b}_3 \left(\left(1 - e^{-\frac{t}{t_2}}\right) t_2 - t e^{-\frac{t}{t_2}} \right) \right) \right] + \mathbf{e}_i$$

Por otra parte, Steeley (1991) emplea B-splines cúbicos. Aproxima la función de descuento a través de:

$$D(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(t)$$

Y restringe que:

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j g_j(0) = 1, \text{ para lograr que } D(0) = 1.$$

El procedimiento para la construcción de los B-splines se encuentra recogido de forma detallada en el Capítulo 2 y dado que Steeley (1991) no impone ninguna restricción adicional su obtención es sencilla, en cualquier caso las funciones empleadas en el análisis empírico pueden consultarse en el Anexo 3. Para la

construcción de las mismas, siguiendo con la tónica general se ha determinado el número de funciones, así como la posición de los nodos según McCulloch (1975), a pesar que Steeley (1991) mantiene los nodos fijos en los puntos: -3, -2, -1, 0, 5, 10, 40, 45, 50 y 60.

En relación con los nodos situados fuera del intervalo se ha optado por igualar los mismos al valor que presenta el nodo más cercano perteneciente a éste; es decir, en el límite inferior del intervalo para $s=1$ y $c < s$ se tiene $d_c = d_1 = 0$ y en el extremo superior para $s=m-1$ y $c > s$ se tiene $d_c = d_{m-1} = T_r$. Esta elección de los nodos nos permite imponer con mayor facilidad la restricción para que $D(0) = 1$. De esta forma se logra que $g_j(0) = 0 \quad j = 1, \dots, m$ y se define la función de descuento como:

$$D(t) = 1 + \sum_{j=1}^m b_j g_j(t)$$

5.4.3 Aplicación de las alternativas propuestas

De todas las alternativas teóricamente adecuadas presentadas en el Capítulo 4 se han elegido aquellas que requieren imponer menos condiciones para el logro del objetivo buscado y no suponen la utilización de métodos de estimación no lineales.

En concreto, se ha optado por analizar empíricamente una combinación de funciones definidas en el intervalo $[0,1]$, como respuesta a las propuestas planteadas por Schaefer (1981) y Contreras y Navarro (1993) en ese intervalo; y una combinación de funciones de Legendre definidas en el intervalo $[-1,1]$ para comprobar si estas funciones, según indica la teoría, son las más apropiadas tanto desde el punto de vista de la estimación como por las propiedades asintóticas que presenta. En lo que sigue la

primera especificación se denominará Propuesta I y la segunda, Propuesta II.

5.4.3.1 Propuesta I

Para la aplicación de este modelo hay que realizar, en primer lugar, el cambio de variable desde $t\hat{I}$ $[0, \infty)$ hasta $x\hat{I}$ $[0, 1]$. Igual que en el caso de Contreras y Navarro (1993) y Schaefer (1981), el cambio viene determinado por $x = 1 - e^{-t}$. Y dado que la curva de tipos forward, como se muestra en el Capítulo 4, tiende asintóticamente hacia a , se ha decidido tomar como valor aproximativo de ésta la TIR del título con mayor vencimiento de la muestra.

Una vez determinado el cambio de variable, el resto del proceso es similar al realizado en los otros modelos. De este modo, se calculan los valores de las diferentes funciones; a partir de éstas, siguiendo el procedimiento explicado para McCulloch (1975), se calculan las variables explicativas y se calcula la variable dependiente de modo equivalente a lo realizado para Contreras y Navarro (1993):

$$y_i = P_i - 100 - M_i c_i + \sum_{j=1}^{M_i} Q_{ij} x_j.$$

Con estos elementos se forma la ecuación de regresión que se estima por mínimos cuadrados ordinarios.

5.4.3.2 Propuesta II

Para analizar empíricamente la segunda propuesta se construye la función de aproximación en el modo explicado en el

Capítulo 4 tomando polinomios de Legendre de hasta grado tres. La utilización de polinomios de mayor grado no conlleva ninguna dificultad adicional, ya que no afectan a los valores de los polinomios de menor grado y únicamente supone la estimación de un mayor número de parámetros.

El cambio de variable es ligeramente diferente que en el caso anterior, ya que nuestro intervalo objetivo es $[-1, 1]$, de este modo, para $t\hat{I} [0, \infty)$ y $x\hat{I} [-1, 1]$, se tiene: $x = 1 - 2e^{-at}$. Para la realización de este cambio, siguiendo el razonamiento expuesto anteriormente se vuelve a tomar como valor de a la TIR del título de mayor vencimiento.

El resto del procedimiento es igual al explicado para la Propuesta I, la única diferencia reside en el cálculo de la variable dependiente, que se define como:

$$y_i = P_i - \sum_{j=1}^{M_i} \frac{1}{2} Q_{ij} (1 - x_j).$$

Este modelo, una vez determinadas las variables exógenas a partir de la especificación propuesta, se estima por mínimos cuadrados ordinarios.

5.5 EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS

5.5.1 Comparación entre modelos

Determinar bajo qué criterio se van a medir los resultados obtenidos es de una importancia vital, la elección de un factor u otro puede dar lugar a que determinados modelos se revelen como los más apropiados o parezcan los que peores resultados obtienen. Este tema ha sido tratado por todos los autores que han

realizado análisis empíricos en torno a la modelización de la ETTI, siendo muchos los estudios que se han dedicado a la determinación del método más objetivo.

Bliss (1996) advierte sobre los peligros de considerar como único criterio de evaluación entre modelos la bondad del ajuste en la muestra, por lo que propone una serie de tests sobre el análisis de la serie de residuos que detectan especificaciones incorrectas en la ecuación de valoración subyacente que relaciona la estructura temporal con los precios de los títulos.

McCulloch (1971) también hace referencia a esta circunstancia y considera que el coeficiente de determinación es un mal indicador de la bondad del ajuste ya que no tiene una interpretación intuitiva obvia y casi siempre es superior a 0'99. Por otro lado, considera que el estimador de la varianza sí es significativo.

En el mismo sentido se manifiestan Carleton y Cooper (1976) que consideran que el coeficiente de determinación no aporta información significativa ya que la especificación económica del modelo econométrico es directa y se espera que su valor sea siempre alto, y Shea (1985) para quien los splines son formas funcionales tan flexibles que no tiene significado comparar especificaciones alternativas de los mismos en base a la bondad del ajuste, por lo que propone como base para juzgar la calidad del modelo comprobar si las expectativas del investigador sobre la forma que debe tener la curva se cumplen. En concreto habría que observar la capacidad del modelo para generar curvas de tipos cupón-cero y forwards suaves que muestren las propiedades asintóticas deseables.

La única excepción sobre este punto de vista la plantea Mastronikola (1991) que emplea el coeficiente de determinación

ajustado para valorar el modelo aplicado por el Banco de Inglaterra a pesar que emplea técnicas de estimación no lineales. Por otro lado, Dahlquist y Svensson (1994) se sitúan en un punto intermedio ya que no sólo comparan las medidas de ajuste sino también las propiedades de convergencia de los modelos.

En cualquier caso, no emplear el coeficiente de determinación para valorar los modelos se justifica no sólo por los motivos expuestos, sino porque este indicador presenta problemas cuando la ecuación de regresión no incorpora término independiente (constante) y no es válido cuando se tratan modelos no lineales¹⁰⁵.

McCulloch (1971), desde la perspectiva de que el estimador de la varianza de los diferentes elementos que pueden definir la ETTI es un indicador significativo de la calidad del ajuste, parte para su determinación de la matriz de covarianzas, C , de los estimadores de los parámetros del modelo. De este modo, el estimador de la varianza de la función de descuento es:

$$\text{var}[D(t)] = z' Cz, \text{ siendo } z_j = f_j(t).$$

De forma similar, la varianza estimada de los tipos cupón cero es:

$$\text{var}[h(t)] = \text{var}[D(t)] / [tD(t)]^2.$$

La del tipo forward instantáneo:

$$f(t)^2 z' Cz, \text{ siendo } z_j = \left[\frac{f_j'(t)}{D'(t)} \right] - \left[\frac{f_j(t)}{D(t)} \right].$$

Y por último, la varianza estimada del tipo forward medio entre t_1 y t_2 queda como $z' Cz$, siendo:

¹⁰⁵ Véase Novales (1993), pp. 76-77.

$$z_j = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\frac{f_j(t_1)}{D(t_1)} - \frac{f_j(t_2)}{D(t_2)} \right].$$

Steeley (1991) considera que las fórmulas anteriores propuestas por McCulloch (1971, 1975) han sido ignoradas por los otros investigadores, en parte, porque el procedimiento para calcular las matrices de varianzas y covarianzas es, respecto al resto del procedimiento, estadísticamente complejo. En este sentido, propone una aproximación para la varianza de los tipos forward cuya precisión se puede considerar satisfactoria ya que las varianzas de los factores de descuento son más pequeñas que el cuadrado de sus valores esperados:

$$\text{var}[f(t)] \approx \frac{E(D^2(t-1))}{E(D^2(t))} \left[\frac{\text{var}(D(t-1))}{E(D^2(t-1))} + \frac{\text{var}(D(t))}{E(D^2(t))} - \frac{2\text{cov}(D(t-1), D(t))}{E(D(t-1))E(D(t))} \right]$$

Por su parte, Echols y Elliott (1976) proponen un contraste para evaluar la potencia relativa de dos modelos a través del análisis de los residuos generados por cada uno de ellos. Para efectuar las comparaciones entre los diferentes modelos proponen el contraste de las siguientes hipótesis:

$$H_0: m_i - m_j = 0$$

$$H_a: m_i - m_j < 0$$

Siendo el estadístico de contraste una t-Student definida como: $t = (m_i - m_j) / (\mathbf{s}^2/n)^{1/2}$, donde m_i y m_j son las medias de los errores del modelo i y j , $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}_i^2 + \mathbf{s}_j^2 - 2\text{Cov}(i, j)$ y n es el número de muestras.

Para Carleton, Chambers y Waldman (1984) el análisis de los residuos es fundamental para la valoración de la capacidad de un

modelo, tanto para detectar problemas sistemáticos en la estimación de determinados tramos temporales como para analizar la posible existencia de heteroscedasticidad o detectar problemas concretos en determinados títulos como iliquidez, sobrevaloración, etc. Aunque el análisis visual de las curvas de tipos cupón-cero y forwards estimadas también es importante para detectar desviaciones respecto al comportamiento esperado.

Bliss (1996) es, sin duda, el autor que más énfasis ha puesto en la utilización de métodos alternativos para valorar y comparar las diferentes propuestas. En especial, advierte del riesgo de emplear como único criterio de evaluación la bondad del ajuste en la muestra empleada o muestra de estimación y considera necesario reservar algunos datos para formar una muestra paralela, *muestra de verificación*, que sirva para valorar la capacidad de estimación de los modelos. Por lo general, los análisis efectuados sobre la muestra empleada proporcionan una visión distorsionada de la capacidad del modelo, por tanto la aplicación de tests fuera de la muestra dota a los resultados de mayor fiabilidad¹⁰⁶.

También critica que las investigaciones anteriores han prestado poca atención al análisis de los residuos como herramienta para detectar problemas. Desde su punto de vista, los modelos se emplean bajo la hipótesis que capturan toda la información contenida en los precios de los títulos y que las diferencias o errores observados son ruidos. Una manera de comprobar si esto se cumple es buscar relaciones sistemáticas en los errores de estimación, para ello propone someter los residuos a tres análisis diferentes¹⁰⁷ que estudien: la evolución del comportamiento del error durante un periodo de tiempo, la

¹⁰⁶ Waggoner (1997) emplea esta metodología para analizar su propuesta y los modelos de Fisher, Nychka y Zervos (1995) y McCulloch (1975).

¹⁰⁷ En Bliss (1996) se explican con detalle cada uno.

correlación del error con el método específico empleado y la relación del error con otras variables no incluidas en el modelo para detectar problemas de mala especificación por omisión de variables relevantes.

En otro orden de cosas, aunque en las estimaciones se emplee, por lo general, el precio medio como variable dependiente, tanto el precio máximo como el mínimo han sido precios negociados en el mercado y por tanto los precios pertenecientes al intervalo que ambos limitan pueden considerarse precios válidos. Esto nos lleva a considerar que el error de estimación no debe medirse en base a la variable dependiente (precio medio) como generalmente se hace, sino que dadas las peculiaridades del estudio desarrollado debe establecerse la existencia de error de estimación sólo si el precio estimado no se encuentra dentro del intervalo formado por el precio máximo y mínimo negociados para cada título. Por tanto, la definición de error de estimación, según Bliss (1996), debe presentarse como:

$$e = \begin{cases} P_{max} - \hat{P}, & \text{si } \hat{P} > P_{max} \\ P_{min} - \hat{P}, & \text{si } \hat{P} < P_{min} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde e representa el error, P_{max} el precio máximo, P_{min} el precio mínimo y \hat{P} el precio estimado.

Otra particularidad que distingue los análisis propuestos por Bliss (1996) es que emplea como criterio los errores absolutos en contra de la utilización generalizada de los errores al cuadrado, ya

que opina que no existe ninguna razón económica para emplear estos últimos salvo la conveniencia econométrica¹⁰⁸.

La mayoría de los autores analizan el error de estimación en precios, sin embargo, Svensson (1994) también estudia el error en términos de TIR¹⁰⁹, para ello simplemente compara la TIR observada en el mercado con la que resulta de tomar el precio estimado. Comprueba que la minimización del error en precios ocasiona, a veces, grandes errores en rendimientos para títulos con vencimientos próximos, porque los precios son menos sensibles a los tipos de interés en los tramos a corto. Respecto a este análisis hay que tener en cuenta que el error en TIR es el cociente entre el error en precio y la duración, por lo que a menor duración mayor error en TIR. Esto es, un mismo valor del error en precios implica un error en TIR mayor en el corto plazo que en el largo o lo que es lo mismo, un mismo error en TIR da lugar a un error en precios comparativamente mayor para el tramo a largo ya que: $e_{\text{precio}} = e_{\text{TIR}} \cdot \text{Duración}$.

Para Svensson (1994) aunque la minimización del error en precios ofrece, en ocasiones, buenos ajustes de los rendimientos, en la mayor parte de los casos existen problemas en el corto plazo y propone tomar como criterio la minimización del error en rendimientos que produce un ajuste mucho mejor a cambio de un pequeño empeoramiento en el ajuste de los precios.

Otro análisis significativo es el propuesto por Waggoner (1997) que mide la suavidad de cada método promediando la

¹⁰⁸ Dahlquist y Svensson (1994) también emplean esta medida junto con la tradicional de los errores al cuadrado.

¹⁰⁹ Su trabajo no se centra en la estimación de la curva de tipos, sino en el análisis de los tipos forward como indicadores de la política monetaria. Desde esta perspectiva tiene más sentido minimizar el error en tipos que en precios.

segunda derivada de la curva de tipos forward:

$(t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} [f''(t)]^2 dt$, tal que valores más pequeños indican mayor suavidad en la curva.

Por último, no es suficiente analizar la capacidad del modelo para obtener buenas estimaciones, sino que también es necesario valorar la calidad o fiabilidad de los parámetros estimados. Para ello se estudian dos aspectos fundamentales de los modelos de regresión: la autocorrelación y la heteroscedasticidad.

La autocorrelación en los errores puede indicar una mala especificación del modelo o del método de estimación. Aunque también puede darse el caso de que realmente los errores en precios estén correlacionados sugiriendo ineficiencias en el mercado, situación según Bliss (1996) poco probable. La autocorrelación produce pérdida de eficiencia sobre los estimadores del modelo de regresión.

La heteroscedasticidad también genera pérdida de eficiencia de los estimadores y surge cuando la varianza de los errores no es constante en toda la muestra. La mayoría de los trabajos realizados consideran que el diferencial entre precios negociados y las comisiones del mercado producen este efecto en los modelos de estimación de la estructura temporal.

Vistas todas las propuestas de evaluación anteriores y teniendo en cuenta que nuestro objetivo no es ofrecer una clasificación estanca de los diferentes modelos, se ha decidido llevar a cabo un análisis sencillo de los errores en precios y completar la valoración global del modelo con el estudio teórico efectuado en el apartado anterior y la representación gráfica de las curvas de tipos spot y forward estimadas. De este modo, siguiendo a Dahlquist y Svensson (1994) nos situamos en un punto intermedio que nos

permite valorar con cierta precisión los resultados sin necesidad de emplear métodos complejos como McCulloch (1971), ni realizar un estudio detallado como Bliss (1996).

5.5.2 Resultados en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada

En este apartado se comentan los resultados más relevantes obtenidos por los diferentes modelos analizados con el ánimo de ofrecer una visión global de la capacidad de estimación y predicción de los mismos. Se ha valorado, por tanto, no sólo la precisión en las estimaciones, medida en base a las diferencias entre precios observados y estimados, sino también la calidad de las predicciones fuera del intervalo, cuya evaluación se efectúa gráficamente a través de la representación de las curvas de tipos estimadas para vencimientos más alejados de los observados y bajo la hipótesis de convergencia y suavidad de los tipos forward.

En general, los parámetros estimados carecen de un significado económico, o incluso intuitivo, directo: en la mayor parte de los modelos las variables exógenas no son un determinado factor sino el valor de una función más o menos compleja que depende del tiempo. Por tanto, no parece relevante estudiar la significación individual de los parámetros salvo que ayude a detectar malas especificaciones del modelo. En este sentido, también se manifiestan Contreras y Navarro (1993) quienes consideran que el contraste individual de cada uno de los parámetros por separado carece de sentido en el estudio de estos modelos ya que se limitan a representar los coeficientes de la función a la que acompañan, por lo que lo importante es valorar la significación conjunta de los mismos.

En este sentido, la calidad de la estimación se evalúa a través de las diferencias computadas entre los precios observados y los generados por el modelo.

En el análisis de los errores se ha seguido la metodología tradicional que estudia los cuadrados de los errores y la propuesta por Bliss (1996) que estudia los valores absolutos de los mismos. Tradicionalmente se ha empleado el cuadrado de los errores para valorar los modelos por ser la técnica empleada en el procedimiento de regresión. Sin embargo, en nuestra opinión, la utilización del error absoluto ofrece una visión de los resultados menos distorsionada.

Bajo la hipótesis de que el cálculo del cuadrado de los errores se realiza para evitar que valores positivos y negativos se compensen, igualmente adecuado es emplear el valor absoluto de los mismos que, además, no modifica el valor real del error. Así pues, independientemente de que el método de regresión empleado, por razones de facilidad de cálculo, se base en la minimización de los errores al cuadrado, posteriormente se pueden emplear en la valoración del modelo los errores absolutos.

En relación a las regresiones se evalúan la autocorrelación de primer orden a través del estadístico Durbin – Watson y la heteroscedasticidad¹¹⁰ a través del test de White. A la vista de los resultados obtenidos por otros autores respecto a este último fenómeno, también se ha analizado la relación entre los errores y el diferencial de precios para los dos últimos años del periodo analizado, encontrando que no existe ningún tipo de relación significativa entre ambos. Este hecho puede ser debido a que el diferencial en la mayoría de las ocasiones no alcanza un punto

¹¹⁰ Los resultados se analizan para un nivel de confianza del 95%.

porcentual y en muchas ocasiones, dada la iliquidez de algunos títulos, ni siquiera existe. Este resultado coincide con el detectado por Schaefer (1981) para el mercado británico, para quien el diferencial es tan pequeño que carece de relevancia.

Además el error no sigue ninguna pauta temporal definida y los errores más altos no se corresponden con los mayores vencimientos. Lo que sí resulta significativo es la existencia de determinados títulos que de forma sistemática presentan mayores problemas de estimación y que coinciden con los *outliers* detectados en la estimación de todos los modelos.

Por otro lado, se observa que el diferencial entre precio máximo y mínimo negociado es ligeramente superior en los títulos con vencimientos más lejanos, aunque este hecho no se detecta de forma generalizada todos los días.

Por último, en el caso de los modelos no lineales se analiza la rapidez en lograr la convergencia como indicativa de la facilidad de aplicación del mismo.

Para finalizar el estudio de los modelos se valora si los parámetros estimados son capaces de generar curvas de tipos spot y forwards acordes con lo observado en el mercado. Para ello se estiman, cada día, las curvas de tipos cupón – cero y forward que resultan de aplicar el modelo y valores estimados. Estas curvas se calculan para vencimientos hasta 11 años en 1991 y 1992 y para vencimientos hasta 15 años el resto del periodo; sin embargo, hay que tener en cuenta que, en ocasiones, sobre todo en los primeros dos años, los títulos que componen las muestras empleadas no alcanzan esos plazos, por lo que algunos comportamientos erráticos que se observan en el tramo final no se deben a una mala estimación del modelo sino a la incapacidad del mismo para

predecir vencimientos fuera del intervalo y formar curvas forwards estables en el largo plazo.

En general, las tablas resumen con los resultados del análisis de los errores pueden consultarse en el Anexo 4, mientras que las gráficas de evolución de los mismos se encuentran en el Anexo 5; representándose en el Anexo 6 las gráficas de las estructuras temporales de tipos cupón-cero y forward estimadas por cada uno de los modelos.

Antes de exponer individualmente cada uno de los modelos analizados, con el fin de evitar repeticiones en los comentarios efectuados y facilitar la lectura de este apartado, se detallan a continuación los resultados que de forma generalizada se obtienen en todos los modelos, advirtiendo de las excepciones y particularidades de cada modelo en los epígrafes siguientes.

Así, en relación al análisis de las regresiones se observa que la autocorrelación parece ser un problema de la muestra y no de los modelos analizados, ya que se repiten en casi todos ellos el mismo resultado que indica su no existencia en la gran mayoría de las muestras, presentándose indicios, en un escaso número de muestras, de autocorrelación negativa en el inicio del periodo de estudio y positiva en el final de éste.

En relación a los *outliers* sucede algo similar porque no parecen ser causados por una falta de flexibilidad de la especificación empleada, sino por las características del mercado ya que suelen coincidir para los diferentes modelos analizados y se corresponden con un determinado grupo de títulos. Durante 1991 y 1992 su número no es importante, haciéndose este problema más patente a partir de 1993, tal y como se observan en las gráficas del error recogidas en el Anexo 5.

También se obtiene un resultado común en el estudio de la heteroscedasticidad que se localiza únicamente y con escasa incidencia en 1991 y 1992 debido, posiblemente, a la escasez de datos.

De modo general, se observa una elevada correlación entre los diferentes parámetros que conforman el modelo causados por la estrecha similitud que tienen las funciones que componen la especificación del modelo.

Por otro lado, el comportamiento anual del error es muy parecido en todos los modelos. Así, en términos generales, en 1991 no se detecta ningún indicio de infra o sobrevaloración por parte de los modelos y los errores se distribuyen de modo más o menos uniforme en torno al cero. En 1992 se sigue observando este comportamiento uniforme aunque el error toma valores extremos más altos. Aproximadamente durante el primer mes de 1993, el error toma valores pequeños, alrededor de ± 50 p.b., para aumentar el resto del año. Este aumento se produce sólo en algunos títulos y el resto (que se identifica con la banda más oscura) se mantienen más o menos acotados en los límites señalados anteriormente. También se observa en este año una tendencia a la sobrevaloración que se continúa durante el primer semestre del año siguiente.

En 1994 la mayoría de los errores son bajos y únicamente destaca la infravaloración de los modelos en la primera mitad del segundo semestre. Por otro lado, los primeros seis meses de 1995, el error se caracteriza por su uniformidad y pequeño valor (± 25 p.b.), posteriormente durante los tres meses siguientes se sigue observado este valor aunque para cada muestra se detectan uno o más *outliers* que son sobreestimados por los modelos. En la segunda mitad del segundo semestre la magnitud del error aumenta de modo generalizado en todas las observaciones y se

sigue manteniendo la tendencia a la sobreestimación. Durante 1996 esta tendencia se mantiene todo el año, excepto en los tres primeros meses del segundo cuatrimestre, tanto para los *outliers* como para el resto de títulos, sobre todo en el último cuatrimestre.

Las causas de la sobreestimación no están claras ya que en 1993 se manifiesta de un modo más fuerte en algunos títulos que se negocian bajo la par, mientras que en 1995 no parece ser este aspecto, ni el tiempo de vida del título la explicación del problema.

En otro orden de cosas, hay que señalar, para la correcta valoración de las gráficas recogidas en el Anexo 5 y de las tablas de resultados presentadas en el Anexo 4 que no se han omitido los *outliers*, por lo que los valores extremos que se observan no deben ser motivo para valorar negativamente los modelos ya que se corresponden a observaciones que no pueden considerarse representativas del mercado sino de condiciones particulares de liquidez, fiscalidad, etc.

Otro resultado que se repite en todos los modelos y para todos los años es que el valor de la mediana es siempre inferior al de la media, lo que indica una distribución más dispersa de los valores más altos, como señala la magnitud de los valores máximos que desplazan la media a valores superiores.

5.5.2.1 Resultados de los modelos de rendimientos modificados

Todos los modelos de rendimientos se han estimado a través de mínimos cuadrados no lineales. Esta metodología de estimación requiere que el analista proporcione valores iniciales de los parámetros con los que comenzar las iteraciones del algoritmo de optimización. Dado que cuando la estimación inicial proporcionada no se aproxima a la solución buscada pueden

surgir problemas de convergencia en la búsqueda de la solución y con el objetivo de que el número de iteraciones fuese el menor posible para economizar tiempo de proceso, se ha decidido tomar como valores iniciales las estimaciones resultantes en la muestra inmediatamente anterior¹¹¹. Esta elección, se fundamenta en la hipótesis de que las variaciones de la estructura temporal de tipos de interés interdiarias no son bruscas y el valor de los parámetros, por tanto, no varía de forma repentina. Este procedimiento para la elección de los valores iniciales también se emplea en los modelos de precios que necesitan ser estimados por técnicas no lineales.

El criterio de convergencia se establece, para todos los modelos, sobre el cambio en el valor de la función optimizada y se considera que se ha logrado la convergencia cuando el valor del cambio es inferior a 10^{-6} . Por otro lado, se ha establecido un límite de 20 subiteraciones por cada iteración para dar por concluido el proceso; generalmente una o dos iteraciones son suficientes salvo que los valores iniciales de los parámetros estén excesivamente lejos de los buscados o el modelo no se encuentre bien especificado. En el primer caso, puede surgir un problema más grave, que se logre la convergencia para valores de los parámetros no acordes con el modelo en sí o con la realidad económica analizada.

En general, este procedimiento empleado para elegir los valores iniciales parece ser efectivo ya que en todos los años en torno al 90% de las veces se logra la convergencia establecida empleando menos de tres iteraciones. En ocasiones la convergencia no se logra debido, quizás, a que el criterio

¹¹¹ Para la primera muestra se realiza una estimación previa sobre esa misma muestra, tomando los valores iniciales de acuerdo con lo esperado, cuyos resultados se emplean para comenzar el proceso iterativo.

empleado es demasiado riguroso. Cuando se inicia el proceso para las muestras que presentan este problema con los valores obtenidos en la última iteración los resultados que se obtienen una vez alcanzada la convergencia no difieren significativamente de éstos. También se observa que el aumento del número de observaciones actúa positivamente en el logro de la convergencia que se alcanza más fácilmente en los últimos años analizados.

De forma general, cabe reseñar que en 1991 la interpretación de los resultados debe hacerse cautelosamente ya que debido al escaso número de observaciones disponibles no existe un número suficiente de grados de libertad del modelo como para garantizar la fiabilidad de los resultados. En concreto el modelo de Fisher (1966) no se ha podido estimar en este año ni en parte del siguiente y el resto de modelos presentan problemas claramente apreciables en la primera mitad de las muestras de este año. El resto de años, con el crecimiento del número de títulos negociados, se soluciona este problema.

Entre los resultados destacables del modelo de Cohen, Kramer y Waugh (1966), se encuentra el elevado número de muestras en relación con otros modelos que presentan autocorrelación en 1995 (25'6%) y que los *outliers* afectan al 40% de las muestras de 1996.

En general, a partir de la información recogida en la Tabla I del Anexo 4, se puede decir que el ajuste de este modelo es bueno ya que los errores máximos computados no son excesivamente grandes salvo en 1993 y 1995, años en los que se computa una desviación con respecto al precio mínimo observado del 6%.

En cuanto a las curvas de tipos cupón-cero y forward obtenidas destacan las dificultades de estimación observadas en el primer semestre de 1991 que ocasiona la obtención de tipos spot

negativos y valores de la función de descuento superiores a la unidad. Este comportamiento se extiende a la curva de tipos forward que también presenta valores positivos extremadamente grandes. Ambos problemas parecen ser característicos del largo plazo, presentando las dos curvas, salvo excepciones, un comportamiento más estable en el corto y medio plazo.

En 1992, se pueden valorar mejor los resultados, no se obtiene ningún tipo negativo y los valores presentados son acordes con los observados en el mercado, así como la forma decreciente de la curva de tipos cupón-cero. Sin embargo, la curva de tipos forward tiene un comportamiento algo inestable en el largo plazo donde presenta pendientes algo acusadas, pasando el tipo forward instantáneo a 11 años en pocas semanas de un valor del 0'6% al 22'5%. Esta distorsión se debe al efecto predictivo comentado en el apartado anterior y no a un mal comportamiento del modelo en la estimación del largo plazo negociado. Se confirman, por tanto, los resultados teóricos sobre la convergencia del modelo.

Para 1993, se obtienen curvas spot con los valores y formas esperadas, aunque un poco inestables durante el primer semestre en los plazos superiores al año. Las curvas forward resultantes parecen mejorar ligeramente aunque siguen presentando pendientes muy acusadas en su tramo a largo alcanzando el tipo a 15 años un valor del 30%.

A finales de 1994 y comienzos de 1995 se vuelven a observar valores negativos en los tipos forward instantáneos a 14 y 15 años. Los tipos spot resultantes no parecen desviarse de los esperados, si bien no son tan estables en el tramo a largo como sería deseable.

Por último, en 1996 la inestabilidad de los tipos forward en el largo plazo no parece mejorar, aunque cabe destacar que los valores obtenidos son más acordes con la realidad del mercado.

El modelo de Fisher (1966) consta de cuatro parámetros por lo que presenta algunos problemas de estimación en 1991 donde en 19 ocasiones no se dispone de suficientes observaciones para contrastar el mismo. Como consecuencia de esto y debido a que en el resto de muestras utilizables se detectaron graves problemas de convergencia, no siendo posible obtener resultados mínimamente fiables, se ha optado por omitir este año del análisis y comenzar el estudio a partir de la muestra vigesimotercera de 1992¹¹².

En relación al modelo anterior se logra una mayor definición del estadístico Durbin-Watson, que no se sitúa en la zona de duda en excesivas ocasiones. En relación a los *outliers* el número de muestras con observaciones anómalas en 1995 y 1996 es mayor que en el resto de modelos y supera el 58%.

Los resultados sobre los errores de estimación recogidos en la Tabla II colocan a este modelo en una mala posición. El error máximo de estimación es, en 1992, desorbitado y alcanza en términos absolutos un valor superior a los 78 puntos. La elevada magnitud del error se debe a que el modelo estima muy mal los vencimientos a más largo plazo, explicándose así el elevado número de *outliers* detectados. Esta mala estimación ocurre sólo en unas pocas observaciones pero es de tal tamaño que desvirtúa totalmente los resultados obtenidos en el extremo más próximo del intervalo; como se corrobora cuando se analizan los valores de las desviaciones, medianas y medias respecto al valor del error máximo.

En concreto se observa una fuerte tendencia del modelo a sobreestimar los precios durante 1992 y primeros meses de 1993 (véanse las gráficas en el Anexo 5), este comportamiento se

¹¹² Existen problemas con los grados de libertad en la primera y vigesimosegunda muestra de este año.

invierte durante los meses siguientes y se retoma en el último cuatrimestre de ese año. La sobreestimación vuelve a ser mayoritaria en 1996. Mientras que en 1994 y 1995 la infravaloración es el comportamiento predominante. Por tanto, el modelo no parece lograr adaptarse correctamente al mercado ya que por norma o bien sobreestima o bien infraestima los precios pero no presenta un comportamiento estable del error.

A pesar de los resultados poco aceptables respecto a calidad del ajuste que parece mostrar el modelo de Fisher (1966) se han construido las curvas de tipos forward y spot. Así, en 1992 nos encontramos con la obtención de tipos spot más o menos aceptables aunque con pendientes acusadas en los vencimientos largos y con una evolución del valor del tipo a un año algo irregular. Como es lógico esta inestabilidad en la curva de tipos al contado da como resultado curvas de tipos forward, también, poco estables en el extremo a largo y que llegan a presentar valores negativos para el vencimiento a 11 años.

Este comportamiento irregular no mejora en 1993, donde además de obtenerse valores negativos para el tipo forward instantáneo a 15 años los valores positivos que toma son, en un escaso número de muestras, demasiado elevados para corresponderse con la realidad y están causados por una pendiente fuertemente creciente en el largo plazo de la curva de tipos spot que puede ser debida a la dificultad que tiene el modelo para ajustar correctamente los vencimientos más lejanos. En 1994 mejoran considerablemente los resultados pero siguen obteniéndose, aunque en menor medida, tipos forward negativos. Por otro lado, la forma que presentan las curvas spot coinciden en esencia con las curvas de rendimiento observadas.

En 1995 ya no se obtienen tipos forward negativos y el comportamiento de ambas curvas es, en general, más estable.

Destacan negativamente sólo algunas pendientes crecientes muy acusadas en el largo plazo. Por último, en 1996 se obtienen sin duda los mejores resultados en cuanto a niveles y formas de las curvas.

En vista a estos resultados se podría concluir que posiblemente el modelo estima bastante bien los vencimientos a corto y medio plazo y quizás lograría mejores resultados si se prescindiese de la variable que acompaña a β_2 ya que en términos de función de descuento supone un factor de grado tres que crece muy rápidamente para plazos grandes, no presentando el resto de variables explicativas la fuerza necesaria para contrarrestar este comportamiento por lo que la distorsión en los vencimientos más alejados se hace más patente y anula los resultados obtenidos en el resto del intervalo temporal.

Por su parte, el modelo de Bradley y Crane (1973) no parece tener problemas de autocorrelación, salvo en 1991 donde está presente con signo negativo en el 17'4% de las muestras.

El análisis de los residuos revela que este modelo es bastante bueno, si se compara con el modelo de Cohen, Kramer y Waugh (1966). Se observa que si bien el error máximo para los tres primeros años estudiados es ligeramente superior este comportamiento se invierte en los tres siguientes, de nuevo los valores más altos del error se obtienen en 1993 y 1995 lo que indica que este problema viene causado por los valores negociados en el mercado no por una mala especificación de los modelos. Otro resultado positivo es que salvo para 1991 y 1996 tanto la mediana como la media de los errores anuales es inferior que en el primer modelo, por lo que se podría concluir que esta propuesta es algo mejor.

Por último, en relación a las curvas forward y spot estimadas destaca que si bien en 1991 se siguen obteniendo tipos spot y forward negativos para vencimientos superiores a 9 y 4 años respectivamente, la función de descuento no supera nunca la unidad y el comportamiento general de ambas curvas de tipos después del primer cuatrimestre es bastante más estable que en el caso anterior. El resto de años el comportamiento de las curvas es estable y ambas presentan valores máximos y mínimos similares; destacando que en 1993 las pendientes del tramo a largo son algo más acusadas que lo que sería deseable y que el comportamiento observado en 1996 es el más aceptable en cuanto a forma, nivel y estabilidad de las curvas estimadas.

Para Echols y Elliott (1976) el número de muestras que presentan *outliers* en 1995 y 1996, años en que este factor tiene mayor representatividad, se reduce considerablemente afectando al 36% de las muestras de 1995 y tan sólo al 12% de 1996.

Sin embargo, la autocorrelación no presenta los resultados esperados, en todos los años se detecta en un porcentaje relativamente alto. Entre 1991 y 1993 se observa autocorrelación negativa en el 15'7% y 7'2%, respectivamente, de las muestras y entre 1994 y 1996 de signo positivo, alcanzando el 19% de las muestras en 1995.

El análisis de los residuos corrobora los resultados presentados por los otros modelos analizados (salvo el de Fisher (1966)), aunque el error mínimo y máximo es ligeramente superior que en éstos, salvo para 1995 y 1996 respecto al modelo de Cohen *et alt.* (1966). También se observa, por lo general, valores superiores en los estadísticos calculados.

Para finalizar, respecto a las curvas forward y spot estimadas destaca que este modelo es el que obtiene mejores resultados en

1991, año que más problemas de estimación origina debido al escaso número de observaciones. Si bien, se obtienen todavía tipos forward negativos su valor no es muy elevado en comparación con los obtenidos por otros modelos (-11%); además ningún tipo spot toma valores negativos y los valores de la función de descuento se encuentran dentro de los límites.

En relación a 1992, se obtienen curvas cupón-cero con pendientes bastante acusadas pero continuas en todo el tramo temporal por lo que los tipos forward no se ven negativamente afectados; también merece destacar que mientras que para el modelo de Bradley y Crane (1973) el valor mínimo de los tipos oscila en torno al 6%, este modelo presenta tipos mínimos del 9'78% para el caso del tipo cupón-cero y 8'34% para el tipo forward, valores que se aproximan más a los niveles observados en el mercado.

En 1993 se detecta una evolución temporal inestable del tipo a más corto plazo y el tipo a 15 años. En 1994 el resultado más relevante es el fuerte crecimiento que experimenta la curva en el corto plazo y la estabilidad relativamente importante que mantiene en el tramo a largo. Por último, 1996 vuelve a ser el año que más estabilidad presenta en la curva de tipos cupón-cero y en 1995 la inestabilidad relativa de la curva de tipos forward no parece tener explicación en los datos empleados, por lo que apunta a ineficiencias en el modelo.

5.5.2.2 Resultados de los modelos de precios

El modelo de McCulloch (1975) se ha estimado a través de mínimos cuadrados ordinarios estableciendo un filtro para la eliminación de posibles observaciones anómalas igual que en los casos anteriores. La valoración de los resultados obtenidos por los modelos que emplean splines es por lo general más compleja ya

que el número de parámetros depende del número de observaciones disponibles y las variables explicativas varían, también, su especificación según este factor.

En relación a la heteroscedasticidad se encuentra evidencia de este fenómeno en el 46% de las muestras de 1991 siendo el resto de años casi inapreciable. En nuestra opinión, el elevado número de muestras afectadas ese año se debe al escaso número de observaciones. Y en cuanto al estadístico Durbin – Watson, salvo en 1993, se sitúa en pocas ocasiones en la zona de indeterminación.

Otro aspecto destacable de los resultados es que no se rechaza en la estimación de los primeros años ninguna observación por considerarla anómala lo que parece acorde con la mayor flexibilidad que se les supone a los modelos que emplean funciones splines, pero en 1995 y 1996 en torno al 45% de las muestras presenta algún *outlier*, que coinciden con los detectados en los otros modelos.

En cuanto a los errores en la Tabla V del Anexo 4 se puede observar que tanto la mediana como la media del error es bastante baja en todos los años salvo en 1993, año en el que todos los modelos parecen encontrar más problemas de ajuste. A partir de 1994, este modelo muestra valores más bajos en estos estadísticos que los modelos de rendimiento modificados, sin embargo su desviación es mayor como consecuencia de que el error máximo en términos absolutos también lo es, alcanzando su valor más alto en 1995. En 1991 y 1992 los resultados obtenidos son algo peores que los presentados por los modelos de rendimientos, esto se debe a que en estos años el número de observaciones es tan escaso que no se puede formar un spline ya que no existe subdivisión del intervalo temporal estudiado, por lo que realmente el ajuste se está realizando con un polinomio simple. Al igual que en los

modelos analizados anteriormente la mediana presenta valores más pequeños que la media, siendo lo más destacable la mejora sustancial en el error medio y en la mediana que se observa cuando se computa el error en base al intervalo formado por el precio máximo y mínimo negociado y no sobre el precio medio.

El único comportamiento anómalo en la pauta del error se observa en algunas muestras del primer semestre de 1995 donde el error no sigue la pauta observada en el resto de modelos y toma valores mayores que en el resto de casos analizados.

El modelo de McCulloch (1975) debido a la utilización de splines presenta dificultades adicionales en la obtención de las curvas forward y spot estimadas y en su representación gráfica. Para definir las curvas estimadas no basta con considerar las estimaciones de los parámetros sino que se debe tener en cuenta, también, la localización de los nodos empleados en la estimación ya que, en caso contrario, la utilización de otros nodos arbitrarios, elimina toda la credibilidad de estas construcciones.

En este sentido, un inversor que necesite conocer tipos de interés para plazos no negociados en el mercado a través de este modelo, precisa conocer tanto los valores estimados de los coeficientes en la fecha de referencia como los nodos que utilizó el investigador para determinarlos. Por tanto, una ventaja de los modelos que emplean funciones completas es que no requieren tanta información para su posterior aplicación.

Además, este modelo presenta un factor restrictivo adicional derivado de la definición concreta de los splines utilizados. En la determinación de $g_{k-1}(t)$ y $g_{k-2}(t)$ entra a formar parte el último nodo del intervalo, esto es el vencimiento más lejano observado en el mercado, por lo que se restringe la obtención de las curvas estimadas al mismo. En los modelos anteriores, la capacidad

predictiva era mayor aunque se observaba cierta inestabilidad en ese tramo. En este modelo la distorsión es aún mayor y afecta no sólo a la parte predicha sino a los vencimientos recogidos dentro del intervalo de plazos del mercado ya que cambia la estructura de los nodos.

En las representaciones gráficas de las curvas de tipos forward y spot recogidas en el Anexo 6 se observa claramente esta distorsión. Así, en 1991, donde por la escasez de datos el spline queda definido de forma idéntica en todo el intervalo se aprecia que existen problemas de pendientes excesivamente decrecientes en el plazo a largo cuando el último vencimiento observado se encuentra alejado del límite temporal impuesto para la realización de las gráficas: 11 años. En las primeras observaciones donde el vencimiento más largo toma valores en torno a 5 años, este diferencial es excesivo y las pendientes son muy acusadas. En la segunda mitad de este año cuando ya se disponen de vencimientos a 10 años los resultados mejoran considerablemente.

En 1992, este problema parece menos acusado en la medida en que cada vez existen más títulos en las muestras y con vencimientos más largos, por lo que ya no se obtienen tipos forward negativos. En la segunda mitad de este año, cuando el número de observaciones comienza a ser lo suficientemente amplio como para permitir la división del intervalo analizado, la inestabilidad es generalizada a partir del nodo divisorio, ya que los vencimientos posteriores a éste hasta el más lejano quedan afectados por la definición del spline que incorpora en su cálculo el valor del último nodo; de este modo, cuando el valor de éste no coincide o se aproxima razonablemente al valor empleado (11 años) la curva estimada se comporta anormalmente. Esto no significa que el modelo no estime correctamente, sino que es incapaz de predecir con fiabilidad más allá del último vencimiento

observado y que cuando lo hace, incluso, pierden fiabilidad los valores de los plazos abarcados dentro del intervalo negociado.

En el resto de años, aunque el valor límite empleado fue de 13 años, se sigue observando esta misma problemática, pero en cualquier caso, tanto la forma de las curvas como los niveles presentados parecen acordes con lo esperado.

Para llevar a cabo el análisis del modelo de Schaefer (1981) se han empleado dos cambios de variable alternativos, una transformación exponencial con coeficiente $s=0'1$ y una traslación lineal del intervalo $[0, T_N]$ a $[0, 1]$. En ambos casos los resultados obtenidos en términos de error son muy similares y ninguna alternativa se perfila, de forma clara, como la mejor. Sin embargo, se ha decidido en base a realizar las representaciones de las curvas estimadas exponer los resultados obtenidos efectuando el cambio de variable exponencial, porque la transformación lineal condiciona excesivamente las predicciones. Al igual que en el caso de McCulloch (1975) el cambio lineal hace que el último vencimiento observado influya decisivamente en el valor de los parámetros estimados dificultando la realización de predicciones fuera del rango temporal observado.

En relación a los errores, los estadísticos obtenidos (Tabla VI - Anexo 4) revelan que este modelo obtiene, en general, mejores estimaciones que el anterior, pero peores que otros modelos analizados. Otro aspecto a destacar es la mejora significativa de los resultados cuando se computa el error teniendo en cuenta el intervalo de precios negociados.

Las curvas de tipos cupón – cero y forwards obtenidas a través de este modelo son bastante similares en forma y nivel a las ya comentadas, destacando que en los primeros meses de 1991 los tipos spot no tienen un comportamiento tan errático como el

observado en los modelos anteriores, lo cual es una característica muy positiva del modelo que con pocos datos es capaz de obtener buenas estimaciones. Sin embargo, se observa un efecto contrario en 1993 y 1995, donde se reducen las predicciones, en su caso, a plazos de 11 años porque se obtienen tipos forward anormalmente altos. Estos resultados pueden deberse a que a medida que se aumenta el grado de las funciones o lo que es lo mismo el número de funciones empleadas la predicción es más arriesgada e inestable. Así, se observa que en 1991, donde se realizan predicciones de hasta 5 años hacia delante y se emplean únicamente tres funciones, no se detecta ningún comportamiento anómalo de los valores predichos. Mientras que, por ejemplo, en 1994 predicciones de sólo 2 o 3 años de plazo presentan pendientes muy acusadas. En este sentido, los resultados parecen indicar que podría ser recomendable tomar sólo tres funciones (grado cúbico) que parece equilibrar el ajuste con la predicción.

El modelo de Fong y Vasicek (1982) se ha analizado empíricamente de las tres formas descritas en el apartado 4 de este capítulo: realizando el cambio de variable propuesto por los autores y empleando un polinomio cúbico (Modelización A); aplicando directamente una combinación de funciones exponenciales (Modelización B) y a través de la propuesta de Contreras y Navarro (1993). En los tres casos la magnitud y comportamiento del error y la capacidad de predicción difieren entre sí considerablemente.

En el primer caso (Modelización A) se obtienen resultados (Tabla VII - Anexo 4) bastante similares a los observados para Schaefer (1981) y un comportamiento del error (Anexo 5) que no presenta ningún aspecto destacable en relación a la pauta generalizada seguida por el resto de modelos. Sin embargo, las curvas estimadas no presentan, al menos en 1991, un resultado acorde con lo observado en el mercado. Los tipos spot a largo

plazo, para el primer cuatrimestre de este año, oscilan entre valores negativos y valores excesivamente altos que no se corresponden con los objetivamente previstos. Como consecuencia los tipos forward tienen un comportamiento irregular, llegando a predecirse un tipo del 92% para un plazo a 11 años. El resto de años no se presenta este comportamiento por lo que es indicativo de que esta especificación tiene problemas cuando existe escasez de datos.

En general, la forma de la curva y niveles coincide con los observados en el mercado para las curvas de rendimiento. Salvo en 1992, los tipos spot a muy corto y largo plazo tienen una evolución diaria algo inestable.

No se puede decir que los resultados mejoren con la estimación de la función de descuento a través de una combinación de funciones exponenciales¹¹³ (Modelización B), sino al contrario. Las medias y desviaciones (Tabla VIII – Anexo 4) son más altas que en el caso anterior como consecuencia de la obtención de valores extremos más elevados que los generados normalmente. Este resultado se debe, en nuestra opinión, a que en la estimación, el modelo tiene problemas en lograr la convergencia en determinadas muestras. Además, en las gráficas del Anexo 5, se observa que el error no sigue el comportamiento generalizado descrito en el resto de propuestas. El error no se distribuye de un modo más o menos uniforme alrededor del cero, sino que existe una clara tendencia a la sobreestimación de los precios. Las curvas de tipos forward y spot estimadas reflejan este comportamiento irregular del modelo y no son representativas, por lo general, ni en forma ni niveles con lo esperado.

¹¹³ Se ha estimado a partir de 1992 porque en ocasiones se carecen de grados de libertad para 1991.

Por último, la modelización propuesta por Contreras y Navarro (1993) es una de las que mejores resultados presenta en términos globales. Tanto la magnitud del error como su comportamiento son bastante similares a los obtenidos por el resto de modelos, con la ventaja de que las curvas de tipos forward y spot tienen un comportamiento estable en el largo plazo, que permite realizar predicciones con un grado de precisión adecuado.

A pesar de esto, en el primer semestre de 1991, debido a la escasez de datos, se sigue observando un comportamiento irregular y en el resto de años si bien la estabilidad en los plazos a largo se cumple, la evolución diaria de los tipos en este tramo no es muy suave y sufre marcadas oscilaciones. En todo caso, este modelo es el único, de los analizados hasta ahora, que presenta un comportamiento estable en el largo plazo por lo que se recomienda su utilización, tanto para realizar predicciones como para la estimación de la estructura temporal.

La propuesta de Carleton, Chambers y Waldman (1984) no es lineal y se estima tanto por mínimos cuadrados no lineales (MCNL) como por máxima verosimilitud (MV). A pesar que los autores hacen especial hincapié en que el método utilizado afecta a la obtención de buenos resultados y que la aplicación de la MV genera mejores estimaciones, este hecho no se confirma en el estudio realizado.

Cuando se comparan los resultados obtenidos por ambas metodologías en base a la suma de los cuadrados de los errores en precios se encuentra que la aplicación de los mínimos cuadrados ofrece en un mayor número de muestras errores menores. En concreto para el periodo 1991-1996 se tiene que la estimación del modelo a partir de MCNL ofrece mejores resultados en el: 69%, 54%, 87%, 72%, 65% y 72% de las muestras respectivamente por

lo que no queda evidenciado que la utilización de la MV haga obtener mejores resultados de estimación que los MCNL y en lo que sigue se expondrán los resultados obtenidos a través de esta última metodología.

El estudio de los errores (Tabla X – Anexo 4 y gráficos del Anexo 5) destaca únicamente de forma positiva la mejora observada en 1991. Este modelo aproxima los tipos cupón-cero, y por tanto, los tipos forward, a través de un polinomio por lo que los resultados observados en la representación gráfica de las curvas estimadas son los esperados cuando se utilizan este tipo de funciones: la predicción de los tipos forward y spot es inviable ya que ambas curvas en los tramos a largo tienen pendientes de gran magnitud y se originan tipos forward o bien excesivamente elevados o bien negativos. A pesar de esto, la forma de la curva de tipos cupón-cero, en general, y los niveles de las mismas, si se obvian los valores extremos, son bastante acordes con los esperados.

En resumen, los resultados obtenidos no justifican la utilización de este modelo que precisa de métodos de estimación no lineales más complejos y costosos de aplicar.

Los únicos resultados destacables en el estudio del modelo de Shea (1984) se refieren a los errores de estimación y las curvas cupón-cero y forward estimadas. Respecto a los errores de estimación (Tabla XI – Anexo 4) se observa que este modelo es junto al modelo de Fisher (1966) el que presenta mayores errores. Por tanto, los resultados parecen indicar que la restricción propuesta por Shea (1984) sobre la pendiente de la función de descuento en el último nodo para la construcción de sus funciones spline no es adecuada para el caso español. Sin embargo, a pesar de su elevada magnitud la evolución del error es similar a la observada para el resto de modelos.

Por otro lado, la imposición de esa restricción no cumple el objetivo deseado, ya que se siguen obteniendo tipos forward negativos en los tramos a largo y los valores positivos tienen, en muchas ocasiones, una magnitud excesivamente grande. No obteniéndose la convergencia a largo de los tipos forward.

La aplicación de los modelos de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) presenta serias dificultades en su estimación causadas, en general, por su especificación no lineal y en el caso de Svensson (1994) por el elevado número de parámetros a estimar (seis).

Estos modelos, mayoritariamente, o bien no logran la convergencia, originando errores de estimación excesivamente grandes, o ésta se logra cuando los parámetros toman valores que no se corresponden con los esperados teóricamente y hacen perder toda la credibilidad de los resultados obtenidos. Así, por ejemplo, para b_0 que representa en el modelo de Nelson y Siegel (1987) el tipo forward asintótico se obtienen durante 1992 valores próximos a los esperados según el mercado; pero el resto de años llega a tomar valores superiores a la unidad a pesar que el proceso iterativo se inicia con valores apropiados.

En el modelo de Svensson (1994) la situación se agrava porque el segundo parámetro no lineal, t_1 , toma valores muy próximos a cero, y el sistema se vuelve inestable y no obtiene buenos resultados.

Se pueden apuntar varias razones para explicar la obtención de estos resultados. Por un lado, Nelson y Siegel (1987) advierten que en el análisis del modelo que proponen inicialmente encuentran problemas de convergencia, a pesar que trabajan sólo con vencimientos inferiores a un año, que indican una sobreparametrización del modelo. En este sentido, este puede ser

el problema que surge en la estimación del modelo de Svensson (1994) que reconoce en su trabajo que el modelo de Nelson y Siegel (1987) es suficiente en la mayoría de las ocasiones para obtener buenas estimaciones de la curva.

Por otro lado, hay que destacar que la ampliación que Svensson (1994) realiza sobre el modelo de Nelson y Siegel (1987) busca dotar de mayor flexibilidad al modelo y permitirle la existencia de más de una cota, característica que no suele presentar la curva de tipos en España.

Otro factor a tener en cuenta en relación a la convergencia del modelo de Nelson y Siegel (1987) es que los propios autores a pesar de modificar el problema inicial para corregir los problemas de sobreparametrización detectados, acaban determinado exógenamente el parámetro no lineal, t . Por otro lado, en relación al modelo de Svensson (1994) no parece que la causa de los problemas sea la utilización de Mínimos Cuadrados No Lineales, ya que si bien el autor emplea Máxima Verosimilitud indica que podría emplearse cualquier otro método de estimación no lineal.

Por último, Núñez (1995) estima ambos modelos para muestras formadas por títulos del mercado español y no parece haber encontrado este tipo de problemas y los resultados que ofrece, para tres del total de muestras analizadas, lo único que indican es la lentitud en la convergencia del modelo de Svensson (1994) que requiere de un gran número de iteraciones. Otros autores que han analizado este modelo, como Dahlquist y Svensson (1994) y Bliss (1996), no informan sobre la existencia de problemas de este tipo y la causa de este comportamiento en el estudio que hemos desarrollado puede ser el escaso número de observaciones que forman las muestras.

A pesar de estos problemas, se ha estimado el modelo de Nelson y Siegel (1987) para el periodo 1992-1996, reflejando los problemas de convergencia mencionados anteriormente. Por un lado, la autocorrelación no sigue la pauta observada normalmente y existe indicios todos los años de autocorrelación positiva en un porcentaje alto de muestras, alcanzando un 35% de las mismas en 1994. En esta ocasión, la existencia de autocorrelación puede indicar una mala especificación del modelo, aunque el problema, sin duda, es agravado por la escasez de observaciones.

En cuanto a los errores no se observa en relación a la mediana una magnitud excesivamente alta; sin embargo ésta difiere considerablemente del valor de la media, sobre todo en 1993 y 1994, a la vez que la desviación es bastante elevada, todo lo cual indica que los resultados del error se ven muy afectados por la existencia de valores extremos superiores muy altos que distorsionan los buenos resultados que obtiene el modelo cuando la convergencia se logra de modo natural. Este hecho se puede observar claramente en las gráficas recogidas en el Anexo 5 para los años 1992 a 1994.

Todo esto repercute negativamente en la determinación de las curvas de tipos cupón-cero y forward estimadas que si bien logran mantener la forma y niveles esperados, salvo en 1993 y 1994, presentan un comportamiento errático de los tipos a lo largo del tiempo para los vencimientos a corto y largo plazo; excepto en 1992 y 1996 donde los tipos evolucionan diariamente de un modo bastante estable.

Para finalizar, creemos necesario manifestar que los resultados obtenidos en este análisis no deben conducir al rechazo del modelo de Nelson y Siegel (1987) ya que el problema, a la vista de los resultados obtenidos por otros autores y los buenos resultados que obtiene en este análisis cuando la convergencia se logra con

valores reales, parece venir causado por el escaso número de observaciones que componen las muestras utilizadas. Además, este modelo es, junto al de Contreras y Navarro (1993), el más apropiado desde el punto de vista teórico al cumplir casi de forma natural las condiciones requeridas en los extremos.

Y para finalizar con las propuestas de otros autores, analizamos el modelo de Steeley (1991) que presenta, en relación a la regresión, dos resultados significativos. Por un lado, la heteroscedasticidad aparece en un mayor número de muestras que en otros modelos, en los que, generalmente, a partir de 1993 no se detecta este fenómeno. A pesar que se observa una disminución del número de muestras afectadas a lo largo de todos los años, en 1996 todavía presentan heteroscedasticidad el 6% de las mismas.

Por otro, la correlación entre los coeficientes es pequeña, en relación a lo observado en otros modelos, y tiende a disminuir a medida que aumentan el número de observaciones. Este resultado es consecuencia directa de la utilización de funciones B-splines que son linealmente independientes en un intervalo finito.

Respecto al error en precios, el modelo destaca por obtener las medianas y medias más bajas. Este resultado confirma lo esperado teóricamente sobre la utilización de B-splines. Desde el punto de vista de la estimación este modelo es, en principio, el más adecuado; sin embargo, hay que tener en cuenta que el número de parámetros a estimar es mayor que en el resto de propuestas por lo que no se puede analizar 1991.

Además, surge otro inconveniente en la construcción de las curvas estimadas cuando se intenta predecir algunos vencimientos. El problema de las predicciones en los modelos que emplean splines se agrava en éste, debido a que los B-splines no se construyen localmente; esto es, la definición de la función en un

subintervalo depende del valor de los nodos en otros subintervalos. Este hecho no sólo impide la obtención de predicciones apropiadas, sino que, cuando el intervalo de predicción es ligeramente grande afecta también a los valores de la curva en los plazos pertenecientes al intervalo estudiado.

5.5.2.3 Resultados de la propuesta I

Los resultados de nuestra primera propuesta, en relación a la regresión, son bastante similares a los obtenidos por el resto de modelos. Destacando que únicamente se detecta la existencia de autocorrelación, de signo positivo, en una muestra de 1995¹¹⁴.

En relación a los errores (Tabla XIII – Anexo 4) se obtienen de forma global mejores resultados que para el modelo de Contreras y Navarro (1993) que trabajan en el mismo intervalo y emplean una metodología similar y es en los tres primeros años analizados superior al de Schaefer (1981), que también sigue esta metodología. No es, sin embargo, superior al modelo de Steeley (1991) pero obtiene, en cambio, mejores resultados que éste en cuanto a la autocorrelación y heteroscedasticidad y en la predicción y estimación de las curvas de tipos cupón-cero y forward.

A este respecto, destaca la estabilidad que presentan tanto los tipos forward como los tipos spot a largo plazo. Se representan las gráficas para vencimientos hasta 30 años sin observarse ningún tipo de comportamiento explosivo de los tipos. Además los tipos a medio y corto plazo no ven afectada su flexibilidad. El único inconveniente de este modelo, tal y como se adelantó en el Capítulo 4, es la obtención de tipos a un año algo inestables. Este

¹¹⁴ Se ha omitido el análisis de 1991 porque, en ocasiones, se carece de grados de libertad.

hecho no es tan grave si se desea el modelo para obtener las series de los tipos a diferentes plazos, ya que los tipos cupón-cero para vencimientos a un año o plazos inferiores no necesitan ser estimados porque se negocian en el mercado. Sin embargo, si se desea emplear el modelo de forma teórica para incluir su especificación como parte de otros estudios, no parece que esta propuesta sea la más adecuada.

5.5.2.4 Resultados de la propuesta II

En relación a la utilización de polinomios de Legendre, hay que destacar que una de las características positivas del modelo es la obtención de buenos resultados, tanto desde el punto de vista de la estimación como de la predicción, con la estimación de muy pocos parámetros. Para el caso cúbico el número de parámetros a estimar es de dos y se observa que las regresiones presentan menos muestras afectadas por la heteroscedasticidad que los modelos anteriores, aunque existe un mayor número de muestras afectadas de autocorrelación en 1994 y 1995 lo cual puede indicar una mala especificación del modelo. Cuando se amplía el grado de la función de aproximación a cuatro se observa que estos problemas de autocorrelación desaparecen, por lo que se confirma esta hipótesis.

A pesar de esto, ni los errores de aproximación ni las curvas estimadas parecen verse afectadas negativamente, por lo que, puede establecerse que la modelización cúbica es suficiente.

Los errores siguen un comportamiento similar al observado en el resto de modelos, aunque su magnitud es algo superior. Este ligero empeoramiento en la estimación se ve compensado con la obtención de curvas de tipos cupón-cero y forward que presentan las formas y niveles esperados. Y que logran la estabilidad asintótica deseada en el largo plazo, sin sufrir inestabilidad en el

tramo a corto como la propuesta anterior. Además este modelo es muy parsimonioso, lo cual es deseable desde el punto de vista de su utilización teórica en otros trabajos.

En la Tabla XV – Anexo 4 se recogen los errores en precios cuando se emplean polinomios de Legendre de grado cuatro y se observa una gran mejora en los resultados. Así, la mediana se reduce en casi todos los años a la mitad de la computada para el caso cúbico, la media, desviación y valores máximos también disminuyen.

Sin embargo, al aumentar el número de parámetros a estimar se detectan problemas en las curvas estimadas en 1991 cuando sólo se tiene un grado de libertad y en algunos años, se observa un comportamiento algo irregular de los tipos forward, que en cualquier caso siempre mantienen su comportamiento asintótico en el largo plazo. También se observa que, al igual que en el resto de modelos, los mayores problemas se detectan en 1993 y 1994.

En general, cabe suponer que el aumento del número de observaciones y del grado del polinomio mejoren los resultados en términos de estimación. Aunque, como se ha visto, la utilización de polinomios de Legendre cúbicos presenta un equilibrio aceptable entre estimación y predicción en el largo plazo.

CONCLUSIONES

Como conclusión de este trabajo se intentará ofrecer una visión global de la investigación realizada. Así, no nos limitaremos a exponer las aportaciones y resultados más relevantes que pueden extraerse de la misma, sino que se describirá de forma secuencial el problema objeto de estudio, las soluciones aportadas por otros investigadores, las carencias encontradas en estos trabajos, las aproximaciones alternativas que se proponen y los temas que quedan pendientes y pueden ser objeto de futuras investigaciones.

Uno de los motivos que nos alentó a la realización de este trabajo es la gran importancia que el conocimiento de la estructura temporal de tipos de interés tiene tanto en el campo académico como en el entorno de los mercados financieros. Si bien, en un primer momento, surgieron un gran número de propuestas en torno a este tema, el interés por el mismo se fue apagando en favor de los modelos dinámicos que, como su nombre indica, se limitan a establecer relaciones dinámicas entre los tipos a diferentes plazos con el fin, principalmente, de enunciar modelos de valoración para diferentes instrumentos financieros (bonos, opciones, ...). Sin embargo, salvo excepciones, estos modelos presentan un inconveniente: toman la estructura temporal como conocida.

Por tanto, para valorar empíricamente la calidad y precisión de estos modelos es necesario que la base sobre la que parten, es decir, la curva de tipos cupón-cero, recoja con la mayor exactitud posible el estado del mercado, ya que en caso contrario los resultados obtenidos por los modelos dinámicos pierden toda su fiabilidad.

Bajo estas consideraciones, comenzamos nuestro trabajo analizando teórica y empíricamente las diferentes propuestas que se han formulado acerca de la modelización de la curva de tipos;

encontrando que muchas de ellas no cumplen determinadas condiciones que caracterizan al problema objeto de estudio.

En general, puede establecerse, bajo la hipótesis de que los tipos forward son funciones estables del vencimiento y que presentan un comportamiento asintótico en el largo plazo, que los modelos polinómicos, aunque se configuren como funciones splines, están mal especificados si se intentan aplicar directamente sobre el intervalo no acotado $[0, \infty)$.

Por tanto, una primera conclusión que se alcanza a partir del estudio teórico de los modelos es que la mayoría de autores se han limitado a proponer diversas especificaciones sin tener en cuenta las características del problema estudiado. Este hecho, supone una crítica a los modelos de Cohen, Kramer y Waugh (1966), Fisher (1966), Bradley y Crane (1973), Echols y Elliott (1976), McCulloch (1971) y (1975), Carleton, Chambers y Waldman (1984), Shea (1984) y Steeley (1991), independientemente que algunos de estos trabajos sean claves en el desarrollo metodológico del problema.

Detectadas estas carencias y sin perder de vista las peculiaridades de nuestro estudio, que nos marcan, básicamente, cuatro condiciones a cumplir en los extremos del intervalo $[0, \infty)$ por la función de descuento y los tipos forward, se proponen diversas formas de abordar el problema.

Así, en un primer momento un tipo de construcción matemática que cumple estas condiciones es la formada por el producto de un cociente de polinomios y una función exponencial. Esta propuesta presenta dos inconvenientes: es no lineal en los parámetros y para garantizar a priori que la función de descuento no alcance un polo es necesario que los parámetros cumplan una serie de condiciones que pueden llegar a ser complejas de imponer. Sin embargo, puede ser lógico pensar que

estas condiciones se cumplan de forma natural cuando se aplique empíricamente el modelo.

Otra alternativa que surge de modo natural es emplear directamente en la aproximación de la función de descuento una función exponencial. Esta propuesta sigue siendo no lineal en los parámetros. Como el objetivo es obtener un modelo lo más sencillo posible y de fácil aplicación, se siguen investigando otras alternativas. Una de ellas, es tratar de aproximar la exponencial a través de una suma de potencias truncadas, con el inconveniente que el número de parámetros a estimar puede ser excesivamente grande si se quiere obtener una buena aproximación.

Agotada esta vía, otra forma de abordar el problema consiste en trabajar en otro intervalo temporal que nos permita emplear funciones sencillas que cumplan los requisitos buscados. La primera intención es trabajar en el intervalo canónico, $[0, 1]$, que además ha sido empleado por Schaefer (1981), Fong y Vasicek (1982) y Contreras y Navarro (1993). Sin embargo, las propiedades que presentan los polinomios ortogonales y en concreto los polinomios de Legendre nos animan a proponer la utilización de éstos en la aproximación de la función de descuento, siendo necesario trabajar en el intervalo $[-1, 1]$.

Llegado a este punto, para completar y confirmar el estudio teórico realizado, únicamente queda analizar empíricamente los modelos estudiados. El análisis empírico de los diferentes modelos en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada confirma totalmente lo expuesto anteriormente y los resultados coinciden con lo esperado.

En relación a esta parte del trabajo destacan algunos resultados que merecen la pena detallar a continuación. En primer lugar, salvo algunos modelos que tienen problemas en su

especificación [Fisher (1966)] o en lograr la convergencia [Nelson y Siegel (1987) o Svensson (1994)] el resto de modelos presenta en cuanto al estudio de la autocorrelación, heteroscedasticidad y comportamiento del error resultados muy similares. Así mismo, los errores de mayor magnitud se detectan siempre para las mismas observaciones reflejando, no una falta de flexibilidad de los modelos, sino ineficiencias en la valoración de determinados títulos por parte del mercado.

Por otro lado, la magnitud del error, obviando los *outliers*, es bastante ajustada y en media no alcanza en el peor de los casos 50 puntos básicos. Las diferencias en cuanto a los errores en precios de los diferentes modelos tampoco son muy relevantes, obteniendo todos, salvo los reseñados anteriormente, resultados más o menos similares. Sin embargo, cuando se representan gráficamente las curvas de tipos cupón-cero y forward estimadas a partir de los mismos, se observan claras diferencias entre unos y otros y se hace patente las conclusiones extraídas del análisis teórico efectuado.

Así, únicamente el modelo de Contreras y Navarro (1993) y las dos propuestas que se han analizado empíricamente presentan un comportamiento estable de la curva de tipos forward en el largo plazo, a la vez que muestran la flexibilidad suficiente para representar correctamente la forma y niveles de la curva de tipos cupón-cero.

Las principales ventajas de nuestras propuestas frente al modelo de Contreras y Navarro (1993) son, por un lado, que no se emplean splines por lo que su aplicación es más sencilla y por otro, que generan ecuaciones de regresión, en el caso de la Propuesta II, parsimoniosas.

Además, con la aplicación de estos modelos se logra el equilibrio deseado entre calidad de estimación y capacidad de predicción sin necesidad de aplicar la metodología de estimación propuesta, inicialmente, por Adams y Van Deventer (1994).

Por otro lado, un inconveniente detectado en los modelos que emplean splines es que el valor de estas funciones depende, en gran medida, de la localización de los nodos; por lo que, cualquiera que desee obtener algún valor estimado de los tipos, no sólo requiere conocer el valor de los parámetros del modelo sino la localización de los nodos empleada en la estimación.

En cualquier caso, a pesar que abogamos en favor del uso de las alternativas propuestas por su adecuado comportamiento teórico y práctico, debe ser el usuario final quien decida qué modelo se adecua mejor a sus necesidades. En ocasiones, sólo se desea tener una idea aproximada sobre la forma y niveles de la curva y es suficiente con visualizar la curva de rendimientos teniendo en cuenta los sesgos que ésta presenta; mientras que en otros casos se requiere una gran precisión en las estimaciones o un grado de fiabilidad aceptable en las predicciones. Un equilibrio entre ambos factores que no requiere gran complejidad de cálculo se logra con el uso, en nuestra opinión, de los polinomios de Legendre.

Otro aspecto importante a destacar es que la realización de este análisis supone el mayor estudio realizado, hasta la fecha, para el mercado español, tanto en número de modelos considerados como en periodo abarcado, por lo que se disponen de las series temporales de los tipos cupón-cero para diferentes plazos durante seis años. Esta serie de datos, nos permitirá llevar a cabo en el futuro estudios empíricos que requieren el conocimiento de los tipos cupón-cero cuyos resultados, a priori, se

esperan sean más robustos que los alcanzados cuando se emplean TIR's.

En nuestra opinión, este trabajo realiza tres aportaciones importantes al estudio de la modelización de la estructura temporal de tipos de interés. Por un lado, a través del estudio teórico de los modelos existentes en la literatura, se pone de manifiesto la necesidad de analizar previamente en detalle las propuestas que se enuncien a fin de evitar la especificación arbitraria de modelos, tal y como, en su mayor parte, se ha venido realizando hasta ahora. Por otro lado, se proponen algunas alternativas que teóricamente son apropiadas para abordar el problema de determinación de la curva de tipos. Y por último, respecto al estudio concreto de la modelización de la ETTI en España, se obtienen las series temporales para los tipos cupón-cero a plazos no negociados en el mercado durante seis años.

Para finalizar se exponen algunas cuestiones que pueden ser objeto de futuras investigaciones. Un tema a estudiar es si la localización de los nodos de los splines afecta de forma decisiva, según afirma Shea (1984), a los resultados que éstos obtienen. A este respecto, es conveniente señalar que por las características que presenta el Mercado Español de Deuda Pública Anotada, al menos durante el periodo analizado, la utilización de más de dos subintervalos parece innecesaria, ya que no aporta una mejora sustancial de las estimaciones y supone la consideración de un mayor número de parámetros. Este hecho se comprueba en cierto modo con los resultados obtenidos en Contreras y Navarro (1993), donde el único nodo se sitúa en los alrededores de un año.

Otro aspecto que habría que estudiar es hasta qué punto el método de estimación empleado afecta a los resultados obtenidos. Por ejemplo, para Carleton, Chambers y Waldman (1984) el problema en el uso de polinomios no se debe tanto a éstos sino al

modo en que se realizan las regresiones, aunque no estamos de acuerdo con esta afirmación, ya que un modelo polinómico independientemente de la metodología de estimación aplicada, siempre va a presentar un comportamiento explosivo a largo plazo si se trabaja en el intervalo $[0, \infty)$.

Por otro lado, sería conveniente analizar si los resultados mejoran cuando los parámetros se estiman no sólo en base a la minimización de error sino incorporando alguna medida de la suavidad de los tipos forward como proponen Adams y Van Deventer (1994), Fisher, Nychka y Zervos (1995) o Waggoner (1997). Aunque a la vista de los resultados obtenidos por los modelos alternativos propuestos la suavidad ya está garantizada.

REFERENCIAS

- ADAMS, KENNETH J. Y DONALD R. VAN DEVENTER (1994); "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness", **Journal of Fixed Income**, Vol. 4, nº1, pp. 52-62
- AHN, CHANG MO Y HOWARD E. THOMPSON (1988); "Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates", **Journal of Finance**, Vol. 43, nº 1, pp.155-174.
- AKIMA, H. (1970); "A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures", **Journal of ACM**, nº 17, pp. 589-602.
- ANALISTAS FINANCIEROS INTERNACIONALES (1993); "La Curva de Tipos Cupón-Cero: Estimación e Interpretación", **Análisis Financiero**, Diciembre-Enero, pp.43-54.
- (1995A); "Análisis de la curva rendimiento-plazo y aplicaciones de la curva cupón-cero", **Seminario de Técnicas Avanzadas de Análisis y Gestión de Carteras de Renta Fija**, Abril. Madrid.
- (1995B); **Los Strips sobre Deuda Pública**. Ed. AFI. 1ª Edición. Madrid.
- (1996); **Guía del Sistema Financiero Español**. Ed. CECA 2ª Edición. Madrid.
- ATKINSON, KENDALL E. (1988); **A Introduction to Numerical Analysis**. Ed. John Wiley & Sons. 2ª Edición. Nueva York.

- BAJAJ, CHANDRAJIT L. Y GUOLIANG XU (1994); "Data Fitting with Cubic A-Splines" **ftp://ftp.cs.purdue.edu/pub/shastra/pubs/cubic-aspl.ps.gz.**
- BARKOULAS, JOHN Y CHRISTOPHER F. BAUM (1996); "Essential Nonparametric Prediction of U.S. Interest Rates", **Boston College Working Papers in Economics** [<http://fmwww.bc.edu/EC-P/WP313.pdf>], n° 313.
- BARREIRA, M.TERESA, VICENTE MENEU Y ELISEO NAVARRO (1992); **Análisis y Gestión del Riesgo de Interés.** Ed. Ariel Economía. 1ª Edición. Barcelona.
- BERGES, ANGEL Y DANIEL MANZANO (1988); **Tipos de Interés de los Pagarés del Tesoro.** Ed. Ariel Economía. Barcelona.
- BHAR, RAMAPRASAD Y CARL CHIARELLA (1996); "Construction of Zero-Coupon Yield Curve from Coupon Bond Yield Using Australian Data", **School of Finance and Economics Working Paper – Univ. of Technology - Sidney**, n° 70.
- Y B.F. HUNT (1994); "Predicting the Short Term Forward Interest Rate Structure Using a Parsimonious Model", **International Review of Economics and Finance**, Vol.2, n° 4.
- BIERWAG, GERALD O. (1991); **Análisis de la Duración. La Gestión del Riesgo de Tipo de Interés.** Ed. Alianza Economía y Finanzas. 1ª Edición. Madrid.

- BJÖRCK, ÅKE Y GERMUND DAHLQUIST (1974); **Numerical Methods**. Ed. Prentice Hall. 1ª Edición. Londres.
- BLISS, ROBERT R. (1996); “Testing Term Structure Estimation Methods”, **Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper**, nº 96-12a.
- Y EUGENE F.FAMA (1987); “The Information in Long-Maturity Forward Rates”, **American Economic Review**, nº 77, pp. 680-692.
- BOENAWAN, KIEKIE Y PETER H. RITHCKEN (1990); “On Arbitrage Free-Pricing of Interest Rates Contingent Claims”, **Journal of Finance**, Vol. 45, nº 1, pp. 259-264.
- BOOR (DE), CARL (1978), **A Practical Guide to Splines**. Ed. Springer-Verlag. 1ª Edición. Nueva York.
- (1986); “Splines as Linear Combinations of B-Splines. A Survey”; <http://www.cs.eisc.edu/~deboor/ftpreadme.html>.
- (1993); “B-Spline Basics”. <http://www.cs.eisc.edu/~deboor/ftpreadme.html>. [Publicado en Fundamental Developments of Computer-Aided Geometric Modeling; Les Piegl (ed.), Academic Press, London, pp.27-49]
- BRADLEY, STEPHEN P. Y DWIGHT B. CRANE (1973); “Management of Commercial Bank Government Security Portfolios: An Optimization Approach under Uncertainty”, **Journal of Bank Research**, Primavera, pp. 18-30.

BRIGHAM, EUGENE F. (1995); **Fundamentals of Financial Management**. Ed. Dryden Press. 7ª Edición. Florida.

BROWN, KEITH C. Y FRANK K. REILLY (1997); **Investment Analysis and Portfolio Management**. Ed. Dryden Press. 5ª Edición. Florida.

BRUNO, NÉSTOR Y SANDRA MORINI (1997); "Estimación de la ETTI mediante Modelos No Lineales de Curva de Rendimiento", **Actualidad Financiera**, nº5, Mayo, pp.15-22.

BURCHARD, H. (1968); **Interpolation and Approximation by Generalized Convex Functions**, Disertación. Universidad de Purdue (EE.UU.).

BULIRSCH, R. Y J. STOER (1980); **Introduction to Numerical Analysis**. Ed. Springer-Verlag. 1ª Edición. Nueva York.

CAKS, JOHN (1977); "The Coupon Effect on Yield to Maturity", **Journal of Finance**, Vol. 32, nº1, Marzo, pp.103-115.

CALATAYUD, FRANCISCO P. Y SANDRA MORINI (1995); "Estimación de la Estructura Temporal de Tipos de Interés en el Mercado Español de Deuda Pública Anotada", **Actualidad Financiera**, nº 48, Diciembre, pp. F1945-F1977.

CARLETON, WILLARD T., DONALD R. CHAMBERS Y DONALD W. WALDMAN (1984); "A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 19, nº 3, Septiembre, pp.233-252.

- E IAN A. COOPER (1976); “Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Finance**, Vol. 31, nº4, Septiembre, pp.1067-1083.
- CHAN, L., A. MASON Y D. B. SUITS (1978); “Spline Functions Fitted by Standard Regression Methods”, **Review of Economics and Statistics**, Vol. 60, pp. 132-139.
- CHENY, WARD Y DAVID KINCAID (1994); **Análisis Numérico: Las Matemáticas del Cálculo Científico**. Ed. Addison-Wesley. Delawarre.
- COHEN, KALMAN J., ROBERT L. KRAMER Y W. HOWARD WAUGH (1966); “Regression Yield Curves for U.S. Government Securities”. **Management Science** Vol.13, nº4, pp. B168-B175.
- CONTRERAS, DULCE Y ELISEO NAVARRO (1993); “Utilización de “Splines” Exponenciales para la Estimación de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en el Mercado Español”, **Quaderns de Treball – Universitat de Valencia**, nº 241.
- , RAMÓN FERRER, ELISEO NAVARRO Y JUAN NAVE (1994A); “Estimación de la Curva de Tipos Cupón Cero en el Mercado Español de Deuda Pública”, **VIII Congreso Nacional y IV Congreso Hispano-Francés de AEDEM**, Vol. 3, pp. 207-220. Cáceres.
- (1994B); “Análisis Factorial de la Estructura Temporal de Tipos de Interés en España”, **II Foro de Finanzas**, Madrid.

- COX, JOHN C., JONATHAN E. INGERSOLL Y STEPHEN A. ROSS (1981);
“A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Finance**, Vol. 36, n° 4, pp.769-799.
- (1985); “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, **Econometrica**, n° 53, pp.385-407.
- CULBERTSON, J.M (1957); “The Term Structure of Interest Rates”, **Quarterly Journal of Economics**, Vol. 71, n° 4, pp.485-517.
- DAHLQUIST, MAGNUS Y LARS E. O. SVENSSON (1994); “Estimating the Term Structure of Interest Rates with Simple and Complex Functional Forms: Nelson & Siegel vs. Logstaff & Schwartz”, **Seminar Paper – Institute for International Economic Studies – University of Stockholm**, n° 565.
- DEACON, MARK Y ANDREW DERRY (1994); “Estimating the Term Structure of Interest Rates”, **Working Paper Series – Bank of England**, n°24.
- DERMODY, JAIME C. Y ELIEZER Z. PRISMAN (1988); “Term Structure Multiplicity and Clientele in Markets with Transactions Costs and Taxes”, **Journal of Finance**, Vol. 43, n° 4, pp.893-912.
- DOBSON, STEVEN W., RICHARD C. SUTCH Y DAVID E. VANDERFORD (1976); “An Evaluation of Alternative Empirical Models of the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Finance**, Vol. 31, n°.4, pp. 1035-1065.

- DOTHAN, L. URI (1978); "On the Term Structure of Interest Rates", **Journal of Financial Economics**, n° 6, pp.59-69.
- DURAND, DAVID (1942); "Basic Yields of Corporate Bonds 1900-42", **National Bureau of Economic Research Technical Paper**, n° 3.
- (1958); "A Quarterly Series of Corporate Basic Yields, 1952-57, and Some Attendant Reservations", **Journal of Finance**, n°13, pp. 348-356.
- ECHOLS, MICHAEL E. Y J.WALTER ELLIOTT (1976); "A Quantitative Yield Curve Model for Estimating the Term Structure of Interest Rates", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Marzo, pp.87-114.
- ELTON, EDWIN J., MARTIN J. GRUBER Y RONI MICHAELY (1990); "The Structure of Spot Rates and Immunization", **Journal of Finance**, Vol. 45, n° 2, pp. 629-642.
- EZQUIAGA, IGNACIO (1991); **El Mercado Español de Deuda del Estado: Estructura y Formación de Precios**. Ed. Ariel Economía. Barcelona.
- , INMACULADA GÓMEZ Y J. RAMÓN JARA (1994); "Una Metodología para la Estimación de la Curva de Tipos Cupón-Cero y su Aplicación al Mercado Español", **Moneda y Crédito**, n° 199, pp. 157-197.

FABOZZI, FRANK J. (1996); **Bond Markets, Analysis and Strategies**.

Ed. Prentice Hall. 3ª Edición. Londres.

FAMA, EUGENE F. (1976); "Inflation Uncertainty and Expected Returns on Treasury Bills", **Journal of Political Economy**,

Vol. 84, nº3, pp. 427-448.

FAVARD, J. (1940); "Sur l'interpolation", **Journal of Mathematics**

Pures Applicates, nº 19 pp.281-306.

FERRER, RAMÓN, ELISEO NAVARRO Y JUAN NAVE (1995); "La

Volatilidad de las Variaciones de los Tipos de Interés en la Estimación de su Estructura Temporal", **Revista Europea de**

Dirección y Economía de la Empresa, Vol. 4, nº 2, pp. 53-64.

FISHER, DOUGLAS (1966); "Expectations, the Term Structure of

Interest Rates and Recent British Experience", **Economica**,

Vol. 13, nº 131, pp. 319-329.

FISHER, J. (1930); **The Theory of Interest**. Ed. McMillan. Nueva

York.

FISHER, LAWRENCE Y ROMAN L. WEIL (1971); "Coping With the

Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies", **Journal of Business**, nº

44, pp.408-431.

FISHER, MARK, DOUGLAS NYCHKA Y DAVID ZERVOS (1995); "Fitting

the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines",

Finance and Economics Discussion Series – Federal Reserve Board, nº 95-1.

FLANNERY, BRIAN, WILLIAM PRESS, SAUL TEUKOLSKY Y WILLIAM VETTERLING (1994); **Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing**. Cambridge University Press. 2ª Edición. Nueva York.

FONG, H.GIFFORD Y OLDRICH A. VASICEK (1982); “Term Structure Modelling using Exponential Splines”, **Journal of Finance**, Vol. 37, nº 2, pp. 339-356.

FREIXAS, XAVIER (1992); “Estructura Temporal de Tipos de Interés: Hipótesis Teóricas y Resultados Empíricos”, **Investigaciones Económicas**, Vol. 26, nº 2, pp.187-203.

GHYSELS, ERIC Y SERENA NG (1996); “A Semi-Parametric Factor Model for Interest Rates”, **CIRANO Scientific Series**, nº 96s-18.

GOLDSTEIN, ROBERT (1997); “The Term Structure of Interest Rates as a Random Field”, **Charles A. Dice Center for Research in Financial Economics Working Paper** [<http://www.cob.ohio-state.edu/~fin/journal/dice/papers/1997/97-5.htm>], nº 97-05.

HALEY, C.W. Y L.D. SCHALL (1979); **The Theory of Financial Decisions**. Ed. McGraw - Hill. Nueva York.

- HALL, A. D. (1989); "Australian Yield Curve", **Mimeografiado – Universidad Nacional de Australia.**
- HEATH, DAVID, ROBERT JARROW Y ANDREW MORTON (1992); "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation", **Econometrica**, Vol. 60, n° 1, pp.77-105.
- HICKS, J.R. (1939); **Value and Capital. An Inquiry into some Fundamental Principles of Economic Theory.** Clarendon Press. Oxford.
- HO, THOMAS S. Y SANG-BIN LEE (1986); "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", **Journal of Finance**, Vol. 41, n°5, pp.1011-1029.
- HODGES, S. D. (1967); "Convex Approximation", **Tesis no publicada.** Universidad de Southampton (Reino Unido).
- HUNT, B. F. (1995A); "Modelling the Yields on Australian Coupon Paying Bonds", **School of Finance and Economics Working Paper – Univ. of Technology - Sidney**, n° 50.
- (1995B); "Fitting Parsimonious Yield Curve Models to Australian Coupon Bond Data", **School of Finance and Economics Working Paper – Univ. of Technology Sidney**, n° 51.

- JAIN, S. Y M. LIVINGSTON (1982); "Flattening of Bond Maturity Curves for Long Maturities", **Journal of Finance**, Vol. 37, pp. 157-167.
- JOHNSON, ROB (1996); "Understanding Conic Splines" **Apple Computer Technote**, nº1051.
- JORDAN, J.V. (1980); "Studies in Direct Estimation of the Term Structure", **Tesis Doctoral no publicada**, Universidad de Carolina del Norte (EE.UU.).
- KARLIN, S. (1968); **Total Positivity**. Ed. Stanford University Press. Stanford.
- KWON, HEON-CHUL Y J. HUSTON MCCULLOCH (1993); "U.S. Term Structure Data, 1947-1991", **Working Paper - Ohio State University**, nº 93-6.
- LAMOTHE, PROSPER Y J. ANTONIO SOLER (1997); **Swaps y Otros Derivados OTC en Tipos de Interés**. Ed. McGraw-Hill. 1ª Edición. Madrid.
- LANGETIEG, TERENCE C. (1980); "A Multivariate Model of the Term Structure", **Journal of Finance**, pp.71-97.
- LAU, P. (1983); "An Empirical Examination of Alternative Interest Rate Risk Immunization Strategies", **Tesis Doctoral no publicada**, Universidad Nacional de Australia (Australia).
- LONGSTAFF, FRANCIS A. Y EDUARDO S. SCHWARTZ (1993); "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General

- Equilibrium Model”, **Journal of Finance**, Vol. 47, pp. 1259-1282.
- LUTZ, F.A. (1940); “The Structure of Interest Rates”, **Quarterly Journal of Economics**, Vol.55, nº 1, pp.36-63.
- MALKIEL, BURTON G. (1966); **The Term Structure of Interest Rates**. Princeton University Press.
- MASTRONIKOLA, KATERINA (1991); “Yield Curves for Gilt-Edged Stocks: A New Model”, **Bank of England Discussion Papers – Technical Series**, nº 49.
- MCALLISTER, D.F. Y J.A. ROULIER (1981); “An Algorithm for Computing a Shape – Preserving Osculatory Quadratic Spline”, **ACM Transactions Mathematical Software**, nº 7, pp. 331-347.
- MCCULLOCH, J. HUSTON (1971); “Measuring the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Business**, Vol.34, pp.19-31.
- (1975); “The Tax-Adjusted Yield Curve”, **Journal of Finance**, Vol. 30, nº 3, pp. 811-830.
- MCLEOD, H.D. (1990); “The Development of a Market Yield-Curve. The South African Solution”. **1st AFIR International Colloquium**, Vol. 2, pp. 195-212.
- MODIGLIANI, FRANCO Y R. SUTCH (1966); “Innovations in Interest Rate Policy”, **American Economic Review**,

- NELSON, JEFFREY Y STEPHEN SCHAEFER (1983); "The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies", **Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization** (Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, Vol. 41).
- NELSON, CHARLES R. Y ANDREW F. SIEGEL (1987); "Parsimonious Modeling of Yield Curves", **Journal of Business**, nº4. Vol. 60, pp.473-489.
- (1988); "Long-Term Behavior of Yield Curves", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, nº 23, pp. 105-110.
- NIEBUHR, D.W. Y A.A. ROBICHEK (1970); "Tax-Induced Bias in Reported Treasury Yields", **Journal of Finance**, Vol.25, nº5, pp.1081-1090.
- NOVALES, ALFONSO (1993); **Econometría**. 2º Edición. Ed. McGraw Hill. Madrid.
- NÚÑEZ, SOLEDAD (1995); "Estimación de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en España: Elección entre Métodos Alternativos", **Documento de Trabajo: Servicio de Estudios del Banco de España**, nº 9522.
- PHILLIPS, G. M. Y P. J. TAYLOR (1970); "Approximation of convex data" **BIT**, Vol. 10, pp. 324-332.
- PRISMAN, ELIEZER Z. (1990); "A Unified Approach to Term Structure Estimation: A Methodology for Estimating the Term

- Structure in a Market with Frictions”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 25, n° 1, pp.127-142.
- RICHARD, SCOTT F. (1978); “An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Financial Economics**, n° 6, pp. 33-58.
- ROSE, D. Y W.E. SCHWORM (1980); “ Measuring the Term Structure of Prices for Canadian Federal Debt” **University of British Columbia Discussion Paper**, n° 81-08.
- SCHAEFER, S.M. (1981); “Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities”, **Economic Journal**, n° 91, Junio, pp. 415-438.
- SCHMIDT, J. W. (1988); “On Shape-Preserving Spline Interpolation: Existence Theorems and Determination of Optimal Splines”, **Banach Center Publications**, Vol. 22, pp. 377-388.
- SCHOENBERG, I.J. (1946); “Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions”, **Quarterly Applied Mathematics**, n°4 pp 45-99 y 112-141.
- SCHOENBERG, I.J. (1964); “On Trigonometric Spline Interpolation”, **Journal of Mathematics Mechanics**, Vol. 13, n° 5, pp. 795-825.

- SCHWARZ, HANS R. (1989); **Numerical Analysis. A Comprehensive Introduction.** Ed. John Wiley & Sons. 1ª Edición. Nueva York.
- SHEA, GARY S. (1984); "Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.19. n° 3. Septiembre, pp.253-269.
- (1985); "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note", **Journal of Finance**, Vol. 40, n° 1. Marzo, pp.319-325.
- SPÄTH, HELMUTH (1995); **One Dimensional Spline Interpolation Algorithms.** Ed. A. K. Peters. 1ª Edición. Massachusetts.
- STEELEY, JAMES M. (1991); "Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals", **Journal of Banking, Finance and Accounting**, Vol.18, n°4, pp.513-529.
- SVENSSON, LARS E. O. (1994); "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994", **Seminar Paper – Institute for International Economic Studies – University of Stockholm**, n° 579.
- VASICEK, OLDRICH (1977); "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", **Journal of Financial Economics**, n° 5, pp.177-188.

WAGGONER, DANIEL F. (1997); "Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices", **Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper**, nº 97-10.

ZANGARI, PETER (1997); "An Investigation into Term Structure Estimation Methods for RiskMetrics"; **RiskMetrics® Monitor**, 3^{er} Trimestre, pp.3-31.

**ANEXO 1: EL MERCADO ESPAÑOL DE DEUDA
PÚBLICA ANOTADA**

Desde el punto de vista del estudio que nos concierne y casi sin lugar a dudas desde un punto de vista general el mercado secundario de Deuda Pública Anotada (DPA) es el más importante. En concreto los datos empleados en nuestro análisis empírico proceden de los precios de compraventa en las operaciones al contado con bonos y obligaciones efectuadas en el mercado secundario del MEDPA. Por este motivo, creemos necesario hacer una breve referencia a la organización, funcionamiento y estructura del mismo.

El MEDPA forma parte de los mercado de valores oficiales organizados existentes en España, siendo su órgano rector la central de anotaciones del Banco de España. Su organización se basa en el sistema de anotaciones en cuenta, donde se liquidan, compensan y negocian los valores emitidos por el Estado, Comunidades Autónomas y otros organismos públicos, es decir, deuda pública¹.

El actual sistema de anotaciones en cuenta se crea en abril de 1987 a partir del Real Decreto 505/1987 de 3 de Abril² con el fin de dotar al mercado de la agilidad y rapidez necesaria para su completo desarrollo, reduciendo los costes de transacción y aumentando la eficiencia; se consigue de este modo agilizar el funcionamiento del mercado secundario que, hasta la fecha se había visto poco favorecido por la necesidad de operar con títulos físicos. Cabe destacar que este cambio institucional dio vida al mercado que en la actualidad es uno de los principales mercados europeos y con un gran volumen de negociación lo que lo sitúan como un marco ideal para la formación eficiente de los precios de

¹ Aunque existen ciertas salvedades [AFI (1995B), p.13].

² Este RD se ha ido completando posteriormente y modificando con otras disposiciones legales.

los que subyacen los tipos de interés que sirven de referencia al resto de mercado de capitales y el sistema bancario.

El objeto del MEDPA es la negociación de la deuda del Estado representada en anotaciones en cuenta³ y de otros valores, así formulados, emitidos por Comunidades Autónomas, entidades y sociedades públicas u organismos internacionales de los que España es miembro previa autorización del Ministerio de Economía y Hacienda.

El elemento más importante de este mercado es la Central de Anotaciones, servicio público del Estado gestionado por el Banco de España encargado, en general, de la gran mayoría de las actividades relacionadas con la emisión y negociación en este mercado, como la emisión y amortización de los títulos pertenecientes al sistema, pago de intereses a titulares, etc.

Si bien, cualquier persona física o jurídica puede ser tenedora de deuda pública, sólo algunas entidades pueden operar en el MEDPA. Entre éstas cabe destacar la labor de las entidades gestoras⁴ que son las encargadas de acercar la deuda pública a quienes no pueden operar directamente en la Central de Anotaciones y dentro de éstas los creadores de mercado⁵, agentes que garantizan la liquidez del mercado ya que se comprometen a cotizar precios de compra y de venta de forma competitiva y continuada.

³ Casi la totalidad de la deuda del Estado se encuentra formalizada de esta manera siguiendo sólo una parte residual la que continúa con soporte físico, en concreto la deuda perpetua cuya importancia es marginal (AFI (1996) p.133).

⁴ Con capacidad plena si son titulares de cuenta o con capacidad restringida si sólo pueden operar por cuenta de terceros.

⁵ Con capacidad plena.

Otra figura importante es la de los mediadores, que ofrecen a los agentes que intervienen en el mercado una red de negociación organizada, que busca facilitar el encuentro entre oferentes y demandantes, a cambio de una comisión. La particularidad que tienen las transacciones realizadas a través de estos agentes es el desconocimiento de la contrapartida por lo que se conocen como *operaciones ciegas*.

Una vez que la deuda ha sido colocada a través de las emisiones en el mercado primario la misma puede negociarse en el mercado secundario, donde se distinguen 3 ámbitos de negociación en función de los participantes. Por un lado, nos encontramos lo que se denomina primer escalón, más conocido por mercado ciego, en el que se negocia a través de intermediarios o *brokers* especializados por lo que las partes no conocen sus contrapartidas, y en la que sólo pueden actuar las entidades gestoras autorizadas. Las operaciones, que pueden ser electrónicas o telefónicas, sólo pueden ser al contado o a plazo por lo que se excluyen los *repos* y la liquidación y compensación de la operación se realiza a través del Servicio Telefónico del Mercado del Dinero. Las cotizaciones son en firme y existen requisitos en cuanto al volumen mínimo de cada orden que son de 100 millones para bonos y obligaciones y 500 millones para las Letras⁶.

También nos encontramos con el llamado segundo escalón, mercado gris u operativa tradicional, donde las operaciones se realizan bilateralmente entre titulares de cuenta sin la necesidad de un mediador, aunque también pueden actuar en este mercado para poner en contacto a las dos partes. La liquidación y compensación se realiza igual que en el caso anterior a través del mismo servicio, con la particularidad de que en la operativa a

⁶ A partir de aquí se establecen volúmenes mayores en múltiplos de 100 millones.

plazo no se realiza liquidación diaria de pérdidas y ganancias y se puede liquidar el contrato antes del vencimiento por diferencias. Otra característica importante del mercado a plazo, en este nivel, es que se permiten operaciones sobre deuda aún no emitida si su subasta se ha anunciado⁷. Se puede realizar cualquier tipo de las operaciones autorizadas: compraventa simple al contado y a plazo, con pacto de recompra a fecha fija y simultáneas.

Por último, tenemos el segmento de negociación con terceros, esto es operaciones entre entidades gestoras y sus clientes que es de gran importancia al canalizarse la deuda emitida en el mercado primario desde las entidades gestoras a inversores no residentes, particulares, fondos de inversión, etc. a través de un mercado descentralizado que utiliza la red comercial de las entidades gestoras y la vía telefónica para realizar las operaciones, en su mayoría de pequeño importe. La liquidación y compensación las realizan las entidades gestoras. Las operaciones permitidas son las operaciones al contado y a plazo simples, repos a fecha fija y a la vista, y simultáneas.

En cuanto a las operaciones permitidas, tenemos las compraventas simples al contado, cuya fecha valor es hasta cinco días hábiles desde la fecha de contratación. Las operaciones de compraventa simple a plazo, únicas operaciones limitadas a terceros o entidades no gestoras, en las que se establecen el objeto y las condiciones de transacción en el momento de contratar la operación, pero la transacción del título y su liquidación se realiza en una fecha futura; estas operaciones, generalmente, se encuentran concentradas en el mercado gris ya que en el mercado ciego se obliga a reponer márgenes diariamente. Y por último, tenemos las operaciones de cesión temporal que comprenden la

⁷ Las, así denominadas, "When Issue".

compraventa con pacto de recompra o *repos* donde se contratan dos compraventas de signo contrario que se llevarán a cabo en dos momentos distintos del tiempo. Existen dos modalidades: a fecha fija y a la vista y las simultáneas que son compraventas simples, a vencimiento, a plazo o al contado que se contratan simultáneamente con otras de signo contrario de igual nominales.

Ambas operaciones, *repos* y simultáneas, son financieramente equivalentes, su diferencia radica en cuestiones técnicas ya que los *repos* no pueden superar el plazo sobre el que el vendedor dispone del valor, mientras que las operaciones simultáneas se puede comprar o vender valores al contado sin dinero (como en el caso de los *repos*) o sin papel. Por tanto la diferencia entre ambas operativas radica en la disponibilidad de los valores por parte del comprador. En las simultáneas el comprador puede vender el valor a vencimiento o a una fecha de recompra más allá de la inicial de reventa, es decir, puede efectuar ventas en descubierto además de permitir venta a terceros de nuevo en simultánea de posiciones ya adquiridas. Otra limitación es que los terceros tienen limitaciones en las operativas con simultáneas.

En relación a los títulos que se negocian en este mercado podemos distinguir entre Letras, que son títulos con cupón implícito o cupón-cero y los Bonos y Obligaciones que tienen cupón explícito.

En concreto, las Letras del Tesoro son valores emitidos al descuento y se representan exclusivamente por anotaciones en cuenta y están orientados por sus características, principalmente, a los inversores domésticos. El procedimiento habitual de emisión es la subasta, estableciéndose al principio de cada año un calendario de emisión de las Letras a 1 año. Generalmente las subastas se

realizan cada dos semanas⁸. Su creación en Junio de 1987 coincide con la puesta en funcionamiento del sistema de anotaciones en cuenta con vistas a sustituir a los Pagarés del Tesoro a fin de lograr una mayor transparencia fiscal en los títulos negociados.

Las Letras del Tesoro han tenido gran aceptación, su nominal es de un millón de pesetas y su plazo máximo de 18 meses. Las Letras tienen una peculiaridad fiscal: los rendimientos implícitos de las mismas están exentos de retención impositiva. Los plazos de emisión son 3, 6, 12 y 18 meses⁹. Siendo las emisiones a un año regulares, cada 2 semanas.

Por otro lado, tenemos los Bonos y Obligaciones que se emiten desde 1990 con cupones anuales y anteriormente con devengos semestrales. La única diferencia entre ambos es el plazo de vencimiento siendo los primeros a medio plazo (entre 2 y 5 años) y las obligaciones a plazos superiores a 5 años¹⁰. Son también, desde la creación del sistema de anotación en cuenta, valores representados exclusivamente en este sistema y su nominal es de 10000 ptas. En este caso, los cupones si están sujetos a retención fiscal. Estos títulos tienen su mayor demanda en los inversores institucionales, y participan en gran medida los inversores no residentes que con carácter general están exentos de la retención sobre el cupón. Este diferente tratamiento fiscal entre residentes y no residentes ha dado lugar a una operativa denominada lavado de cupón a través de la cual los residentes ceden temporalmente a los no residentes sus activos en el periodo en que estos pagan cupón a fin de evitar la retención sobre los

⁸ Normalmente los miércoles con fecha valor viernes.

⁹ Estas últimas de reciente creación, fueron emitidas por primera vez el 18 de Abril de 1997.

¹⁰ Hasta 1998 el mayor vencimiento era 15 años. En la actualidad hay emisiones con vencimientos a 30 años.

mismos. Las autoridades, para controlar un poco este hecho, han establecido un requisito en el plazo de cesión que tiene que efectuarse 30 días antes del pago de cupón.

Al igual que en el caso de las Letras el Tesoro también establece un calendario de emisión mensual para los bonos a 3 y 5 años y las obligaciones a 10 y 15 años, realizándose las subastas el primer martes de cada mes en el caso de los bonos a 3 años y las obligaciones a 10 y el primer miércoles de cada mes para los bonos a 5 y las obligaciones a 15 años.

En cuanto a la organización del mercado, su organismo rector es la central de anotaciones que está gestionada por el Banco de España. La labor del organismo rector es registrar todas las operaciones efectuadas y mantener al día los saldos de los miembros bien por cuenta propia bien por cuenta de terceros. En relación a los titulares de la cuenta nos encontramos con 3 tipos de cuentas: cuentas propias (abiertas en nombre propio por las entidades gestoras), cuentas directas (abiertas directamente por los suscriptores de deuda) y cuentas a nombre de terceros (abiertas por las entidades gestoras en nombre de sus clientes).

Los miembros del mercado son los titulares con cuenta propia y las entidades gestoras. Los primeros sólo pueden operar en el mercado por cuenta propia y cualquier entidad considerada intermediario financiero en los registros oficiales puede ser titular. Por su parte, las entidades gestoras pueden actuar por cuenta propia y por cuenta de terceros y son las encargadas de poner en contacto a los no miembros con el sistema.

En general podemos distinguir dos tipos de entidades gestoras, las que tienen capacidad plena que pueden operar por cuenta propia al ser también titulares y las de capacidad restringida que actúan como meros intermediarios salvo que sean

tengan cuenta como titulares en cuyo caso pueden ofrecer contrapartida en su nombre únicamente en compraventas simples al contado.

Una característica importante de este mercado que le confiere una mayor liquidez y dinamicidad es la existencia de los creadores de mercado, que surgieron originariamente como grandes colocadoras de deuda entre terceros pero que han demostrado su gran importancia para el desarrollo del mercado. Los creadores de mercado son Entidades gestoras con capacidad plena que se comprometen con el Tesoro público a aportar la liquidez suficiente al mercado entre miembros cotizando precios de compra y de venta para determinadas emisiones de deuda pública y operando con unos volúmenes mínimos; estos compromisos se extienden al mercado primario donde deben pujar regularmente. Como contrapartida tienen algunos privilegios como son que pueden operar con el Banco de España en sus intervenciones diarias en el MEDPA y tienen permitido realizar lavados de cupón bajo ciertas restricciones.

ANEXO 2: COMPOSICIÓN DE LAS MUESTRAS

Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.
02/01/91	4	20/03/9	6	04/06/91	4	13/08/91	7	23/10/91	9
07/01/91	4	21/03/9	5	05/06/91	5	14/08/91	7	24/10/91	8
09/01/91	4	22/03/9	6	06/06/91	7	16/08/91	7	25/10/91	6
10/01/91	5	25/03/9	5	07/06/91	7	19/08/91	5	28/10/91	6
11/01/91	5	26/03/9	6	10/06/91	4	20/08/91	6	29/10/91	7
14/01/91	5	27/03/9	6	11/06/91	8	21/08/91	7	30/10/91	7
15/01/91	5	01/04/9	5	12/06/91	8	22/08/91	9	31/10/91	6
16/01/91	4	02/04/9	5	13/06/91	7	23/08/91	6	04/11/91	6
17/01/91	4	03/04/9	6	14/06/91	8	27/08/91	5	05/11/91	5
18/01/91	4	04/04/9	5	17/06/91	8	28/08/91	7	06/11/91	6
21/01/91	5	05/04/9	5	18/06/91	7	29/08/91	4	07/11/91	6
22/01/91	5	08/04/9	5	19/06/91	7	30/08/91	7	08/11/91	7
23/01/91	4	09/04/9	4	20/06/91	7	02/09/91	5	11/11/91	7
24/01/91	5	10/04/9	7	21/06/91	8	03/09/91	6	12/11/91	9
25/01/91	6	11/04/9	6	24/06/91	6	04/09/91	7	13/11/91	10
28/01/91	5	12/04/9	6	25/06/91	7	05/09/91	7	14/11/91	8
29/01/91	4	15/04/9	5	26/06/91	8	06/09/91	7	15/11/91	7
31/01/91	4	16/04/9	5	27/06/91	9	09/09/91	5	18/11/91	7
01/02/91	4	17/04/9	6	28/06/91	6	10/09/91	7	19/11/91	6
05/02/91	4	18/04/9	6	01/07/91	8	11/09/91	7	20/11/91	8
06/02/91	5	19/04/9	6	02/07/91	5	12/09/91	8	21/11/91	8
07/02/91	5	22/04/9	6	03/07/91	6	13/09/91	7	22/11/91	10
08/02/91	4	23/04/9	6	04/07/91	6	16/09/91	7	25/11/91	9
11/02/91	6	24/04/9	4	05/07/91	8	17/09/91	6	26/11/91	8
12/02/91	6	25/04/9	6	08/07/91	5	18/09/91	6	27/11/91	9
13/02/91	5	26/04/9	5	09/07/91	4	19/09/91	8	28/11/91	8
14/02/91	6	29/04/9	6	10/07/91	6	20/09/91	6	29/11/91	7
15/02/91	6	30/04/9	5	11/07/91	5	23/09/91	8	02/12/91	8
18/02/91	5	03/05/9	5	12/07/91	8	24/09/91	8	03/12/91	4
19/02/91	5	06/05/9	5	15/07/91	5	25/09/91	7	04/12/91	6
20/02/91	4	07/05/9	5	16/07/91	7	26/09/91	5	05/12/91	7
21/02/91	5	08/05/9	7	17/07/91	6	27/09/91	7	10/12/91	8
22/02/91	6	09/05/9	8	18/07/91	8	30/09/91	7	11/12/91	8
25/02/91	5	10/05/9	8	19/07/91	7	01/10/91	6	12/12/91	9
26/02/91	5	13/05/9	9	22/07/91	7	02/10/91	5	13/12/91	8

27/02/91	5	14/05/9	9	23/07/91	5	03/10/91	8	16/12/91	9
28/02/91	6	16/05/9	8	24/07/91	8	04/10/91	8	17/12/91	8
01/03/91	5	17/05/9	8	25/07/91	7	07/10/91	6	18/12/91	9
04/03/91	6	20/05/9	7	26/07/91	6	08/10/91	6	19/12/91	10
05/03/91	6	21/05/9	6	29/07/91	5	09/10/91	8	20/12/91	10
06/03/91	7	22/05/9	9	30/07/91	8	10/10/91	8	23/12/91	10
07/03/91	6	23/05/9	8	31/07/91	8	11/10/91	6	24/12/91	6
08/03/91	6	24/05/9	8	01/08/91	5	14/10/91	5	26/12/91	5
11/03/91	5	27/05/9	8	02/08/91	6	15/10/91	7	27/12/91	8
12/03/91	5	28/05/9	7	06/08/91	7	16/10/91	5	30/12/91	10
13/03/91	6	29/05/9	8	07/08/91	7	17/10/91	8	31/12/91	8
14/03/91	6	30/05/9	8	08/08/91	7	18/10/91	6		
15/03/91	5	31/05/9	5	09/08/91	8	21/10/91	6		
18/03/91	5	03/06/9	5	12/08/91	6	22/10/91	5		
Fecha	Nº Obs.								
02/01/92	5	13/03/9	10	29/05/92	11	07/08/92	13	19/10/92	14
03/01/92	8	16/03/9	9	01/06/92	7	10/08/92	8	20/10/92	12
07/01/92	7	17/03/9	9	02/06/92	10	11/08/92	10	21/10/92	14
08/01/92	11	18/03/9	10	03/06/92	11	12/08/92	8	22/10/92	14
09/01/92	9	20/03/9	10	04/06/92	9	13/08/92	11	23/10/92	14
10/01/92	8	23/03/9	8	05/06/92	10	14/08/92	11	26/10/92	12
13/01/92	8	24/03/9	9	08/06/92	12	17/08/92	9	27/10/92	12
14/01/92	9	25/03/9	11	09/06/92	11	18/08/92	9	28/10/92	14
15/01/92	8	26/03/9	10	10/06/92	13	19/08/92	11	29/10/92	15
16/01/92	7	27/03/9	10	11/06/92	13	20/08/92	10	30/10/92	14
17/01/92	9	30/03/9	9	12/06/92	12	21/08/92	10	02/11/92	12
20/01/92	9	31/03/9	9	15/06/92	11	24/08/92	9	03/11/92	14
21/01/92	8	01/04/9	10	16/06/92	10	25/08/92	10	04/11/92	11
22/01/92	10	02/04/9	10	17/06/92	14	26/08/92	11	05/11/92	12
23/01/92	8	03/04/9	10	18/06/92	12	27/08/92	10	06/11/92	11
24/01/92	10	06/04/9	10	19/06/92	12	28/08/92	11	10/11/92	12
27/01/92	6	07/04/9	11	22/06/92	12	31/08/92	9	11/11/92	12
28/01/92	9	08/04/9	9	23/06/92	13	01/09/92	10	12/11/92	9
29/01/92	7	09/04/9	12	24/06/92	14	02/09/92	11	13/11/92	12
30/01/92	8	10/04/9	12	25/06/92	13	03/09/92	13	16/11/92	13
31/01/92	10	13/04/9	11	26/06/92	15	04/09/92	12	17/11/92	13
03/02/92	5	14/04/9	14	29/06/92	11	07/09/92	10	18/11/92	11

04/02/92	8	15/04/9	12	30/06/92	11	08/09/92	9	19/11/92	12
05/02/92	8	20/04/9	11	01/07/92	9	09/09/92	11	20/11/92	13
06/02/92	9	21/04/9	10	02/07/92	12	10/09/92	11	23/11/92	12
07/02/92	8	22/04/9	11	03/07/92	11	11/09/92	9	24/11/92	12
10/02/92	10	23/04/9	10	06/07/92	10	14/09/92	9	25/11/92	12
11/02/92	10	24/04/9	10	07/07/92	11	15/09/92	11	26/11/92	13
12/02/92	12	27/04/9	9	08/07/92	11	16/09/92	11	27/11/92	13
13/02/92	10	28/04/9	12	09/07/92	11	17/09/92	11	30/11/92	10
14/02/92	11	29/04/9	10	10/07/92	12	18/09/92	10	01/12/92	10
17/02/92	10	30/04/9	9	13/07/92	13	21/09/92	12	02/12/92	10
18/02/92	9	04/05/9	10	14/07/92	10	22/09/92	14	03/12/92	12
19/02/92	9	05/05/9	12	15/07/92	11	23/09/92	12	04/12/92	12
20/02/92	10	06/05/9	9	16/07/92	12	24/09/92	13	09/12/92	11
21/02/92	10	07/05/9	10	17/07/92	12	25/09/92	13	10/12/92	13
24/02/92	10	08/05/9	13	20/07/92	12	28/09/92	12	11/12/92	10
25/02/92	10	11/05/9	12	21/07/92	11	29/09/92	13	14/12/92	10
26/02/92	9	12/05/9	10	22/07/92	11	30/09/92	12	15/12/92	10
27/02/92	10	13/05/9	12	23/07/92	12	01/10/92	13	16/12/92	14
28/02/92	9	14/05/9	14	24/07/92	12	02/10/92	12	17/12/92	10
02/03/92	9	18/05/9	12	27/07/92	12	05/10/92	12	18/12/92	10
03/03/92	10	19/05/9	12	28/07/92	11	06/10/92	11	21/12/92	11
04/03/92	10	20/05/9	10	29/07/92	12	07/10/92	12	22/12/92	10
05/03/92	10	21/05/9	12	30/07/92	13	08/10/92	12	23/12/92	13
06/03/92	6	22/05/9	12	31/07/92	11	09/10/92	14	24/12/92	12
09/03/92	10	25/05/9	9	03/08/92	11	13/10/92	13	28/12/92	10
10/03/92	10	26/05/9	9	04/08/92	11	14/10/92	12	29/12/92	13
11/03/92	10	27/05/9	12	05/08/92	10	15/10/92	12	30/12/92	15
12/03/92	11	28/05/9	9	06/08/92	11	16/10/92	13	31/12/92	12
Fecha	N° Obs.								
04/01/93	11	16/03/9	14	28/05/93	15	06/08/93	16	19/10/93	19
05/01/93	10	17/03/9	14	31/05/93	15	09/08/93	17	20/10/93	20
07/01/93	10	18/03/9	15	01/06/93	10	10/08/93	16	21/10/93	18
08/01/93	12	22/03/9	14	02/06/93	14	11/08/93	17	22/10/93	20
11/01/93	10	23/03/9	13	03/06/93	14	12/08/93	16	25/10/93	16
12/01/93	10	24/03/9	14	04/06/93	12	13/08/93	15	26/10/93	19
13/01/93	12	25/03/9	15	07/06/93	15	17/08/93	15	27/10/93	16
14/01/93	12	26/03/9	14	08/06/93	18	18/08/93	14	28/10/93	17

15/01/93	14	29/03/9	14	09/06/93	18	19/08/93	13	29/10/93	17
18/01/93	14	30/03/9	15	10/06/93	18	20/08/93	15	02/11/93	16
19/01/93	11	31/03/9	15	11/06/93	18	23/08/93	17	03/11/93	15
20/01/93	13	01/04/9	14	14/06/93	16	24/08/93	17	04/11/93	16
21/01/93	12	02/04/9	16	15/06/93	15	25/08/93	17	05/11/93	16
22/01/93	12	05/04/9	15	16/06/93	16	26/08/93	15	08/11/93	16
25/01/93	12	06/04/9	14	17/06/93	14	27/08/93	16	10/11/93	16
26/01/93	11	07/04/9	14	18/06/93	18	30/08/93	16	11/11/93	16
27/01/93	13	12/04/9	16	21/06/93	17	31/08/93	16	12/11/93	13
28/01/93	13	13/04/9	15	22/06/93	16	01/09/93	17	15/11/93	13
29/01/93	13	14/04/9	14	23/06/93	17	02/09/93	16	16/11/93	16
01/02/93	11	15/04/9	15	24/06/93	17	03/09/93	16	17/11/93	18
02/02/93	12	16/04/9	15	25/06/93	18	06/09/93	13	18/11/93	18
03/02/93	11	19/04/9	15	28/06/93	17	07/09/93	13	19/11/93	17
04/02/93	11	20/04/9	14	29/06/93	16	08/09/93	15	22/11/93	15
05/02/93	14	21/04/9	15	30/06/93	16	09/09/93	15	23/11/93	17
08/02/93	17	22/04/9	16	01/07/93	18	10/09/93	17	24/11/93	17
09/02/93	15	23/04/9	13	02/07/93	14	13/09/93	15	25/11/93	14
10/02/93	15	26/04/9	15	05/07/93	17	14/09/93	16	26/11/93	14
11/02/93	15	27/04/9	14	06/07/93	13	15/09/93	16	29/11/93	15
12/02/93	16	28/04/9	13	07/07/93	15	16/09/93	14	30/11/93	16
15/02/93	13	29/04/9	14	08/07/93	17	17/09/93	16	01/12/93	14
16/02/93	13	30/04/9	13	09/07/93	17	20/09/93	18	02/12/93	16
17/02/93	16	03/05/9	11	12/07/93	18	21/09/93	18	03/12/93	16
18/02/93	14	04/05/9	12	13/07/93	17	22/09/93	17	07/12/93	16
19/02/93	15	05/05/9	11	14/07/93	15	23/09/93	16	09/12/93	17
22/02/93	14	06/05/9	13	15/07/93	17	24/09/93	15	10/12/93	19
23/02/93	14	07/05/9	13	16/07/93	17	27/09/93	16	13/12/93	18
24/02/93	15	10/05/9	13	19/07/93	15	28/09/93	16	14/12/93	15
25/02/93	16	11/05/9	14	20/07/93	14	29/09/93	16	15/12/93	17
26/02/93	13	12/05/9	15	21/07/93	16	30/09/93	16	16/12/93	17
01/03/93	14	13/05/9	16	22/07/93	17	01/10/93	16	17/12/93	16
02/03/93	13	14/05/9	16	23/07/93	17	04/10/93	14	20/12/93	14
03/03/93	12	17/05/9	17	26/07/93	14	05/10/93	15	21/12/93	18
04/03/93	13	18/05/9	17	27/07/93	14	06/10/93	17	22/12/93	19
05/03/93	13	19/05/9	17	28/07/93	13	07/10/93	14	23/12/93	16
08/03/93	16	20/05/9	16	29/07/93	17	08/10/93	18	24/12/93	16

09/03/93	15	21/05/9	16	30/07/93	14	11/10/93	16	27/12/93	14
10/03/93	14	24/05/9	15	02/08/93	16	13/10/93	17	28/12/93	15
11/03/93	14	25/05/9	13	03/08/93	16	14/10/93	18	29/12/93	16
12/03/93	13	26/05/9	15	04/08/93	18	15/10/93	19	30/12/93	17
15/03/93	13	27/05/9	16	05/08/93	17	18/10/93	18	31/12/93	14

Fecha	Nº Obs.	Fecha	Nº Obs.	Fecha	Nº Obs.	Fecha	Nº Obs.	Fecha	Nº Obs.
03/01/94	12	15/03/9	20	27/05/9	19	08/08/9	16	20/10/9	19
04/01/94	16	16/03/9	20	30/05/9	19	09/08/9	16	21/10/9	19
05/01/94	17	17/03/9	22	31/05/9	17	10/08/9	16	24/10/9	20
07/01/94	17	18/03/9	20	01/06/9	18	11/08/9	17	25/10/9	15
10/01/94	18	21/03/9	20	02/06/9	17	12/08/9	21	26/10/9	18
11/01/94	20	22/03/9	17	03/06/9	19	16/08/9	19	27/10/9	19
12/01/94	20	23/03/9	18	06/06/9	21	17/08/9	18	28/10/9	17
13/01/94	19	24/03/9	19	07/06/9	20	18/08/9	19	31/10/9	15
14/01/94	20	25/03/9	19	08/06/9	20	19/08/9	18	02/11/9	20
17/01/94	16	28/03/9	18	09/06/9	20	22/08/9	18	03/11/9	17
18/01/94	19	29/03/9	18	10/06/9	21	23/08/9	18	04/11/9	17
19/01/94	19	30/03/9	19	13/06/9	21	24/08/9	19	07/11/9	18
20/01/94	19	04/04/9	14	14/06/9	18	25/08/9	19	08/11/9	19
21/01/94	20	05/04/9	16	15/06/9	18	26/08/9	18	10/11/9	18
24/01/94	19	06/04/9	20	16/06/9	19	29/08/9	15	11/11/9	20
25/01/94	17	07/04/9	19	17/06/9	21	30/08/9	17	14/11/9	20
26/01/94	18	08/04/9	19	20/06/9	17	31/08/9	17	15/11/9	20
27/01/94	18	11/04/9	20	21/06/9	19	01/09/9	17	16/11/9	22
28/01/94	20	12/04/9	17	22/06/9	18	02/09/9	15	17/11/9	21
31/01/94	19	13/04/9	20	23/06/9	19	05/09/9	16	18/11/9	19
01/02/94	18	14/04/9	18	24/06/9	19	06/09/9	19	21/11/9	18
02/02/94	22	15/04/9	20	27/06/9	18	07/09/9	20	22/11/9	18
03/02/94	20	18/04/9	18	28/06/9	18	08/09/9	17	23/11/9	20
04/02/94	16	19/04/9	20	29/06/9	20	12/09/9	18	24/11/9	19
07/02/94	17	20/04/9	17	30/06/9	18	13/09/9	19	25/11/9	23
08/02/94	21	21/04/9	19	01/07/9	14	14/09/9	22	28/11/9	19
09/02/94	19	22/04/9	20	04/07/9	18	15/09/9	18	29/11/9	18
10/02/94	19	25/04/9	17	05/07/9	16	16/09/9	20	30/11/9	21
11/02/94	18	26/04/9	20	06/07/9	20	19/09/9	20	01/12/9	20
14/02/94	18	27/04/9	19	07/07/9	21	20/09/9	18	02/12/9	20

15/02/94	20	28/04/9	16	08/07/9	20	21/09/9	20	05/12/9	18
16/02/94	20	29/04/9	20	11/07/9	19	22/09/9	19	07/12/9	20
17/02/94	19	03/05/9	18	12/07/9	20	23/09/9	19	09/12/9	19
18/02/94	19	04/05/9	22	13/07/9	20	26/09/9	17	12/12/9	20
21/02/94	21	05/05/9	18	14/07/9	20	27/09/9	20	13/12/9	21
22/02/94	18	06/05/9	20	15/07/9	20	28/09/9	18	14/12/9	21
23/02/94	17	09/05/9	20	18/07/9	17	29/09/9	20	15/12/9	19
24/02/94	21	10/05/9	19	19/07/9	19	30/09/9	19	16/12/9	17
25/02/94	17	11/05/9	18	20/07/9	20	03/10/9	17	19/12/9	17
28/02/94	18	12/05/9	20	21/07/9	18	04/10/9	19	20/12/9	20
01/03/94	16	13/05/9	18	22/07/9	18	05/10/9	17	21/12/9	20
02/03/94	19	16/05/9	19	26/07/9	16	06/10/9	20	22/12/9	20
03/03/94	16	17/05/9	17	27/07/9	18	07/10/9	17	23/12/9	20
04/03/94	19	18/05/9	19	28/07/9	19	10/10/9	19	27/12/9	18
07/03/94	20	19/05/9	17	29/07/9	20	11/10/9	19	28/12/9	19
08/03/94	19	20/05/9	21	01/08/9	17	13/10/9	20	29/12/9	19
09/03/94	19	23/05/9	18	02/08/9	18	14/10/9	18	30/12/9	18
10/03/94	17	24/05/9	18	03/08/9	17	17/10/9	18		
11/03/94	21	25/05/9	19	04/08/9	17	18/10/9	17		
14/03/94	20	26/05/9	20	05/08/9	18	19/10/9	19		
Fecha	N° Obs.								
02/01/95	16	14/03/9	19	31/05/9	20	09/08/9	18	20/10/9	16
03/01/95	18	15/03/9	20	01/06/9	20	10/08/9	19	23/10/9	20
04/01/95	20	16/03/9	21	02/06/9	18	11/08/9	18	24/10/9	22
05/01/95	20	17/03/9	18	05/06/9	18	14/08/9	17	25/10/9	20
09/01/95	20	21/03/9	19	06/06/9	20	16/08/9	15	26/10/9	19
10/01/95	21	22/03/9	20	07/06/9	21	17/08/9	15	27/10/9	21
11/01/95	20	23/03/9	22	08/06/9	20	18/08/9	14	30/10/9	20
12/01/95	20	24/03/9	20	09/06/9	21	21/08/9	16	31/10/9	20
13/01/95	20	27/03/9	20	12/06/9	19	22/08/9	19	02/11/9	20
16/01/95	19	28/03/9	20	13/06/9	21	23/08/9	19	03/11/9	20
17/01/95	20	29/03/9	20	14/06/9	21	24/08/9	20	06/11/9	19
18/01/95	21	30/03/9	19	15/06/9	20	25/08/9	20	07/11/9	18
19/01/95	21	31/03/9	20	16/06/9	19	28/08/9	19	08/11/9	19
20/01/95	21	03/04/9	20	19/06/9	19	29/08/9	15	10/11/9	22
23/01/95	18	04/04/9	22	20/06/9	17	30/08/9	19	13/11/9	20
24/01/95	21	05/04/9	20	21/06/9	19	31/08/9	16	14/11/9	18

25/01/95	20	06/04/9	20	22/06/9	19	01/09/9	19	15/11/9	22
26/01/95	20	07/04/9	20	23/06/9	21	04/09/9	16	16/11/9	22
27/01/95	20	10/04/9	18	26/06/9	19	05/09/9	18	17/11/9	21
30/01/95	21	11/04/9	19	27/06/9	19	06/09/9	20	20/11/9	19
31/01/95	20	12/04/9	20	28/06/9	18	07/09/9	20	21/11/9	22
01/02/95	20	17/04/9	15	29/06/9	21	08/09/9	21	22/11/9	21
02/02/95	19	18/04/9	18	30/06/9	19	11/09/9	19	23/11/9	21
03/02/95	20	19/04/9	20	03/07/9	16	12/09/9	21	24/11/9	17
06/02/95	19	20/04/9	20	04/07/9	15	13/09/9	20	27/11/9	21
07/02/95	20	21/04/9	21	05/07/9	19	14/09/9	23	28/11/9	21
08/02/95	19	24/04/9	21	06/07/9	21	15/09/9	22	29/11/9	22
09/02/95	19	25/04/9	20	07/07/9	21	18/09/9	18	30/11/9	20
10/02/95	20	26/04/9	20	10/07/9	20	19/09/9	20	01/12/9	21
13/02/95	20	27/04/9	18	11/07/9	20	20/09/9	20	04/12/9	22
14/02/95	20	28/04/9	20	12/07/9	19	21/09/9	19	05/12/9	19
15/02/95	21	03/05/9	19	13/07/9	19	22/09/9	20	07/12/9	21
16/02/95	17	04/05/9	19	14/07/9	20	25/09/9	21	11/12/9	19
17/02/95	20	05/05/9	20	17/07/9	18	26/09/9	22	12/12/9	21
20/02/95	18	08/05/9	19	18/07/9	21	27/09/9	22	13/12/9	24
21/02/95	19	09/05/9	19	19/07/9	19	28/09/9	18	14/12/9	23
22/02/95	19	10/05/9	20	20/07/9	20	29/09/9	20	15/12/9	23
23/02/95	18	11/05/9	21	21/07/9	18	02/10/9	18	18/12/9	22
24/02/95	19	12/05/9	20	24/07/9	19	03/10/9	20	19/12/9	23
27/02/95	20	16/05/9	20	25/07/9	19	04/10/9	19	20/12/9	22
28/02/95	21	17/05/9	22	26/07/9	16	05/10/9	19	21/12/9	23
01/03/95	19	18/05/9	21	27/07/9	20	06/10/9	18	22/12/9	22
02/03/95	19	19/05/9	19	28/07/9	19	09/10/9	17	26/12/9	19
03/03/95	21	22/05/9	21	31/07/9	16	10/10/9	16	27/12/9	20
06/03/95	20	23/05/9	19	01/08/9	15	11/10/9	16	28/12/9	22
07/03/95	20	24/05/9	19	02/08/9	19	13/10/9	19	29/12/9	22
08/03/95	19	25/05/9	19	03/08/9	18	16/10/9	19		
09/03/95	22	26/05/9	19	04/08/9	20	17/10/9	19		
10/03/95	19	29/05/9	20	07/08/9	16	18/10/9	20		
13/03/95	14	30/05/9	17	08/08/9	19	19/10/9	19		

Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.	Fecha	N° Obs.
02/01/96	17	13/03/9	22	31/05/9	22	12/08/9	20	23/10/9	22

03/01/96	21	14/03/9	23	03/06/9	20	13/08/9	20	24/10/9	24
04/01/96	21	15/03/9	22	04/06/9	23	14/08/9	21	25/10/9	20
05/01/96	21	18/03/9	23	05/06/9	21	16/08/9	20	28/10/9	22
08/01/96	21	20/03/9	22	06/06/9	20	19/08/9	16	29/10/9	22
09/01/96	20	21/03/9	22	07/06/9	23	20/08/9	17	30/10/9	21
10/01/96	22	22/03/9	24	10/06/9	22	21/08/9	21	31/10/9	20
11/01/96	22	25/03/9	21	11/06/9	20	22/08/9	20	04/11/9	19
12/01/96	23	26/03/9	20	12/06/9	21	23/08/9	20	05/11/9	20
15/01/96	21	27/03/9	22	13/06/9	22	26/08/9	23	06/11/9	22
16/01/96	24	28/03/9	23	14/06/9	22	27/08/9	17	07/11/9	23
17/01/96	21	29/03/9	19	17/06/9	21	28/08/9	21	08/11/9	23
18/01/96	21	01/04/9	20	18/06/9	20	29/08/9	19	11/11/9	23
19/01/96	21	02/04/9	20	19/06/9	20	30/08/9	19	12/11/9	23
22/01/96	19	03/04/9	24	20/06/9	22	02/09/9	19	13/11/9	23
23/01/96	18	08/04/9	24	21/06/9	22	03/09/9	20	14/11/9	24
24/01/96	22	09/04/9	21	24/06/9	22	04/09/9	18	15/11/9	19
25/01/96	20	10/04/9	22	25/06/9	20	05/09/9	22	18/11/9	19
26/01/96	18	11/04/9	21	26/06/9	22	06/09/9	21	19/11/9	20
29/01/96	21	12/04/9	21	27/06/9	20	09/09/9	22	20/11/9	24
30/01/96	20	15/04/9	22	28/06/9	22	10/09/9	21	21/11/9	22
31/01/96	20	16/04/9	23	01/07/9	21	11/09/9	22	22/11/9	21
01/02/96	19	17/04/9	24	02/07/9	20	12/09/9	20	25/11/9	22
02/02/96	19	18/04/9	21	03/07/9	21	13/09/9	21	26/11/9	21
05/02/96	20	19/04/9	22	04/07/9	19	16/09/9	22	27/11/9	22
06/02/96	20	22/04/9	20	05/07/9	20	17/09/9	20	28/11/9	23
07/02/96	19	23/04/9	24	08/07/9	24	18/09/9	22	29/11/9	21
08/02/96	20	24/04/9	20	09/07/9	22	19/09/9	23	02/12/9	22
09/02/96	19	25/04/9	21	10/07/9	21	20/09/9	22	03/12/9	23
12/02/96	20	26/04/9	21	11/07/9	22	23/09/9	18	04/12/9	25
13/02/96	23	29/04/9	20	12/07/9	21	24/09/9	22	05/12/9	22
14/02/96	22	30/04/9	19	15/07/9	21	25/09/9	22	09/12/9	24
15/02/96	18	03/05/9	21	16/07/9	21	26/09/9	24	10/12/9	22
16/02/96	20	06/05/9	21	17/07/9	23	27/09/9	20	11/12/9	22
19/02/96	17	07/05/9	23	18/07/9	22	30/09/9	20	12/12/9	25
20/02/96	20	08/05/9	19	19/07/9	19	01/10/9	21	13/12/9	22
21/02/96	19	09/05/9	20	22/07/9	20	02/10/9	21	16/12/9	22
22/02/96	21	10/05/9	20	23/07/9	20	03/10/9	21	17/12/9	24

23/02/96	20	13/05/9	20	24/07/9	22	04/10/9	21	18/12/9	26
26/02/96	19	14/05/9	22	25/07/9	21	07/10/9	20	19/12/9	23
27/02/96	19	16/05/9	17	26/07/9	21	08/10/9	21	20/12/9	24
28/02/96	19	17/05/9	21	29/07/9	21	09/10/9	22	23/12/9	21
29/02/96	21	20/05/9	20	30/07/9	23	10/10/9	23	24/12/9	22
01/03/96	17	21/05/9	19	31/07/9	21	11/10/9	21	26/12/9	10
04/03/96	20	22/05/9	22	01/08/9	21	14/10/9	21	27/12/9	19
05/03/96	19	23/05/9	18	02/08/9	23	15/10/9	20	30/12/9	21
06/03/96	20	24/05/9	18	05/08/9	17	16/10/9	21	31/12/9	21
07/03/96	20	27/05/9	16	06/08/9	21	17/10/9	25		
08/03/96	23	28/05/9	20	07/08/9	22	18/10/9	24		
11/03/96	22	29/05/9	21	08/08/9	19	21/10/9	21		
12/03/96	22	30/05/9	19	09/08/9	19	22/10/9	20		

Tabla A2.1: Estadísticos descriptivos del nº de observaciones

	Media	Desviación	Máximo	Mínimo	Nº Muestras
1991	6'40	1'48	10	4	242
1992	10'81	1'80	15	5	250
1993	15'13	1'99	20	10	250
1994	18'66	1'59	23	12	247
1995	19'51	1'71	24	14	246
1996	20'95	1'85	26	10 ¹	251

Tabla A2.2: Valores máximos y mínimos del valor, media y desviación de la variable dependiente¹ Corresponde al 26/12/1996.

	Precio		Media		Desviación	
	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
1991	119	99	112	103	6'56	1'73
1992	119	83'9	113	96'5	6'57	2'29
1993	129	93	116	104	8'15	2'21
1994	133	81'6	116	99	10'2	6'02
1995	119	73	107	97	10'6	5'87
1996	133	86'7	117	104	9'06	4'51

ANEXO 3: FUNCIONES EMPLEADAS

MCCULLOCH (1975):

- **Un subintervalo (m=3 o 2):**

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\hspace{10em}} & \\ \mathbf{0}=\mathbf{d}_1 & & \mathbf{d}_2=\mathbf{T}_N \end{array}$$

$m=2:$

$$g_1(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6d_2}$$

$$g_2(t) = t$$

$m=3:$

$$g_1(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6d_2}$$

$$g_2(t) = \frac{t^3}{6d_2}$$

$$g_3(t) = t$$

- **Dos subintervalos (m=4):**

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\hspace{10em}} & \\ \mathbf{0}=\mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3=\mathbf{T}_N \end{array}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ d_2 \left[\frac{3t-d_2}{6} \right], & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{d_2^2}{6} + \frac{d_2(t-d_2) + (t-d_2)^2}{2} - \frac{(t-d_2)^3}{6(d_3-d_2)}, & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} 0, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{(t-d_2)^3}{6(d_3-d_2)}, & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_4(t) = t, \quad t \geq d_1$$

• **Tres subintervalos (m=5):**

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4 = \mathbf{T}_N \\
 g_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ d_2 \left[\frac{3t - d_2}{6} \right], & t \geq d_2 \end{cases} \\
 g_2(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{d_2^2}{6} + \frac{d_2(t - d_2) + (t - d_2)^2}{2} - \frac{(t - d_2)^3}{6(d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ d_3 \left[\frac{3t - d_3 - d_2}{6} \right], & t \geq d_3 \end{cases} \\
 g_3(t) = \begin{cases} 0, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{(t - d_2)^3}{6(d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(d_3 - d_2)^2}{6} + \frac{(d_3 - d_2)(t - d_3) + (t - d_3)^2}{2} - \frac{(t - d_3)^3}{6(d_4 - d_3)}, & t \geq d_3 \end{cases} \\
 g_4(t) = \begin{cases} 0, & d_1 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(t - d_3)^3}{6(d_4 - d_3)}, & t \geq d_3 \end{cases} \\
 g_5(t) = t \quad t^3 d_1
 \end{array}$$

SCHAEFER (1981):

$x\hat{I} [0, 1); x = 1 - e^{-t}$

• **m = 2:**

$$g_1(x) = -x + \frac{x^2}{2}$$

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{2}$$

- **m=3:**

$$g_1(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$g_3(x) = -\frac{x^3}{3}$$

- **m=4:**

$$g_1(x) = -x + \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{4}$$

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$g_3(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

$$g_4(x) = -\frac{x^4}{4}$$

- **m=5:**

$$g_1(x) = -x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - \frac{x^5}{5}$$

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$g_3(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}$$

$$g_4(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$g_5(x) = -\frac{x^5}{5}$$

SHEA (1984):

- **Un subintervalo:**

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}} \\ \mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \qquad \qquad \qquad \mathbf{d}_2 = \mathbf{T}_N \\ g_1(t) = t - \frac{t^3}{6d_2^2} \\ g_2(t) = t^2 - \frac{2t^3}{3d_2} \end{array}$$

- **Dos subintervalos:**

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}} \\ \mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \qquad \mathbf{d}_2 \qquad \mathbf{d}_3 = \mathbf{T}_N \\ g_1(t) = \begin{cases} t, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ t - \frac{(t-d_2)^3}{6(d_3-d_2)^2}, & t \geq d_2 \end{cases} \\ g_2(t) = \begin{cases} t^2, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ t^2 + \frac{(d_2-2d_3)(t-d_2)^3}{3(d_3-d_2)^2}, & t \geq d_2 \end{cases} \\ g_3(t) = \begin{cases} t^3, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ (d_2^3 - 3d_2^2t + 3d_2t^2) \frac{(3d_2^2 - 4d_2d_3)(t-d_2)^3}{2(d_3-d_2)^2}, & t \geq d_2 \end{cases} \end{array}$$

- **Tres subintervalos:**

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}} \\ \mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \qquad \mathbf{d}_2 \qquad \mathbf{d}_3 \qquad \mathbf{d}_4 = \mathbf{T}_N \\ g_1(t) = \begin{cases} t, & d_1 \leq t \leq d_3 \\ t - \frac{(t-d_3)^3}{6(d_4-d_3)^2}, & t \geq d_3 \end{cases} \end{array}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} t^2, & d_1 \leq t \leq d_3 \\ t^2 + \frac{(3d_3 - 2d_4)(t - d_3)^3}{6(d_4 - d_3)^2}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} t^3, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ (d_2^3 - 3d_2^2t + 3d_2t^2), & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(6d_2d_3 - 4d_2d_4 - d_2^2)(t - d_3)^3}{2(d_4 - d_3)^2}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

$$g_4(t) = \begin{cases} 0, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ (t - d_2)^3, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(5d_3^2 - 6d_2d_3 + d_2^2 - 4d_3d_4 + 4d_2d_4)(t - d_3)^3}{4(d_4 - d_3)^2}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

STEELEY (1991):

- **Un subintervalo:**

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\hspace{10em}} & \\ & \mathbf{0 = d_1} & \mathbf{d_2 = T_N} \\ g_1(t) & = & \frac{(d_2 - t)^3}{d_2^3} \\ g_2(t) & = & \frac{3t(d_2 - t)^2}{d_2^3} \\ g_3(t) & = & \frac{3t^2(d_2 - t)}{d_2^3} \\ g_4(t) & = & \frac{t^3}{d_2^3} \end{array}$$

- **Dos subintervalos:**



$$\mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{T}_N$$

$$g_1(t) = \frac{(d_2 - t)^3}{d_2^3}, \quad d_1 \leq t \leq d_2$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{t(d_2 - t)^2}{d_2^3} + \frac{t(d_3 - t)(d_2 - t)}{d_3 d_2^2} + \frac{t(d_3 - t)^2}{d_3^2 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{(d_3 - t)^3}{d_3^2 (d_3 - d_2)}, & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} \frac{t^2(d_2 - t)}{d_3 d_2^2} + \frac{2t^2(d_3 - t)}{d_3^2 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{2t(d_3 - t)^2}{d_3^2 (d_3 - d_2)} + \frac{(d_3 - t)^2(t - d_2)}{d_3 (d_3 - d_2)^2}, & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_4(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{d_3^2 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{t^2(d_3 - t)}{d_3^2 (d_3 - d_2)} + \frac{t(t - d_2)(d_3 - t)}{d_3 (d_3 - d_2)^2} + \frac{(d_3 - t)(t - d_2)^2}{(d_3 - d_2)^3}, & t \geq d_2 \end{cases}$$

$$g_5(t) = \frac{(t - d_2)^3}{(d_3 - d_2)^3}, \quad t \geq d_2$$

- **Tres subintervalos:**

$$\mathbf{0} = \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4 = \mathbf{T}_N$$

$$g_1(t) = \frac{(d_2 - t)^3}{d_2^3}, \quad d_1 \leq t \leq d_2$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{t(d_2 - t)^2}{d_2^3} + \frac{t(d_3 - t)(d_2 - t)}{d_3 d_2^2} + \frac{t(d_3 - t)^2}{d_3^2 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{(d_3 - t)^3}{d_3^2 (d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} \frac{t^2(d_2 - t)}{d_3 d_2^2} + \frac{t^2(d_3 - t)}{d_3^2 d_2} + \frac{t^2(d_4 - t)}{d_4 d_3 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{t(d_3 - t)^2}{d_3^2 (d_3 - d_2)} + \frac{(d_4 - t)^2 (t - d_2)}{d_4 (d_4 - d_2) (d_3 - d_2)} + \frac{(d_4 - t)(d_3 - t)t}{d_4 d_3 (d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(d_4 - t)^3}{d_4 (d_4 - d_2) (d_4 - d_3)}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

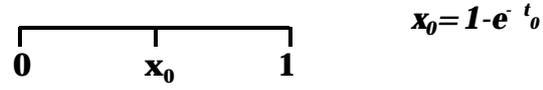
$$g_4(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{d_4 d_3 d_2}, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ \frac{t^2(d_3 - t)}{d_4 d_3 (d_3 - d_2)} + \frac{t(t - d_2)(d_4 - t)}{d_4 (d_4 - d_2) (d_3 - d_2)} + \frac{(d_4 - t)(t - d_2)^2}{(d_4 - d_2)^2 (d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{t(d_4 - t)^2}{d_4 (d_4 - d_2) (d_4 - d_3)} + \frac{(t - d_2)(d_4 - t)^2}{(d_4 - d_2)^2 (d_4 - d_3)} + \frac{(t - d_3)(d_4 - t)^2}{(d_4 - d_2)(d_4 - d_3)^2}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

$$g_5(t) = \begin{cases} \frac{(t - d_2)^3}{(d_4 - d_2)^2 (d_3 - d_2)}, & d_2 \leq t \leq d_3 \\ \frac{(t - d_2)^2 (d_4 - t)}{(d_4 - d_2)^2 (d_4 - d_3)} + \frac{(t - d_2)(t - d_3)(d_4 - t)}{(d_4 - d_2)(d_4 - d_3)^2} + \frac{(t - d_3)^2 (d_4 - t)}{(d_4 - d_3)^3}, & t \geq d_3 \end{cases}$$

$$g_6(t) = \frac{(t - d_3)^3}{(d_4 - d_3)^3}, \quad d_3 \leq t \leq d_4$$

CONTRERAS - NAVARRO (1993):

- **Dos subintervalos:**



$$\begin{aligned}
 g_1(x(t)) &= -x + x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\
 g_2(x(t)) &= \begin{cases} (x_0^3 - 3x_0^2 - 1)x + 3x_0x^2, & 0 \leq x \leq x_0 \\ -x_0^3 + (x_0^3 - 1)x + x^3, & x_0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 g_3(x(t)) &= \begin{cases} (-x_0^3 + 3x_0^2)x - 3x_0x^2 + x^3, & 0 \leq x \leq x_0 \\ x_0^3 - x_0^3x, & x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**ANEXO 4: TABLAS DE RESULTADOS (ERRORES)
COHEN – KRAMER – WAUGH (1966)**

Tabla I

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01364	0.05983	0.13671	1.58967	0.00000
	EA	0.11678	0.16981	0.17612	1.26082	0.00015
1992	EC	0.04696	0.10947	0.18514	2.44817	0.00000
	EA	0.21670	0.25763	0.20763	1.56466	0.00026
1993	EC	0.37524	1.15579	2.25663	21.39614	0.00000
	EA	0.61257	0.79556	0.72319	4.62560	0.00029
1994	EC	0.05885	0.19762	0.37200	4.00335	0.00000
	EA	0.24259	0.32907	0.29891	2.00084	0.00001
1995	EC	0.04424	0.34574	1.39108	19.85839	0.00000
	EA	0.21033	0.33380	0.48412	4.45628	0.00002
1995*	EC	0.00536	0.26807	1.23144	17.77706	0.00000
	EA	0.07324	0.22384	0.46692	4.21629	0.00000
1996	EC	0.02595	0.19162	0.65750	7.77796	0.00000
	EA	0.16109	0.26006	0.35216	2.78890	0.00019
1996*	EC	0.00137	0.13240	0.56207	5.80793	0.00000
	EA	0.03707	0.15538	0.32906	2.40997	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

FISHER (1966)

Tabla II

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1992	EC	0.72765	83.05212	283.1416	6214.269	0.00000
	EA	0.85302	4.38768	7.98910	78.83064	0.00038
1993	EC	1.88614	89.94058	284.84802	3941.395	0.00000
	EA	1.37337	4.84581	8.15330	62.78053	0.00040
1994	EC	1.83853	52.93024	119.12255	2058.875	0.00000
	EA	1.35592	4.30399	5.86630	45.374	0.00077

Tabla II (continuación)

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1995	EC	0.67214	31.05481	69.45919	560.92518	0.00000
	EA	0.81984	3.21886	4.54951	23.68386	0.00057
1995*	EC	0.43653	29.49677	67.36702	560.925	0.00000
	EA	0.66070	3.06558	4.48366	23.684	0.00000
1996	EC	0.45834	24.95894	104.78570	2816.197	0.00000
	EA	0.67700	2.54830	4.29751	53.06785	0.00004
1996*	EC	0.27446	23.76651	103.09109	2805.064	0.00000
	EA	0.52389	2.39424	4.24707	52.96285	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

BRADLEY – CRANE (1973)**Tabla III**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01618	0.07057	0.15352	1.84973	0.00000
	EA	0.12719	0.18335	0.19230	1.36005	0.00005
1992	EC	0.03239	0.10556	0.21997	2.64281	0.00000
	EA	0.17996	0.24055	0.21844	1.62567	0.00000
1993	EC	0.25122	1.11799	2.37124	21.692	0.00000
	EA	0.50122	0.73718	0.75809	4.65745	0.00011
1994	EC	0.05029	0.17106	0.33911	3.68314	0.00000

	EA	0.22426	0.30216	0.28245	1.91915	0.00001
1995	EC	0.03505	0.27728	1.10148	13.00961	0.00000
	EA	0.18723	0.29629	0.43535	3.60688	0.00011
1995*	EC	0.00434	0.20682	0.94960	11.47578	0.00000
	EA	0.06590	0.19577	0.41052	3.38759	0.00000
1996	EC	0.08598	0.22710	0.50081	4.56554	0.00000
	EA	0.29322	0.35597	0.31688	2.13671	0.00010
1996*	EC	0.02071	0.14453	0.41793	4.32936	0.00000
	EA	0.14390	0.23003	0.30271	2.08071	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

ECHOLS - ELLIOTT (1976)

Tabla IV

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01616	0.07823	0.19684	2.03943	0.00000
	EA	0.12714	0.18824	0.20694	1.42809	0.00006
1992	EC	0.02785	0.10205	0.23165	3.20655	0.00000
	EA	0.16687	0.23082	0.22089	1.79068	0.00004
1993	EC	0.20965	1.12981	2.37246	21.65602	0.00000
	EA	0.45787	0.73137	0.77141	4.65360	0.00050
1994	EC	0.11090	0.27434	0.43393	5.74083	0.00000
	EA	0.33301	0.40854	0.32781	2.39600	0.00016

1995	EC	0.05159	0.34295	1.25860	17.34504	0.00000
	EA	0.22713	0.35078	0.46898	4.16474	0.00000
1995*	EC	0.01280	0.26069	1.10048	15.55916	0.00000
	EA	0.11312	0.24544	0.44776	3.94451	0.00000
1996	EC	0.15142	0.31479	0.55234	7.47603	0.00000
	EA	0.38912	0.44483	0.34196	2.73423	0.00042
1996*	EC	0.05644	0.20348	0.45451	5.70234	0.00000
	EA	0.23757	0.30794	0.32966	2.38796	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

McCULLOCH (1975)

Tabla V

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.02977	0.10541	0.25946	2.83562	0.00000
	EA	0.17254	0.23040	0.22883	1.68393	0.00004
1992	EC	0.05040	0.11432	0.18374	1.86620	0.00000
	EA	0.22450	0.26579	0.20904	1.36609	0.00002
1993	EC	0.22380	0.98077	2.06225	19.97190	0.00000
	EA	0.47308	0.69102	0.70951	4.46899	0.00004
1994	EC	0.03163	0.13432	0.31471	4.09436	0.00000
	EA	0.17784	0.25660	0.26171	2.02345	0.00020

Tabla V (continuación)

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1995	EC	0.01300	0.33529	1.39651	20.30277	0.00000
	EA	0.11403	0.27519	0.50953	4.50586	0.00006
1995*	EC	0.00022	0.26699	1.23704	18.94109	0.00000
	EA	0.01497	0.18559	0.48228	4.35214	0.00000
1996	EC	0.01508	0.18963	0.69003	6.47213	0.00000
	EA	0.12280	0.23613	0.36592	2.54404	0.00004
1996*	EC	0.00009	0.13625	0.60219	6.16513	0.00000
	EA	0.00935	0.14025	0.34148	2.48297	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

SCHAEFER (1981)

Tabla VI

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.02140	0.08887	0.21945	2.29489	0.00000
	EA	0.14630	0.20563	0.21591	1.51489	0.00002
1992	EC	0.03677	0.09786	0.18904	2.50143	0.00000
	EA	0.19175	0.23779	0.20330	1.58159	0.00005
1993	EC	0.24911	1.03579	2.17342	20.01927	0.00000
	EA	0.49911	0.71624	0.72313	4.47429	0.00006
1994	EC	0.02642	0.13204	0.32623	4.15812	0.00000
	EA	0.16253	0.24855	0.26510	2.03915	0.00007

1995	EC	0.01228	0.27960	1.34619	20.33351	0.00000
	EA	0.11082	0.24061	0.47091	4.50927	0.00000
1995*	EC	0.00007	0.21944	1.18832	18.80699	0.00000
	EA	0.00866	0.15394	0.44247	4.33670	0.00000
1996	EC	0.01389	0.16732	0.66578	6.44073	0.00000
	EA	0.11785	0.21774	0.34631	2.53786	0.00013
1996*	EC	0.00002	0.11787	0.57862	6.10134	0.00000
	EA	0.00424	0.12368	0.32030	2.47009	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

VASICEK – FONG (1982). MODELIZACIÓN A (CAMBIO VARIABLE Y POLINOMIO CÚBICO)

Tabla VII

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01469	0.06578	0.14351	1.71948	0.00000
	EA	0.12120	0.17713	0.18555	1.31129	0.00011
1992	EC	0.04001	0.10576	0.19996	2.51024	0.00000
	EA	0.20003	0.24776	0.21070	1.58437	0.00003
1993	EC	0.28945	1.11526	2.36014	21.56222	0.00000
	EA	0.53801	0.75344	0.74009	4.64351	0.00034
1994	EC	0.04759	0.16420	0.33021	3.87930	0.00000
	EA	0.21815	0.29722	0.27546	1.96959	0.00007

1995	EC	0.02356	0.29958	1.34011	18.95848	0.00000
	EA	0.15349	0.27510	0.47323	4.35413	0.00001
1995*	EC	0.00145	0.23095	1.17984	16.91787	0.00000
	EA	0.03805	0.17357	0.44818	4.11313	0.00000
1996	EC	0.03990	0.19274	0.60906	7.01684	0.00000
	EA	0.19975	0.28120	0.33718	2.64893	0.00008
1996*	EC	0.00377	0.12943	0.51821	5.55277	0.00000
	EA	0.06137	0.17126	0.31641	2.35643	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

FONG - VASICEK (1982). MODELIZACIÓN B (FUNCIÓN EXPONENCIAL)

Tabla VIII

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1992	EC	0.03037	0.10562	0.24956	4.02952	0.00000
	EA	0.17426	0.23482	0.22472	2.00737	0.00014
1993	EC	0.39674	1.70641	4.38937	55.14939	0.00000
	EA	0.62987	0.89834	0.94849	7.42626	0.00027
1994	EC	0.11944	1.26991	5.65075	129.29698	0.00000
	EA	0.34561	0.63791	0.92907	11.37088	0.00003
1995	EC	0.04284	0.46962	1.54694	16.58708	0.00000
	EA	0.20698	0.39977	0.55666	4.07272	0.00007

Tabla VIII (continuación)

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1995*	EC	0.00788	0.34191	1.34738	15.29612	0.00000
	EA	0.08875	0.27531	0.51592	3.91103	0.00000
1996	EC	0.05272	0.97972	3.12385	100.94888	0.00000
	EA	0.22962	0.55578	0.81912	10.04733	0.00019
1996*	EC	0.01267	0.75957	2.73028	100.94888	0.00000
	EA	0.11256	0.42321	0.76195	10.04733	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: $\$ \text{Error } \hat{U} P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

FONG - VASICEK (1982) MODELIZACIÓN C (CONTRERAS - NAVARRO (1993))

Tabla IX

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01659	0.07188	0.14623	1.69137	0.00000
	EA	0.12880	0.18823	0.19099	1.30053	0.00008
1992	EC	0.04050	0.13811	0.30152	3.67458	0.00000
	EA	0.20124	0.26973	0.25569	1.91692	0.00041
1993	EC	0.23241	1.13781	2.31329	21.66852	0.00000
	EA	0.48209	0.75011	0.75848	4.65495	0.00003
1994	EC	0.05013	0.18894	0.37060	3.93164	0.00000
	EA	0.22390	0.31505	0.29950	1.98284	0.00038

1995	EC	0.02363	0.29460	1.23374	16.16834	0.00000
	EA	0.15373	0.28313	0.46312	4.02099	0.00001
1995*	EC	0.00190	0.22305	1.07617	14.63178	0.00000
	EA	0.04354	0.18270	0.43556	3.82515	0.00000
1996	EC	0.04104	0.20949	0.61369	5.80103	0.00000
	EA	0.20258	0.29572	0.34937	2.40853	0.00000
1996*	EC	0.00503	0.13799	0.52017	5.21006	0.00000
	EA	0.07093	0.18115	0.32434	2.28255	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error $\hat{U} P_{estimado} > P_{max}$

o $P_{estimado} < P_{min}$

CARLETON – CHAMBERS – WALDMAN (1984)**Tabla X**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01512	0.06477	0.14127	1.61069	0.00000
	EA	0.12297	0.17669	0.18323	1.26913	0.00008
1992	EC	0.04284	0.10630	0.18682	2.39038	0.00000
	EA	0.20697	0.25246	0.20635	1.54609	0.00029
1993	EC	0.29720	1.10022	2.34603	21.43873	0.00000
	EA	0.54516	0.75123	0.73213	4.63020	0.00059
1994	EC	0.06742	0.18776	0.33910	3.94941	0.00000
	EA	0.25965	0.33006	0.28077	1.98731	0.00004
1995	EC	0.03666	0.32530	1.40042	19.41711	0.00000
	EA	0.19146	0.30876	0.47960	4.40648	0.00006
1995*	EC	0.00393	0.24791	1.23952	17.35126	0.00000
	EA	0.06268	0.19727	0.45721	4.16548	0.00000
1996	EC	0.02682	0.19063	0.65367	7.99372	0.00000
	EA	0.16378	0.25785	0.35238	2.82732	0.00001
1996*	EC	0.00123	0.13164	0.55597	5.63738	0.00000
	EA	0.03507	0.15630	0.32746	2.37432	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

SHEA (1984)**Tabla XI**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.22043	0.52159	0.81796	9.23858	0.00000
	EA	0.46950	0.56873	0.44526	3.03950	0.00007
1992	EC	0.27607	1.24306	2.59898	21.51819	0.00000
	EA	0.52542	0.79047	0.78641	4.63877	0.00037
1993	EC	0.26125	1.04683	2.17685	20.92715	0.00000
	EA	0.51112	0.72925	0.71774	4.57462	0.00033
1994	EC	0.15395	0.28643	0.39727	4.11155	0.00000
	EA	0.39236	0.43153	0.31660	2.02770	0.00000

Tabla XI (continuación)

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1995	EC	0.06895	0.33996	1.31744	18.80057	0.00000
	EA	0.26258	0.36659	0.45344	4.33596	0.00050
1995*	EC	0.01760	0.25297	1.17485	17.16415	0.00000
	EA	0.13268	0.25033	0.43629	4.14296	0.00000
1996	EC	0.06631	0.25464	0.65243	7.40064	0.00000
	EA	0.25751	0.35192	0.36169	2.72041	0.00004
1996*	EC	0.01592	0.16598	0.53859	5.86814	0.00000
	EA	0.12619	0.23026	0.33613	2.42242	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{estimado} > P_{max}$

o $P_{estimado} < P_{min}$

NELSON – SIEGEL (1987)**Tabla XII**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1992	EC	0.05453	0.18463	0.48036	8.69087	0.00000
	EA	0.23352	0.30888	0.29876	2.94803	0.00045
1993	EC	0.74776	4.68551	19.09546	393.09617	0.00000
	EA	0.86473	1.35127	1.69125	19.82665	0.00025
1994	EC	0.09958	2.92419	10.05733	114.67459	0.00000
	EA	0.31556	0.91282	1.44617	10.70862	0.00011
1995	EC	0.01429	0.31753	1.22271	13.95786	0.00000
	EA	0.11955	0.27813	0.49013	3.73602	0.00014
1995*	EC	0.00042	0.24526	1.06330	12.68088	0.00000
	EA	0.02060	0.18695	0.45864	3.56102	0.00000
1996	EC	0.22612	0.40093	0.64443	5.27086	0.00000
	EA	0.47552	0.51412	0.36965	2.29583	0.00007
1996*	EC	0.10328	0.26542	0.52529	4.55988	0.00000
	EA	0.32137	0.37342	0.35496	2.13539	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

STEELEY (1991)**Tabla XIII**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
--	--	----------------	--------------	-------------------	---------------	---------------

1992	EC	0.02013	0.07113	0.15504	1.90879	0.00000
	EA	0.14187	0.19288	0.18423	1.38159	0.00000
1993	EC	0.14196	0.90830	2.02756	19.84644	0.00000
	EA	0.37677	0.63196	0.71349	4.45493	0.00013
1994	EC	0.02804	0.12828	0.31383	4.00984	0.00000
	EA	0.16744	0.24544	0.26087	2.00246	0.00004
1995	EC	0.00986	0.27035	1.31604	19.98826	0.00000
	EA	0.09929	0.23254	0.46510	4.47082	0.00004
1995*	EC	0.00003	0.21194	1.16135	19.00077	0.00000
	EA	0.00506	0.14768	0.43608	4.35899	0.00000
1996	EC	0.01097	0.15986	0.65265	6.32708	0.00000
	EA	0.10475	0.20740	0.34186	2.51537	0.00001
1996*	EC	0.00000	0.11236	0.56686	6.16356	0.00000
	EA	0.00000	0.11470	0.31499	2.48265	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

PROPUESTA I (CAMBIO DE VARIABLE EN [0,1])

Tabla XIV

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1992	EC	0.02808	0.10947	0.26341	3.45352	0.00000
	EA	0.16758	0.23452	0.23342	1.85837	0.00022

1993	EC	0.18340	1.11288	2.35352	20.59842	0.00000
	EA	0.42825	0.71525	0.77554	4.53855	0.00022
1994	EC	0.04772	0.16977	0.34469	3.94949	0.00000
	EA	0.21846	0.30036	0.28208	1.98733	0.00001
1995	EC	0.02181	0.28521	1.19814	15.69434	0.00000
	EA	0.14767	0.27642	0.45699	3.96161	0.00010
1995*	EC	0.00138	0.21549	1.04237	14.33840	0.00000
	EA	0.03713	0.17870	0.42849	3.78661	0.00000

Tabla XIV (Continuación)

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1996	EC	0.02762	0.19982	0.63032	5.74530	0.00000
	EA	0.16618	0.27225	0.35457	2.39694	0.00009
1996*	EC	0.00206	0.13237	0.53699	5.29759	0.00000
	EA	0.04536	0.16076	0.32641	2.30165	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

PROPUESTA II-A (POLINOMIOS DE LEGENDRE DE GRADO 3)

Tabla XV

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.03695	0.11353	0.25119	2.49870	0.00000

	EA	0.19222	0.24638	0.22992	1.58073	0.00011
1992	EC	0.07825	0.19857	0.37816	3.83041	0.00000
	EA	0.27973	0.33905	0.28922	1.95714	0.00015
1993	EC	0.36580	1.19529	2.29060	21.59515	0.00000
	EA	0.60482	0.80615	0.73862	4.64706	0.00047
1994	EC	0.16666	0.36619	0.71392	14.67767	0.00000
	EA	0.40824	0.47064	0.38042	3.83114	0.00003
1995	EC	0.07284	0.42411	1.44726	16.03278	0.00000
	EA	0.26989	0.40126	0.51299	4.00410	0.00008
1995*	EC	0.01590	0.32040	1.27619	14.66197	0.00000
	EA	0.12611	0.27920	0.49244	3.82910	0.00000
1996	EC	0.04337	0.22549	0.64944	11.50317	0.00000
	EA	0.20826	0.30872	0.36084	3.39163	0.00003
1996*	EC	0.00617	0.15078	0.56054	11.50317	0.00000
	EA	0.07857	0.19177	0.33767	3.39163	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{estimado} > P_{max}$

o $P_{estimado} < P_{min}$

PROPUESTA II-B (POLINOMIOS DE LEGENDRE DE GRADO 4)**Tabla XVI**

		Mediana	Media	Desviación	Máximo	Mínimo
1991	EC	0.01570	0.06881	0.14452	1.74401	0.00000
	EA	0.12530	0.18275	0.18824	1.32061	0.00003
1992	EC	0.04292	0.12841	0.26578	3.24594	0.00000
	EA	0.20718	0.26616	0.23998	1.80165	0.00004
1993	EC	0.25583	1.13060	2.32162	21.73005	0.00000
	EA	0.50579	0.75410	0.74972	4.66155	0.00001
1994	EC	0.04280	0.16548	0.35721	3.79916	0.00000
	EA	0.20688	0.29108	0.28420	1.94914	0.00005
1995	EC	0.01825	0.28534	1.26327	17.44653	0.00000
	EA	0.13508	0.26166	0.46575	4.17690	0.00011
1995*	EC	0.00061	0.22025	1.10483	15.49134	0.00000
	EA	0.02473	0.16951	0.43767	3.93590	0.00000
1996	EC	0.04316	0.20385	0.60858	5.65775	0.00000
	EA	0.20776	0.29461	0.34217	2.37860	0.00015
1996*	EC	0.00506	0.13498	0.51746	5.39449	0.00000
	EA	0.07112	0.18028	0.32015	2.32260	0.00000

EC: Errores al Cuadrado, EA: Errores Absolutos, *: \$ Error \hat{U} $P_{\text{estimado}} > P_{\text{max}}$

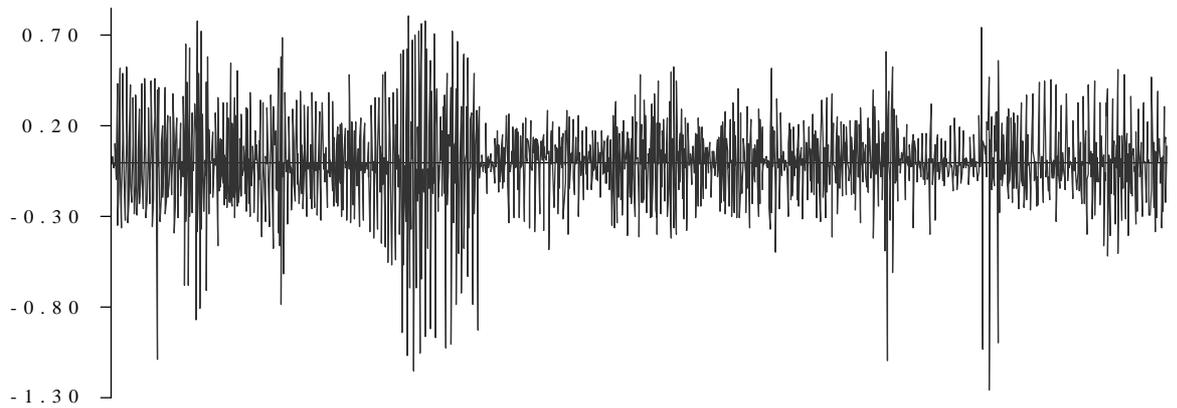
o $P_{\text{estimado}} < P_{\text{min}}$

**ANEXO 5: GRÁFICAS DE ERRORES DE ESTIMACIÓN
EN PRECIOS**

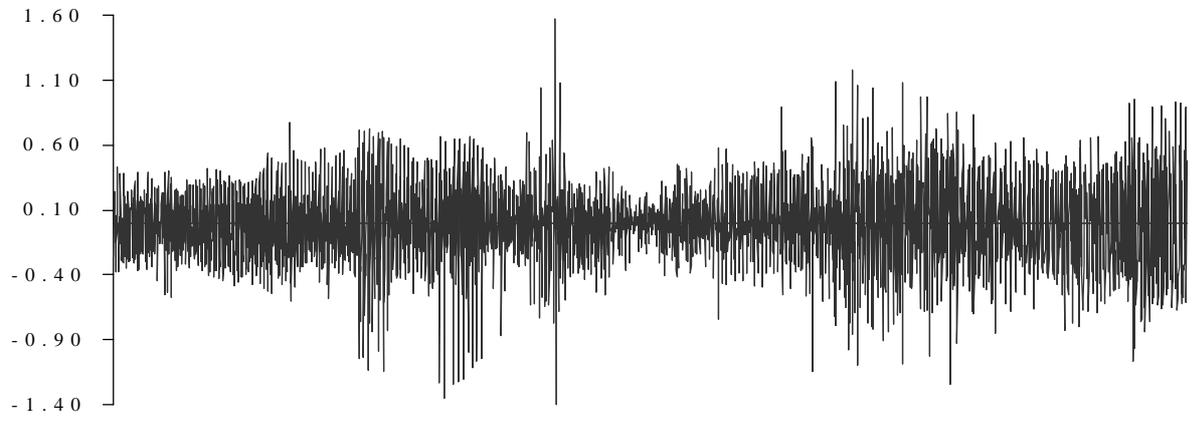
Para cada uno de los modelos y años analizados se ofrece una gráfica que representa el valor del error de estimación (diferencia entre el precio medio observado y el precio estimado) en cada uno de los títulos que forman las muestras. En el eje de abscisas se representan los diferentes títulos negociados ordenados ascendentemente por fecha de observación y plazo de vencimiento.

COHEN-KRAMER-WAUGH (1966)

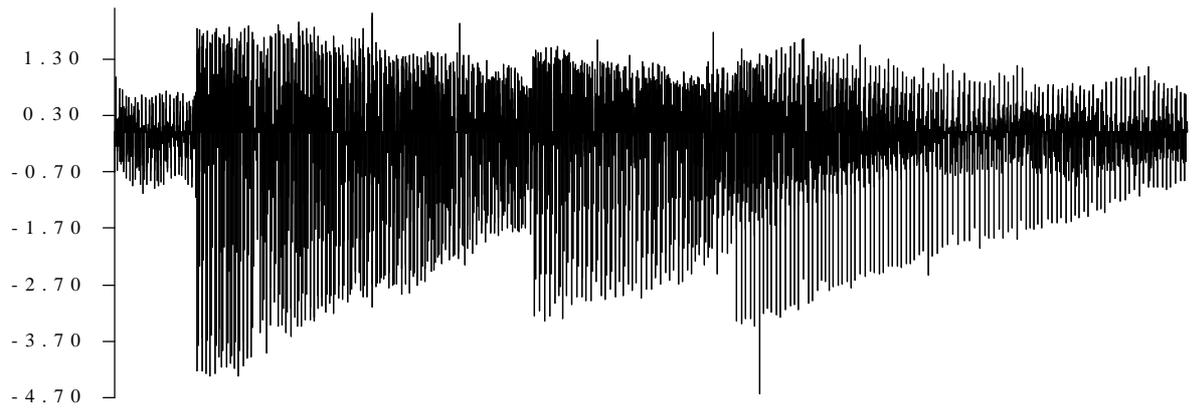
1991



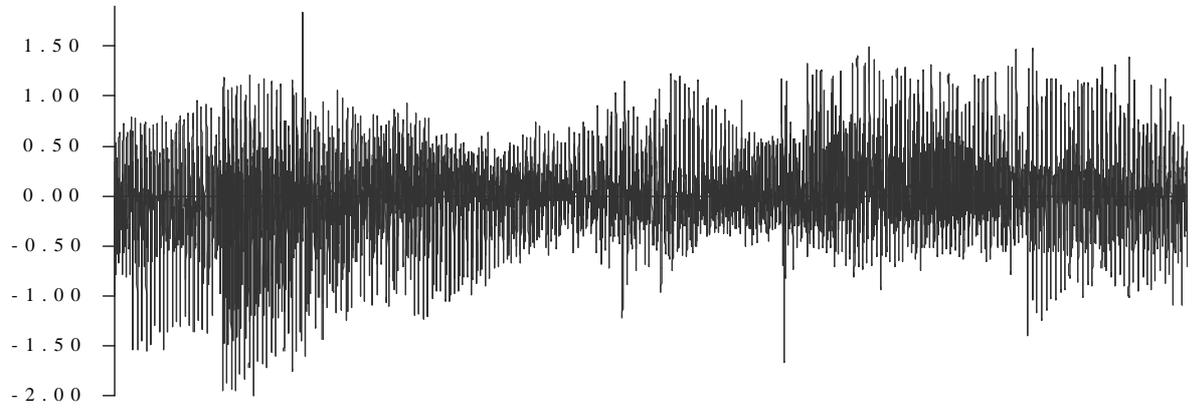
1992



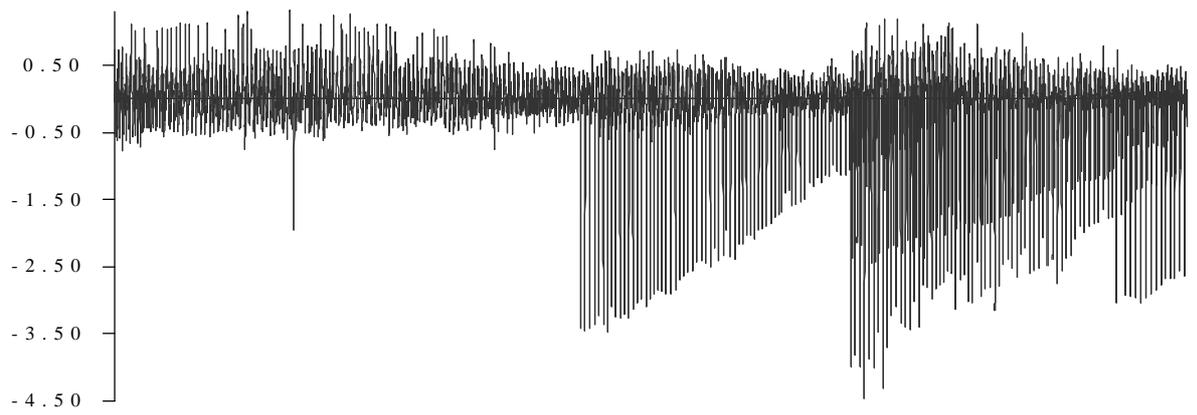
1993



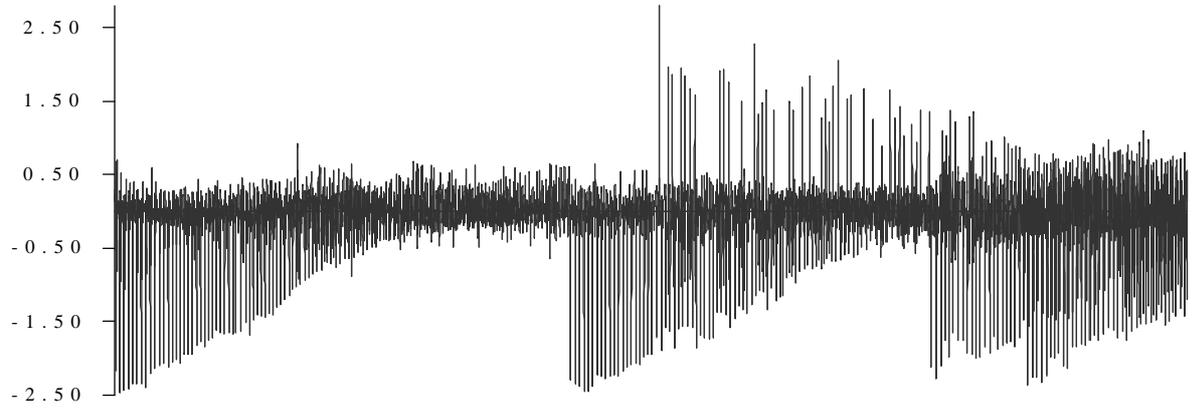
1994



1995

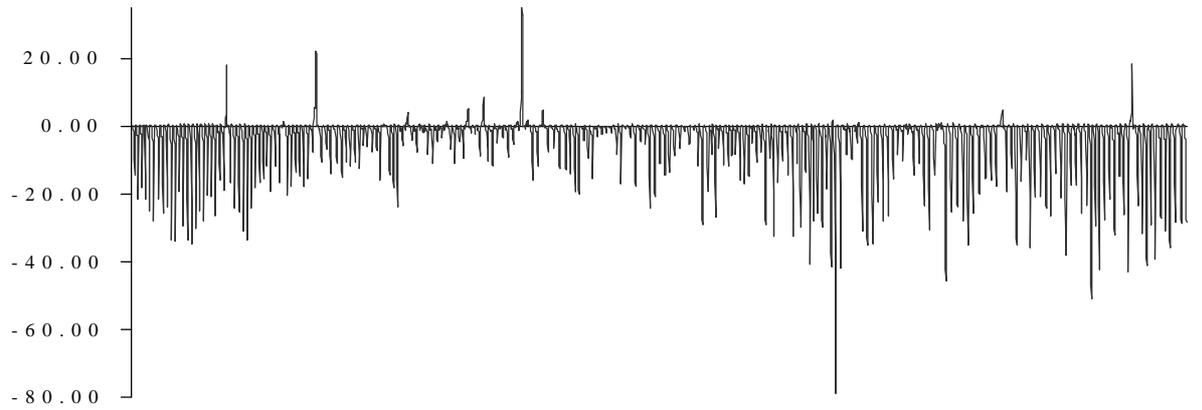


1996

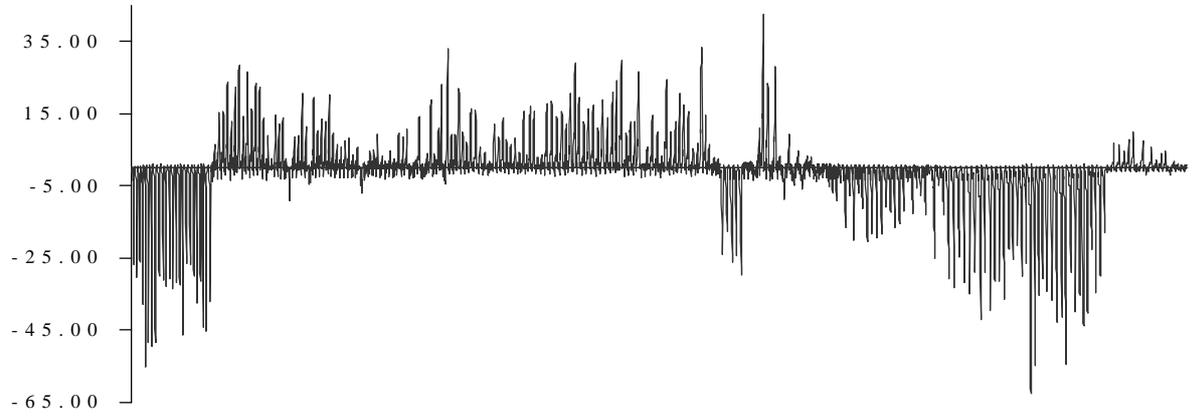


FISHER (1966)

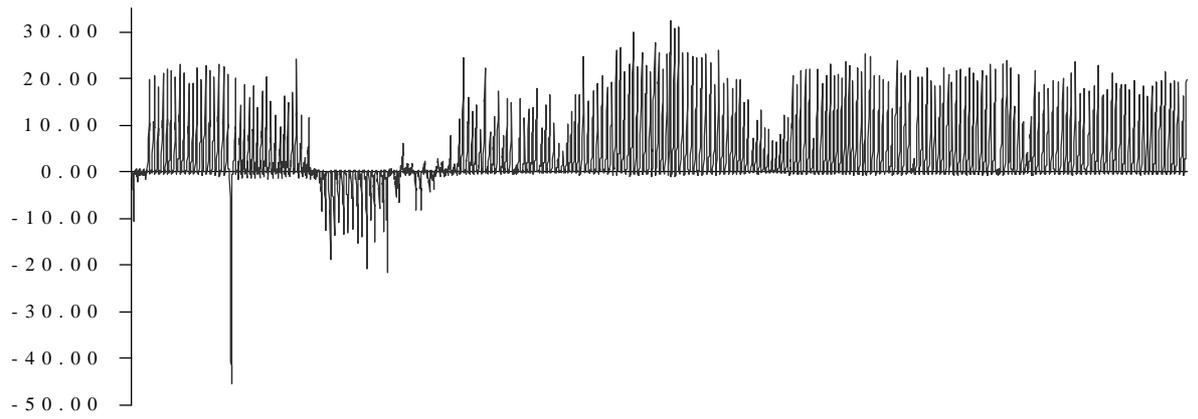
1992



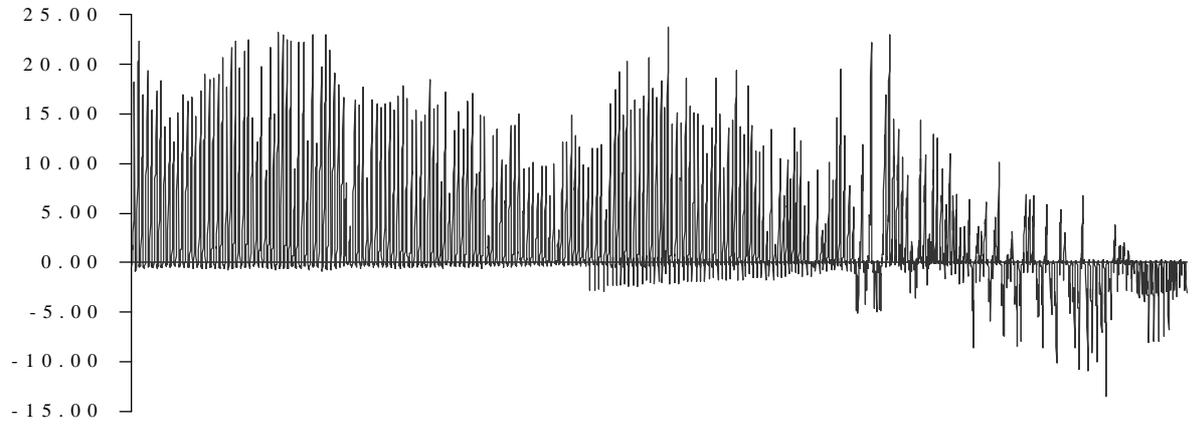
1993



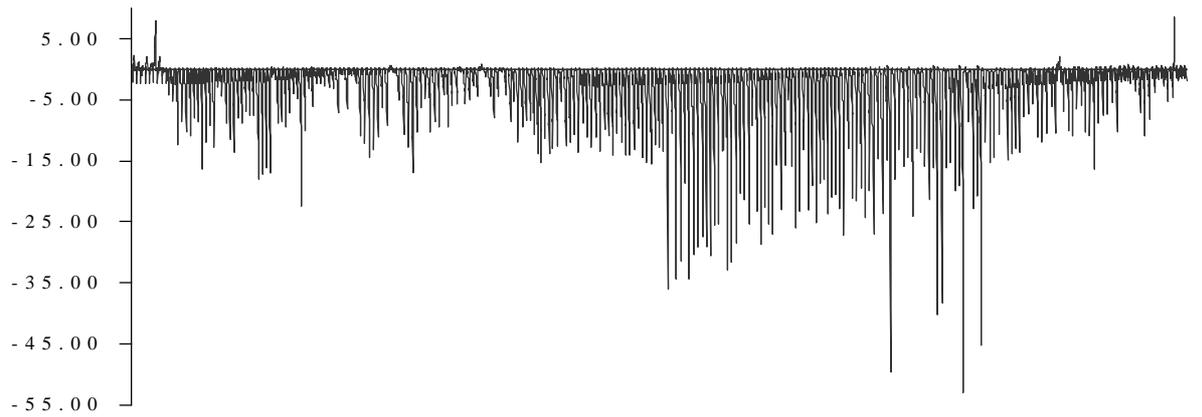
1994



1995

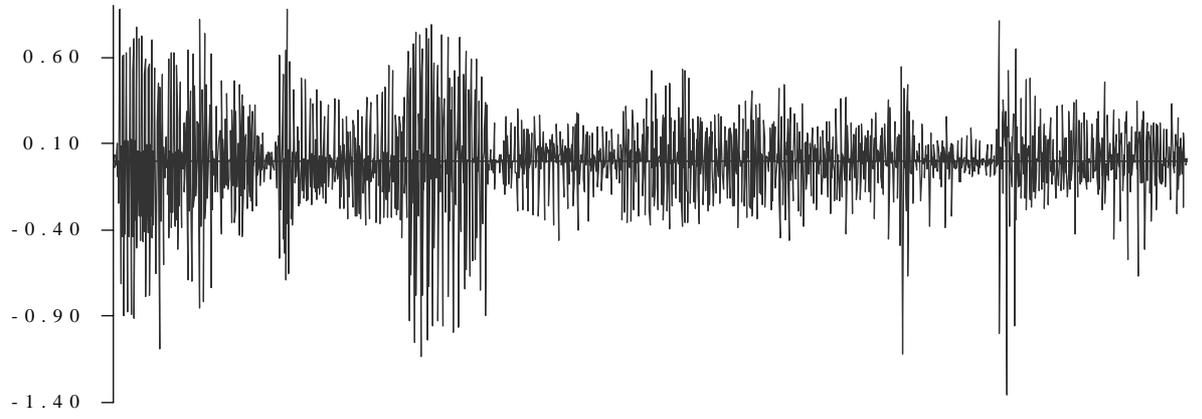


1996

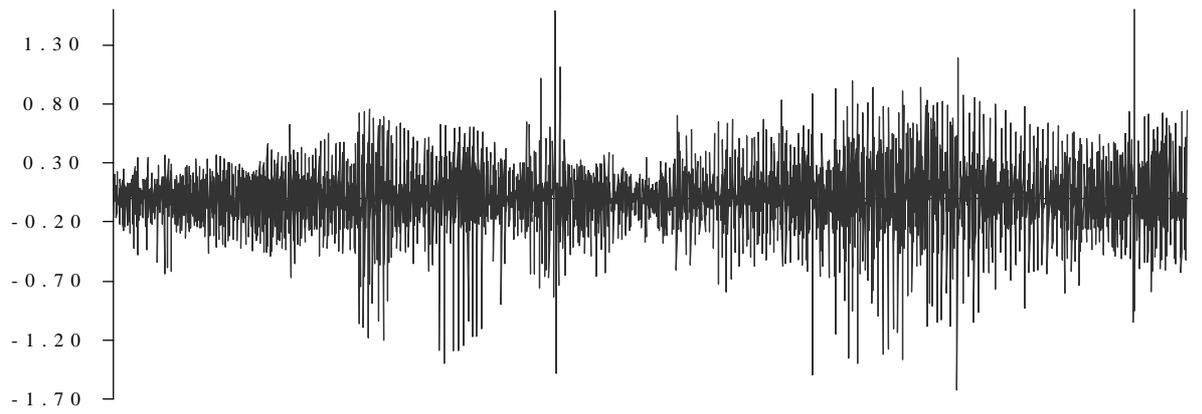


BRADLEY – CRANE (1973)

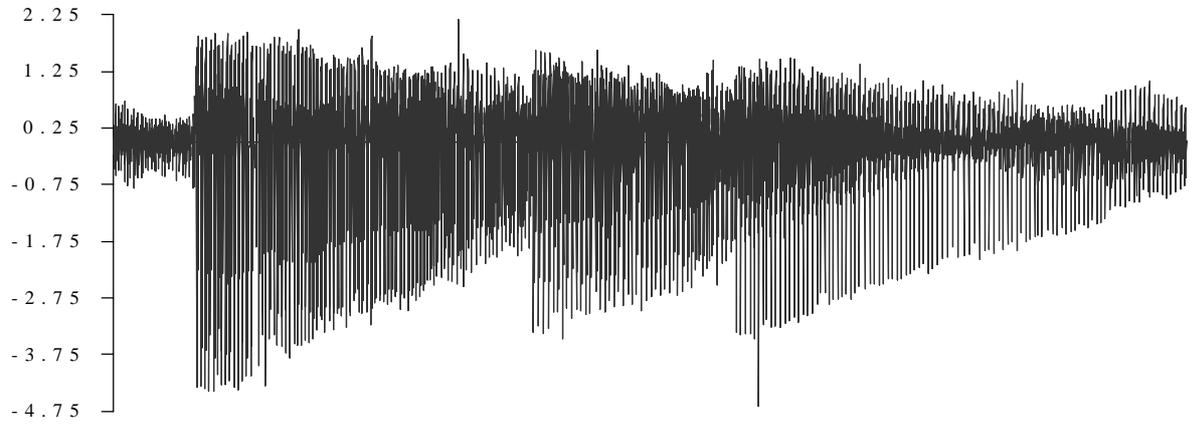
1991



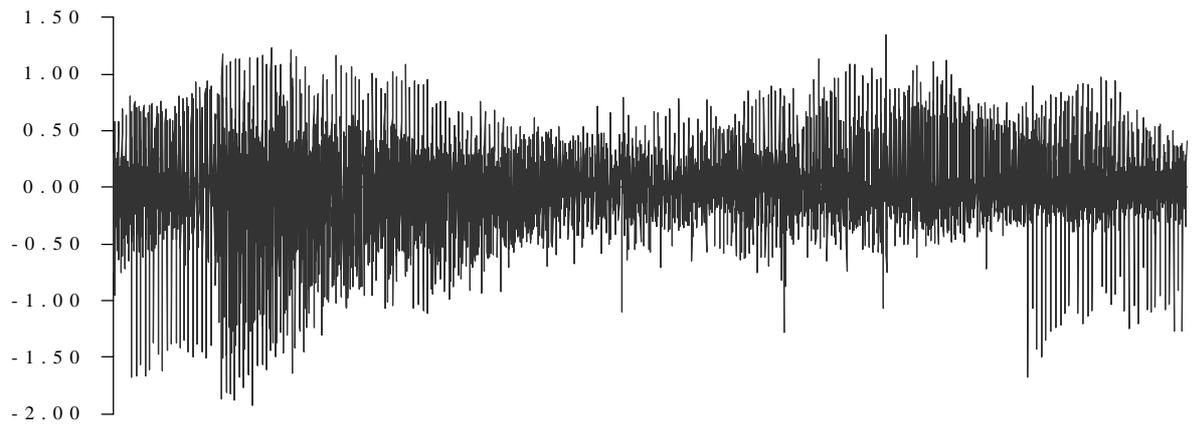
1992



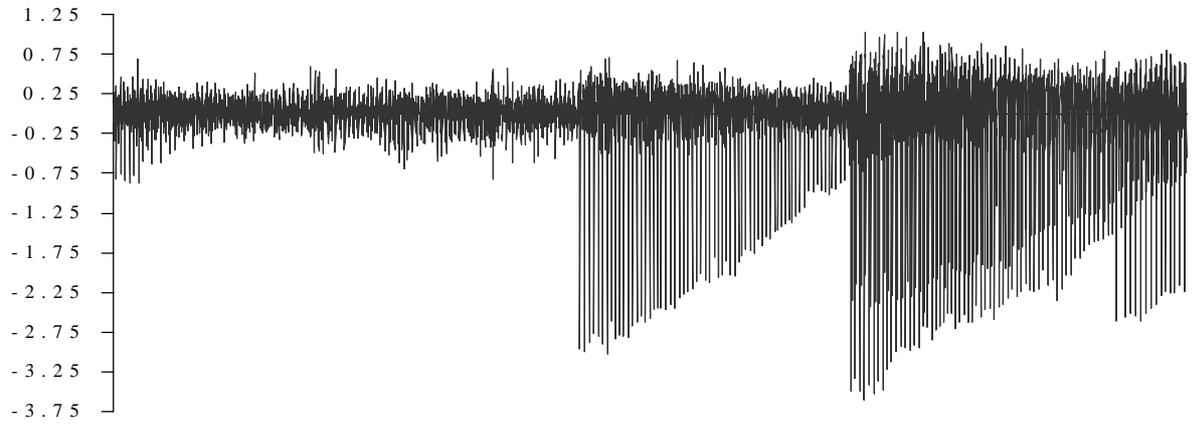
1993



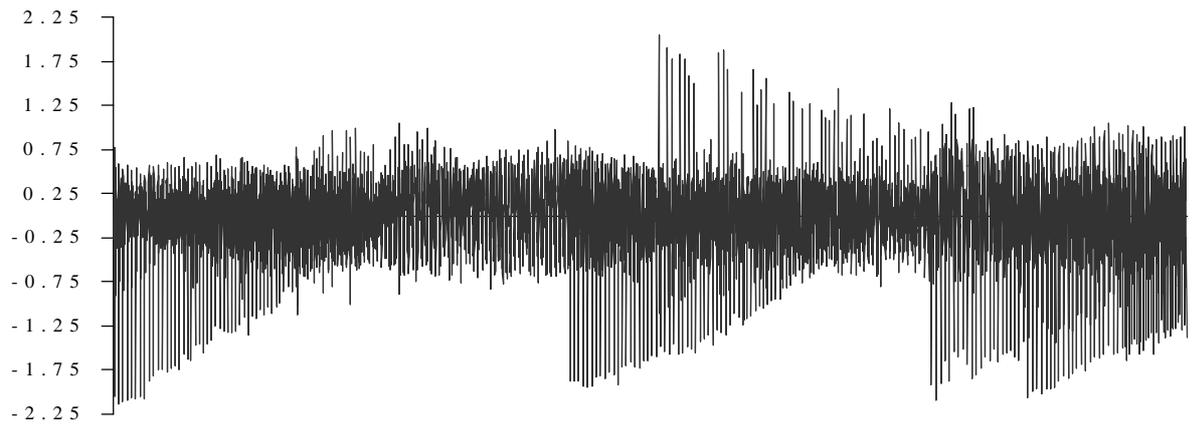
1994



1995

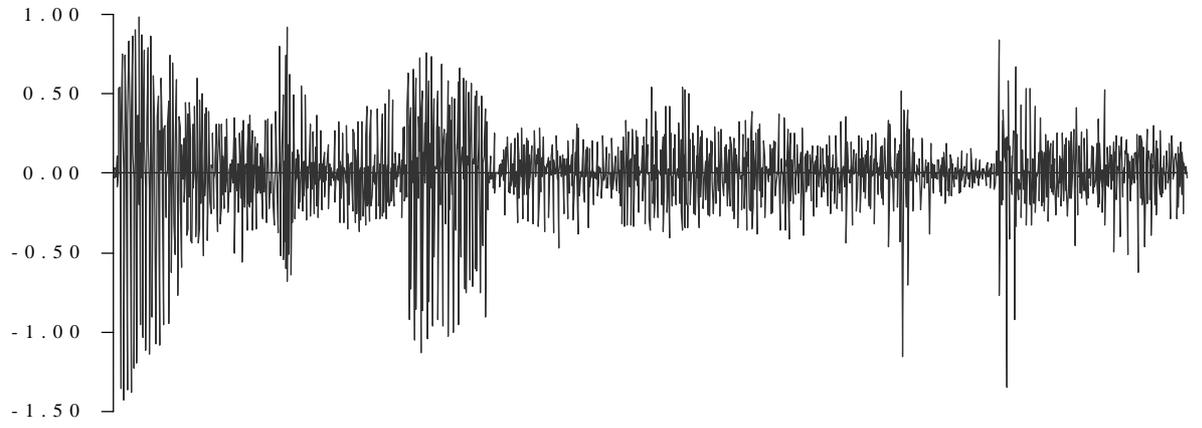


1996

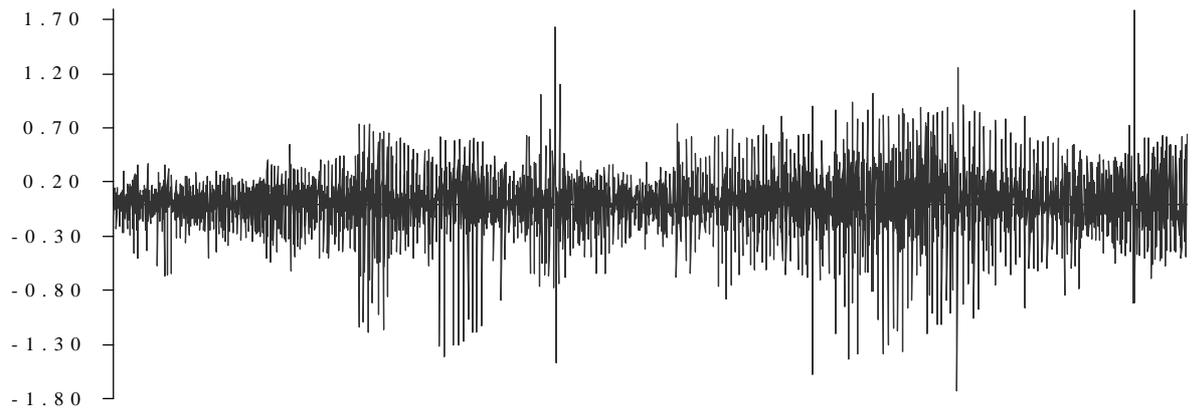


ECHOLS – ELLIOTT (1976)

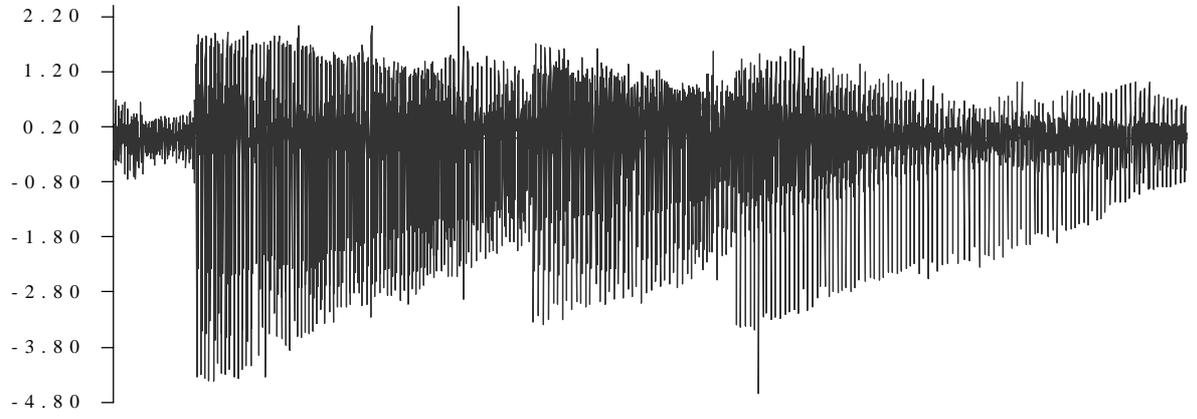
1991



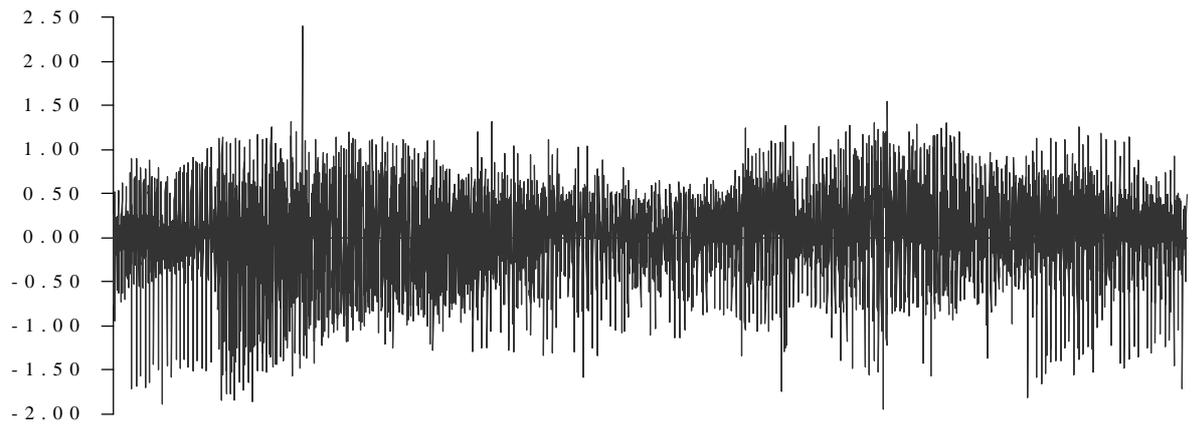
1992



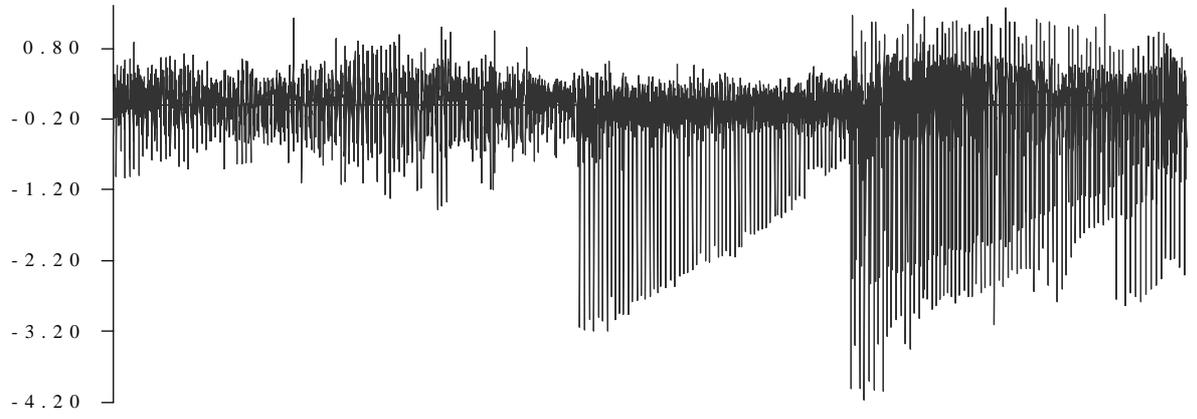
1993



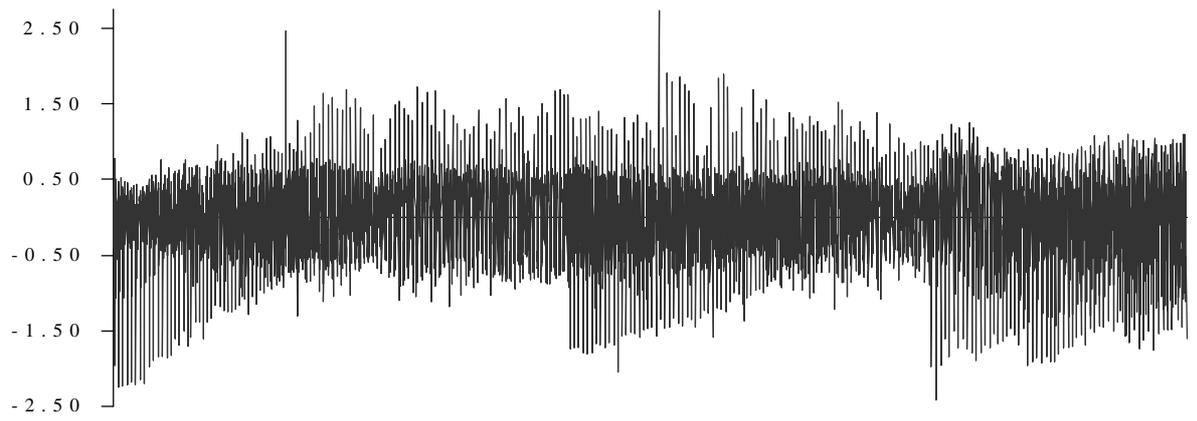
1994



1995

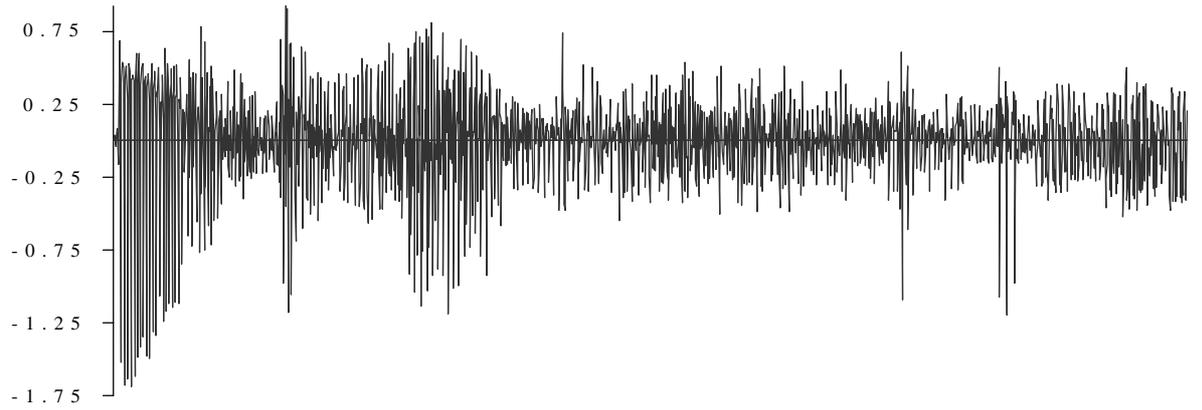


1996

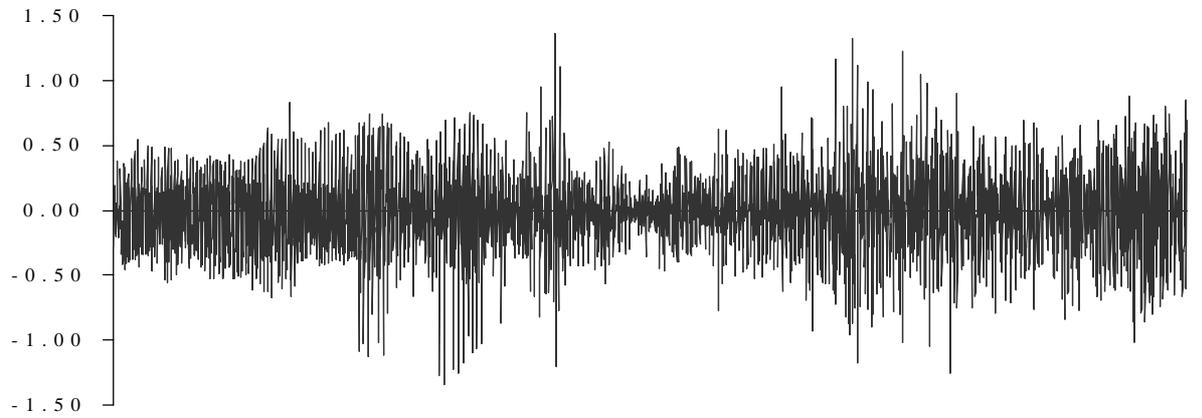


McCULLOCH (1975)

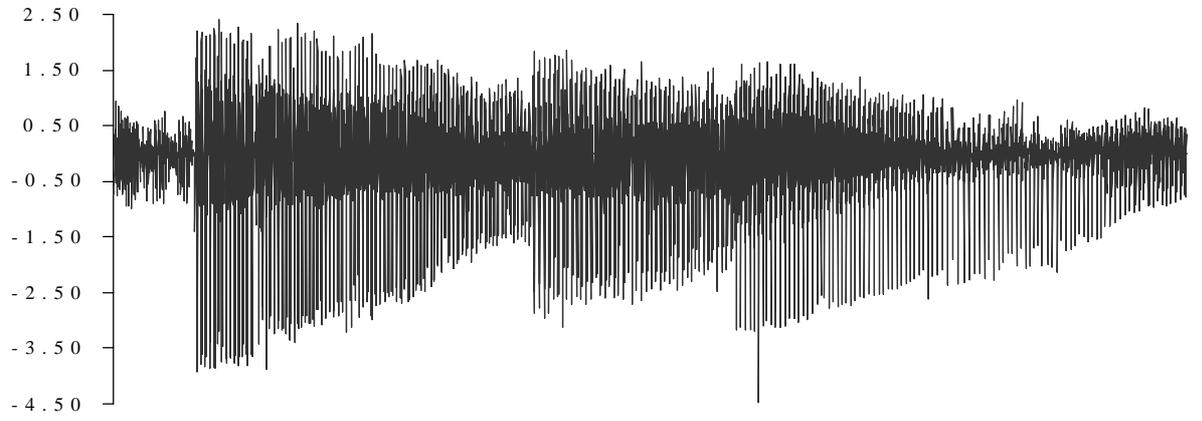
1991



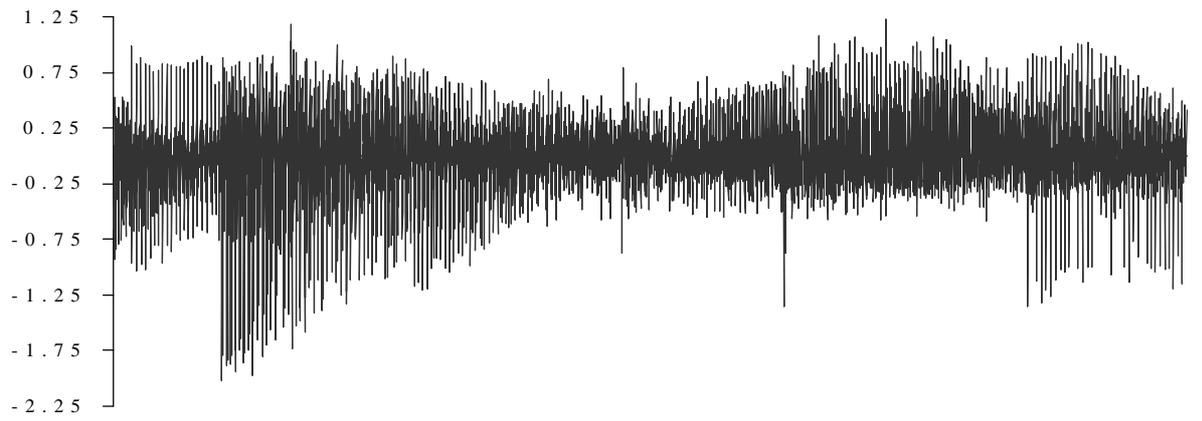
1992



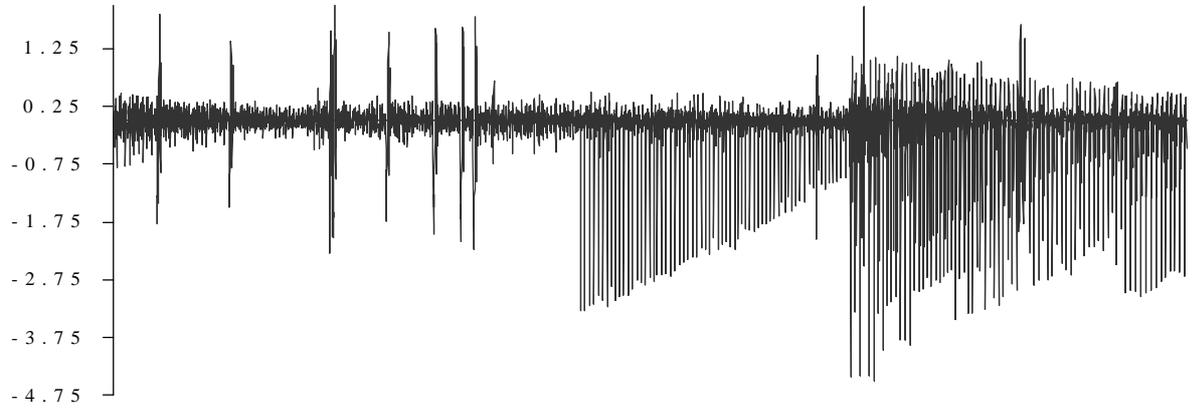
1993



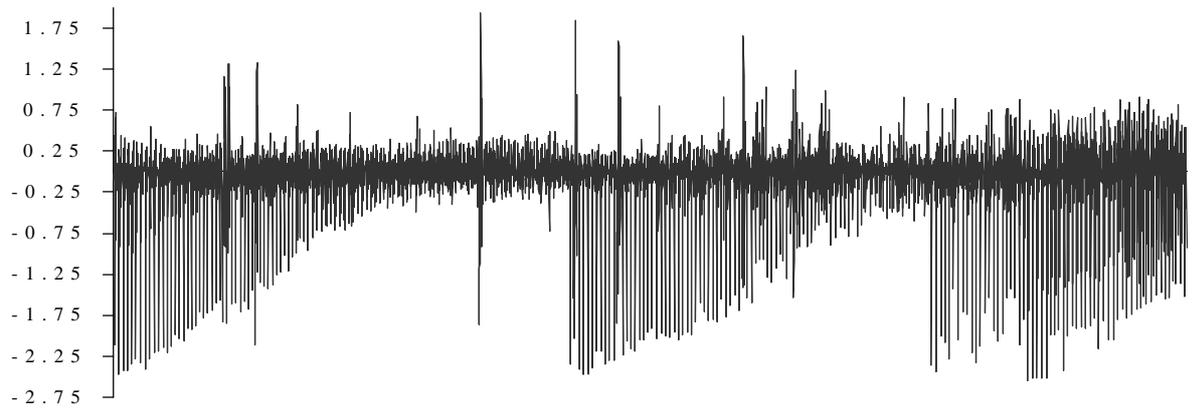
1994



1995

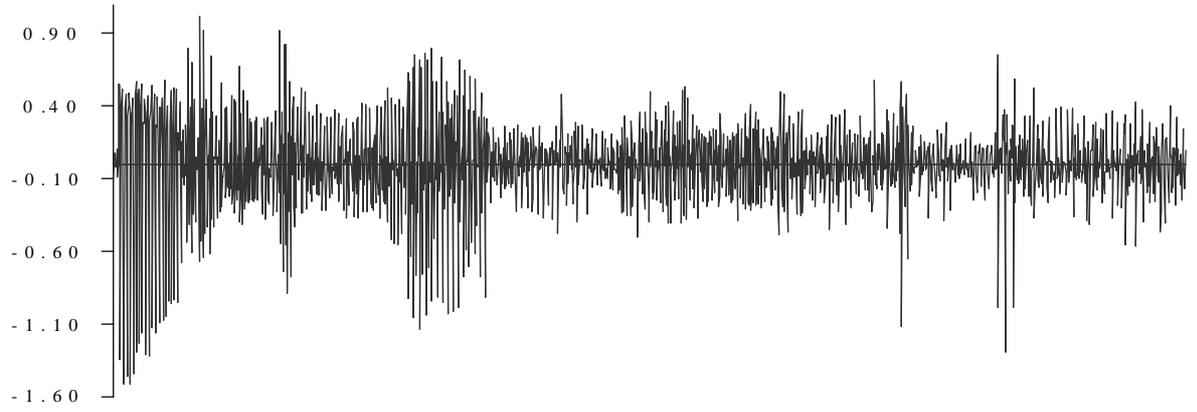


1996

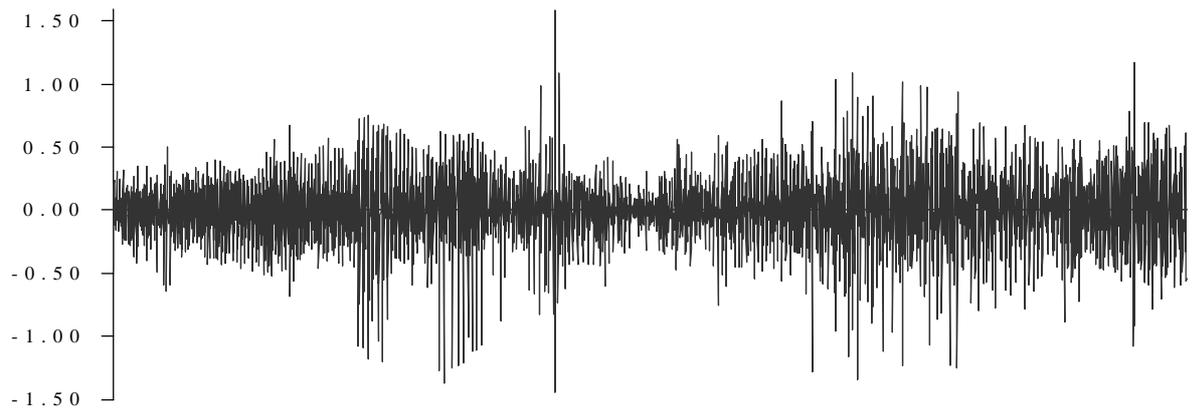


SCHAEFER (1981)

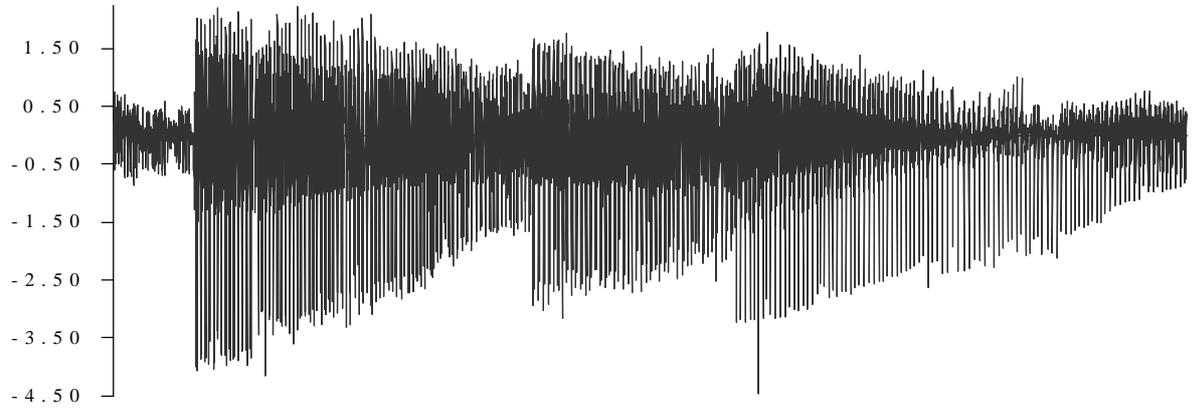
1991



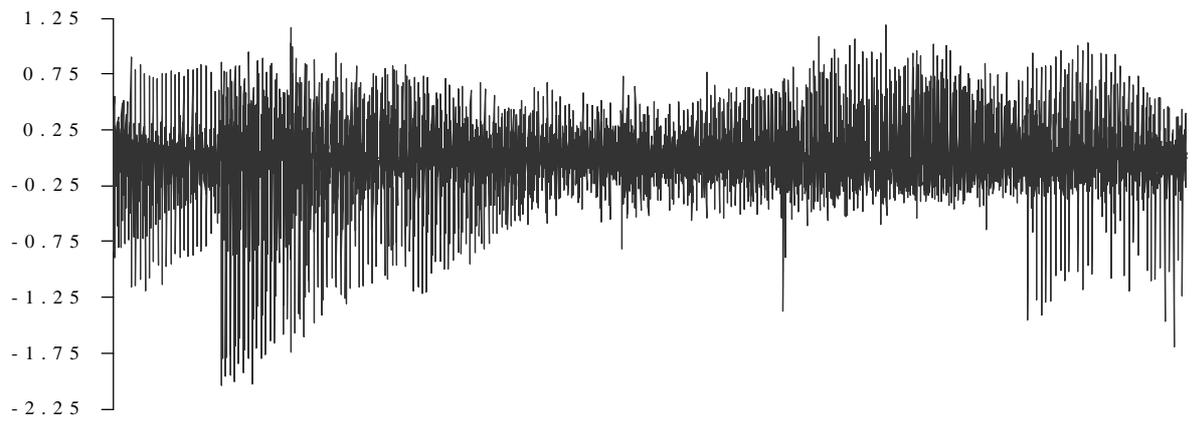
1992



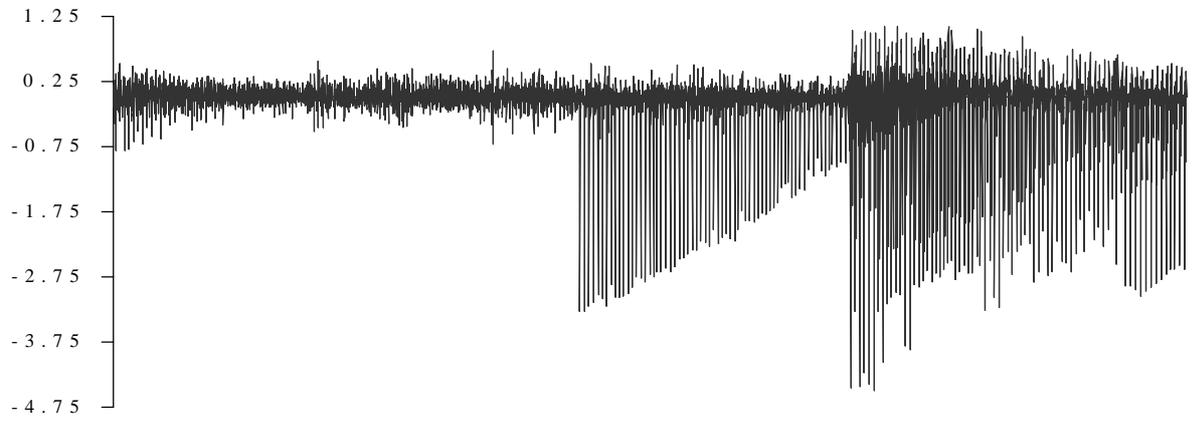
1993



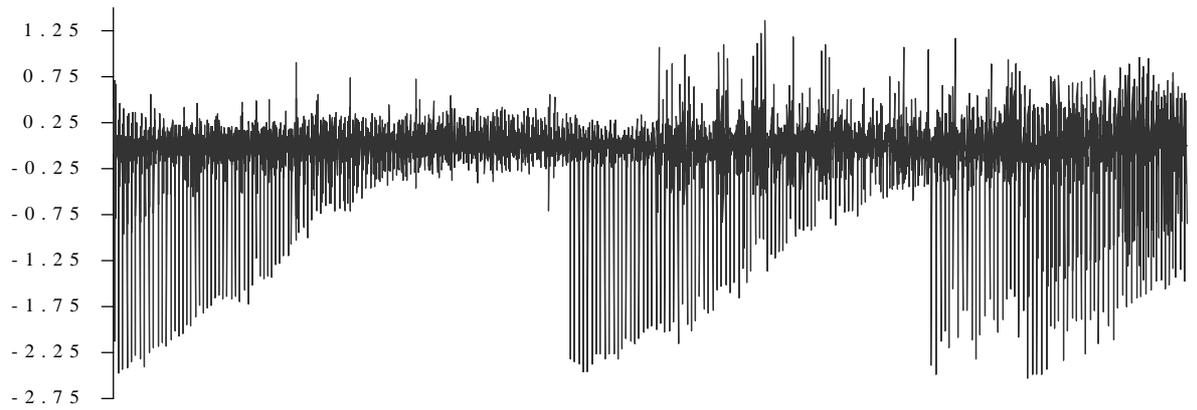
1994



1995

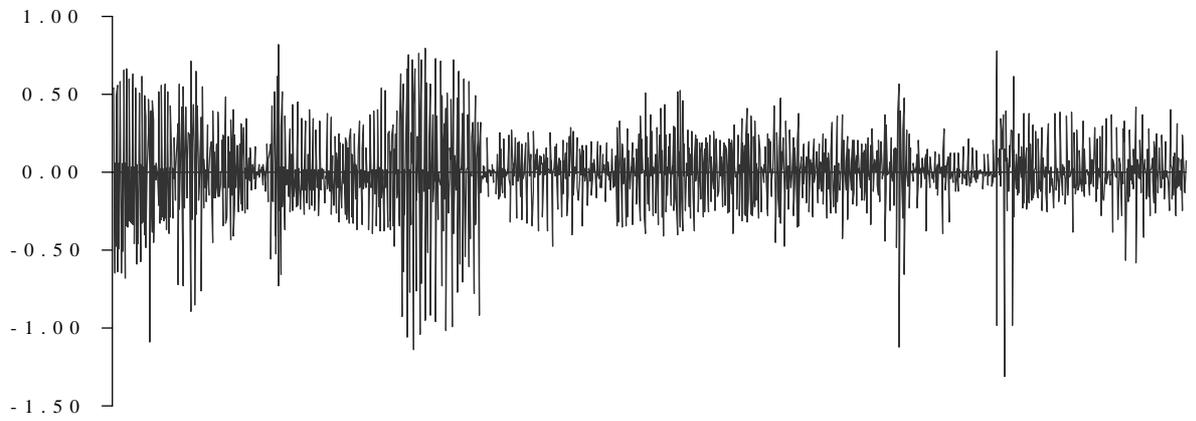


1996

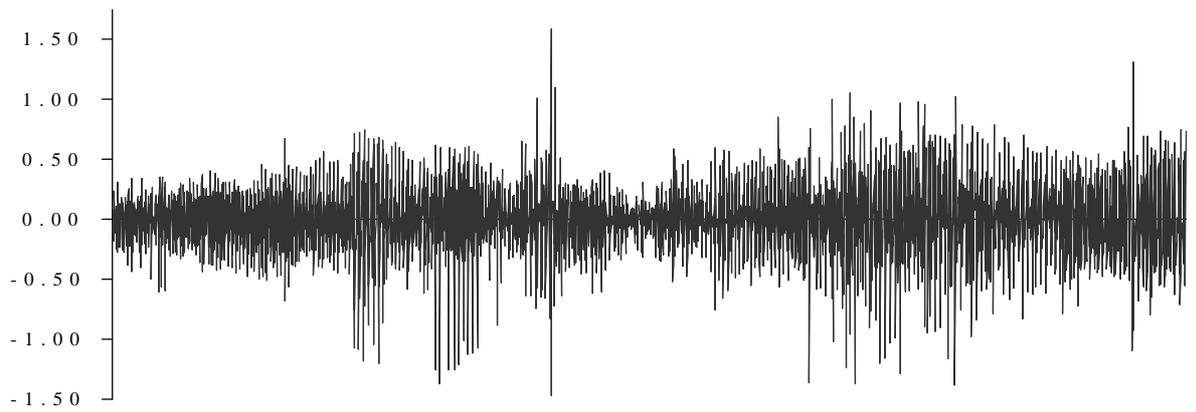


**FONG – VASICEK (1982) [MODELIZACIÓN A (CAMBIO VARIABLE Y
POLINOMIO CÚBICO)]**

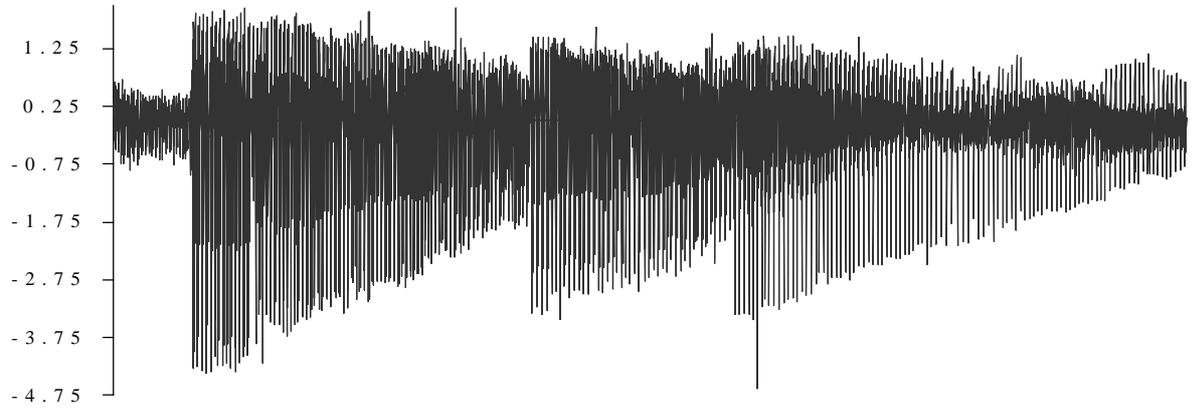
1991



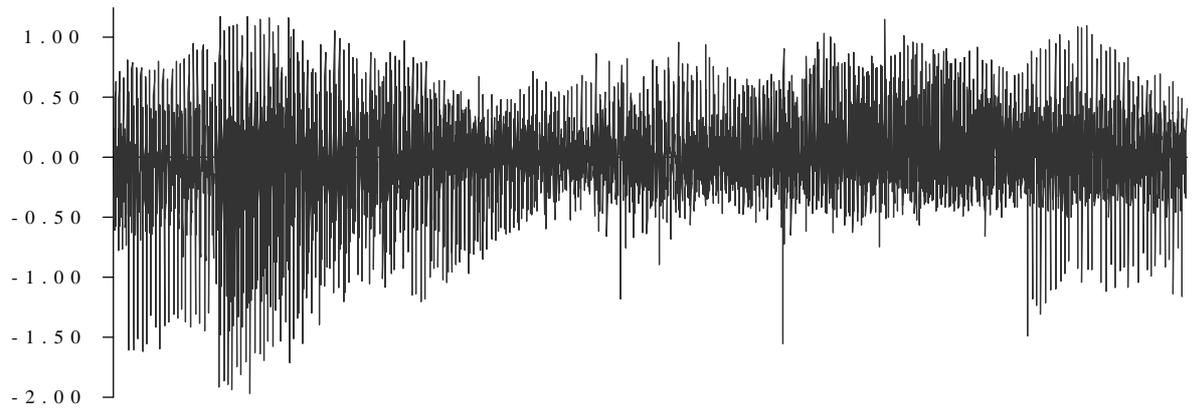
1992



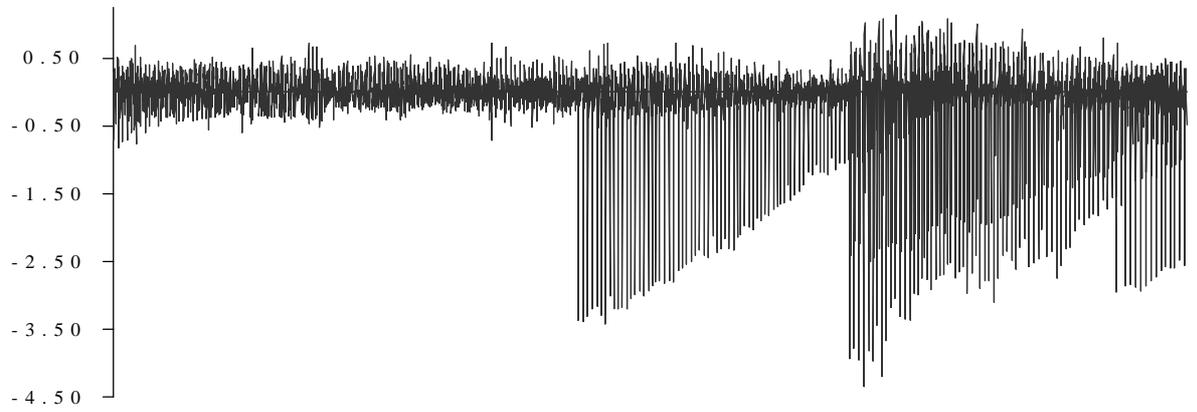
1993



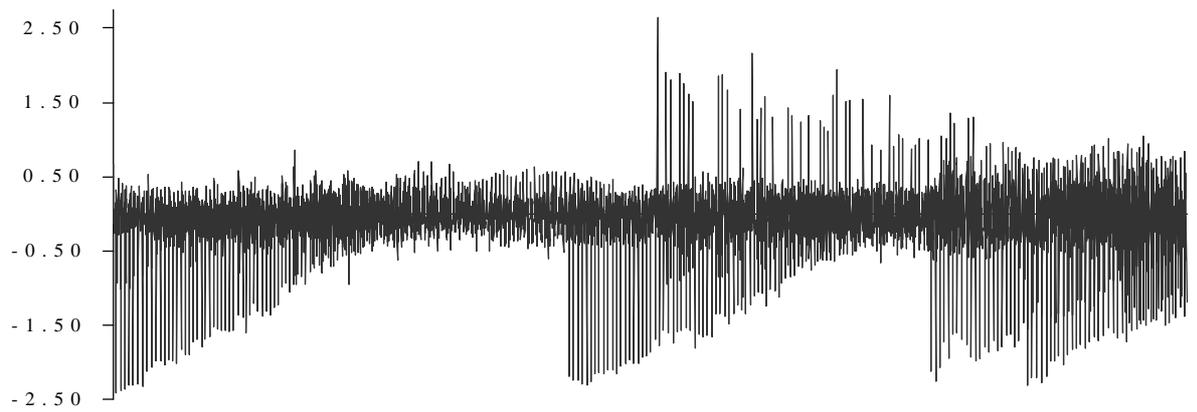
1994



1995

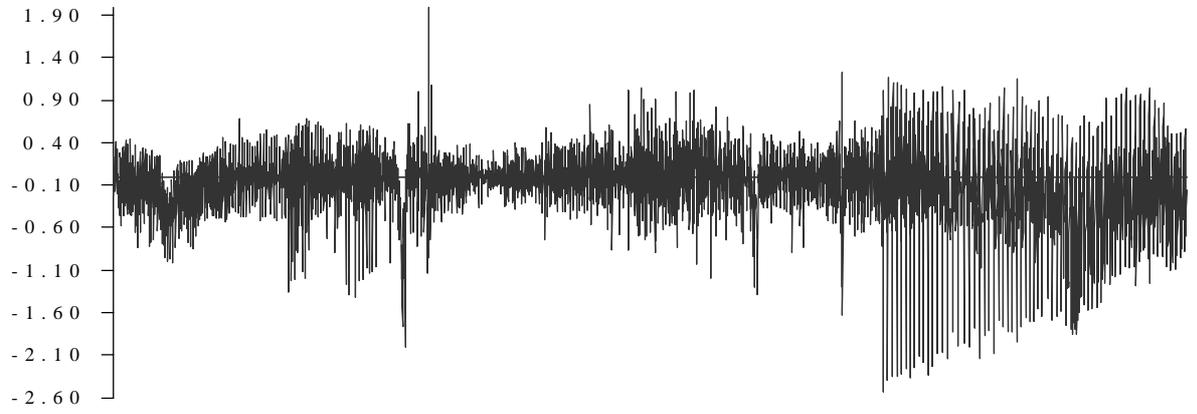


1996

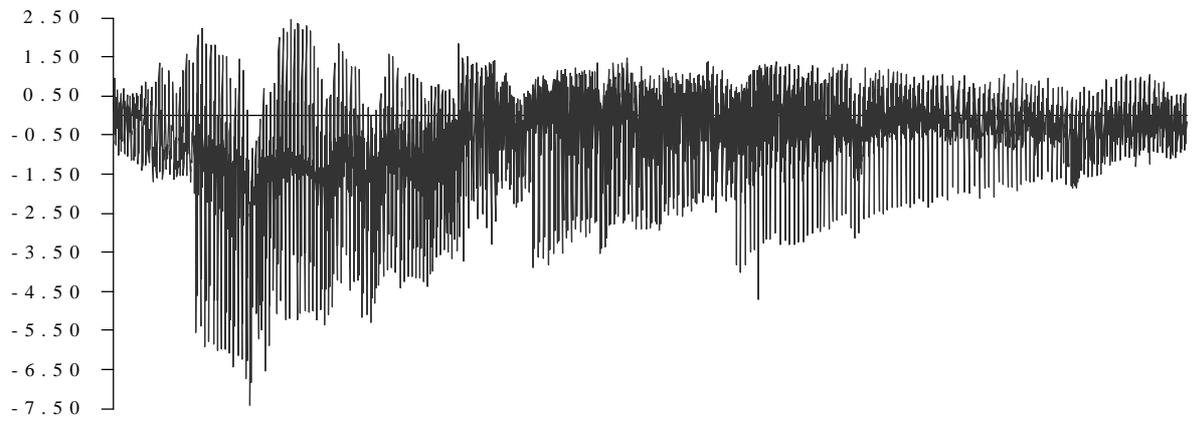


FONG - VASICEK (1982) [MODELIZACIÓN B (FUNCIÓN EXPONENCIAL)]

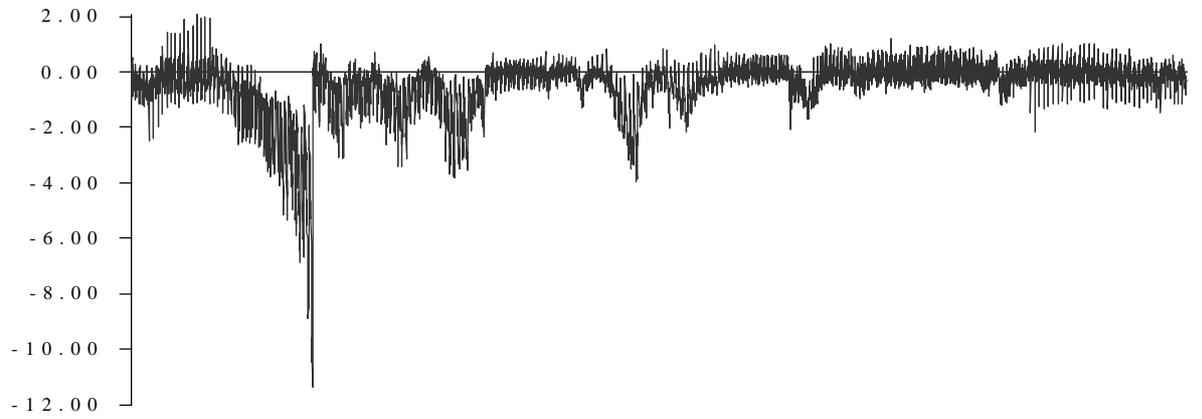
1992



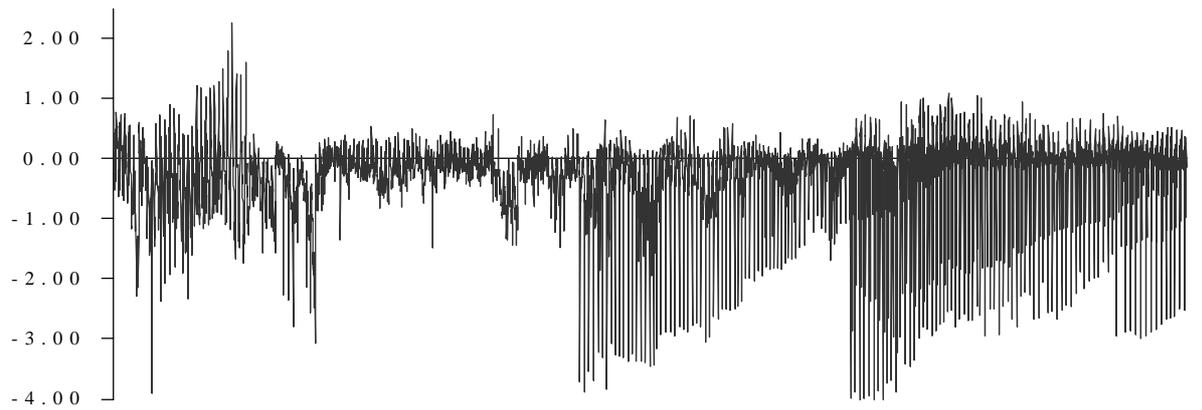
1993



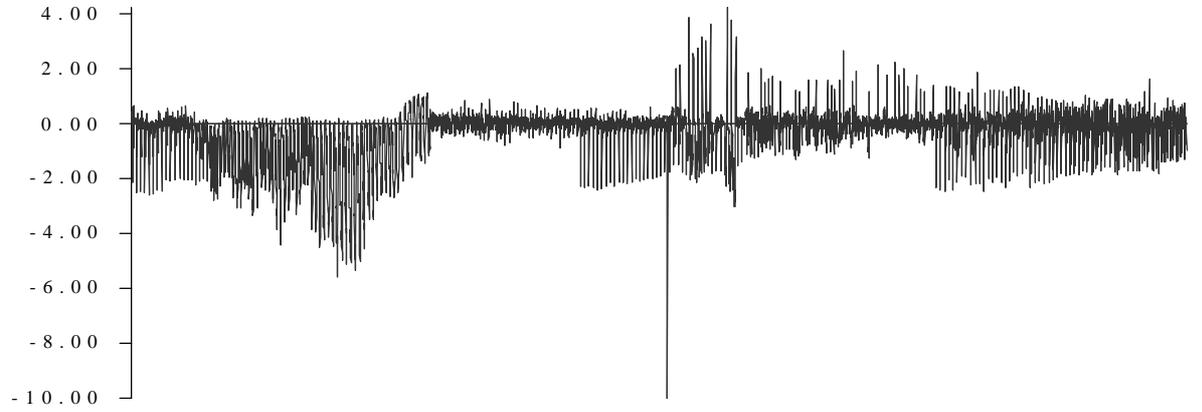
1994



1995

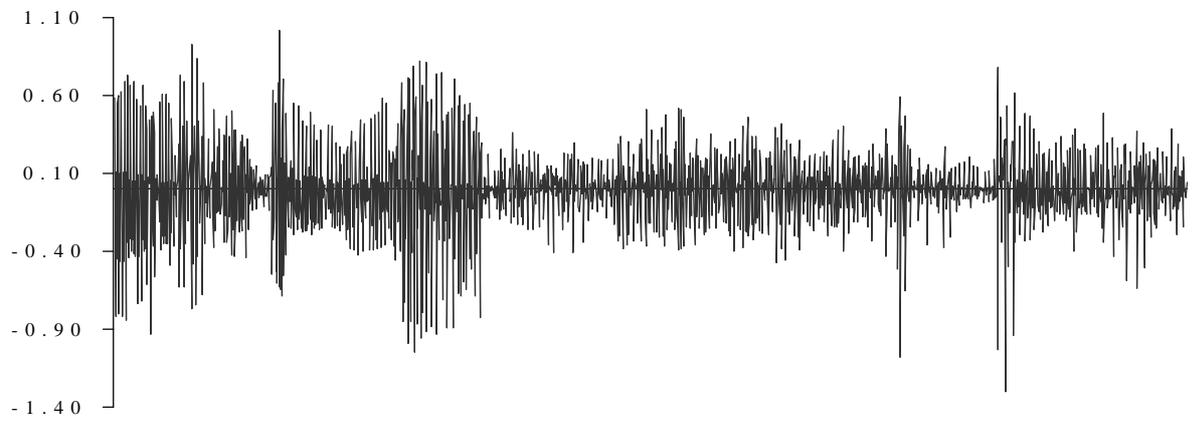


1996

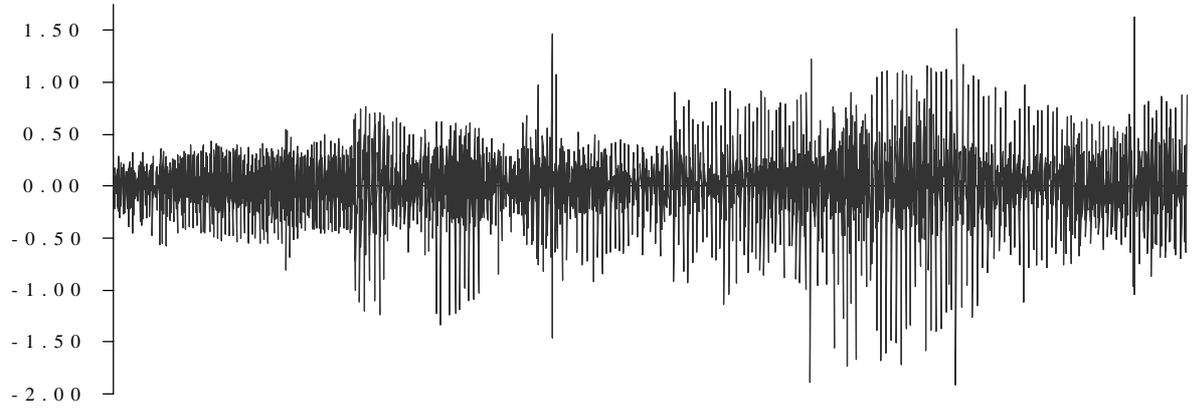


FONG – VASICEK (1982) [CONTRERAS – NAVARRO (1993)]

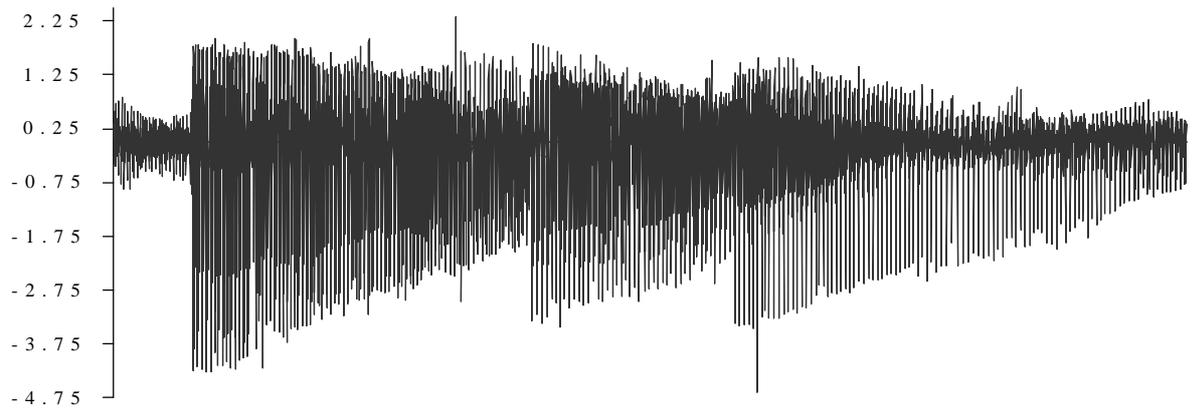
1991



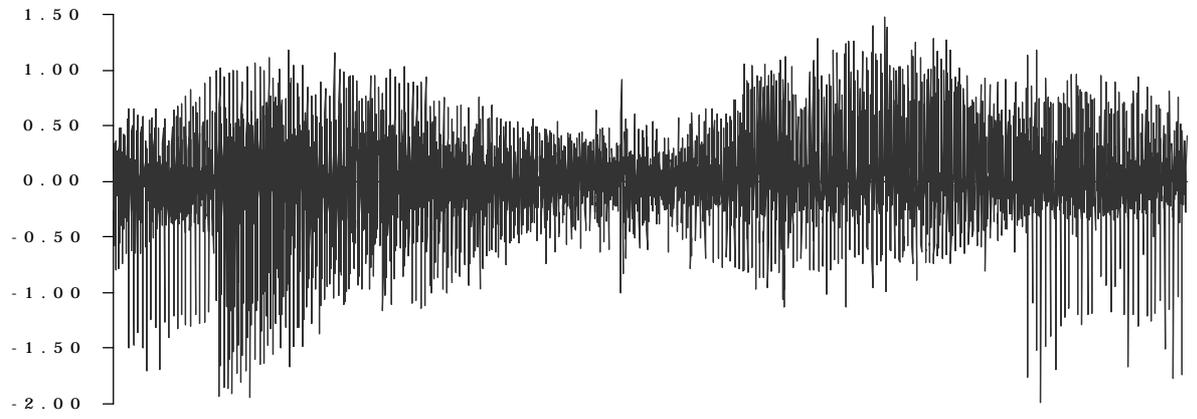
1992



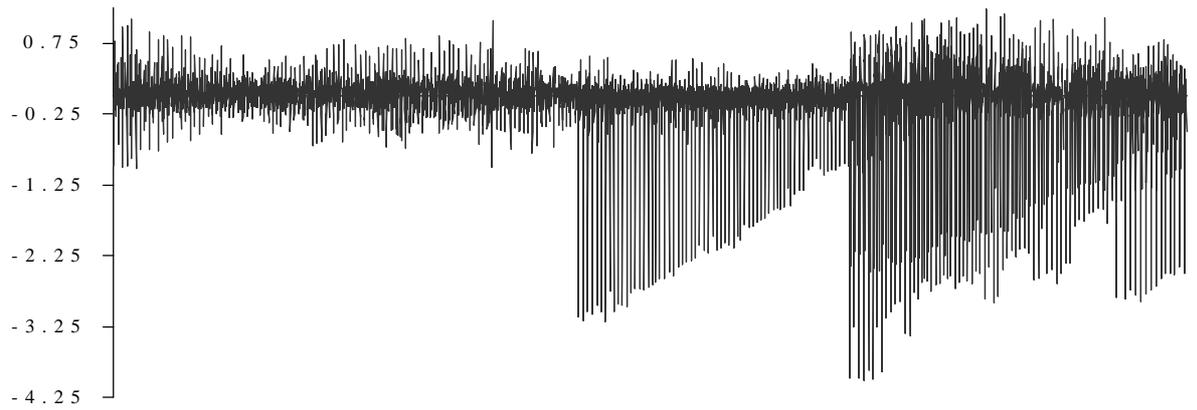
1993



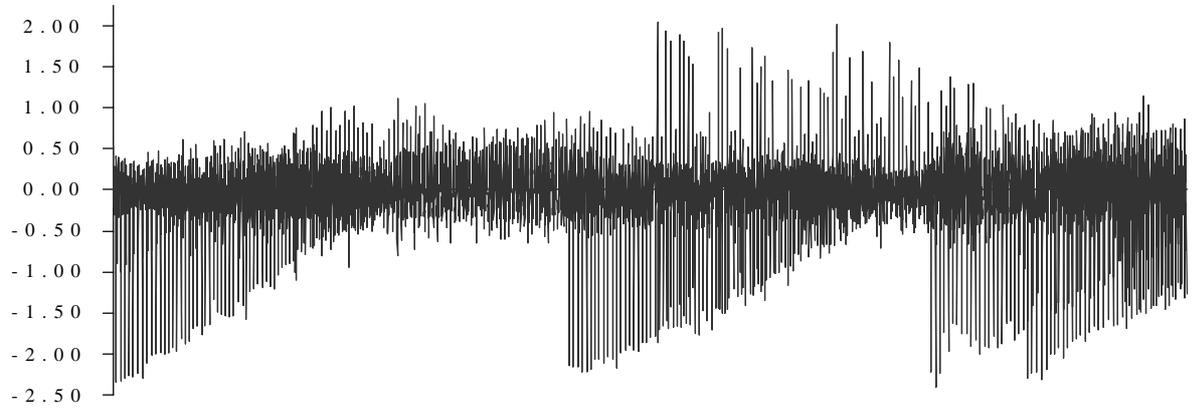
1994



1995

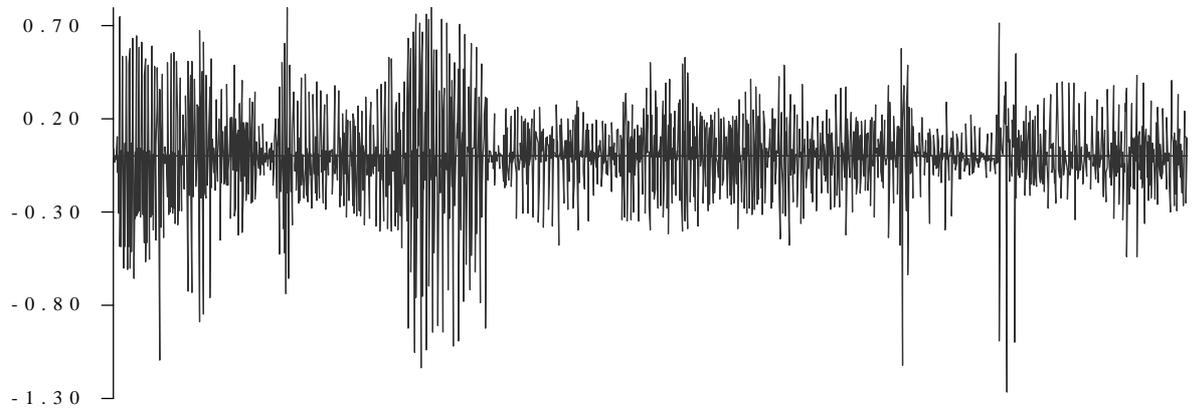


1996

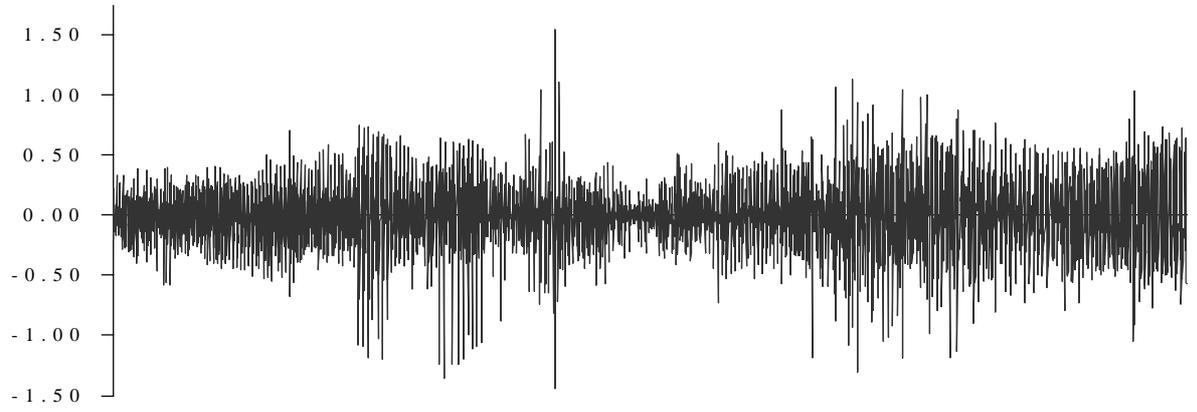


CARLETON-CHAMBERS-WALDMAN (1984)

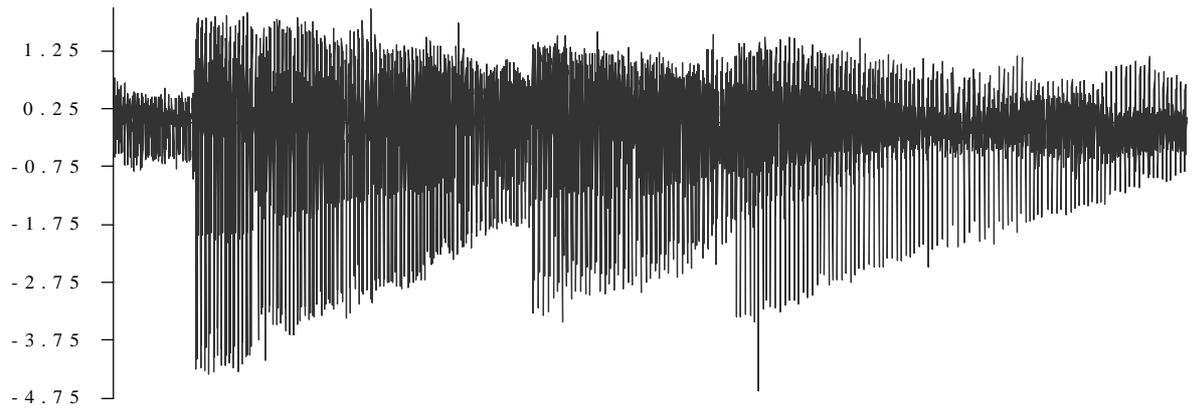
1991



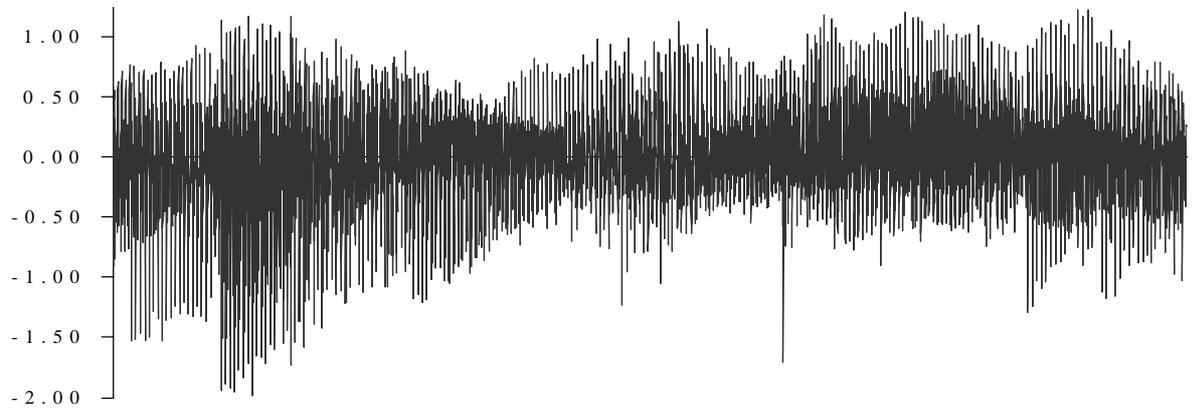
1992



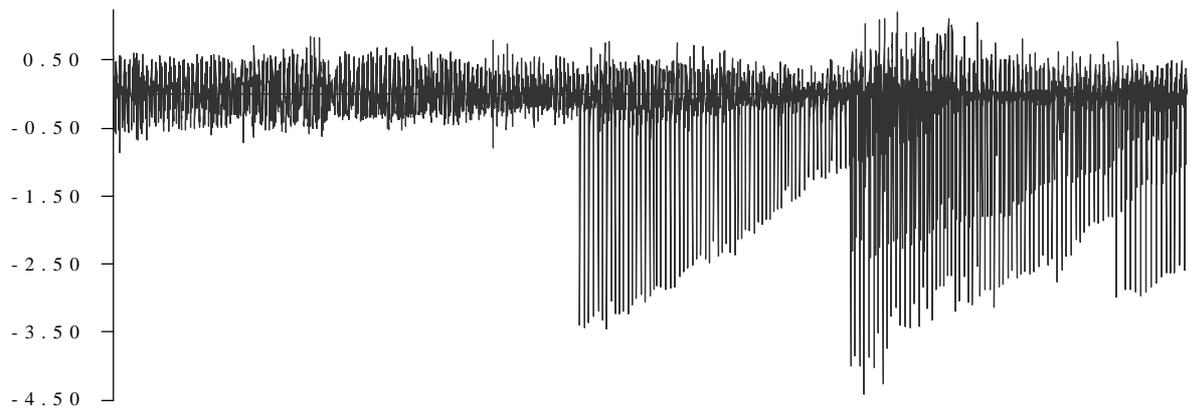
1993



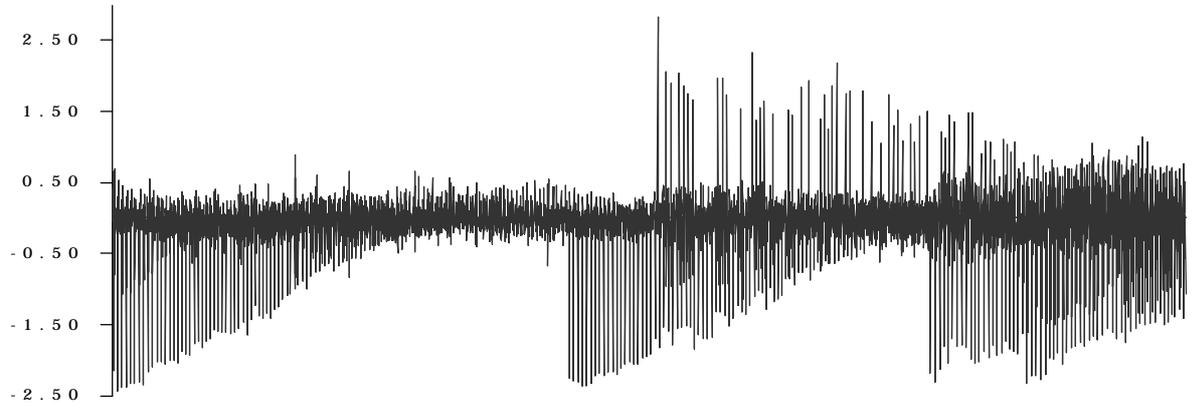
1994



1995

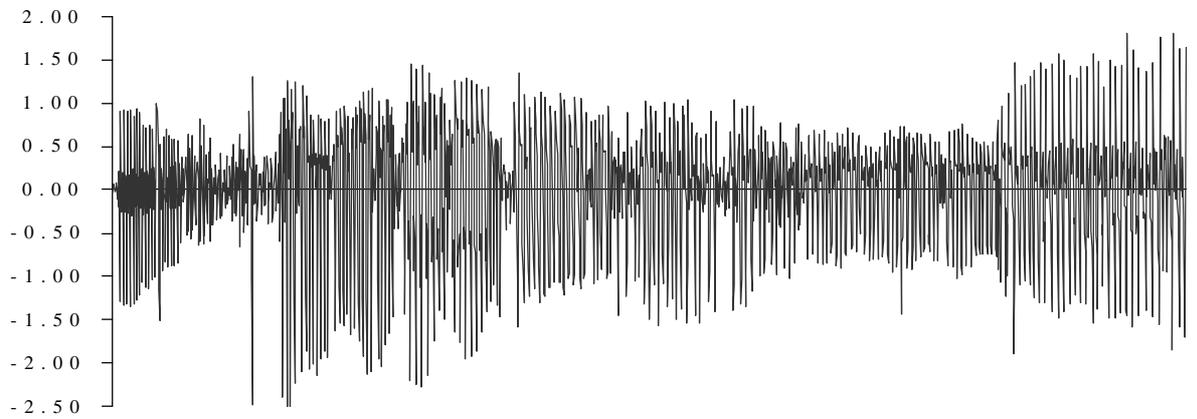


1996



SHEA (1984)

1991



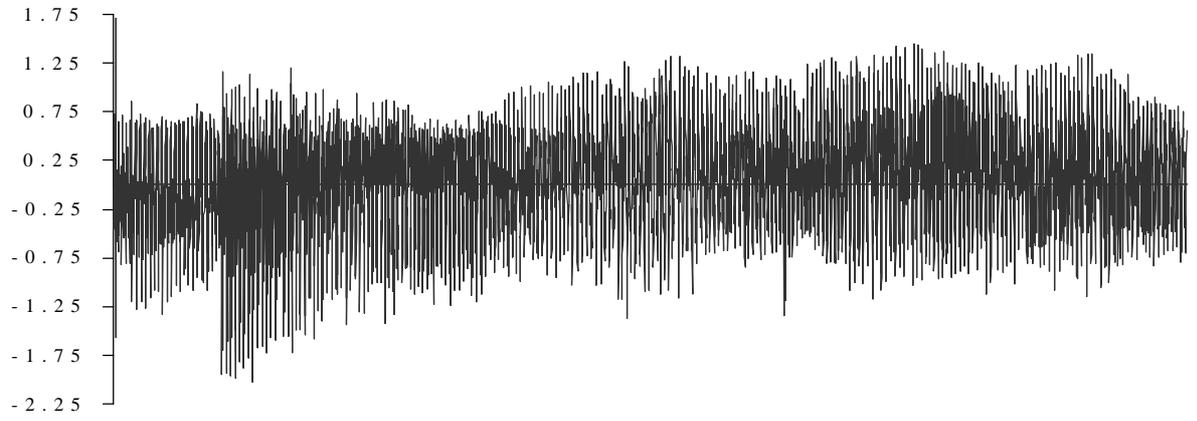
1992



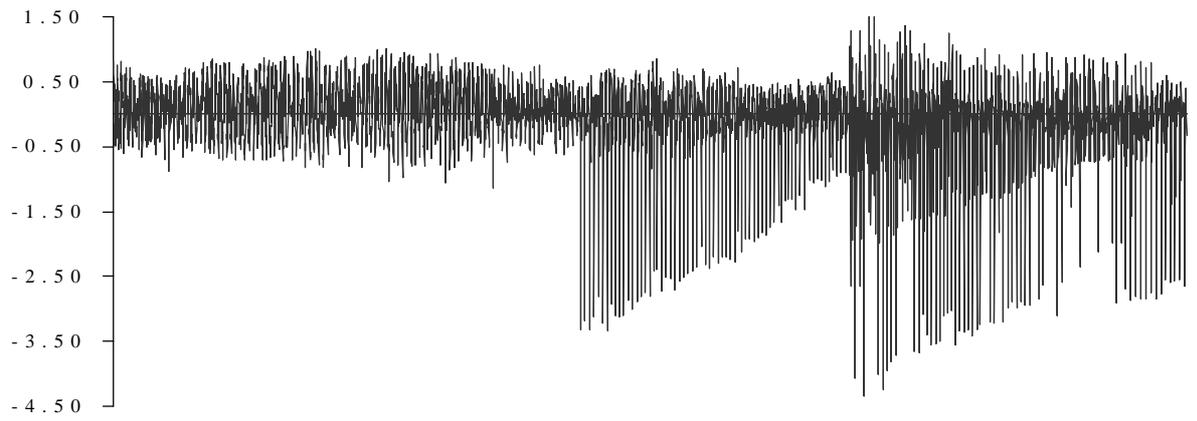
1993



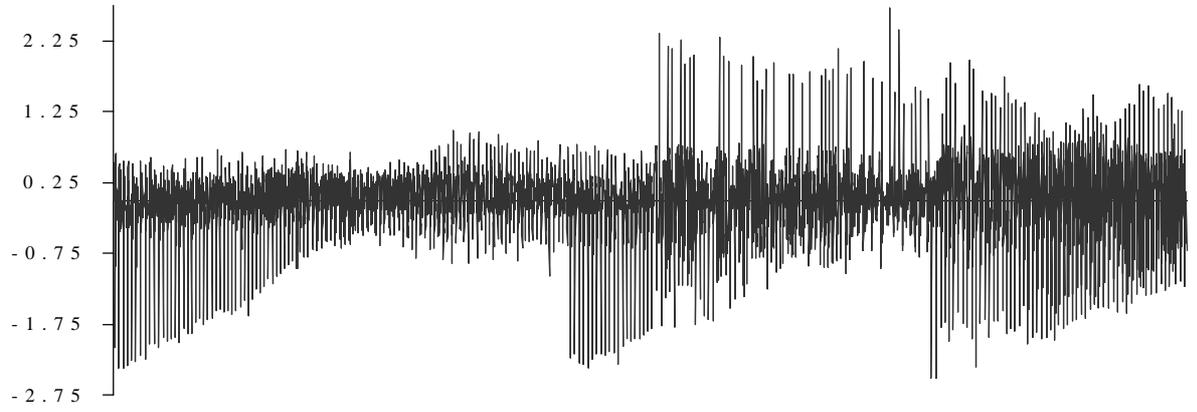
1994



1995

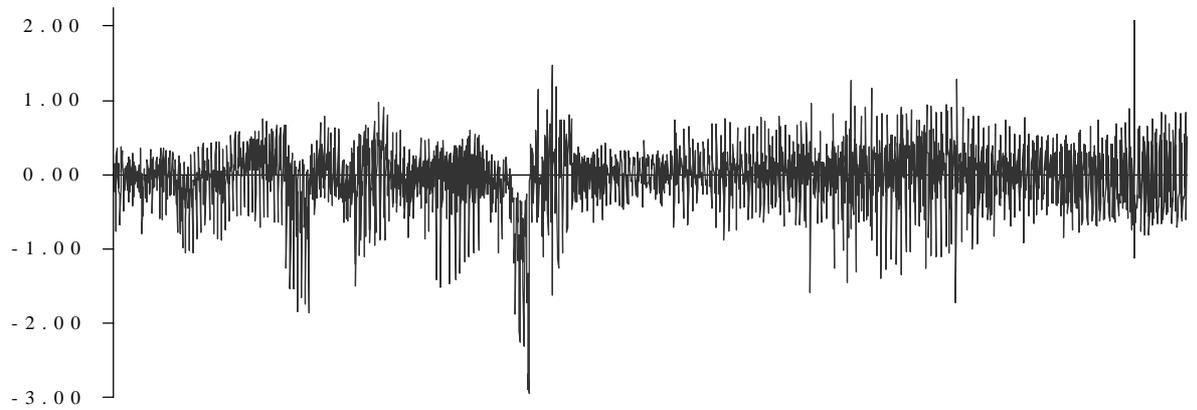


1996

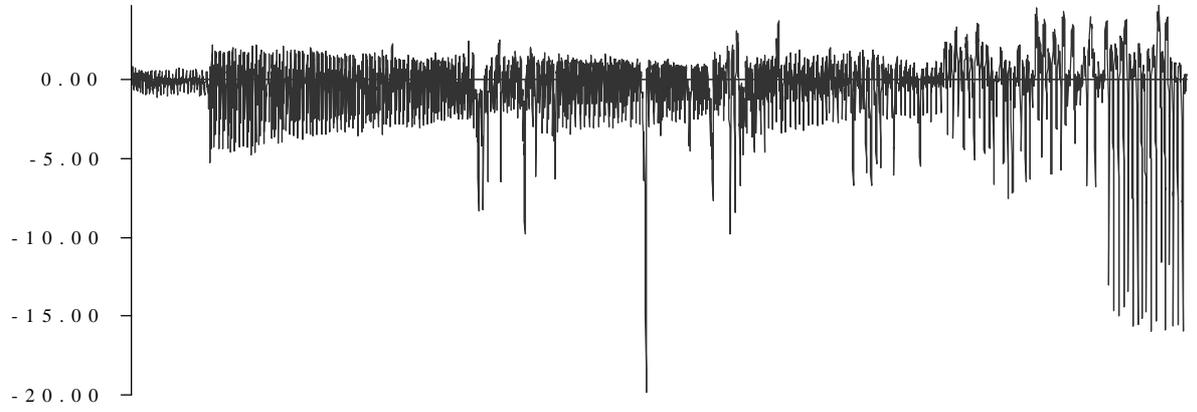


NELSON – SIEGEL (1987)

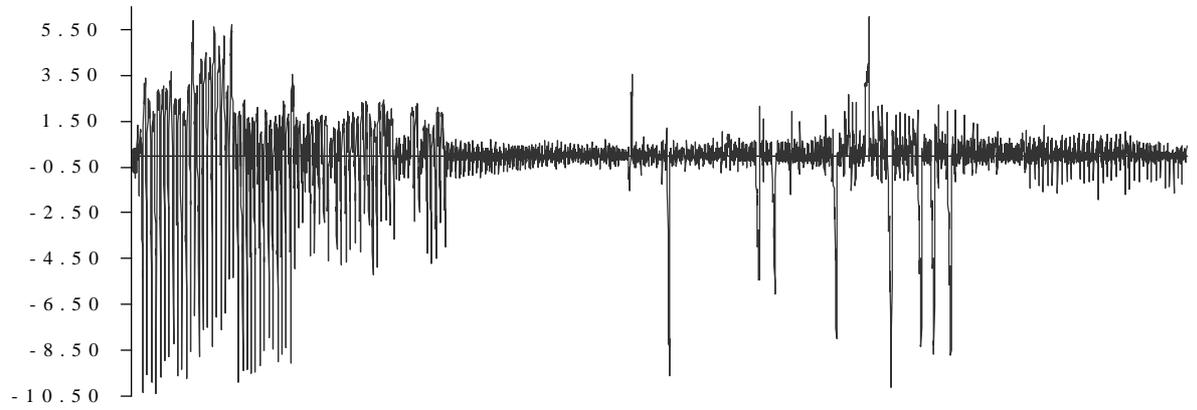
1992



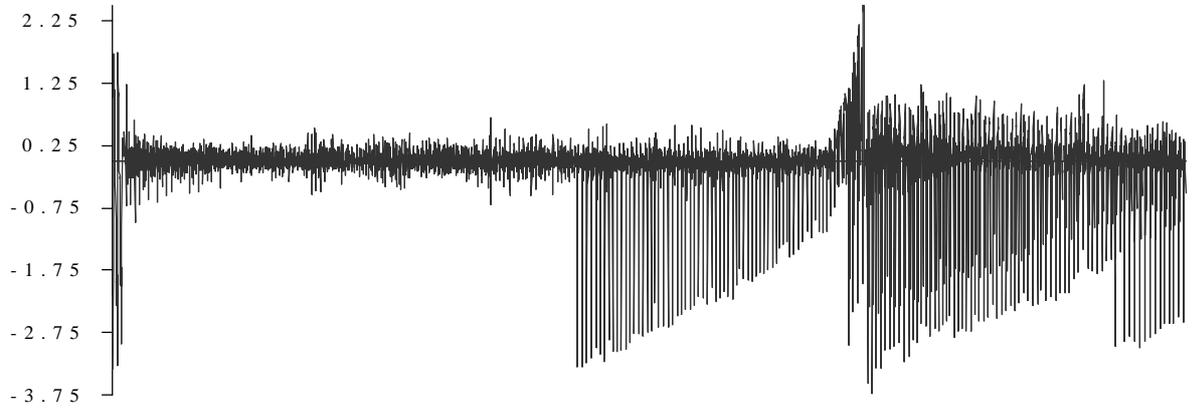
1993



1994



1995

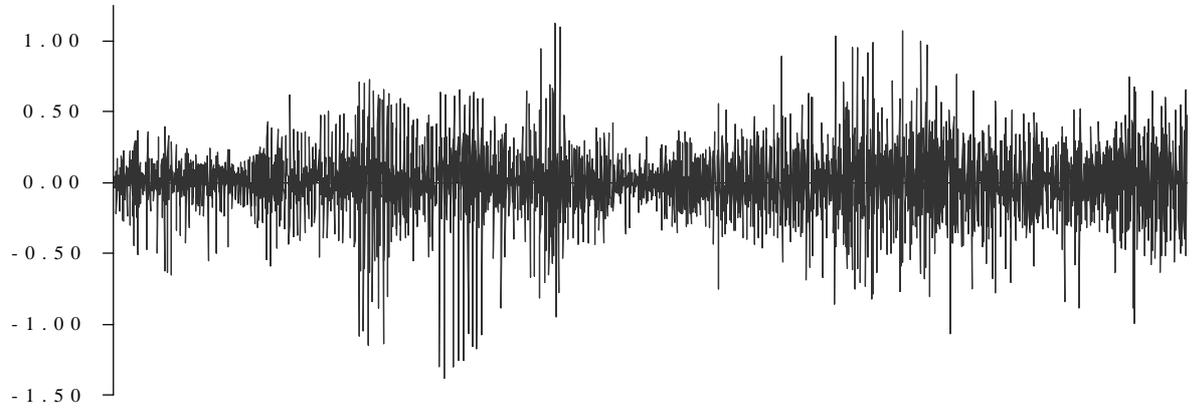


1996

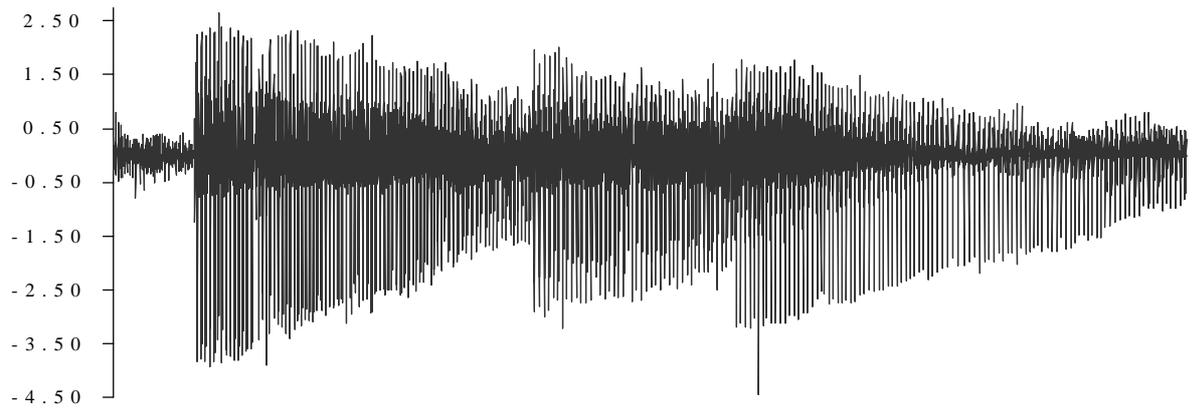


STEELEY (1991)

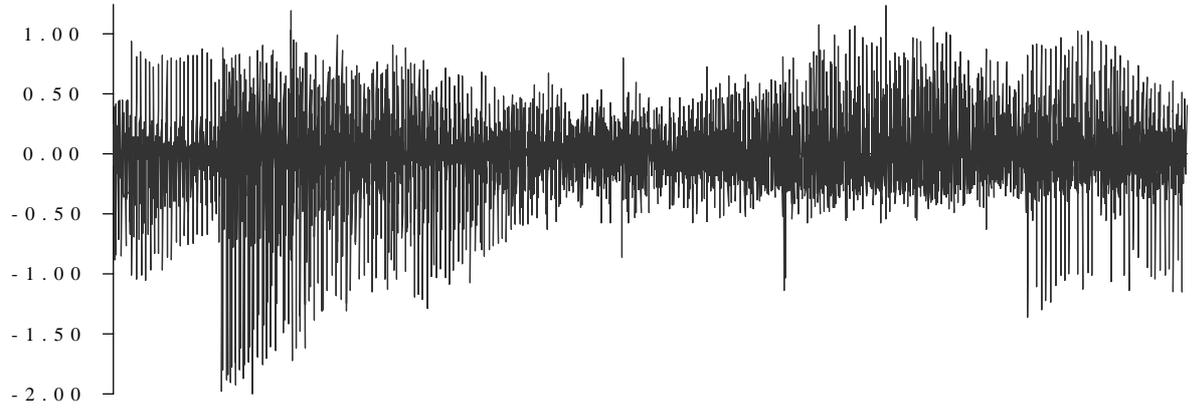
1992



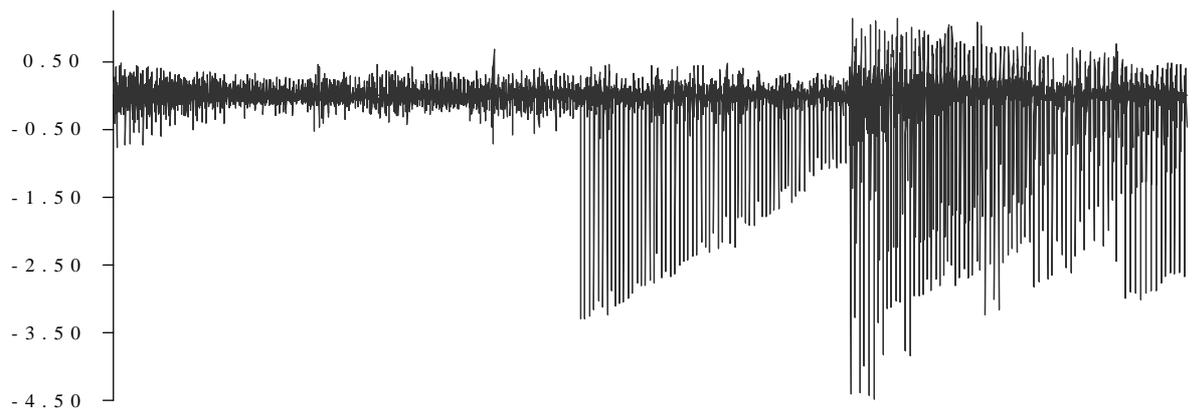
1993



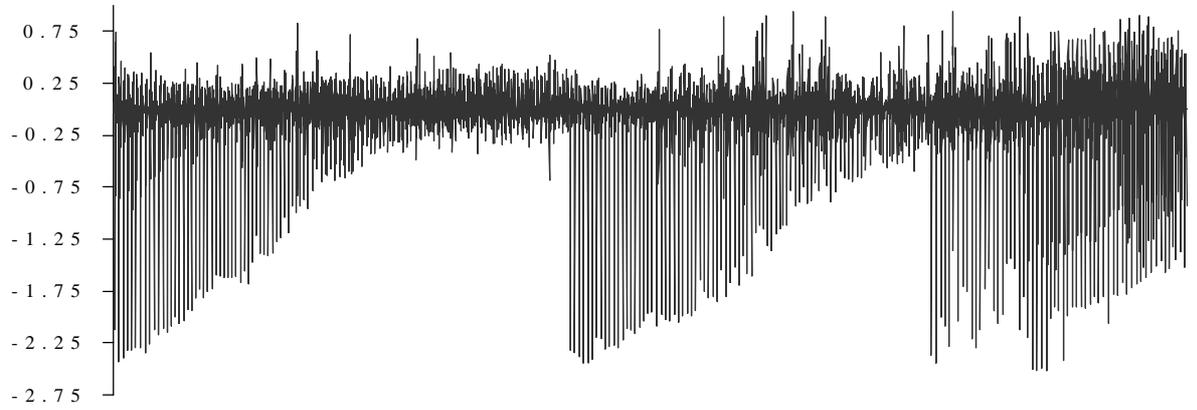
1994



1995

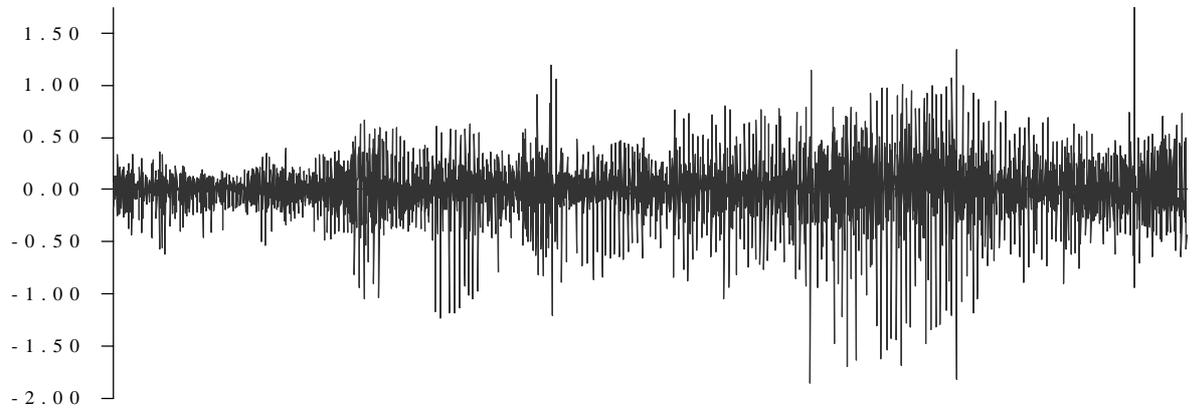


1996

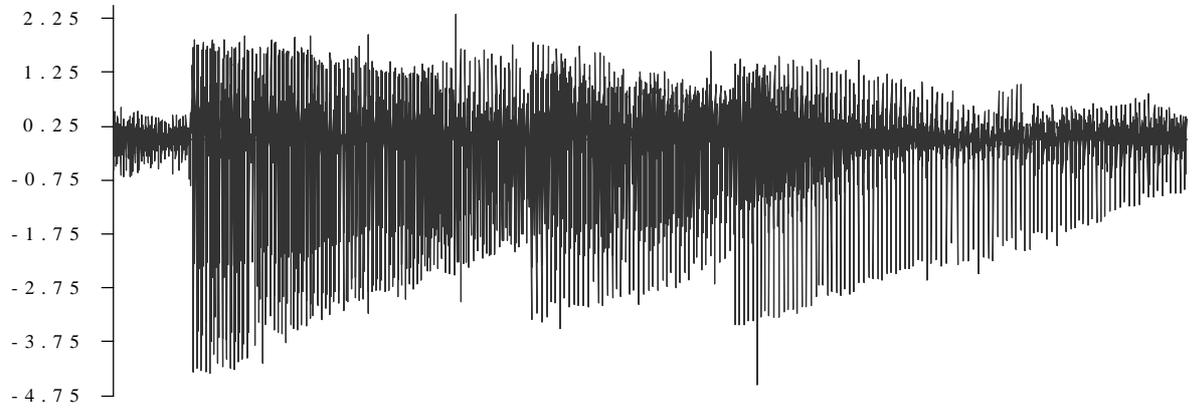


PROPUESTA I

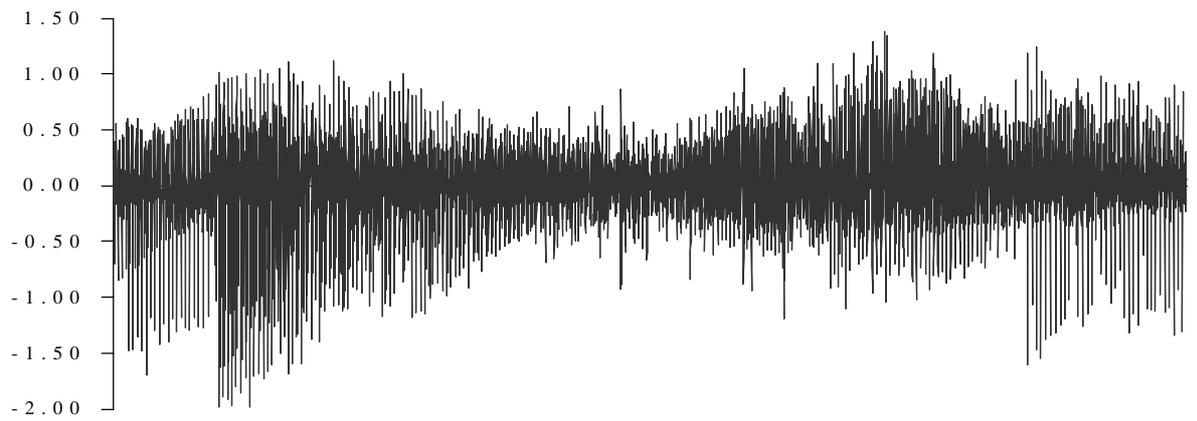
1992



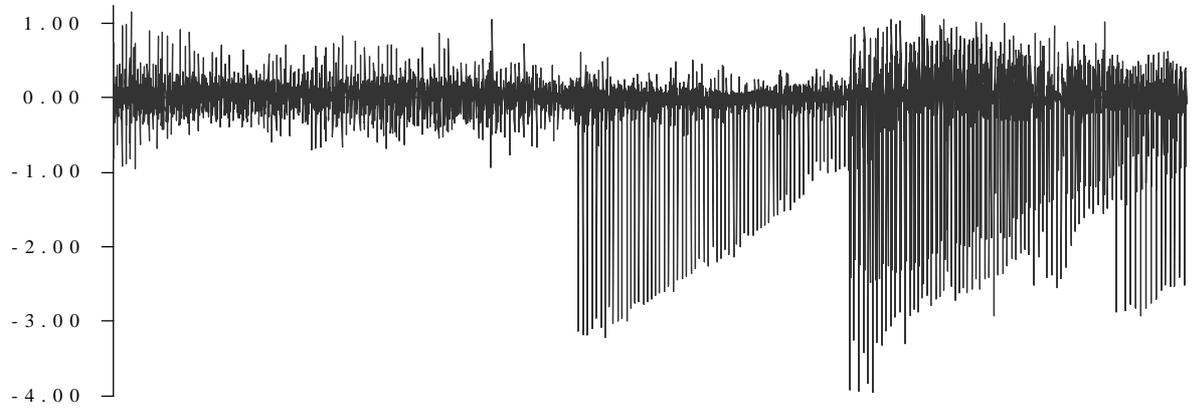
1993



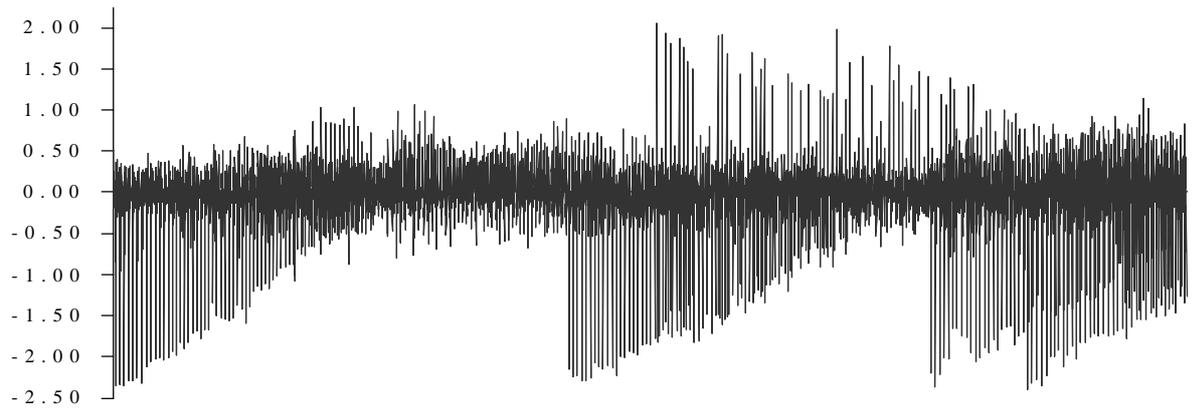
1994



1995

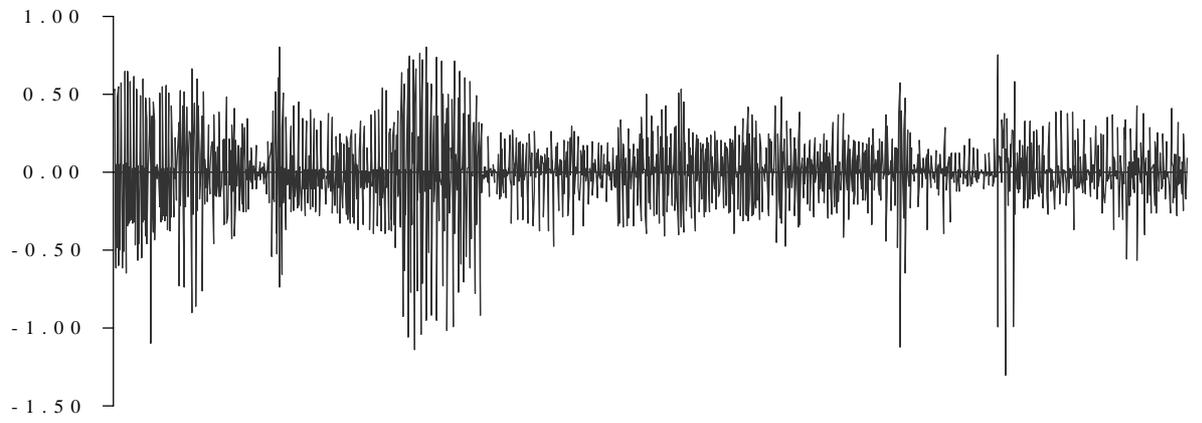


1996

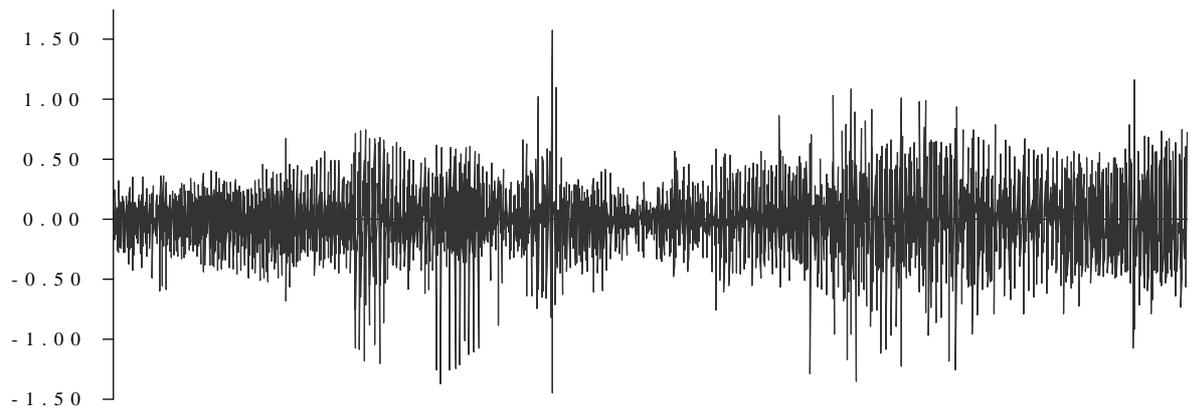


PROPUESTA II – A (LEGENDRE GRADO 3)

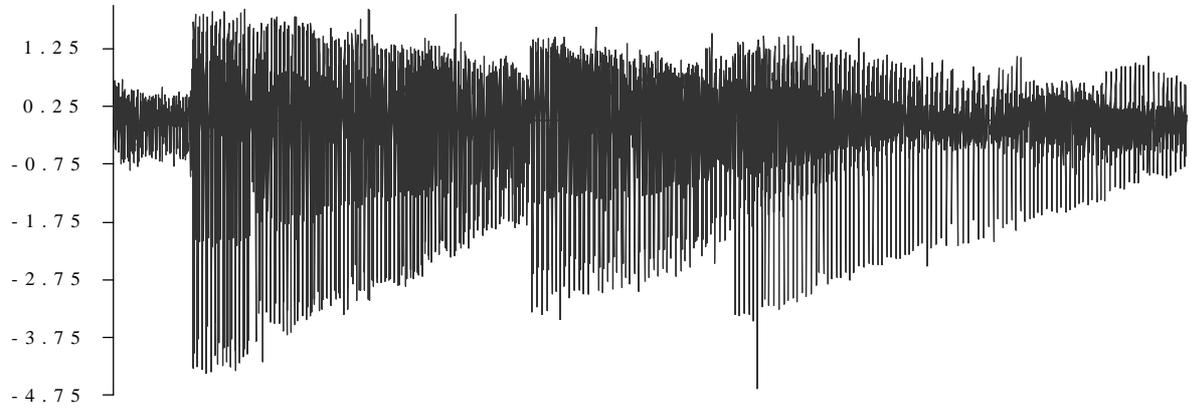
1991



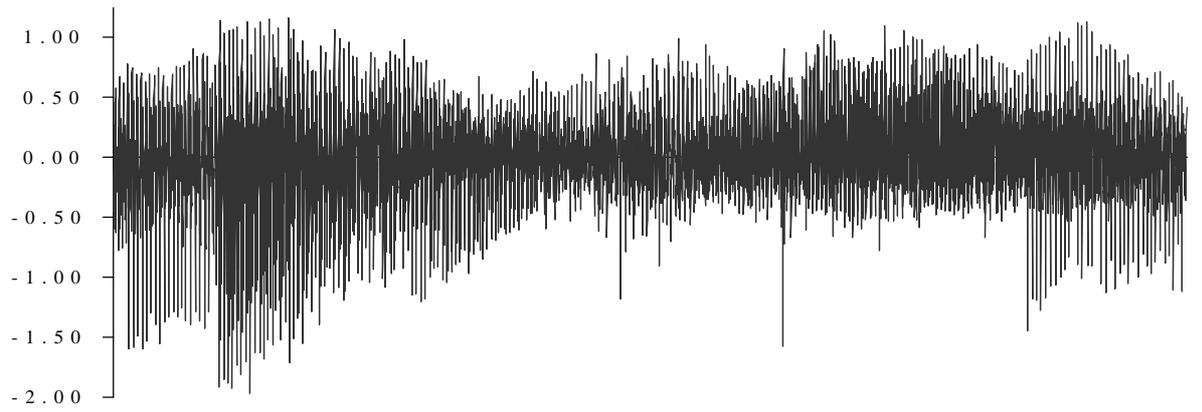
1992



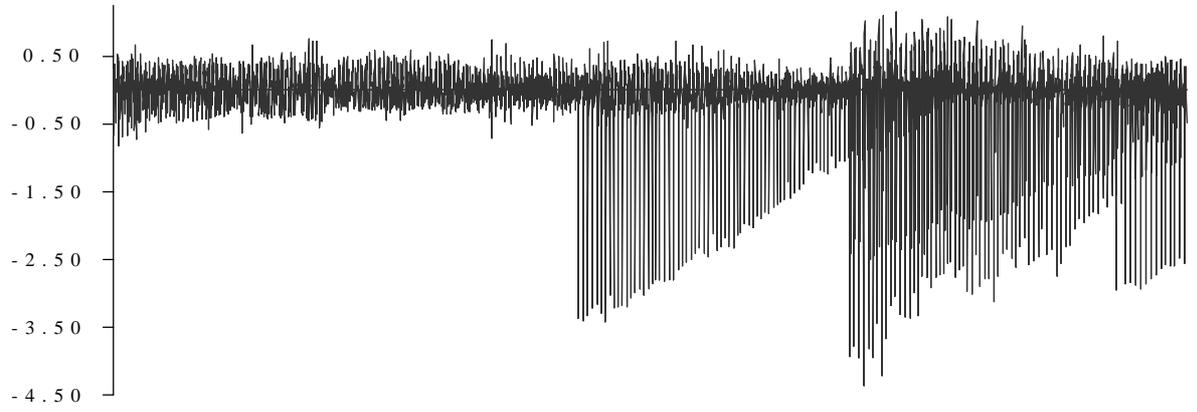
1993



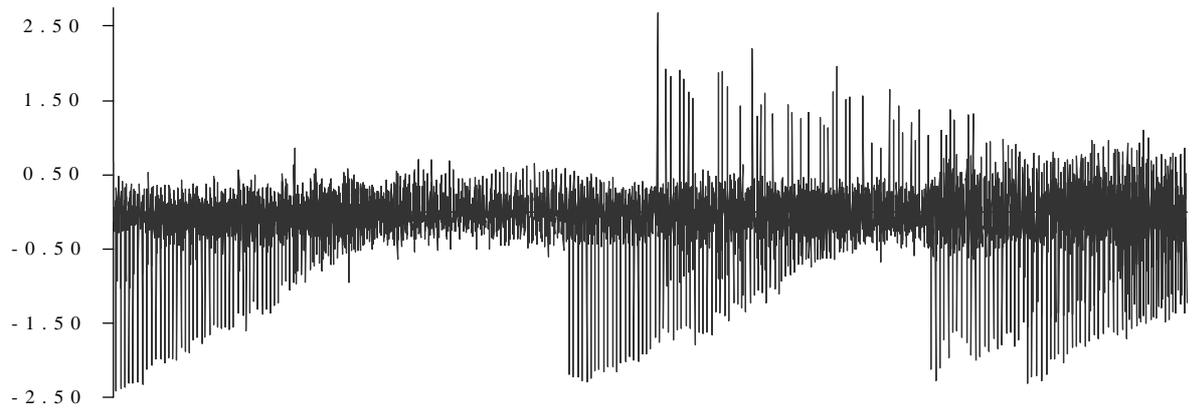
1994



1995

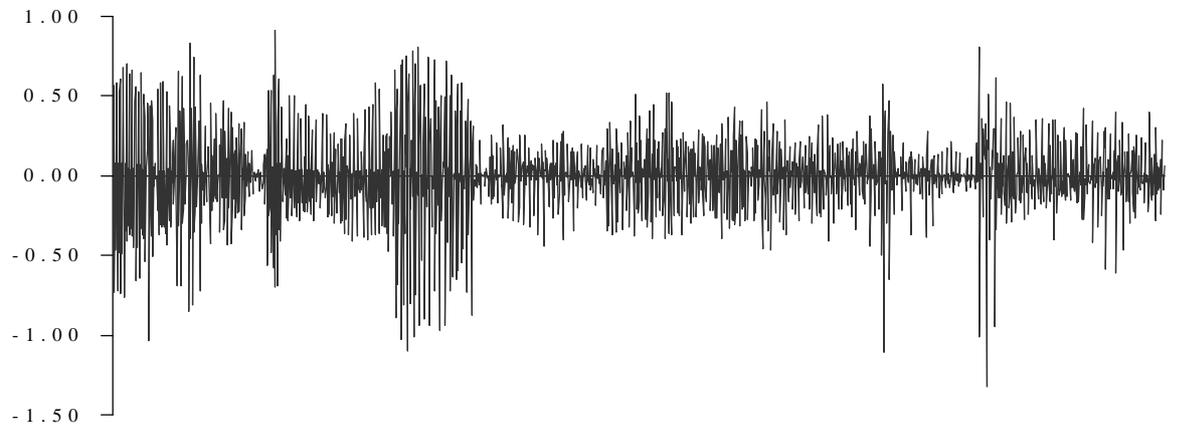


1996

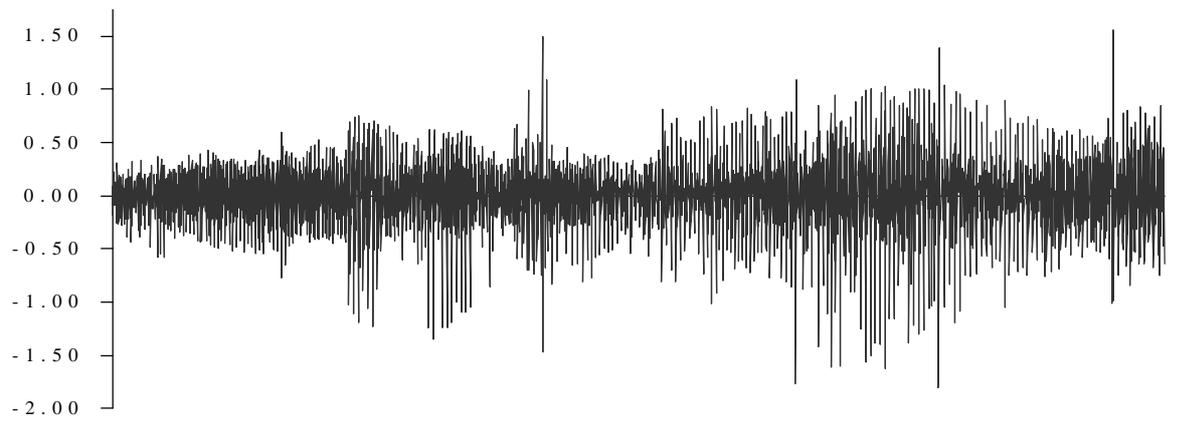


PROPUESTA II – B (LEGENDRE GRADO 4)

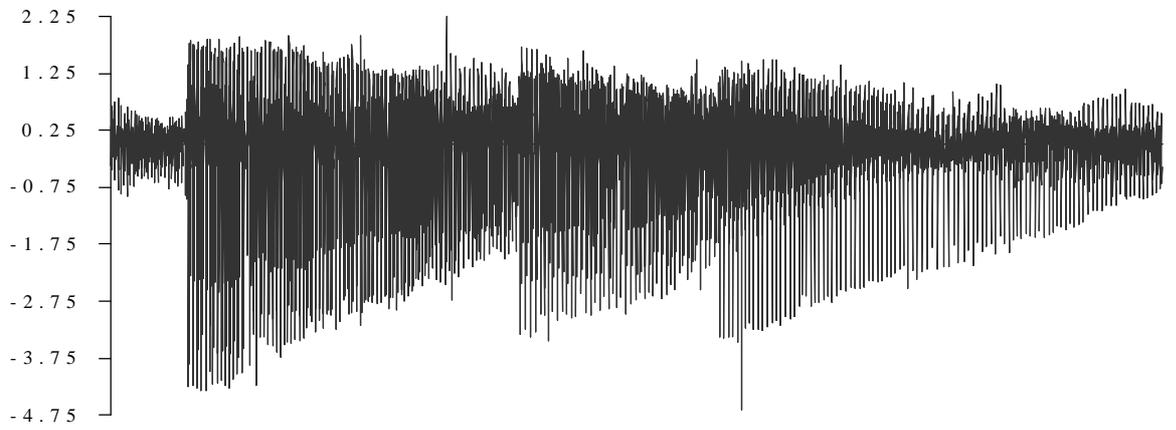
1991



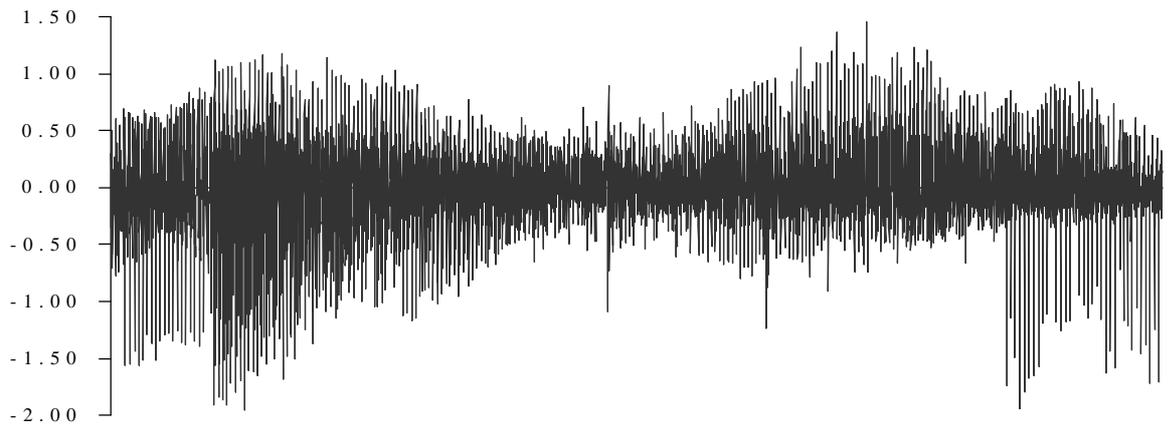
1992



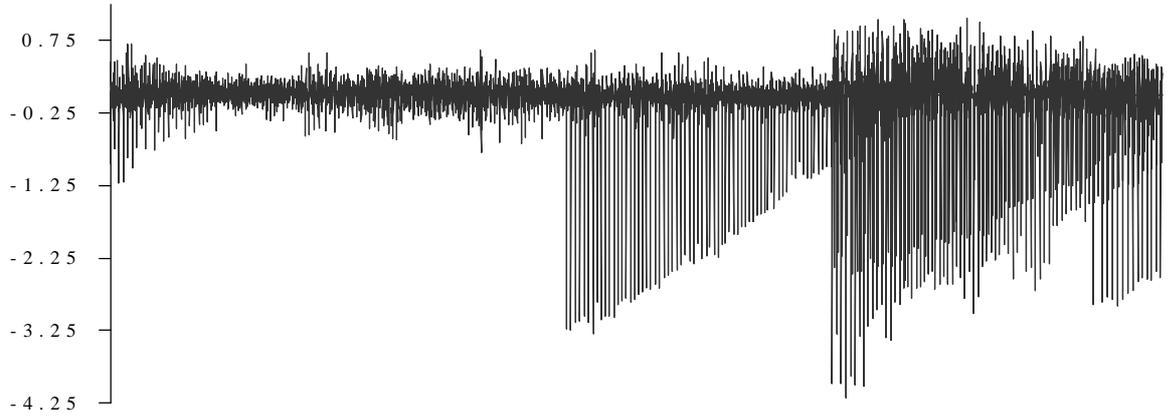
1993



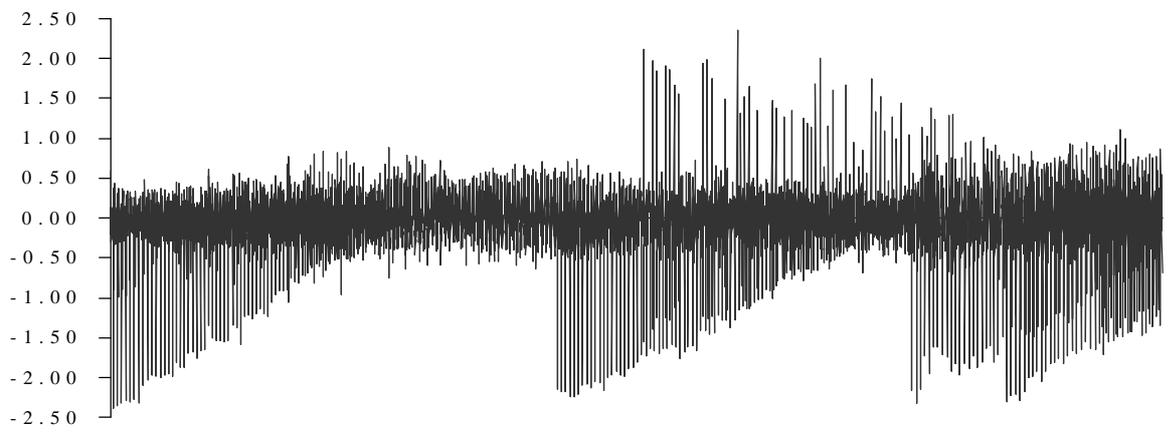
1994



1995



1996

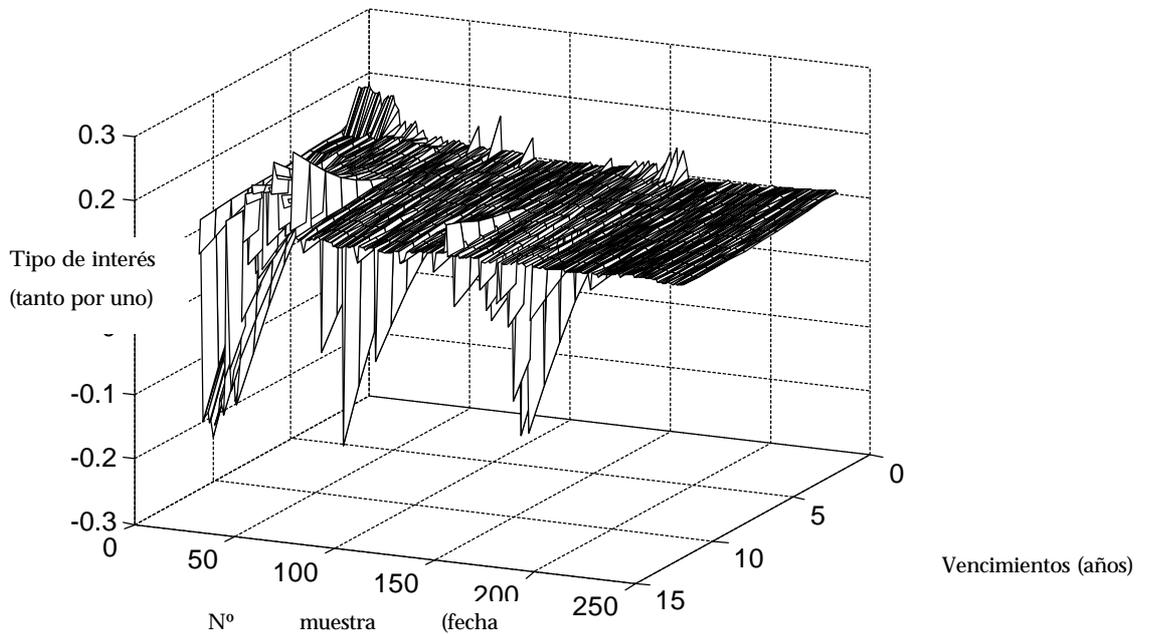


ANEXO 6: CURVAS DE TIPOS SPOT Y FORWARD
ESTIMADOS

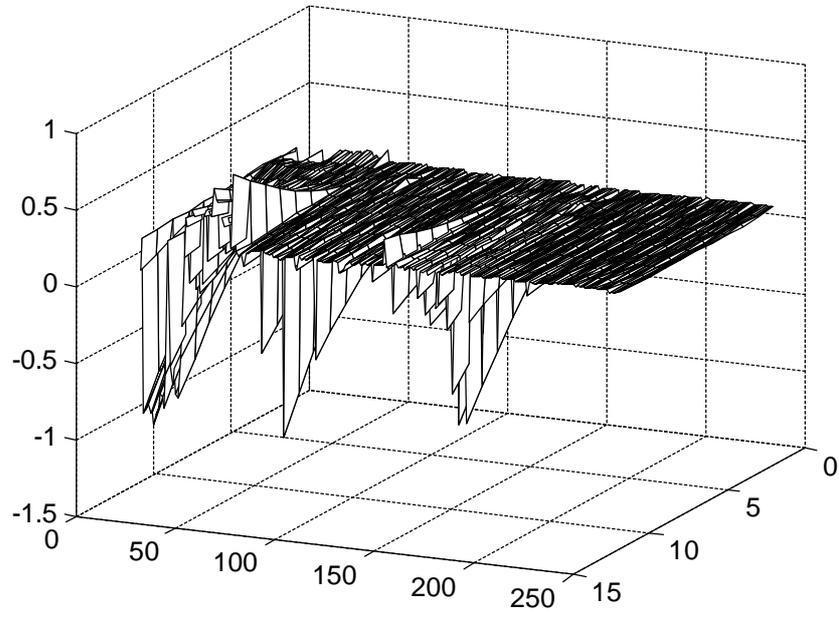
Todas las gráficas de este anexo siguen la misma estructura, en el eje x , $[0,15]$ o $[0,30]$, se representan los vencimientos medidos en años, en el eje y , $[0,250]$, cada muestra (día de observación) y en el eje z el valor en tanto por uno de los tipos representados. Un ejemplo se observa en la siguiente.

COHEN - KRAMER - WAUGH (1966)

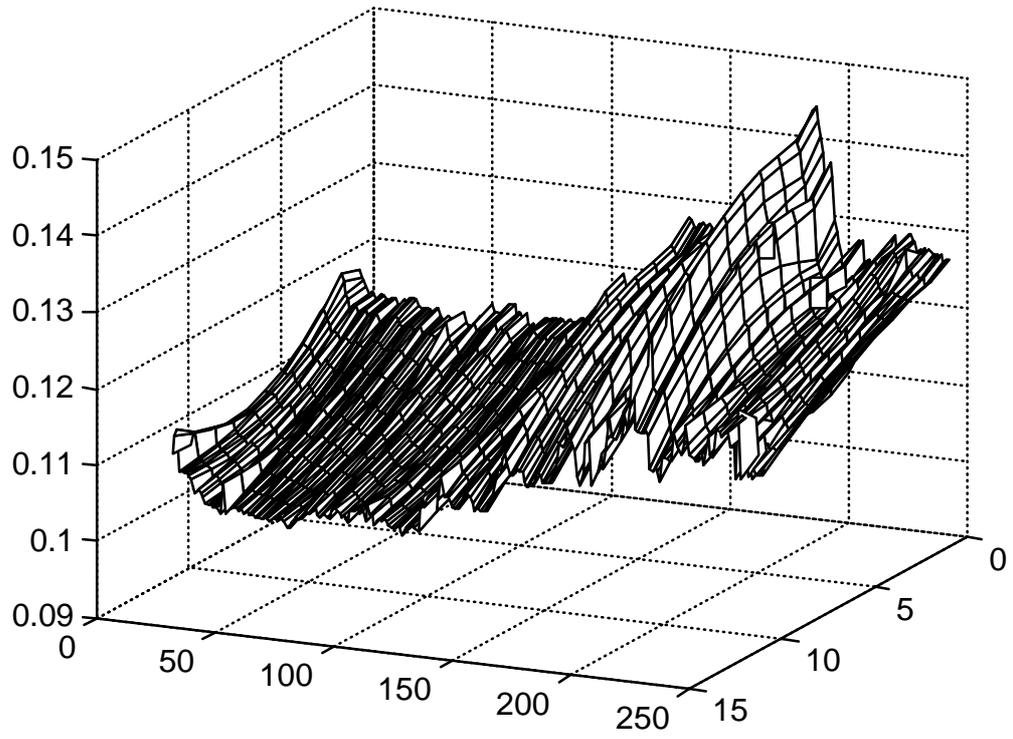
Spot - 1991



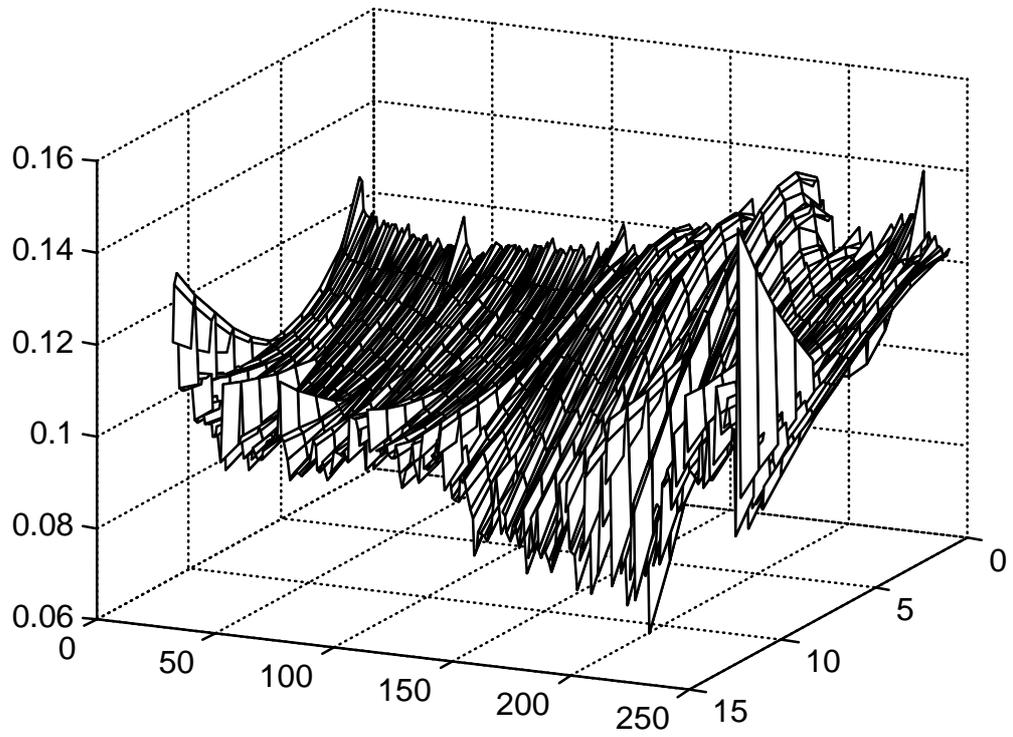
Forward - 1991



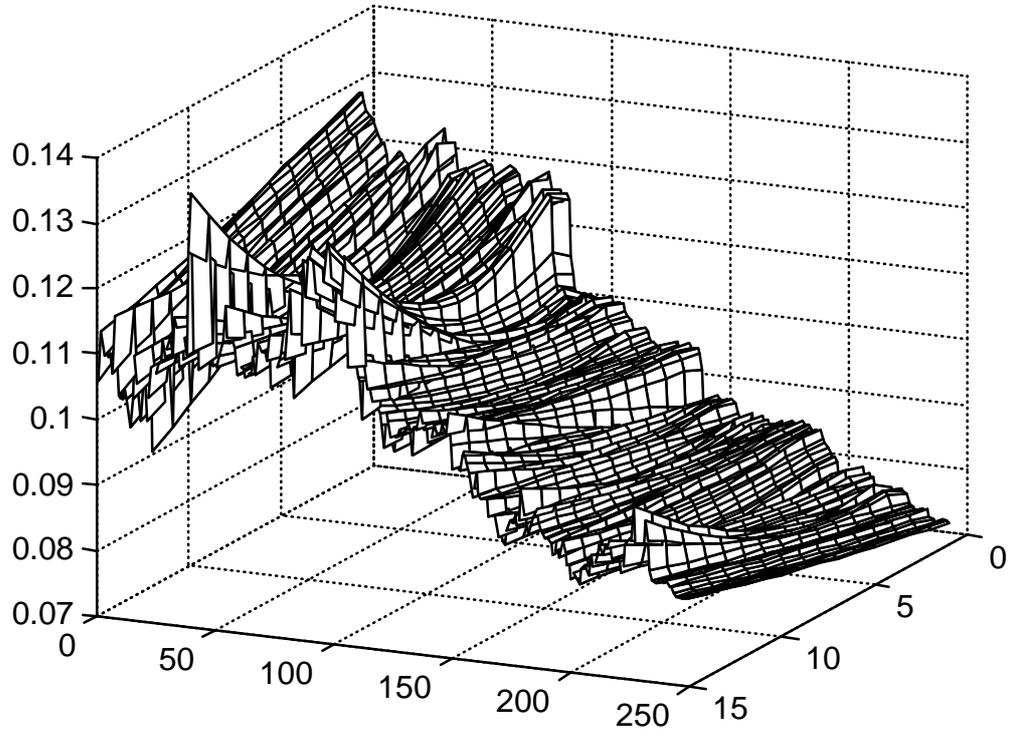
Spot - 1992



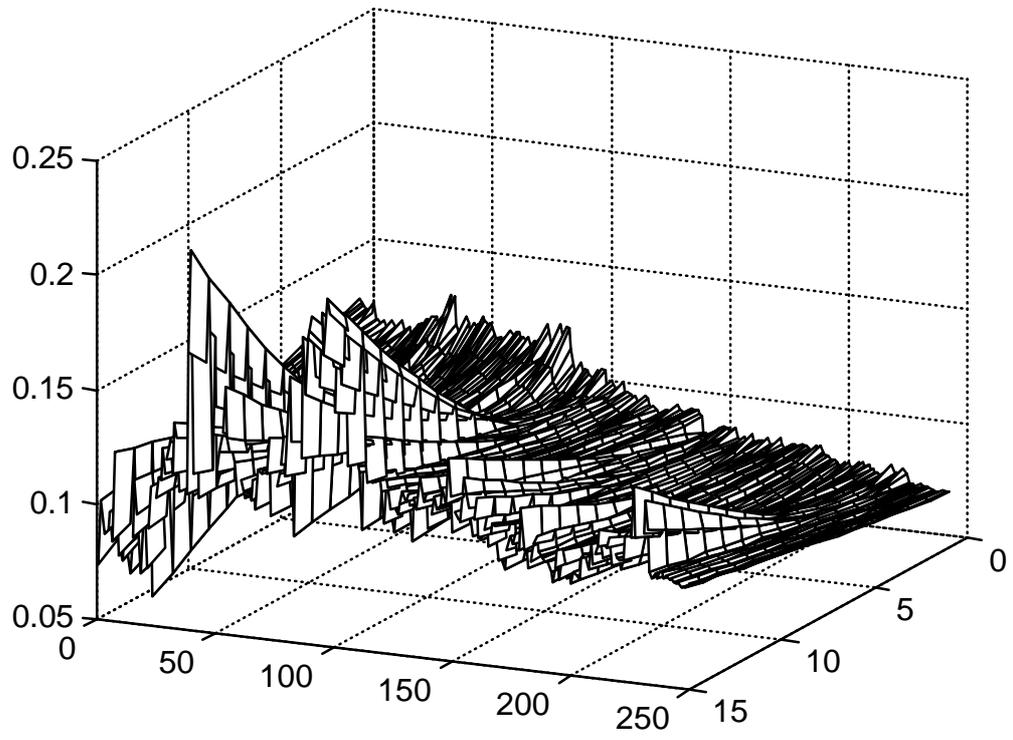
Forward - 1992



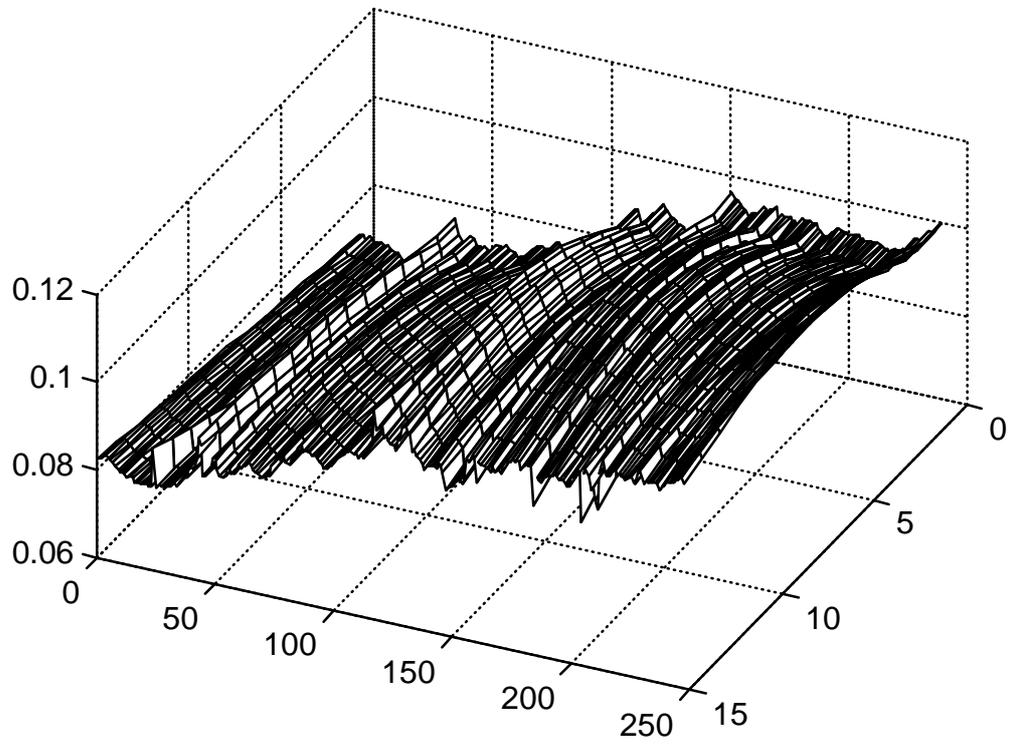
Spot - 1993



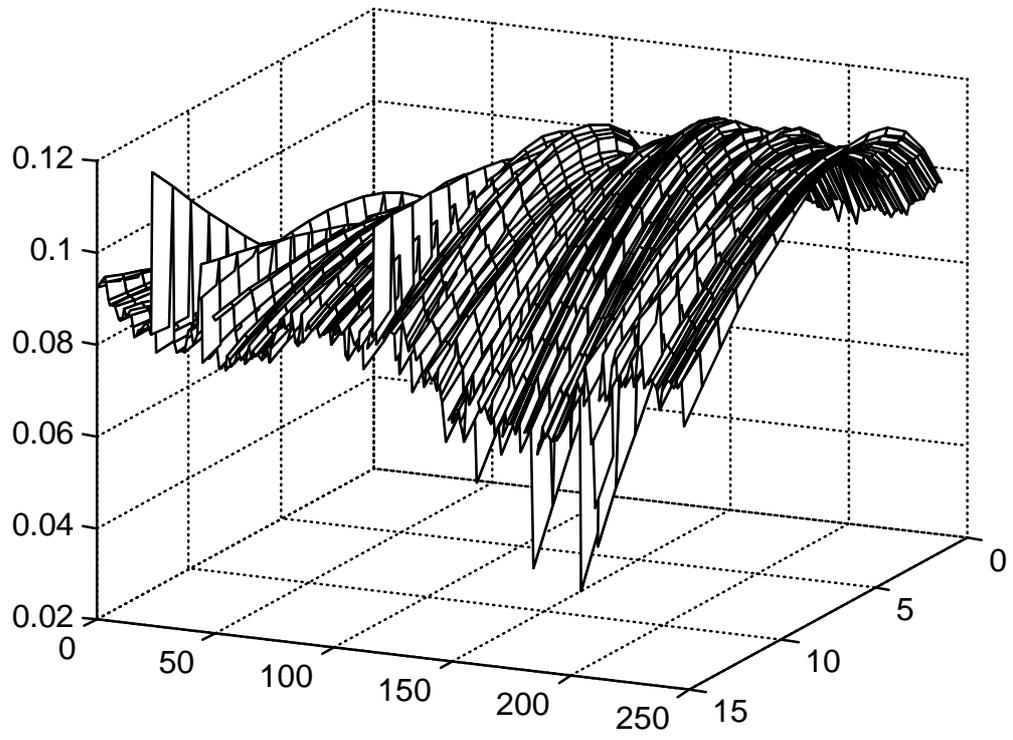
Forward - 1993



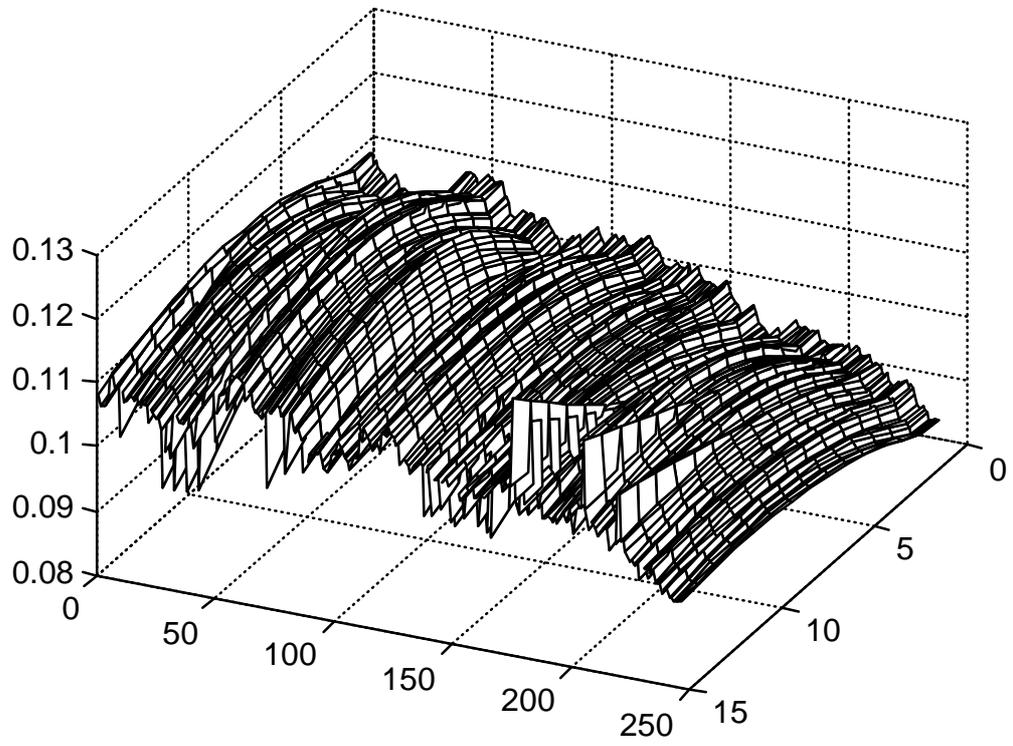
Spot - 1994



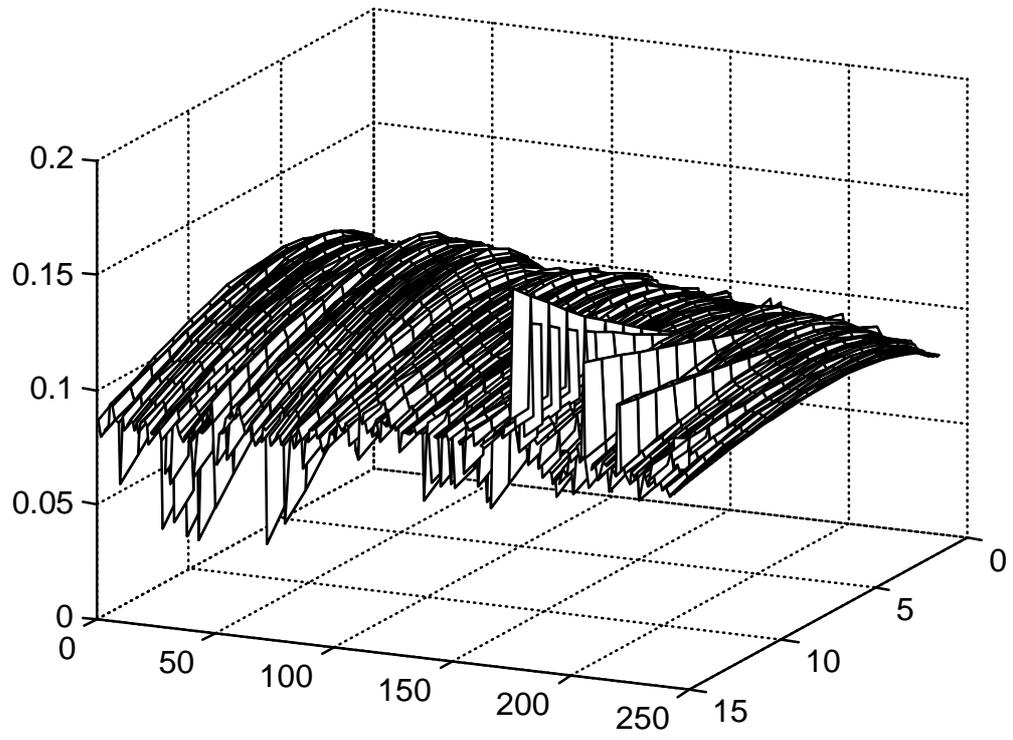
Forward - 1994



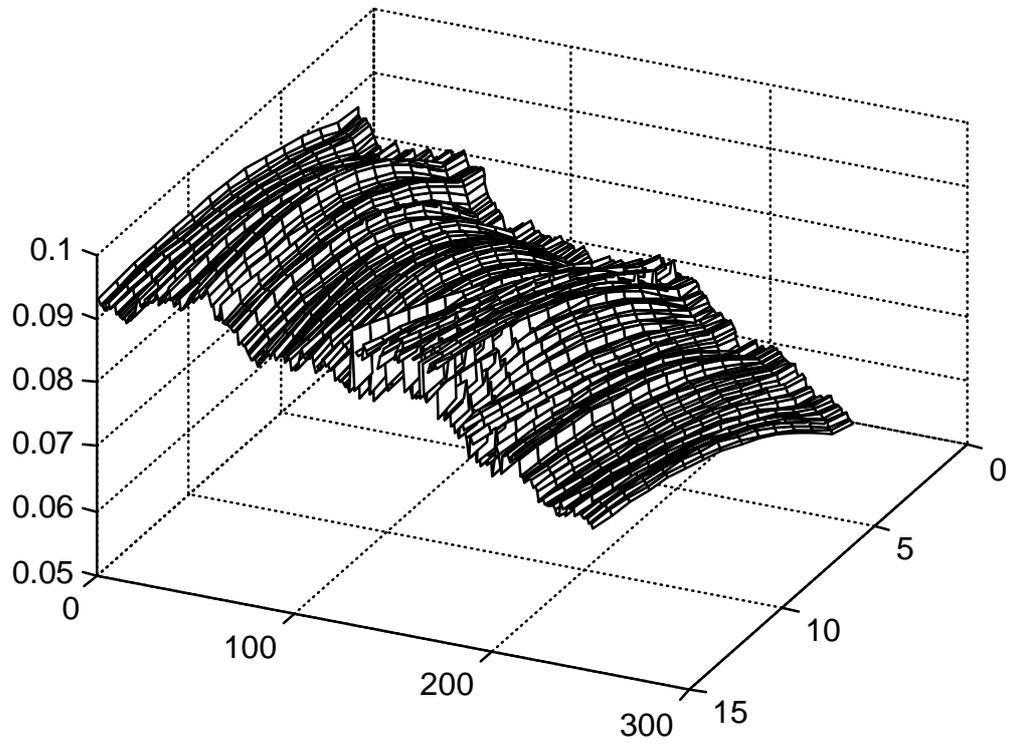
Spot - 1995



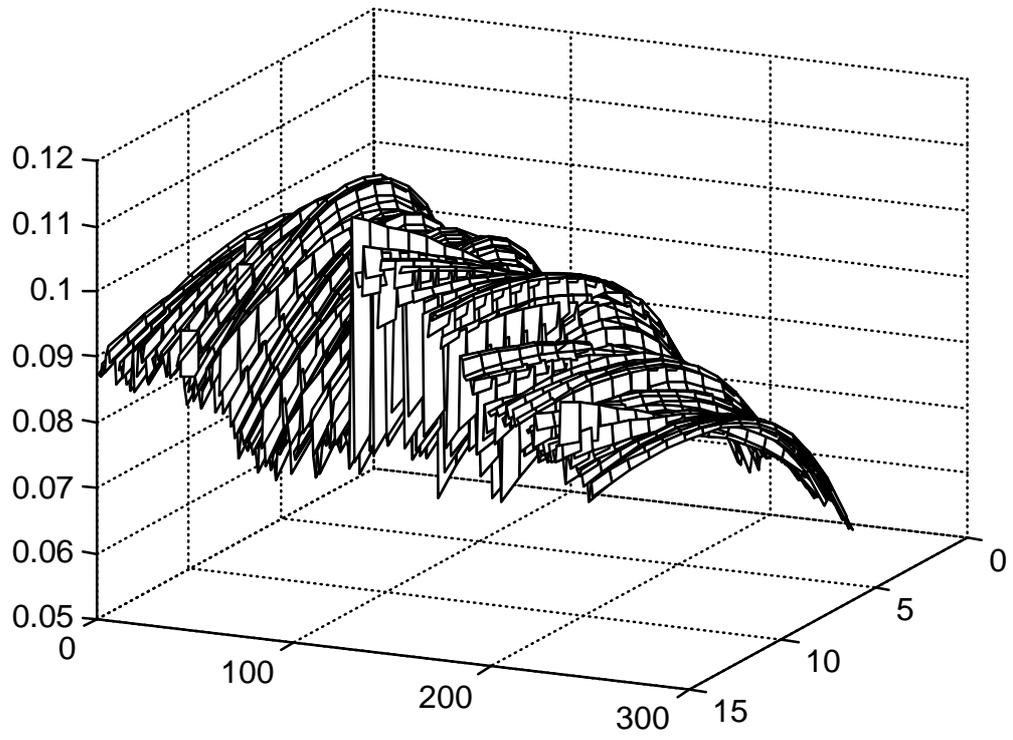
Forward - 1995



Spot - 1996

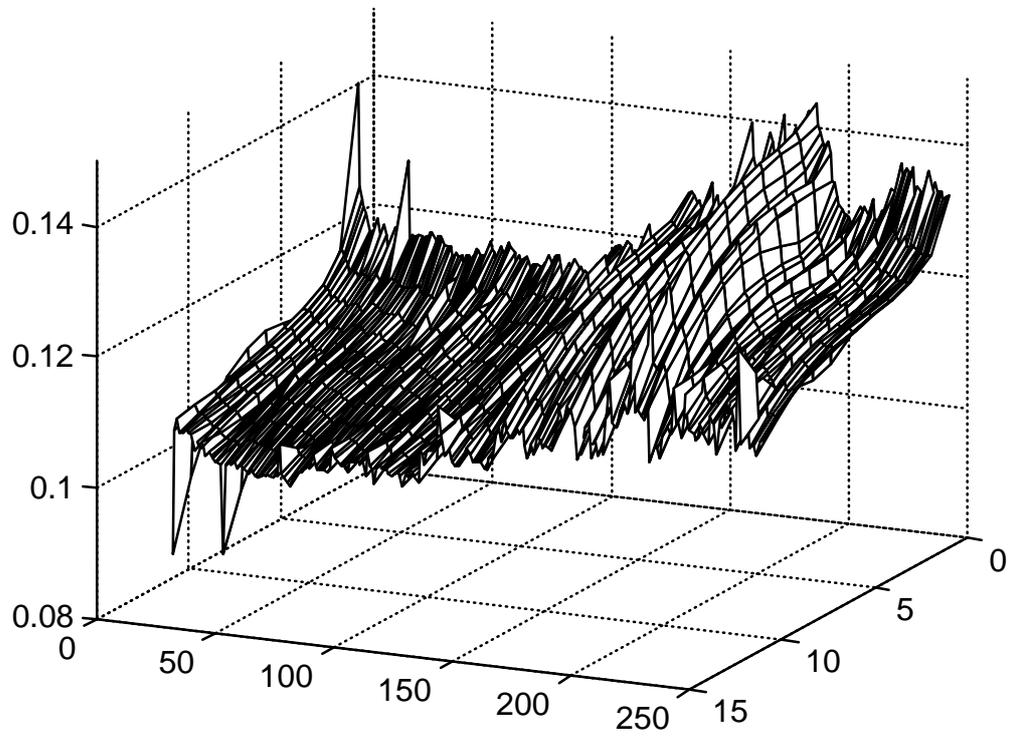


Forward - 1996

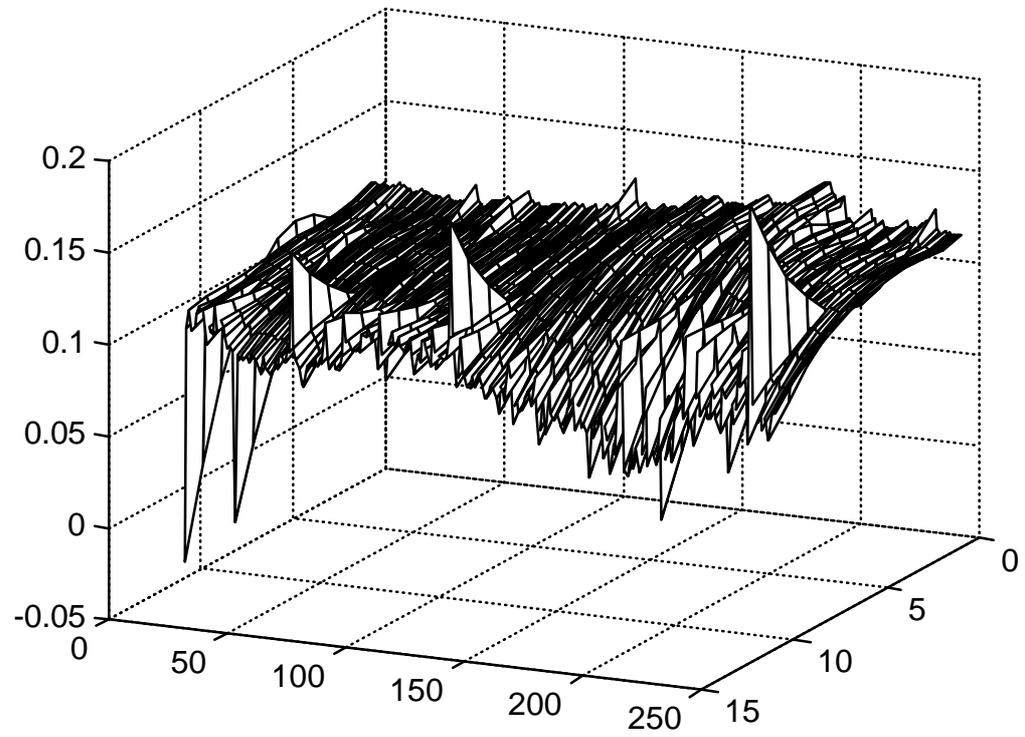


FISHER (1966)

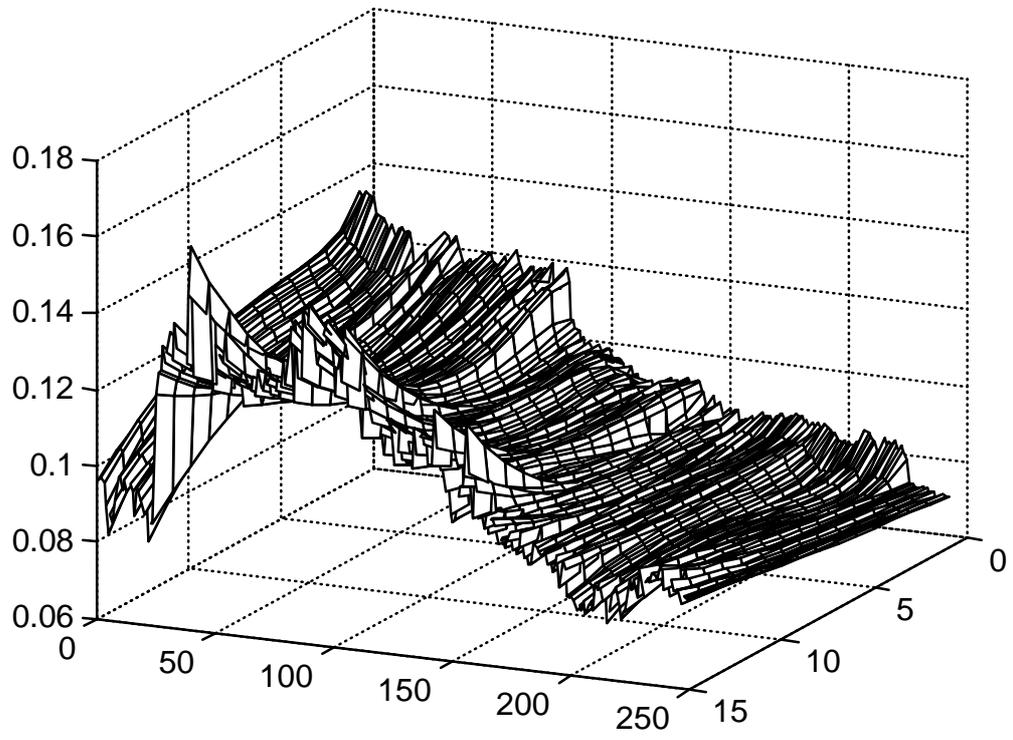
Spot - 1992



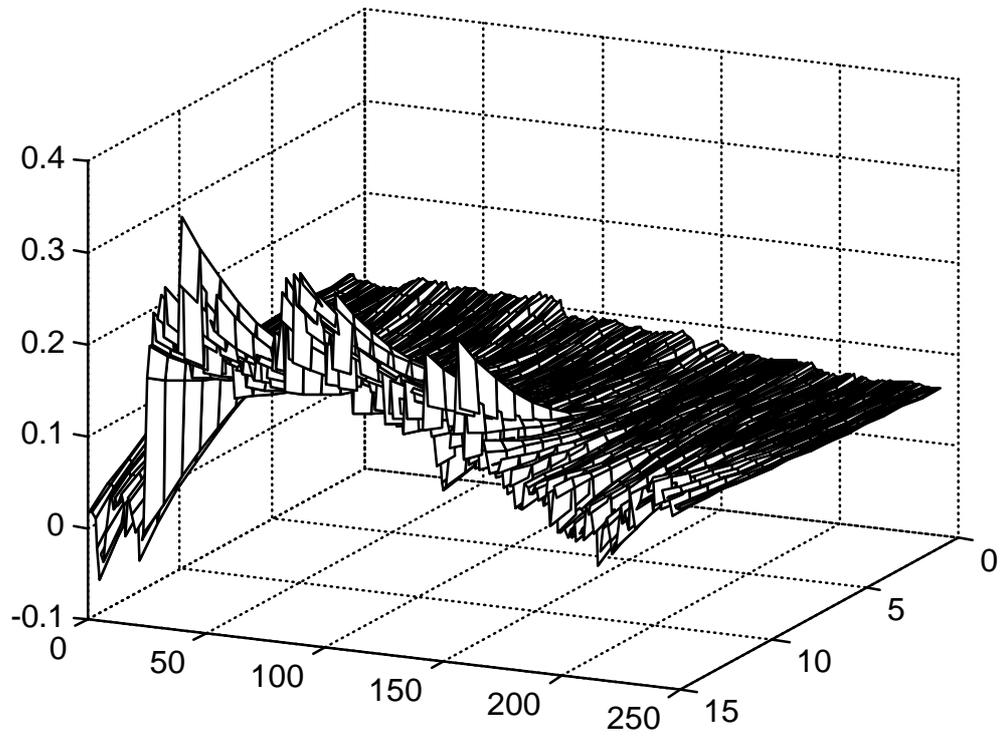
Forward - 1992



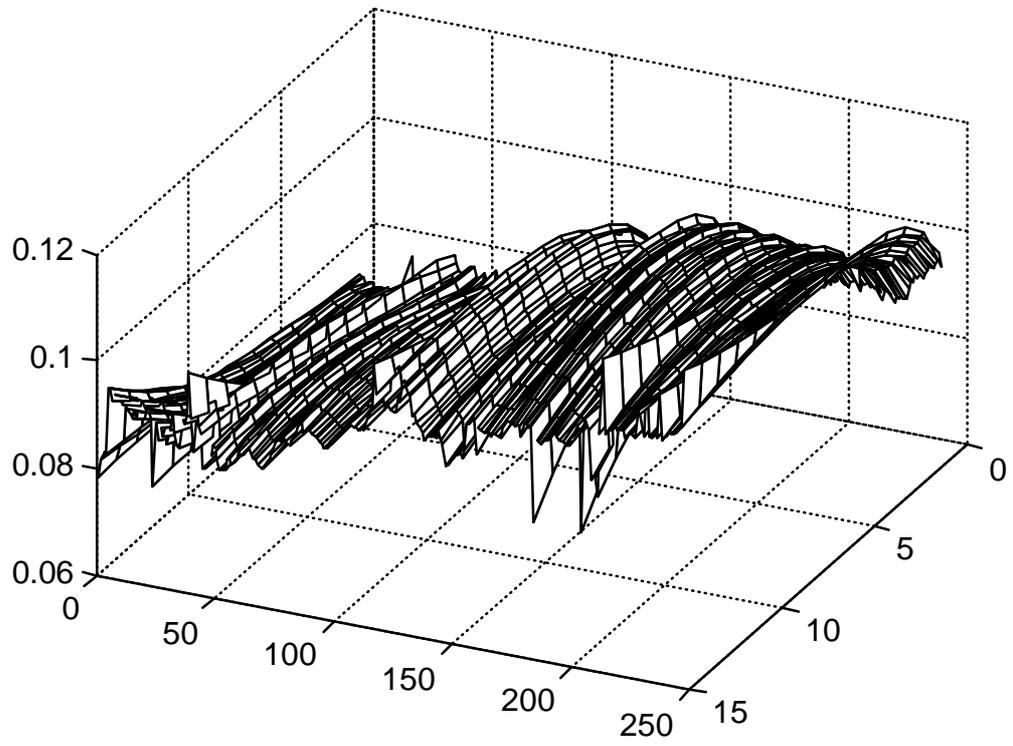
Spot - 1993



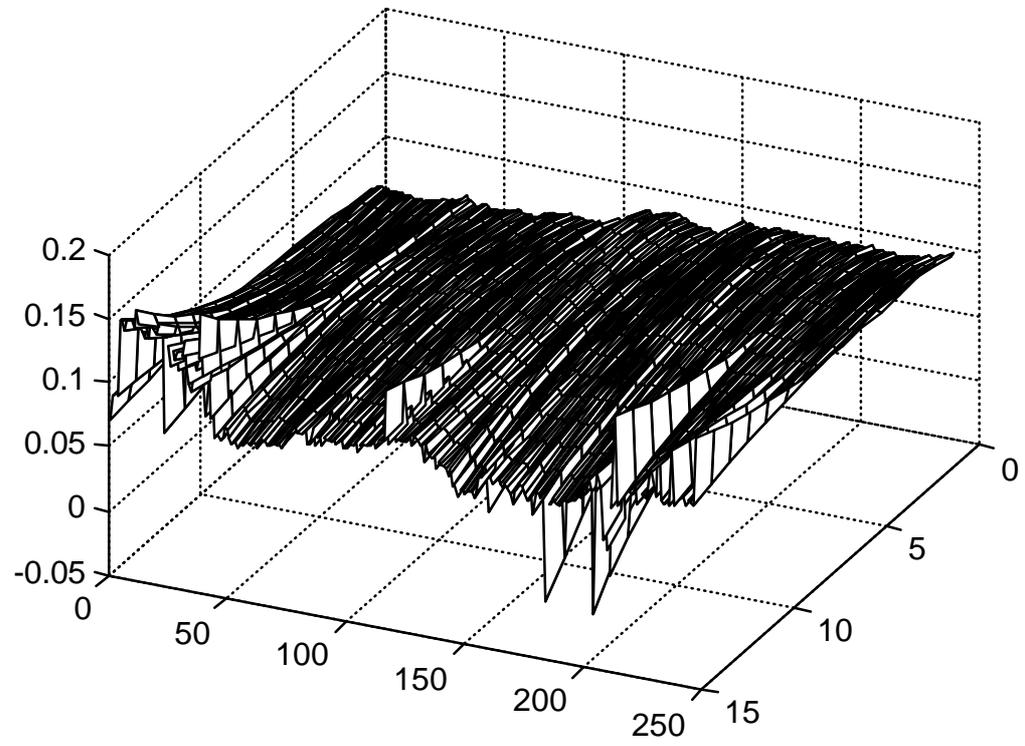
Forward - 1993



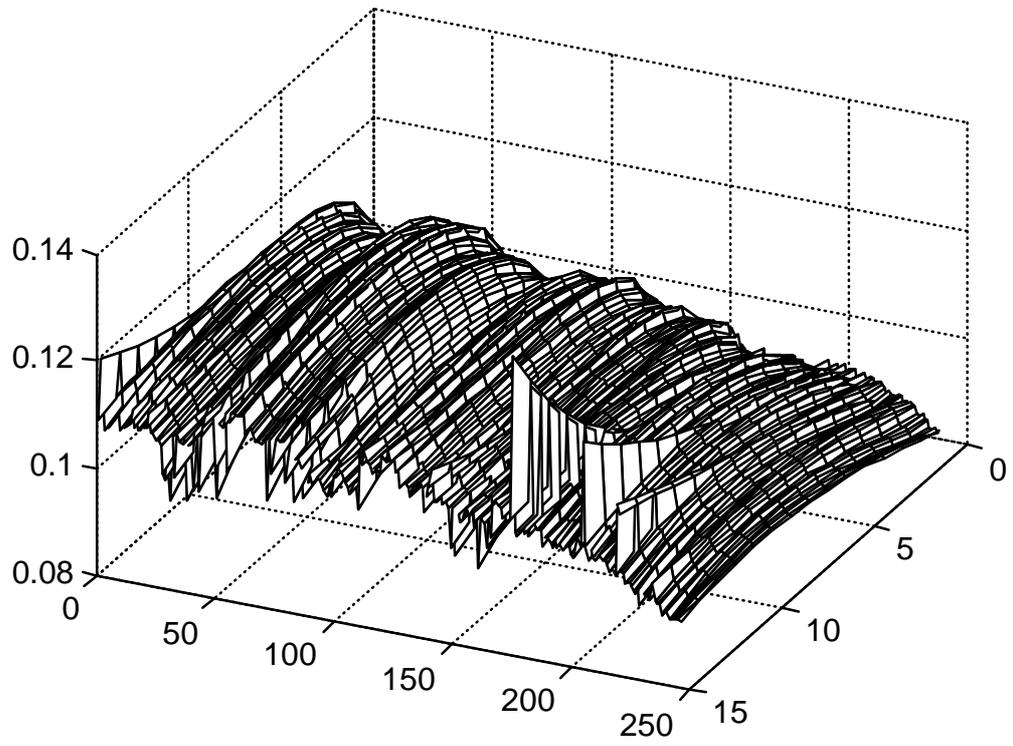
Spot - 1994



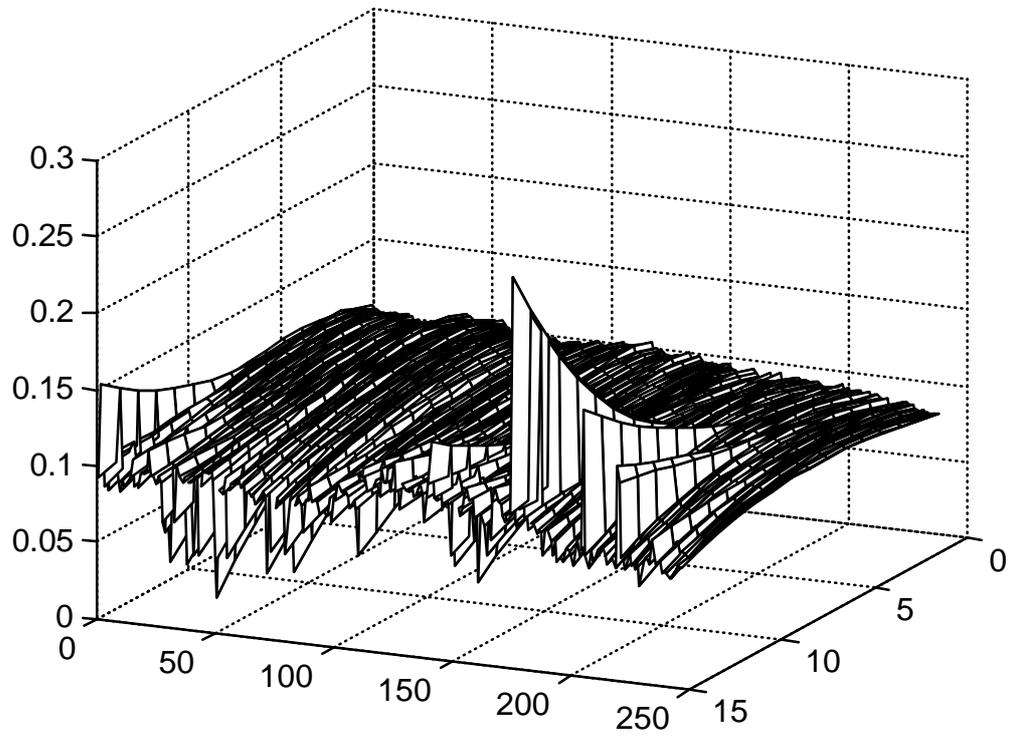
Forward - 1994



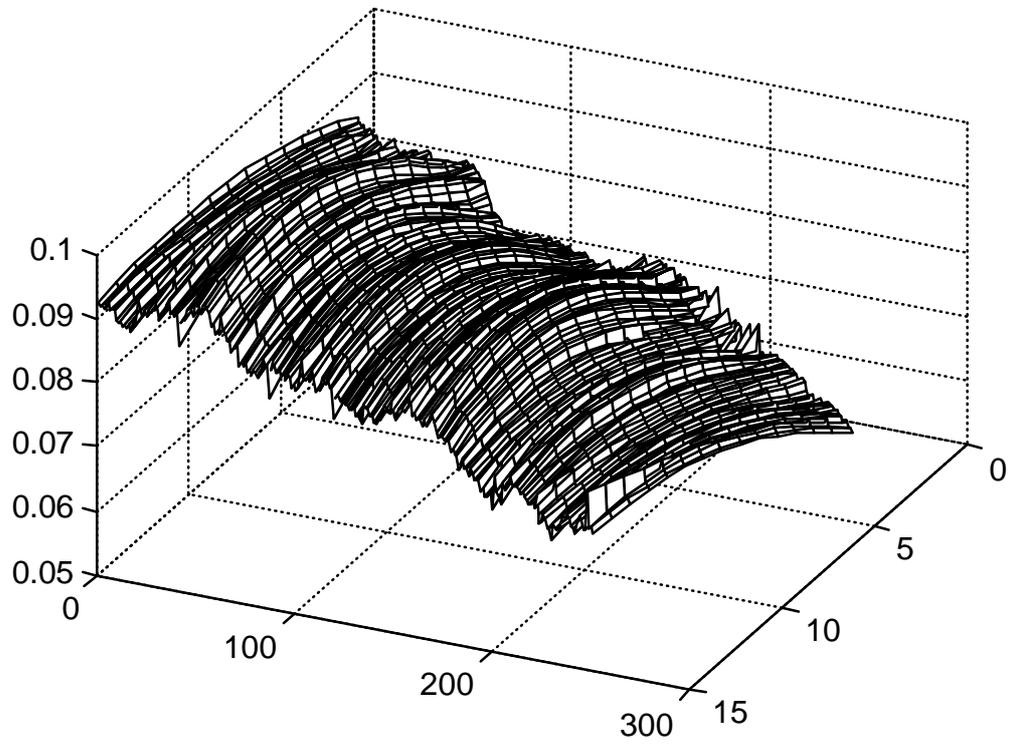
Spot - 1995



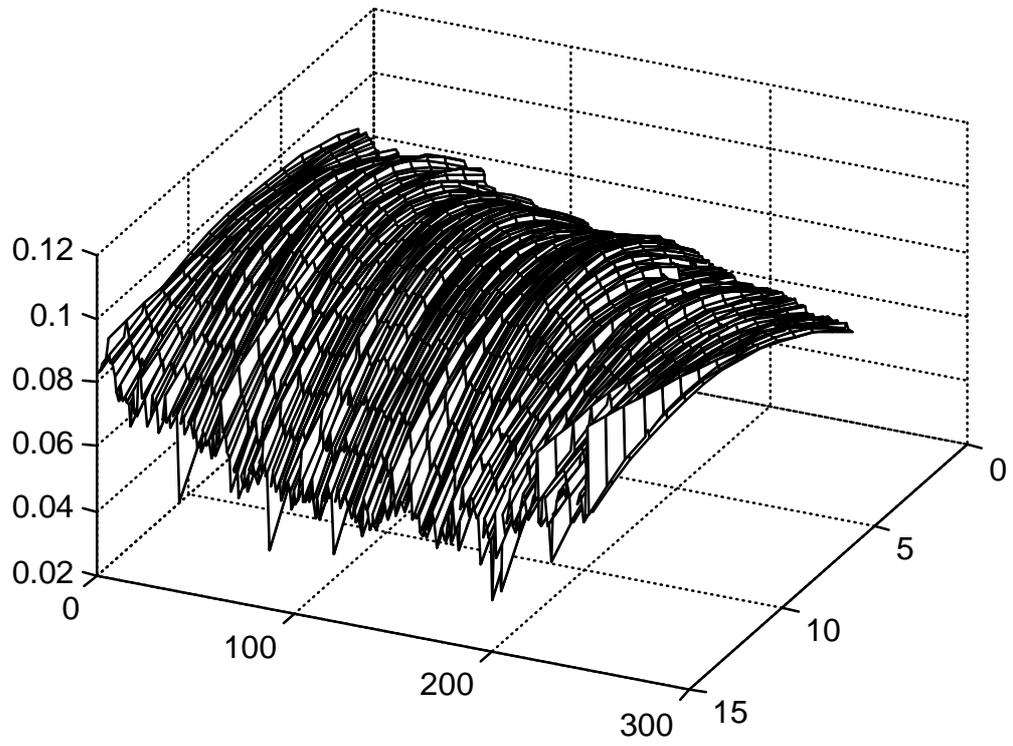
Forward - 1995



Spot - 1996

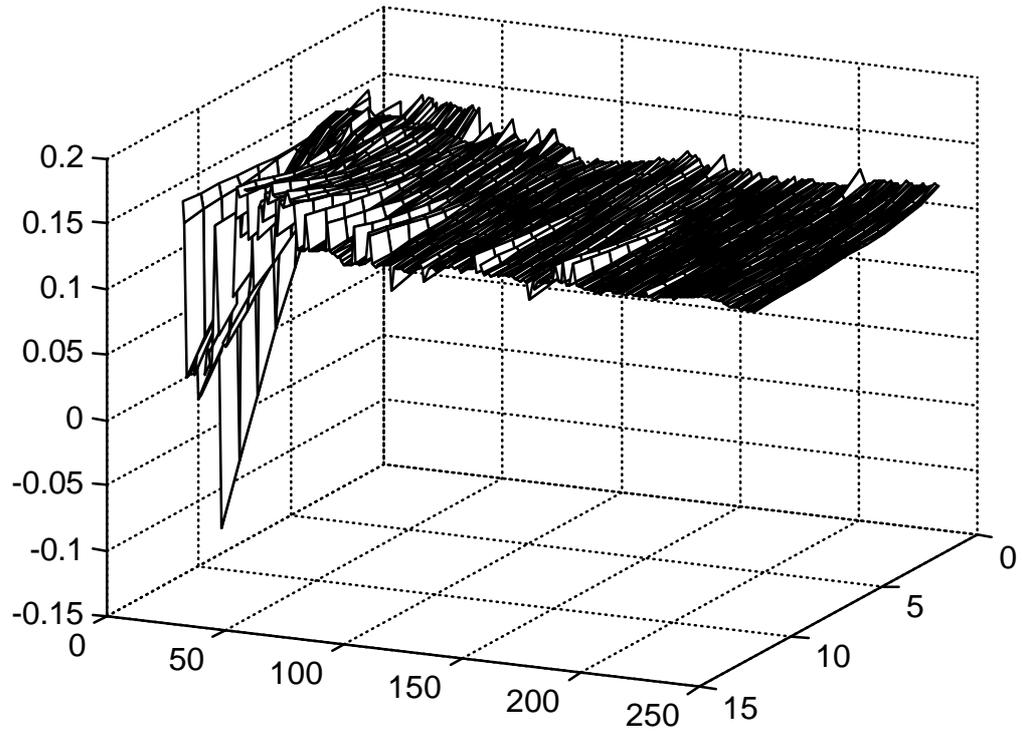


Forward - 1996

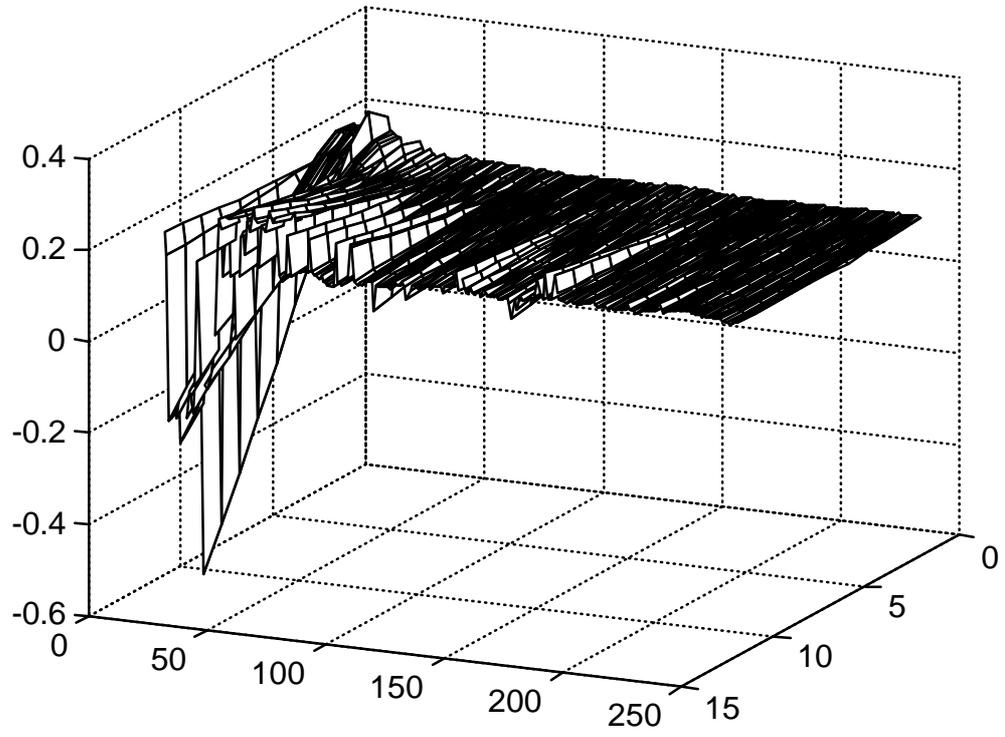


BRADLEY - CRANE (1973)

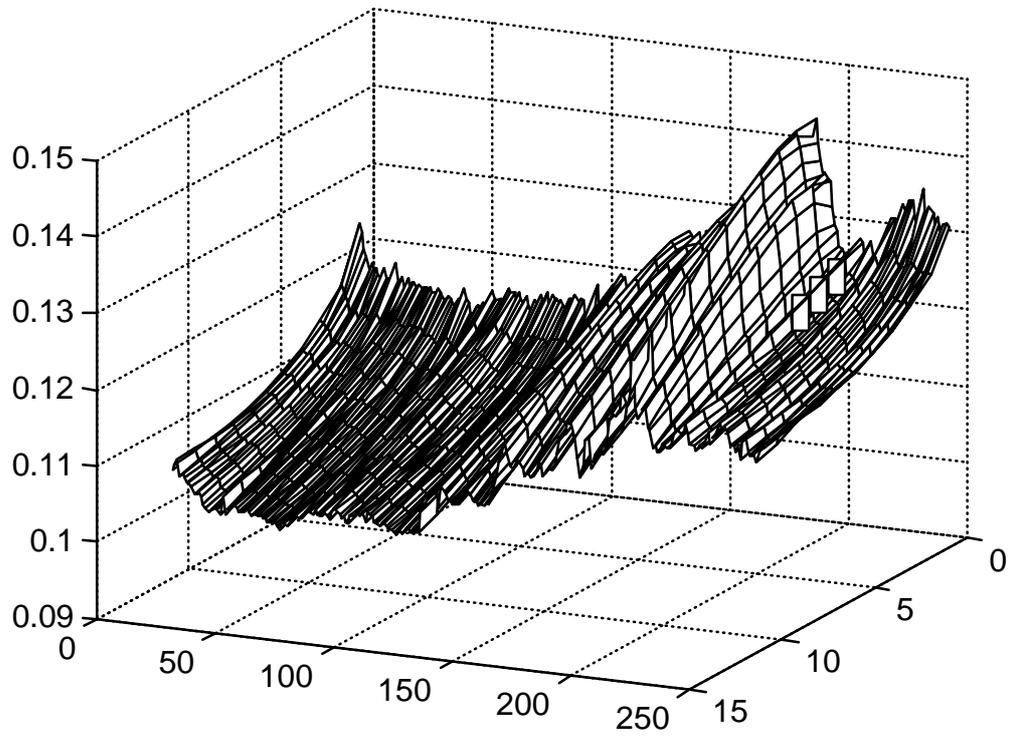
Spot - 1991



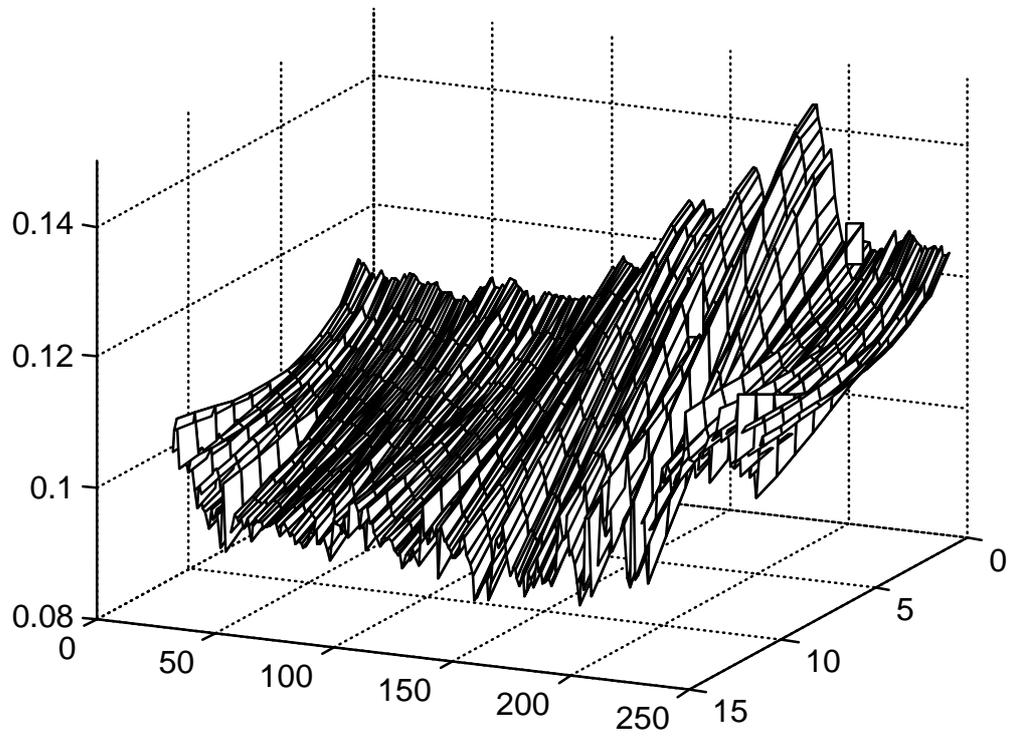
Forward - 1991



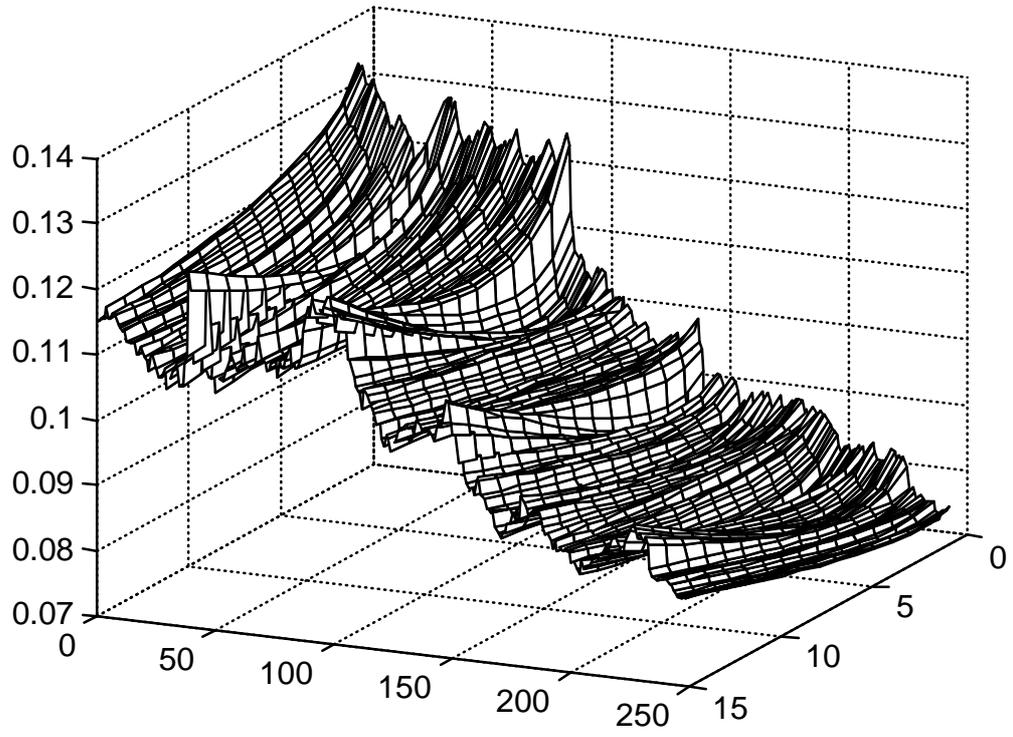
Spot - 1992



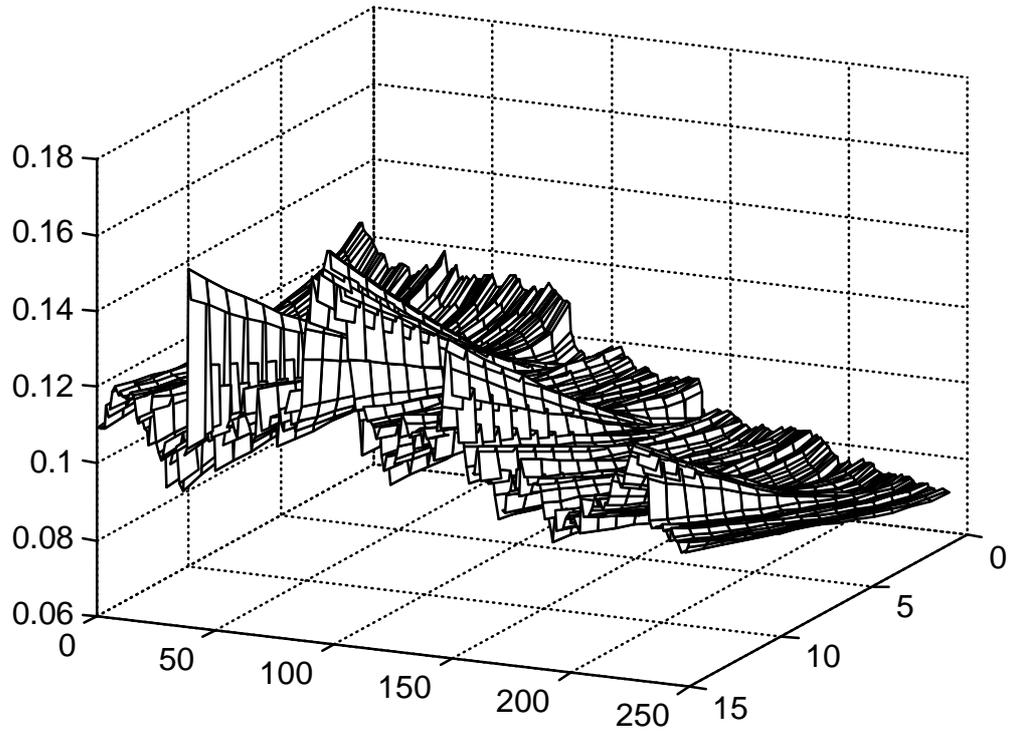
Forward - 1992



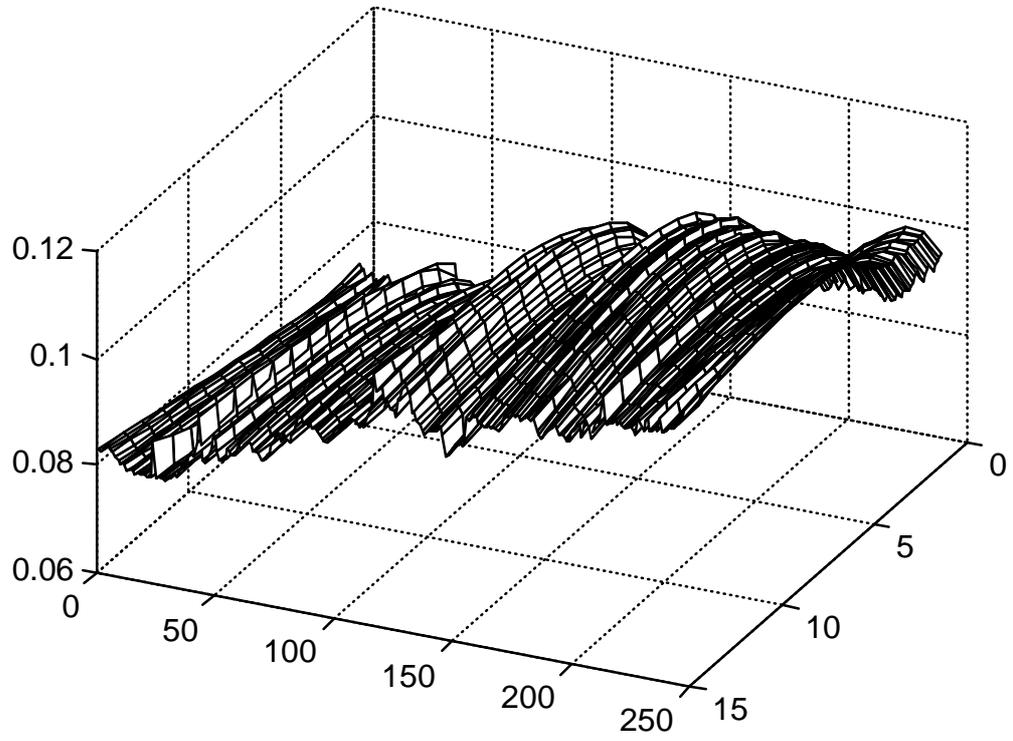
Spot - 1993



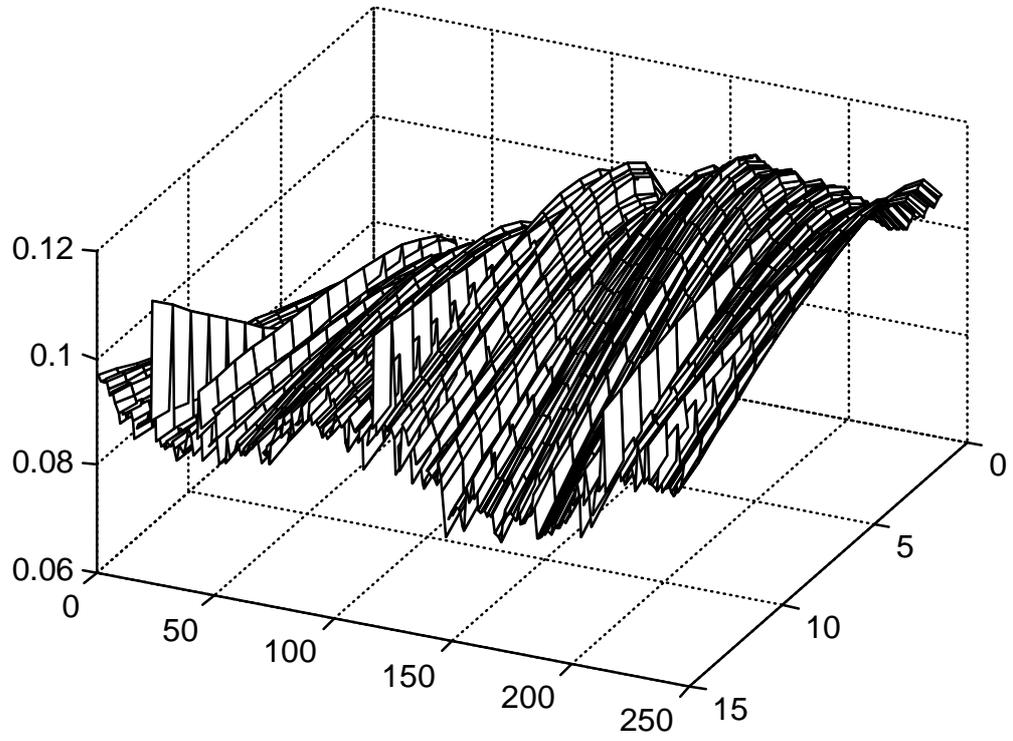
Forward - 1993



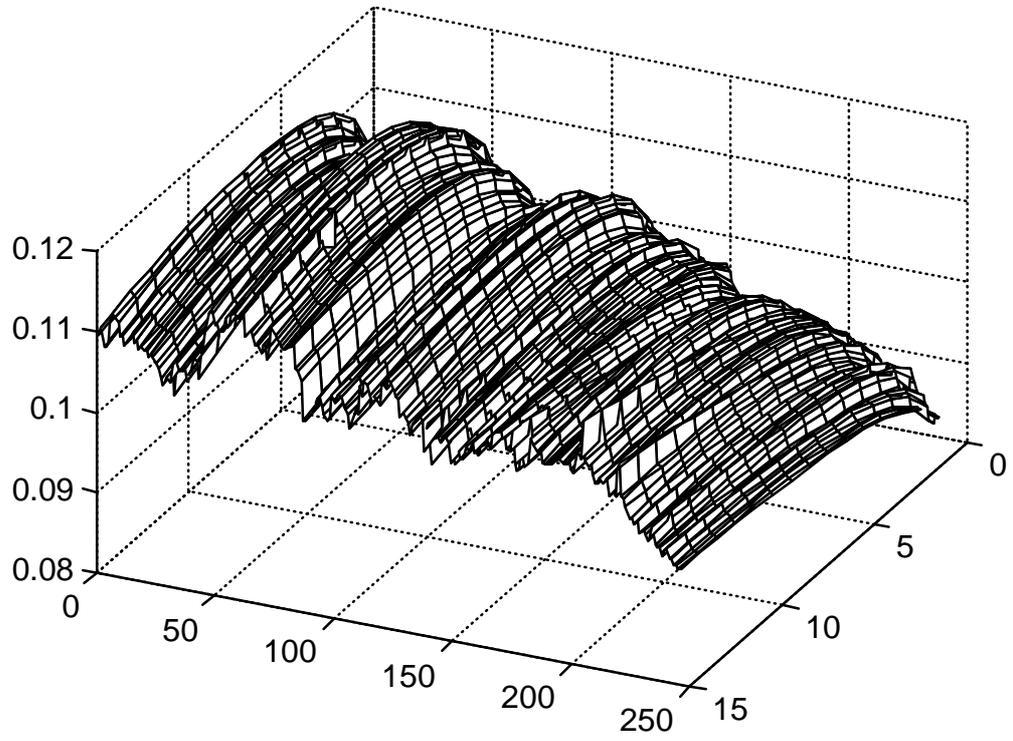
Spot - 1994



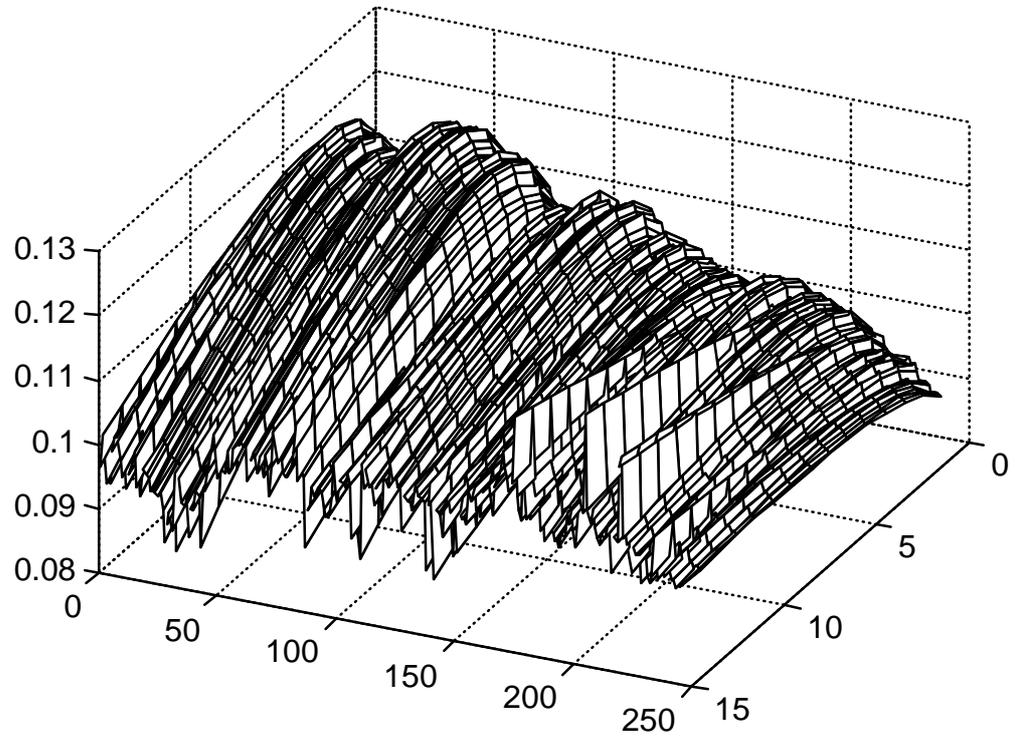
Forward - 1994



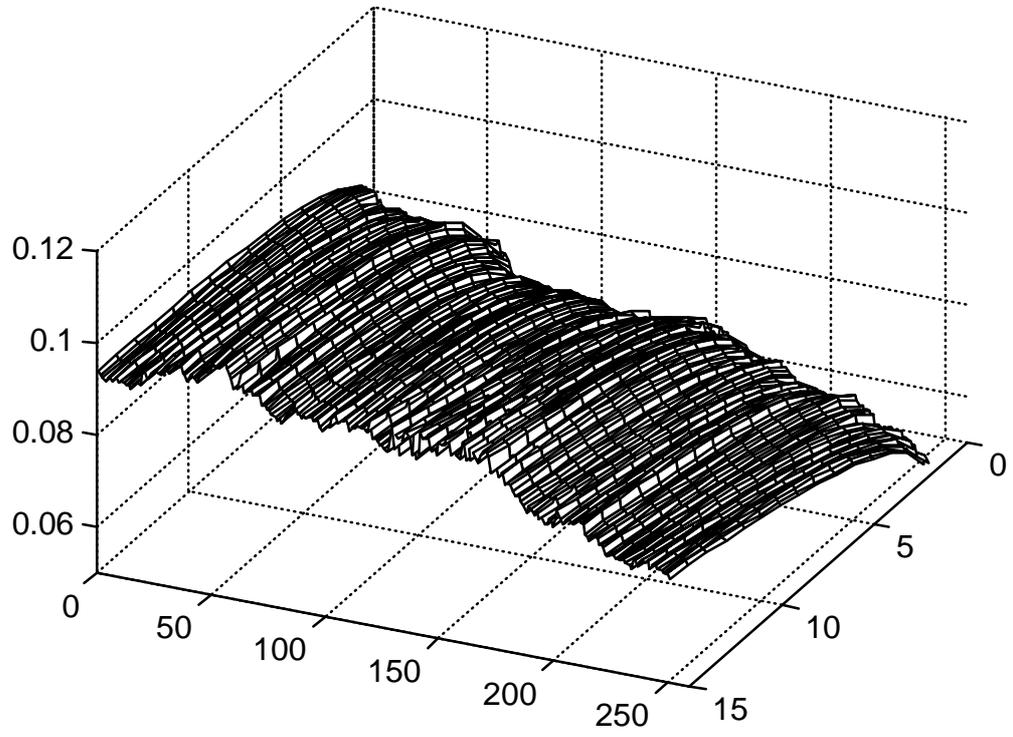
Spot - 1995



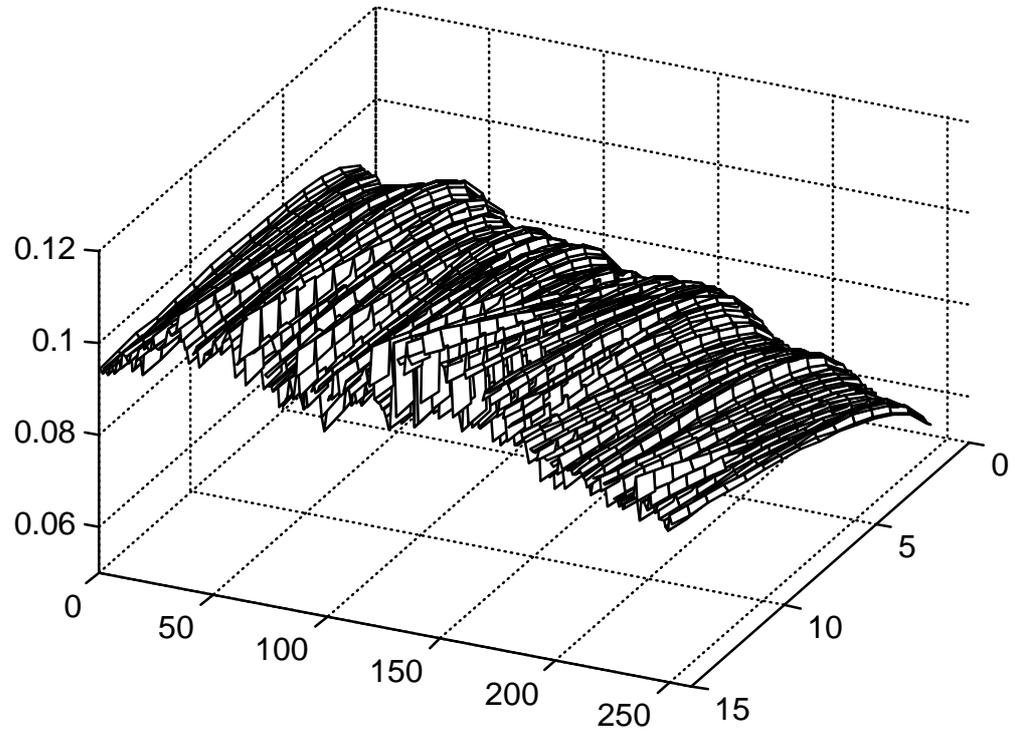
Forward - 1995



Spot - 1996

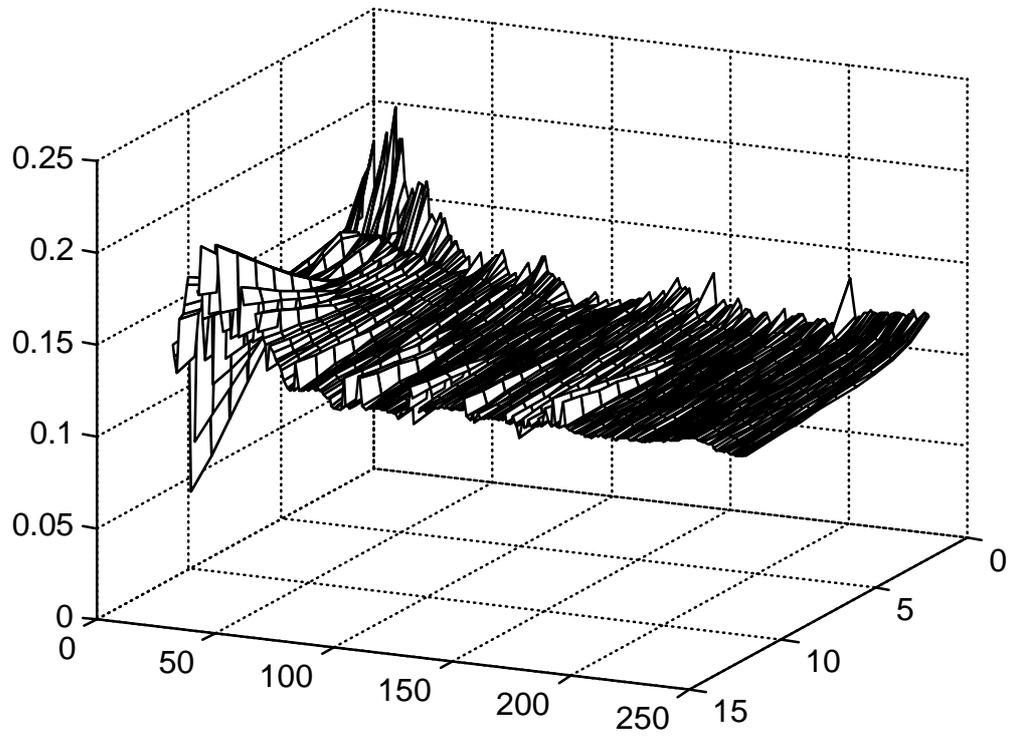


Forward - 1996

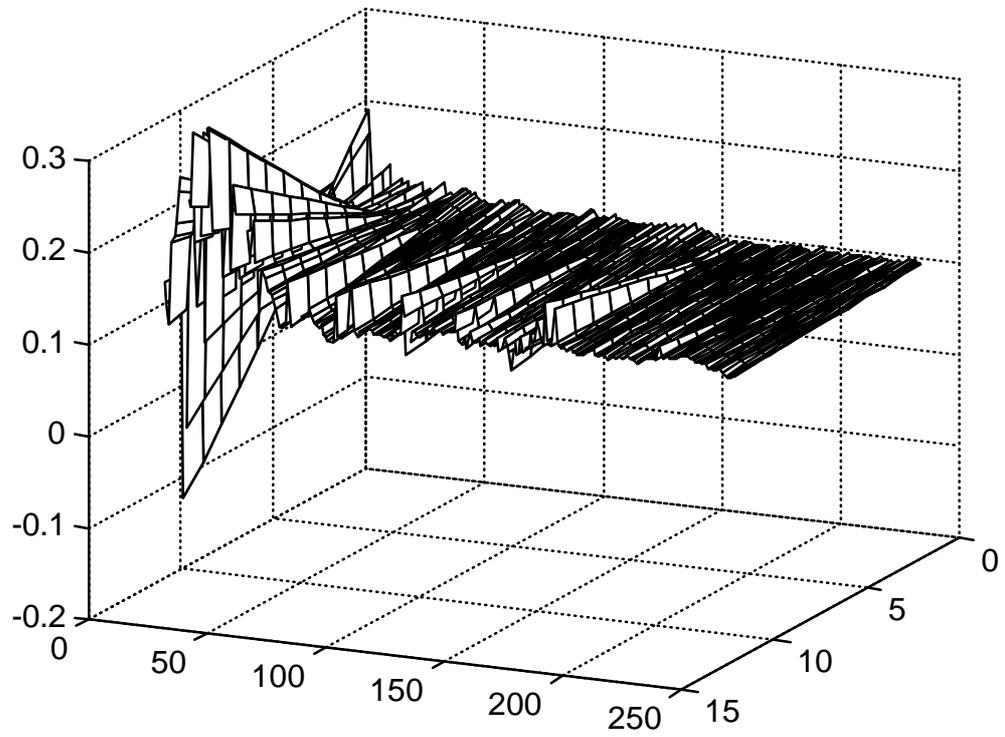


ECHOLS - ELLIOTT (1976)

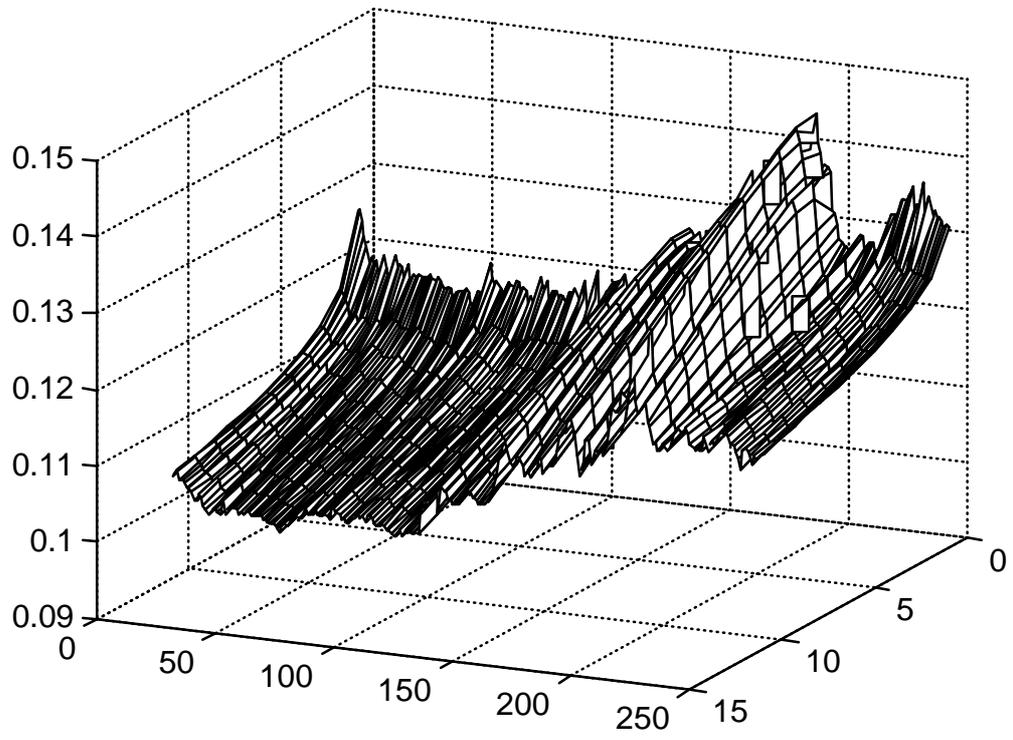
Spot - 1991



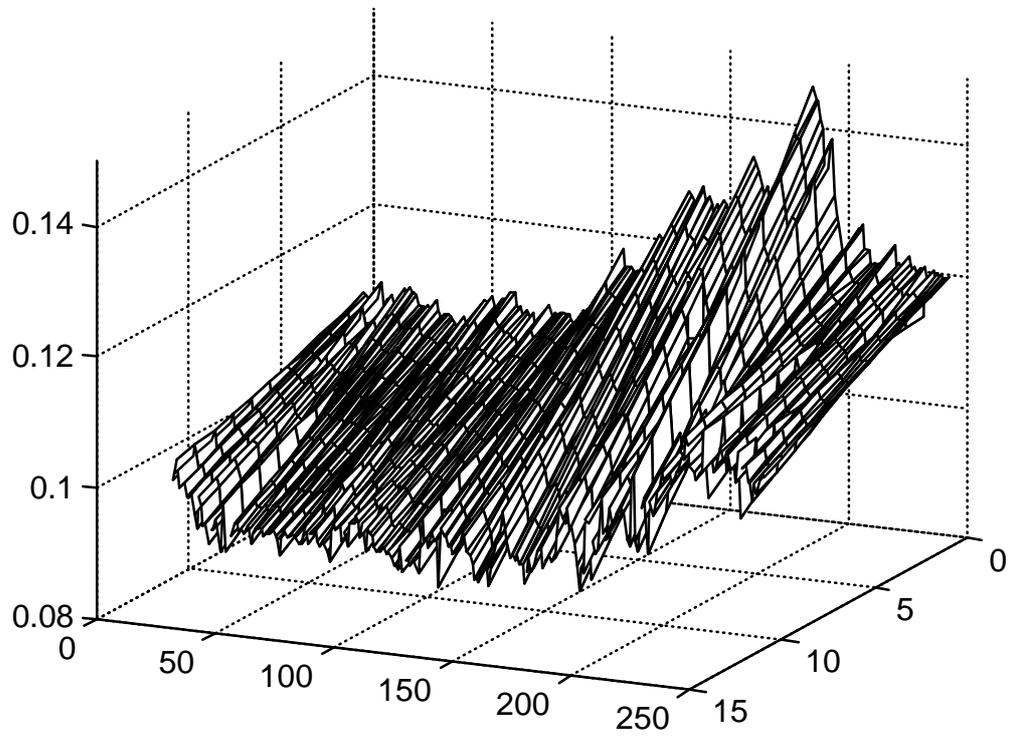
Forward - 1991



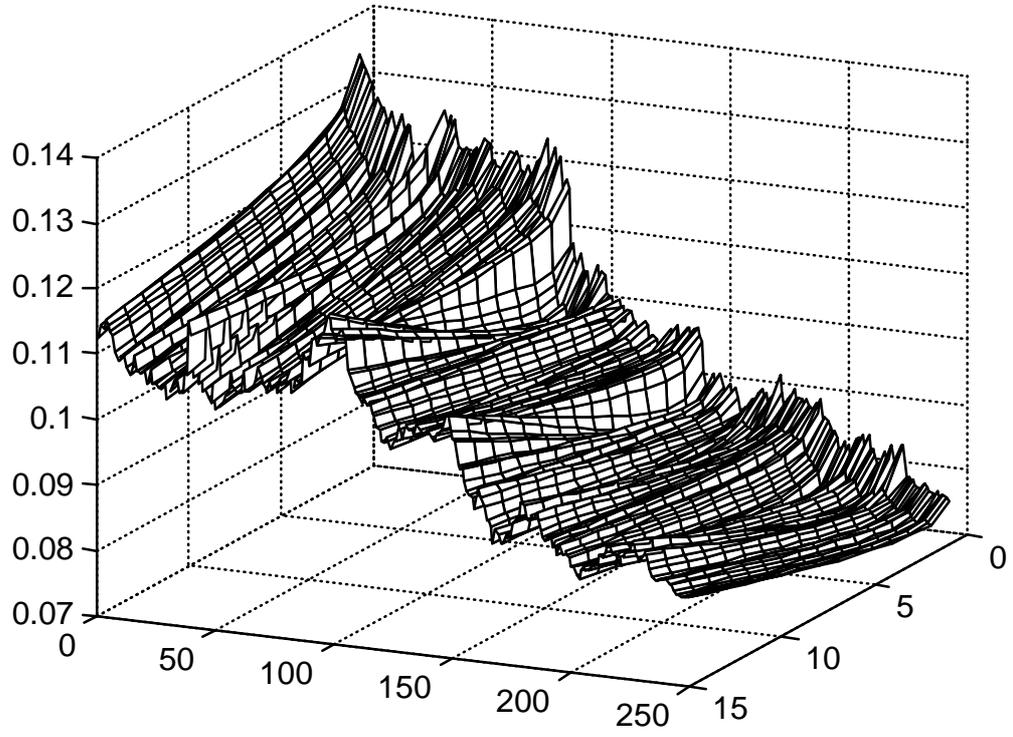
Spot - 1992



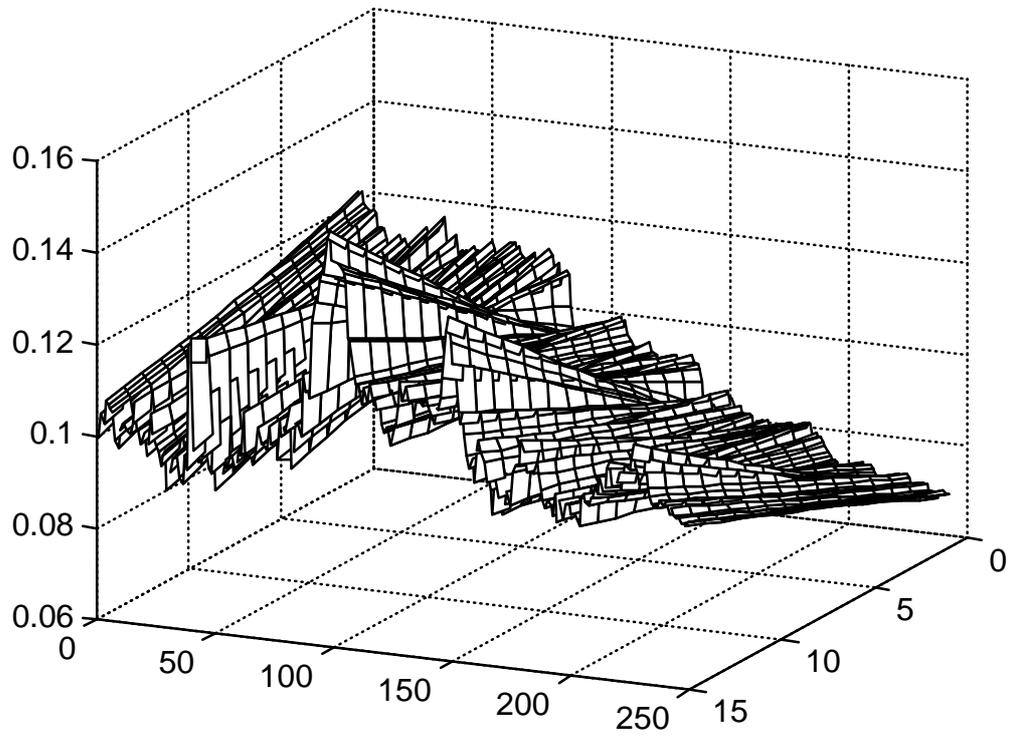
Forward - 1992



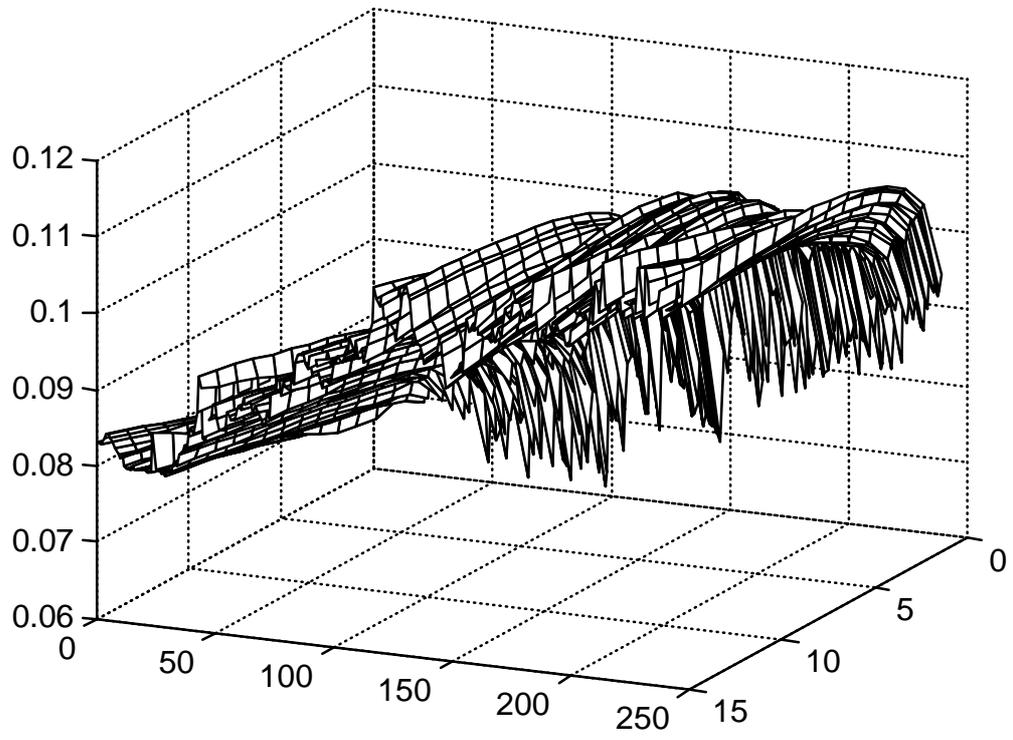
Spot - 1993



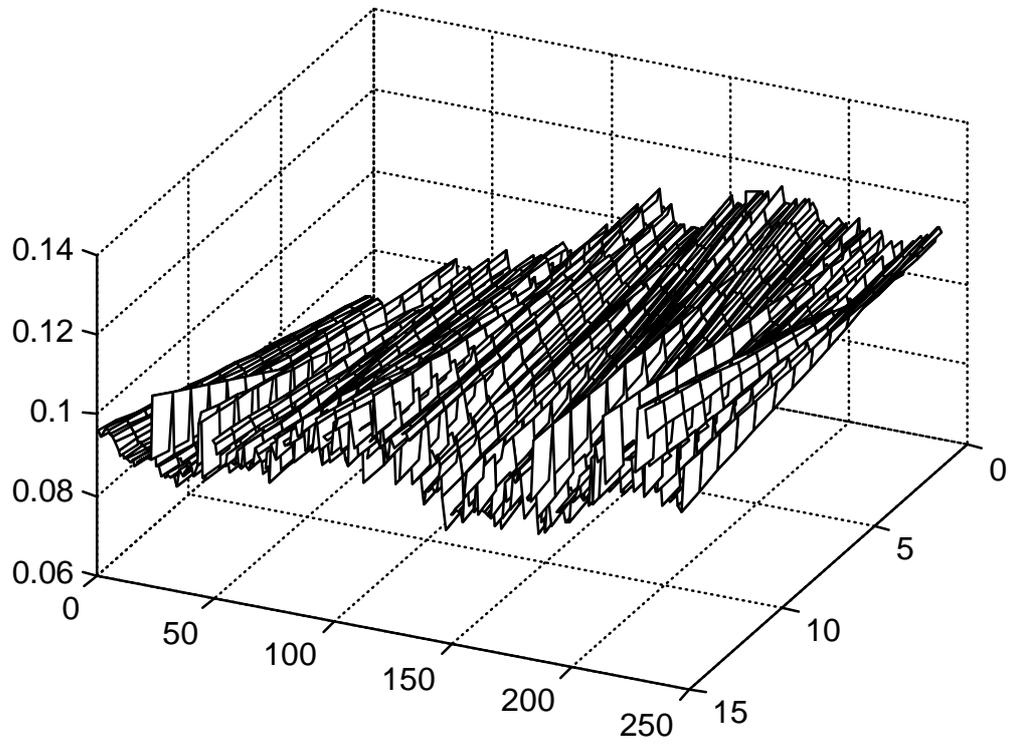
Forward - 1993



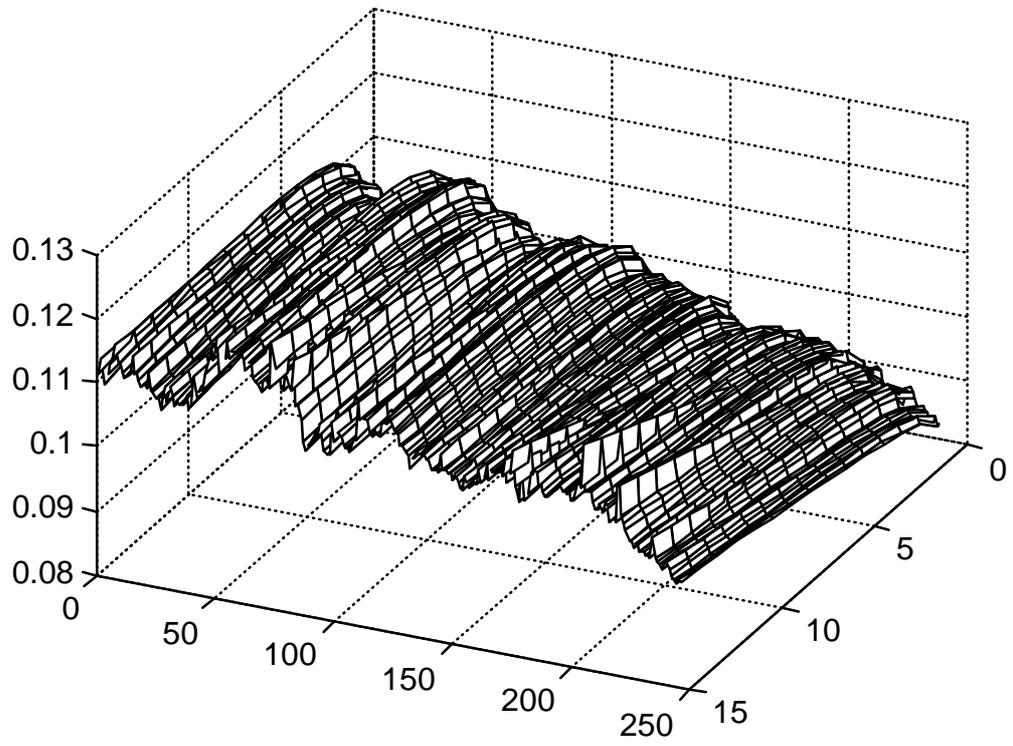
Spot - 1994



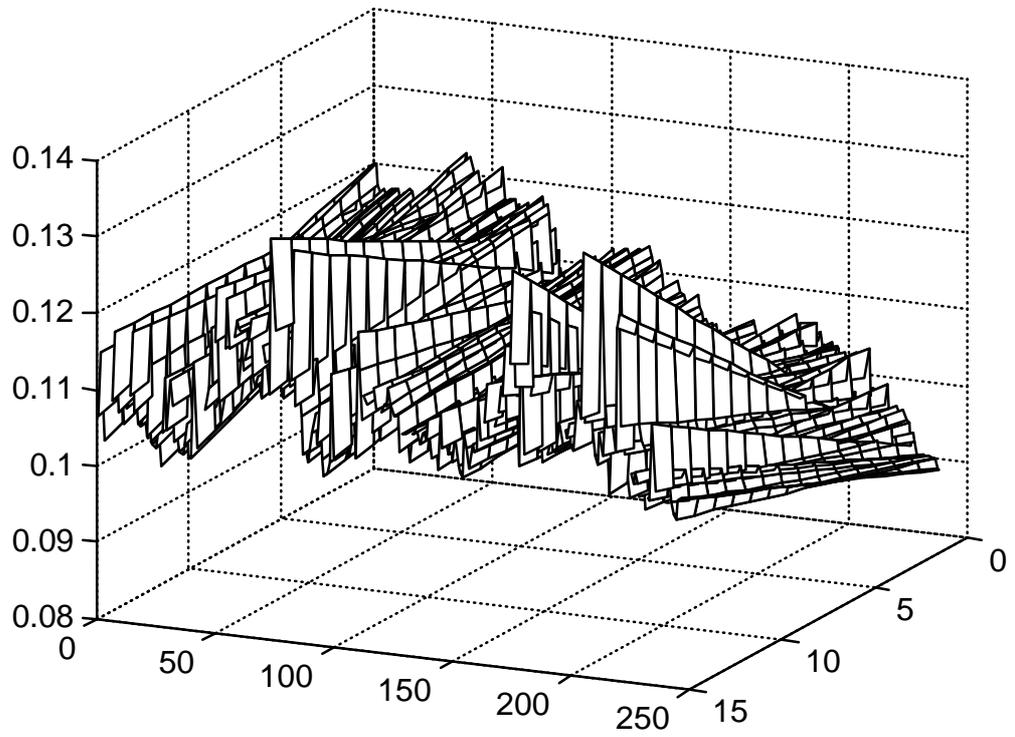
Forward - 1994



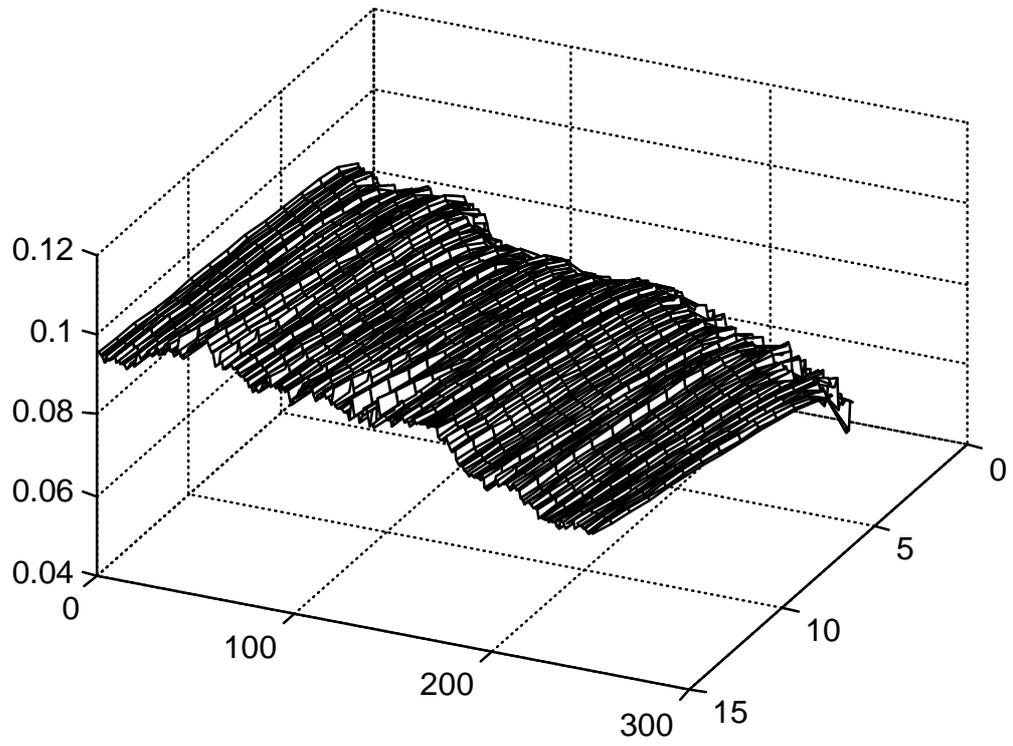
Spot - 1995



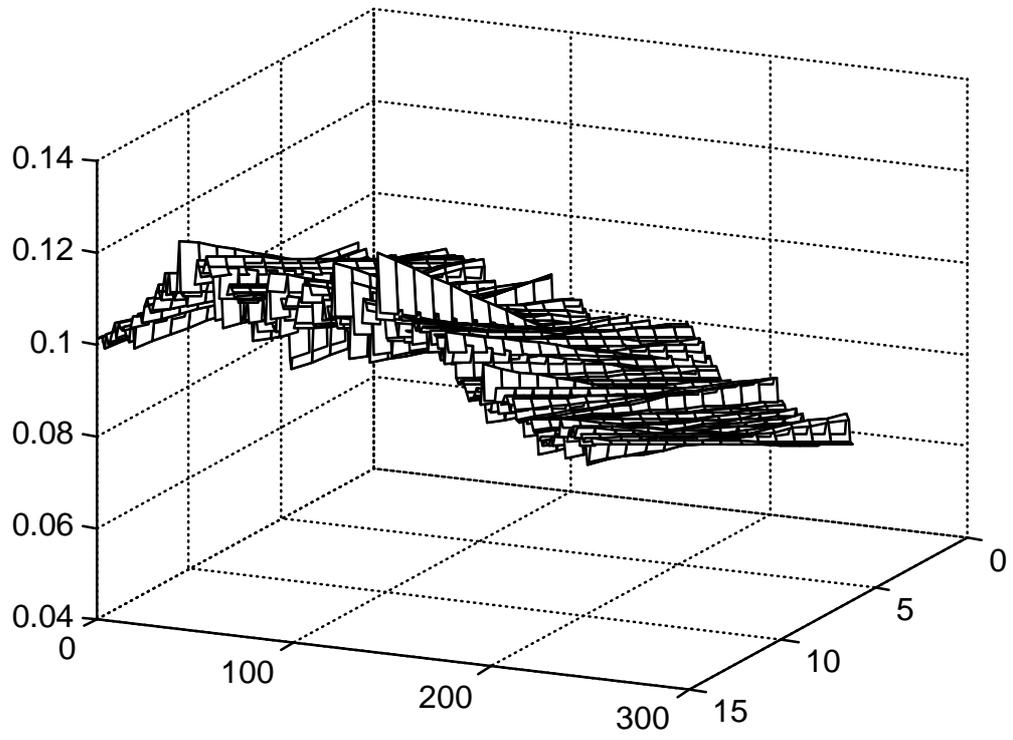
Forward - 1995



Spot - 1996

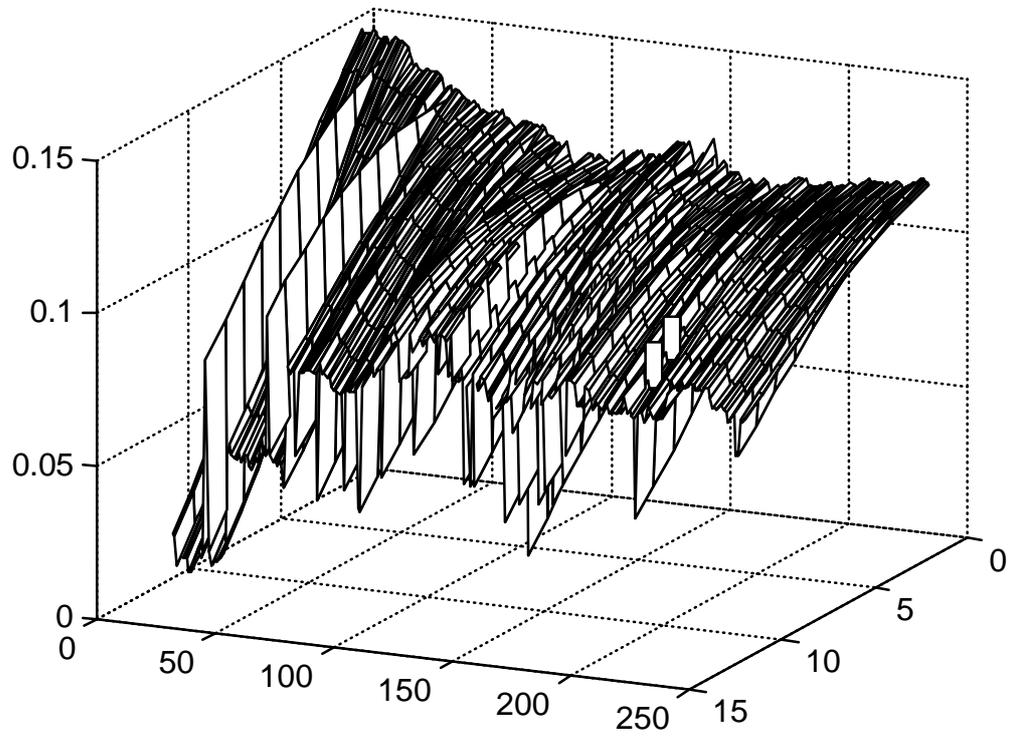


Forward - 1996

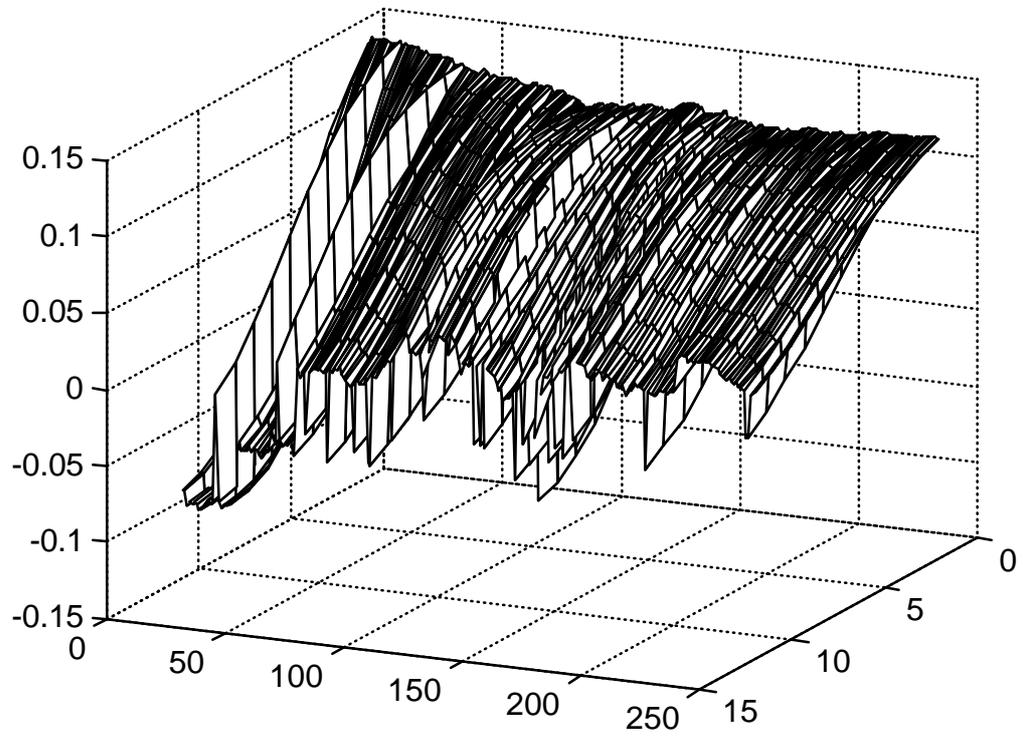


McCULLOCH (1975)

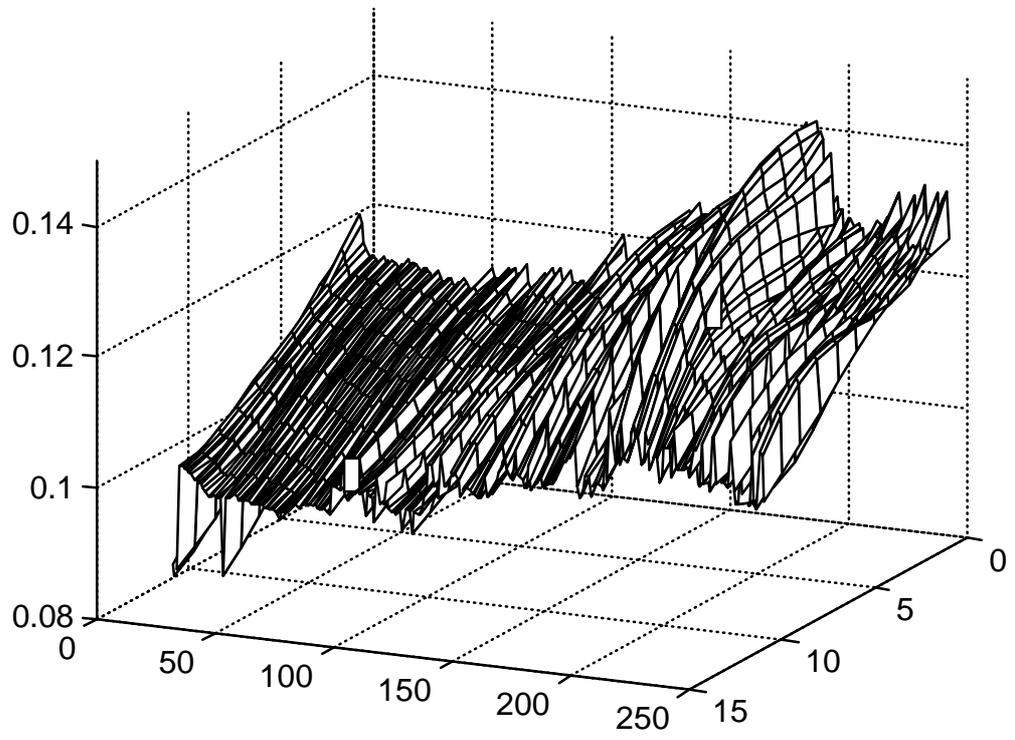
Spot - 1991



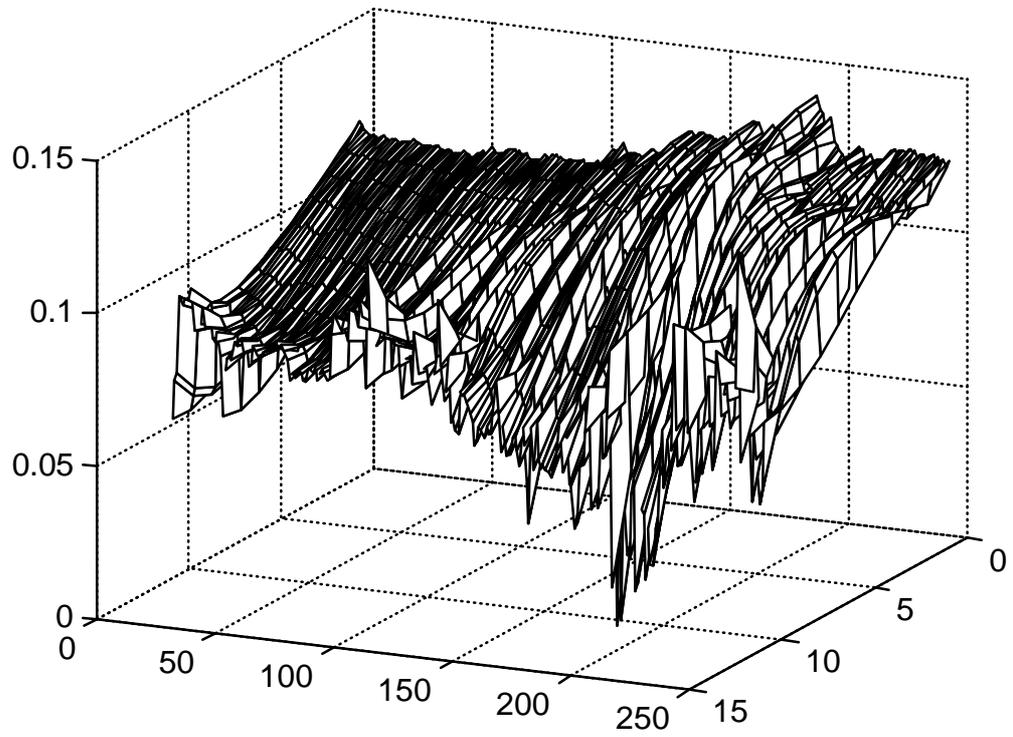
Forward - 1991



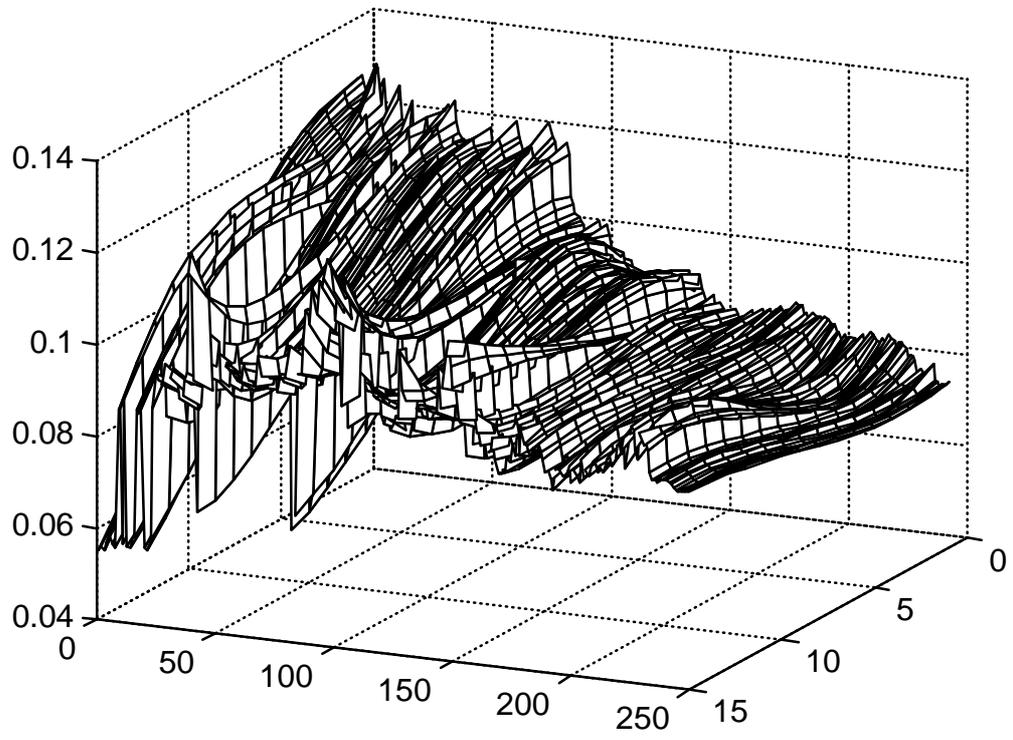
Spot - 1992



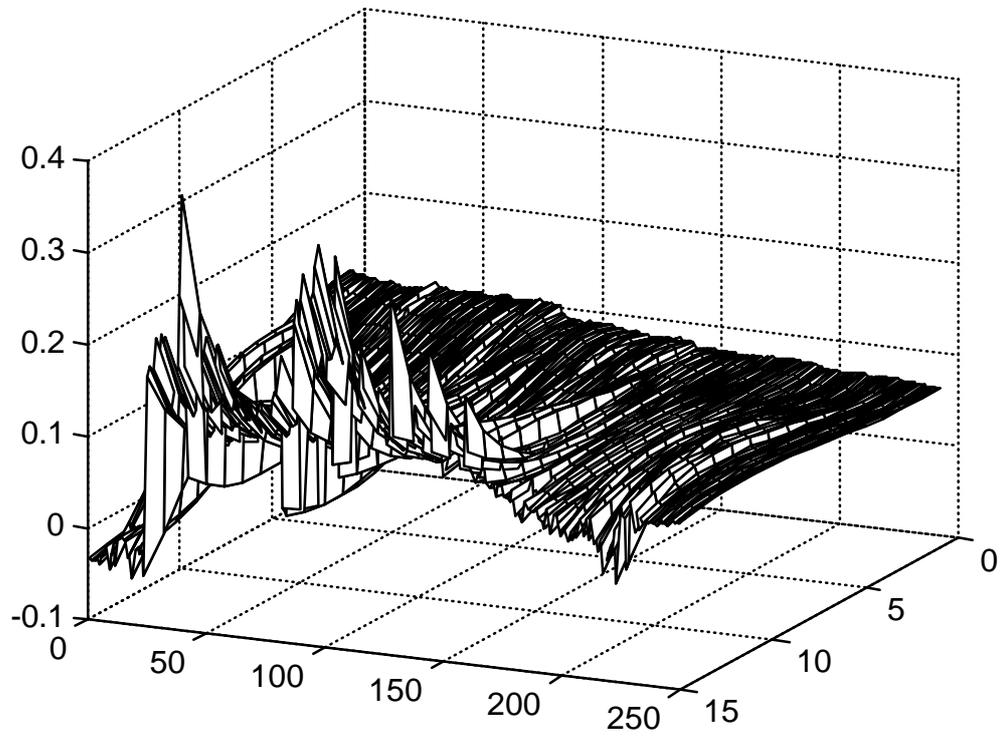
Forward - 1992



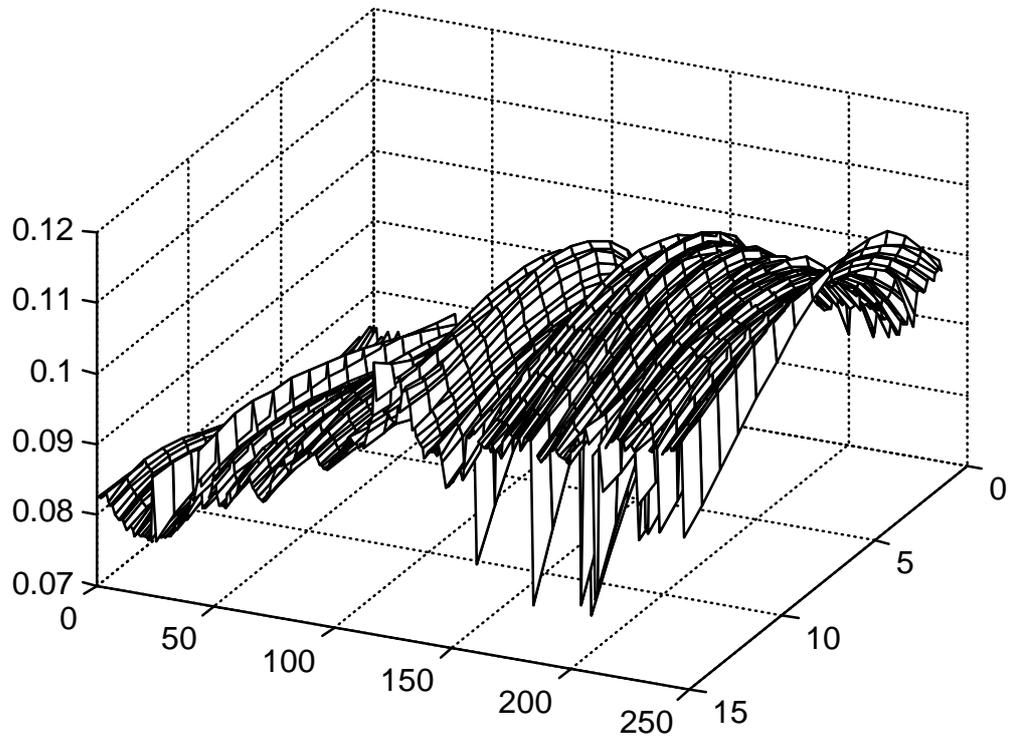
Spot - 1993



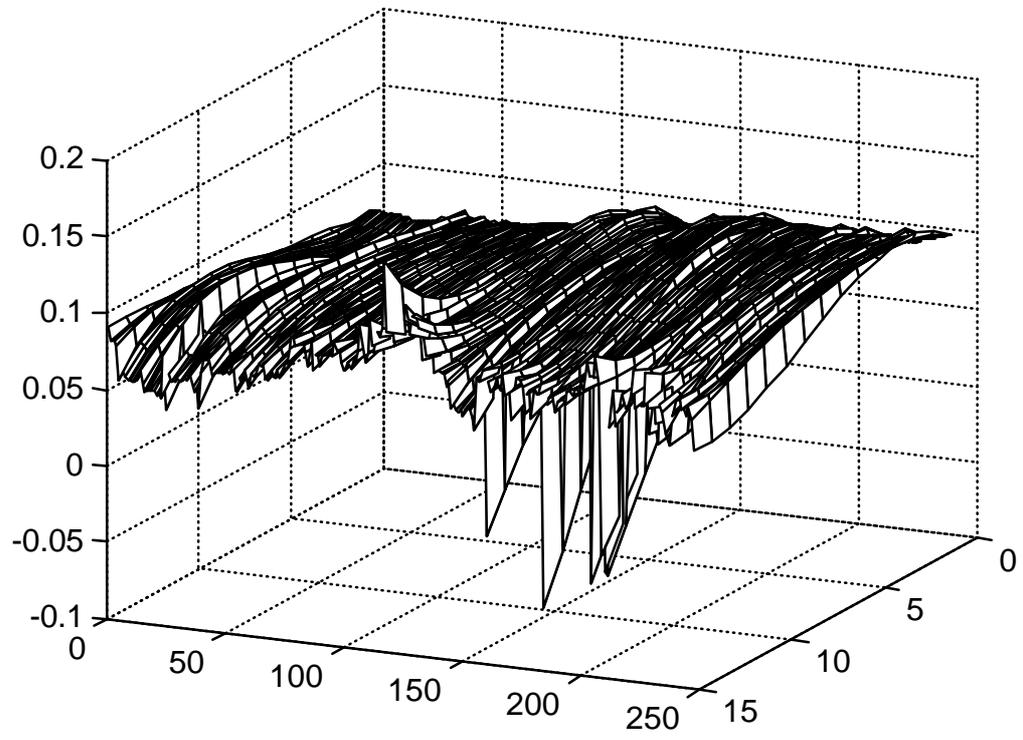
Forward - 1993



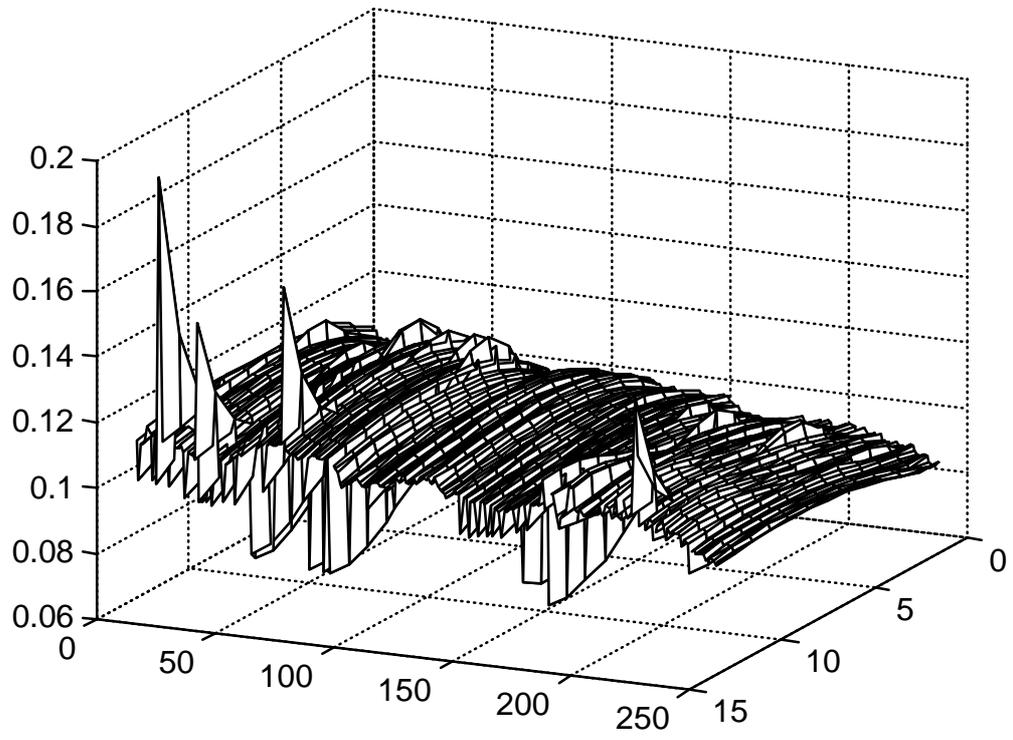
Spot - 1994



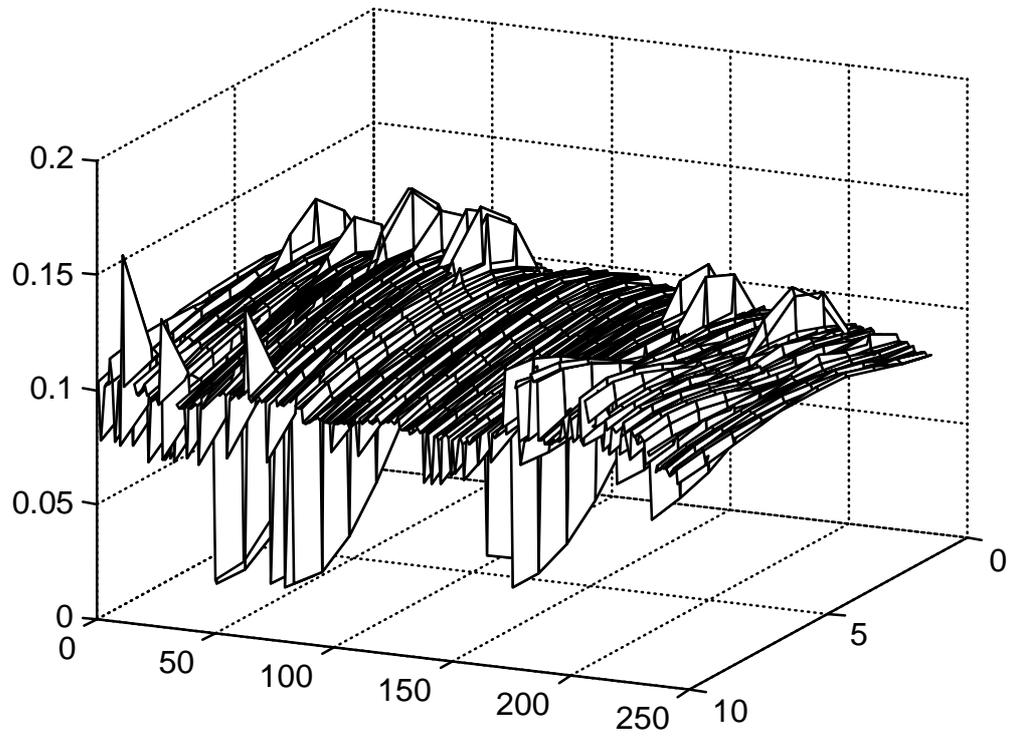
Forward - 1994



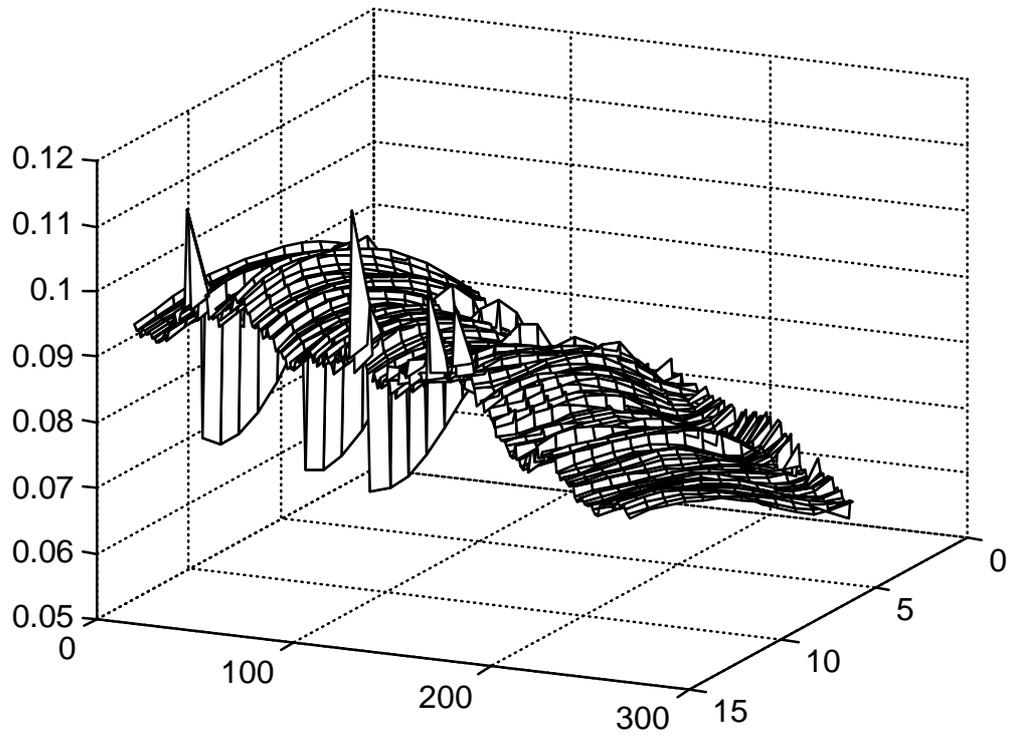
Spot - 1995



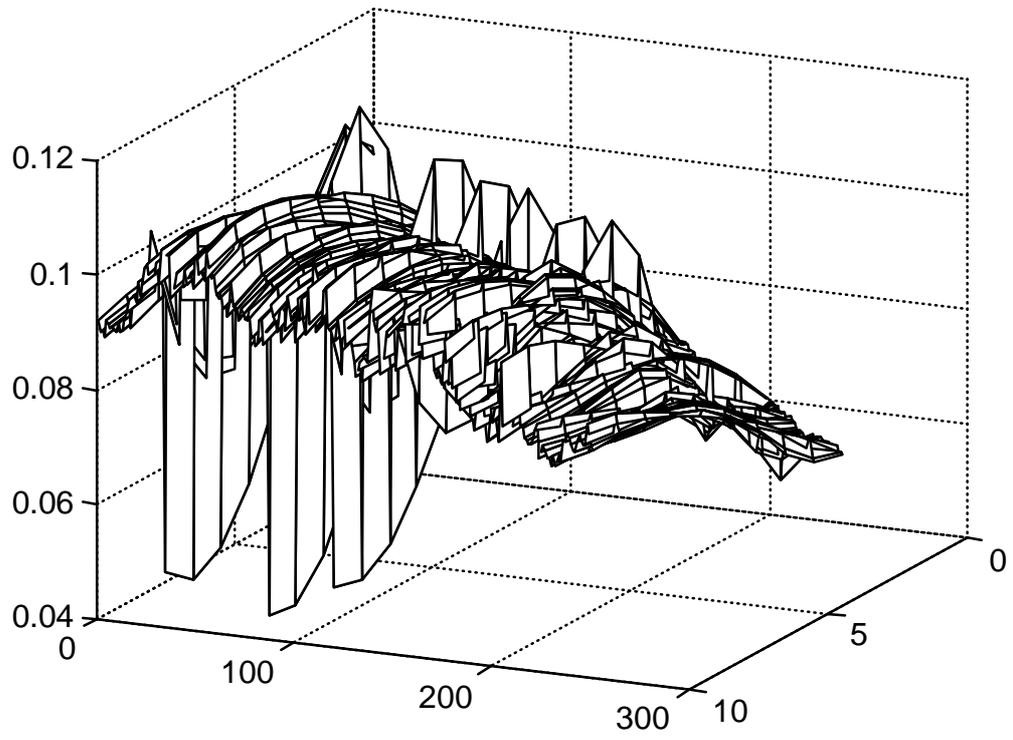
Forward - 1995



Spot - 1996

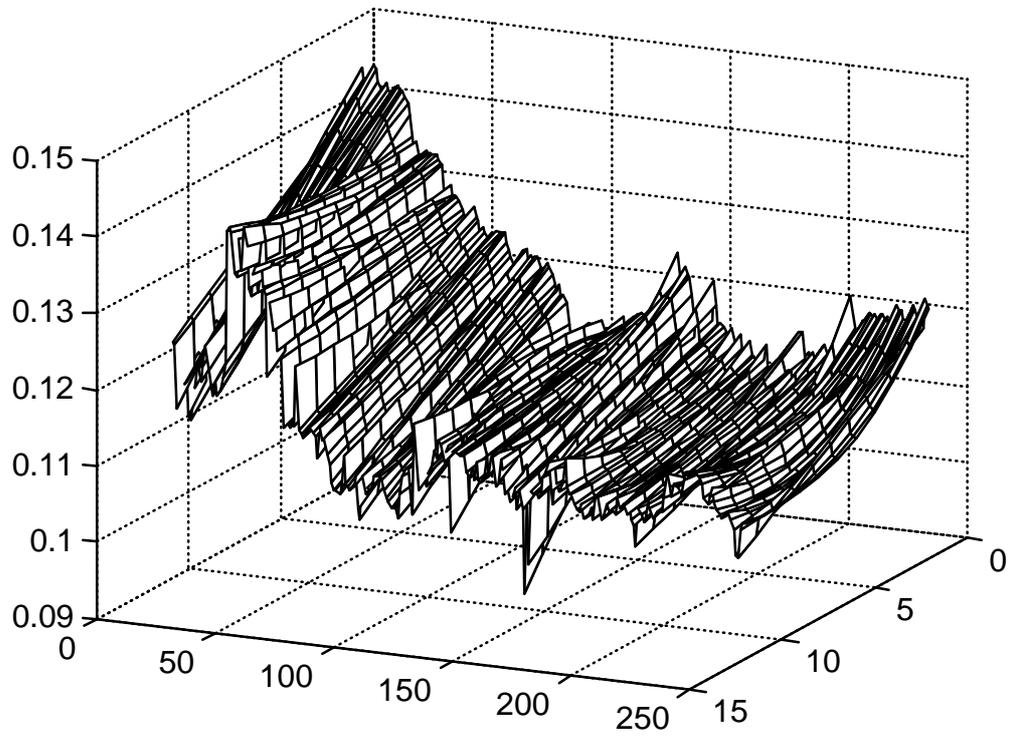


Forward - 1996

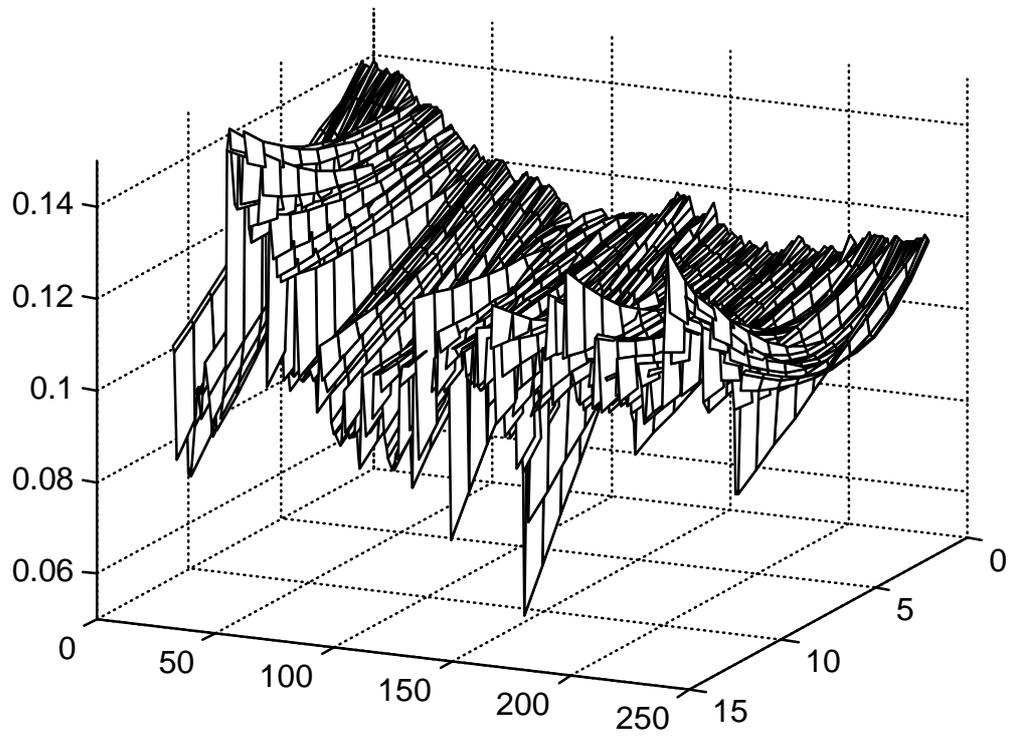


SCHAEFER (1981)

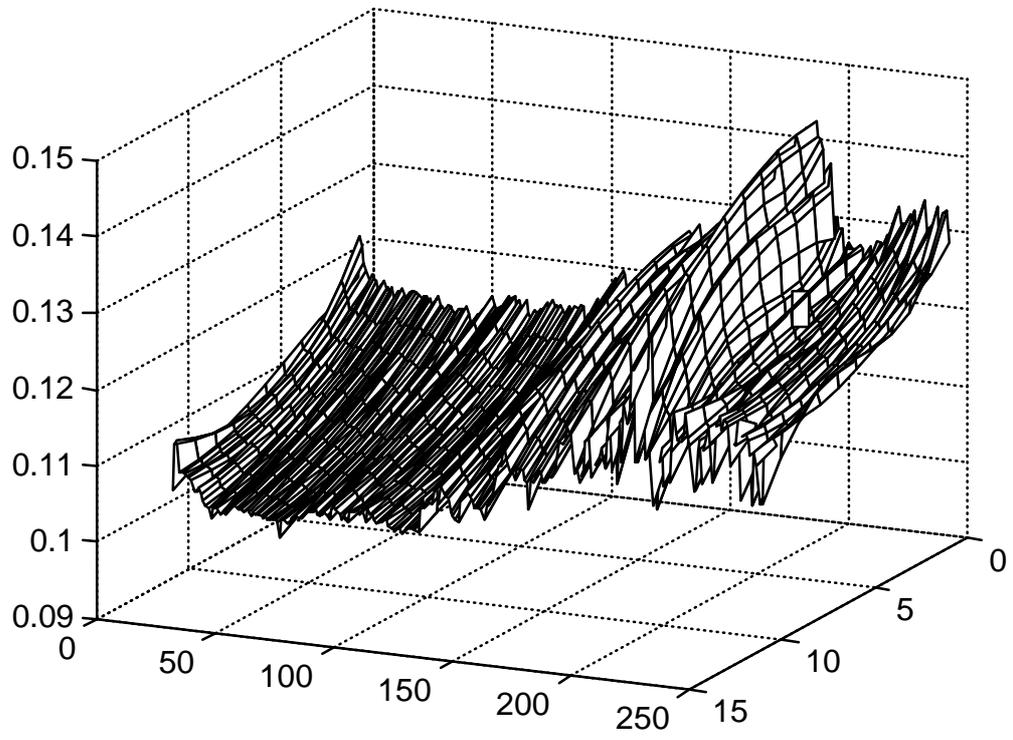
Spot - 1991



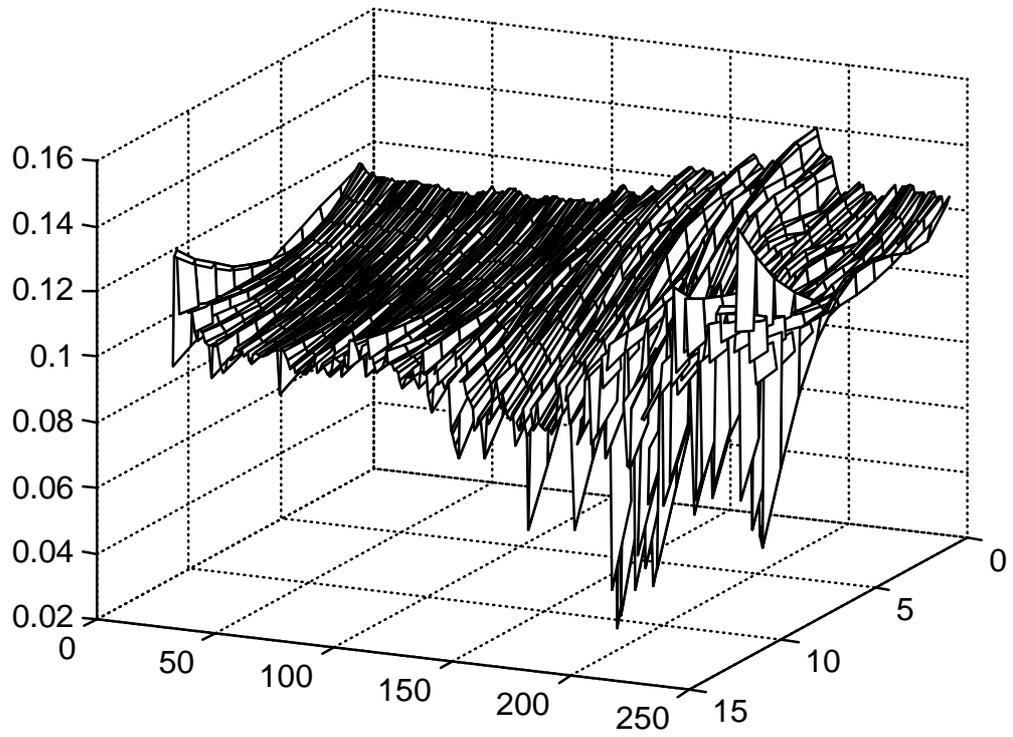
Forward - 1991



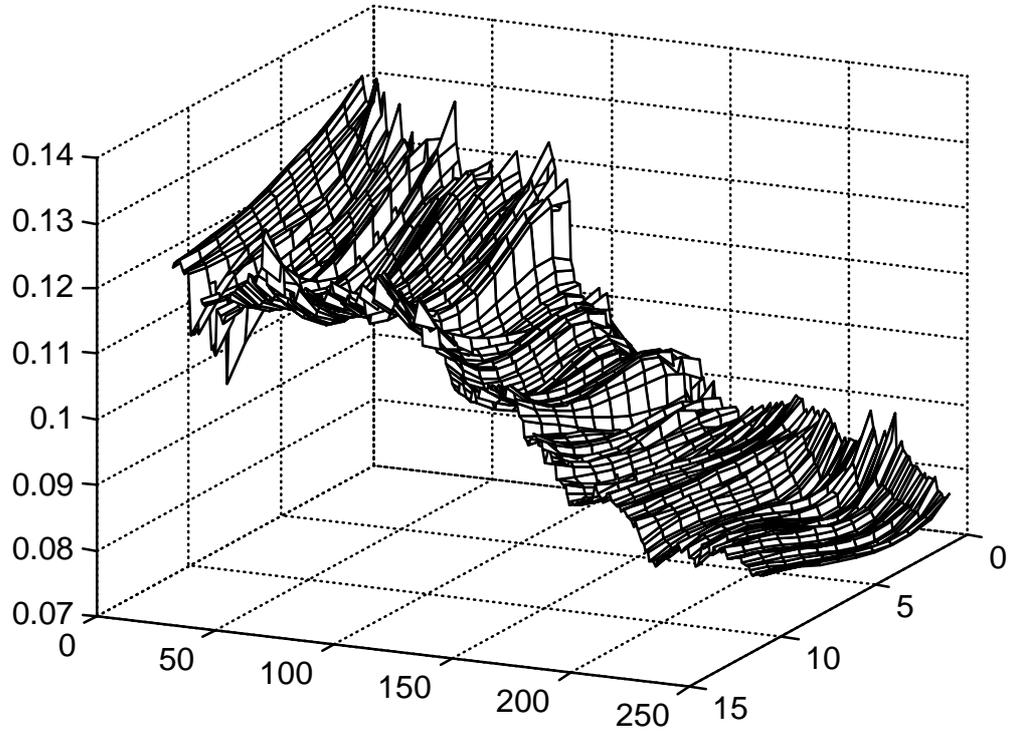
Spot - 1992



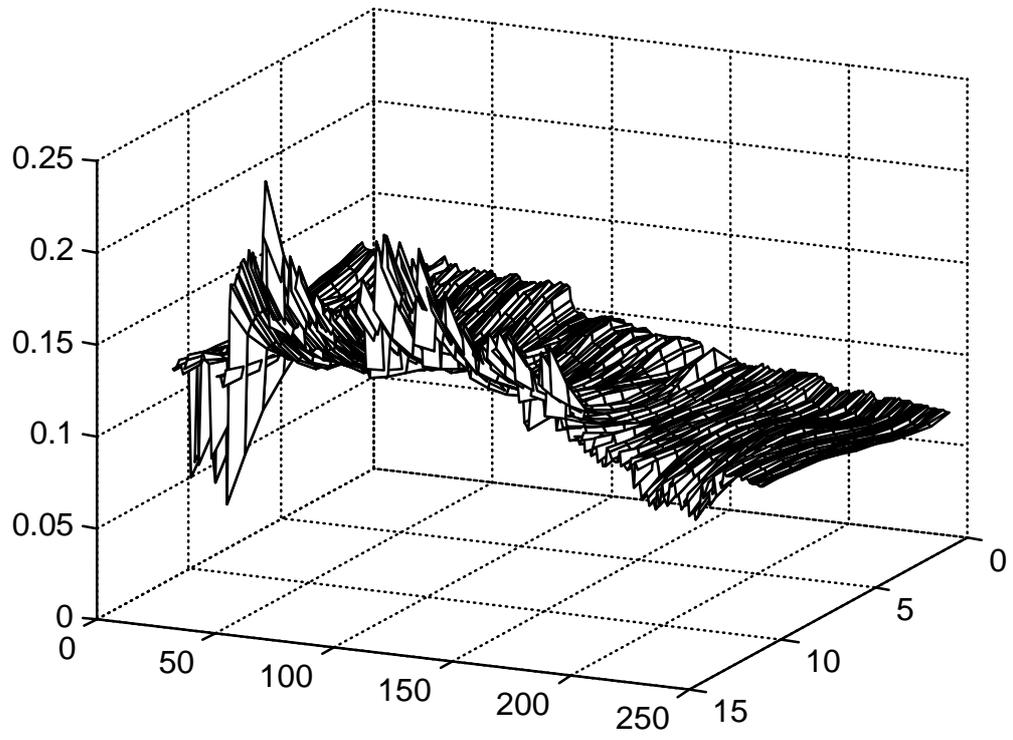
Forward - 1992



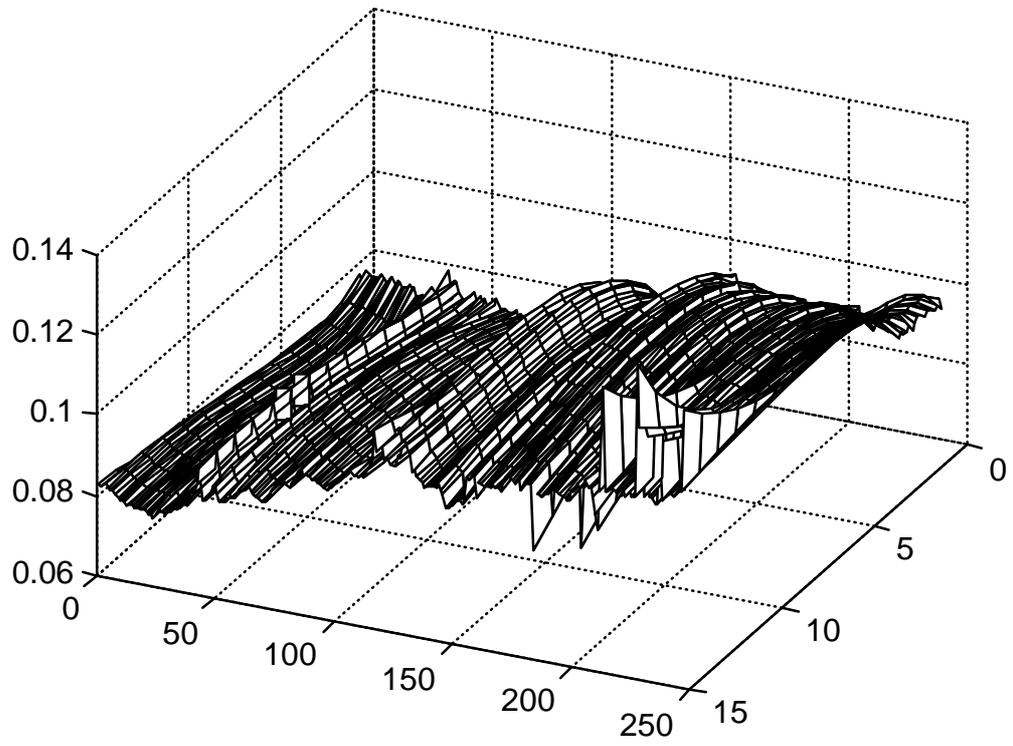
Spot - 1993



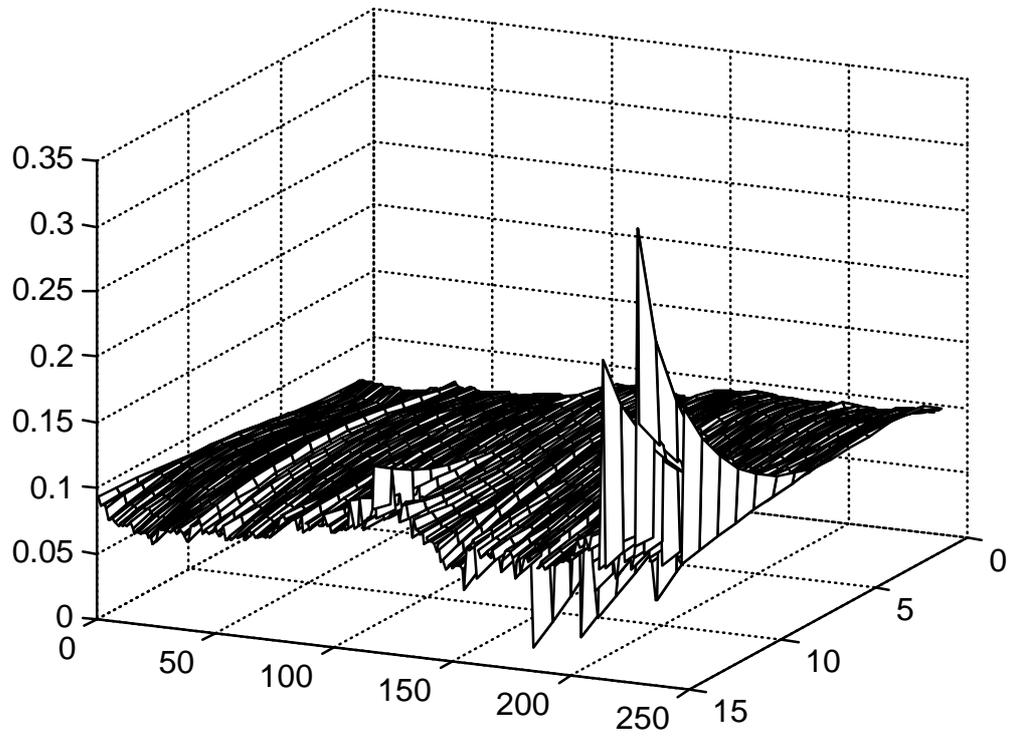
Forward - 1993



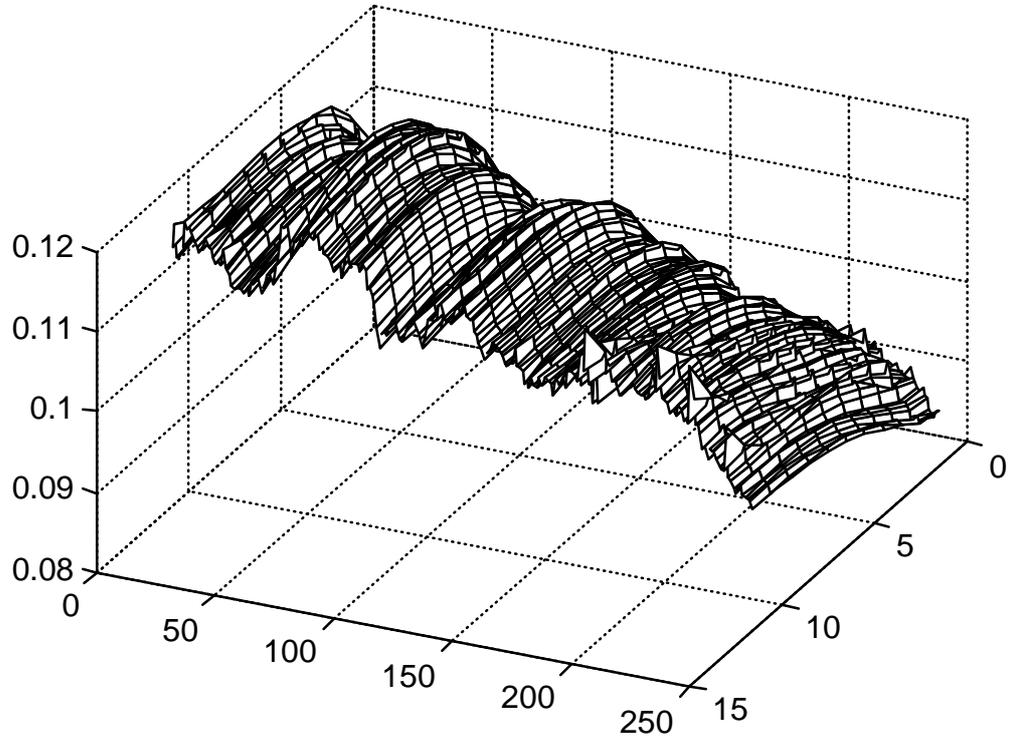
Spot - 1994



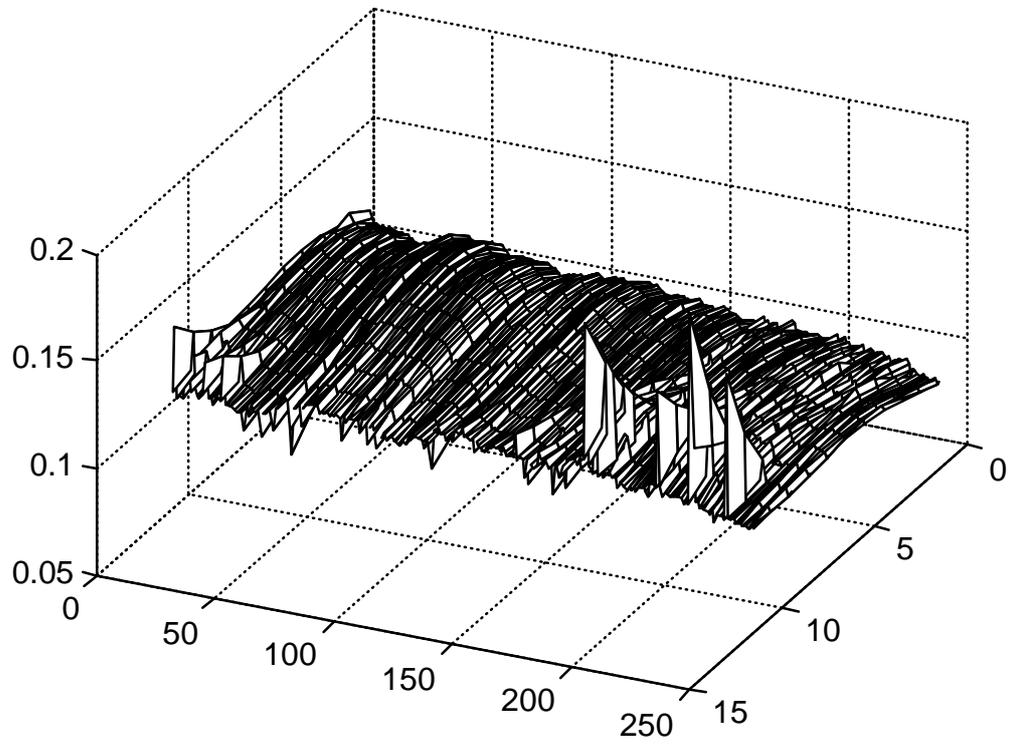
Forward - 1994



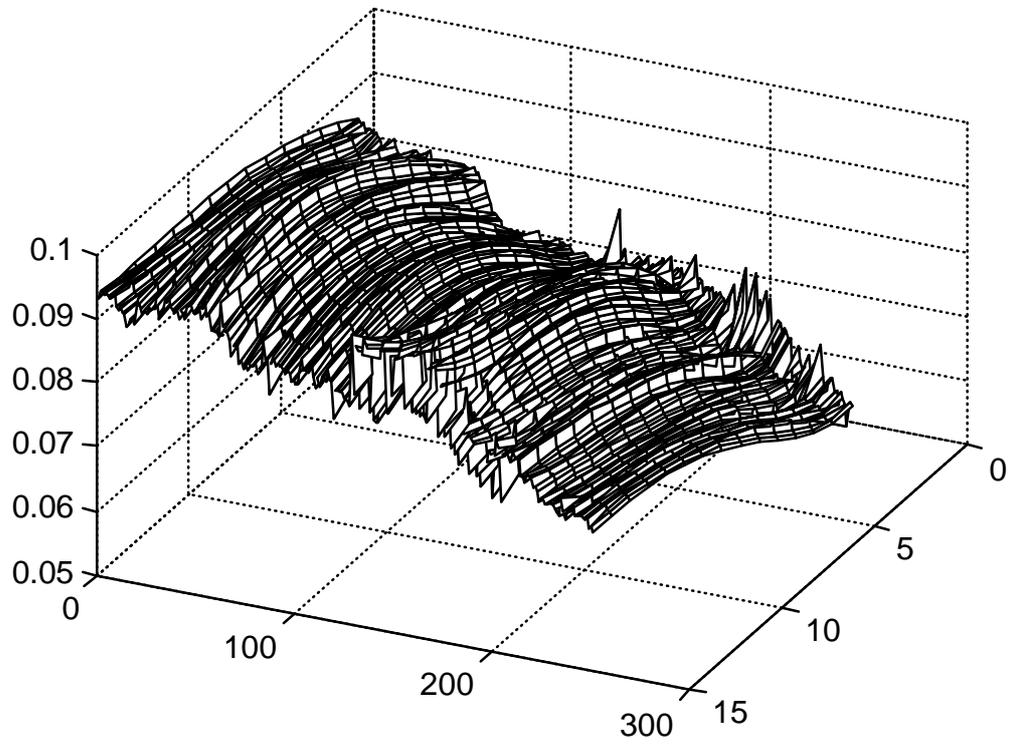
Spot - 1995



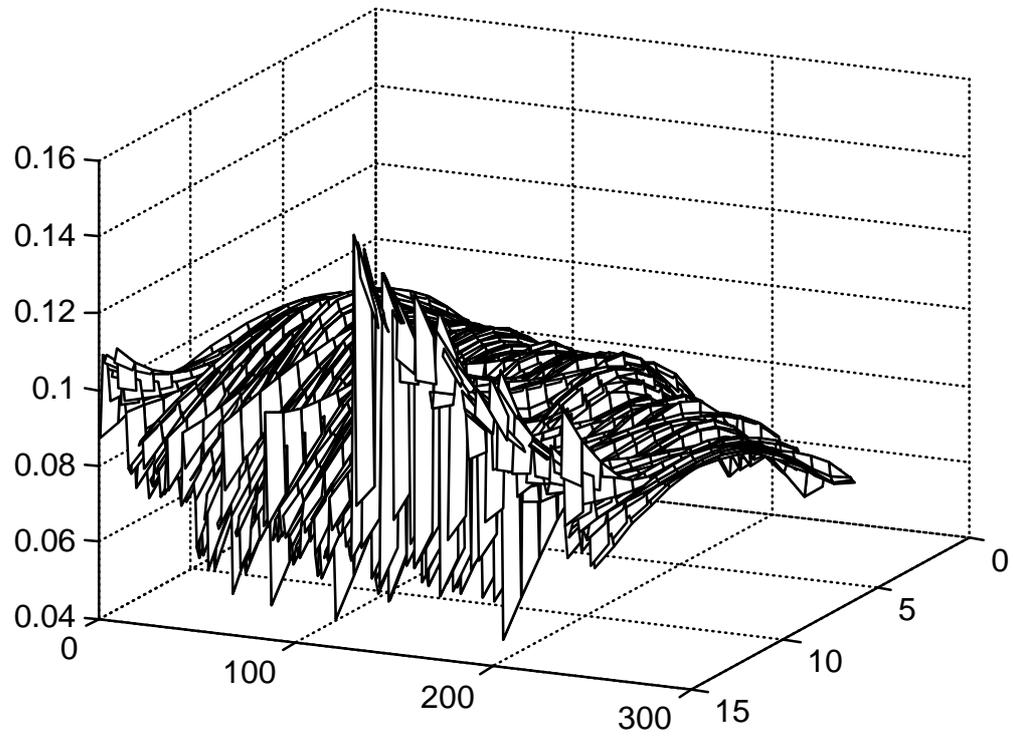
Forward - 1995



Spot - 1996

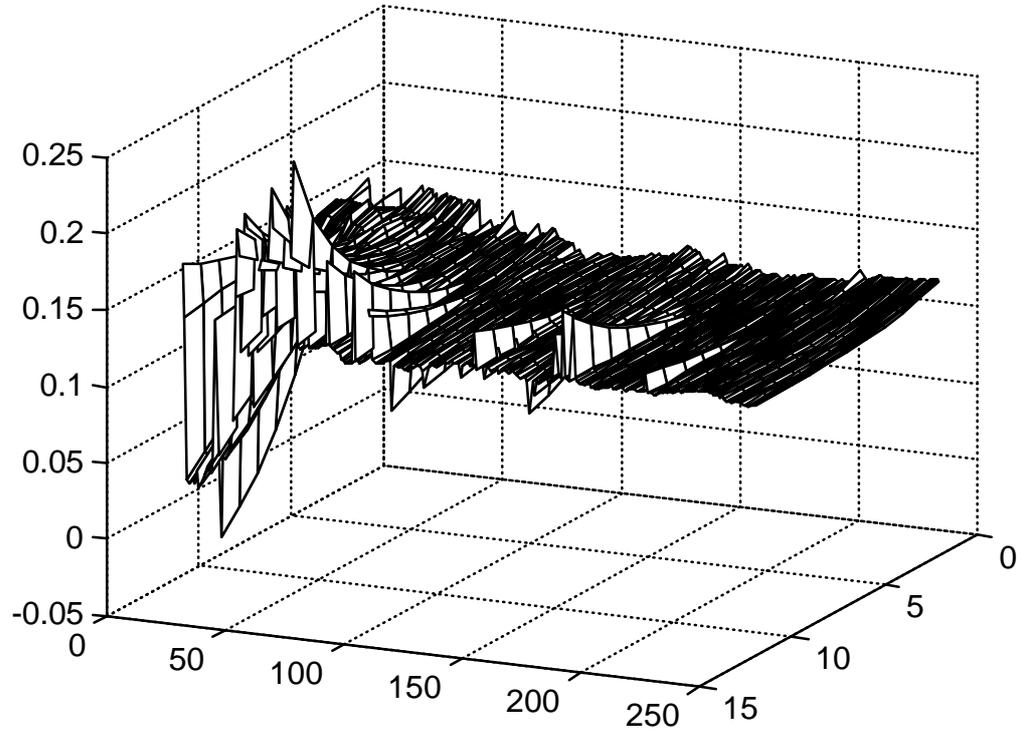


Forward - 1996

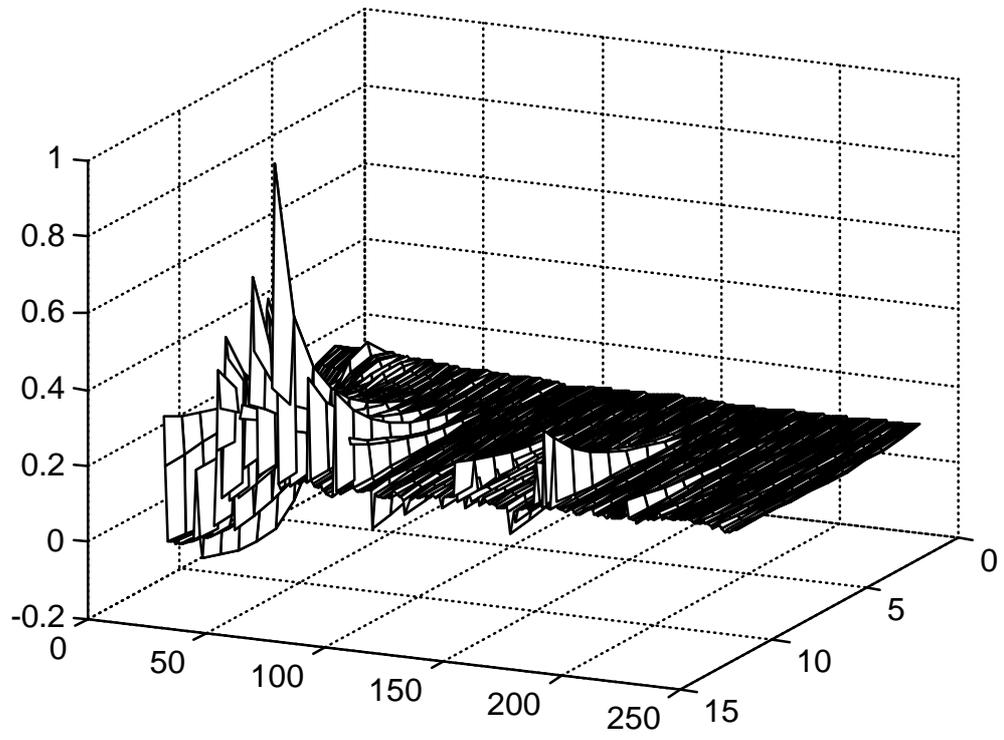


**FONG - VASICEK (1982) [MODELIZACIÓN A (CAMBIO VARIABLE Y
POLINOMIO CÚBICO)]**

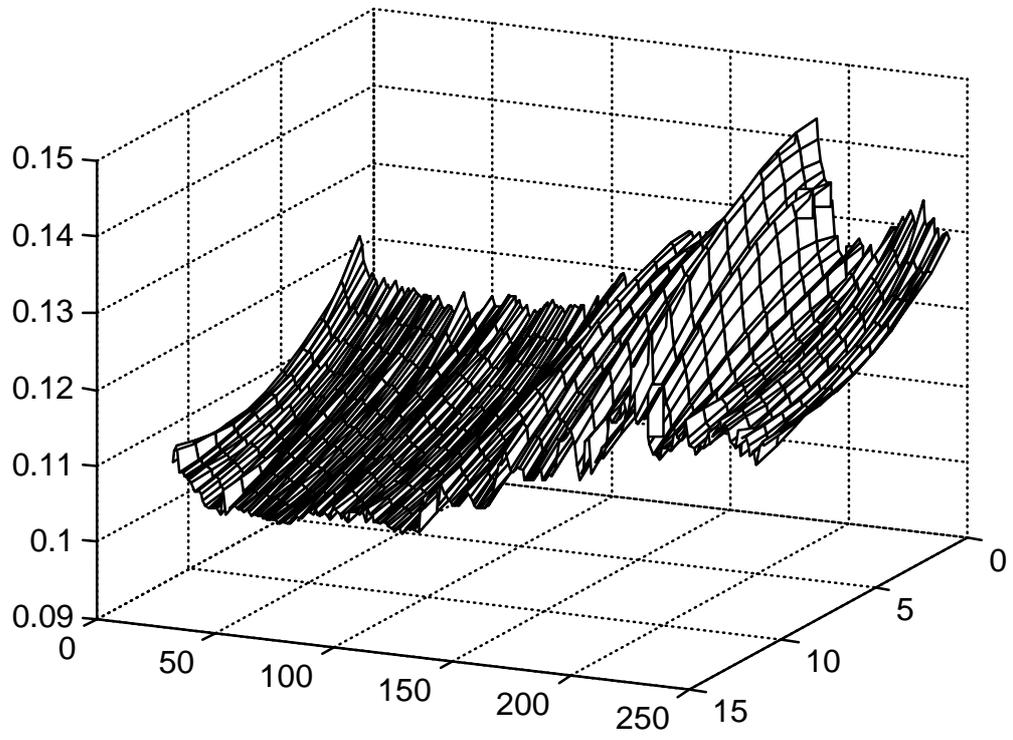
Spot - 1991



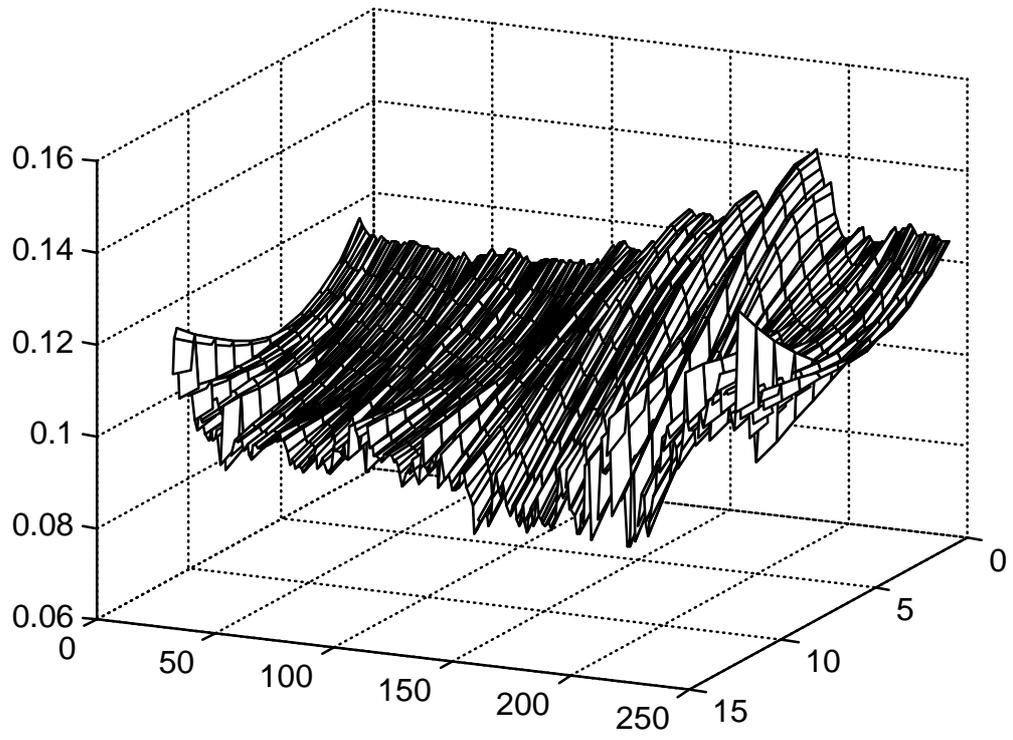
Forward - 1991



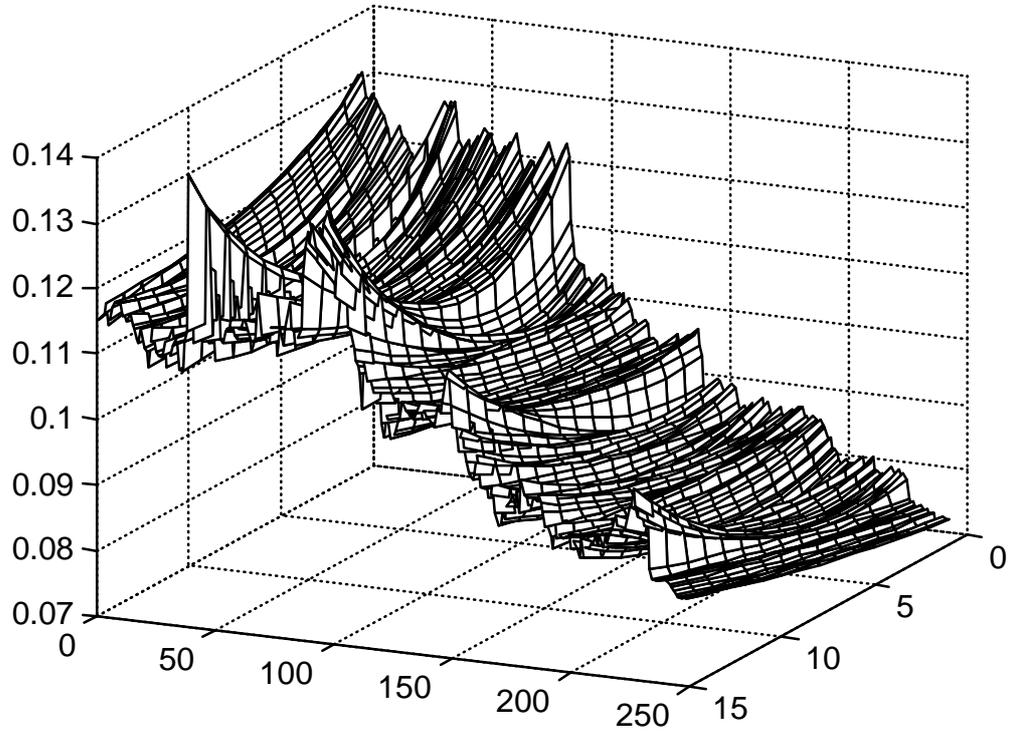
Spot - 1992



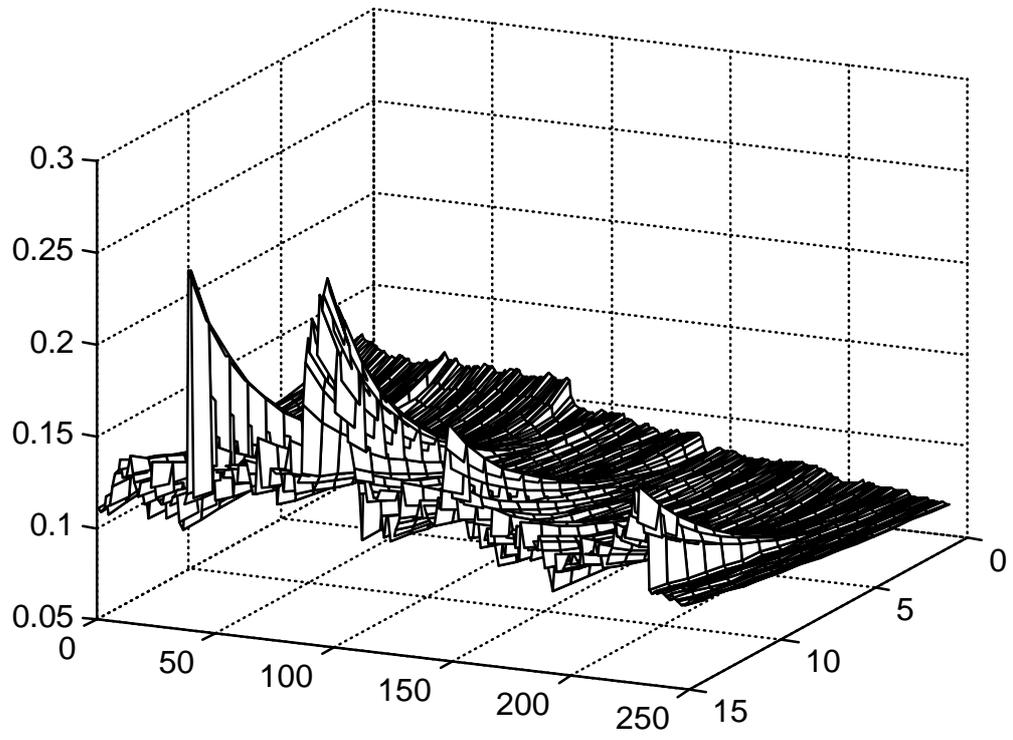
Forward - 1992



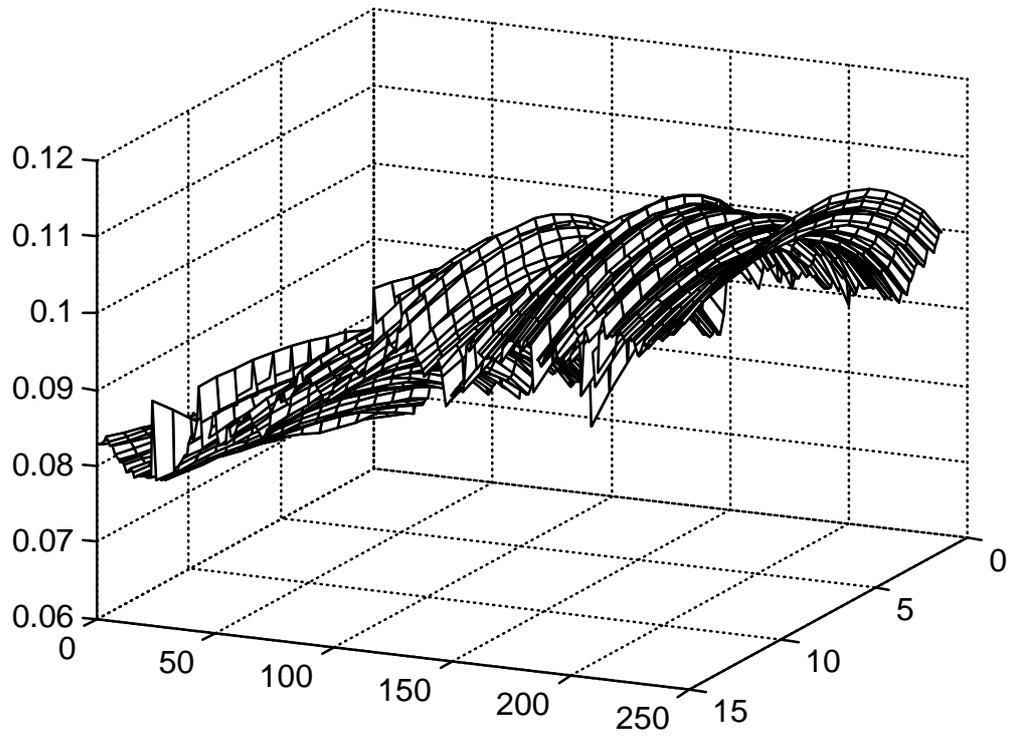
Spot - 1993



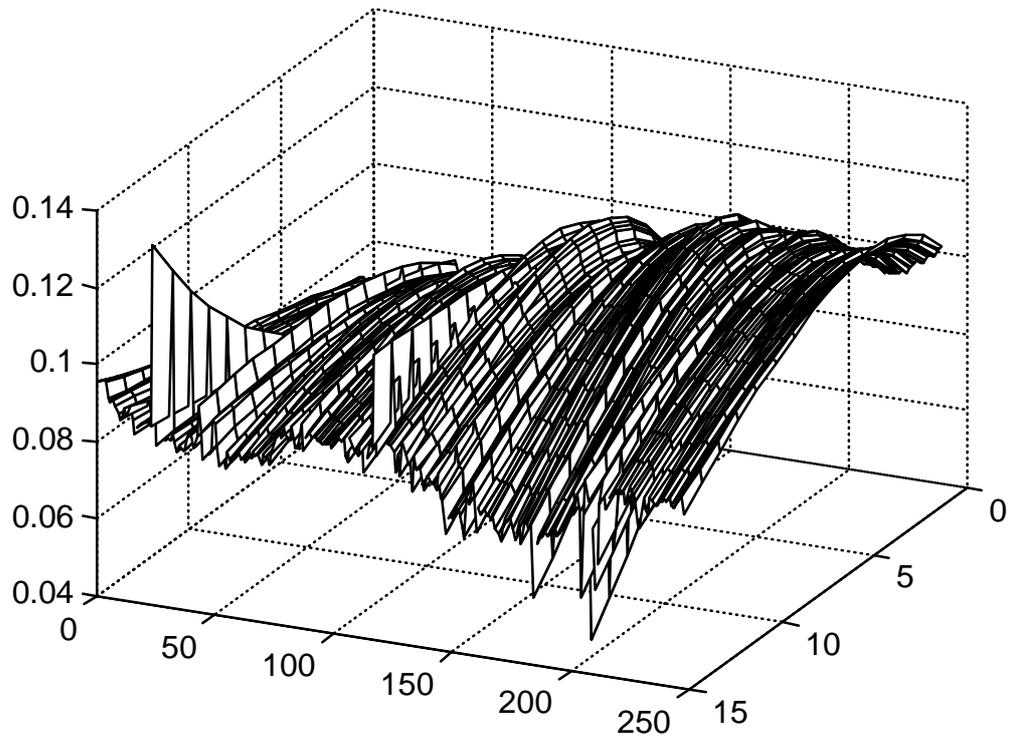
Forward - 1993



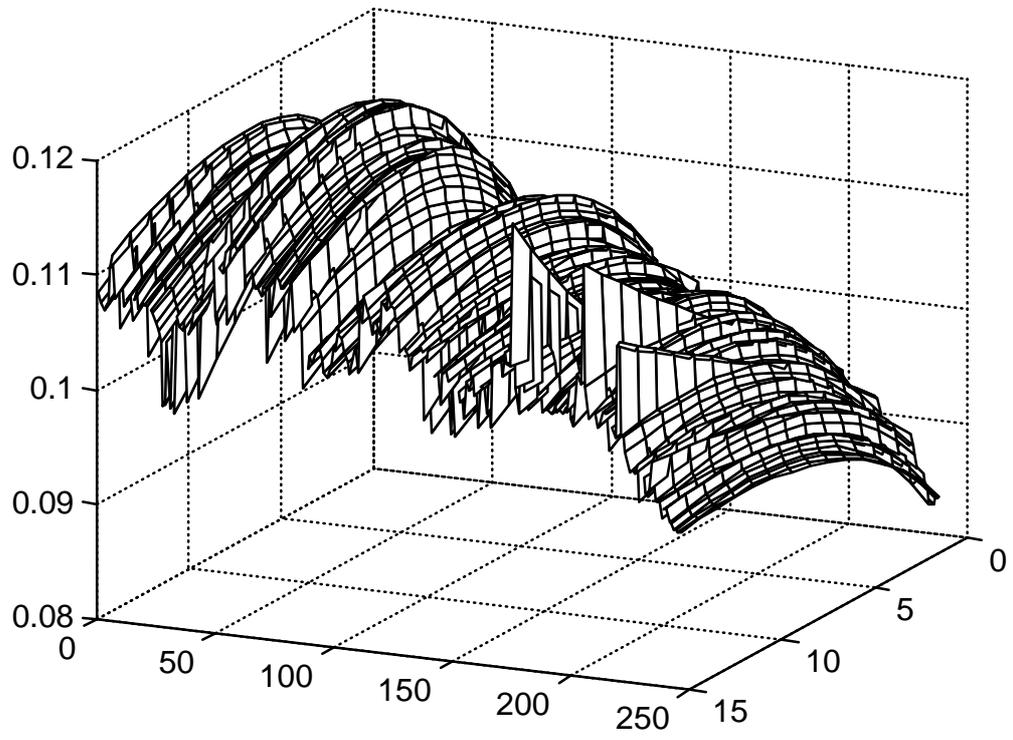
Spot - 1994



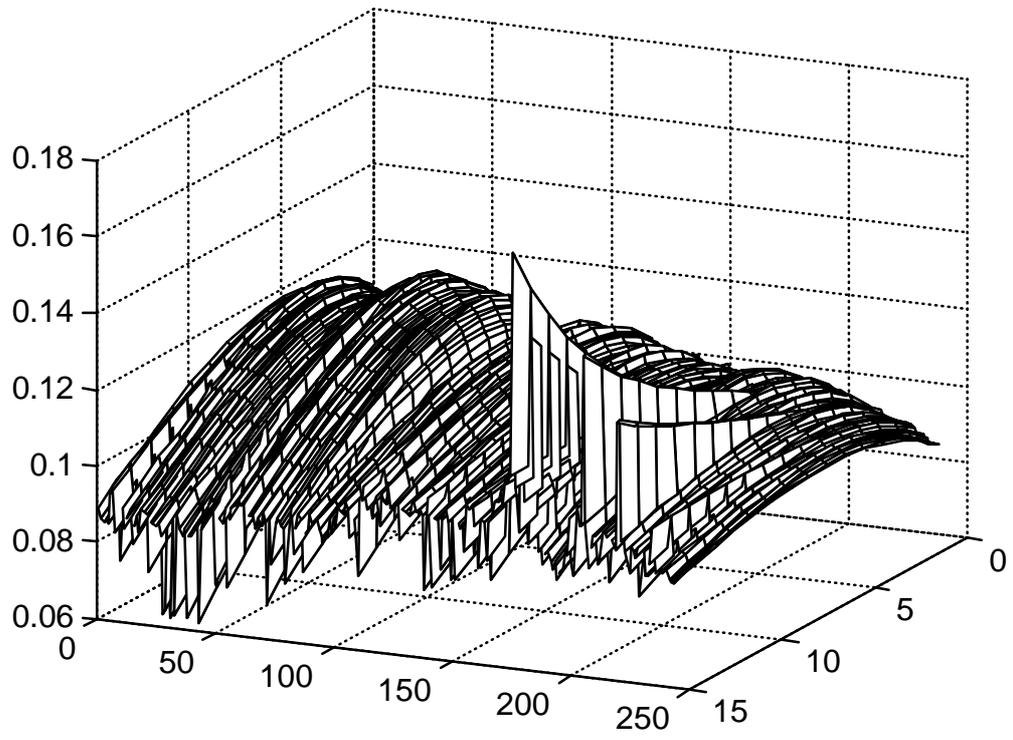
Forward - 1994



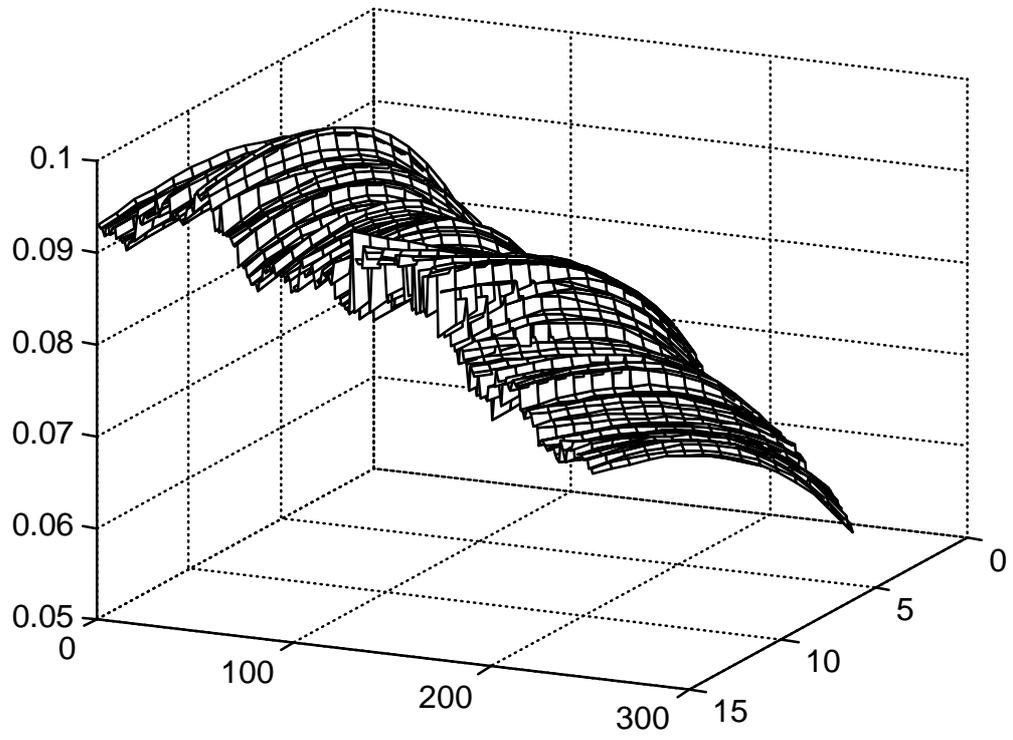
Spot - 1995



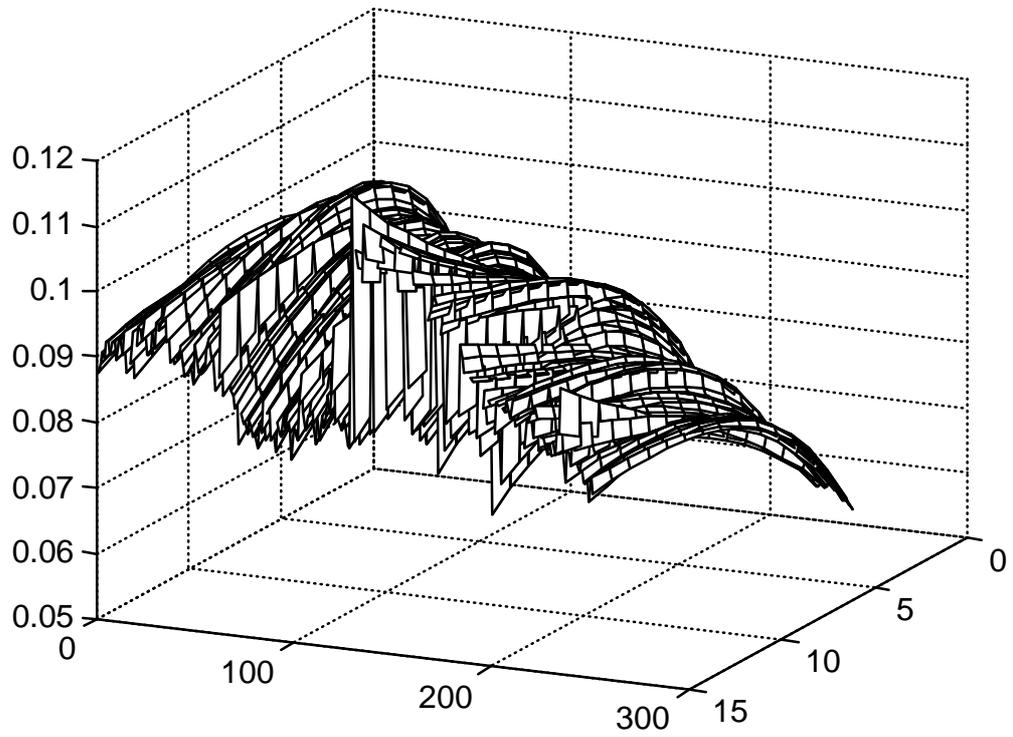
Forward - 1995



Spot - 1996

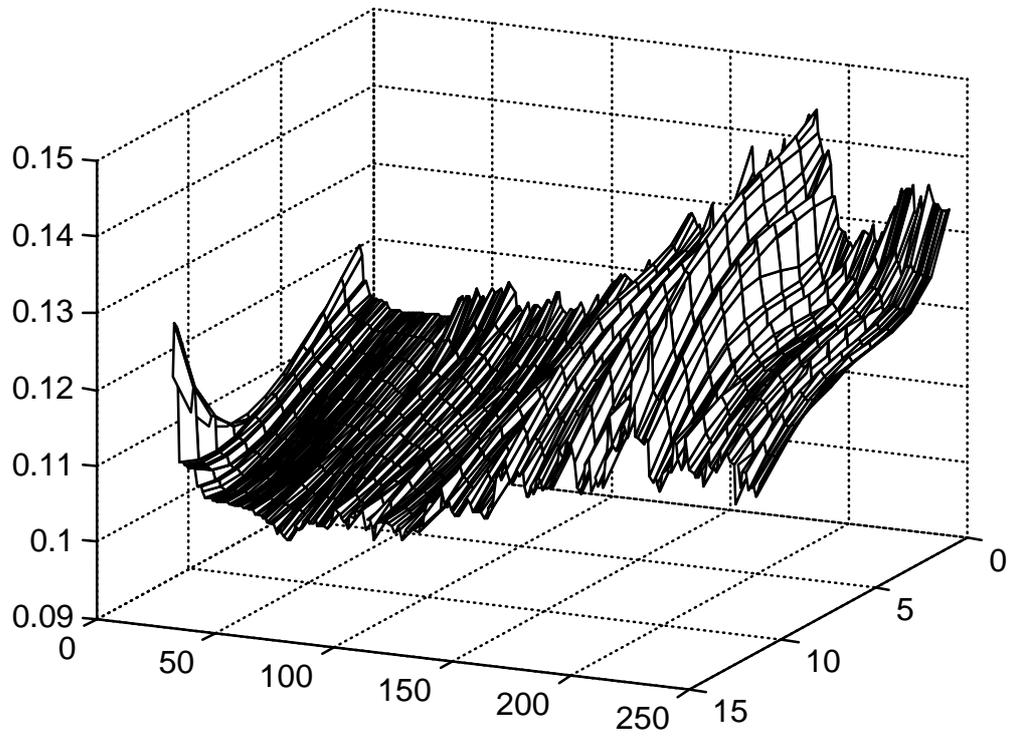


Forward - 1996

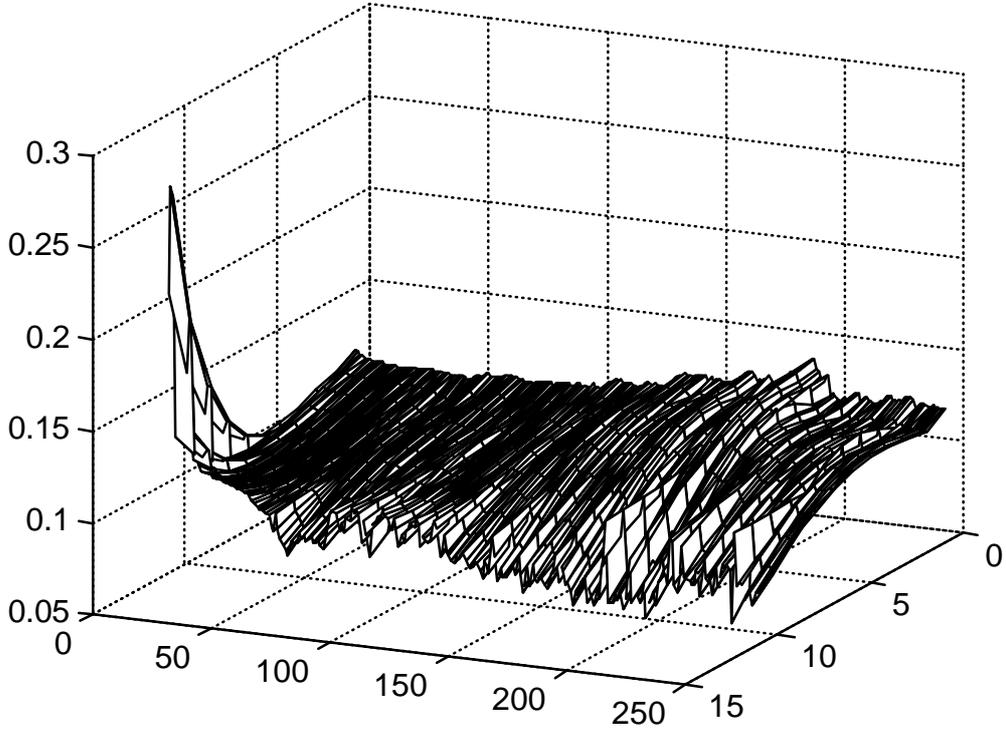


FONG - VASICEK (1982) [MODELIZACIÓN B (FUNCIÓN EXPONENCIAL)]

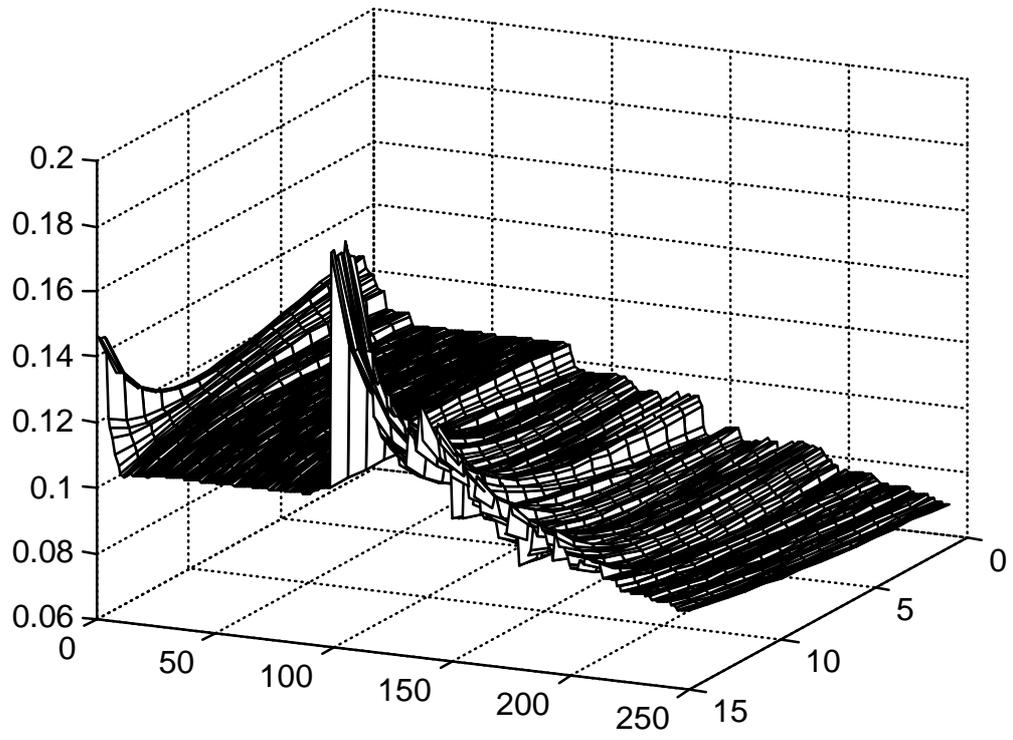
Spot - 1992



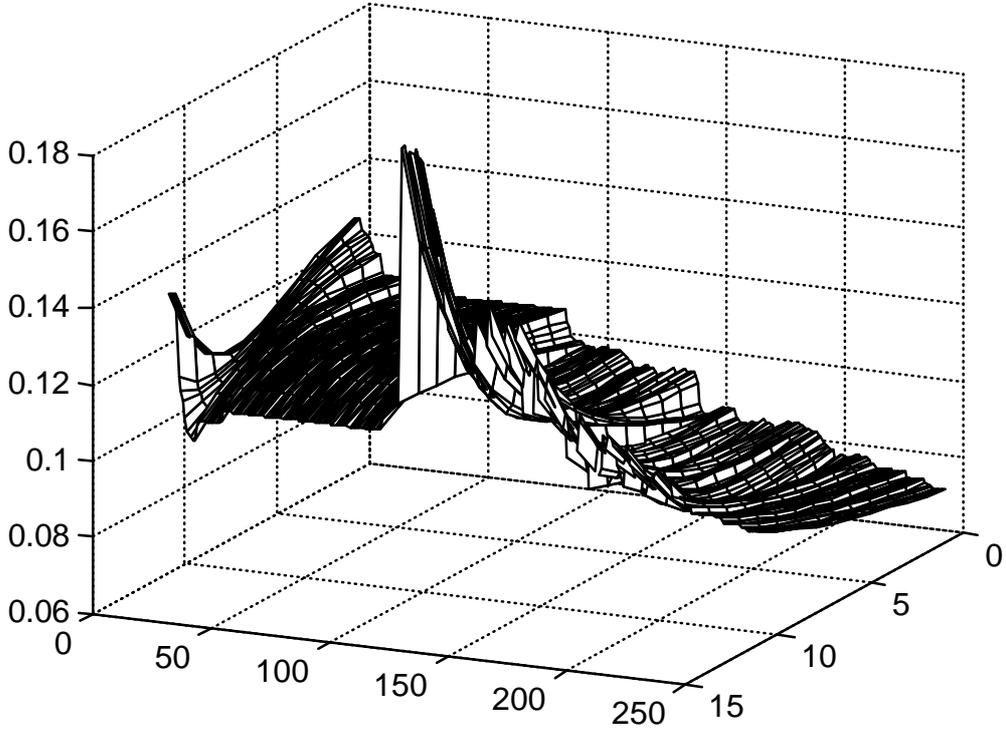
Forward - 1992



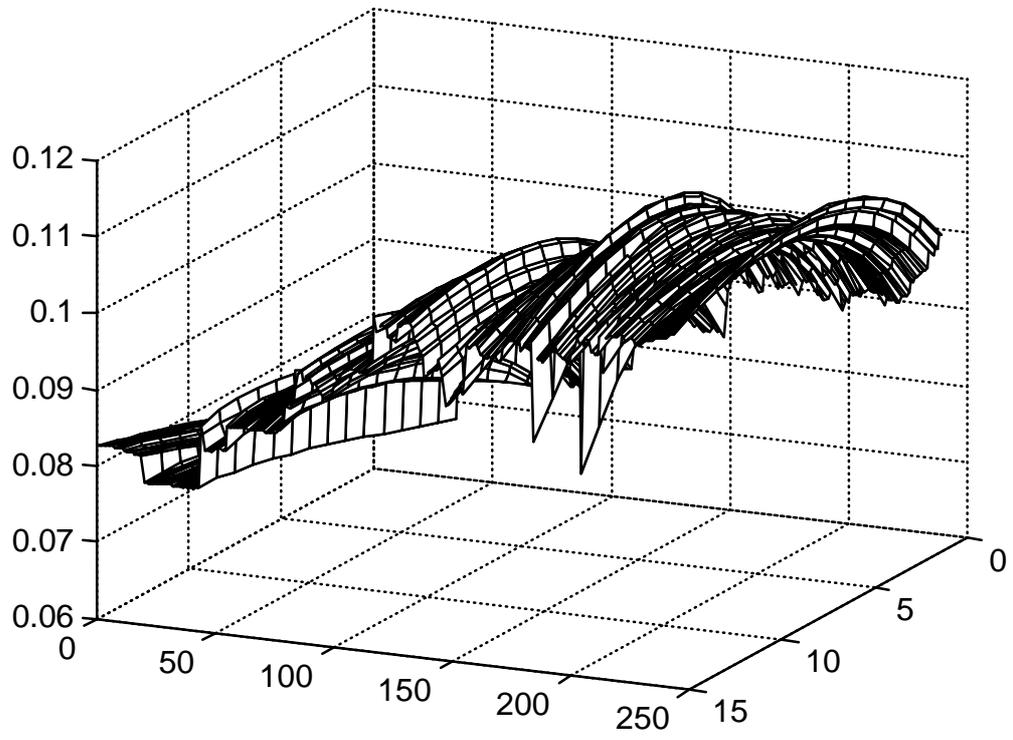
Spot - 1993



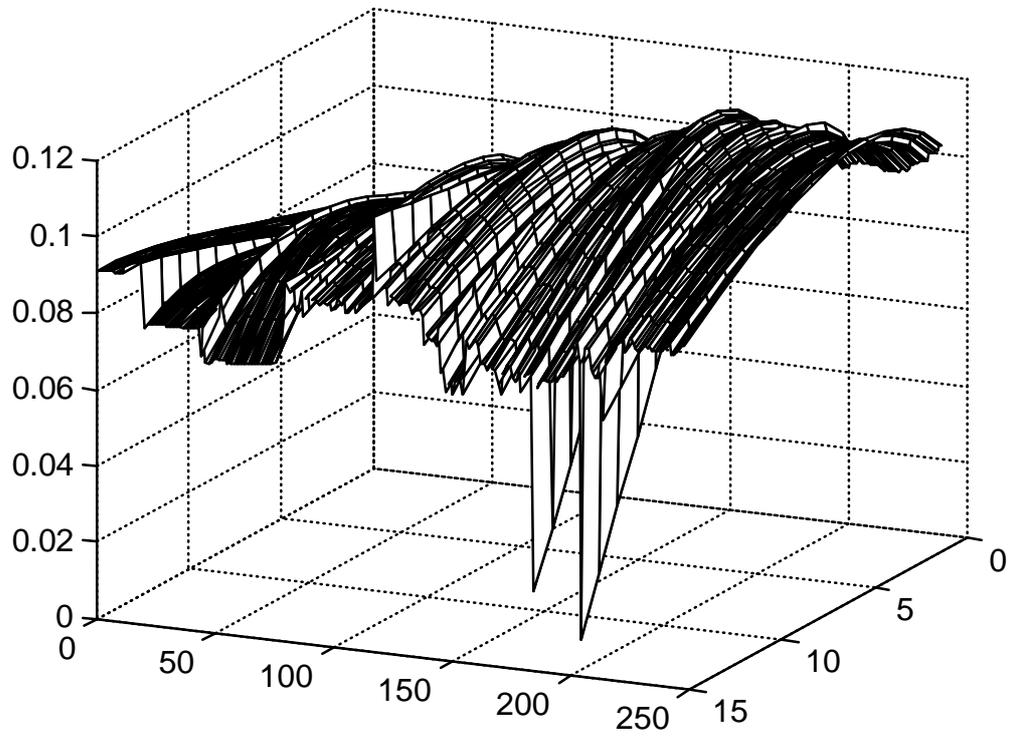
Forward - 1993



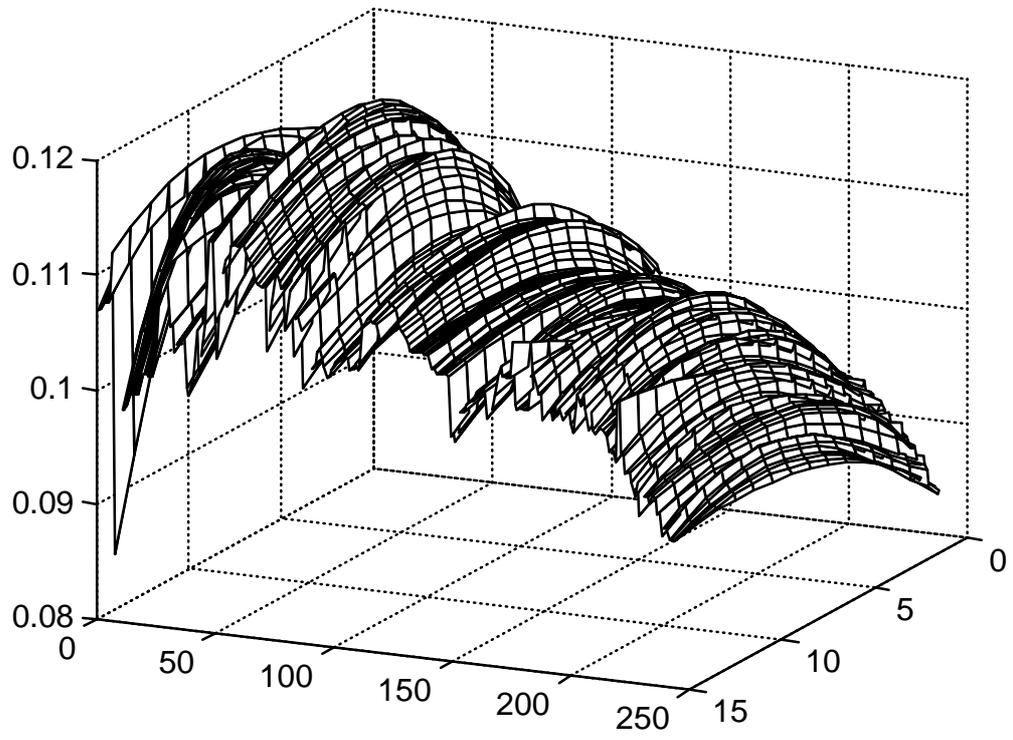
Spot - 1994



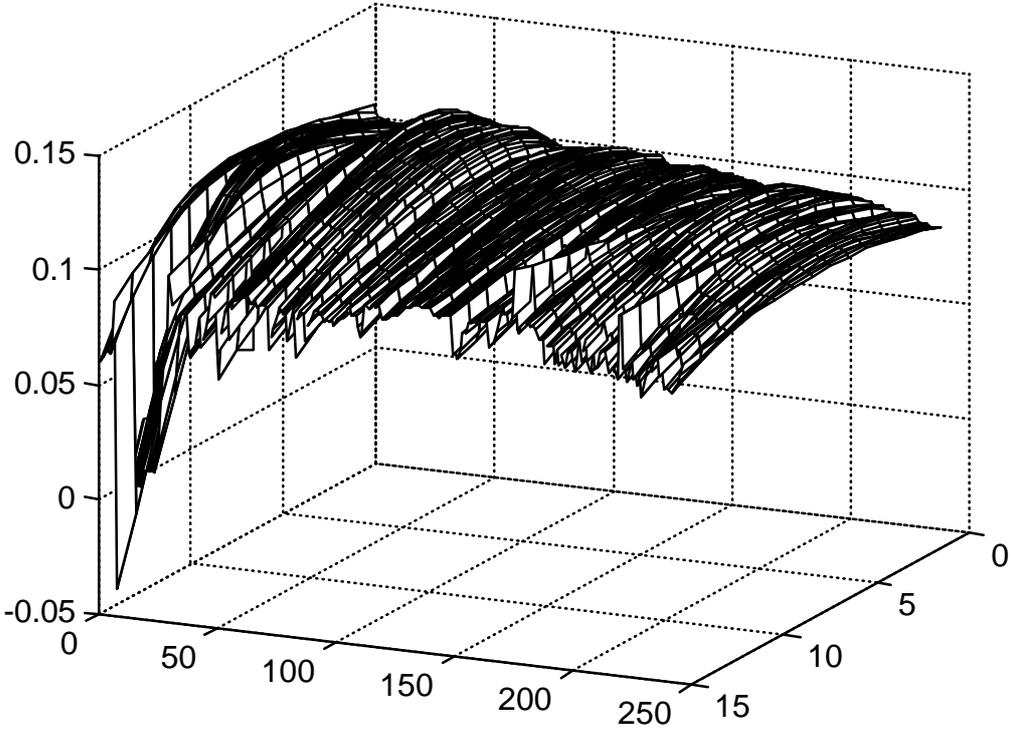
Forward - 1994



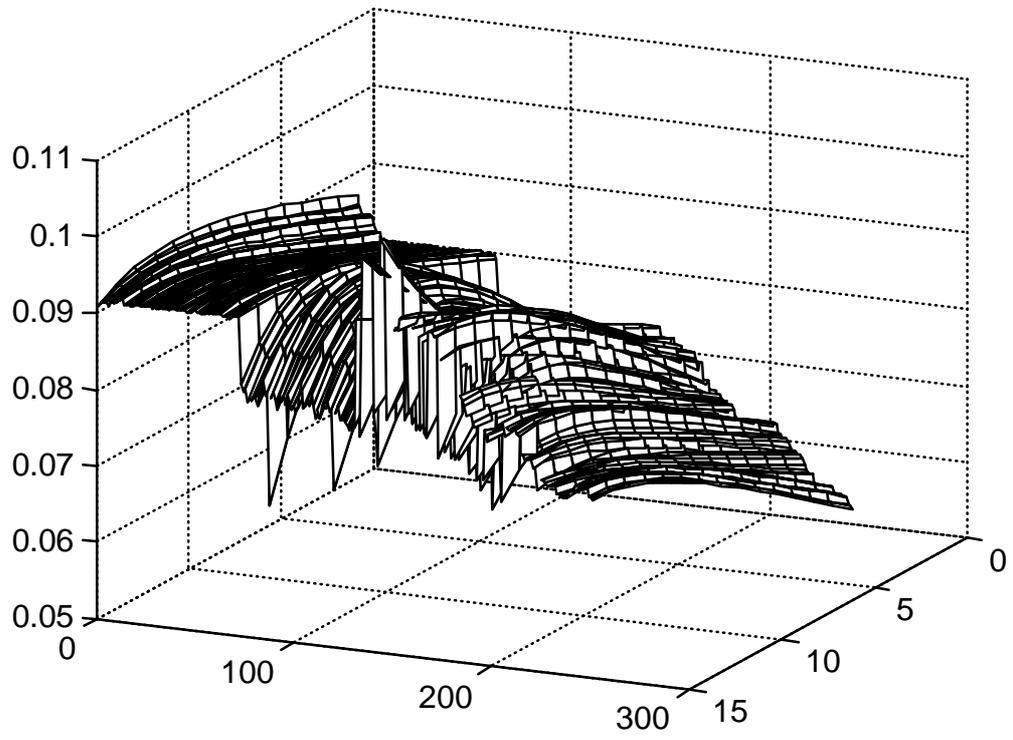
Spot - 1995



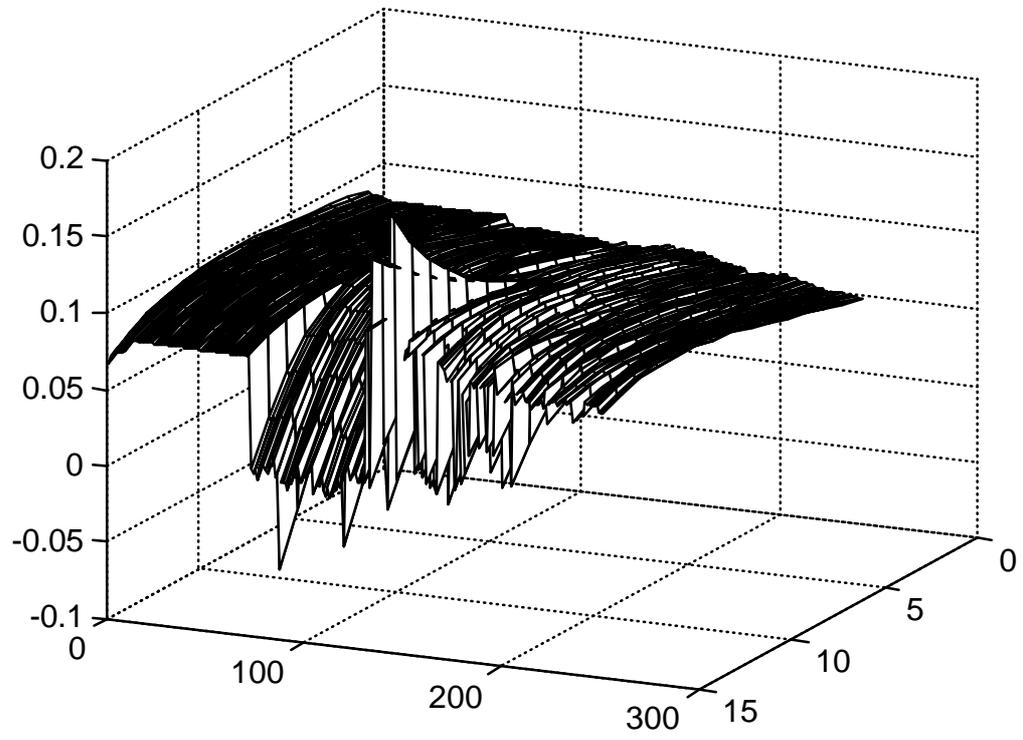
Forward - 1995



Spot - 1996

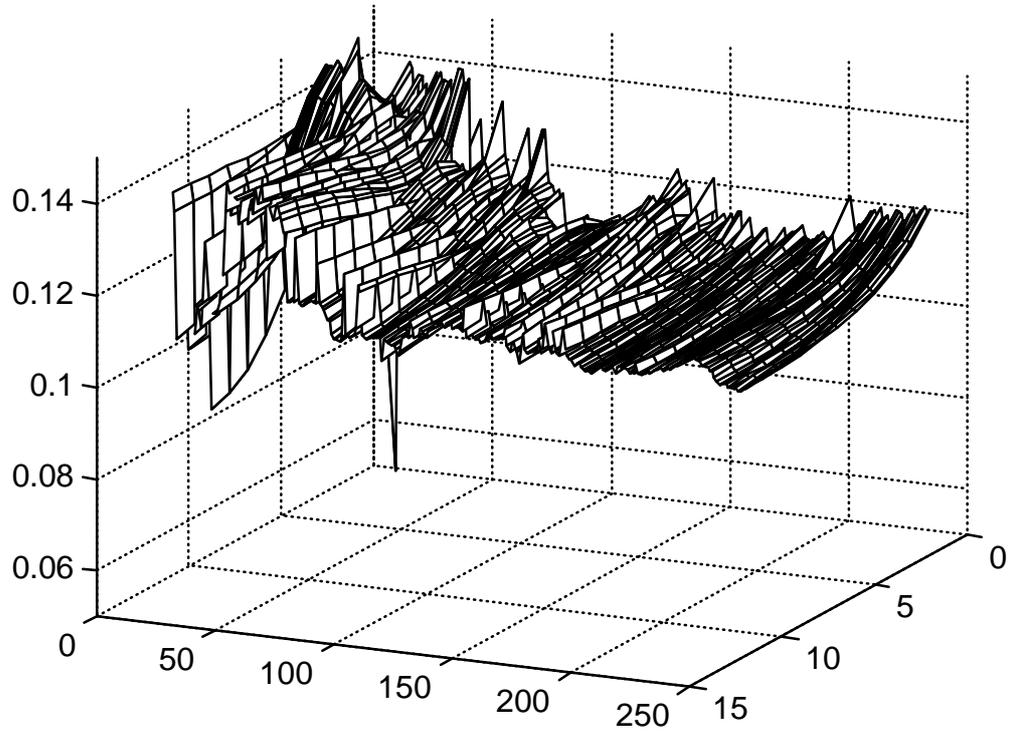


Forward - 1996

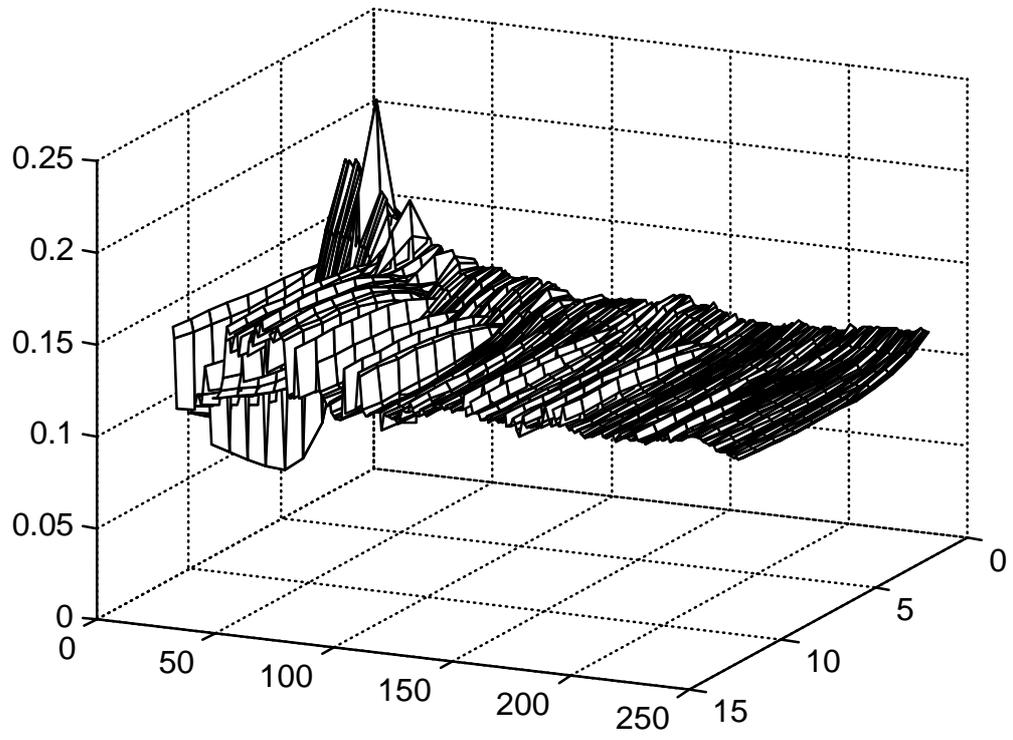


FONG - VASICEK (1982) [CONTRERAS - NAVARRO (1993)]

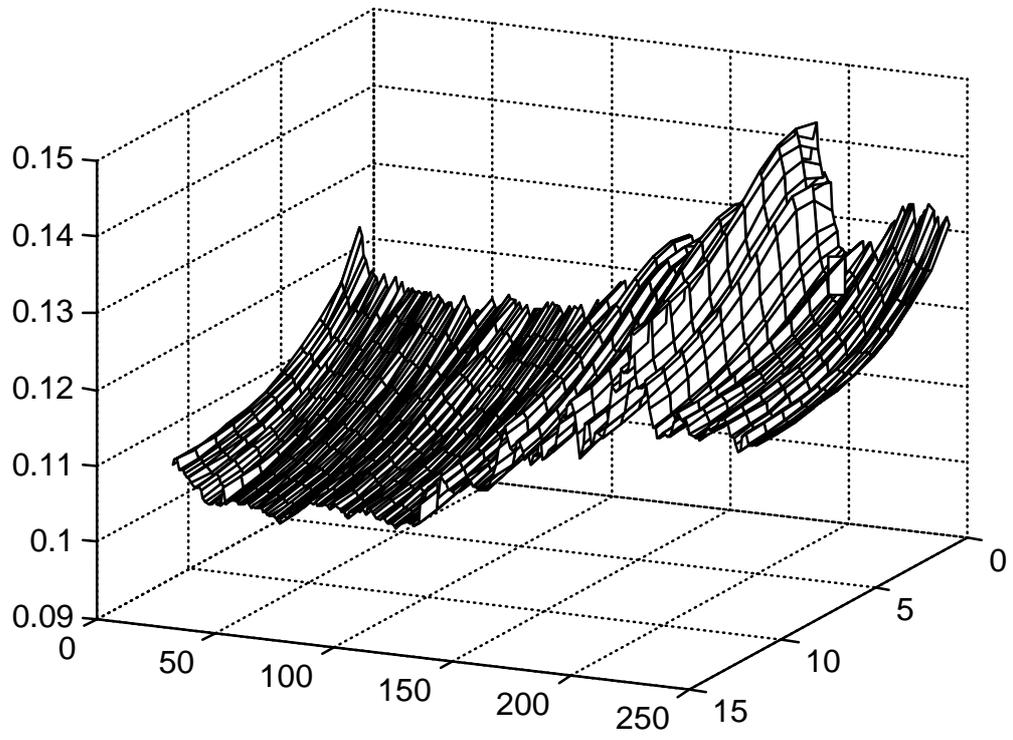
Spot - 1991



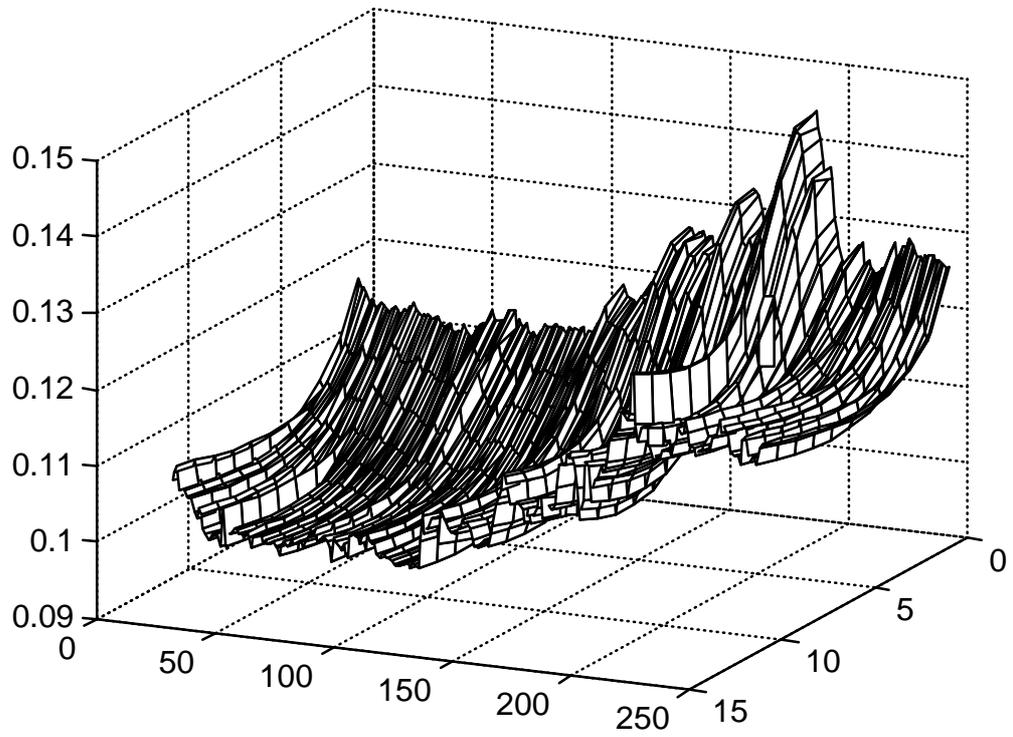
Forward - 1991



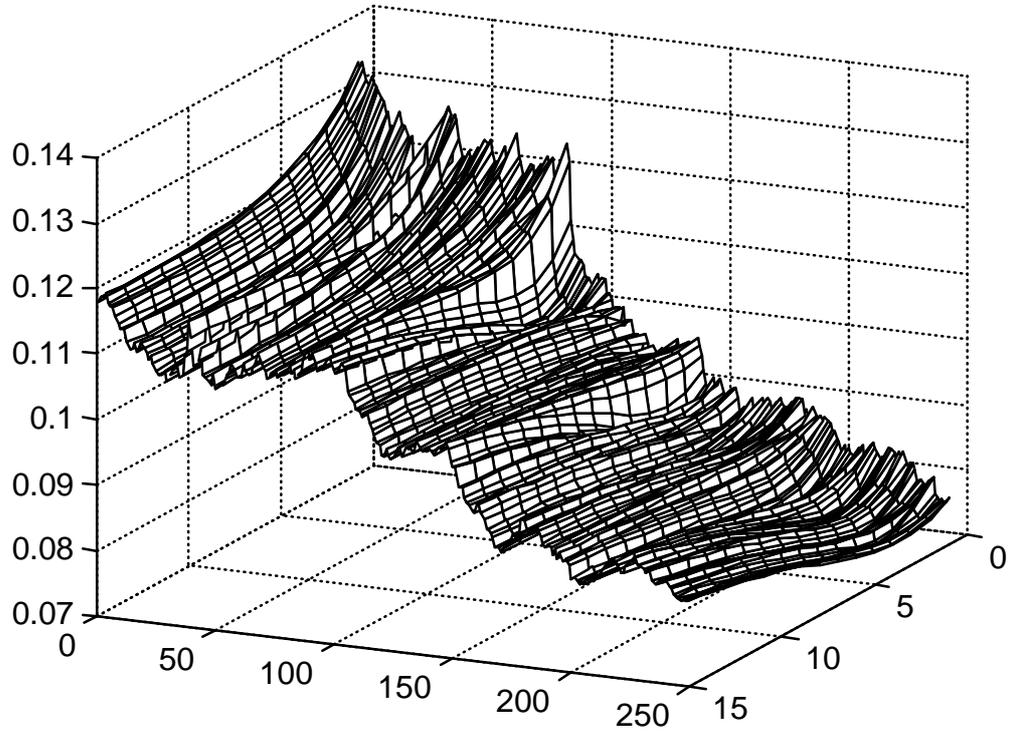
Spot - 1992



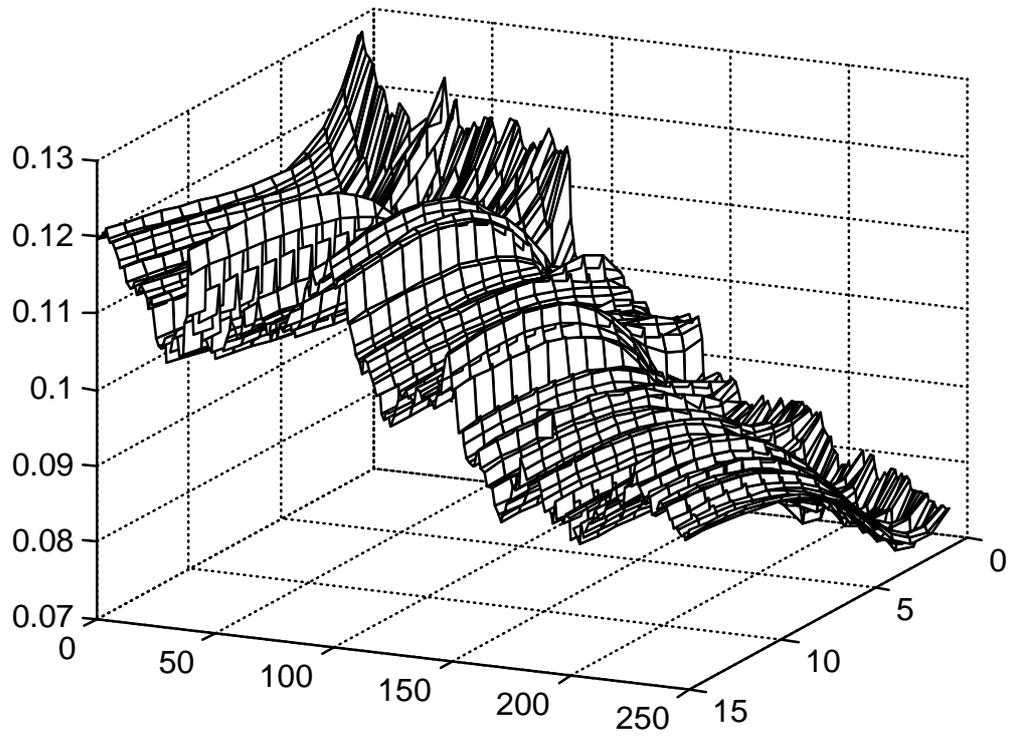
Forward - 1992



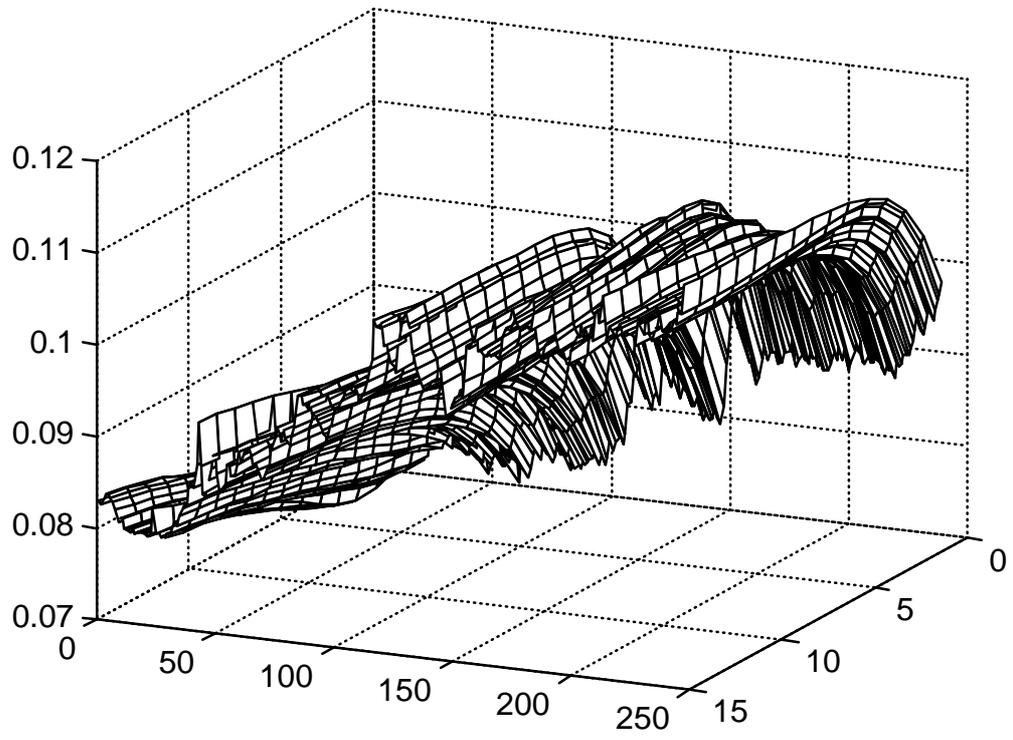
Spot - 1993



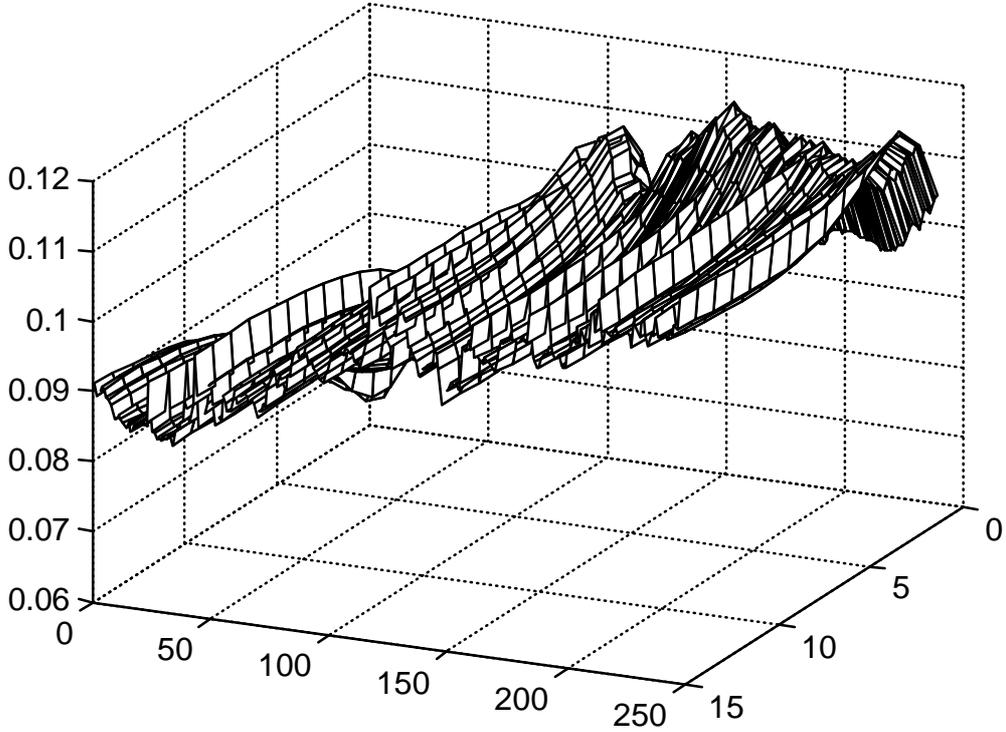
Forward - 1993



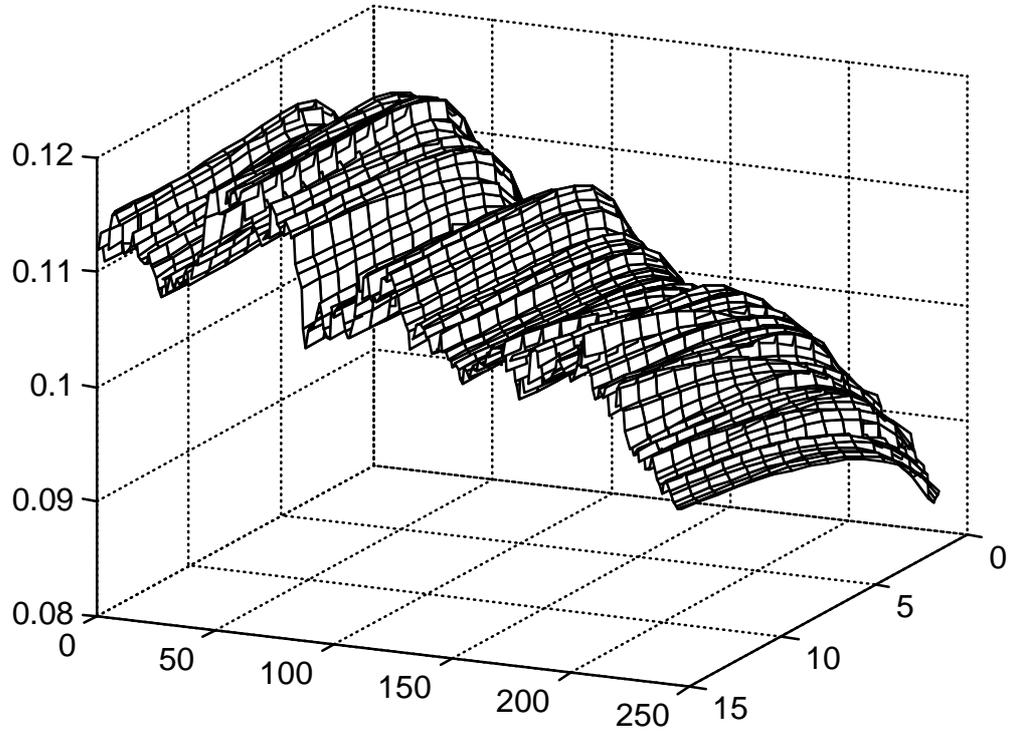
Spot - 1994



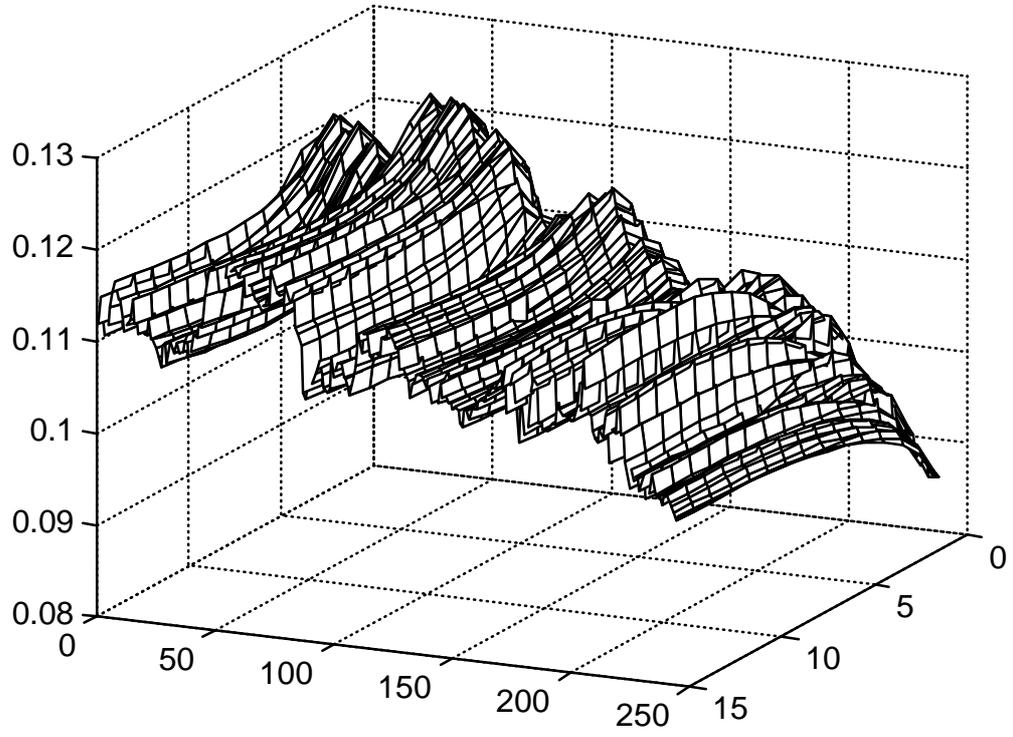
Forward - 1994



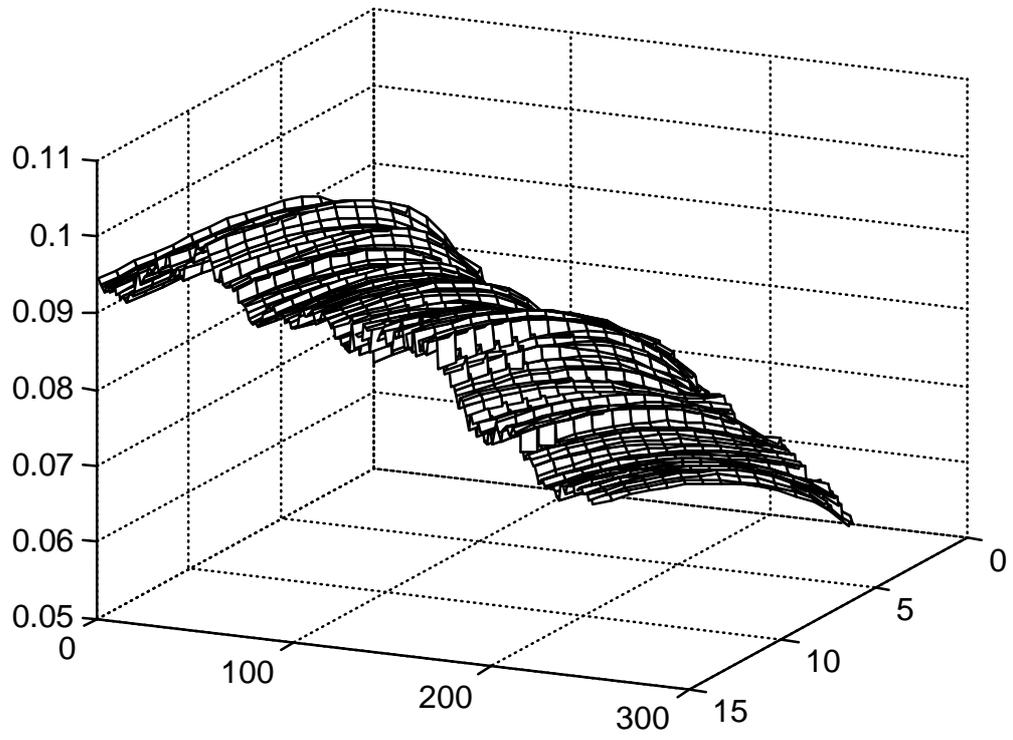
Spot - 1995



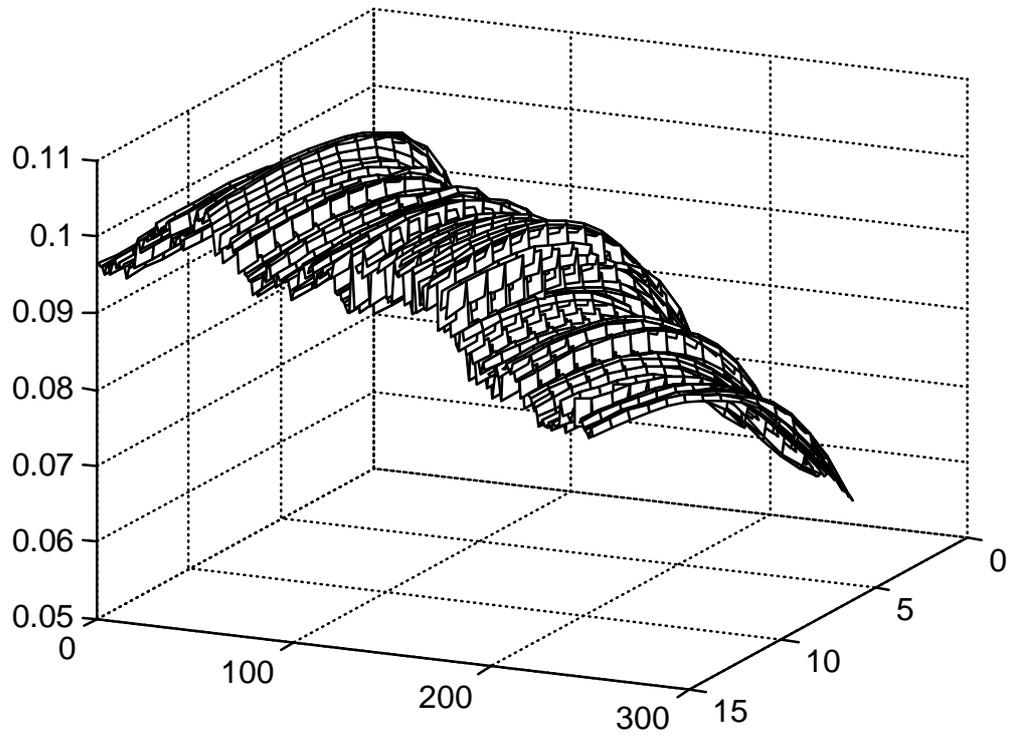
Forward - 1995



Spot - 1996

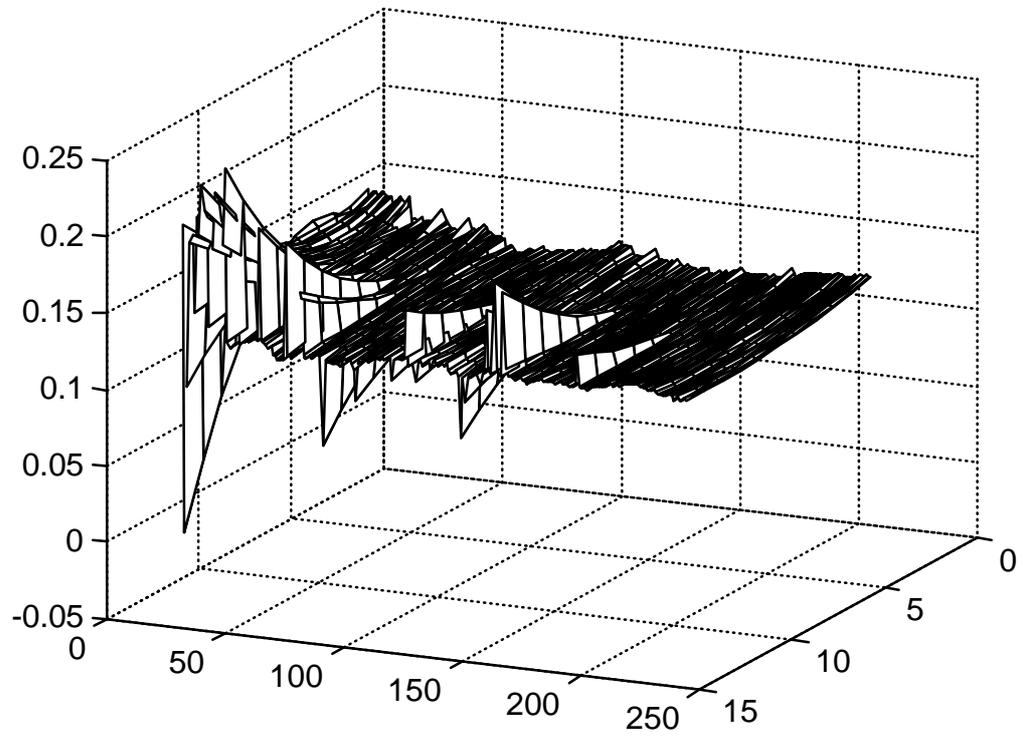


Forward - 1996

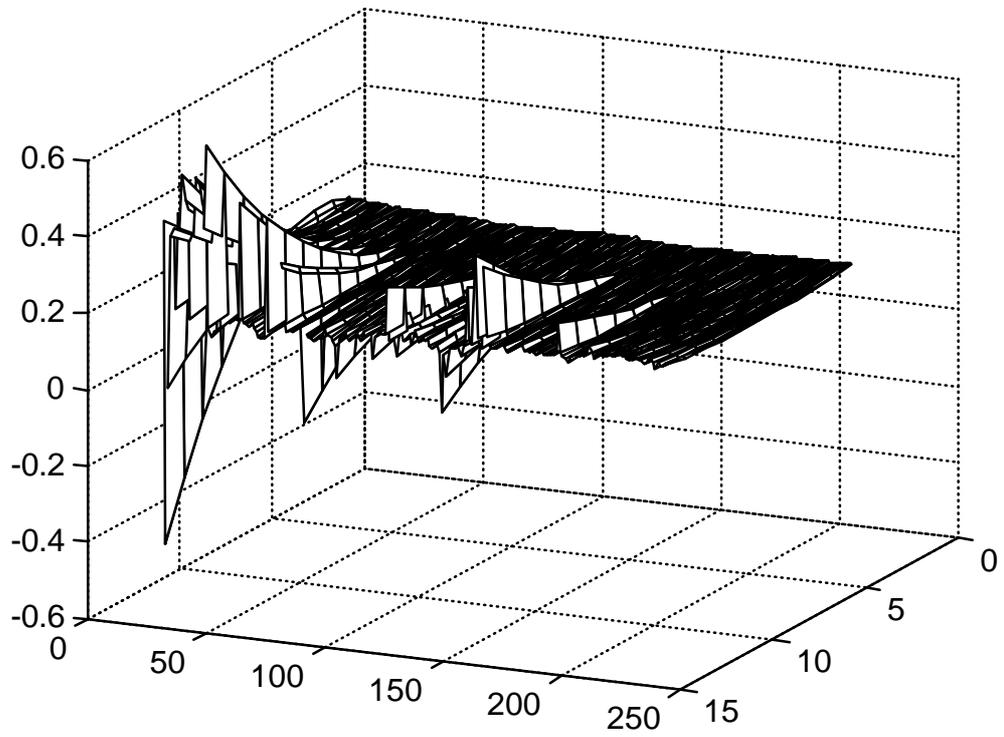


CARLETON - CHAMBERS - WALDMAN (1984)

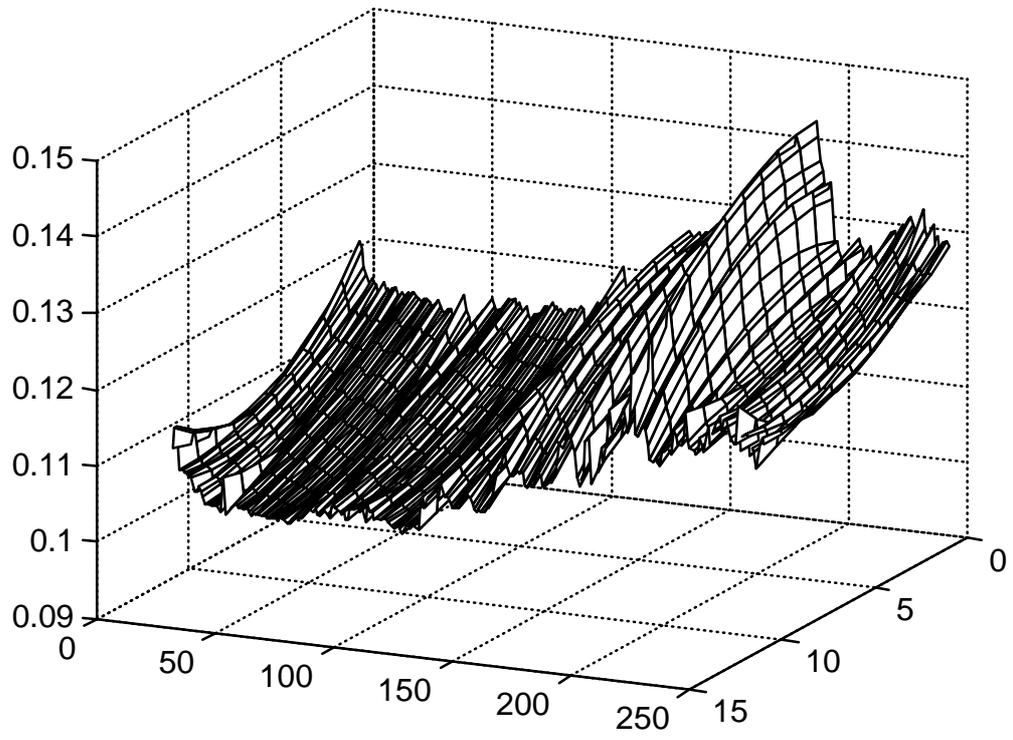
Spot - 1991



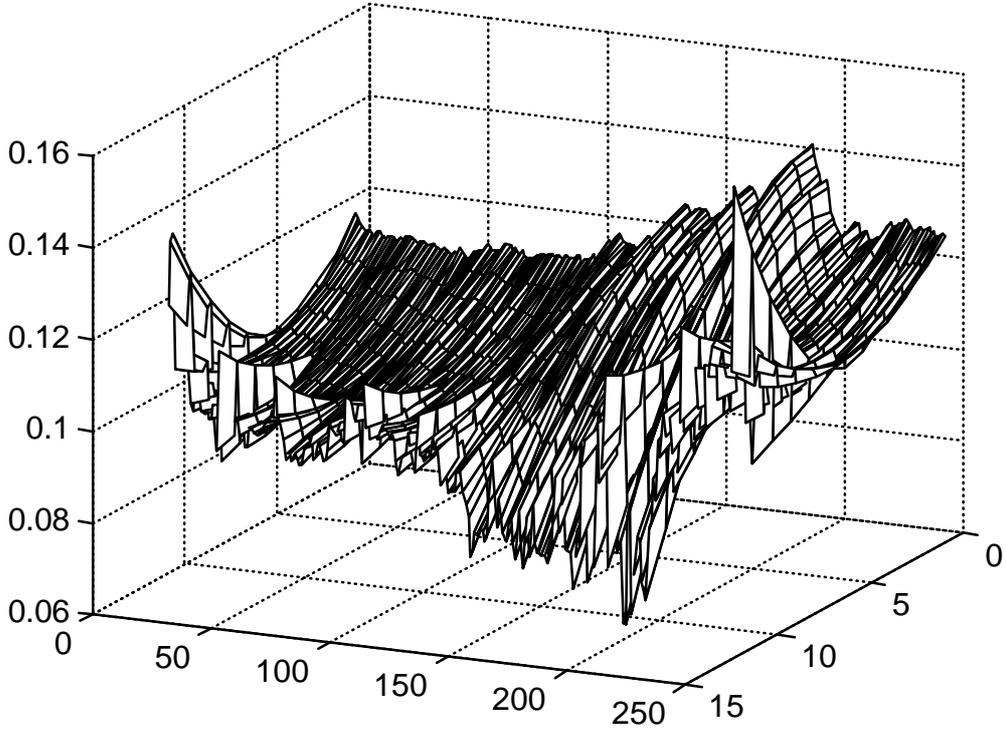
Forward - 1991



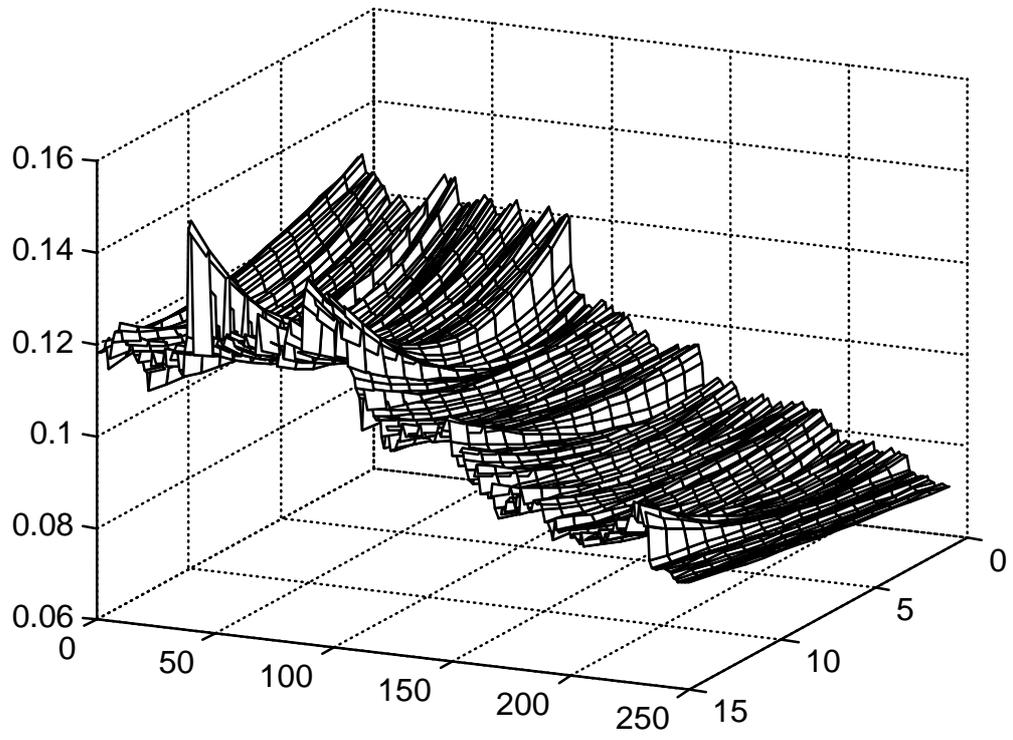
Spot - 1992



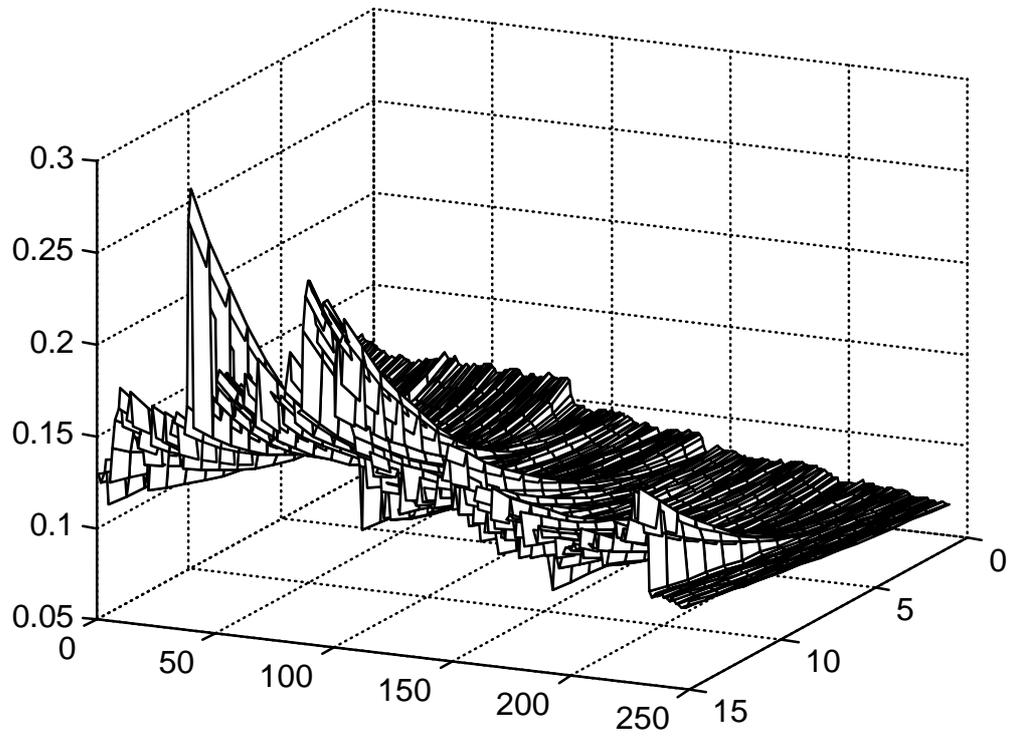
Forward - 1992



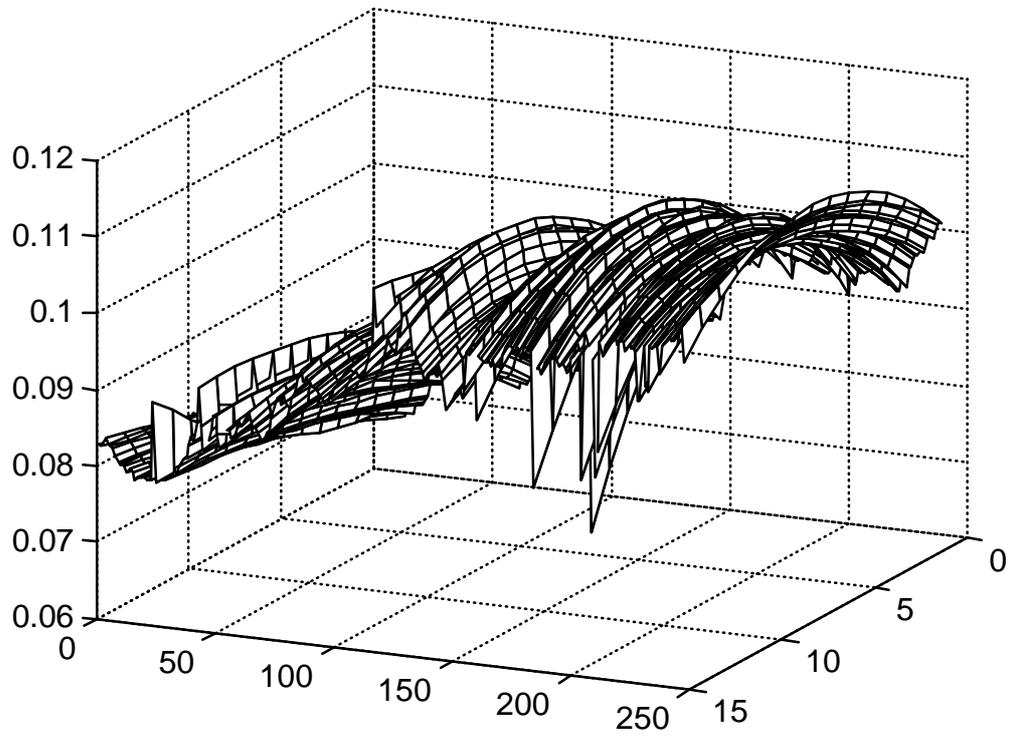
Spot - 1993



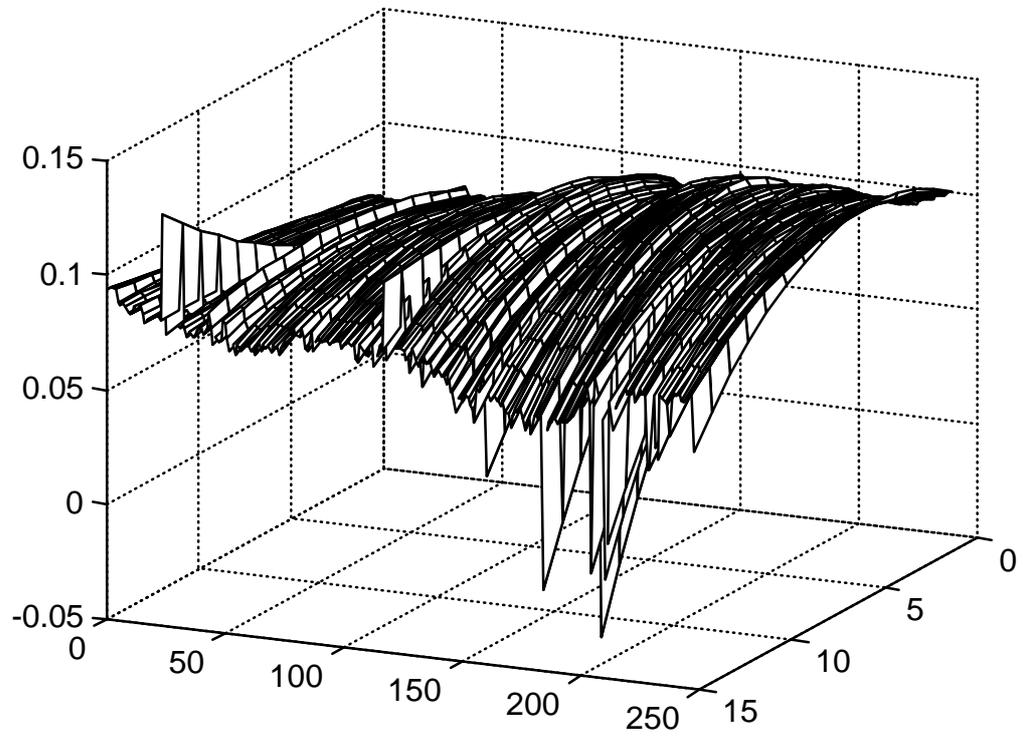
Forward - 1993



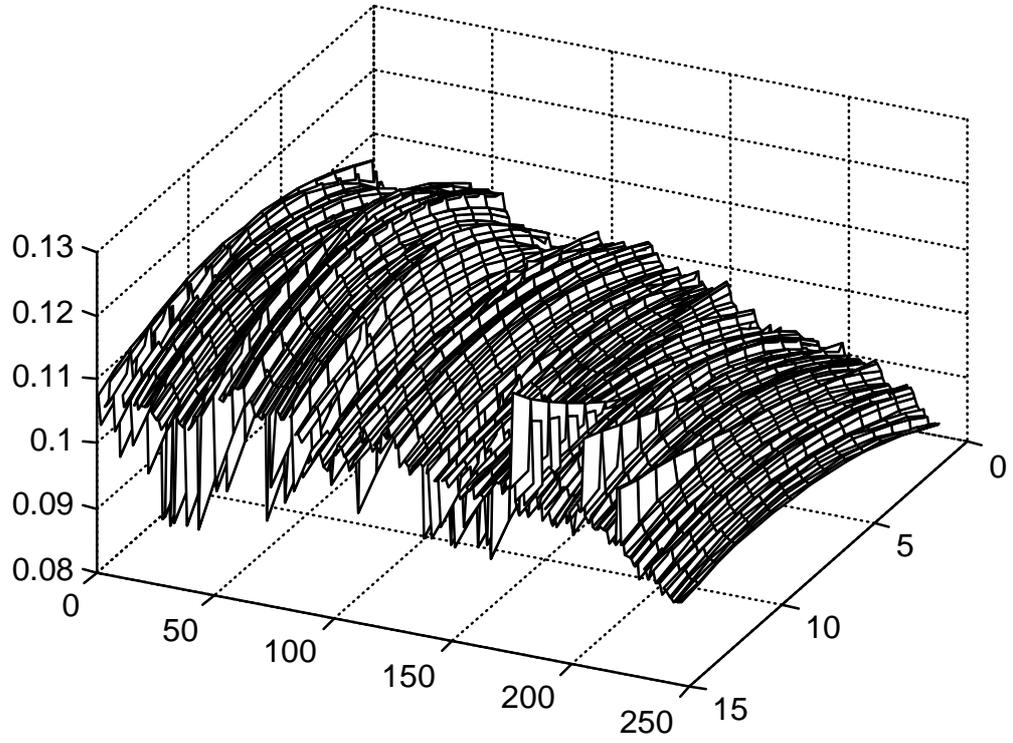
Spot - 1994



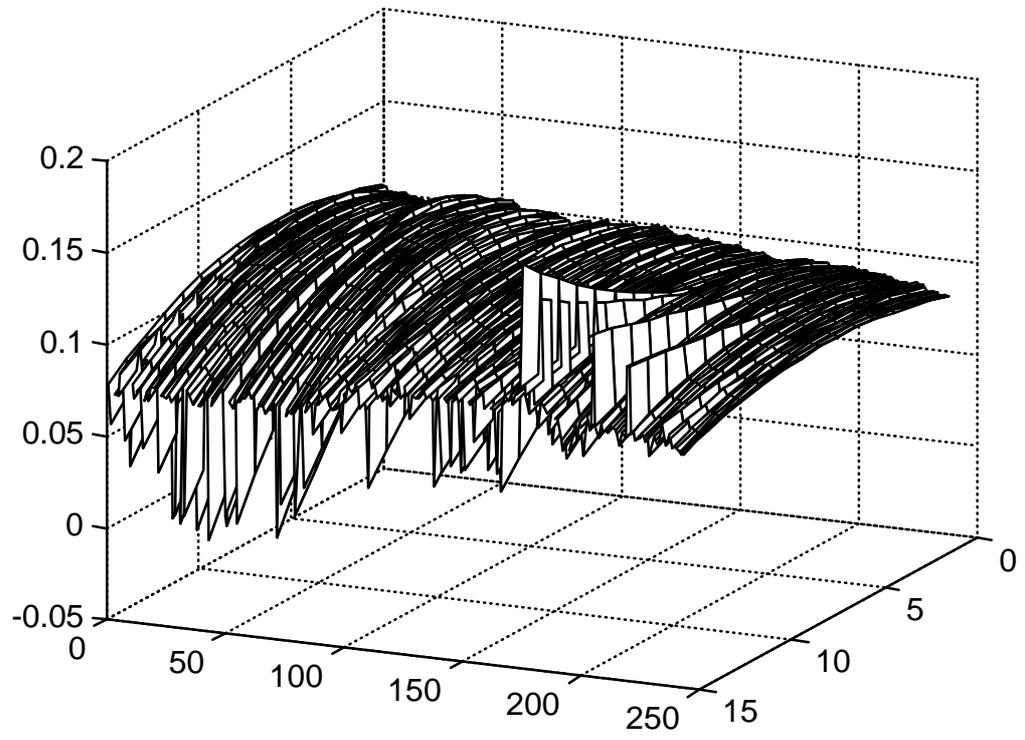
Forward - 1994



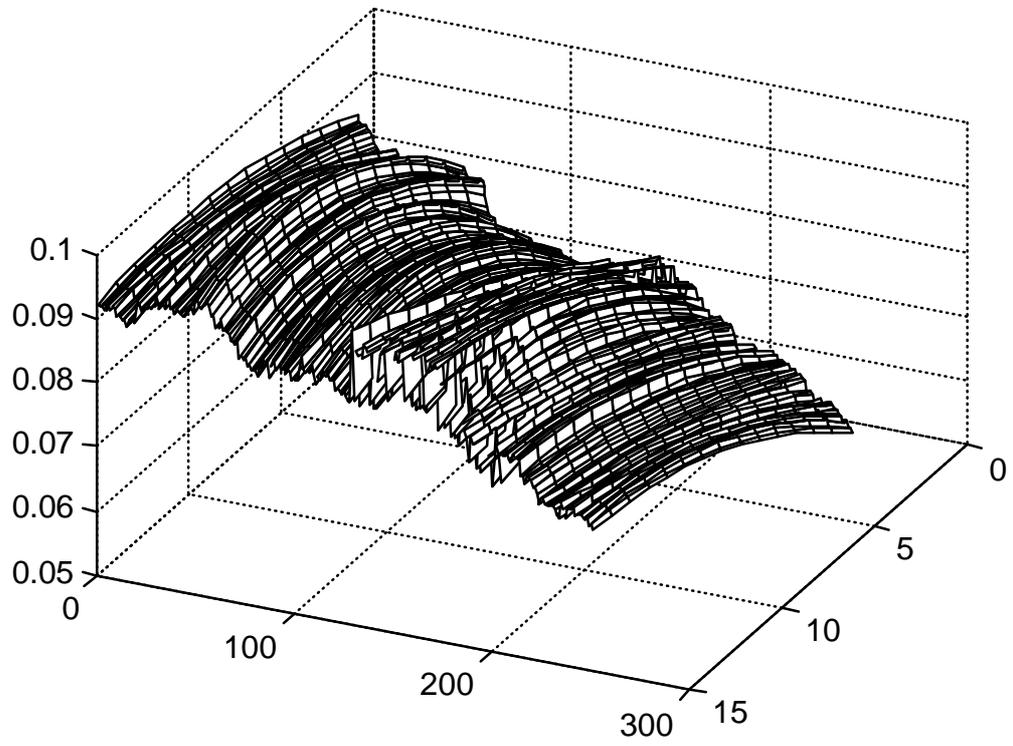
Spot - 1995



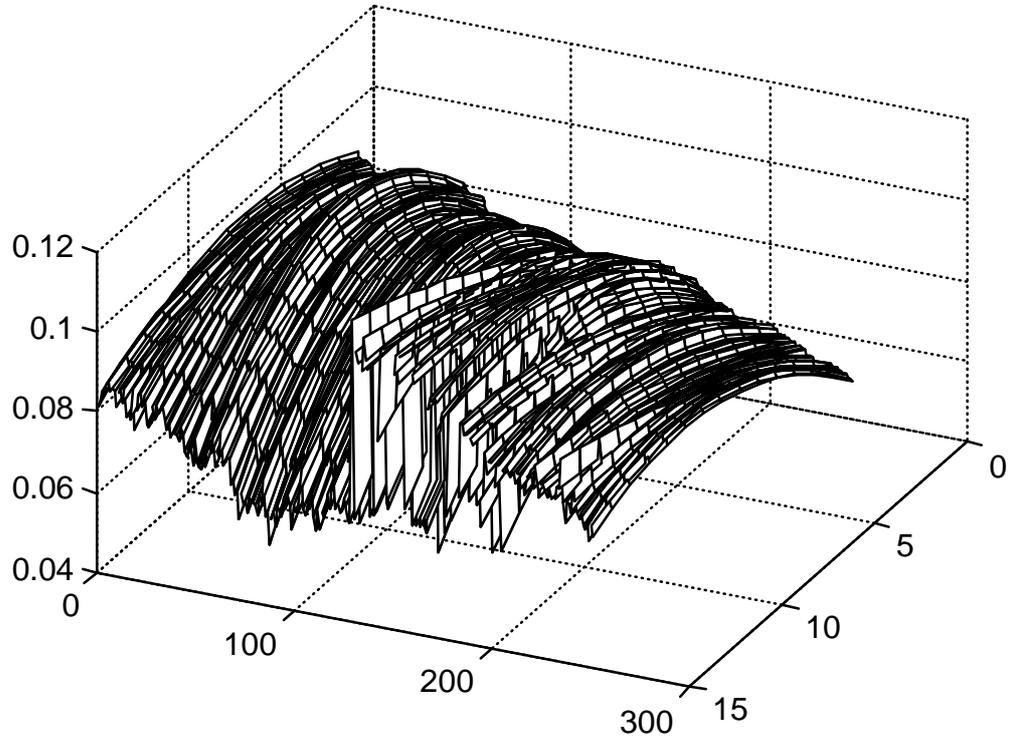
Forward - 1995



Spot - 1996

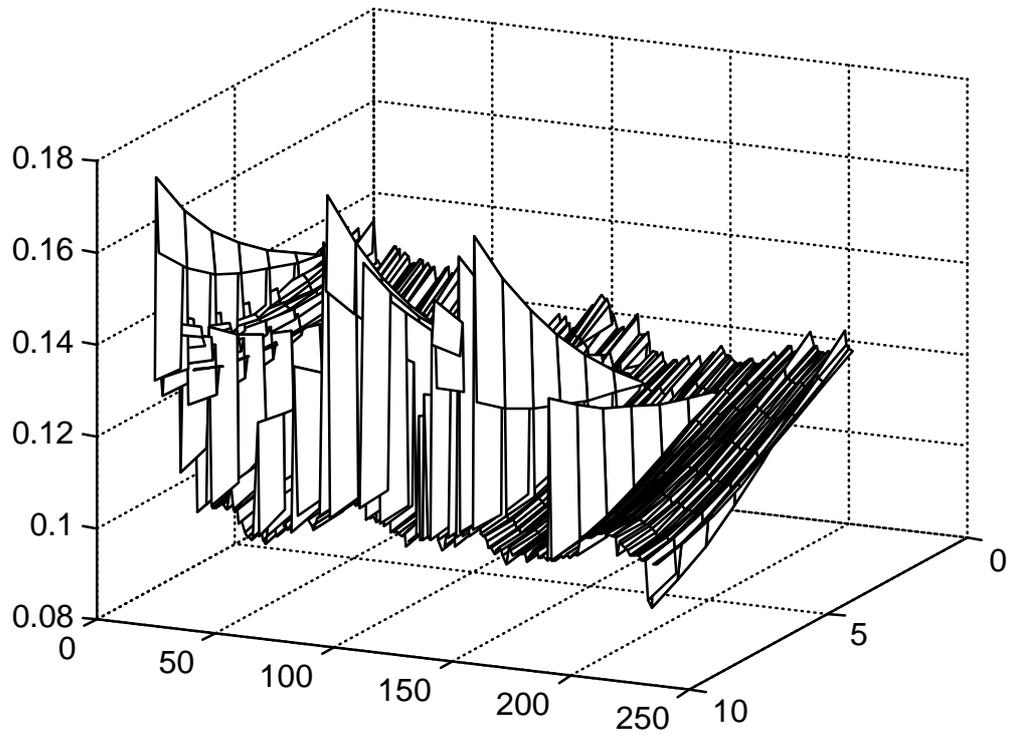


Forward - 1996

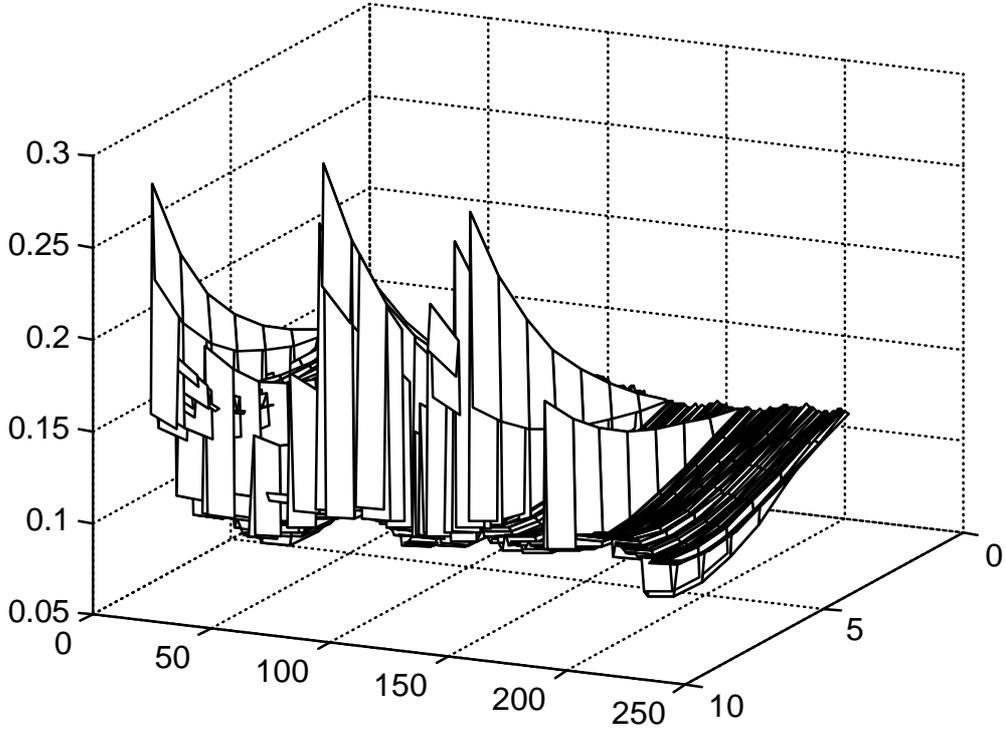


SHEA (1984)

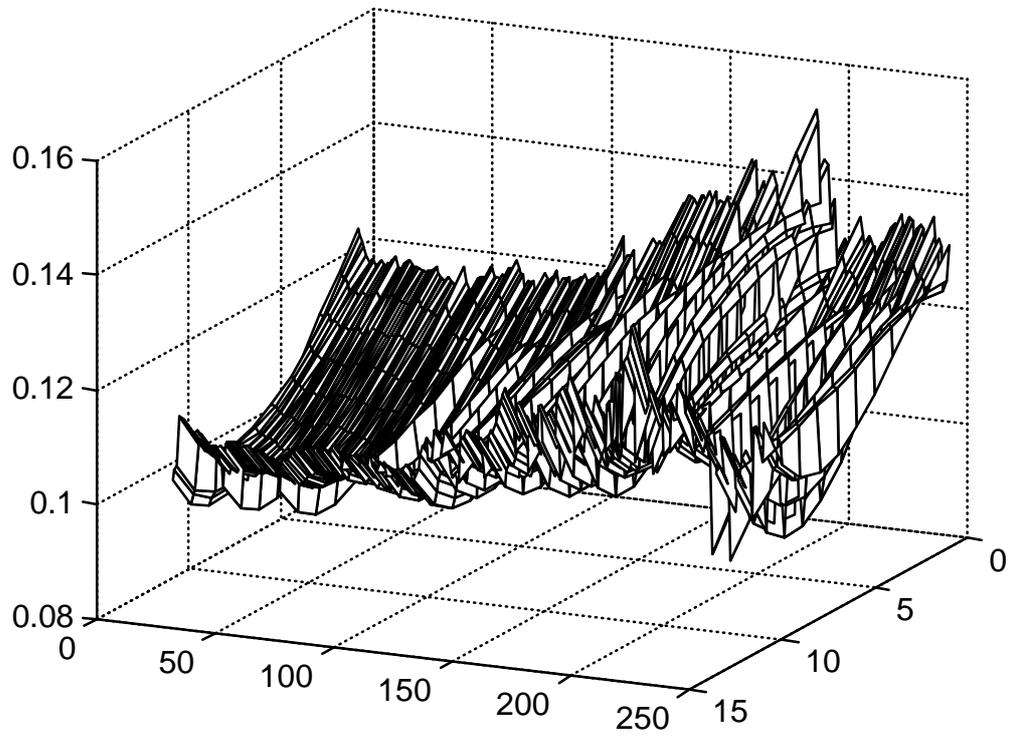
Spot - 1991



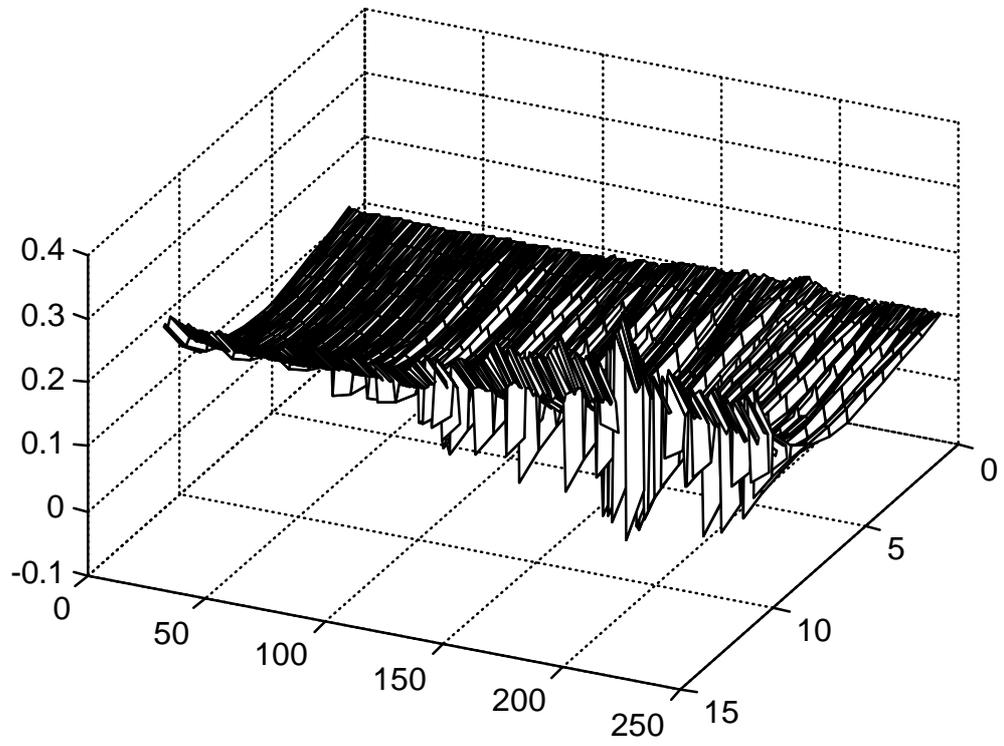
Forward - 1991



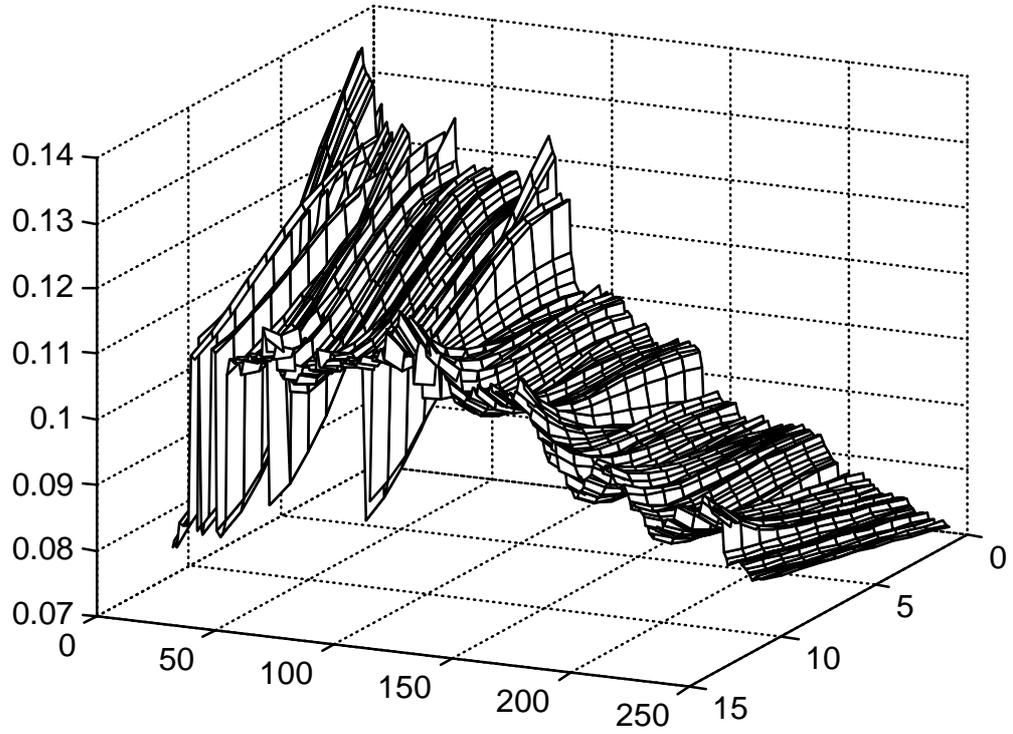
Spot - 1992



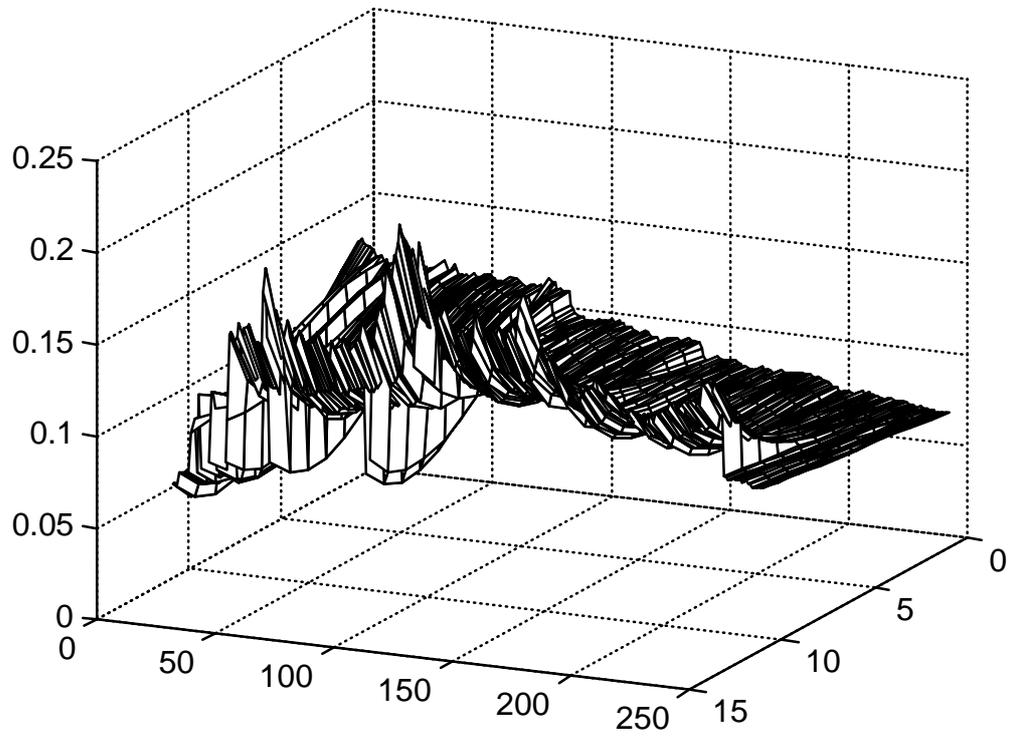
Forward - 1992



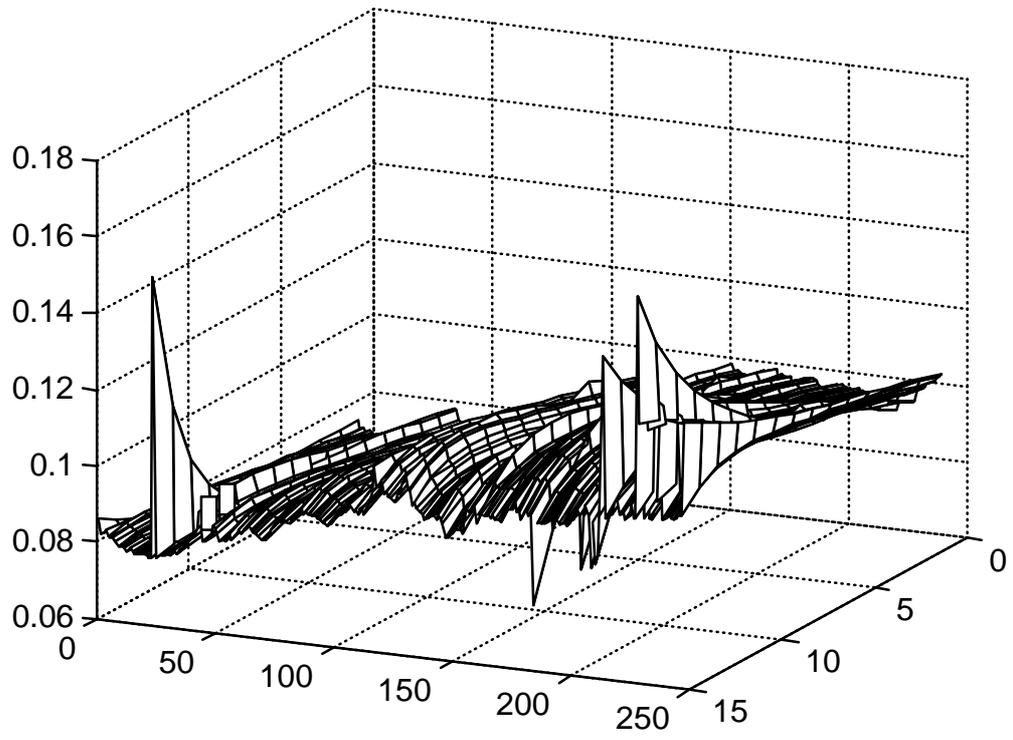
Spot - 1993



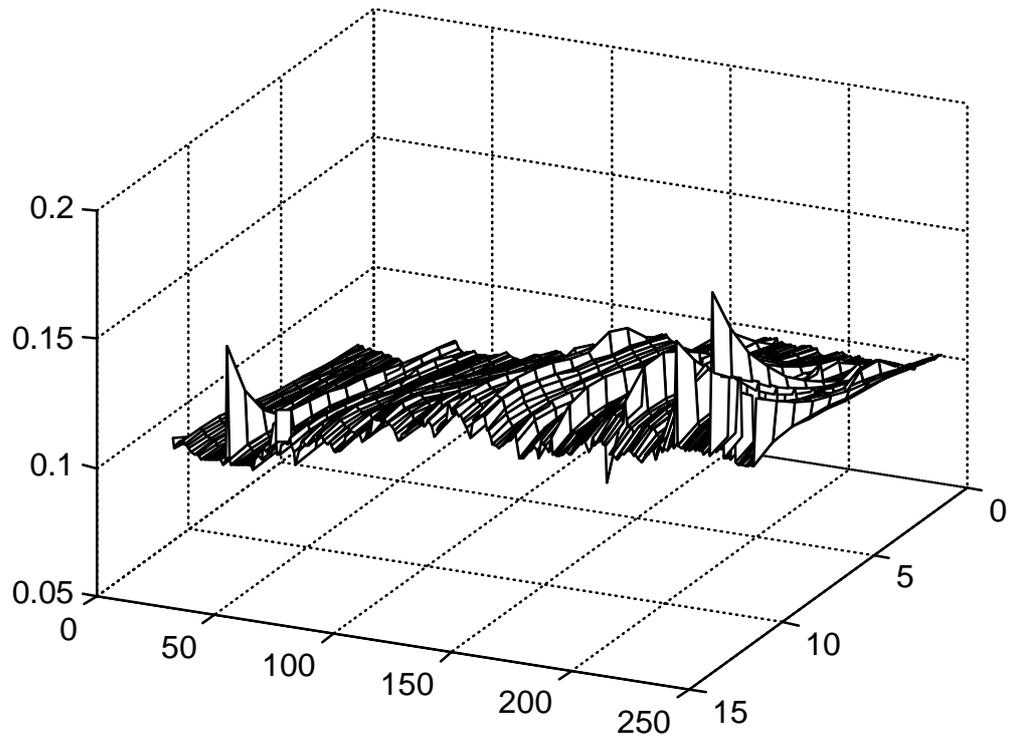
Forward - 1993



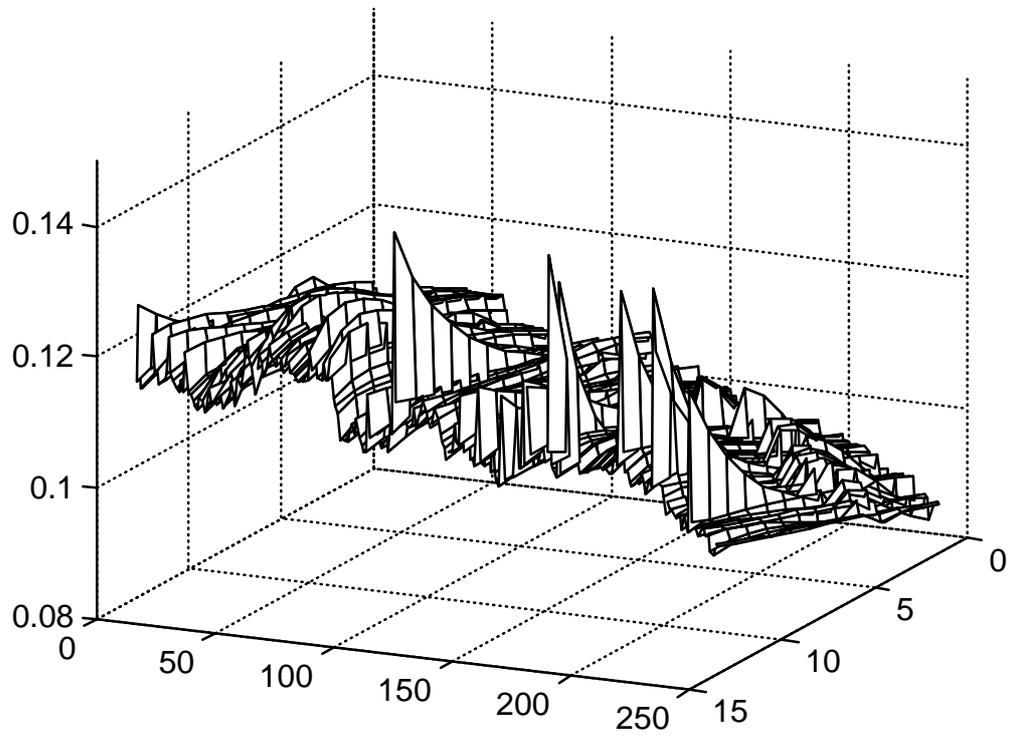
Spot - 1994



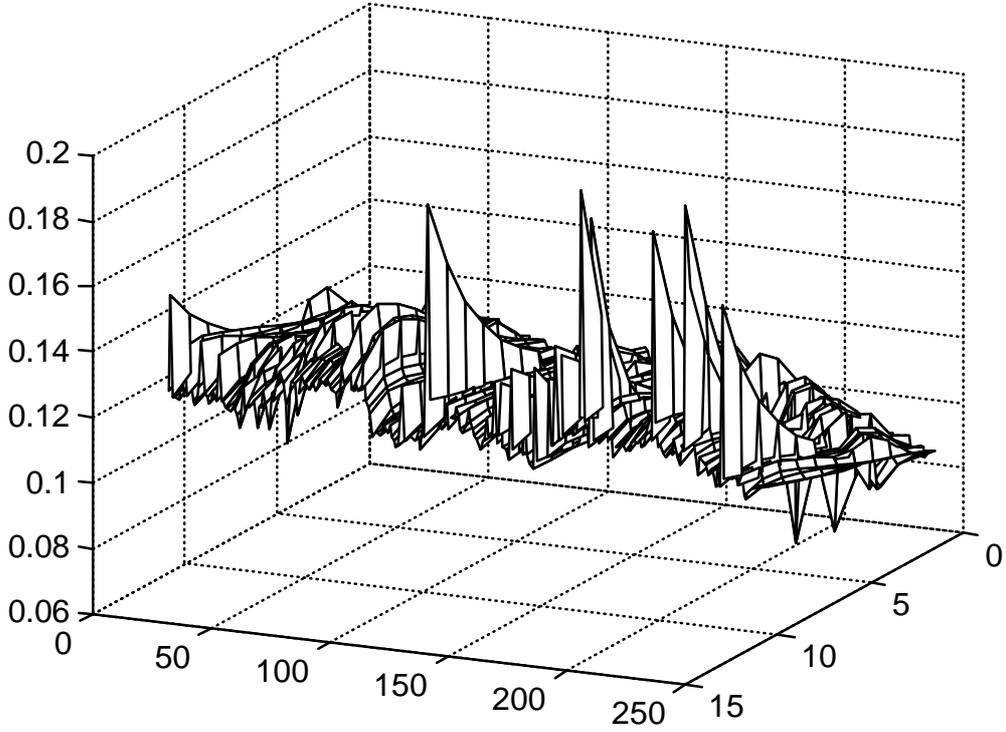
Forward - 1994



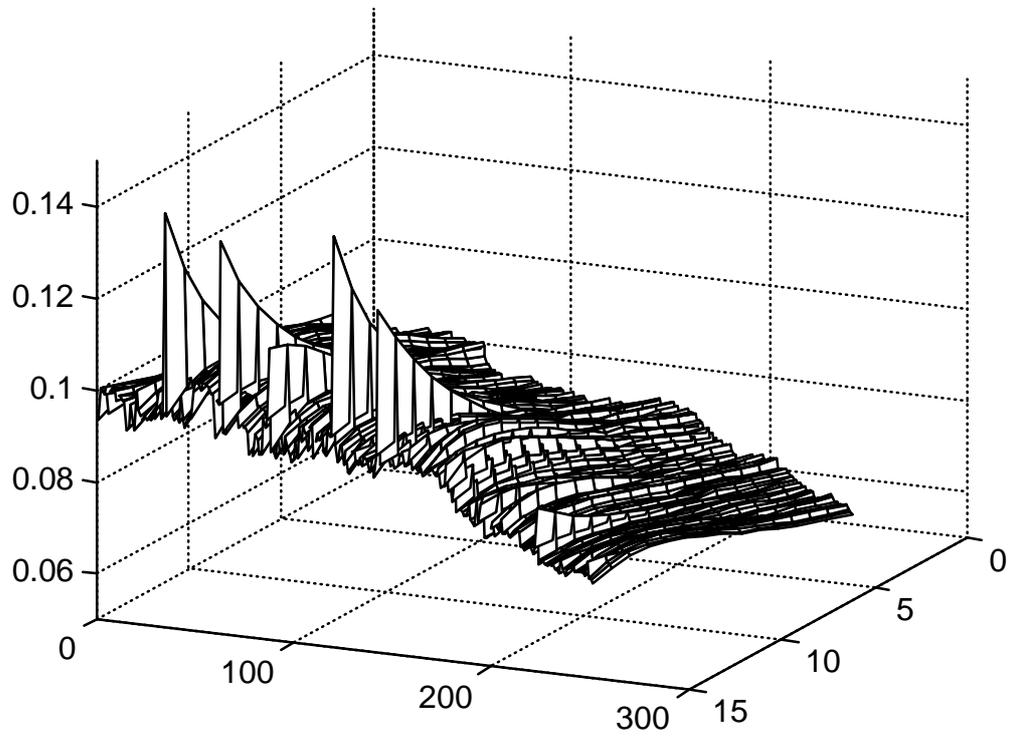
Spot - 1995



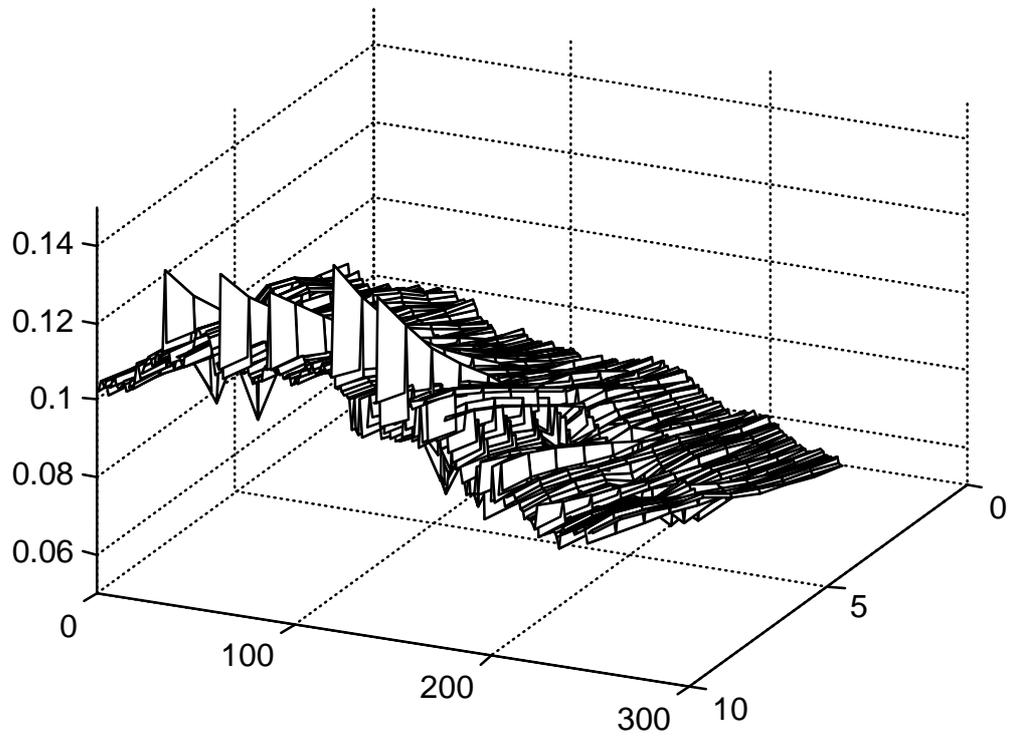
Forward - 1995



Spot - 1996

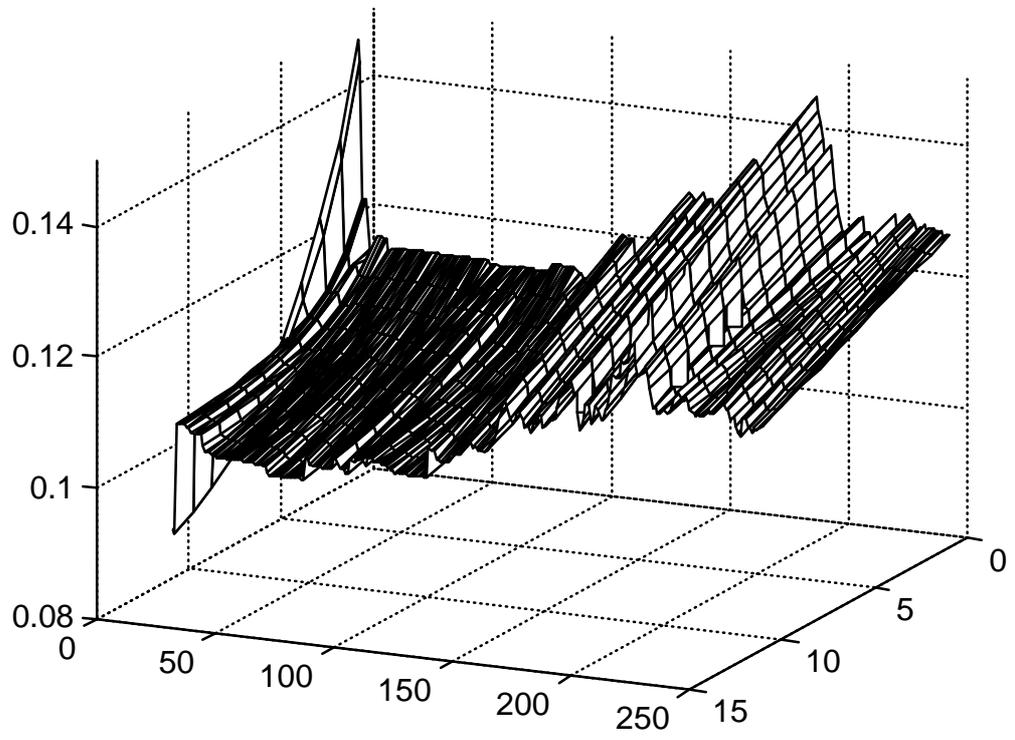


Forward - 1996

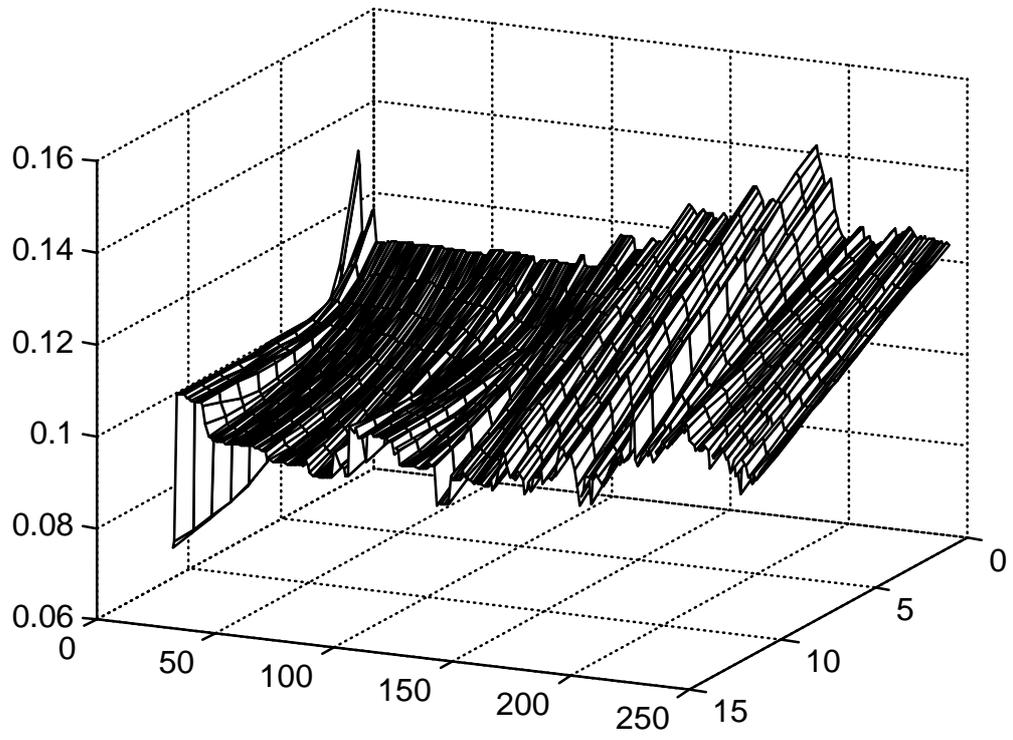


NELSON – SIEGEL (1987)

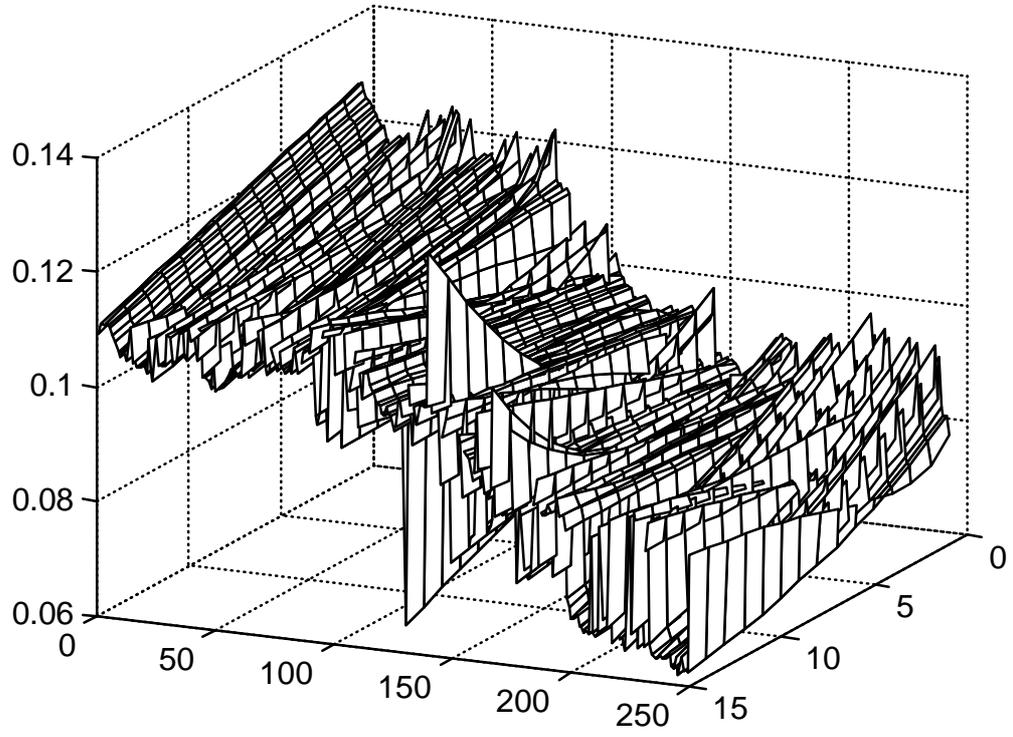
Spot - 1992



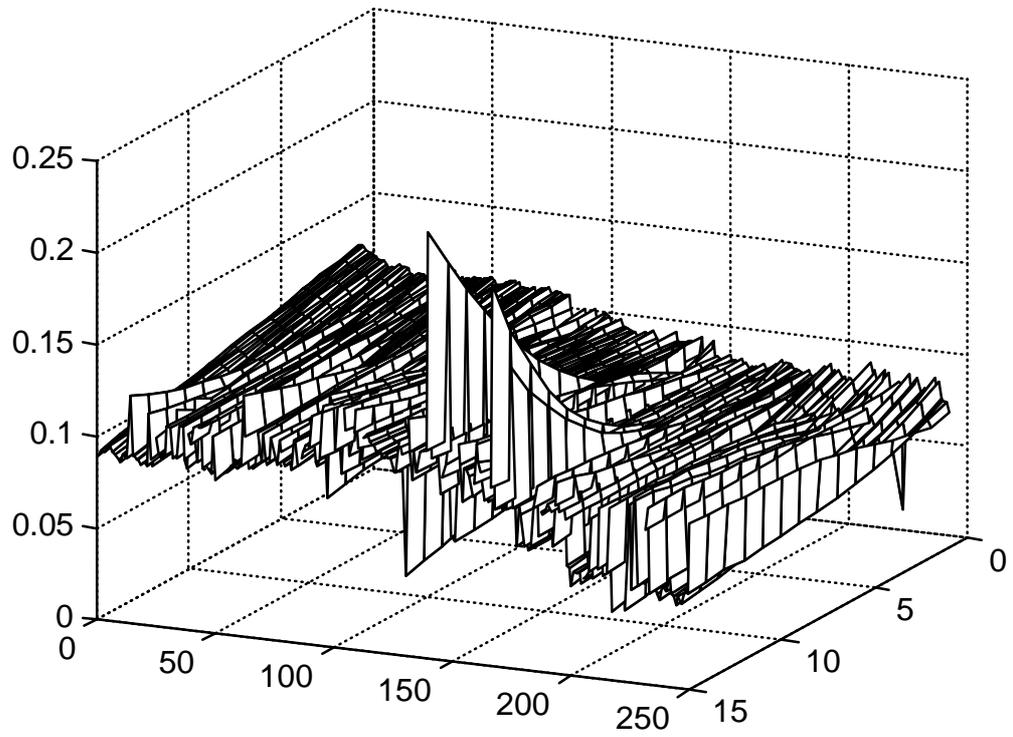
Forward - 1992



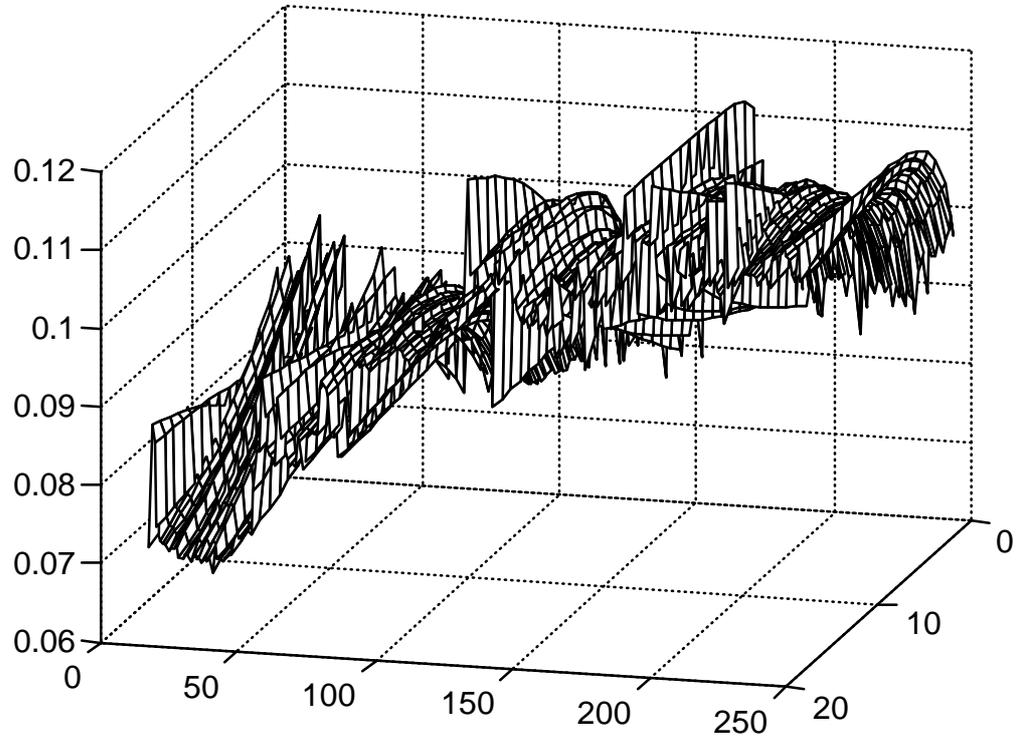
Spot - 1993



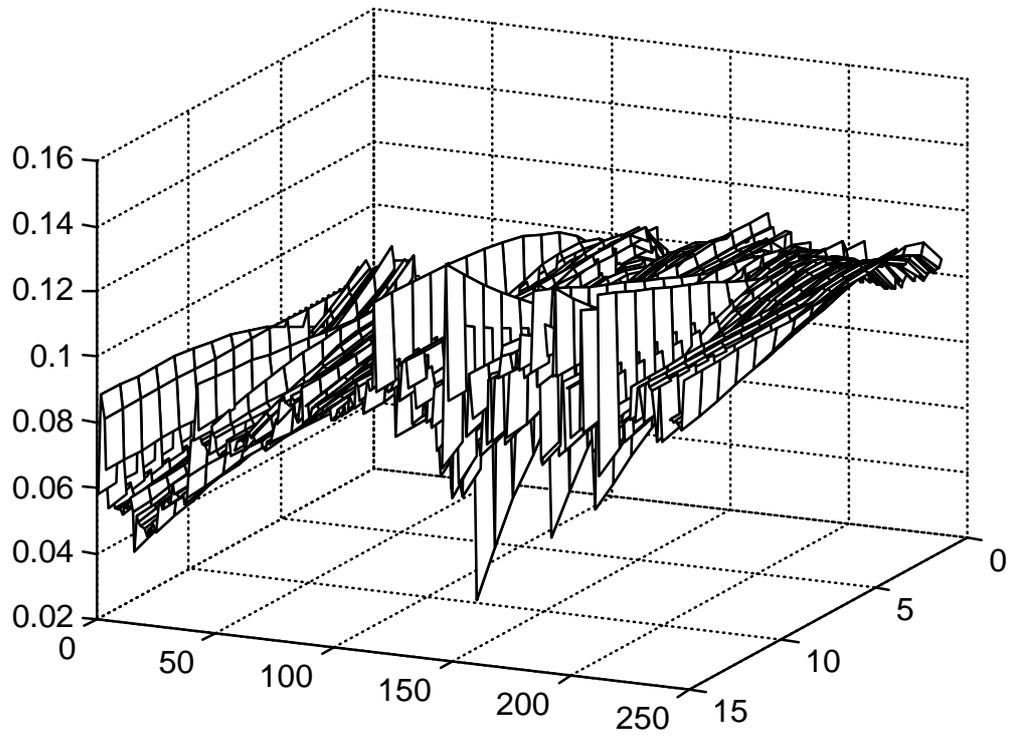
Forward - 1993



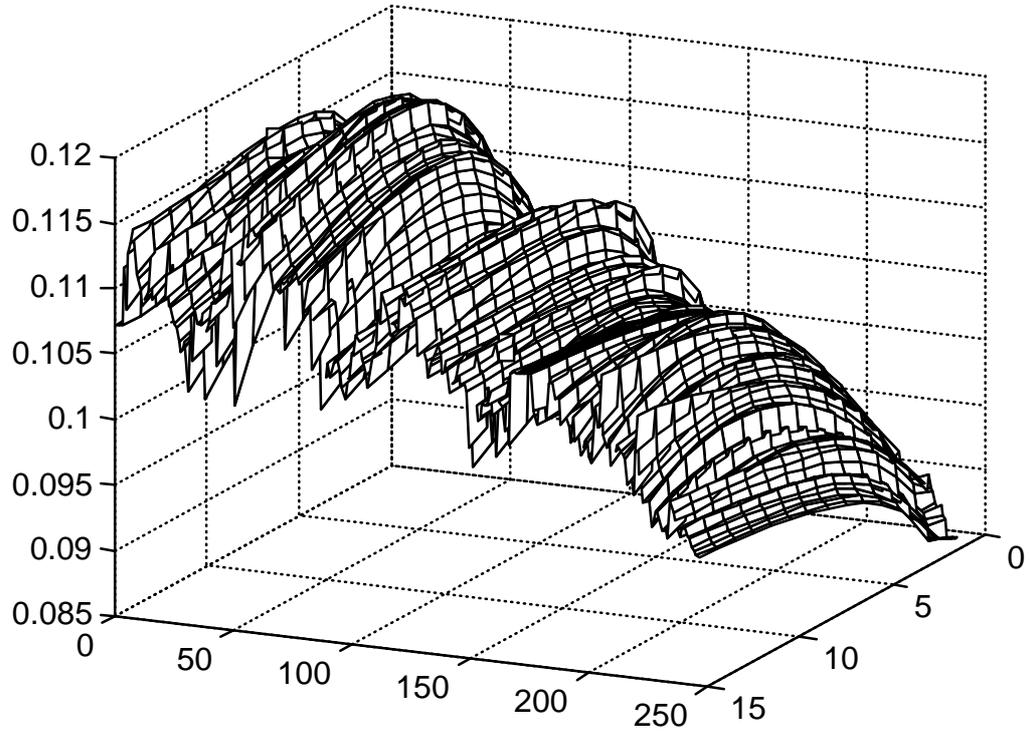
Spot - 1994



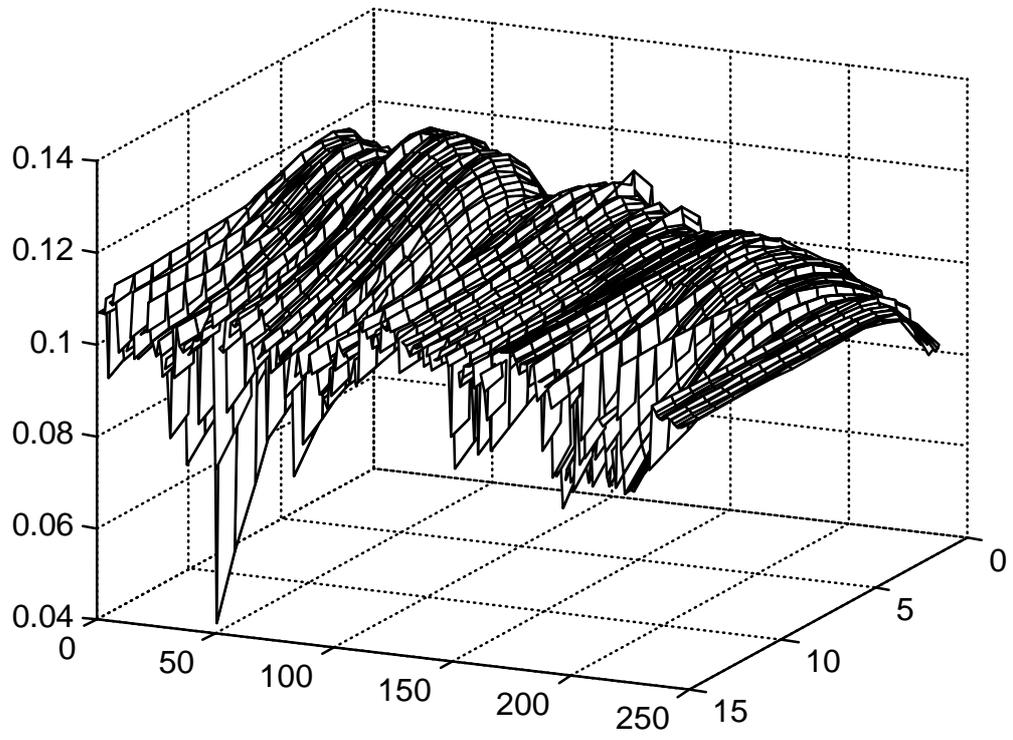
Forward - 1994



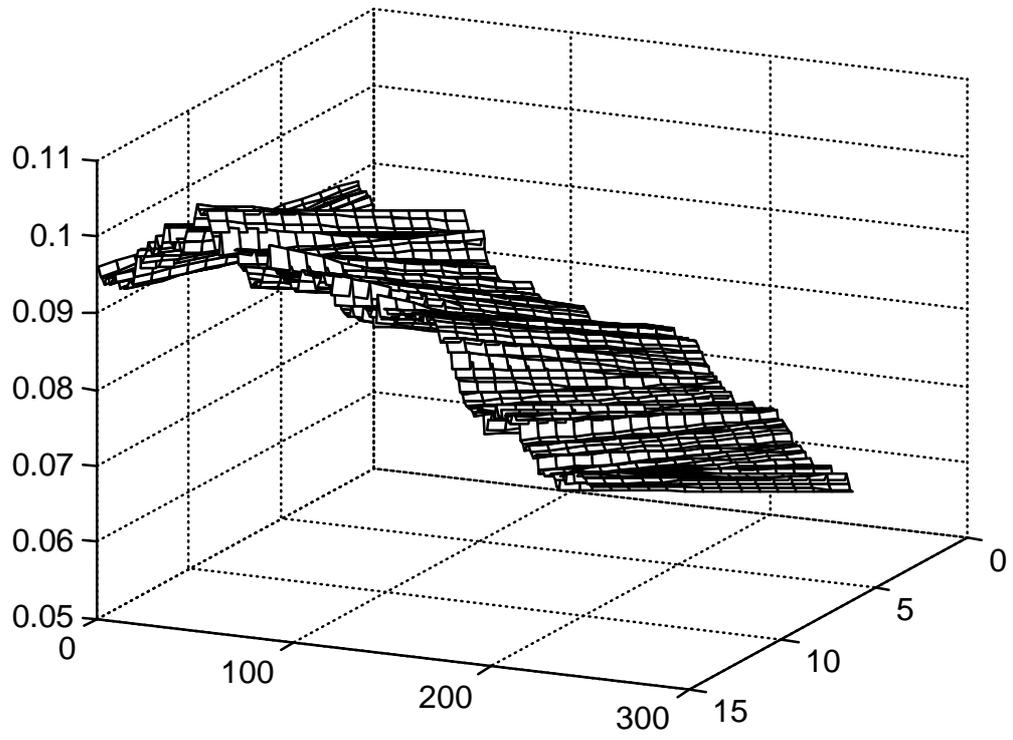
Spot - 1995



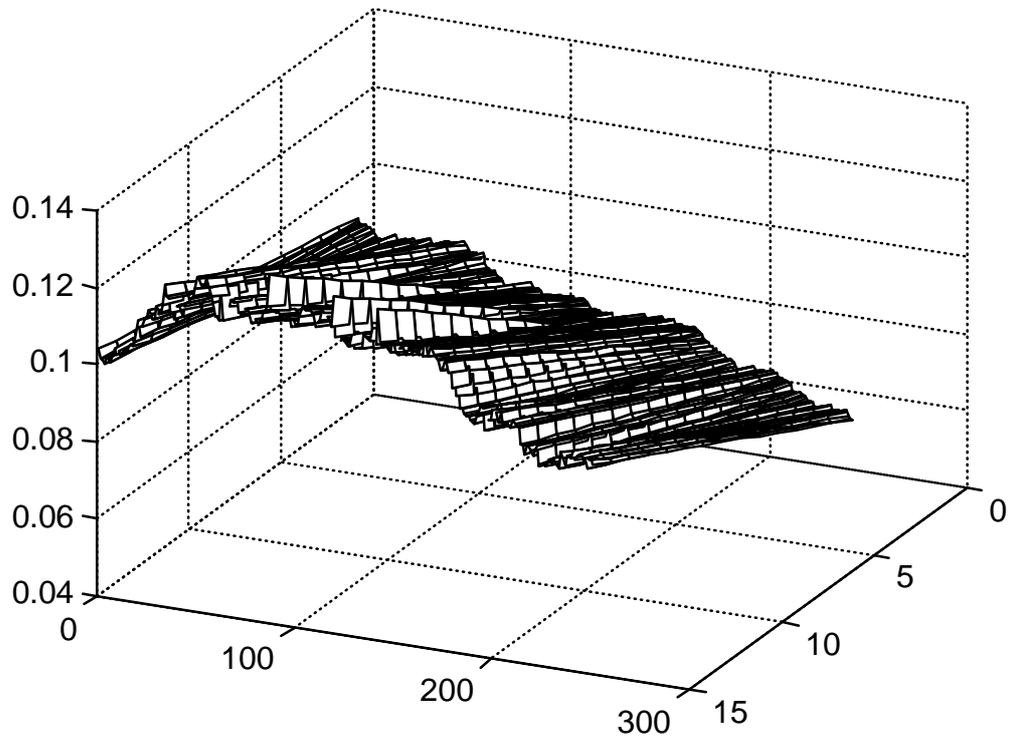
Forward - 1995



Spot - 1996

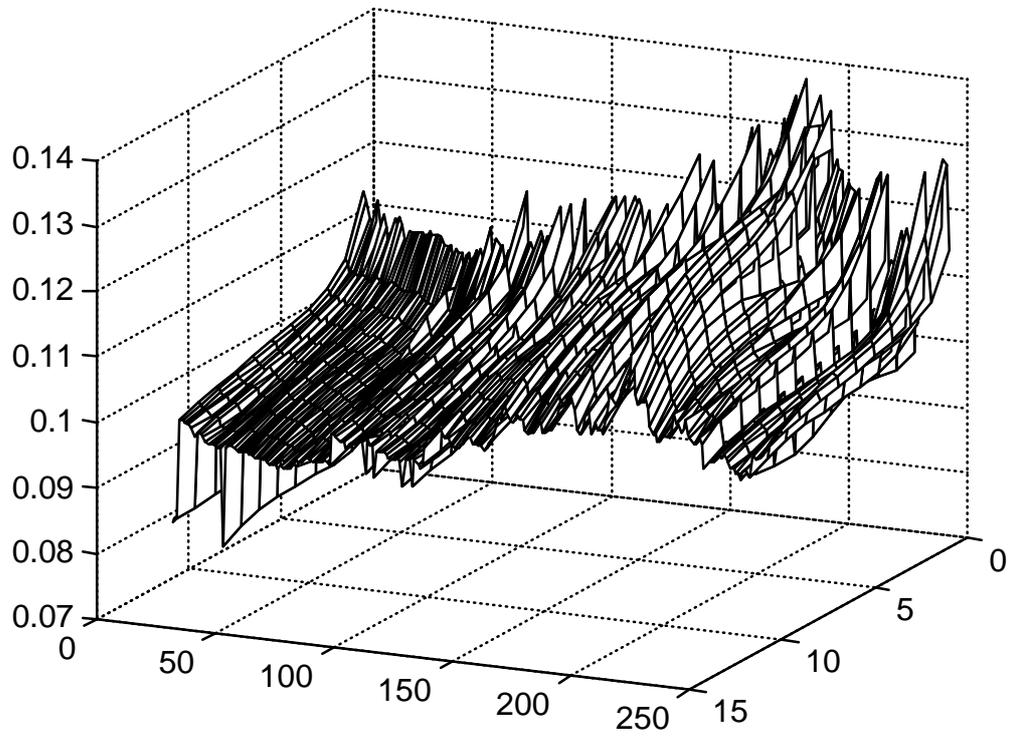


Forward - 1996

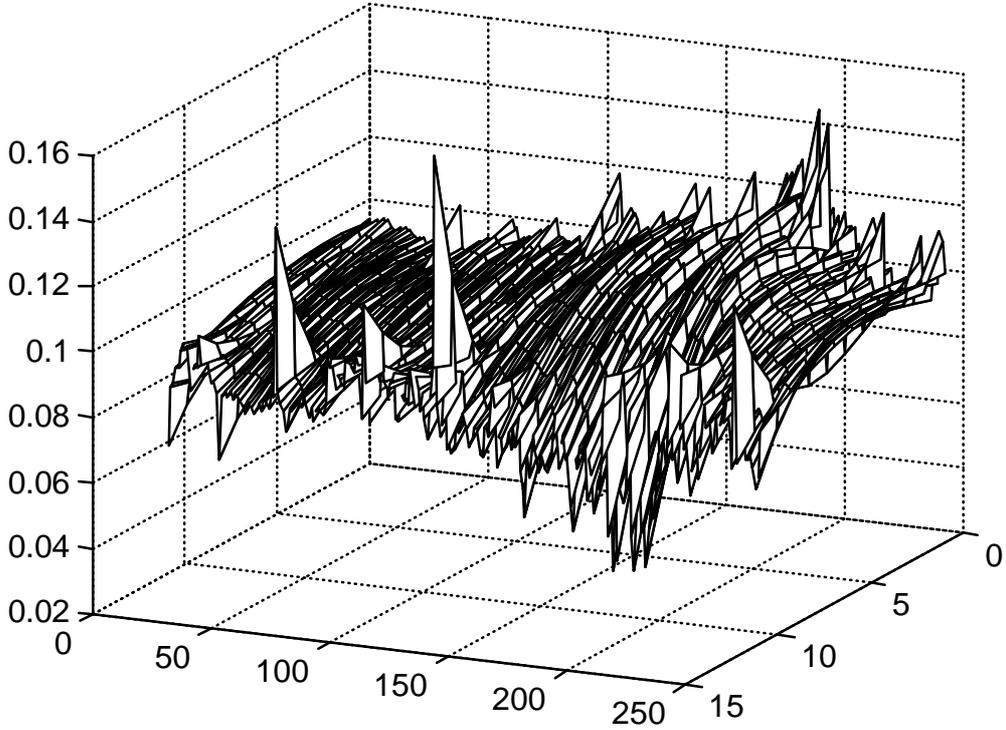


STEELEY (1991)

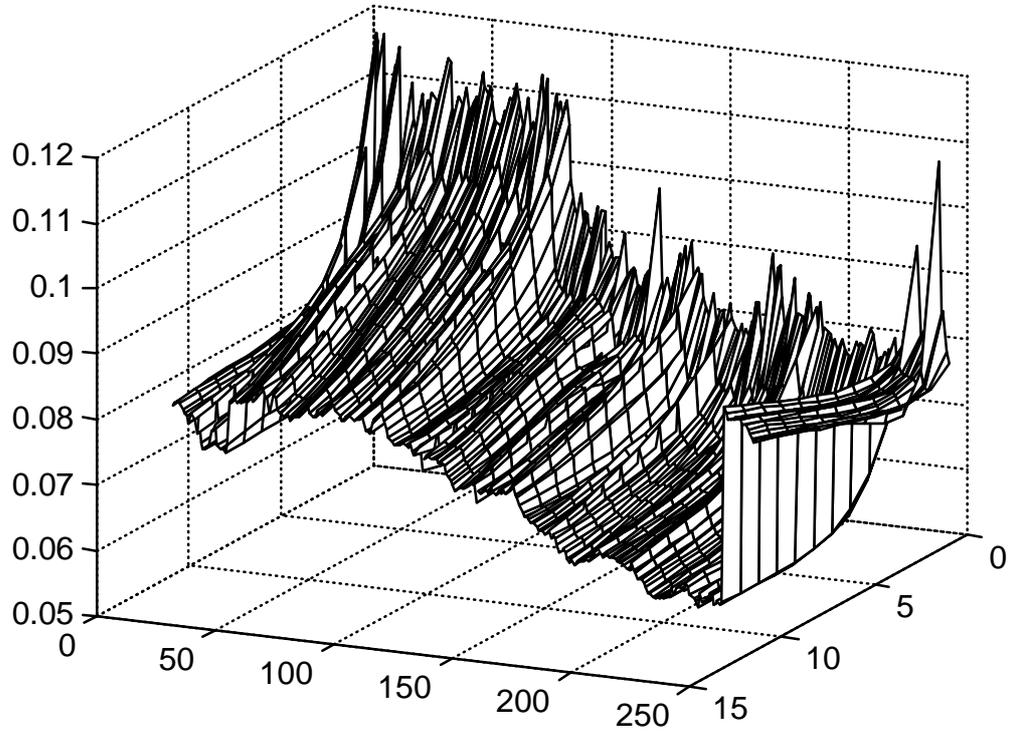
Spot - 1992



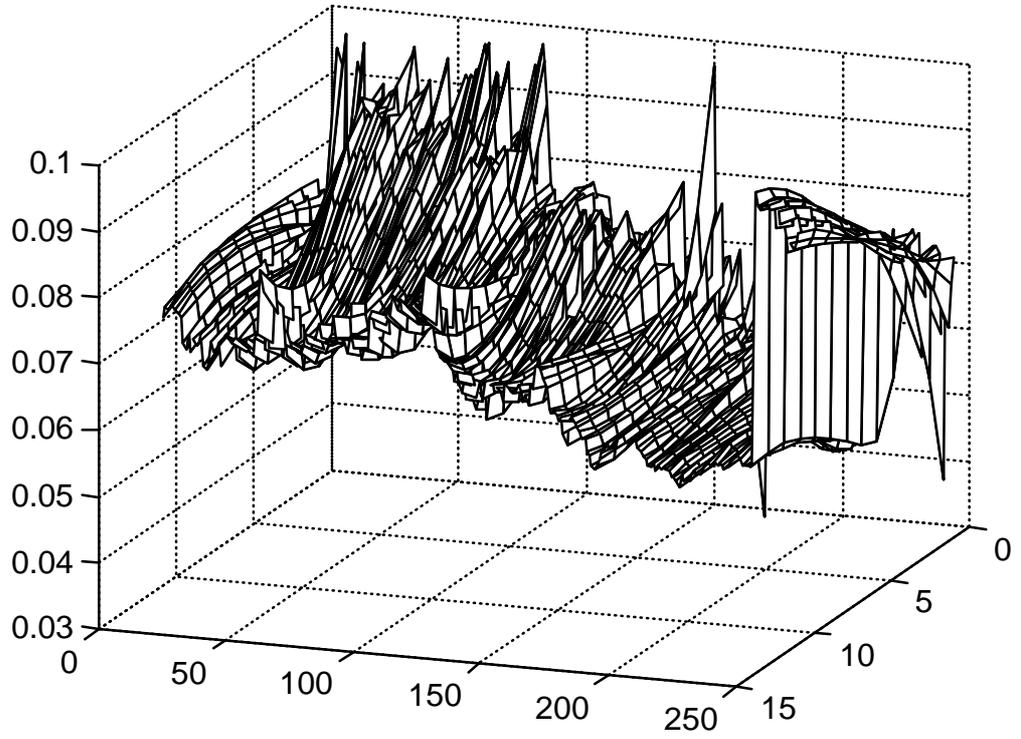
Forward - 1992



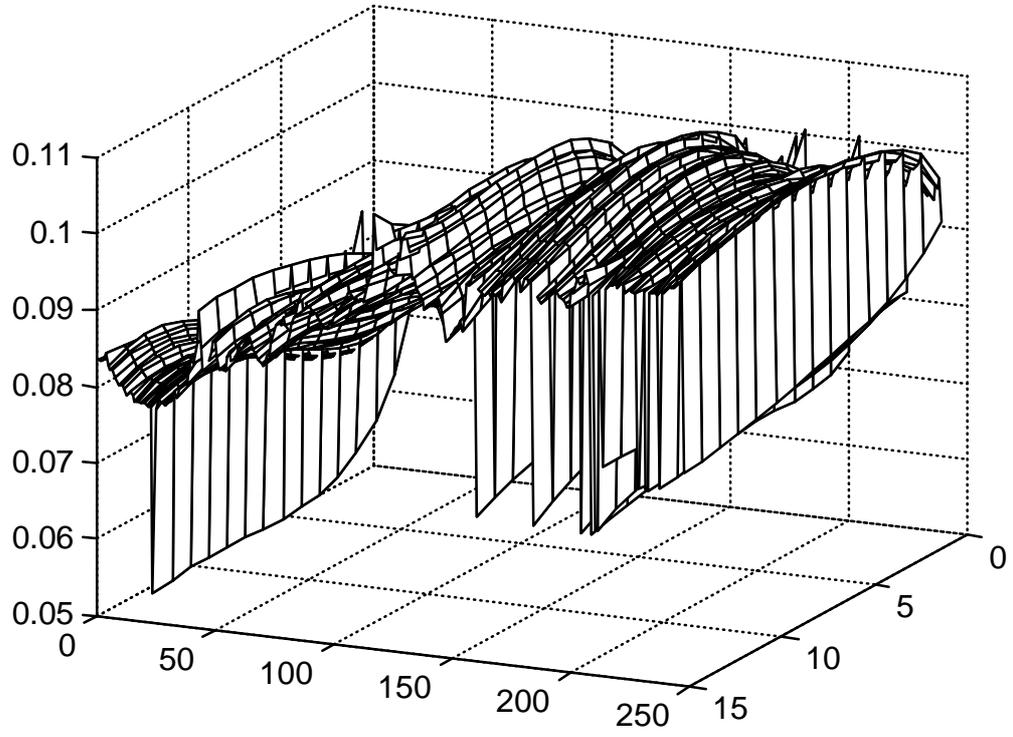
Spot - 1993



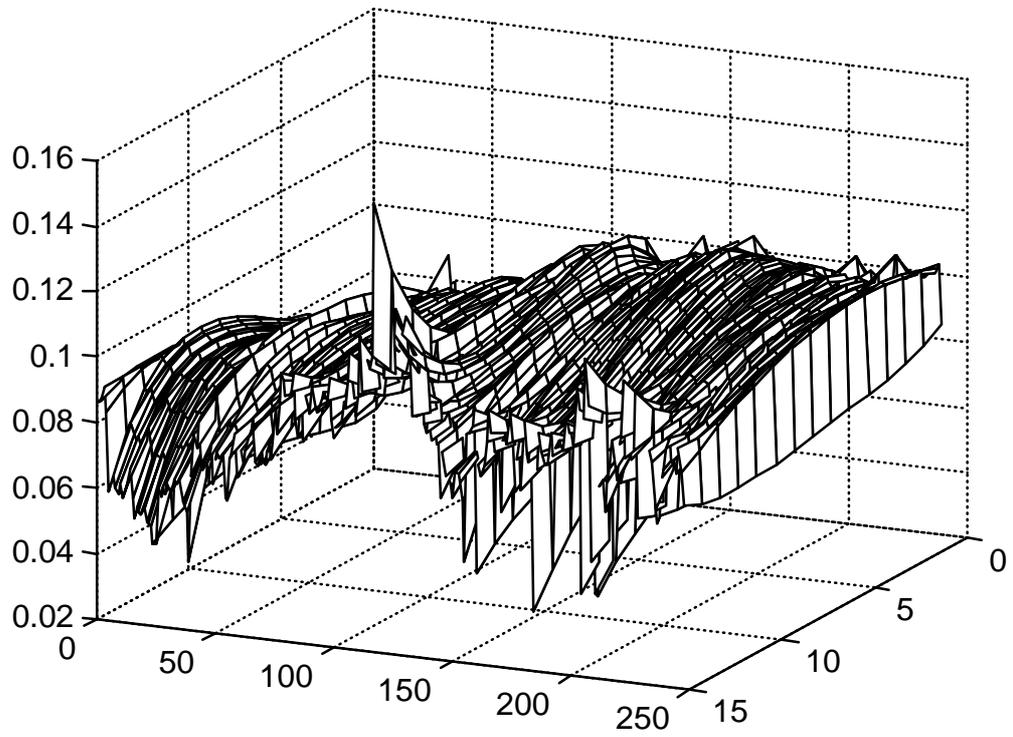
Forward - 1993



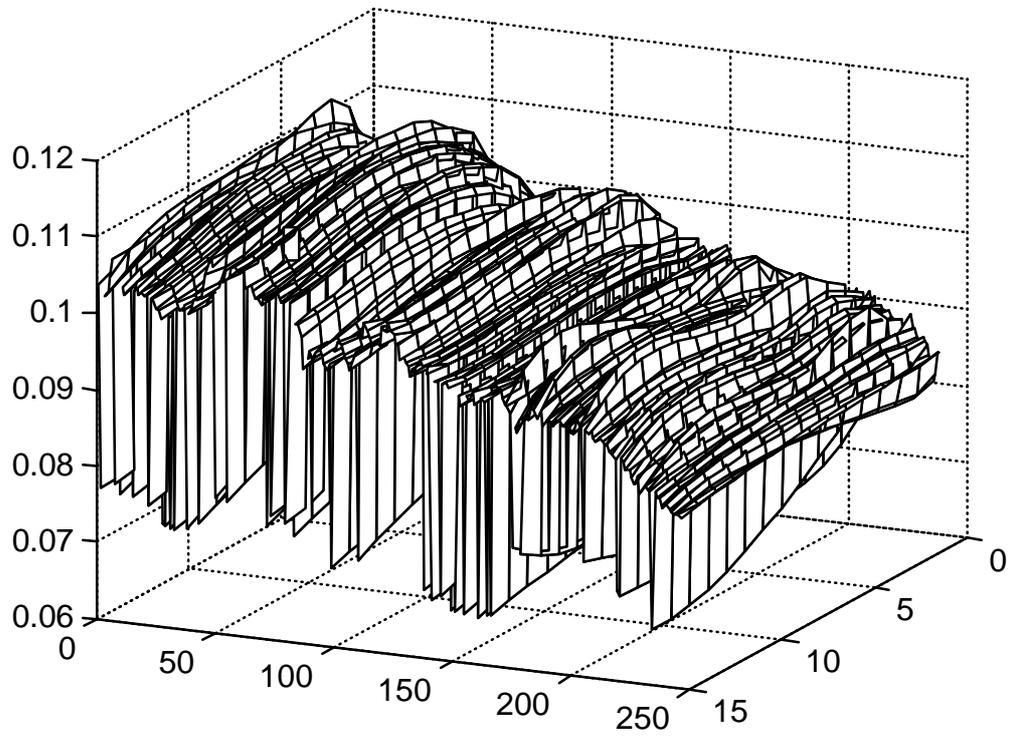
Spot - 1994



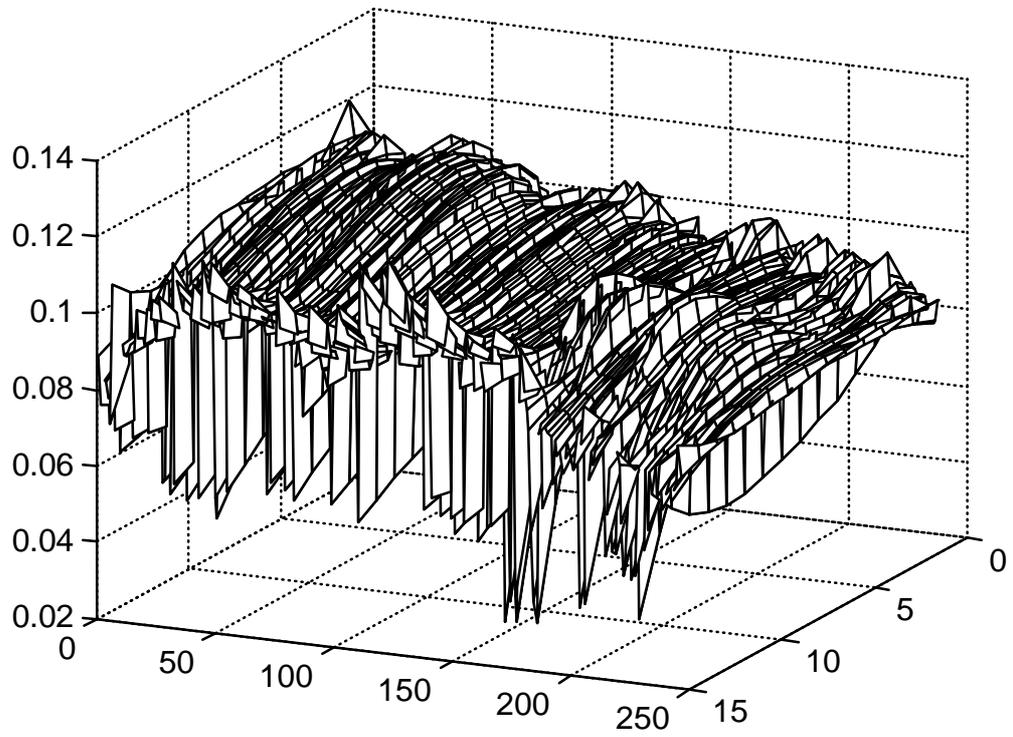
Forward - 1994



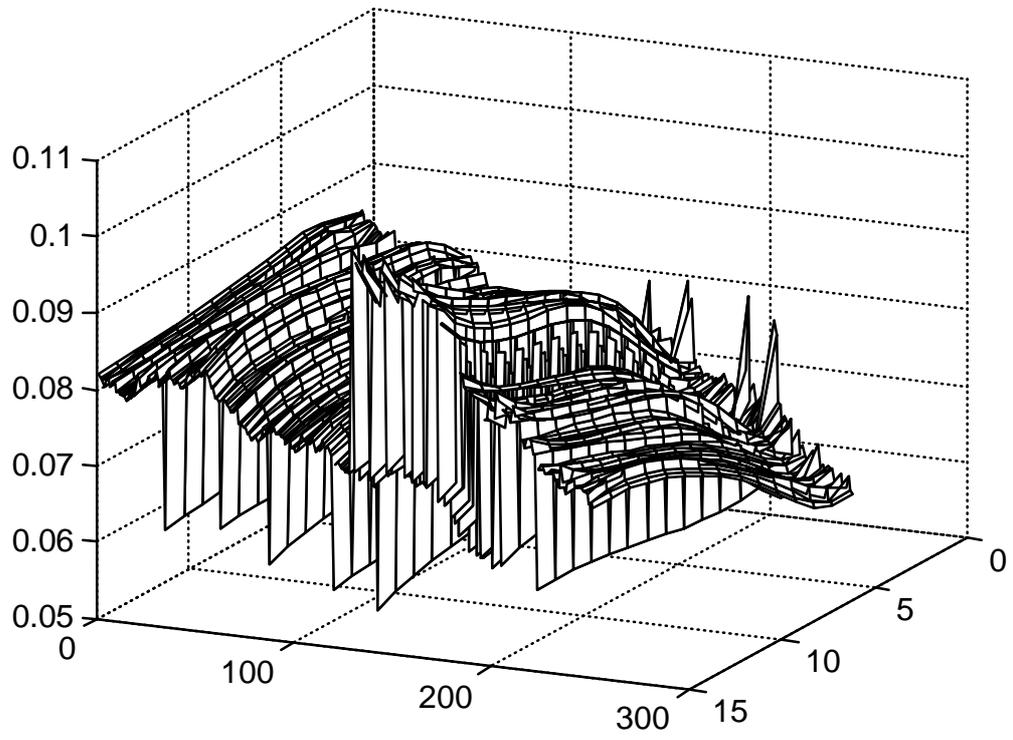
Spot - 1995



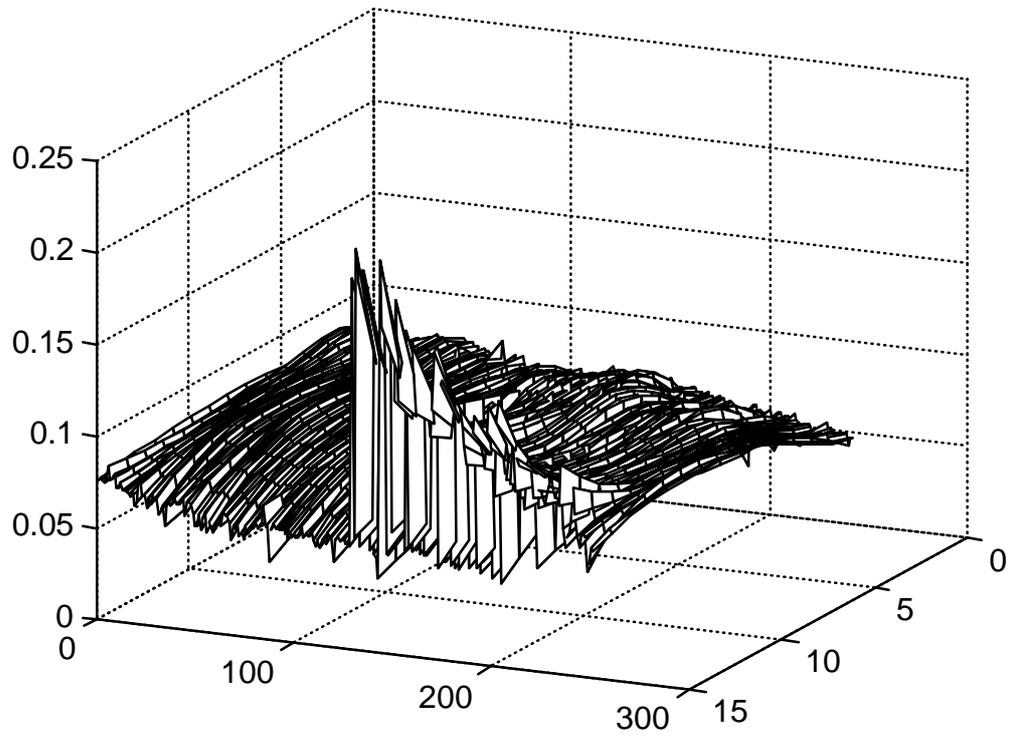
Forward - 1995



Spot - 1996

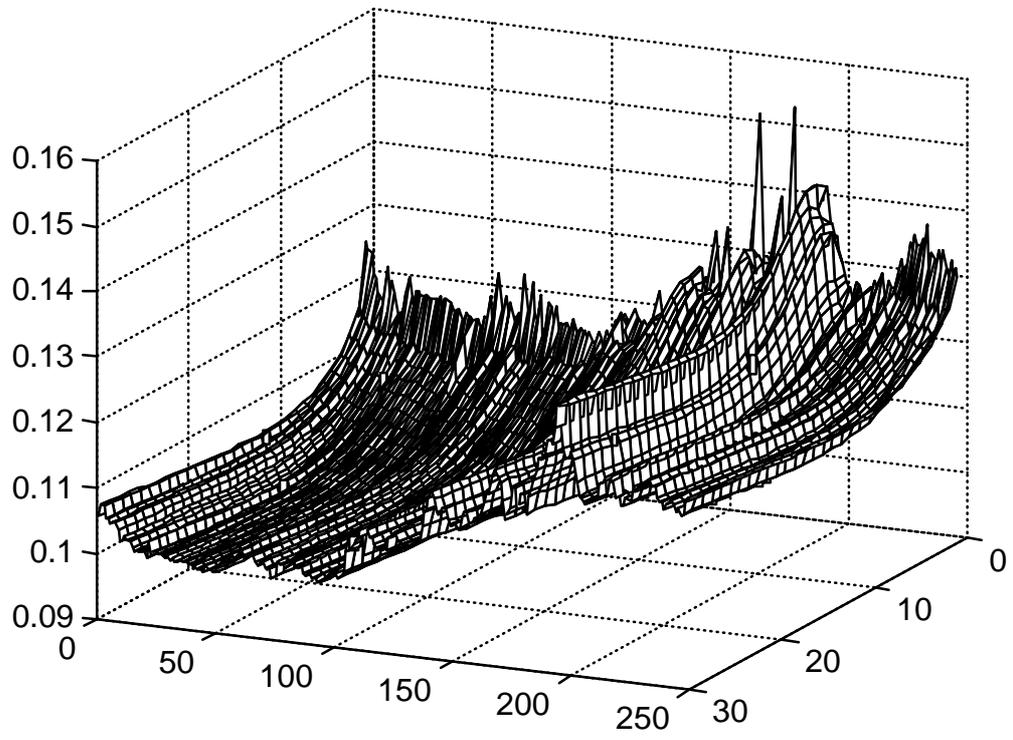


Forward - 1996

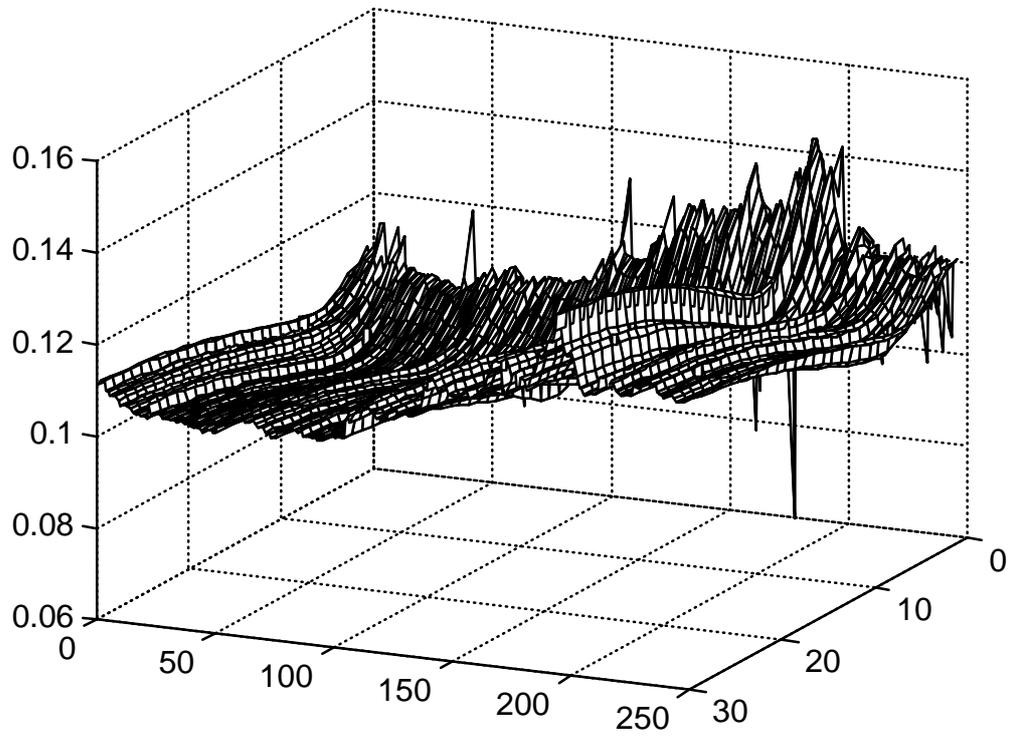


PROPUESTA I

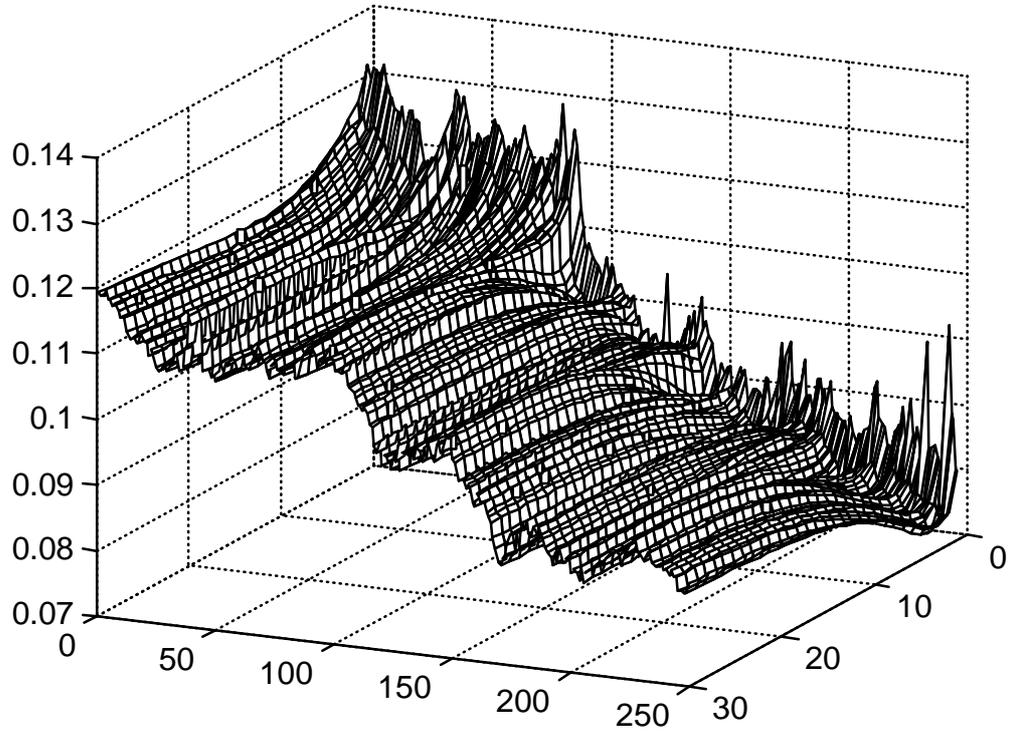
Spot - 1992



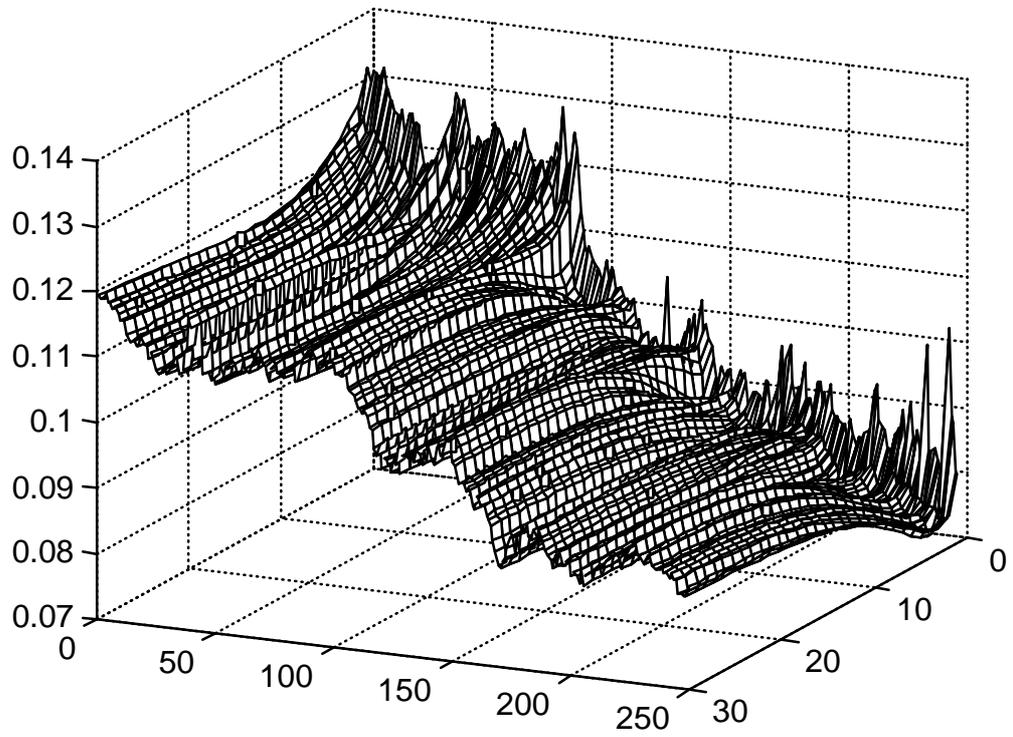
Forward - 1992



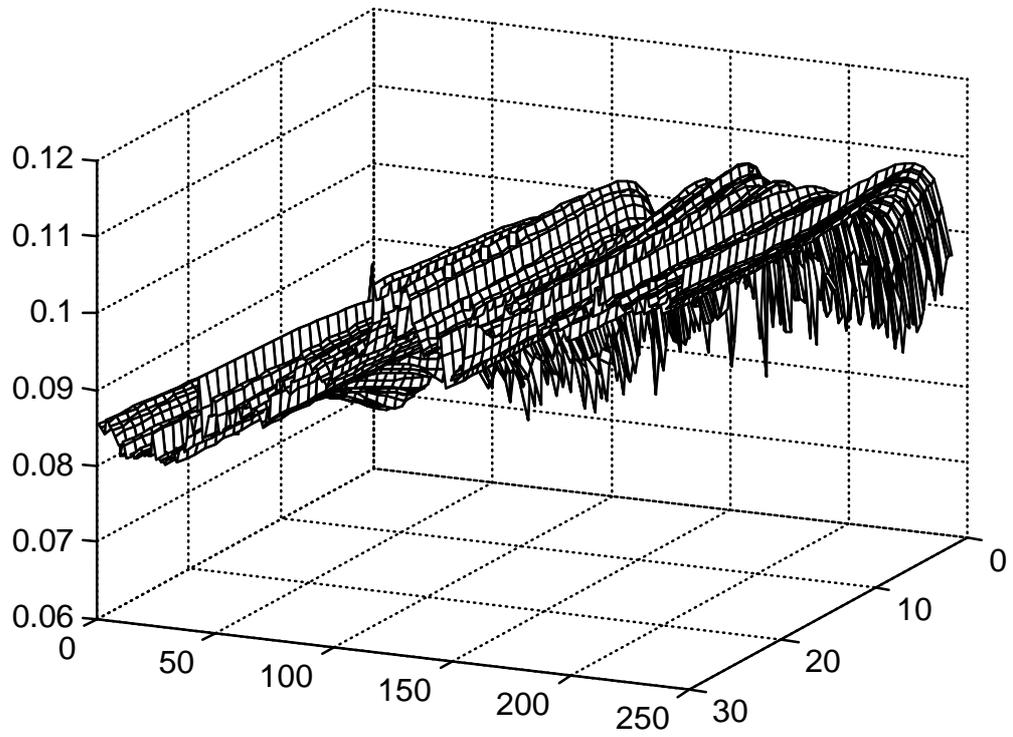
Spot - 1993



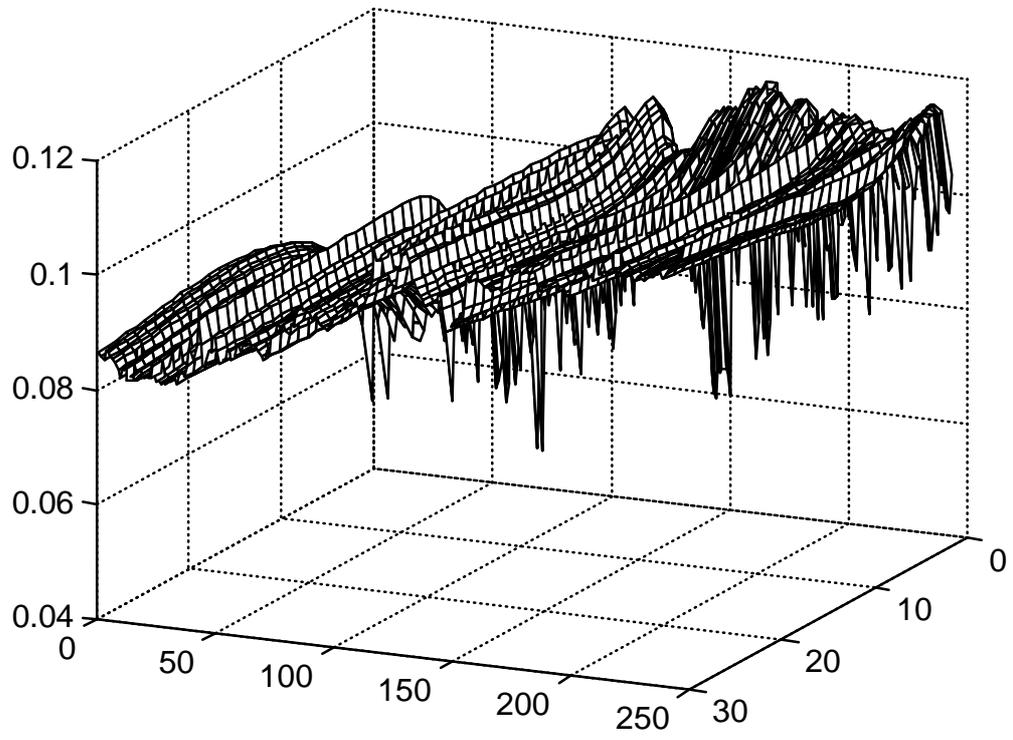
Forward - 1993



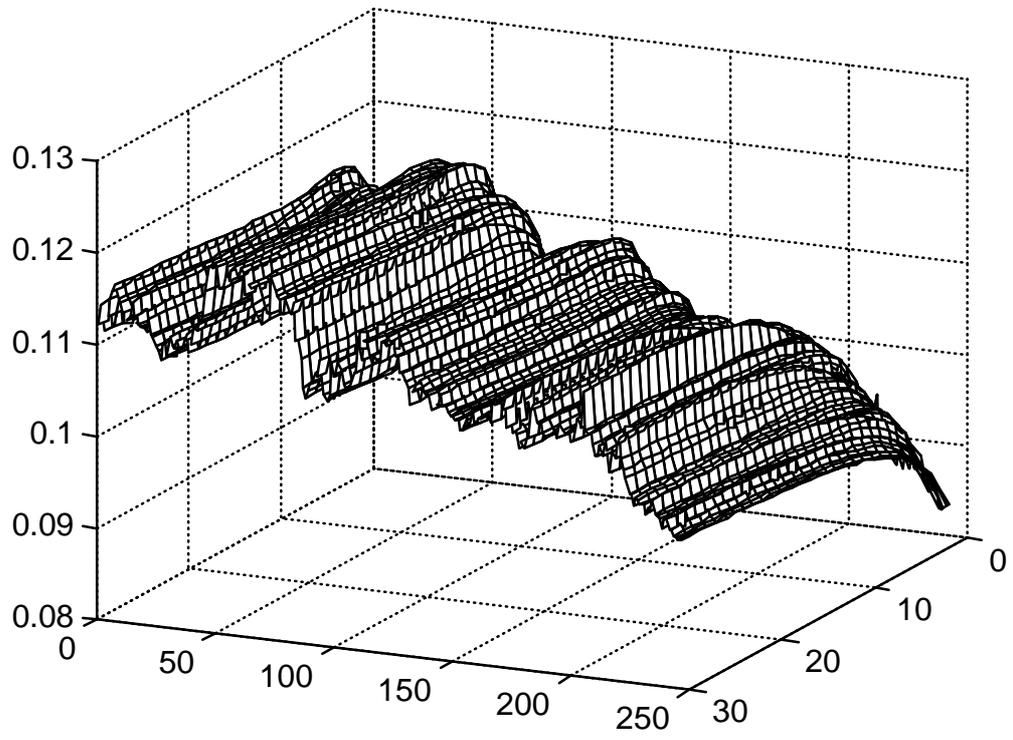
Spot - 1994



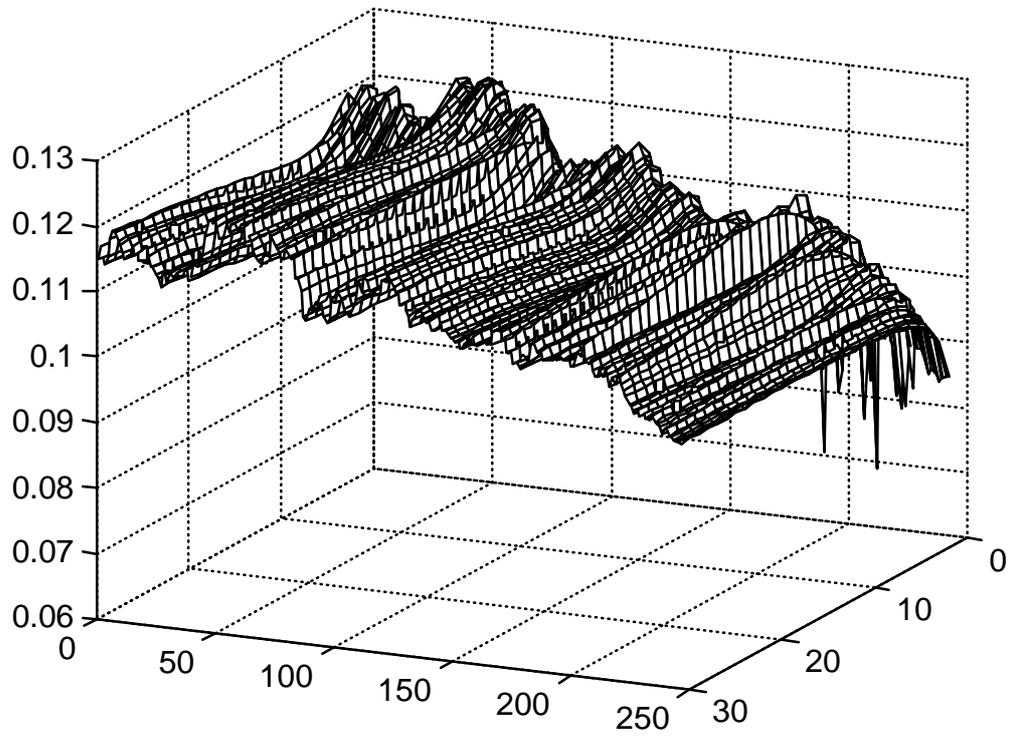
Forward - 1994



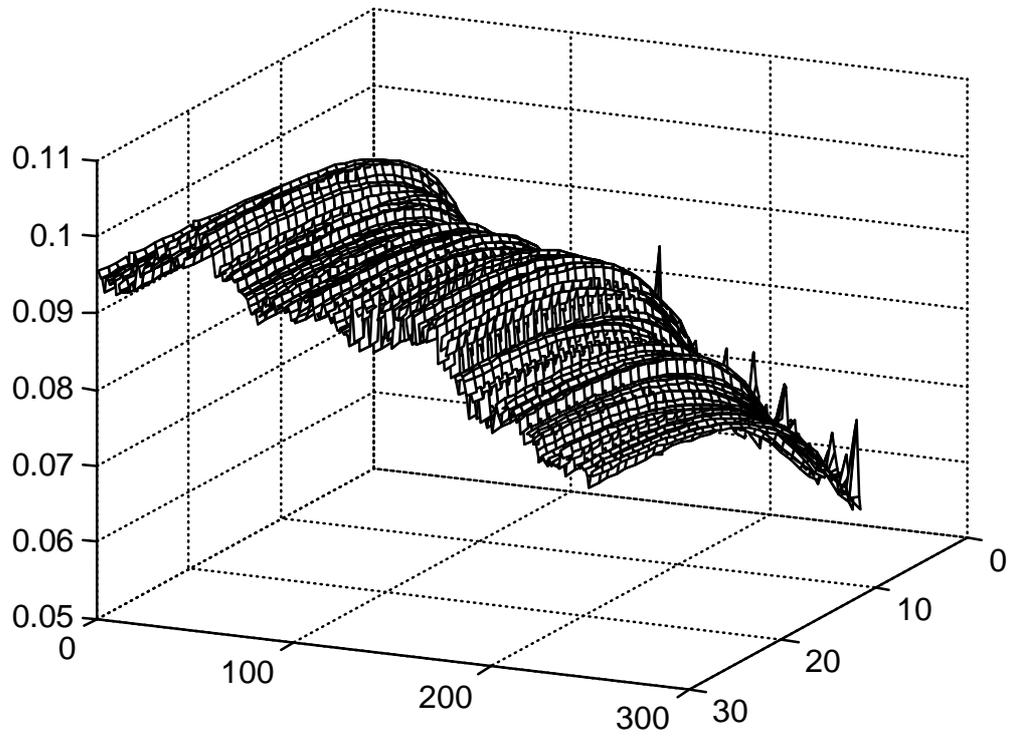
Spot - 1995



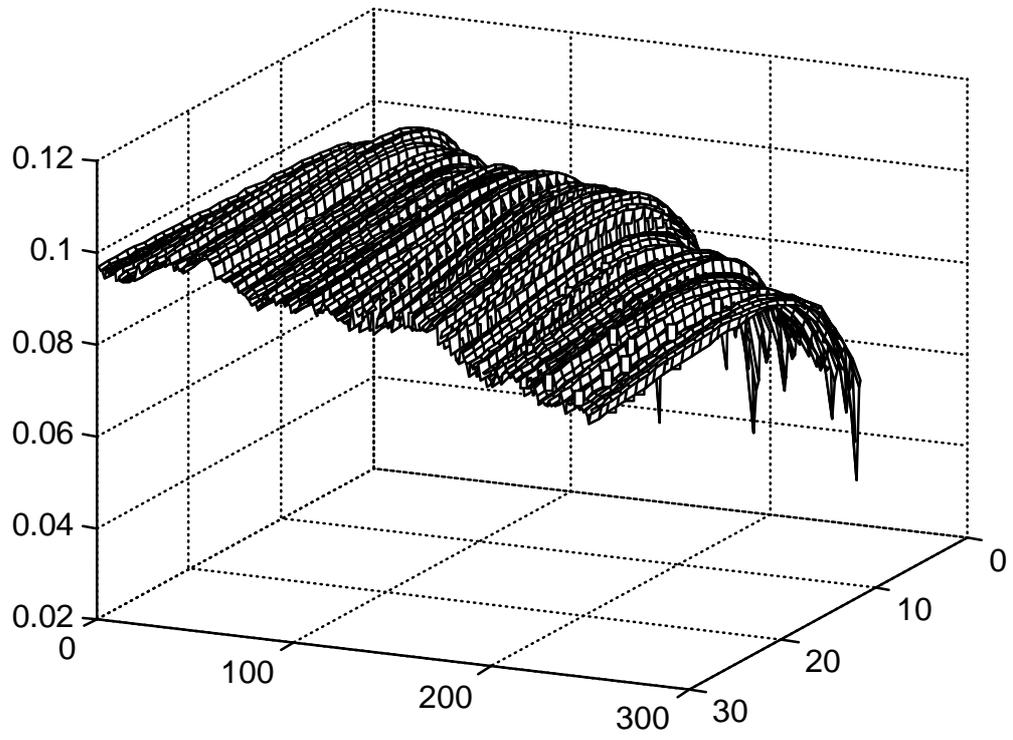
Forward - 1995



Spot - 1996

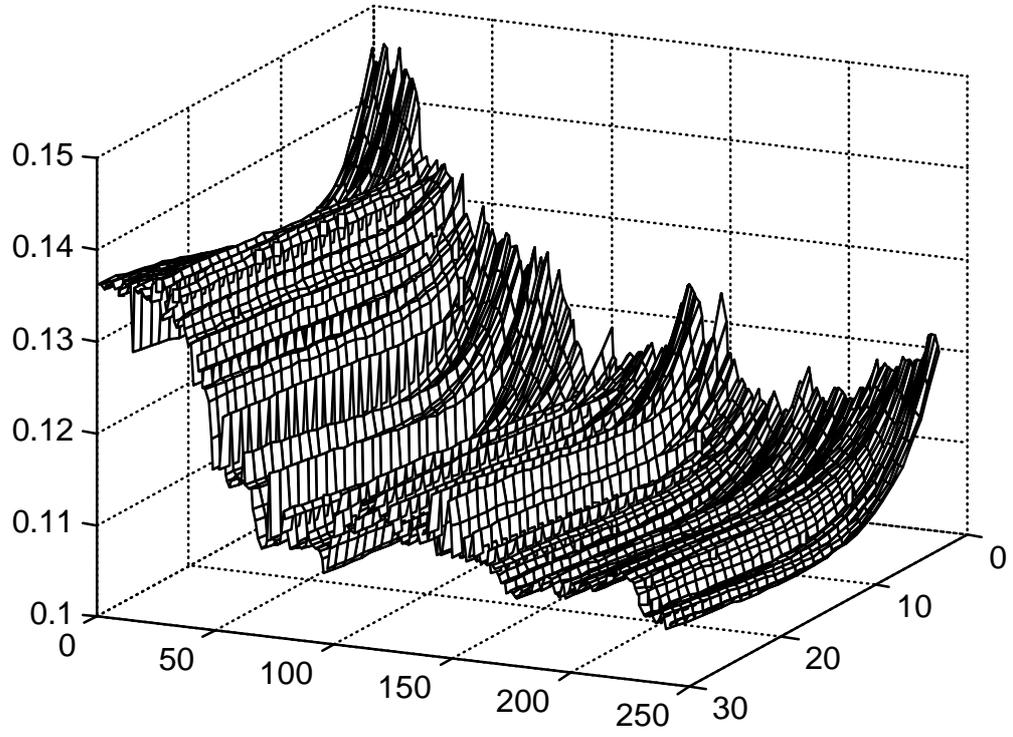


Forward - 1996

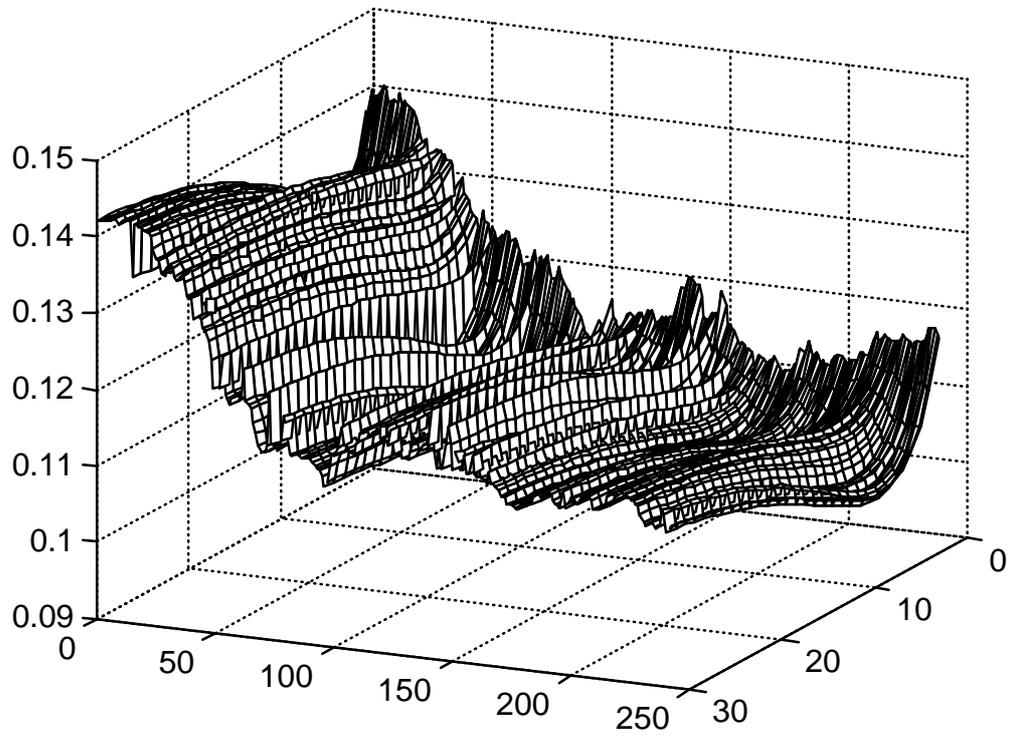


PROPUESTA II - A (LEGENDRE GRADO 3)

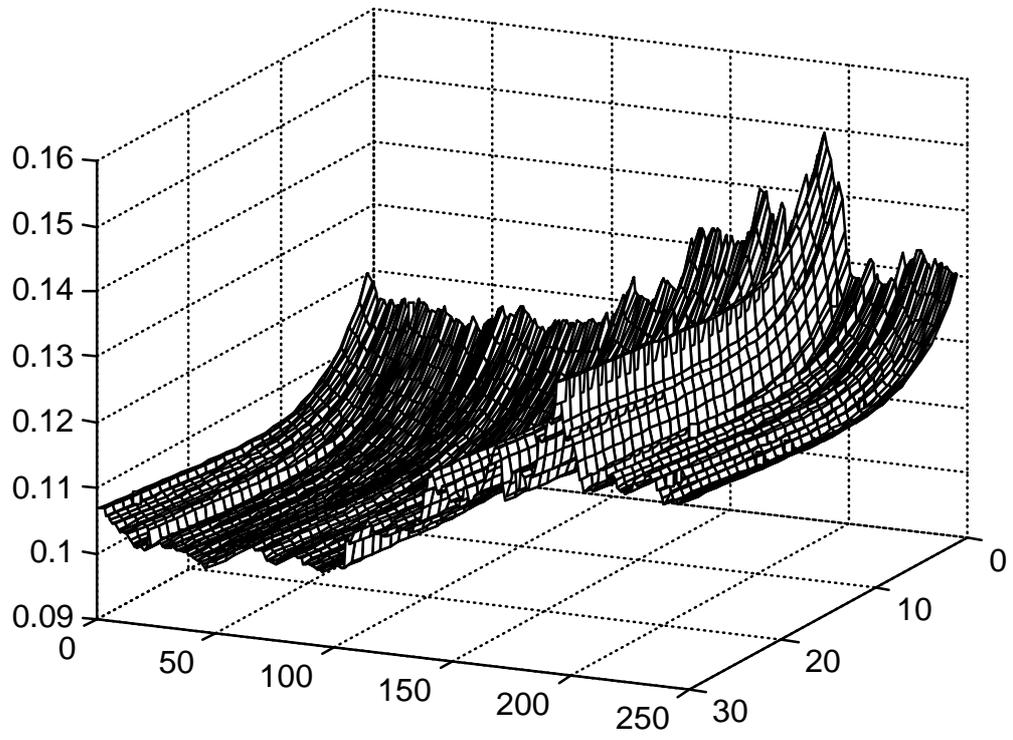
Spot - 1991



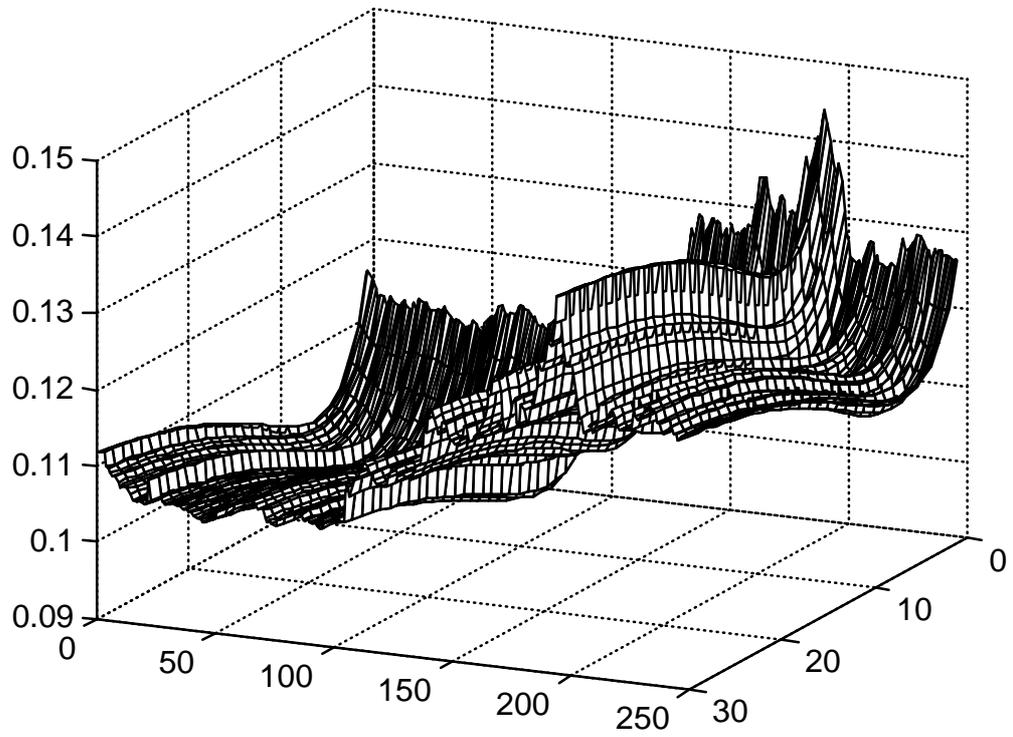
Forward - 1991



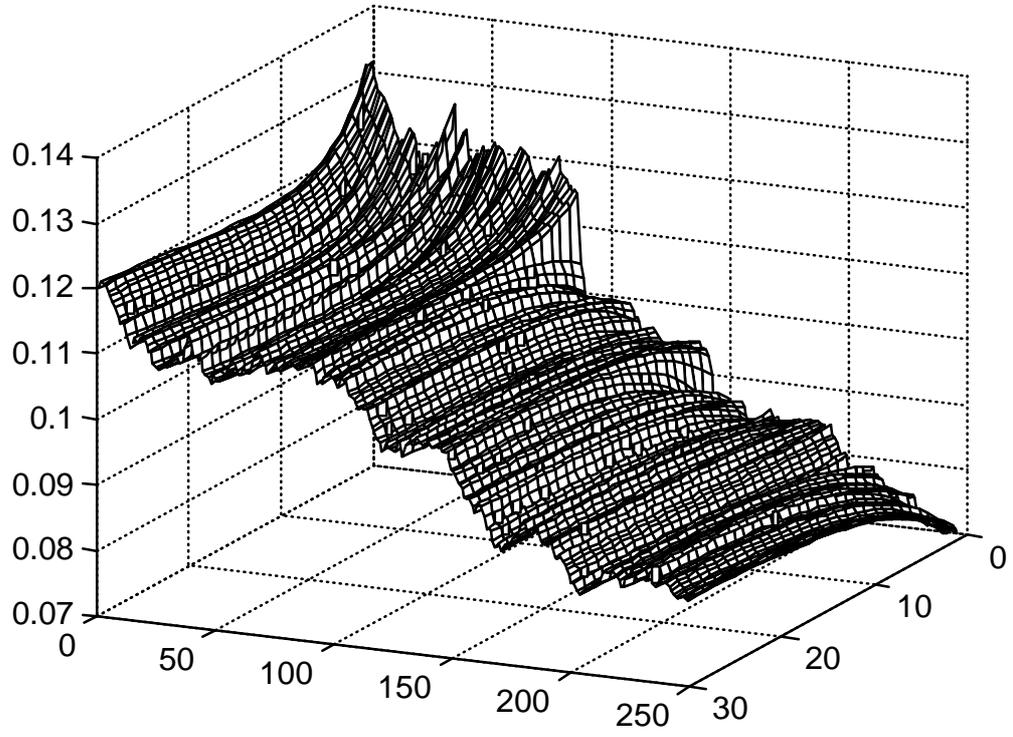
Spot - 1992



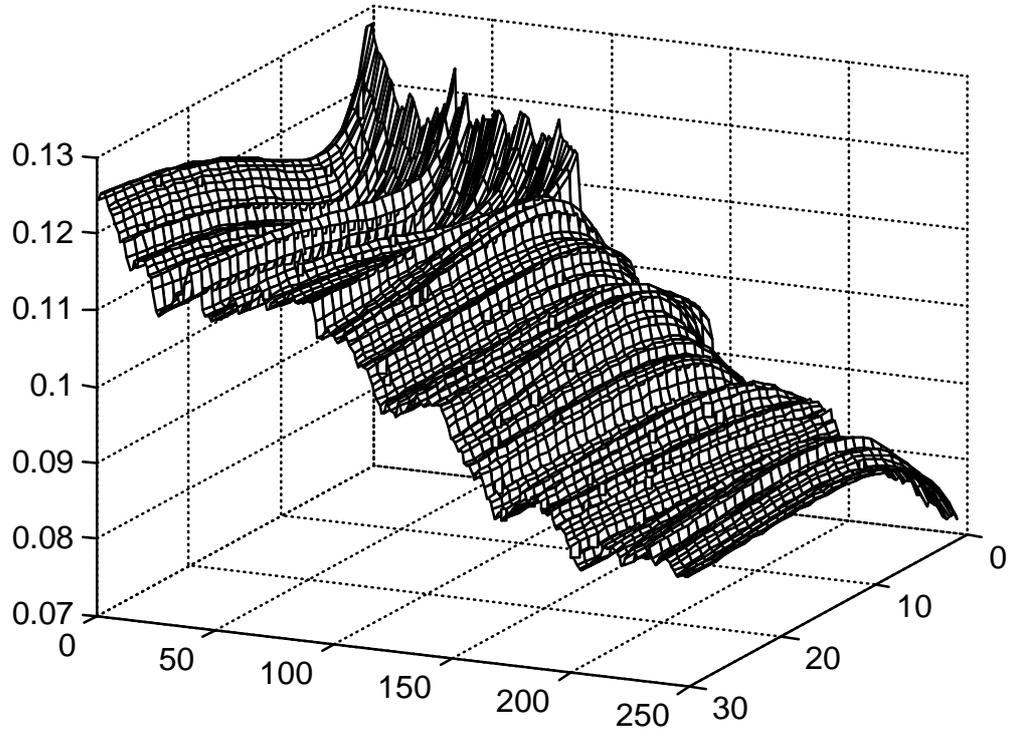
Forward - 1992



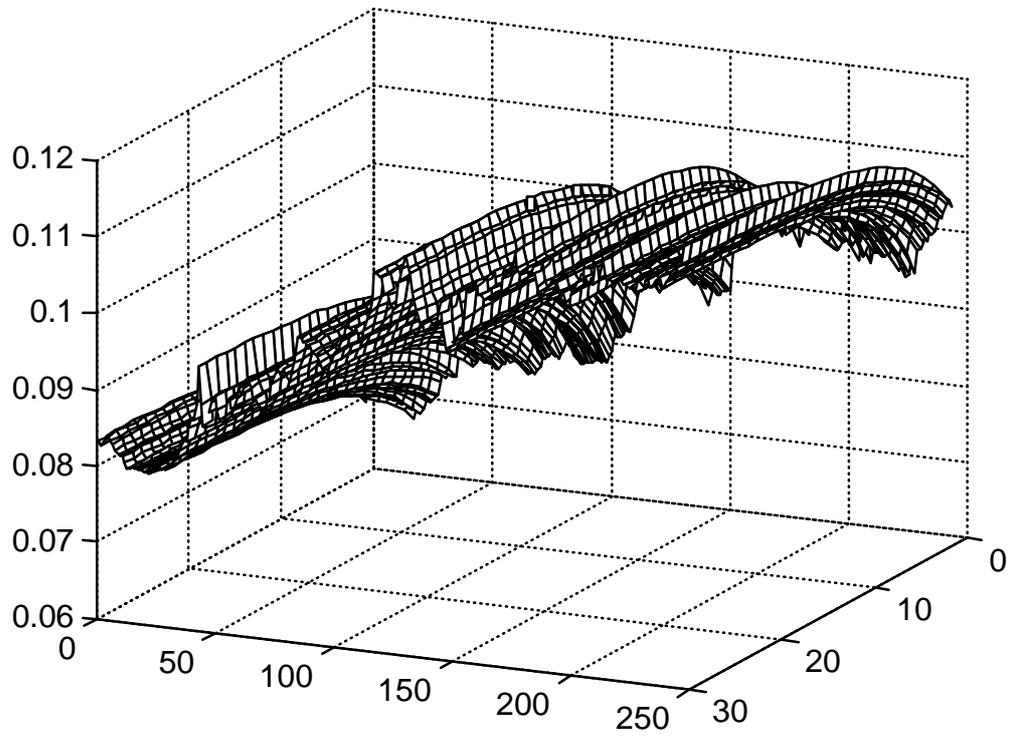
Spot - 1993



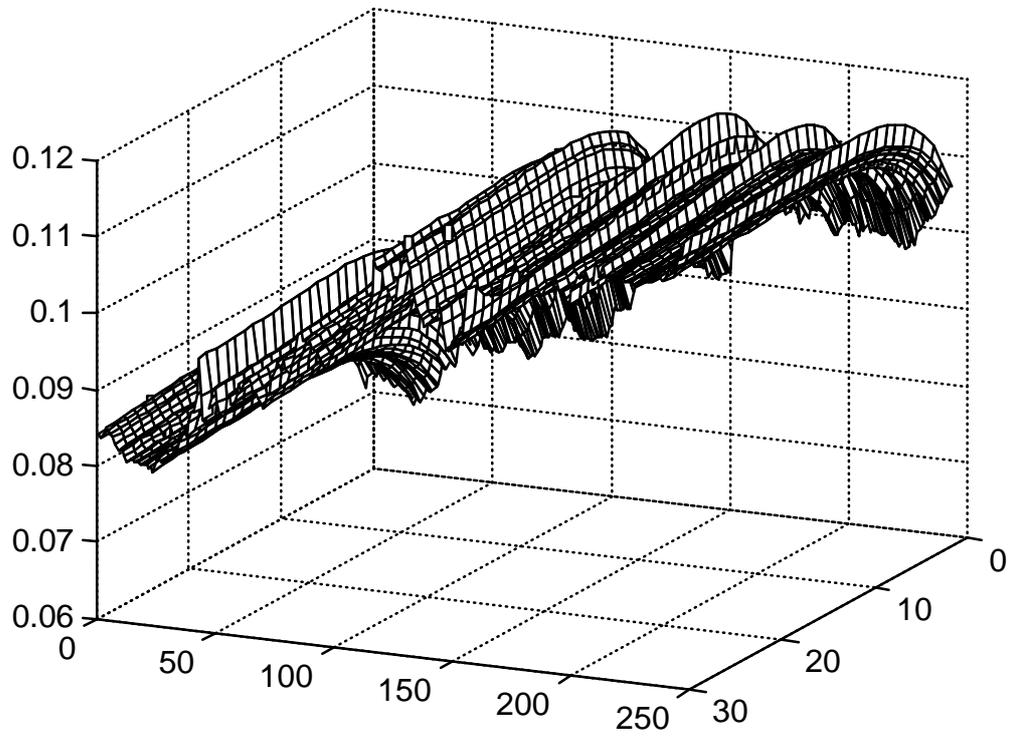
Forward - 1993



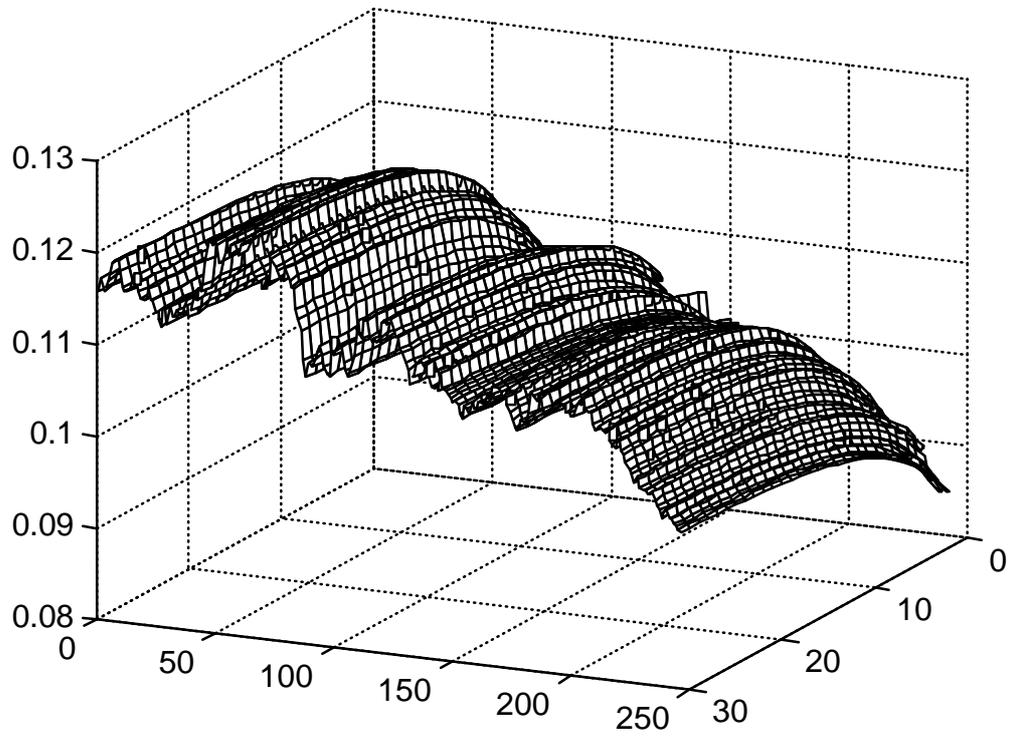
Spot - 1994



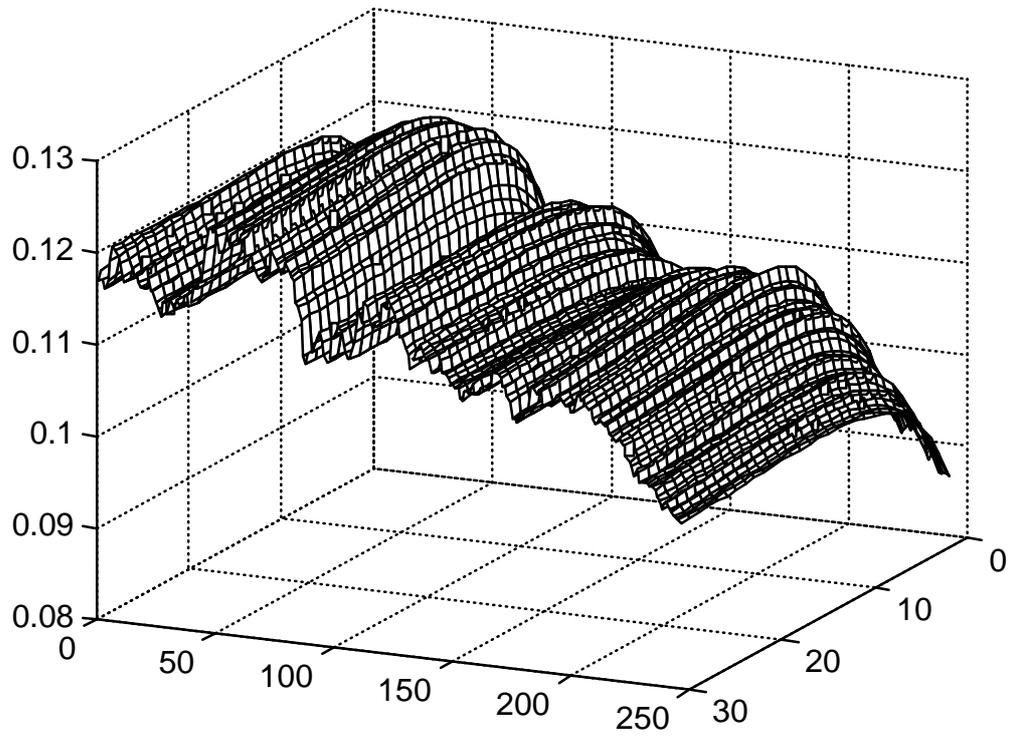
Forward - 1994



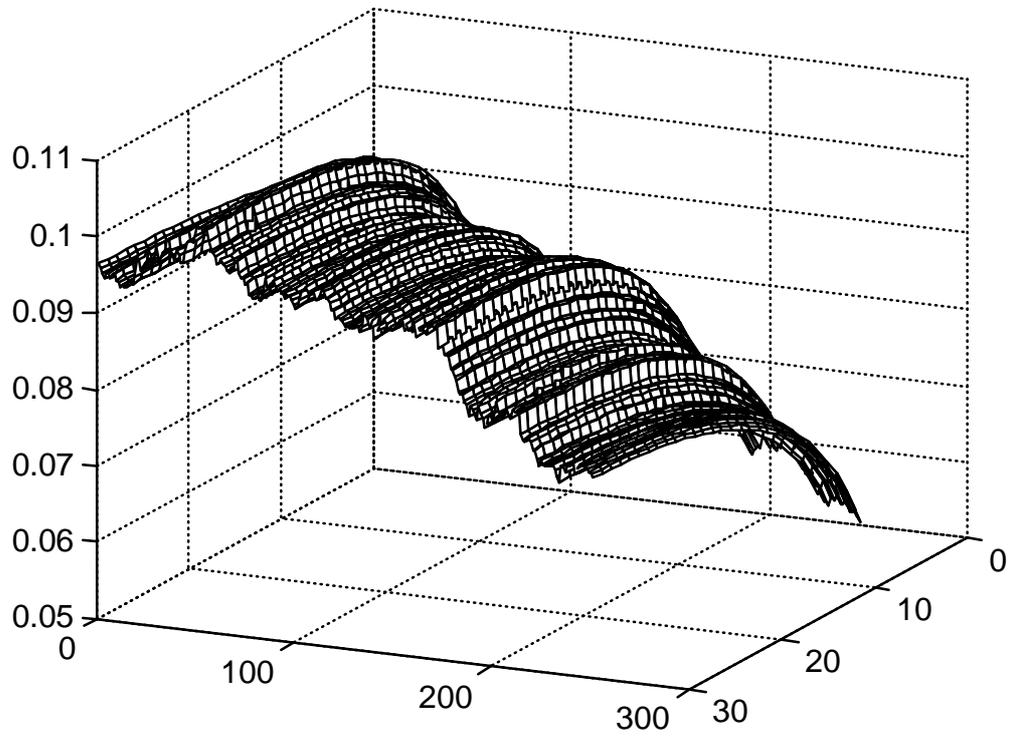
Spot - 1995



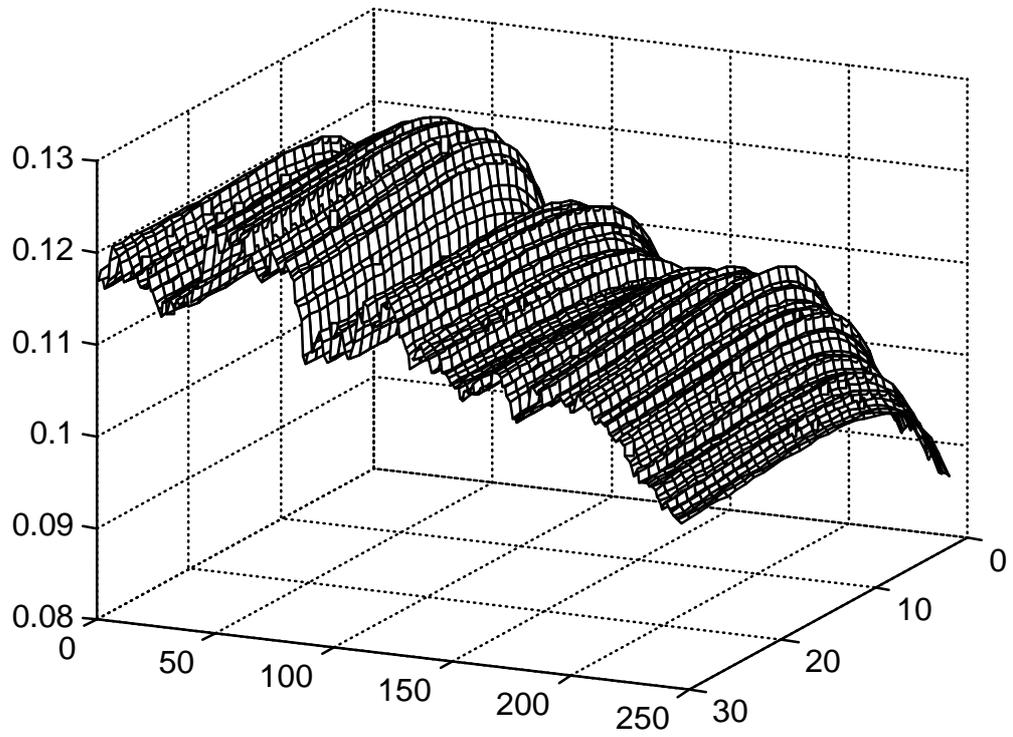
Forward - 1995



Spot - 1996

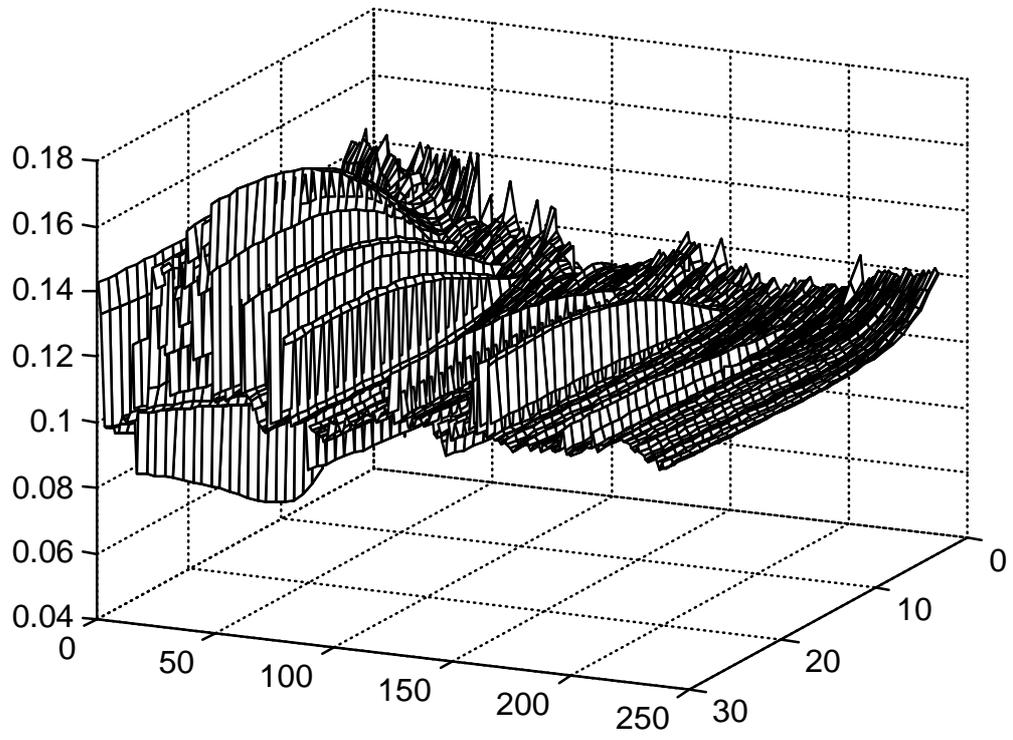


Forward - 1996

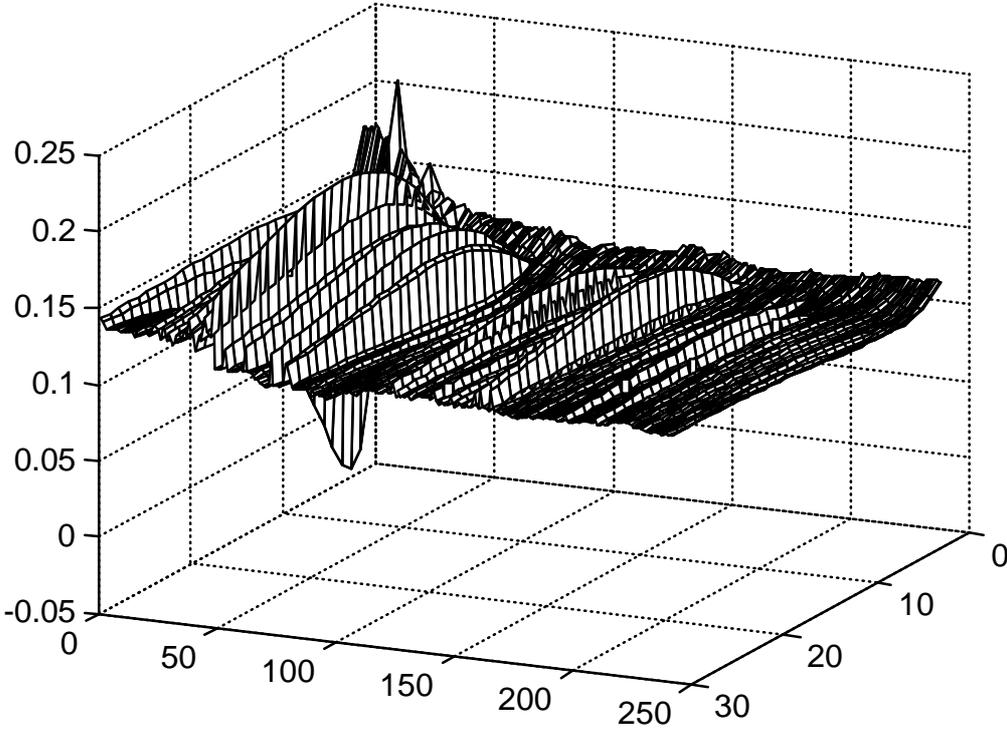


PROPUESTA II - B (LEGENDRE GRADO 4)

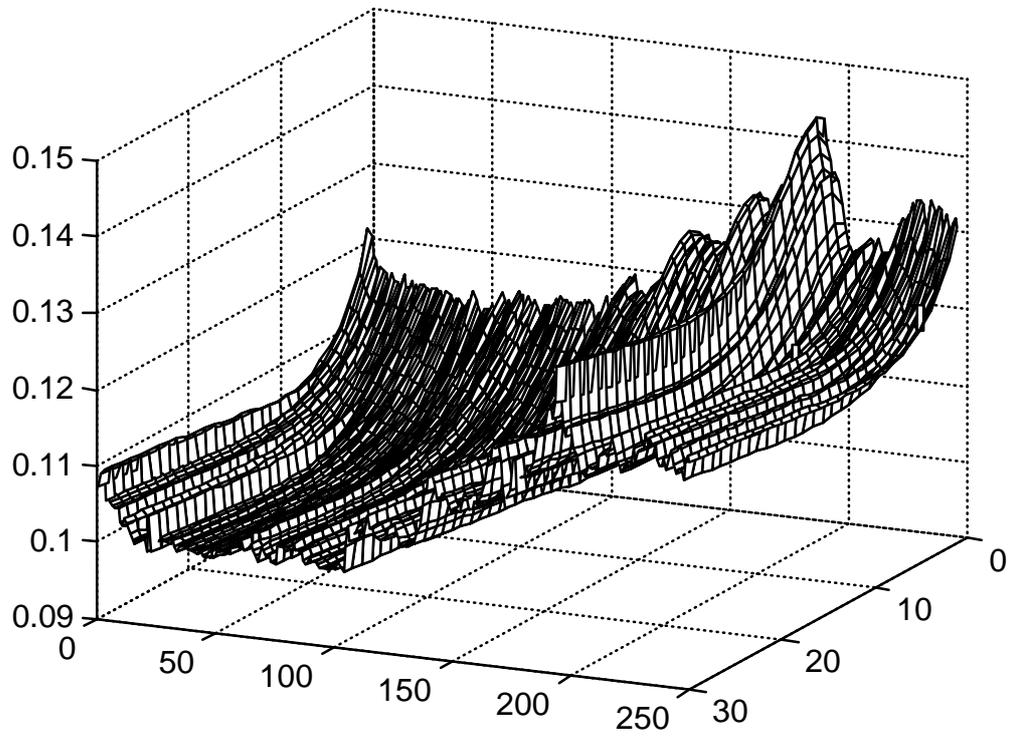
Spot - 1991



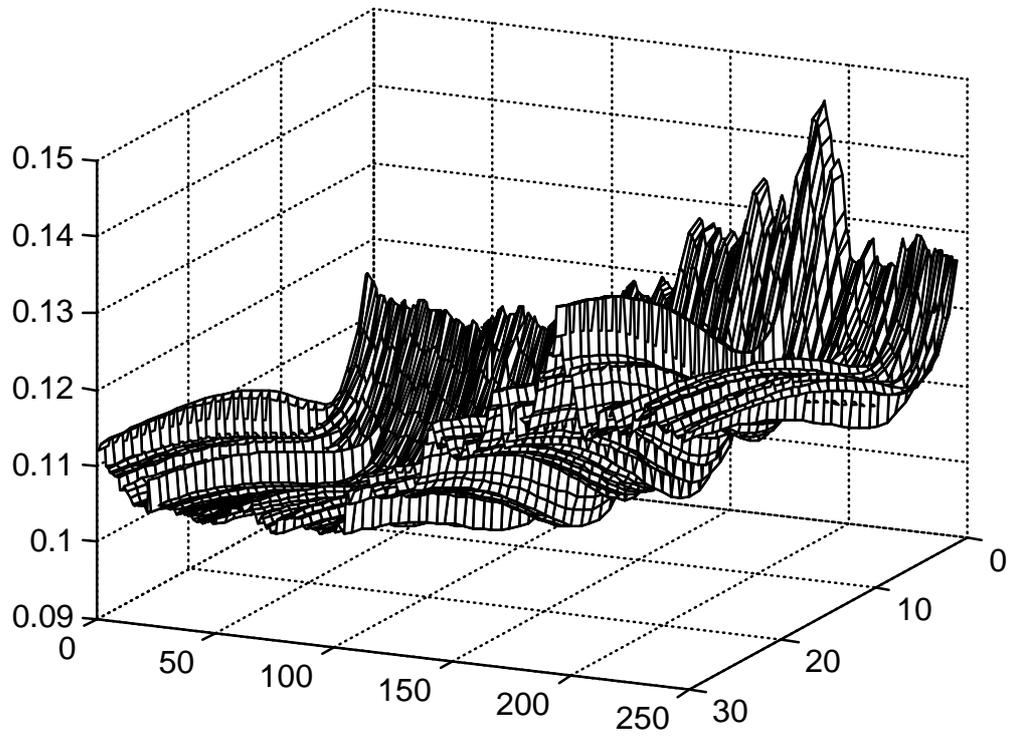
Forward - 1991



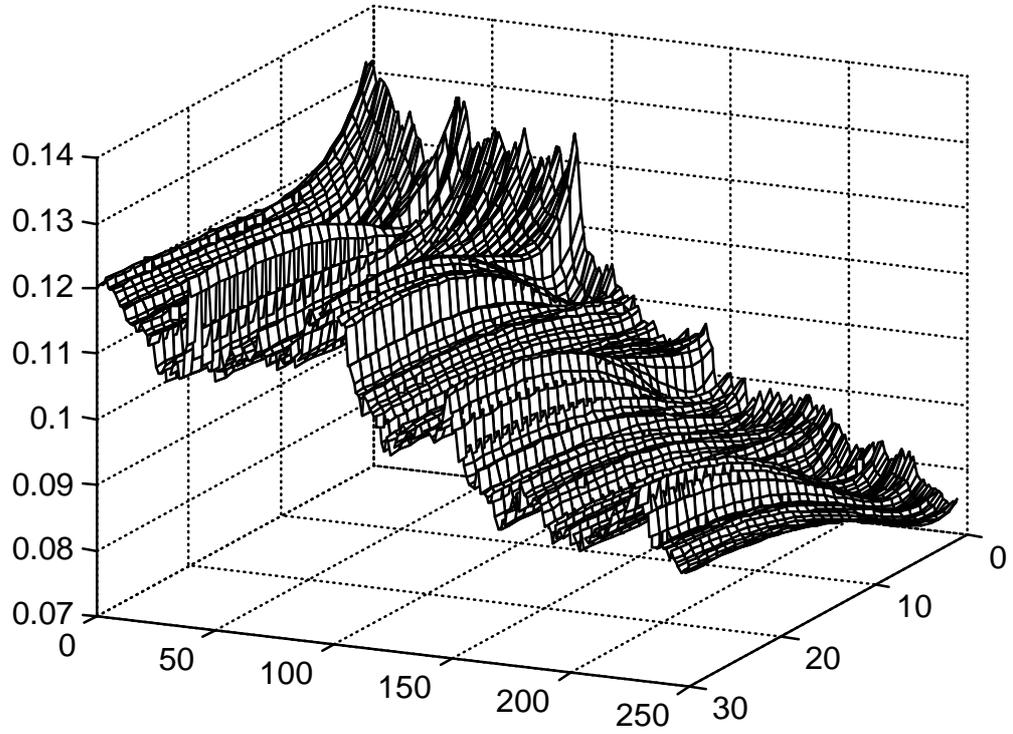
Spot - 1992



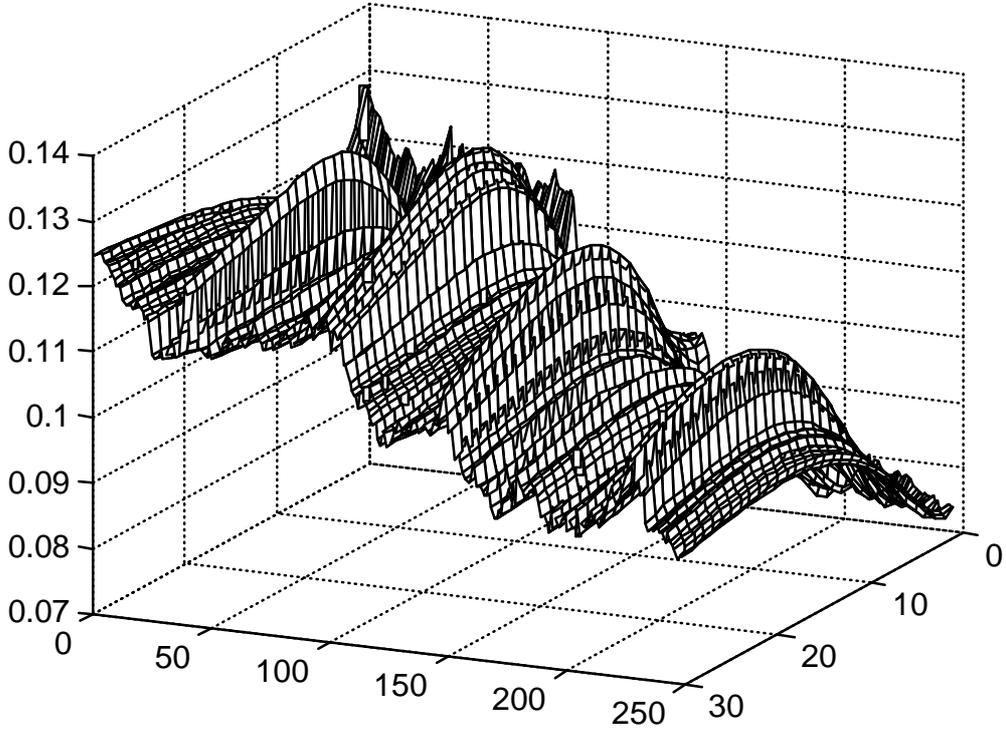
Forward - 1992



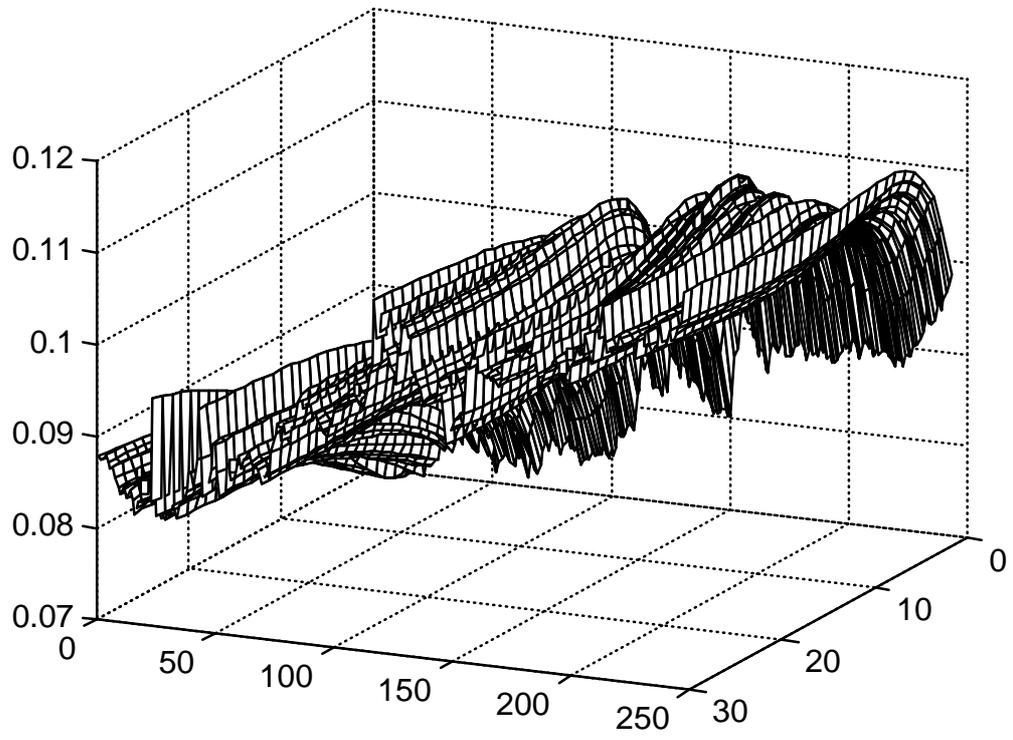
Spot - 1993



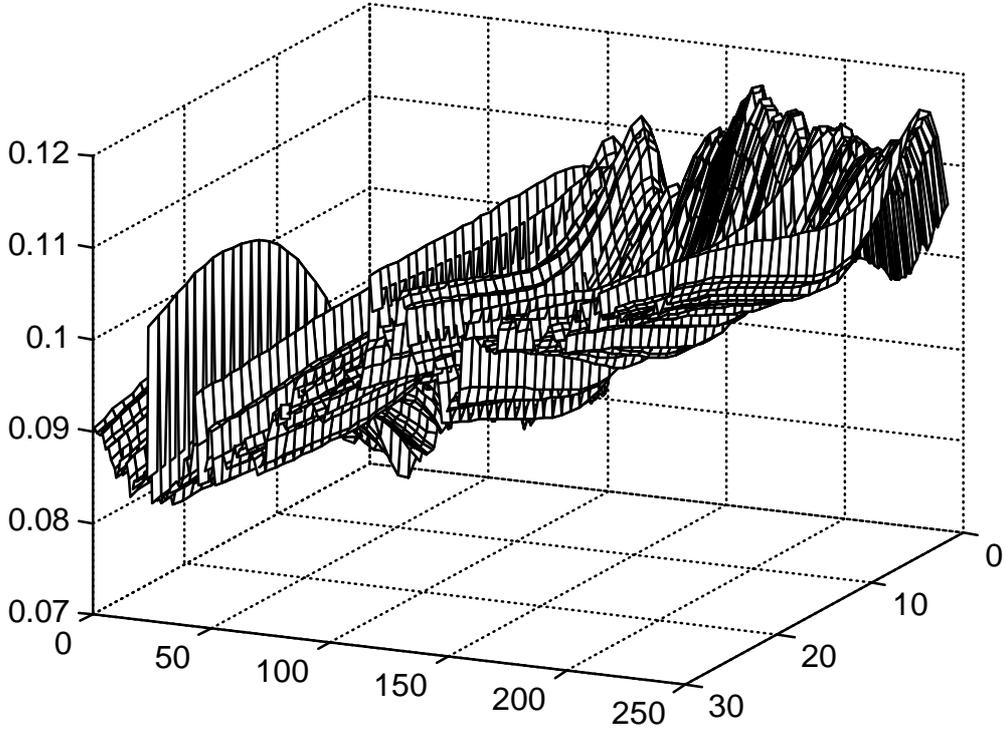
Forward - 1993



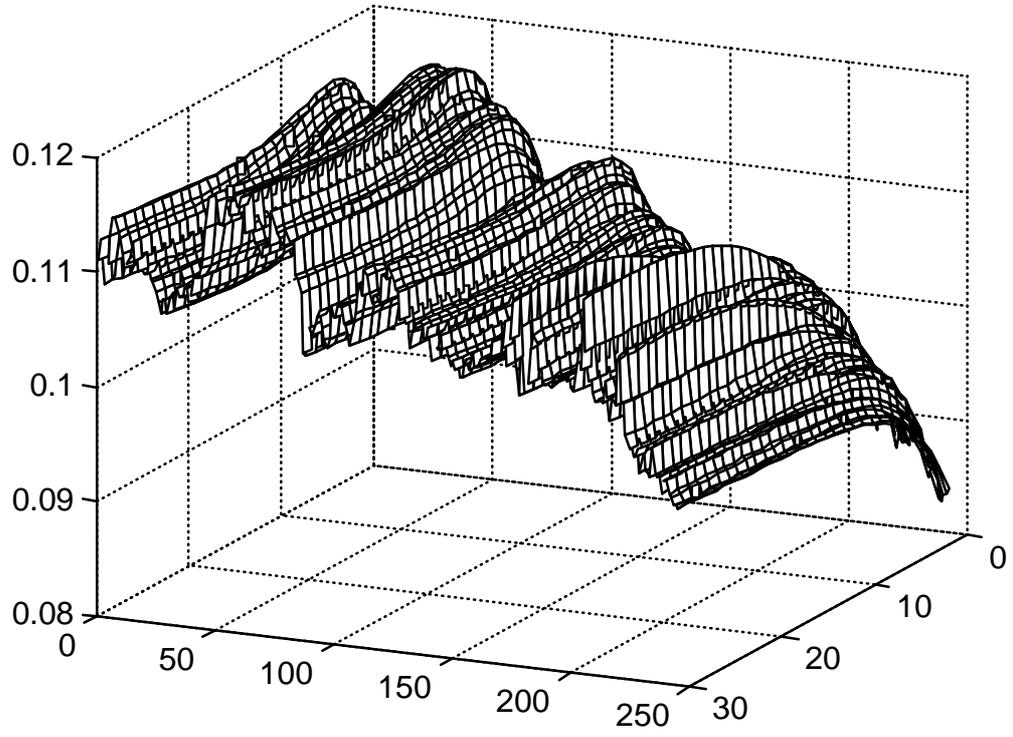
Spot - 1994



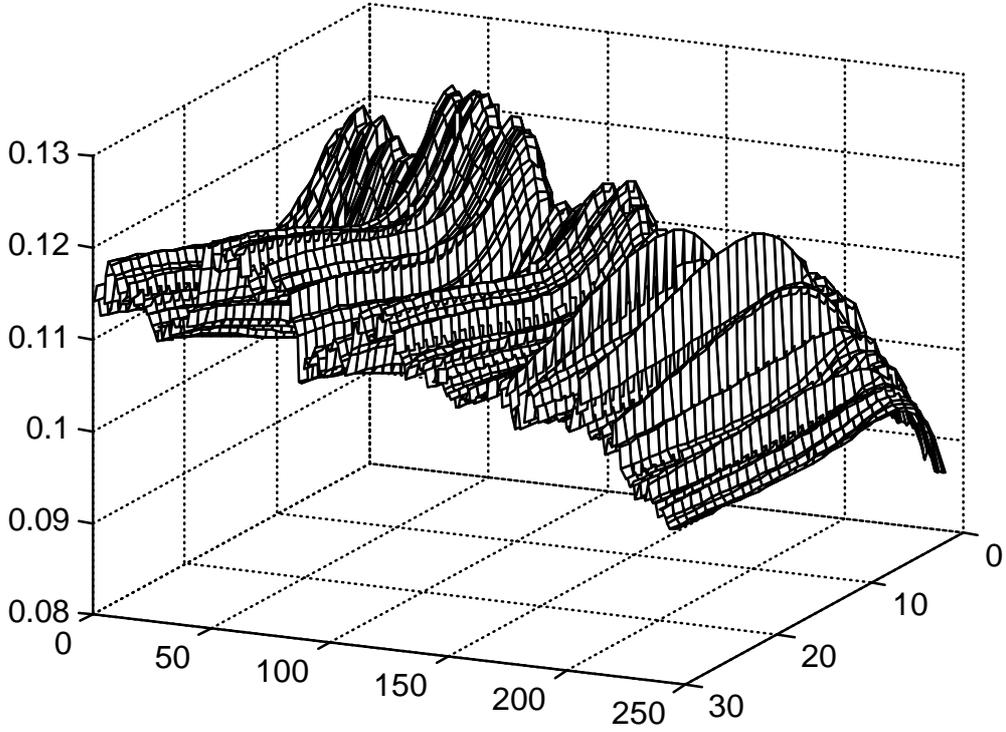
Forward - 1994



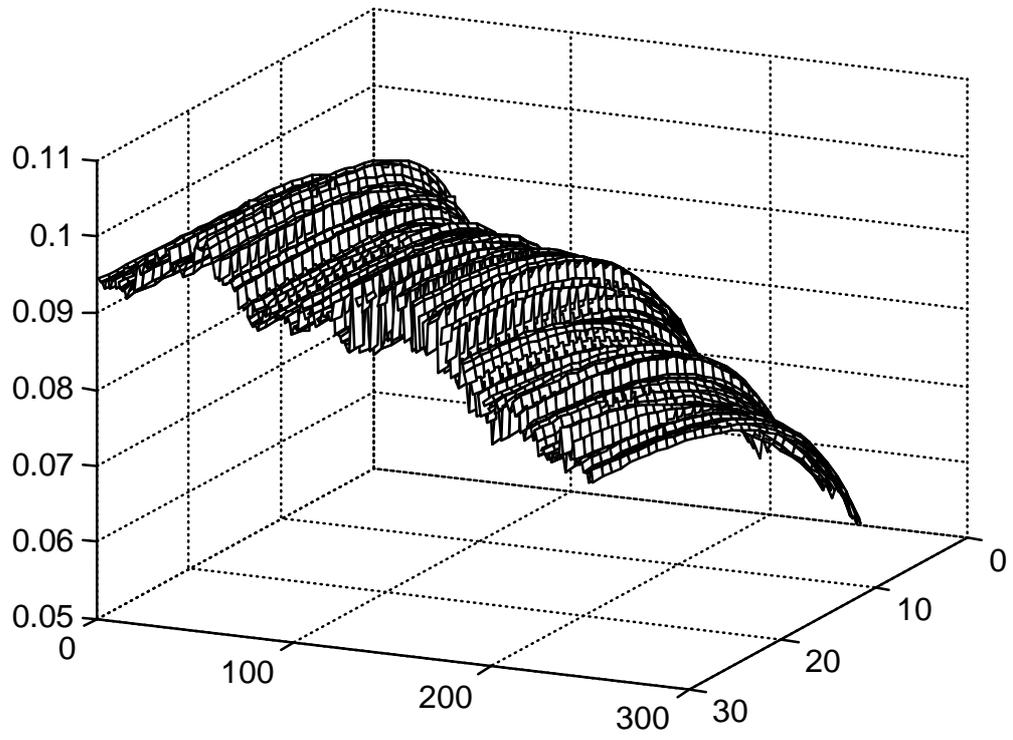
Spot - 1995



Forward - 1995



Spot - 1996



Forward - 1996

