



Universidad de La Laguna

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ASTROFÍSICA



EL ESPECTRO DE OSCILACIONES GLOBALES DEL SOL

Memoria presentada por Ainoa Aguilera Paredes como TRABAJO DE FIN DE GRADO para el Grado en Física de la Universidad de La Laguna

Septiembre 2017

Supervisado por:
Teodoro Roca Cortés

ABSTRACT

Helioseismology consists in the application of seismic techniques to the study of the eigenmodes of oscillation within the Sun, as a method to obtain all possible knowledge about its internal structure and dynamics; and, by extrapolation, the application to other stars is called Asteroseismology.

Spectrometric photospheric velocity measurements of sunlight integrated over the solar disk from GOLF instrument on the SoHO satellite have been used (Gabriel et al., 1995) [30], in order to obtain, analyze and interpret the parameters of the solar p -modes ($\ell \leq 3$ y $9 \leq n \leq 25$) from the spectrum of the global oscillations of the Sun as any other star, with the aim of comparing them in the periods of maximum and minimum solar activity.

To study the shape of the spectra of solar acoustic modes, it has been used the Fast Fourier Transform (FFT), and the average of the spectra along the years has been fit to a model of a sum of lorentzians. These fittings provide the values of the characteristic parameters of acoustic modes.

The parameters of the adjustments characterizing background noise, resonance frequencies, splitting, width and amplitude of the power spectrum of two different epochs of the solar activity cycle have been studied: one at a maximum (around 2001) and the other in a minimum (around 2008). The comparison of both epochs allows us to conclude that both the background noise and the splitting of the adjustments made do not depend on the solar activity cycle within the error committed. A relative difference of $2.4 \pm 0.7\%$ between the spectrum adjustment widths at both epochs is also measured, being greater during the maximum of activity, as well as a difference between the adjusted heights, which allows us to measure a difference of power density of $7.45 \pm 4.56\%$, being higher in the minimum of solar activity.

This report consists of a brief introduction to stellar oscillations and equations that govern their movement, emphasizing the influence of the solar activity cycle on its oscillation modes. Then the observation data that have been used for this work, as well as the methodology that is designed for their analysis are described. Later, the results obtained are discussed and the appropriate conclusions are extracted. Finally, it has been described how to further continue the investigation.

RESUMEN

La Heliosismología consiste en la aplicación de técnicas sísmicas al estudio de los modos propios de oscilación del Sol, como método para obtener todo el conocimiento posible acerca de su estructura y dinámica internas; y, por extrapolación, la aplicación a otras estrellas se llama Astrosismología.

En este trabajo se utilizan datos espectrométricos de la velocidad fotosférica integrada sobre el disco solar tomados por el instrumento GOLF a bordo del satélite SoHO (*Gabriel et al., 1995*) [30] para obtener, analizar e interpretar los parámetros de los modos p solares ($\ell \leq 3$ y $9 \leq n \leq 25$) a partir del espectro de las oscilaciones globales del Sol como si fuera una estrella cualquiera, con el objetivo de compararlos en las épocas de máximo y de mínimo de actividad solar.

Para estudiar la forma de los espectros de los modos acústicos solares, se ha empleado la Transformada Rápida de Fourier (FFT), y se ha ajustado el promedio de los espectros a lo largo de los años a lorentzianas, para una determinada frecuencia central. Estos ajustes proporcionan los valores de los parámetros característicos de los modos acústicos.

Se han estudiado los parámetros de los ajustes que caracterizan el ruido de fondo, las frecuencias de resonancia, el *splitting*, la anchura y la amplitud del espectro de potencias de dos épocas diferentes del ciclo de actividad solar: una en un máximo (en torno a 2001) y la otra en un mínimo (en torno a 2008). La comparación de ambas épocas nos permite concluir que tanto el ruido de fondo como el *splitting* de los ajustes realizados no dependen del ciclo de actividad solar dentro del error cometido. Se mide además una diferencia relativa del $2.4 \pm 0.7\%$ entre las anchuras del ajuste del espectro en ambas épocas, siendo mayores durante el máximo de actividad, así como una diferencia entre las alturas ajustadas, que nos permite medir una diferencia de densidad de potencia del $7.45 \pm 4.56\%$, siendo mayores en el mínimo de actividad solar.

Esta memoria consta de una pequeña introducción sobre las oscilaciones estelares y las ecuaciones que rigen su movimiento, centrándonos especialmente en la influencia del ciclo de actividad solar en sus modos de oscilación. Después, se describen los datos de la observación que se han utilizado para este trabajo, así como la metodología que se ha diseñado para su análisis. Más adelante, se discuten los resultados obtenidos y se extraen las conclusiones oportunas. Finalmente, se describe cómo continuar la investigación en una etapa posterior.

Contents

1	Introducción	1
1.1	El origen de la Heliosismología	1
1.2	Las oscilaciones solares	3
1.2.1	Hipótesis básicas	4
1.2.2	Ecuaciones lineales y aproximación adiabática	4
1.3	Propiedades de las oscilaciones solares	6
1.3.1	Modos p	7
1.3.2	Modos g y modos mixtos	8
1.4	El espectro de modos acústicos del Sol	8
1.4.1	Frecuencias de los modos acústicos	8
1.4.2	Efectos de la rotación solar	9
1.4.3	Variación de las frecuencias con el ciclo solar	9
1.4.4	Efectos de la inclinación del eje de rotación	11
1.5	Objetivo principal del trabajo	11
2	Datos observacionales	12
2.1	Señales observables	12
2.2	Toma de datos de GOLF	13
2.3	Datos empleados	14
3	Metodología del análisis de las observaciones	16
3.1	El espectro de potencias de los modos acústicos	16
3.1.1	Análisis de Fourier de series temporales	19
3.1.2	Densidad de probabilidad	19
3.2	Ajuste a lorentzianas	20
3.2.1	Multipletes $\ell = 0$ y $\ell = 2$	21
3.2.2	Multipletes $\ell=1$ y $\ell = 3$	22
3.3	Método de ajuste	23
3.4	Resultados del ajuste	23
3.4.1	Frecuencias centrales	24
3.4.2	Desdoblamiento rotacional o <i>splitting</i>	24
3.4.3	Anchura	26
3.4.4	Amplitud	27
4	Análisis de los datos de GOLF en el máximo y en el mínimo	28
4.1	Discusión de los resultados	28
4.1.1	Nivel de ruido	28
4.1.2	La frecuencia de resonancia	29
4.1.3	<i>Splittings</i>	31
4.1.4	Anchuras	32
4.1.5	Alturas	34

5	Conclusiones	36
5.1	Conclusiones	36
5.2	Proyectos futuros y mejoras	37

1 Introducción

Stellar oscillations are great indicators of the structure of the stars, as they are standing waves that propagate through resonant cavities within them. There are certain very low amplitude periodic changes in the solar equilibrium configuration, that are observable as variations in brightness and radial velocity at its surface. This chapter summarizes the basic equations governing the behavior of stellar oscillations, which can be found in more detail in the class notes of Professor Christensen-Dalsgaard (1997) [9]. Different types of oscillation modes will also be shown, as well as their dependence with rotation or the activity cycle of the Sun. Precisely, the influence of the solar activity on the measurable parameters of the solar acoustic oscillations is the objective of this work.

Las oscilaciones solares son observables importantes de la estructura de las estrellas, ya que son ondas estacionarias que se propagan en cavidades resonantes dentro de las mismas. Hay ciertos cambios periódicos, de baja amplitud, en la configuración de equilibrio del Sol, que se manifiesta en observables como las variaciones en la lunimosidad y en la velocidad radial en su superficie. En este capítulo se mostrarán de forma resumida las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de las oscilaciones estelares, que pueden encontrarse con mayor detalle en las notas de clase del profesor Christensen-Dalsgaard (1997) [9]. También se verán los diferentes tipos de modos de oscilación, así como su variación con la rotación o el ciclo de actividad del Sol. Precisamente, la influencia de la actividad solar sobre los parámetros medibles de las oscilaciones acústicas solares es el objetivo de este trabajo.

1.1 El origen de la Heliosismología

La comprensión de la estructura, dinámica y evolución de las estrellas no sólo está limitada en el tiempo (la historia de la humanidad se traduce en sólo un instante de la vida de una estrella), sino que además no tenemos accesible una muestra suficiente de estrellas: todas se encuentran a años luz de nosotros. Todas salvo una, que se encuentra solamente a unos 150,000,000 km de nosotros, el Sol.

Nuestro Sol constituye, en este sentido, un verdadero laboratorio donde poner a prueba muchas de las teorías que se han propuesto para explicar la estructura y evolución de las estrellas en general, ya que los datos que obtenemos de él (desde la Tierra o bien desde satélites lanzados al espacio) son de una mayor precisión que los obtenidos de cualquier otra estrella observada. Sin embargo, debido a que los fotones que provienen de las capas más internas son absorbidos

y reemitidos numerosas veces antes de llegar a nosotros, la información que obtenemos de la luz solar se restringe a menos del 1% de su radio definido en la fotosfera. Se hace necesario, llegados a este punto, el desarrollo de nuevos métodos observacionales que nos permitan conocer las condiciones físicas que imperan en el interior solar.

En el núcleo solar tienen lugar numerosas reacciones nucleares entre cuyos productos se encuentran los neutrinos, cuya sección eficaz de interacción con la materia bariónica es tan pequeña que pueden atravesar todas las capas hasta llegar a la superficie sin haber interactuado con ninguna otra partícula. Son, por tanto, una valiosa fuente de información del núcleo solar. Sin embargo, su detección es extremadamente complicada, y debemos confiar en la información que podemos extraer de la radiación electromagnética recibida.

La otra fuente de información del interior solar conocida, la mejor y más asequible hoy en día, es la Heliosimología. Esta rama de la Astrofísica trata de obtener información de las capas más profundas del Sol mediante el estudio de sus pulsaciones, analizando sus modos propios de oscilación. Tiene su origen en el descubrimiento de perturbaciones regulares en la superficie solar de amplitud muy pequeña, y periodo de unos 5 minutos (*Leighton, Noyes & Simon, 1962*) [10]. La interpretación de las observaciones con luz integrada de todo el disco solar (*Claverie et al., 1979*) [11] permitió explicar empíricamente que dicha oscilación de 5 minutos no era más que la superposición de millones de modos acústicos atrapados en diferentes cavidades del interior solar. Su característica principal, la frecuencia, tiene que ver directamente con la estructura del interior solar, de modo que su estudio resulta de vital interés cuando de conocer las condiciones físicas del interior del Sol se trata.

El primer espectro de potencias de las oscilaciones globales del Sol, medidas como una estrella cualquiera, lo encontramos en la tesis doctoral de *Roca Cortés (1979)* [35]. A partir del análisis de medidas tomadas a través de espectroscopía por *scattering* resonante en el Observatorio del Teide, se determina por primera vez la estructura fina del espectro, cuyos picos se identifican como modos acústicos con n grande y $\ell = 0$ y 1. La obtención de este espectro de potencias, unida a la creciente acumulación de resultados observacionales y datos recogidos por los diferentes experimentos disponibles, permitió obtener evidencias de la estructura y dinámica solar que permanecían sin verificar hasta el momento. Una de estas constataciones fue la observación de que existe un desplazamiento de las frecuencias de los modos acústicos por encima de los errores de las medidas con el ciclo de actividad solar (*van der Raay et al., 1984*) [18], aspecto en el que se enfocará principalmente el presente estudio.

La aplicación de técnicas sismológicas para el estudio de capas más profundas que la fotosfera visible de las estrellas se ha visto consolidada a lo largo de las décadas posteriores gracias a los resultados experimentales obtenidos con el Sol, tales como la determinación de su velocidad de rotación (*Duvall & Harvey, 1983*) [12] o la de la velocidad del sonido en función de la profundidad en el Sol (*Christensen-Dalsgaard et al., 1985*) [13].

El hecho de que las señales medidas en Heliosismología tengan amplitudes muy pequeñas ($\sim 1 \times 10^{-6}$) ha conllevado que las observaciones estuvieran en un principio limitadas únicamente al Sol, sin embargo, recientemente es posible trasladar esta técnica a otras estrellas en etapas muy diferentes del ciclo de vida estelar gracias a satélites como el Kepler (*Debosscher et al., 2011*) [42] o COROT (*Baglin et al., 2002*) [43]. Así pues, la Astrosismología se consolida como una de las contadas formas que nos permiten mejorar los modelos existentes de evolución y dinamo estelar, mediante la información empírica del interior de las estrellas.

Desde que se comenzaron a estudiar las oscilaciones de la superficie del Sol en 1979 se analizaban las ondas de presión (los llamados modos p , es decir, vibraciones en las que el material fotosférico se ve expandido o comprimido, y de cuyo desplazamiento y difusión en la fotosfera los astrofísicos han conseguido conocer en detalle las $\sim 2/3$ partes del interior solar). Quedaban pendientes por confirmar las más conspicuas, unas ondas disipadas por la gravedad del propio Sol (por ello llamados modos g), que permiten obtener información de su tercio central. En *García et al. (2007)* [44], mediante el análisis de series de diez años de GOLF (experimento a bordo del satélite SoHO), se encuentra una estructura en consonancia con la separación periódica predicha para estos modos gravitatorios, permitiendo esgrimir que el núcleo solar giraría entre dos y cinco veces más rápido que el resto de la zona radiativa. Ésta y otras investigaciones posteriores ya apuntaban detecciones de los escurridizos modos g , sin embargo ninguna resultó definitiva. No ha sido posible obtener estas señales inequívocamente hasta este mismo año en que *Fossat et al. (2017)* [36] analizan 16.5 años de datos de GOLF obteniendo que el núcleo gira una vuelta por semana, casi cuatro veces más rápido que las capas superficiales e intermedias observadas. La detección inequívoca de ondas de gravedad en el núcleo solar era el objetivo principal de GOLF. De confirmarse, es el resultado más importante de SoHO en la última década y uno de los mayores descubrimientos de la historia de este observatorio espacial.

La información que permite extraer la Heliosismología acerca de la estructura y dinámica del interior solar permite que se convierta en una herramienta muy útil en campos de la Astrofísica que hace sólo unas décadas no habríamos podido ni siquiera imaginar. Por ejemplo, una serie de discrepancias sobre la estructura interna del Sol entre las predicciones de modelos teóricos que utilizan las medidas espectroscópicas como base, y las propiedades del Sol que pueden ser deducidas en base a las técnicas de Heliosismología llevó a la aparición del “problema de la composición solar”. Hace una década, gracias a mejoras en las técnicas de análisis espectroscópico, la composición química superficial del Sol fue revisada completamente, resultando en una concentración de metales un 40% menor a lo que se creía anteriormente. Esta disonancia entre resultados, podría ser explicada, como se muestra por primera vez en *Vincent et al. (2015)* [39], a partir de la existencia de un tipo de materia oscura en el Sol. Dentro del Sol, la materia oscura transporta energía, absorbiéndola en las zonas centrales y viajando hacia regiones más alejadas y frías, donde deposita su exceso de energía. A diferencia de la materia ordinaria, la materia oscura no pierde energía en el viaje, porque interactúa muy débilmente con el medio. De esta manera, los modelos teóricos del Sol que contemplan la materia oscura en su interior predicen la modificación de su estructura en comparación a modelos solares estándar.

1.2 Las oscilaciones solares

Las ecuaciones que modelan las oscilaciones solares, así como las de cualquier otra estrella, se pueden obtener a través de la dinámica de fluidos. Sin embargo, el desarrollo en detalle de estas ecuaciones es demasiado laboriosa como para explicitarla en este texto, por lo que basándonos en la formulación de las notas de clase del profesor *Christensen-Dalsgaard (1998)* [9], se presentará un resumen. Obviamente, lo que se explica es aplicable también a cualquier otra estrella que cumpla las hipótesis básicas que se enumeran a continuación.

1.2.1 Hipótesis básicas

Consideraremos que el gas (plasma) que forma el Sol puede tratarse como un continuo, por lo que sus propiedades (densidad, presión, velocidad,...) pueden especificarse como funciones de la posición \vec{r} y del tiempo t ; y que todas ellas son medidas por un observador estacionario (descripción *Euleriana*). Asimismo, tomando las siguientes hipótesis razonables obtendremos una simplificación muy aproximada de las ecuaciones básicas que gobiernan las oscilaciones solares:

1. Puede despreciarse la viscosidad del fluido bajo las condiciones solares, de modo que la única fuerza superficial será la presión p del gas.
2. En una primera aproximación, despreciaremos los efectos del campo magnético. Así, solo consideraremos la gravedad como fuerza de volumen por unidad de masa.
3. En capas alejadas de la superficie, las oscilaciones se caracterizan por períodos típicos que van de minutos a horas; que son escalas de tiempo mucho menores que la de Kelvin-Helmholtz, que puede considerarse como el tiempo característico de ajuste térmico (*Kippenhahn & Weigert, 1990*) [14]. Así, ocurre que en estas capas el calentamiento puede despreciarse frente a las derivadas temporales, y el movimiento es adiabático.
4. Como las oscilaciones solares observadas poseen una amplitud mucho menor que las escalas características del Sol (su radio, por ejemplo), se pueden aproximar a pequeñas perturbaciones en torno a un estado de equilibrio, que consideraremos estático y con simetría esférica.

1.2.2 Ecuaciones lineales y aproximación adiabática

Basándonos en lo anteriormente descrito, buscamos las ecuaciones de la hidrodinámica aplicadas a una esfera de plasma en equilibrio hidrostático y energético para describir las oscilaciones de una estrella. Se realiza, a partir de ellas, un análisis lineal de pequeñas perturbaciones en torno a un estado de equilibrio estático y de simetría esférica, como también se ha justificado, con lo que las derivadas temporales pueden despreciarse. Además, supondremos que no hay flujos de velocidades importantes y que existe simetría esférica. De este modo, expresamos cada magnitud física como:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0(\vec{r}) + \phi'(\vec{r}, t) \quad (1)$$

donde ϕ_0 representa la cantidad en equilibrio, ϕ' es una perturbación en un punto dado. Las ecuaciones se linearizarán despreciando los términos de segundo orden (los que contengan productos de perturbaciones), resultando el siguiente conjunto de ecuaciones básicas:

- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

- ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

$$\frac{\partial^2 \vec{\delta r}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla \Phi_0 + \nabla \Phi' \quad (3)$$

- ECUACIÓN DE POISSON

$$\nabla^2 \Phi' = -4\pi G \rho' \quad (4)$$

- ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA TÉRMICA

$$\rho T \frac{\partial \delta S}{\partial t} \equiv \rho T \frac{c_p}{v_T} \left(\frac{\partial \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)}{\partial t} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial \left(\frac{\delta p}{p} \right)}{\partial t} \right) = \rho \varepsilon \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \right) - \delta \left(\nabla \vec{F}' \right) \quad (5)$$

siendo $\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}$ y $\vec{\delta r}$ el desplazamiento, que podemos separar en una componente radial y otra tangencial:

$$\vec{\delta r} = \xi_r \vec{a}_r + \vec{\xi}_t \quad (6)$$

Efectuando esta separación de variables (radial y angulares), se pueden encontrar soluciones a las ecuaciones anteriores para las perturbaciones de la forma:

$$f_{nlm}(r, \theta, \varphi, t) = f_{nl}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\omega_{nlm} t} \quad (7)$$

donde f es una perturbación escalar asociada con el modo (n, ℓ, m) ; las variables r, θ, φ, t representan la coordenada radial, la colatitud, la longitud y el tiempo, respectivamente; mientras que ω_{nlm} es la frecuencia angular del modo. La solución radial es $f_{nl}(r)$, y los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ dan cuenta de la distribución espacial en la superficie, y se definen como:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m c_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (8)$$

siendo P_ℓ^m un polinomio de Legendre asociado y $c_{\ell m}$ una constante de normalización, que hace que la integral de $|Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2$ sobre la esfera de radio unidad tenga valor 1, determinada por:

$$c_{\ell m}^2 = \frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!} \quad (9)$$

El índice n representa el orden radial, que en valor absoluto es el número de nodos de la función radial $f_{nl}(r)$; ℓ es el grado angular, que se corresponde con el número de líneas nodales en la superficie del astro y puede tener únicamente valores enteros positivos; y el índice m es el orden azimutal, y da cuenta del número de líneas nodales que atraviesan perpendicularmente el ecuador, sólo puede tomar valores tales que $|m| \leq \ell$ (hay $2\ell + 1$ valores posibles de m).

En síntesis, las soluciones a las perturbaciones lineales de las ecuaciones de equilibrio de un Sol esféricamente simétrico son las autofunciones del correspondiente problema de autovalores, como cabía esperar. En la Figura 1 se muestran la representación gráfica de la geometría de los armónicos esféricos para $\ell \leq 3$ y los diferentes valores de m permitidos en cada caso.

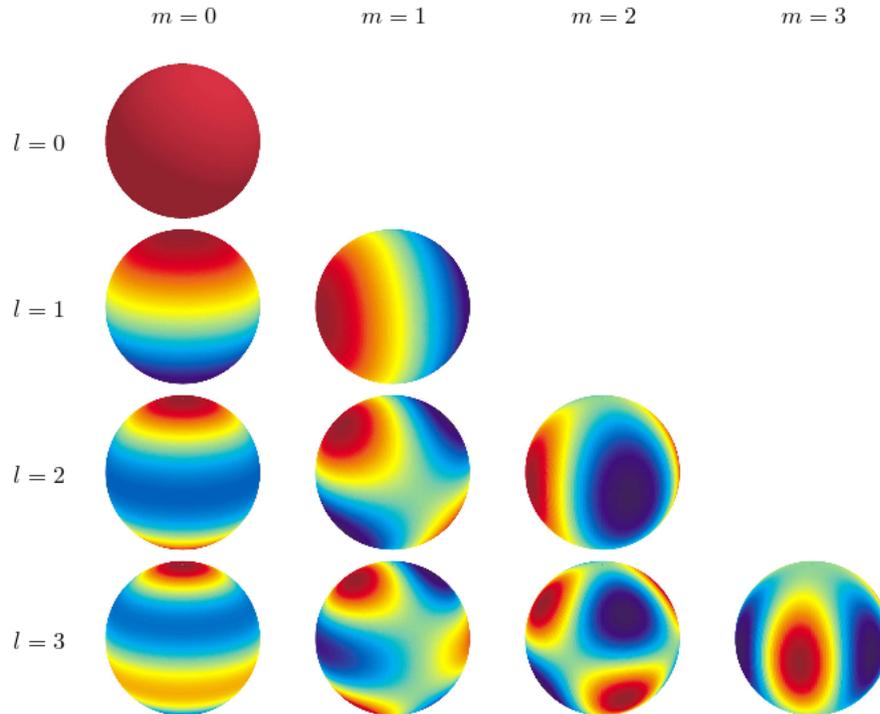


Figure 1: Ejemplo gráfico de diferentes armónicos esféricos Y_ℓ^m . El color rojo corresponde a valores positivos (se alejan del observador), y los negativos se representan en azul (se acercan). Podemos encontrar esta imagen en *Espinosa Lara (2005)* [8].

Evidentemente, si el problema posee simetría esférica, las soluciones no dependerán de m o lo que es lo mismo, estarán degeneradas en m . Sin embargo, cualquier perturbación axial (como la rotación o la existencia de campo magnético, por ejemplo) hará que la solución pase a depender de m ; que se rompa dicha degeneración. En este caso el modo se observará desdoblado en forma de multiplete con los diferentes valores no degenerados, y las frecuencias angulares de cada modo $\omega_{n\ell m}$ aparecerán separadas una cantidad proporcional a la perturbación que origina dicho desdoblamiento.

1.3 Propiedades de las oscilaciones solares

Las oscilaciones solares se propagan en el interior del Sol en forma de ondas que interfieren en cavidades resonantes a diferentes profundidades formando ondas estacionarias, cuya representación en la superficie se corresponde con la oscilación de 5 minutos propuesta en la década de 1970 (*Ulrich, 1970* [15] e independientemente *Stein & Leibacher, 1971* [16]).

Según la fuerza restauradora dominante de dichas ondas, los diferentes modos se pueden clasificar en modos p , modos g o modos mixtos.

1.3.1 Modos p

Estos modos son ondas acústicas estacionarias con la presión como fuerza recuperadora, de ahí el nombre de modos p . Son los modos que se observan con mayor facilidad en estrellas de tipo solar, debido a que en su propagación por el interior estelar llegan hasta la superficie.

Se encuentran confinados entre la superficie externa del Sol y una superficie de radio $r = r_t$, llamada punto de retorno interno, el cual depende de las características de la onda y de la propia estrella. En una primera aproximación, la dinámica de los modos p queda determinada únicamente por la variación de la velocidad del sonido con la profundidad. Las ondas acústicas (ver Figura 2) se propagan perpendicularmente a la superficie y a partir de ella, posteriormente van cambiando de dirección en función de su profundidad como consecuencia del cambio paulatino de la velocidad del sonido en el medio hasta llegar al punto de retorno interno, donde se reflejan de vuelta hacia la superficie, y al llegar a ella se repite el proceso. Matemáticamente, la componente radial del vector de onda decrece a medida que crece la velocidad del sonido.

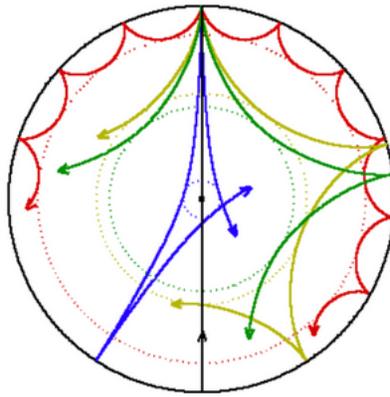


Figure 2: Propagación de ondas acústicas asociadas a diferentes modos p (con distintos valores de ℓ). Los modos de ℓ bajo, como el azul, pasarán más cerca del núcleo solar; y los modos con valores de ℓ altos, como el rojo, quedan atrapados en casquetes esféricos más superficiales. Esta imagen puede encontrarse en la portada de *Christensen-Daksgaard (2014)* [9]

La posición del punto de retorno r_t presenta una dependencia con el grado del modo, así como de su frecuencia que resulta de esencial relevancia en la interpretación de las oscilaciones de 5 minutos observadas. Para valores de ℓ pequeños, r_t se encuentra muy cerca del centro, mientras que para grados mayores el punto de retorno se acerca a la superficie. También se desprende de las ecuaciones que la frecuencia aumenta con el orden del modo.

Debido a las condiciones de contorno que imponen los parámetros físicos de una estrella, sus oscilaciones se producen sólo a determinadas frecuencias. Con las técnicas adecuadas podemos medir y analizar estas frecuencias de resonancia y obtener información física muy valiosa sobre el interior de la estrella. Volveremos sobre esta idea más adelante.

1.3.2 Modos g y modos mixtos

La fuerza restauradora dominante de estas oscilaciones es la gravedad. Las ondas gravitatorias, a diferencia de las acústicas, tienen dos puntos de retorno en el interior de la estrella, por lo que quedan confinadas en casquetes esféricos internos de la estrella.

Uno de los puntos de retorno se sitúa habitualmente bajo la zona convectiva, próximo a ella; mientras que el otro se encuentra cercano al núcleo de la estrella. Además, el punto de retorno exterior también depende de la frecuencia del modo, de modo que las ondas con mayor frecuencia quedan confinadas en una región más pequeña y central de la estrella.

También hay modos donde no hay una clara fuerza restauradora dominante: los llamados modos mixtos. En función de la zona de la estrella donde se encuentren tendrán un carácter dominante u otro, aunque generalmente se comportan como modos p en la zona de convección y como modos g fuera de ella. Para el Sol, objeto de estudio de este trabajo, así como para estrellas de masa menor o igual a la solar, prácticamente no existen modos mixtos de oscilación.

1.4 El espectro de modos acústicos del Sol

Como ya se introdujo en la sección 1.3.1, las ecuaciones y las condiciones de contorno sólo tienen soluciones no triviales para valores concretos de la frecuencia de resonancia ω , que es, por lo tanto, un valor propio del problema; de modo que cada frecuencia corresponde a un modo de oscilación. Mediante cálculos también se puede obtener la función propia asociada a cada autovalor, i.e., la variación de las perturbaciones con la profundidad.

En esta sección, nos centraremos en la caracterización de esos valores discretos de ω así como de los efectos que sobre ellos ejercen la rotación y el ciclo de actividad solar.

1.4.1 Frecuencias de los modos acústicos

Comenzamos por señalar las frecuencias de oscilación permitidas de los modos acústicos. De la ecuación 7 vemos que los modos de vibración se pueden describir en función de los armónicos esféricos, de manera que quedan caracterizados por los grados ℓ y m . Por otro lado, el índice n da cuenta de los ceros que tiene la función radial (la solución de la perturbación en el radio). Los modelos teóricos bajo ciertas aproximaciones predicen que las frecuencias de resonancia con $n \gg \ell$ satisfacen la relación (Vázquez, H., 2001 [3]; Barceló, S., 2012 [24]):

$$\nu_{n\ell} = \frac{\omega_{n\ell}}{2\pi} \cong \nu_0 \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) + \dots \quad (10)$$

donde $\nu_{n\ell}$ es la frecuencia de resonancia del modo, α es una constante de fase, y ν_0 es la llamada separación grande, que tiene un marcado significado físico siendo la inversa del doble del tiempo que tarda el sonido en recorrer la estrella desde el centro a su superficie. La ecuación 10 es el resultado de la aproximación realizada despreciando la perturbación en el potencial gravitatorio, y nos permite llegar a una solución sencilla de los modos de oscilación. Suele conocerse como la aproximación de Cowling (Cowling, 1941) [17], y también como la aproximación asintótica válida para $n \gg \ell$.

Adviértase que, en primera aproximación, un modo de un grado angular determinado ℓ estará separado de otro modo de igual ℓ pero con $n' = n + 1$ ó $n - 1$ por la llamada separación grande

$\Delta\nu \simeq \nu_0$. Además, los modos con grados (n, ℓ) y $(n + 1, \ell - 2)$ tienen la misma frecuencia. En los modos visibles de los que estudiaremos en este trabajo, esto se traduce en $\nu_{n, \ell=2} = \nu_{n+1, \ell=0}$. Sin embargo, no debemos perder de vista que esta igualdad es una predicción de un modelo matemático con ciertas aproximaciones, y que en los espectros reales nos encontraremos con que las frecuencias $\nu_{n, \ell=2}$ y $\nu_{n+1, \ell=0}$ no son exactamente iguales, pero sí muy cercanas. La diferencia de frecuencia entre ambos modos es una magnitud llamada separación pequeña, $\delta\nu_{n\ell} = \nu_{n+1, \ell=0} - \nu_{n, \ell=2}$.

Hasta ahora no hemos considerado que exista dependencia de la frecuencia de resonancia del modo con el orden azimutal m , ya que no hemos considerado ninguna perturbación axial que rompa la degeneración causada por la simetría esférica.

1.4.2 Efectos de la rotación solar

En este apartado discutiremos cómo se rompe la simetría esférica induciendo la separación de los modos con diferente m . Si consideramos, como se expuso con anterioridad, la rotación solar como perturbación axial que rompe la simetría esférica (i.e., rompe la degeneración en m), cada modo acústico se desdoblará en $(2\ell + 1)$ modos, cada uno de ellos con un grado azimutal m que irá de $-\ell$ hasta ℓ , y separados entre sí una cantidad (*splitting*) proporcional a la velocidad de rotación de las capas solares en las cavidades resonantes donde dichos modos se propaguen. Sea $\nu_{n\ell m}$ la frecuencia de resonancia del modo (n, ℓ, m) , en nuestro modelo el *splitting* característico de ese modo $s_{n\ell}$ (Claverie et al., 1983):

$$\nu_{n\ell m} = \langle \nu_{n\ell} \rangle + m \cdot s_{n\ell} \quad (11)$$

donde $\langle \nu_{n\ell} \rangle$ es el promedio de las frecuencias para todos los m del multiplete (la frecuencia central). De manera que podemos inferir que para cualquier n :

$$\nu_{\ell m} = \langle \nu_{\ell} \rangle + m \cdot s_{\ell} \quad (12)$$

Además, conocemos la relación que existe entre este desdoblamiento y la velocidad de rotación media en las cavidades muestreadas por los modos ($\bar{\Omega}$):

$$\delta\nu_{n\ell m} = \nu_{n\ell m} - \langle \nu_{n\ell} \rangle \simeq m \frac{\bar{\Omega}}{2\pi} \quad (13)$$

Habrà un s_{ℓ} único para cada multiplete que será el objeto de análisis en este trabajo. Si además comparamos las ecuaciones 11, 12 y 13 vemos que s_{ℓ} se relaciona con $\bar{\Omega}$ mediante:

$$s_{\ell} \simeq \frac{\bar{\Omega}}{2\pi} \quad (14)$$

1.4.3 Variación de las frecuencias con el ciclo solar

A partir de la obtención del primer espectro de potencias de las oscilaciones globales del Sol, y a medida que se iban acumulando resultados observacionales, pudo observarse sin lugar a dudas que existe un desplazamiento de las frecuencias de los modos acústicos por encima de los errores de las medidas. La primera evidencia de dicho desplazamiento aparece en *Van der Raay et al. (1984)* [18], donde, tomando datos de velocidad Doppler, se observó un desplazamiento en el modo $\ell = 1$, $n = 20$ entre 1981 y 1983. Este resultado fue confirmado por *Woodard & Noyes (1985)* [19] con la comparación de medidas de intensidad entre 1980 (cerca del máximo)

y 1984 (cerca del mínimo de actividad solar). Se encontró que las frecuencias en el máximo eran ligeramente mayores que en el mínimo.

Numerosos artículos presentaron posteriormente medidas que respaldan este resultado. *Fossat et al. (1987)* [20] comparan medidas de velocidad sobre el disco solar integrado realizadas desde el Polo Sur entre 1984 y 1985 para modos p de $\ell = 0, 1, 2$ y 3 obteniendo que las frecuencias son $0.39 \pm 0.04 \mu\text{Hz}$ mayores durante el máximo de actividad solar. También *Pallé, Régulo & Roca Cortés (1989)* [21], a partir de datos tomados del Observatorio del Teide desde 1977 hasta 1988, observan un desplazamiento de las frecuencias en el máximo de $0.37 \pm 0.04 \mu\text{Hz}$ para modos acústicos con $\ell \leq 3$, así como una dependencia de este desplazamiento con el grado ℓ . A tenor de los desplazamientos medidos en función del grado angular de los modos, que son mayores para valores más altos de ℓ , *Libbrecht & Woodard (1990)* [22] sugieren que los cambios más importantes durante el ciclo solar tienen lugar cerca de la superficie.

Estos desplazamientos de las frecuencias fueron relacionados, casi inmediatamente después de su descubrimiento, con el ciclo de actividad solar. En *Delache, Laclare & Sadsaoud (1985)* se explica la correlación de las variaciones del radio con el ciclo de actividad solar a través del número de manchas solares. De este modo, se permite establecer una relación empírica entre el ciclo de actividad solar y el desplazamiento de frecuencias de los modos de oscilación a través de la variación del radio solar; y se observa, por ejemplo, en *Woodard & Noyes (1985)* y en *Fossat et al. (1987)* que las fluctuaciones relativas del radio solar son del mismo orden de magnitud que las variaciones relativas de las frecuencias. Otras investigaciones también presentan resultados que favorecen esta hipótesis de variación de las frecuencias con la actividad solar. *Elsworth et al. (1990)* presentan una influencia de las fluctuaciones en el flujo de neutrinos solares (estudiadas en *Sakurai (1981)*) en el desplazamiento de frecuencias. *Roberts & Campbell (1986)* atribuyen la disminución de las frecuencias de modos p observadas entre 1980 y 1984 a un campo magnético en el interior solar que evoluciona durante el ciclo solar.

Las variaciones de los modos acústicos solares no se restringen únicamente a las frecuencias; los restantes parámetros que definen el modo, tales como la amplitud o la energía asociada a él, también se han estudiado. En *Anguera Gubau et al. (1992)* [23] se encuentra que la energía de los modos es un 30% menor durante el máximo que en el mínimo de actividad solar, así como que las amplitudes de los picos son sistemáticamente mayores en el mínimo que en el máximo.

Debido a que existe una relación entre los modos de oscilación del Sol y su ciclo de actividad, resulta de interés conocer las variaciones de dicho ciclo a lo largo del tiempo. En esta línea se han realizado numerosas investigaciones en los últimos años. Por ejemplo, en *Abreu et al. (2012)* [40] se postula una modulación de la actividad magnética solar a largo plazo con efectos planetarios. Por otra parte, basándose en la asimetría de manchas solares durante los ciclos 23 y 24 existente entre ambos hemisferios, *Chowdhury et al. (2013)* [38] concluyen que el presente ciclo solar es $\sim 20\%$ más débil que el anterior. Resultados como éste, junto con el descubrimiento de una tendencia a largo plazo de debilitamiento de las manchas solares, hace pensar que el campo magnético del Sol podría no ser lo suficientemente fuerte para producir manchas solares durante el ciclo solar 25 (*Penn & Livingston, 2011*) [45], y que nos acercamos a una especie de “letargo” de actividad solar.

En otras investigaciones, como en *Khomenko & Collados (2015)* [41], se postula que el campo magnético de alta inclinación en la vecindad de una región activa podría ser el responsable del aumento de la frecuencia de corte y la disminución de la potencia de la señal recibida en regiones de mayor actividad solar.

1.4.4 Efectos de la inclinación del eje de rotación

El eje de rotación del Sol es casi perpendicular a la eclíptica; por el contrario, las estrellas no están orientadas todas de esta manera. En la Astrosismología, la inclinación del eje de rotación de la estrella con respecto a la línea de visión produce un efecto en los modos, permitiéndonos calcular el ángulo de inclinación de la estrella.

La potencia relativa de los modos se corresponde con el área que se encuentra bajo la lorentziana que los representa en el espectro de potencias (*Barceló, 2012*) [24], asunto que trataremos más adelante:

$$P = \frac{\pi}{2} \Gamma A \quad (15)$$

donde Γ es la anchura a media altura del modo en el espectro de potencias y A es su respectiva amplitud.

Por otro lado, la potencia relativa se puede expresar en término de los polinomios de Legendre (*Gizon et al., 2003* [25]; *Barceló, 2012* [24]):

$$\epsilon_{\ell m}(i) = \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \left(P_{\ell}^{|m|}(\cos(i)) \right)^2 \quad (16)$$

donde i es el ángulo de inclinación del eje de rotación con respecto al eje de visión y $P_{\ell}^{|m|}$ es la función asociada de Legendre.

Para el ángulo $i = 0^{\circ}$, es decir, el eje polar dirigido hacia el observador, sólo se ven los modos de $m = 0$. Por el contrario, para $i = 90^{\circ}$, sólo se ven los modos de $\ell + |m|$ par. Según esto, el espectro de oscilaciones solares obtenido desde Tierra no presenta modos con $\ell + |m|$ impar.

1.5 *Objetivo principal del trabajo*

La disposición pública de series temporales de datos observados cada vez más largas procedentes del experimento GOLF a bordo de la misión espacial SoHO (de ESA y NASA), nos permite realizar un estudio de la variación de los modos de oscilación globales del Sol. En este trabajo vamos a estudiar los cambios en los parámetros que definen los modos acústicos solares entre dos épocas: una, de 720 días (3 series consecutivas de 240 días promediadas) alrededor del año 2001 (cerca del máximo solar), y la otra, también de 720 días de duración, alrededor de 2008 (cerca del mínimo de actividad). El propósito es ver cómo influye el ciclo de actividad magnética del Sol en sus modos propios de oscilación (acústicos).

En este proceso estableceremos una metodología para el análisis de las observaciones y obtendremos también el valor promedio de dichos parámetros (frecuencia, amplitud y vida media) sobre los casi 21 años de observación del experimento GOLF (de 1996 a 2017).

2 Datos observacionales

We need to know the nature of the data we will analyze and to do this, first we will make some comments on the types of observable signals for solar p-modes. Our data come from an space-based observatory, specifically from GOLF instrument aboard SoHO (at ESA-NASA joint mission), which aims to study the modes that penetrate deeper into the solar interior. We will briefly explain the performance of the instrument, and then we will deepen into the characteristics of the data it provides. We will conclude this chapter with a description of the data analyzed in later chapters, both in the characterization of the power spectrum and in obtaining results in the maximum and minimum solar activity.

Necesitamos conocer la naturaleza de los datos que analizaremos y para ello, damos primero unas pinceladas sobre los tipos de señales observables para los modos p solares. Nuestros datos proceden de un observatorio espacial, en concreto del instrumento GOLF a bordo de SoHO (en la misión conjunta ESA-NASA), que tiene como objetivo el estudio de los modos que penetran con mayor profundidad en el interior solar. Explicaremos brevemente el funcionamiento físico del instrumento, y después profundizaremos en las características de los datos que proporciona. Finalizaremos este capítulo con una descripción de los datos analizados en capítulos posteriores, tanto en la caracterización del espectro de potencias como en la obtención de resultados en el máximo y en el mínimo de actividad solar.

2.1 Señales observables

Las señales que nos interesan en Heliosismología consisten en las deformaciones en la superficie solar debidas al efecto de los modos de oscilación. Las soluciones del análisis perturbativo de las ecuaciones en equilibrio de un Sol esféricamente simétrico son, como vimos en 1.2.2, las autofunciones del correspondiente problema de autovalores; y tienen la forma:

$$A(t) \cdot f_{nl}(r) \cdot P_\ell^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi} \cdot e^{i\omega t} \quad (17)$$

donde $A(t)$ es la amplitud. Aunque las frecuencias de las ondas son reales y por tanto proporcionan una solución puramente oscilatoria, los mecanismos de excitación y amortiguación (mayoritariamente provenientes de la convección turbulenta, *Goldreich & Keeley, 1977* [26]; *Goldreich & Kumar, 1988* [27]) provocan que, en primera aproximación, las oscilaciones induci-

das en la amplitud pueden aproximarse por un oscilador amortiguado como:

$$A(t) = \sum_{i=1}^P A_i \cdot e^{\frac{-(t-t_i)}{\tau_d}} \quad (18)$$

donde τ_d es el tiempo de vida del oscilador, t_i son los instantes donde se produce la excitación (variable estocástica), y A_i es la amplitud de cada excitación.

Los modos p son ondas acústicas que resuenan entre la superficie y un punto de retorno interno (como vimos en 1.3.1). En su viaje, estas ondas expanden y comprimen el plasma de tal forma que estos movimientos pueden observarse como una señal en velocidad, detectable en la superficie usando el efecto Doppler sobre líneas espectrales de emisión y/o como variaciones del diámetro solar. Por otro lado, la compresión del gas también puede detectarse a través de la radiación emitida al calentarse, aumentando su luminosidad y siendo detectado como fluctuaciones del brillo en el continuo y/o en una línea espectral.

Para un modo dado, tanto la señal en velocidad como en intensidad es muy débil: las amplitudes de la señal a la altura de la fotosfera, en velocidad son $< 15 \text{ cm/s}$ (incluso cerca del pico de señal próximo a 3 mHz), mientras que las fluctuaciones de brillo del continuo son $< 1 \times 10^{-6}$, que corresponden a una fluctuación en temperatura de unos 0.005 K (*Brown, 1996*) [28]. La variación relativa del radio solar asociada a estos valores es $\delta R_{\odot} \lesssim 10^{-4}$ segundos de arco (*Roca Cortés, 1997*) [2]. Estas señales tan pequeñas pueden detectarse, especialmente en fotometría de banda ancha y en espectrometría (velocidad radial), gracias al gran número de fotones que recibimos del Sol, que nos permiten hacer medidas con un nivel de ruido muy bajo.

2.2 Toma de datos de GOLF

La misión SoHO (Solar and Heliospheric Observatory) (*Domingo et al., 1994*) [29] fue lanzada en diciembre de 1995 (ESA/NASA), y mantiene su carga útil en una órbita cerca del punto de Lagrange L1, desde donde se mantiene apuntando al centro del disco solar. Sus numerosas extensiones le han permitido cubrir casi dos ciclos solares de 11 años (el ciclo 23 completo, desde 1996 hasta 2008; y ya una gran fracción del ciclo 24), de manera que actualmente se trata de la más longeva de las misiones dedicadas a la observación del Sol.

GOLF (*Gabriel et al., 1995*) [30], experimento que, entre otros, se encuentra a bordo de SoHO, fue diseñado para medir las oscilaciones globales a partir de la luz integrada sobre el disco solar, determinando la velocidad de la fotosfera en la línea de visión. El objetivo principal es concentrarse en el rango de frecuencias que va desde 10^{-7} a 10^{-2} Hz , donde se encuentran los modos p de menor frecuencia y los modos g predichos, ya que son las ondas que nos permiten el estudio de la estructura interna del Sol.

El principio técnico utilizado es la llamada espectrometría por *scattering* resonante, es decir la medida del desplazamiento Doppler de las frecuencias de las líneas del doblete de Fraunhofer Na D, por comparación con un estándar absoluto dado por una celda de vapor de sodio que se encuentra en el interior del instrumento. La línea de absorción solar atraviesa una celda de vapor de sodio de modo que es parcialmente absorbida y reemitida en todas direcciones. Parte de la señal se recoge mediante fotomultiplicadores. Poniendo la celda bajo acción de un campo magnético transversal, la línea de absorción sufre un desdoblamiento Zeeman en dos componentes situadas en las alas de las líneas solares Na D1 y D2. La proporción de las

intensidades de las dos alas es sensible a pequeños desplazamientos Doppler en la longitud de onda de la línea solar y se puede medir con gran precisión. Esta situación puede verse en la Figura 3.

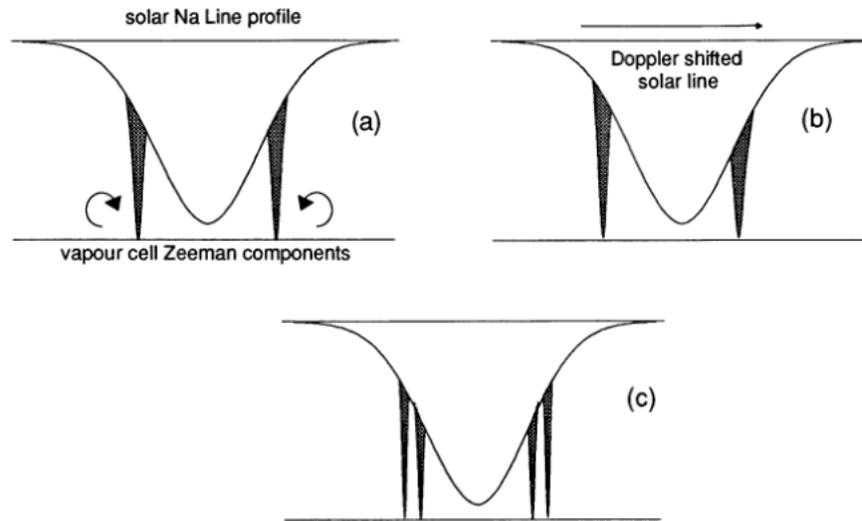


Figure 3: Relación entre el perfil de línea de absorción solar y las señales de *scattering* de la celda de vapor de Na. En (a), con velocidad relativa Sol-Observador nula, (b) en el caso de velocidad relativa no nula y (c) las medidas de la pendiente mediante la modulación del campo magnético del instrumento. Podemos encontrar esta imagen en *Gabriel et al. (1995)* [30].

Efectivamente, el experimento GOLF mide dos puntos en el perfil de línea solar, colocados simétricamente a ambos lados de la longitud de onda de reposo de SOHO. Si las intensidades I_r e I_l en las alas derecha e izquierda de la línea se miden por separado, entonces la velocidad instantánea del disco solar integrado en la línea de visión viene dada por (*Gabriel et al., 1995*) [30]:

$$v = v_a \frac{I_r - I_l}{I_r + I_l + 2s} \quad (19)$$

donde s es la luz dispersa de fondo que llega a los detectores, v_a es el factor de calibración del aparato (del orden de 5 km s^{-1}).

2.3 Datos empleados

En el *Capítulo 3* se trabaja con el espectro promedio de los espectros de 21 series de aproximadamente un año de duración (363.22 días), esta serie de datos comienza el 11 de abril de 1996 a las 00h 00m 10s y contiene 33,190,560 medidas tomadas con un intervalo de muestreo de $\Delta t = 20s$. Este promedio se encuentra en un fichero de datos que llamamos *unanyo_1.txt*, y proporciona una resolución en el espectro de $\Delta\nu = 31.9 \text{ nHz}$. Emplearemos estos datos para el desarrollo del método de análisis que aplicaremos en el *Capítulo 4*, así como para obtener una idea general del valor de los parámetros del ajuste a lorentzianas que propondremos con posterioridad, para relacionarlos con las magnitudes físicas de las que contienen información.

Sin embargo, el objetivo de este trabajo es el análisis de dos series de datos de la velocidad Doppler del disco solar integrado medidas por GOLF en una época de máximo de actividad solar

y en otra de mínimo, aspecto que trataremos en el *Capítulo 4*. En este caso se han utilizado las series alrededor de los extremos del ciclo de actividad solar. Las series son de 1,037,205 puntos que corresponden a 240.09375 días exactamente.

En la Figura 4 se muestra gráficamente el número de manchas solares promedio para cada mes desde el año 1750. El Sunspot Number (SN) se calcula sumando el número de manchas solares individuales y diez veces el número de grupos. Como la mayor parte de los grupos de manchas solares tienen, de media, sobre diez manchas, esta manera de contar manchas solares proporciona números de manchas solares incluso cuando las condiciones de observación no son las apropiadas y difícilmente pueden verse las manchas más pequeñas. Vemos en la Figura 4 que el número de manchas solares visibles en el Sol aumenta y disminuye con un ciclo aproximado de 11 años, el ciclo de actividad solar.

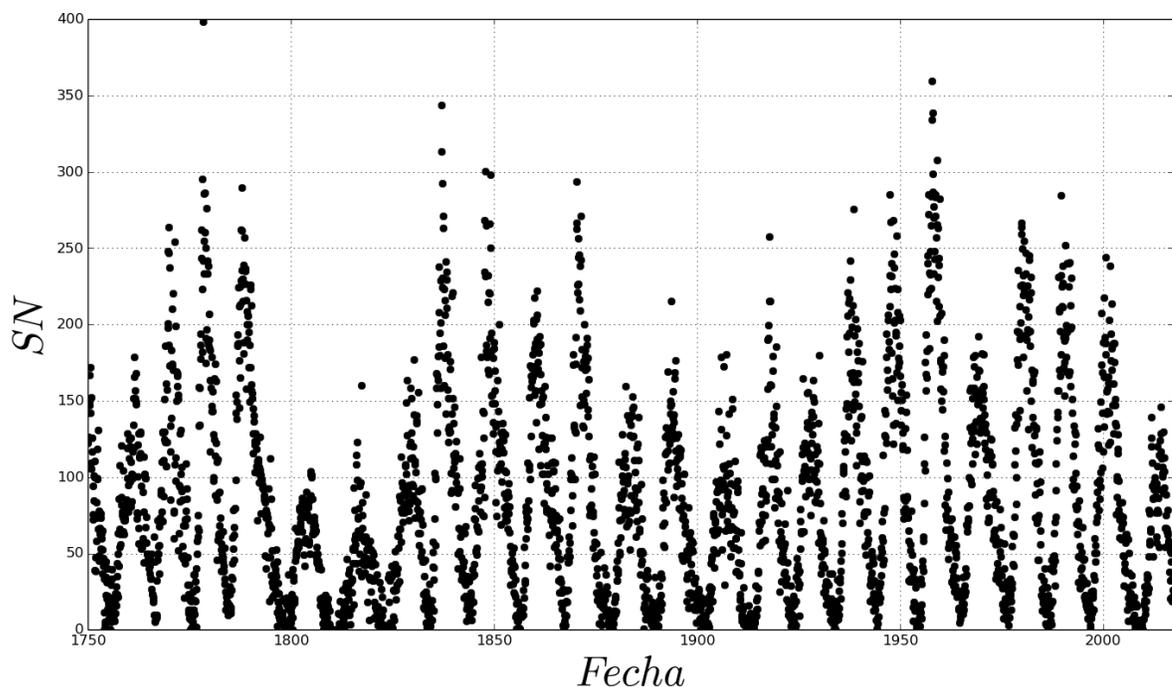


Figure 4: *Sunspot Number* promediado mes a mes en función del tiempo.

Para el máximo del ciclo 23 se han promediado 3 series consecutivas que comienzan en junio de 2001 y tienen un SN (*Sunspot Number*) medio de 175, y este promedio se encuentra en un fichero de datos que llamamos *p2_240d_aver_maxmax.txt*. Por otra parte, para el mínimo del ciclo 24 se ha utilizado un promedio de 3 series consecutivas que comienzan en octubre de 2008 y tienen un SN medio de 14, y que almacenamos en el fichero llamado *p2_240d_aver_minmin.txt*.

3 Metodología del análisis de las observaciones

We already have the theoretical basis and we know about the nature of the data we are dealing with, we are now focusing on the development of the method that we will use for the subsequent analysis. In the present chapter we will study the spectrum shape of the acoustic modes, using the Fast Fourier Transform (FFT). With a Python program we will make a fit to a model with lorentzian curves to our data sets. On the one hand, the multiplets of $\ell = 0$ and 2; and on the other hand, those of $\ell = 1$ and 3. This fit will provide us with values of the characteristic parameters of the modes such as central frequency, the splitting, the width of the different components of the multiplets, the maximum height and the background noise.

Ya tenemos las bases teóricas y conocemos la naturaleza de los datos que estamos tratando, nos centramos ahora en el desarrollo del método que utilizaremos para el posterior análisis. En este capítulo estudiaremos la forma del espectro de los modos acústicos, haciendo uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Con un programa de *Python* realizaremos un ajuste a un modelo con lorentzianas a nuestras series de datos. Por un lado, se ajustarán los multipletes de $\ell = 0$ y 2; y por el otro, los de $\ell = 1$ y 3. Este ajuste nos proporcionará unos valores de los parámetros característicos de los modos como la frecuencia central, el *splitting*, la anchura de las distintas componentes de los multipletes, la altura del máximo y el ruido de fondo.

3.1 El espectro de potencias de los modos acústicos

A la vista de las ecuaciones 17 y 18 podemos asumir que la mejor aproximación a la señal heliosísmica será la suma de un conjunto de osciladores amortiguados (con tiempos de amortiguación de días a meses, según su frecuencia) estocásticamente excitados. Así, el Sol actúa como un sistema lineal, por lo cual la función oscilatoria observada es el resultado de la convolución entre el oscilador amortiguado y la función excitadora.

El estudio de los modos acústicos solares se realiza en el dominio de frecuencias, puesto que estamos investigando fenómenos quasi-periódicos: las ondas estacionarias de presión solares. Para obtener el espectro de potencias asociado a la serie de datos de velocidad residual (ver sección 2.3) aplicaremos a la serie de datos la Transformada Rápida de Fourier (FFT) (*Roca Cortés et al., 1998b*) [31]; de esta manera, la convolución que se mencionaba anteriormente se

convierte en el producto de las transformadas de Fourier de las dos funciones mencionadas. Así, el espectro de potencias $P_{obs}(\nu)$ asociado a un único oscilador estocásticamente excitado:

$$P_{obs}(\nu) = L(\nu) \cdot E(\nu) \quad (20)$$

donde $L(\nu)$ es el espectro de la señal del oscilador amortiguado que contiene la información sobre el modo de oscilación, y da lugar a un espectro observado de forma muy picuda (una lorentziana); y $E(\nu)$ el espectro de la función de excitación (variable estocástica).

En la Figura 5 se muestra la forma del espectro de potencias de los modos acústicos observado, donde se pueden apreciar muchos modos de oscilación cuya frecuencia de resonancia presenta valores discretos. Se puede ver también la magnitud del ruido de fondo, significativo a bajas frecuencias.

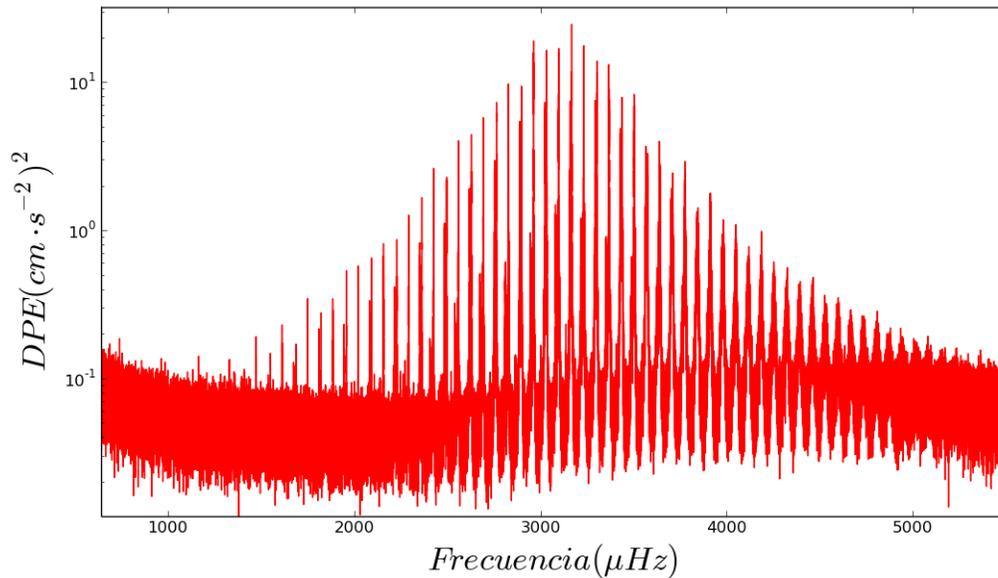


Figure 5: Espectro de potencias de los modos acústicos solares obtenida a partir de una serie de datos de 21 años promediados procedente de GOLF.

Algunas de las características de este espectro de potencias son:

- Presenta un máximo en la potencia en torno a $3000 \mu Hz$, lo que se corresponde con la oscilación de 5 minutos ya mencionada en la sección 1.1.
- Los picos del espectro se sitúan en las frecuencias de los distintos armónicos de los modos normales de oscilación.
- Las líneas resueltas se encuentran aproximadamente equidistantes en frecuencia.
- En cada pico se puede apreciar más estructura fina (ver Figura 6): el desdoblamiento de las líneas resultado de la ruptura de la simetría debida a la rotación solar (ver sección 1.2.2).

- Además, como consecuencia de que el ángulo de inclinación del eje de rotación con respecto al eje de visión sea de aproximadamente 90° , solo se ven los modos de $\ell + |m|$ par (véase sección 1.4.4). Así, el multiplete de $\ell = 0$ presenta un sólo pico (de $m = 0$), el de $\ell = 1$ dos picos ($m = -1, 1$), el de $\ell = 2$ tres picos ($m = -2, 0, 2$), y el multiplete de $\ell = 3$ cuatro picos ($m = -3, -1, 1, 3$).
- Como se aprecia en la Figura 6, los modos con $\ell = 0$ y 2 y con $\ell = 1$ y 3 aparecen muy cercanos en el espectro tal y como predice la teoría asintótica (véase 1.4.1).

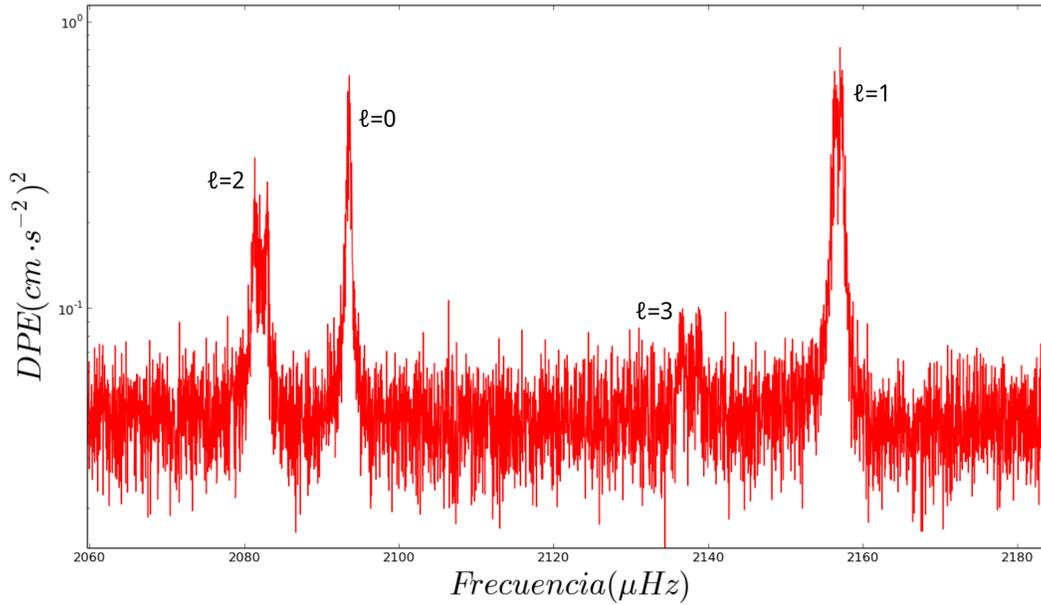


Figure 6: Intervalo de frecuencias del espectro de potencias en el que se pueden observar, de izquierda a derecha, los multipletes $(n, \ell) = (13, 2), (14, 0), (13, 3)$ y $(14, 1)$.

Como ya se ha mencionado con anterioridad (ver sección 2.1), el modelo que utilizamos para describir las oscilaciones solares es el oscilador amortiguado excitado estocásticamente. Podemos describirlo matemáticamente a través de la ecuación (*Anderson, Duval & Jefferies 1990*) [33]:

$$f(\nu_{n\ell}) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + g(\nu_{n\ell}, Q) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (21)$$

donde $y(t)$ es el desplazamiento, $\nu_{n\ell}$ es la frecuencia de resonancia del modo, Q es un factor que da cuenta del amortiguamiento y $x(t)$ es la función de excitación aleatoria. Resolviendo la ecuación y llevando dicha solución al dominio transformado (concretamente en potencia) llegamos a la relación de la ecuación 20. El módulo al cuadrado del desplazamiento en el dominio de las frecuencias dará forma al espectro de potencias con el que trabajaremos.

El espectro de potencias de la función estocástica $E(\nu)$ no tiene relación con el tiempo total de observación T , y por ello tampoco con la resolución en frecuencia, que va como $\frac{1}{T}$. De ahí que el comportamiento caótico propio del espectro de potencias no disminuya por mucho que se aumente el periodo de observación. Otra consecuencia muy importante de esto es que la forma

de los modos y la información física contenida en el espectro de potencias estará determinada por $L(\nu)$, tal y como se adelantaba con anterioridad.

3.1.1 Análisis de Fourier de series temporales

Pasando la información al espacio de Fourier, en el dominio de las frecuencias, obtendremos las características de los modos de oscilación presentes en la serie de datos analizada. La transformada de Fourier de una función en el dominio temporal $f(t)$ se define (*Brigham, 1988*) [32]:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (22)$$

En la práctica, $f(t)$ sólo se conoce en la forma de series temporales discretas y limitadas en el tiempo, por lo que resulta útil introducir la transformada discreta de Fourier:

$$F_N(\omega) = \sum_{k=1}^{k=N} f(t_k)e^{i\omega t_k} \quad (23)$$

donde $t_k = k \cdot \Delta t$ es el intervalo de muestreo y N el número de puntos de la serie.

Por otro lado, el espectro de potencias viene dado por:

$$P_N(\omega) = \frac{1}{2n\Delta t} F_N(\omega)F_N^*(\omega) \quad (24)$$

donde la notación $*$ hace referencia al complejo conjugado.

3.1.2 Densidad de probabilidad

Una de las propiedades más importantes del espectro de potencias de las oscilaciones solares es que su densidad de probabilidad asociada no es gaussiana, sino que sigue una distribución exponencial, concretamente, una distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad (*Woodard, 1984* [19]; *Anderson et al., 1990* [33]) de la forma:

$$\chi_{(2)}^2(s) = ke^{-s/2} \quad (25)$$

donde s es la potencia a una determinada frecuencia y k una constante.

Esta distribución de probabilidad es tal que la desviación estándar es igual al valor esperado; consecuentemente, para un valor de la potencia estimado, el error será tan grande como el propio valor de la potencia. Esto es especialmente importante cerca de las frecuencias de resonancia, donde la potencia alcanza valores muy grandes. Además, el ala de la distribución chi-cuadrado se extiende más que la de una distribución normal, por lo que sus efectos se hacen patentes a frecuencias alejadas de las de resonancia, pudiendo dar lugar a identificaciones erróneas de modos. Este tipo de ruido hace que los picos en el espectro de potencias observado presenten ese aspecto tan abrupto.

Sin embargo, cuando se promedian diferentes espectros, la densidad de probabilidad del espectro sí tiende a una gaussiana. Concretamente, el promedio de n muestras está gobernado por una distribución chi-cuadrado con $2n$ grados de libertad $\chi_{(2n)}^2$, dando lugar a que la densidad de probabilidad resultante se aproxime mucho a una gaussiana.

3.2 Ajuste a lorentzianas

Se espera que, con un número suficiente de realizaciones, la $E(\nu)$ sea una función suave de la frecuencia, por lo que la forma de los modos vendrá determinada casi enteramente por $L(\nu)$. Se encuentra que (Anderson, Duval & Jefferies 1990) [33], cerca de las frecuencias de resonancia, $L(\nu)$ se asemeja a una lorentziana. Con lo que un modo dado (n, ℓ) puede modelarse a través de la expresión:

$$M_{n\ell}(\nu) = L_{n\ell}(\nu) = \frac{\Gamma_{n\ell}}{2\pi} \frac{a_{n\ell}}{(\nu - \nu_{n\ell})^2 + \frac{\Gamma_{n\ell}^2}{4}} \quad (26)$$

donde $\frac{2\pi a_{n\ell}}{\Gamma_{n\ell}}$ es la altura del modo, $\Gamma_{n\ell}$ es la anchura a altura mitad de la lorentziana y $\nu_{n\ell}$ es la frecuencia de resonancia.

Como ya vimos en la sección 1.2.2, la pérdida de simetría radial debida a la rotación tiene como efecto el desdoblamiento del modo en varias componentes (que se etiquetan con el orden azimutal m). Así, tal y como vimos en la sección 1.4.2, se modela el multiplete del modo de oscilación centrado en la frecuencia $\nu_{n\ell m}$, de manera que la forma del espectro de su densidad de potencia media puede escribirse como:

$$P_{n\ell}(\nu) = \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{a_{n\ell m}(\Gamma_{n\ell m}/2)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{n\ell m}/2)^2} + B_{n\ell} \quad (27)$$

donde $\nu_{n\ell m}$ son las frecuencias centrales de resonancia de cada multiplete, $\Gamma_{n\ell m}$ las anchuras, $a_{n\ell m}$ la amplitud de la potencia y $B_{n\ell}$ el ruido de fondo. Ajustando el espectro a este modelo podemos obtener información sobre estos parámetros.

Hay que recalcar que, en realidad, el espectro de potencias observado (ver Figura 5) es:

$$P_{obs}(\nu) = \sum_{n,\ell} P_{n\ell}(\nu) \cdot E_{n\ell}(\nu) + B(\nu) \quad (28)$$

En los siguientes apartados se realizará un ajuste a este modelo para describir los picos identificados como modos acústicos. A la vista de la Figura 6, se realizará el ajuste de los multipletes en parejas ($\ell = 0$ y 2, y $\ell = 1$ y 3 por otra parte). Para realizar esta caracterización del espectro nos interesará utilizar propiedades de los parámetros de cada multiplete:

1. *Las alturas*: en las componentes con el mismo valor de $|m|$ las alturas de los picos serán las mismas.
2. *El splitting o desdoblamiento rotacional*: todas las componentes de un modo con el mismo grado se separan de la componente central de forma equidistante una misma cantidad que llamamos *splitting*, salvo la del $\ell = 0$ (ver sección 1.4.2).
3. *La anchura*: es habitual considerar que las anchuras de las componentes de un mismo multiplete son iguales, ya que tienen frecuencias muy parecidas. En general, la anchura dependerá de los mecanismos de amortiguamiento, de tal modo que esperamos que cambie muy suavemente con la frecuencia.
4. *El ruido de fondo*: además del ruido debido al tipo de distribución exponencial, existe un ruido de fondo aditivo que tiene su origen, fundamentalmente, en las variaciones de pequeña escala espacial en la superficie solar (granulación, supergranulación, etc). En nuestros ajustes elegiremos un nivel de ruido alrededor de la frecuencia del modo.

3.2.1 Multipletes $\ell = 0$ y $\ell = 2$

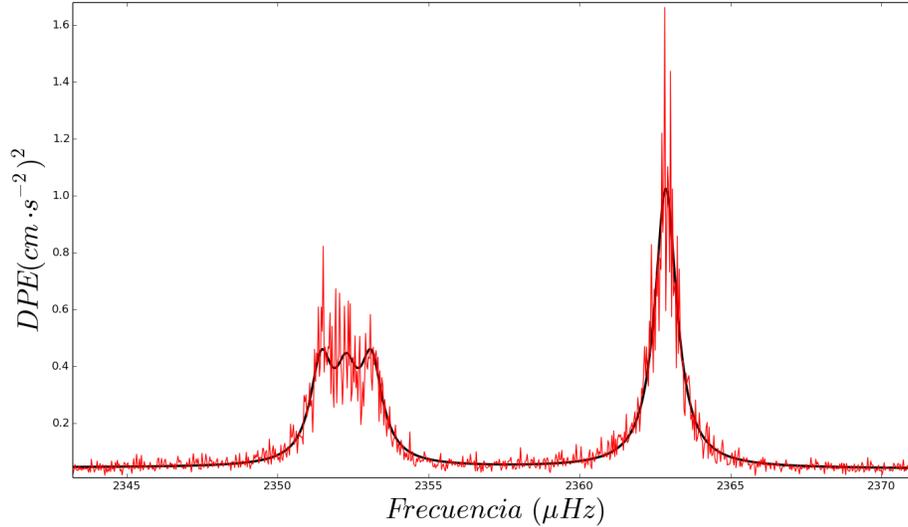


Figure 7: Ajuste a lorentzianas de los multipletes ($n = 15, \ell = 2$) y ($n = 16, \ell = 0$)

Ajustaremos los cuatro picos de estos dos multipletes juntos por tener frecuencias centrales muy próximas. Su separación es del orden de la anchura de los modos:

$$M(\nu) = l_1(\nu) + l_2(\nu) + l_3(\nu) + l_4(\nu) + B(\nu) \quad (29)$$

Siendo l_i lorentzianas de la forma:

$$l_i = \frac{a_i}{c_i + (\nu - b_i)^2} \quad (30)$$

y $B(\nu) = p \cdot \nu + q$ una recta referente al ruido de fondo,

$$M(\nu) = \frac{a_1}{c_1 + (\nu - b_1)^2} + \frac{a_2}{c_2 + (\nu - b_2)^2} + \frac{a_3}{c_3 + (\nu - b_3)^2} + \frac{a_4}{c_4 + (\nu - b_4)^2} + (p \cdot \nu + q) \quad (31)$$

donde los tres primeros sumandos se refieren al mutiplete $\ell=2$ y el último al multiplete $\ell=0$.

Para reducir el número de parámetros a ajustar en este modelo, utilizaremos las consideraciones mencionadas anteriormente e impondremos las siguientes restricciones entre ellos:

1. Las dos alturas no centrales del multiplete de $\ell=2$ iguales ($a_1 = a_3 = \alpha$). Considerar perfiles simétricos para ajustar el espectro de potencia no introduce ningún efecto sistemático en las frecuencias obtenidas (*C. Régulo y T. Roca, 2001*) [4].
2. Por ese motivo, además, las frecuencias de las componentes no centrales del multiplete de $\ell=2$ deben estar separadas una misma cantidad (s_2) de la frecuencia central b_2 ($b_1 = b_2 - s_2$ y $b_3 = b_2 + s_2$). A esta cantidad s_2 la llamaremos desdoblamiento rotacional o *splitting*.
3. Los cuatro picos deben tener la misma anchura ($c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$). El mecanismo de excitación y amortiguamiento es la convección turbulenta y depende de forma suave con la frecuencia, lo que justifica esta restricción.

3.2 Ajuste a lorentzianas

4. El espectro continuo o de base $B(\nu)$ es de variaciones muy lentas y lo ajustaremos como una recta en el intervalo de cada pareja de multipletes.

Hemos pasado de tener 14 parámetros a ajustar a tener solo 9 ($\alpha, c, b_2, s, a_2, a_4, b_4, p, q$). Llamamos $a_4 = a_0$ y $b_4 = b_0$:

$$M(\nu) = \frac{\alpha}{c + (\nu - (b_2 - s_2))^2} + \frac{a_2}{c + (\nu - b_2)^2} + \frac{\alpha}{c + (\nu - (b_2 + s_2))^2} + \frac{a_0}{c + (\nu - b_0)^2} + (p \cdot \nu + q) \quad (32)$$

Para determinar la bondad del ajuste, el parámetro χ^2 resulta de gran utilidad, y viene definido por:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (d_i - M(\nu_i))^2}{N - m} \quad (33)$$

donde d_i son los datos observados, $M(\nu_i)$ los valores del modelo y $(N - m)$ el número de grados de libertad (m el número total de parámetros a ajustar y N el número total de puntos a ajustar). Que χ^2 disminuya significa que el ajuste se optimiza.

3.2.2 Multipletes $\ell=1$ y $\ell=3$

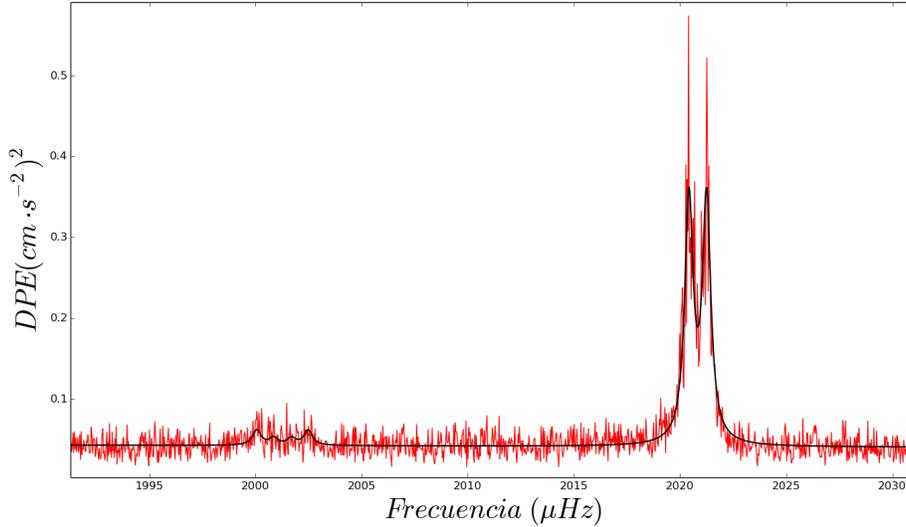


Figure 8: Ajuste a lorentzianas de los multipletes ($n = 12, \ell = 3$) y ($n = 13, \ell = 1$)

De forma análoga a lo descrito en el apartado anterior, ajustaremos los seis picos de estos dos multipletes como sigue:

$$M(\nu) = l_1(\nu) + l_2(\nu) + l_3(\nu) + l_4(\nu) + l_5(\nu) + l_6(\nu) + B(\nu) \quad (34)$$

donde los cuatro primeros sumandos hacen referencia al multiplete $\ell=3$, y los demás al $\ell=1$.

Considerando restricciones similares al caso anterior, podemos escribir:

3.3 Método de ajuste

1. $a_1 = a_4 = \alpha$, $a_2 = a_3 = a$, $a_5 = a_6 = a_1$.
2. b_2 y b_3 están separadas una misma distancia (s_3) de la frecuencia central del multiplete (que llamaremos b); y b_1 y b_4 otra distancia mayor que inicialmente supondremos diferente de s_3 (la llamaremos s_4). De este modo: $b_2 = b - s_3$, $b_3 = b + s_3$, $b_1 = b - s_4$, $b_4 = b + s_4$. Parte del análisis que realizaremos consistirá en encontrar la relación entre s_3 y s_4 para comprobar que, como se predice en teoría, en realidad son proporcionales. Análogamente, b_5 y b_6 están separadas una misma distancia (s_1) de la frecuencia central del multiplete de $\ell=1$ (que llamaremos b_1), obteniendo: $b_5 = b_1 - s_1$, $b_6 = b_1 + s_1$.
3. Todas las anchuras son iguales (c).
4. $B(\nu)$ será ajustado como una recta en el intervalo de cada pareja de multipletes.

Llegamos a un problema simplificado donde la función a ajustar es:

$$M(\nu) = \frac{\alpha}{c + (\nu - (b - s_4))^2} + \frac{a}{c + (\nu - (b - s_3))^2} + \frac{a}{c + (\nu - (b + s_3))^2} + \frac{\alpha}{c + (\nu - (b + s_4))^2} + \frac{a_1}{c + (\nu - (b_1 - s_1))^2} + \frac{a_1}{c + (\nu - (b_1 + s_1))^2} + (p \cdot \nu + q) \quad (35)$$

Obsérvese que de 20 parámetros a ajustar hemos pasado a sólo 11.

3.3 Método de ajuste

El ajuste se ha llevado a cabo empleando un programa en *Python* que utiliza la función `curve_fit` del paquete *Numpy* [34]. Esta función se usa para ajustar el espectro de potencias a una función f previamente definida, que tendrá la forma de una lorentziana (como se ha descrito en secciones anteriores), mediante mínimos cuadrados no lineales y partiendo de un conjunto de valores iniciales asignados a cada parámetro.

3.4 Resultados del ajuste

Ajustaremos $M(\nu)$ el promedio de datos de GOLF de 21 años para obtener una caracterización del espectro de potencias que formará parte de la metodología de nuestro análisis del siguiente capítulo. Los parámetros resultantes de la optimización serán suficientes para caracterizar el espectro de potencias en el rango de, aproximadamente, $1350 - 3600 \mu Hz$. Por ello el análisis se realizará para modos desde $n = 9$ hasta $n = 25$.

Los errores en la determinación de cada parámetro son los errores estadísticos que se calculan a partir de los que ofrece el programa utilizado para realizar el ajuste usando apropiadamente la matriz de covarianzas que devuelve la función `curve_fit`. Teniendo en cuenta la ecuación 26 podremos extraer el significado físico de cada parámetro, obteniendo con ello una caracterización de los modos globales de oscilación observados.

3.4.1 Frecuencias centrales

Debido a la quasi-periodicidad espacio-temporal de las señales observadas, resulta de interés cotejar las frecuencias centrales de resonancia del espectro dentro de un mismo intervalo periódico que las abarque. Tomaremos este intervalo a partir de $\nu = 1360\mu Hz$, y su longitud será de $\Delta\nu = 135\mu Hz$, obteniendo con ello el siguiente diagrama escalera:

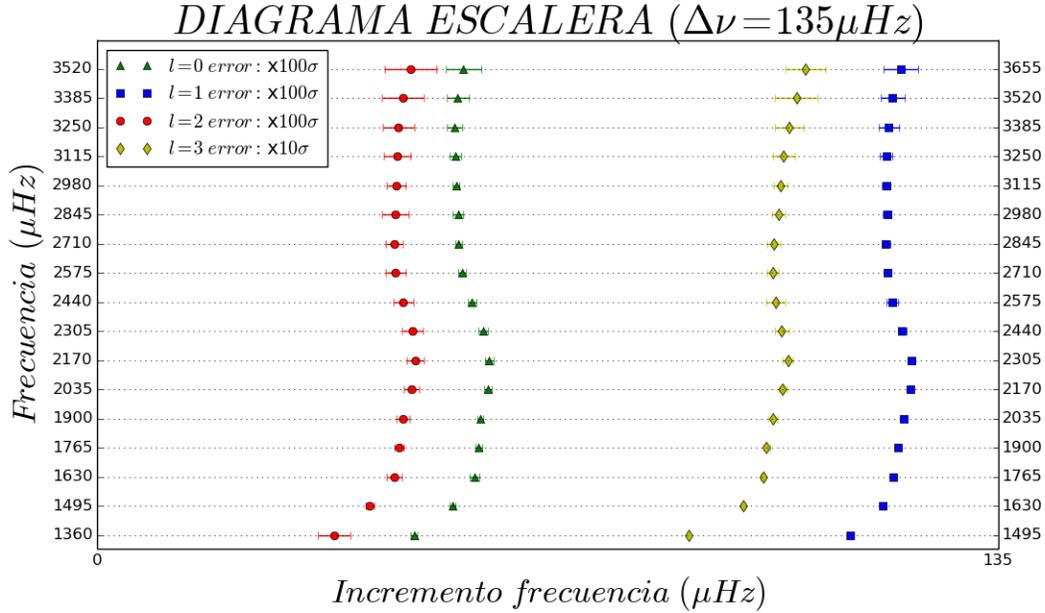


Figure 9: Representación gráfica de la posición de las frecuencias centrales de los multipletes en un diagrama 'Echelle' o diagrama escalera. Se comprueba la ley asintótica.

En la Figura 9 se observa la gran regularidad las frecuencias centrales de los modos del mismo grado ℓ tal y como predice la teoría asintótica (ver sección 1.4.1), en la que obtendríamos un valor de $\nu_0 = 135\mu Hz$.

Se observa además una mayor desviación estándar del incremento de frecuencia a valores más altos de la frecuencia de resonancia. Vemos, por tanto, que el desplazamiento de la frecuencia central se produce mayoritariamente a altas frecuencias, mientras que a bajas frecuencias los picos del espectro se mantienen prácticamente inalterados. Veremos en el *Capítulo 4*, mediante la comparación de las frecuencias de resonancia en el máximo y en el mínimo, si este desplazamiento está relacionado con la actividad magnética del Sol.

3.4.2 Desdoblamiento rotacional o *splitting*

En primer lugar comprobaremos que los parámetros extraídos del ajuste cumplen la relación 11. Para ello, estudiamos el factor de proporcionalidad existente entre los desdoblamientos de ambos picos en los multipletes $\ell = 3$ en función de la frecuencia:

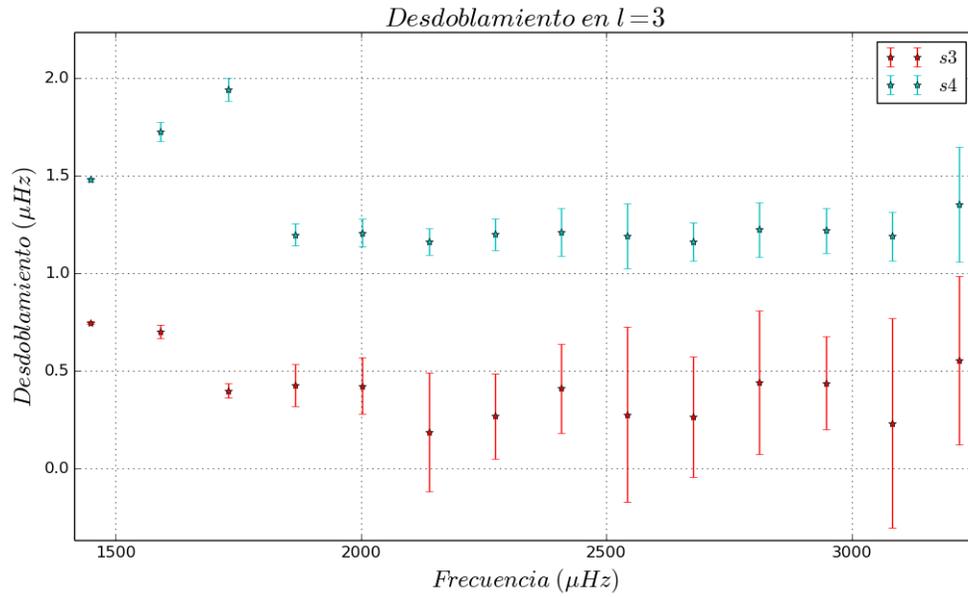


Figure 10: Desdoblamientos s_3 y s_4 del ajuste de los multipletes con $\ell = 3$. Se presentan los valores de los 13 primeros multipletes, ya que los 3 últimos tienen errores muy grandes.

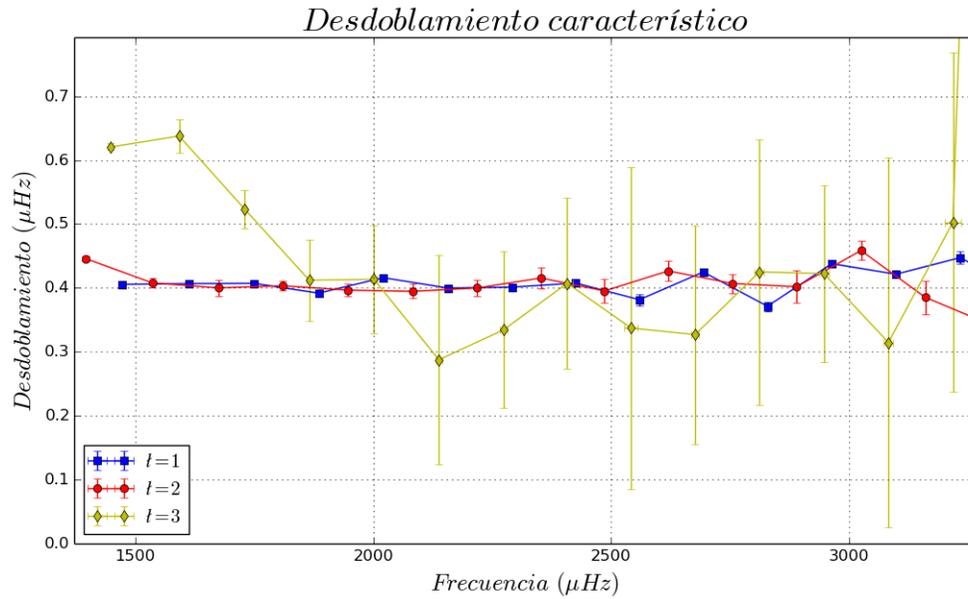


Figure 11: Desdoblamiento de los multipletes ajustados. Por el mismo motivo que antes, se muestran únicamente los valores de los 13 primeros multipletes (desde $n = 9$ hasta $n = 21$)

En la Figura 10 observamos que, realizando la comparación entre los primeros 13 multipletes, $s_4 \simeq 3.278 \cdot s_3$, resultado que concuerda con lo esperado (ecuación 11).

Del *splitting* obtenido para cada multiplete desdoblado tenemos que: para $\ell = 1$ será $s_\ell = s_1$; para $\ell = 2$ tendremos $s_\ell = \frac{s_2}{2}$; y para $\ell = 3$, $s_\ell = s_3 = \frac{s_4}{3}$. En este último caso efectuaremos

3.4 Resultados del ajuste

una media del valor obtenido a partir de los dos parámetros del ajuste (tanto s_3 como s_4), obteniendo con ello el resultado mostrado en la Figura 11.

Se observa que el *splitting* de cada multiplete es muy similar e independiente de n dentro de los errores, y que además los *splittings* de los diferentes multipletes pueden considerarse también muy similares sin que esta aproximación introduzca ningún efecto sistemático en el ajuste a lorentzianas del espectro. El valor medio obtenido para modos con $\ell = 1, 2$ y 3 es de $0.41247 \pm 0.04706 \mu Hz$ y si sólo se usan los mejor medidos ($\ell = 1$ y 2) obtenemos $0.41384 \pm 0.00976 \mu Hz$.

Cabe especificar que los valores que se muestran para el *splitting* en este cálculo se corresponden con el *splitting* sinódico, a los valores ajustados habrá que añadirles $\sim 31.7 n Hz$ para eliminar la contribución debida al movimiento anual de traslación del satélite con respecto del Sol (obteniendo así los valores del *splitting* sidéreo).

3.4.3 Anchura

De las expresiones 26 y 30 obtenemos que, si c es el parámetro relacionado con la anchura del ajuste y Γ es la anchura a media altura, podemos establecer la igualdad $\Gamma = \sqrt{4c}$.

Resulta más gráfico visualizar las anchuras de los picos en función de la frecuencia en escala logarítmica, por ello representaremos en el eje de ordenadas $\log_{10}(\Gamma)$, y mediante teoría de propagación de errores calculamos el error obteniendo $\Delta(\log_{10}\Gamma) = \frac{\Delta c}{2 \cdot \ln 10 \cdot c}$.

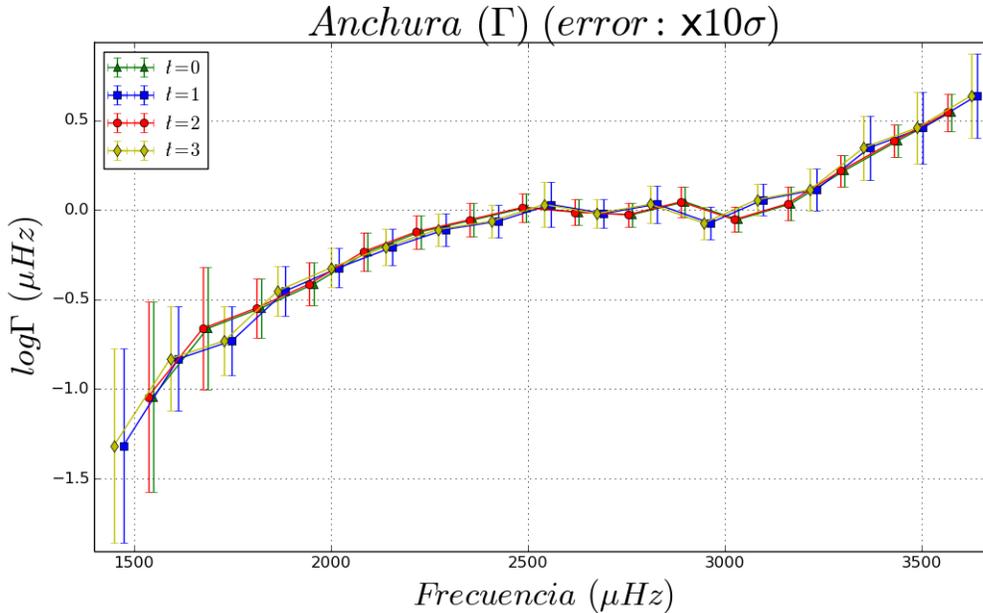


Figure 12: Anchura a media altura (Γ) de los multipletes en escala logarítmica en función de sus frecuencias de resonancia.

Puede verse en la Figura 12 que en un rango de frecuencias intermedias (entre 2500 – 3000 μHz) las anchuras a media altura Γ de los multipletes tienden a estabilizarse en torno a 1 μHz , mientras que a altas frecuencias la anchura de cada multiplete aumenta con su frecuencia central (aumenta con n) y a bajas frecuencias disminuye con n . Además, los parámetros c del

ajuste contienen un mayor error allí donde los multipletes muestran una menor S/N (a altas y bajas frecuencias dentro de nuestro rango de estudio).

3.4.4 Amplitud

La amplitud de la señal (A) medida se relaciona con el parámetro a de la ecuación 26, que representa la altura de la lorentziana de ajuste, mediante $a = \frac{\Gamma}{2\pi} A^2$, con lo que $A = \left(\frac{\pi \cdot a}{\sqrt{c}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Y, por propagación de errores, hallamos $\Delta A = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c} \cdot \sqrt{a}} \Delta a - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi \cdot a}}{c \sqrt{c}} \Delta c$, obteniendo los valores de amplitud para los diferentes multipletes mostrados en la Figura 13.

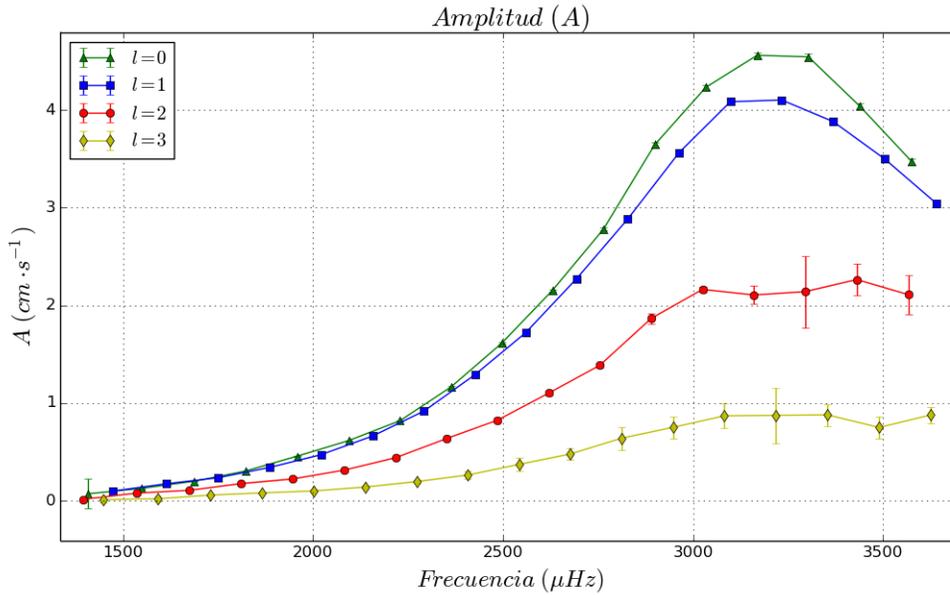


Figure 13: Amplitud de los multipletes en función de la frecuencia.

Comprobamos que, tal y como se esperaba por la forma del espectro de potencias, la amplitud presenta su máximo en torno a los 3.1 mHz , que se corresponde con las oscilaciones de periodo ~ 5 minutos observadas en la superficie del Sol.

El error en cada pico del ajuste aumenta a medida que la amplitud disminuye, por lo que es mayor para valores de ℓ más altos, donde disminuye la S/N debido a la menor amplitud de la señal.

4 Análisis de los datos de GOLF en el máximo y en el mínimo

In the previous chapter we discussed the method developed in this work to obtain the spectra, as well as the fitting used for the acquisition of the characteristic parameters of the modes and its relation with some physical magnitudes that will interest us. Using these techniques, we will compare the global oscillations spectrum of the Sun in a maximum and in a minimum solar activity period, in order to try to find if the p -mode parameters vary with the solar activity cycle.

En el capítulo anterior se habló del método desarrollado en el trabajo para la obtención de los espectros, así como del ajuste empleado para la adquisición de los parámetros característicos de los modos y su relación con magnitudes físicas que nos serán de interés. Mediante estas técnicas, compararemos el espectro de oscilaciones globales del Sol en un máximo y un mínimo de actividad solar para tratar de comprobar si los parámetros de los modos p varían con el ciclo de actividad solar.

4.1 Discusión de los resultados

Hemos ajustado la región del espectro de los modos acústicos comprendida entre $\sim 1350 \mu Hz$ y $\sim 3600 \mu Hz$. Los modos con $n=23, 24$ y 25 sólo se han tenido en cuenta para encontrar la frecuencia de resonancia. En el caso de los demás parámetros (determinación de la anchura, amplitud y *splitting*) no se han tenido en cuenta porque los ajustes son muy dependientes de los valores iniciales y son inestables a estas frecuencias: la anchura de los modos aumenta mucho con el orden radial n (con ν , ver Figura 12) y no se distinguen bien las componentes del multiplete.

4.1.1 Nivel de ruido

En primer lugar, nos fijamos en los valores del ruido aditivo para cada ajuste. Como el método que hemos desarrollado para el análisis de los datos consiste en realizar un ajuste de lorentzianas a los multipletes del espectro de potencias por parejas ($\ell = 0, 2$ por una parte, y $\ell = 1, 3$ por otra), presentaremos las diferencias relativas del nivel de ruido (que en el ajuste se aproxima por una recta) entre cada una de estas parejas de multipletes en el máximo y en el mínimo de actividad solar. Tendremos una idea de cómo serán las diferencias relativas del nivel del ruido $B = p \cdot \nu + q$ cualitativamente calculando comparando el valor de q en cada ajuste

del ruido de los multipletes, ya que los valores obtenidos para la pendiente de la recta p son visiblemente muy similares en todos los ajustes. Así, las diferencias relativas que calcularemos vienen dadas por $2 \cdot (q_{m\acute{a}x} - q_{m\acute{i}n}) / (q_{m\acute{a}x} + q_{m\acute{i}n})$, y se han representado en la Figura 14.

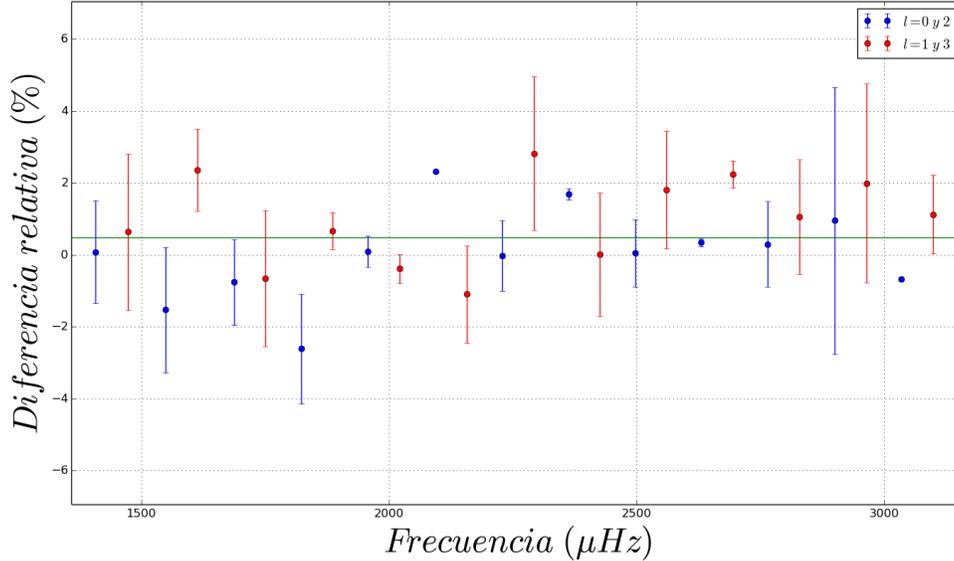


Figure 14: Diferencias relativas (en %) entre los valores de q de los niveles de ruido de fondo obtenidos de los modos p ($n=9, \dots, 22$) en el máximo y en el mínimo de actividad solar. Se representa con una recta horizontal verde el valor medio.

	$\ell = 0 y 2$	$\ell = 1 y 3$
Diferencia relativa (%)	0.18 ± 1.04	1.32 ± 1.46

Table 1: Medias pesadas (ver texto) para cada par de multipletes y para todos los valores de ℓ de los resultados mostrados en la Figura 14.

Vemos que el nivel de ruido del espectro de potencias durante el máximo y el mínimo de actividad solar es el mismo, en promedio, dentro de los errores. Hemos calculado la media ponderada o pesada con los errores de cada dato, esto es (Vázquez, 2001) [3]:

$$\frac{\sum_i x_i / \sigma_i^2}{\sum_i 1 / \sigma_i^2} \quad (36)$$

donde σ_i es el error asociado a x_i . La media pesada obtenida para la diferencia relativa entre los niveles de ruido en el máximo y el mínimo es $0.75 \pm 1.25\%$, que resulta consistente con el resultado encontrado por Komm, Howe & Hill (2000a) [46], quienes concluyen que no hay cambio en la amplitud del ruido con el ciclo de actividad solar (el ciclo 23).

4.1.2 La frecuencia de resonancia

Las frecuencias encontradas y los desplazamientos entre el máximo y el mínimo ($\Delta\nu = \nu_{m\acute{a}x} - \nu_{m\acute{i}n}$) asociados a cada modo ajustado se presentan en la Tabla 2.

n	$\ell = 0$	$\pm\sigma$	$\Delta\nu$	$\ell = 1$	$\pm\sigma$	$\Delta\nu$	$\ell = 2$	$\pm\sigma$	$\Delta\nu$	$\ell = 3$	$\pm\sigma$	$\Delta\nu$
8	—	—	—	—	—	—	1395.609	0.007	-0.080	1448.812	0.002	-0.285
9	1407.553	0.007	-0.092	1472.807	0.001	0.098	1535.859	0.004	0.004	1591.899	0.016	0.060
10	1548.316	0.015	0.002	1612.745	0.002	-0.005	1674.588	0.008	0.182	1729.856	0.037	0.104
11	1686.591	0.004	0.004	1749.336	0.010	-0.059	1810.142	0.011	0.194	1864.949	0.016	0.059
12	1822.089	0.010	0.064	1885.086	0.007	0.003	1945.813	0.002	-0.083	2001.060	0.047	0.111
13	1957.415	0.001	0.092	2020.818	0.001	0.022	2081.990	0.018	0.151	2137.472	0.028	0.070
14	2093.516	0.007	0.043	2156.801	0.004	-0.041	2217.410	0.025	0.274	2273.077	0.006	0.382
15	2228.792	0.007	0.016	2292.014	0.005	-0.039	2352.295	0.013	-0.045	2407.554	0.115	0.287
16	2362.813	0.013	0.021	2425.581	0.004	0.069	2485.721	0.024	0.216	2541.560	0.006	0.296
17	2496.126	0.007	0.005	2559.093	0.001	0.282	2619.825	0.017	0.127	2675.970	0.109	0.482
18	2629.550	0.004	0.178	2693.390	0.004	0.218	2754.492	0.004	0.293	2811.008	0.160	0.428
19	2764.221	0.005	0.026	2828.208	0.005	0.198	2889.519	0.009	0.082	2946.916	0.009	0.528
20	2898.979	0.003	0.491	2963.324	0.008	0.302	3024.744	0.006	0.106	3080.320	0.087	0.752
21	3033.828	0.005	0.083	3098.164	0.003	0.478	3159.423	0.017	0.752	3217.626	0.136	0.641
22	3168.598	0.007	0.371	3232.911	0.002	0.699	3294.987	0.008	0.360	3353.724	0.200	0.594
23	3303.552	0.016	0.387	3368.365	0.100	0.672	3430.838	0.014	0.236	3490.224	0.191	0.197
24	3439.035	0.002	0.133	3503.943	0.160	0.290	3566.304	0.006	0.979	3626.338	0.340	0.839
25	3574.711	0.030	0.511	3640.308	0.270	0.944	—	—	—	—	—	—

Table 2: Frecuencias (en μHz) de los modos p identificados durante el mínimo de actividad solar y sus errores, y los incrementos que hay que sumarles para obtener las frecuencias ajustadas en el máximo.

Observamos que, en general, la frecuencia de cada modo durante el máximo es mayor que en el mínimo, resultado que concuerda con trabajos que ya se han citado anteriormente como *Woodard & Noyes (1984)* [19], *Fossat et al. (1987)* [20], *Anquera Gubau et al. (1992)* [23] o *Vázquez (2001)* [3] entre otros.

Estos desplazamientos en las frecuencias entre el máximo y el mínimo de actividad solar asociados a cada modo se representan gráficamente en la Figura 15. Además se observa una clara dependencia con la frecuencia de los desplazamientos entre el máximo y el mínimo ($\Delta\nu$), que aumentan con la frecuencia. El comportamiento de $\Delta\nu$ concuerda con las predicciones de *Goldreich et al. (1991)* [47], esto es, un aumento rápido de $\Delta\nu$ con ν a bajas frecuencias seguido de una abrupta oscilación a frecuencias mayores ($\sim 4 mHz$). Esta oscilación fue encontrada en *Anquera Gubau et al. (1992)* [23] en torno a $\sim 3.7 mHz$; y en la Figura 15 podemos observar con suficiente claridad esta oscilación a $\sim 3.5 mHz$, resultado que concuerda con el encontrado en *Vázquez (2001)* [3].

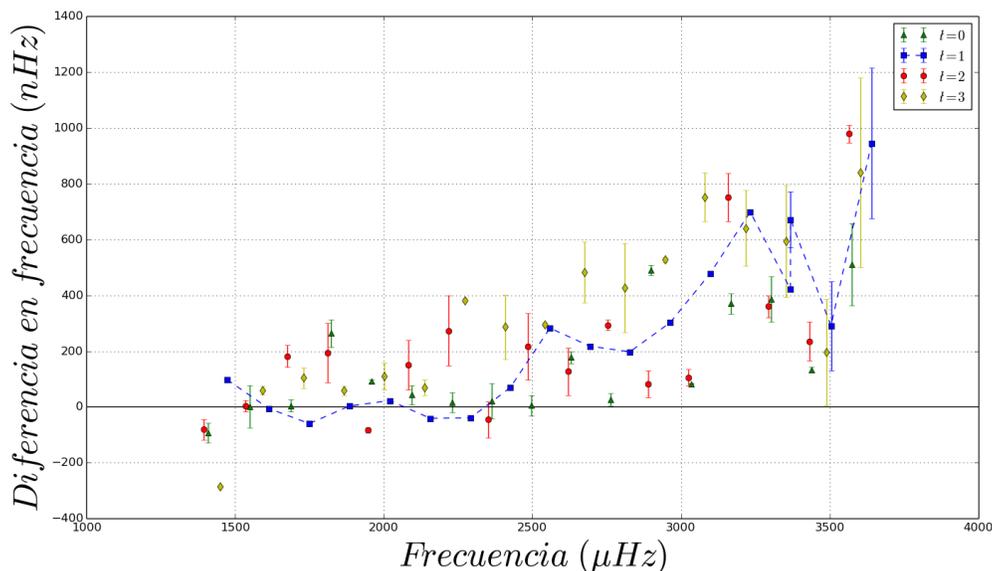


Figure 15: Diferencias absolutas $\Delta\nu = \nu_{m\acute{a}x} - \nu_{m\acute{i}n}$ entre las frecuencias de resonancia de los modos p en el máximo y en el mínimo de actividad solar.

4.1.3 Splittings

En este apartado se comparan los *splittings* encontrados. Como los *splittings* sidereos se diferencian de los sinódicos únicamente en una constante aditiva (ver 3.4.2), el valor de las diferencias relativas entre el máximo y el mínimo que calcularemos será el mismo.

Las diferencias relativas $2 \cdot (s_{m\acute{a}x} - s_{m\acute{i}n}) / (s_{m\acute{a}x} + s_{m\acute{i}n})$ (en porcentaje) de los desdoblamientos rotacionales en las dos épocas del ciclo solar que estamos comparando se muestran en la Figura 16.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	Media
Diferencia relativa (%)	-0.38 ± 5.38	-0.48 ± 6.00	-0.39 ± 8.71	-0.42 ± 6.69

Table 3: Medias pesadas para cada ℓ y para todos los valores de ℓ de los resultados mostrados en la Figura 16.

Como puede observarse, no se aprecian (dentro de los errores) diferencias entre los *splittings* sidereos hallados del máximo al mínimo de actividad solar. Deducimos de este resultado, basándonos en las relaciones presentadas en el apartado 1.4.2, que la velocidad de rotación solar promedio en las cavidades donde se propagan las ondas acústicas correspondientes a los grados $1 \leq \ell \leq 3$ no varía significativamente con el ciclo de actividad solar.

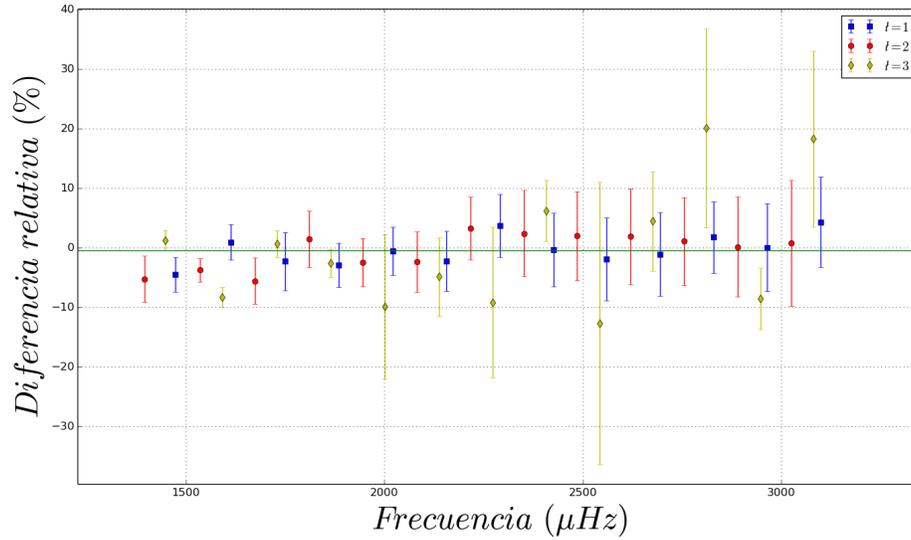


Figure 16: Diferencias relativas (en %) entre los *splittings* sidéreos obtenidos de los modos p solares ($n = 9, \dots, 22$) en el máximo y en el mínimo de actividad solar. Se representa con una recta horizontal verde el valor medio.

4.1.4 Anchuras

Las anchuras ajustadas se han comparado cualitativamente entre sí en la Figura 17:

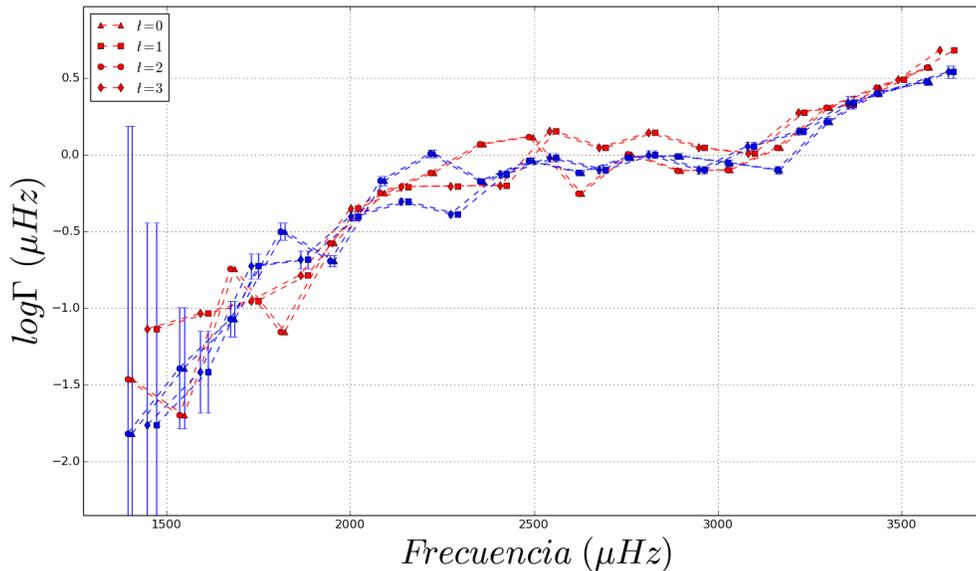


Figure 17: Valores de $\log(\Gamma_{nl})$ en el máximo (en rojo) y en el mínimo (azul) de actividad solar. Los valores para $\ell = 0$ se simbolizan con un triángulo (Δ); $\ell = 1$ con un cuadrado (\square); $\ell = 1$ con un círculo (\circ) y los de $\ell = 3$ con un rombo (\diamond). Los errores del máximo son del mismo orden que en el mínimo y se omiten para ver con más claridad el comportamiento de $\log(\Gamma)$ con ν .

Se distinguen los principales rasgos de la dependencia de Γ_{nl} con la frecuencia observados en trabajos como *Roca Cortés et al. (1998)* [31], esto es, aumento rápido de Γ_{nl} con la frecuencia,

salvo en un *plateau* en el que las anchuras se estabilizan en torno a $1 \mu\text{Hz}$, localizado entre $\sim 2.3 \text{ mHz}$ y $\sim 3.1 \text{ mHz}$; comportamiento que ya habíamos observado anteriormente (véase 3.4.3 y Figura 12). También se observa el decrecimiento conocido como *dip* alrededor de $\sim 2.9 \text{ mHz}$ (ver Figura 12 también). No obstante, *Komm, Howe & Hill (2000)* [46], estudiando modos con $\ell = 9 - 150$, encuentran este *dip* muy pronunciado durante el mínimo y observan que llega a desaparecer en el máximo, resultado que no observamos nosotros con claridad (ver Figuras 17 y 18).

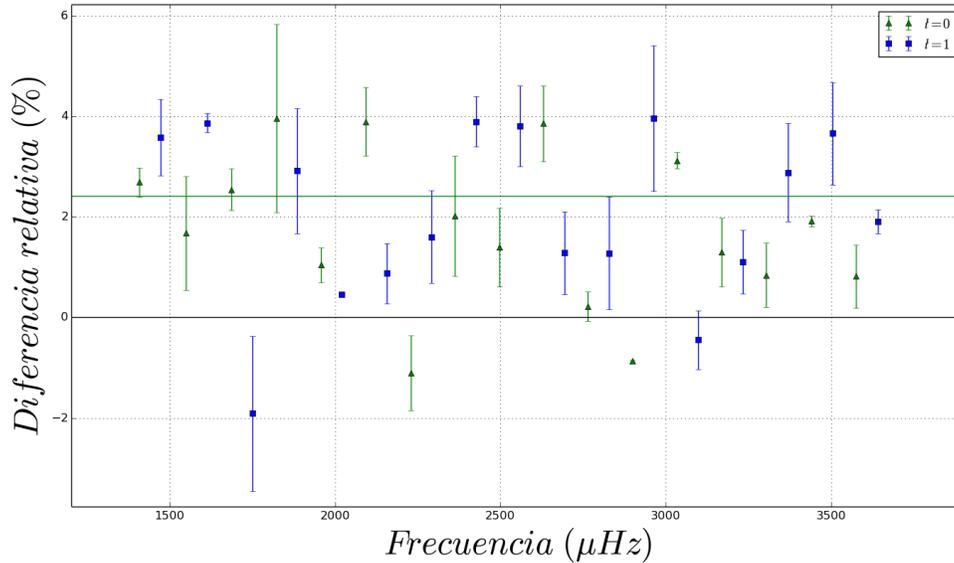


Figure 18: Diferencias relativas (en %) de las anchuras de línea de los modos p solares en el máximo y en el mínimo de actividad solar. El valor medio se muestra gráficamente con una línea horizontal verde.

Representamos las variaciones relativas de las anchuras de los modos en las dos épocas estudiadas en la Figura 18, es decir, $2 \cdot (\Gamma_{m\acute{a}x} - \Gamma_{m\acute{i}n}) / (\Gamma_{m\acute{a}x} + \Gamma_{m\acute{i}n})$. Mostramos gráficamente sólo las diferencias relativas entre las anchuras de los modos $\ell = 0$ y $\ell = 1$ ya que son las mismas que las de $\ell = 2$ y $\ell = 3$ respectivamente, tal y como hemos definido nuestra metodología para el análisis del espectro (ver 3.2 y ver también Figura 17).

En la Figura 18 podemos observar que, en general, las anchuras a media altura de cada multiplete son mayores durante el máximo de actividad que durante el mínimo. El valor medio pesado para la diferencia relativa de las anchuras entre el máximo y el mínimo es $2.404 \pm 0.734\%$. A pesar de tratarse de un resultado acorde con lo que esperábamos observar, es significativamente menor que el presentado en trabajos como *Vázquez (2001)* [3], donde se obtiene una diferencia relativa de las anchuras entre el máximo y el mínimo analizados del $11 \pm 3\%$. Esta diferencia la atribuimos a la disminución paulatina de los máximos de los últimos ciclos de actividad solar comentada en la sección 1.4.3. Suponemos que, al verse mermada la actividad solar en los últimos años, disminuye también la diferencia entre los parámetros obtenidos en los máximos y los mínimos más recientes.

Puesto que la anchura es una medida del amortiguamiento que sufren los modos en sus cavidades, podríamos interpretar que los mecanismos de amortiguamiento serían más eficaces

durante la época de máxima actividad en las regiones que conciernen a los modos de grado bajo ($\ell \leq 3$). Aunque la actividad solar parece un fenómeno que reside en las capas solares más superficiales, podría modificarse la posición del punto de retorno externo de los modos en épocas de máximo de actividad.

4.1.5 Alturas

Una representación análoga a la del apartado anterior, pero en este caso para la amplitud de la señal recibida, nos dará información acerca de la densidad de potencia media que observamos durante el máximo y durante el mínimo de actividad solar. En este apartado compararemos la densidad de potencia media en ambas épocas, que es proporcional al cuadrado de la amplitud (ver sección 3.4.4). En primer lugar, para figurarnos una idea cualitativa del resultado que obtendremos, en la Figura 19 se muestra la relación entre las amplitudes encontradas en el máximo (de rojo) y el mínimo (de azul) para los diferentes grados ℓ analizados.

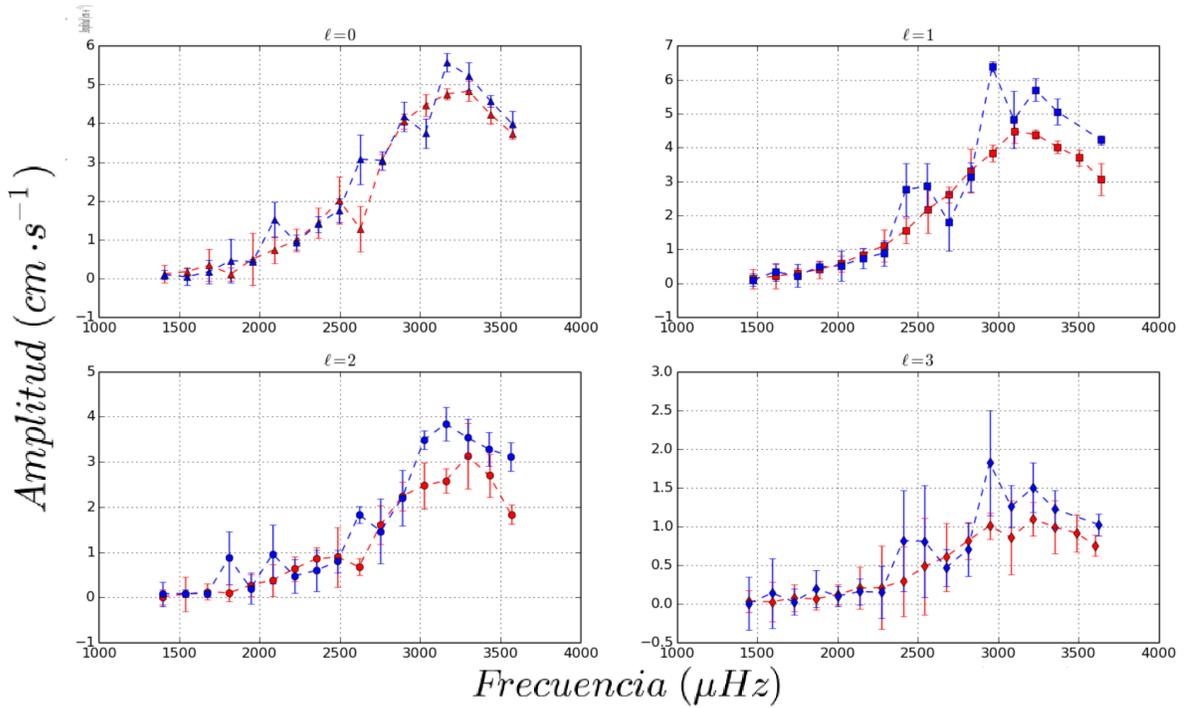


Figure 19: Comparación de los valores de las alturas del ajuste ($A_{n\ell}$) en el máximo (rojo) y en el mínimo (azul) de actividad solar. Símbolos igual que en la figura 17.

A la vista de la Figura 19, como vemos un aumento de la altura en el mínimo de actividad, puede deducirse que existe por tanto un aumento de la densidad de potencia en el mínimo. Para calcular cuantitativamente este aumento, teniendo en cuenta la relación $a = \frac{\Gamma}{2\pi} A^2$ (ver sección 3.4.4), presentamos en la Figura 20 una representación similar a la de apartados anteriores: la diferencia relativa $2 \cdot (a_{máx} - a_{mín}) / (a_{máx} + a_{mín})$ de las densidades de potencia de los modos entre el máximo y el mínimo de actividad solar. Obtenemos, a partir de la media pesada, que la densidad de potencia media aumenta en un $7.45 \pm 4.56\%$ en el mínimo de actividad solar con respecto al máximo.

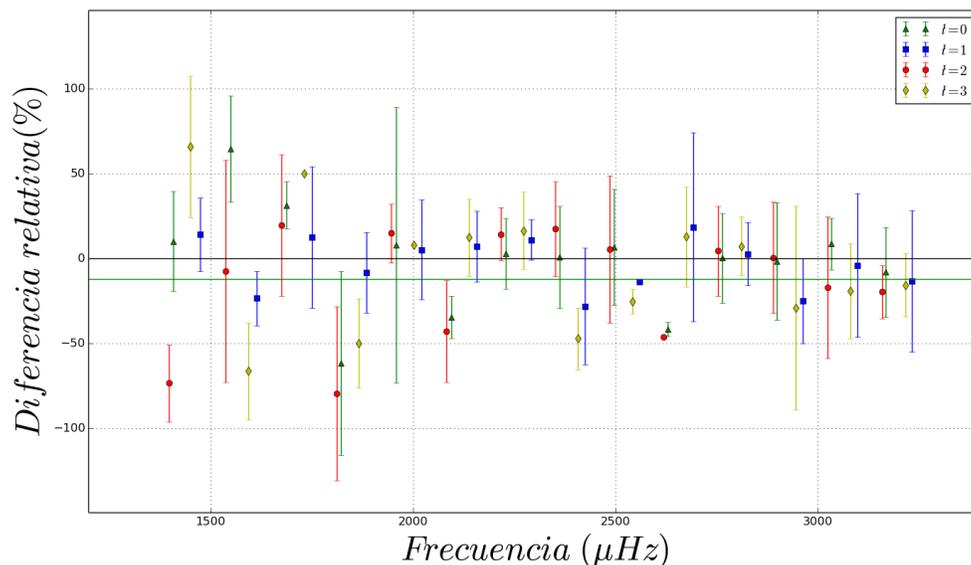


Figure 20: Diferencias relativas (en %) de las amplitudes promedio de los modos p en el máximo y el mínimo de actividad solar. Se representa, asimismo, el valor medio con una recta horizontal de color verde.

Nuestro resultado, si bien concuerda cualitativamente, cuantitativamente es diferente de otros resultados publicados en trabajos anteriores. En *Vázquez (2001)* [3] se obtiene una disminución de la densidad de potencia media del $20 \pm 5\%$ en el máximo con respecto del mínimo. Observamos una menor diferencia en los espectros de potencia entre las épocas máximo-mínimo. Esto puede ser debido a que las series de datos del mínimo utilizados son diferentes a las usadas en *Vázquez (2001)* [3]. Además, tal vez pueda influir el hecho de que el ciclo solar estudiado en este trabajo sea más débil (*Chowdhury et al., 2013*) [38] que el estudiado en *Vázquez (2001)* [3].

5 Conclusiones

Finally, we will enunciate some conclusions that have been obtained throughout this work, such as the use of three averaged series of 120 days around the maximum and the minimum of solar activity cycle (with a spectral resolution of $\Delta\nu = 48.2\text{ nHz}$), a increase of the cut-off frequencies of the solar p -modes, their linewidth and a decrease in the average power density from the maximum to the minimum. Also, we will propose some ways that might be interesting to continue and to extend this work.

Para finalizar, enunciaremos las conclusiones que hemos ido obteniendo a lo largo del trabajo, tales como el uso de tres series de 120 días promediadas en torno al máximo y al mínimo del ciclo de actividad solar, con una resolución espectral de $\Delta\nu = 48.2\text{ nHz}$, un aumento de las frecuencias de corte de los modos p solares, su anchura y una disminución de la densidad de potencia media del máximo al mínimo. También propondremos algunas formas que podrían ser interesantes de continuar o ampliar este trabajo.

5.1 Conclusiones

Del análisis que hemos realizado de los datos espectrométricos recogidos por el experimento GOLF en SoHO, en concreto de los multipletes $\ell = 0, 1, 2$ y 3 , se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Comprobamos que el método de ajuste propuesto es apropiado pero sensible a los valores iniciales y que por ello debemos ser prudentes a la hora de interpretar los resultados obtenidos para las magnitudes físicas estudiadas (sobre todo en el caso de la densidad de potencia media de los espectros).
- Mientras que las frecuencias de resonancia son el parámetro más robusto, y las potencias (y en menor medida las anchuras) son las que pueden conllevar errores de ajuste mayores si los valores iniciales en el ajuste no lineal no se aproximan al valor real suficientemente bien.
- El ruido de fondo ajustado en el máximo y en el mínimo no difiere significativamente, dentro de los errores.
- Vemos un claro desplazamiento de frecuencias a partir de $\nu \sim 2.0\text{ mHz}$, que crece con la frecuencia, siendo las frecuencias de resonancia mayores durante el máximo que durante

el mínimo. Además, se observa el comportamiento predicho por *Goldreich et al. (1991)* [47] y observado por varios autores, con una oscilación de $\Delta\nu$ en torno a $\sim 3.5\text{ mHz}$.

- Se ha encontrado un buen acuerdo entre los *splittings* ajustados en el máximo y en el mínimo y no se observa variación entre ellos dentro de los errores. Esto sugiere que no existen cambios significativos en la velocidad de rotación promedio con el ciclo de actividad solar, resultado en consonancia con trabajos anteriores.
- Se mide una diferencia del $2.4 \pm 0.7\%$ entre las anchuras del ajuste del espectro en ambas épocas, siendo mayores durante el máximo de actividad. De lo que podría deducirse que los mecanismos de amortiguamiento de estos modos son más eficaces durante el máximo.
- Se mide una diferencia relativa entre las alturas ajustadas de $7.45 \pm 4.56\%$ en ambas épocas, siendo mayores en el mínimo de actividad solar.
- Estos resultados coinciden cualitativamente con los de trabajos anteriores, aunque el valor obtenido es inferior a las diferencias relativas encontradas por otros autores. Ello podría atribuirse a la disminución de la intensidad del ciclo estudiado de aproximadamente $\sim 20\%$ frente a la del ciclo 23, al cual corresponden los resultados de otros trabajos con las que hemos comparado los nuestros.

5.2 *Proyectos futuros y mejoras*

Algunas propuestas para extender y profundizar en este trabajo son:

- Sería conveniente estudiar los modos de grado $\ell = 1$ y $\ell = 3$ por separado, puesto que el comportamiento de estos últimos parece desviarse demasiado en algunos parámetros del comportamiento de los modos de inferior grado. Esto puede ser debido a la diferencia en altura del espectro de potencias entre los modos de grado $\ell = 1$ y $\ell = 3$ en el ajuste simultáneo de ambos.
- Para ampliar este estudio, podría ser interesante complementar y respaldar los resultados obtenidos en este trabajo con los que se obtendrían empleando otros instrumentos. Por ejemplo, la realización de un estudio análogo con datos recogidos por VIRGO, que utiliza las fluctuaciones en intensidad para estudiar las oscilaciones solares.
- Para los modos en la región de frecuencias altas ($n > 23$) se podría mejorar la precisión con la que se mide la frecuencia de resonancia realizando un ajuste a un modelo de una sola lorentziana, ya que en esta región del espectro el ensanchamiento de los multipletes impide distinguir sus componentes en m .
- Sería interesante comparar resultados de una larga serie de máximos y mínimos de actividad solar para poder establecer alguna periodicidad a largo plazo que englobe a la de 11 años que tan claramente se observa, y así tener más herramientas a nuestra disposición para hacer predicciones sobre ciclos solares posteriores.

References

- [1] COX, A. N., LIVINGSTON, W. C., MATTHEWS, M. S. *Solar interior and Atmosphere*. The University of Arizona Press, 1991.
- [2] ROCA CORTÉS, T. *Methods and Techniques in Helioseismology*. Space Solar Physics: Theoretical and Observational Issues in the Context of the SOHO Mission: Proceedings of a summer school, held in Orsay, France, 1-13 September 1997. Edited by Jean Claude Vial, Karine Bocchialini and Patrick Boumier. Berlin; New York: Springer, c1998. Also Lecture notes in physics, v. 507., p.1.
- [3] VÁZQUEZ, H. *Análisis heliosismológico de los datos de GOLF/SOHO en épocas de máximo y mínimo de actividad solar*. Tesis de Licenciatura, ULL, 2001.
- [4] RÉGULO, C. AND ROCA CORTÉS, T. *Analysis of the solar low-l p-mode asymmetries using wavelets*. Solar Physics, v. 200, Issue 1/2, p. 381-391, 2001.
- [5] LAZREK, M.; BAUDIN, F.; BERTELLO, L.; BOUMIER, P.; CHARRA, J.; FIERRY-FRAILLON, D.; FOSSAT, E.; GABRIEL, A. H.; GARCÍA, R. A.; GELLY, B.; GOUIFFES, C.; GREC, G.; PALLÉ, P. L.; PÉREZ HERNÁNDEZ, F.; RÉGULO, C.; RENAUD, C.; ROBILLOT, J.-M.; ROCA CORTÉS, T.; TURCK-CHIÈZE, S. AND ULRICH, R. K. *First results on p modes from GOLF experiment*. Solar Physics, Volume 175, Issue 2, pp.227-246, 1997.
- [6] GELLY, B., LAZREK, M., GREC, G., AYAD, A., SCHMIDER, F. X., RENAUD, C., SALABERT, D. AND FOSSAT, E. *Solar p-modes from 1979 days of the GOLF experiment*. Astronomy and Astrophysics, v.394, p.285-297, 2002.
- [7] BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall, 1988.
- [8] ESPINOSA LARA, F. *Modos de oscilación en estrellas con simetría axial*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna, 2005.
- [9] CHRISTENSEN-DAKSGAARD, J. *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, 1998. 5^a ed., 2014, http://w.astro.berkeley.edu/~eliot/Astro202/2009_Dalsgaard.pdf
- [10] LEIGHTON, R. B.; NOYES, R. W. AND SIMON, G. W. *Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report*. Astrophysical Journal, vol. 135, p.474, 1962.
- [11] CLAVERIE, A; ISAAK, G. R.; MCLEOD, C. P.; VAN DER RAAY, H. B. AND ROCA CORTÉS, T. *Solar structure from global studies of the 5-minute oscillation*. Nature, vol. 282, p. 591-594, 1979.
- [12] DUVALL, T. L., JR. AND HARVEY, J. W. *Observations of solar oscillations of low and intermediate degree*. Nature, vol. 302, p. 24-27, 1983.
- [13] CHRISTENSEN-DALSGAARD, J.; DUVALL, T. L., JR.; GOUGH, D. O.; HARVEY, J. W. AND RHODES, E. J., JR. *Speed of sound in the solar interior*. Nature, vol. 315, p. 378-382, 1985.
- [14] KIPPENHAHN, R. AND WEIGERT, A. Book-Review: *Stellar Structure and Evolution*. Ed. Springer-Verlag, 1990.

- [15] ULRICH, R. K. *The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface*. Astrophysical Journal, vol. 162, p. 933, 1970.
- [16] STEIN, R. F. AND LEIBACHER, J. W. *A New Description of the Solar Five-Minute Oscillation*. Astrophysical Letters, Volume 7, p. 191-192, 1971.
- [17] COWLING, T. G. *The non-radial oscillations of polytropic stars*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 101 (1941), 367.
- [18] VAN DER RAAY, H. B.; ISAAK, G. R.; PALLÉ, P. L. AND ROCA CORTÉS, T. *Further experimental evidence of the 13 day solar periodicity*. EPS Study Conference on Oscillations as a Probe of the Sun's interior, Catania, Italy. Società Astronomica Italiana, Memorie (ISSN 0037-8720), vol. 55, no. 1-2, p. 353-356, 1984.
- [19] WOODARD, M. F. AND NOYES, R. W. *Change of solar oscillation eigenfrequencies with the solar cycle*. Seismology of the Sun and the distant stars, p.303-304, 1986.
- [20] FOSSAT, E.; GELLY, B.; GREC, G. AND POMERANTZ, M. *Search for Solar P-Mode Frequency Changes Between 1980 and 1985*. Astronomy and Astrophysics, vol. 177, NO.1/2MAY(I), P. L47, 1987.
- [21] PALLÉ, P. L.; RÉGULO, C. AND ROCA CORTÉS, T. *Solar cycle induced variations of the low L solar acoustic spectrum*. Astronomy and Astrophysics, vol. 224, no. 1-2, p. 253-258, 1989.
- [22] LIBBRECHT, K. G. AND WOODARD, M. F. *Solar-cycle effects on solar oscillation frequencies*. Nature, vol. 345, p. 779-782, 1990.
- [23] ANGUERA GUBAU, M.; PALLÉ, P. L.; PÉREZ HERNÁNDEZ, F.; RÉGULO, C. AND ROCA CORTÉS, T. *The low L solar p-mode spectrum at maximum and minimum solar activity*. Astronomy and Astrophysics, vol. 255, no. 1-2, p. 363-372, 1992.
- [24] BARCELÓ, S. *Astrosismología de estrellas de tipo tardío*. Tesis de Máster, ULL, 2012.
- [25] GIZON, L. AND SOLANKI, S. *Determining the inclination of the rotation axis of a sun-like star*. The Astrophysical Journal 589, 2 (2003), 1009.
- [26] GOLDREICH, P. AND KEELEY, D. A. *Solar seismology. II - The stochastic excitation of the solar p-modes by turbulent convection*. Astrophysical Journal, Part 1, vol. 212, p. 243-251, 1977.
- [27] GOLDREICH, P. AND KUMAR, P. *The interaction of acoustic radiation with turbulence*. Astrophysical Journal, Part 1, vol. 326, p. 462-478, 1988.
- [28] BROWN, T. M. *Techniques for observing solar oscillations*. The Structure of the Sun, Proceedings of the Sixth Canary Islands, Winter School, 1996.
- [29] DOMINGO, V. AND FLECK, B. *SOHO - The Solar and Heliospheric Observatory*. Solar Magnetic Fields, Proceedings of the international conference held in Freiburg, Germany, June 29-July 2, 1993. Cambridge University Press, 1994, p.408.

- [30] GABRIEL, A.; GREC, G.; CHARRA, J.; ROBILLOT, J.-M., ROCA CORTÉS, T.; TURCK-CHIÈZE, S.; BOCCHIA, R.; BOUMIER, P.; CANTIN, M.; CÉSPÉDES, E.; ET AL. *Global oscillations at low frequency from the SOHO mission (GOLF)*. In The SOHO Mission. Springer, 1995, pp. 61-69.
- [31] ROCA CORTÉS, T.; LAZREK, M.; BERTELLO, L.; THIERY, S.; BAUDIN, F.; BOUMIER, P.; GAVRYUSEV, V.; GARCÍA, R. A.; RÉGULO, C.; ULRICH, R. K. ET AL. *The solar acoustic spectrum as seen by GOLF. II. Noise statistics background and methods of analysis*. Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like stars SOHO 6/GONG 98 Workshop Abstract, June 1-4, 1994, Boston, Massachusetts, p. 323, 1998.
- [32] BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall, 1988.
- [33] ANDERSON, E. R.; DUVALL, T. L., JR. AND JEFFERIES S. M. *Modeling of solar oscillation power spectra*. The Astrophysical Journal (ApJ.), 364 (1990), 669.
- [34] NUMPY COMMUNITY. *Numpy User Guide*, Release 1.9.1, 2014.
- [35] ROCA CORTÉS, T. *Oscilaciones solares*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, 1979.
- [36] FOSSAT, E.; BOUMIER, P.; CORBARD, T.; PROVOST, J.; SALABERT, D.; SCHMIDER, F. X.; GABRIEL, A. H.; GREC, G.; RENAUD, C.; ROBILLOT, J. M.; ROCA CORTÉS, T.; TURCK-CHIÈZE, S.; ULRICH, R. K. AND LAZREK, M. *Asymptotic g modes: Evidence for a rapid rotation of the solar core*. Astronomy & Astrophysics, Volume 604, id. A40, 17 pp., 2017.
- [37] CASANELLAS, J. AND LOPES, I. *The Sun and stars: giving light to dark matter*. Modern Physics Letters A, Volume 29, Issue 37, id. 1440001, 2014.
- [38] CHOWDHURY, P.; CHOUDHARY, D. P. AND GOSAIN, S. *A study of the hemispheric asymmetry of sunspot area during solar cycles 23 and 24*. The Astrophysical Journal, v. 768, Issue 2, article id. 188, 10 pp., 2013.
- [39] VINCENT, A. C.; SCOTT, P. AND SERENELLI, A. *Possible Indication of Momentum-Dependent Asymmetric Dark Matter in the Sun*, Phys. Rev. Lett. 114, id. 081302, 2015.
- [40] ABREU, J. A.; BEER, J.; FERRIZ-MAS, A.; MCCracken, K. G. AND STEINHILBER, F. *Is there a planetary influence on solar activity?*. Astronomy & Astrophysics, Volume 548, id. A88, 9 pp., 2012.
- [41] KHOMENKO, E. AND COLLADOS, M. *Oscillations and Waves in Sunspots*. Living Reviews in Solar Physics, Volume 12, Issue 1, article id. 6, 78 pp., 2015.
- [42] DEBOSSCHER, J.; BLOMME, J.; AERTS, C. AND DE RIDER, J. *Global stellar variability study in the field-of-view of the Kepler satellite*. Astronomy & Astrophysics, Volume 529, id. A89, 15 pp., 2011.
- [43] BAGLIN, A.; AUVERGNE, M.; BARGE, P.; BUEY, J.-T.; CATALA, C.; MICHEL, E.; WEISS, W. AND COROT TEAM. *COROT: asteroseismology and planet finding*. University of Heidelberg, 2002.

- [44] GARCÍA, R. A.; TURCK-CHIÈZE, S.; JIMÉNEZ-REYES, S. J.; BALLOT, J.; PALLÉ, P. L.; EFF-DARWICH, A.; MATHUR, S. AND PROVOST, J. *Tracking Solar Gravity Modes: The Dynamics of the Solar Core*. Science, Volume 316, Issue 5831, pp. 1591, 2007.
- [45] PENN, M. J. AND LIVINGSTON, W. *Long-term evolution of sunspot magnetic fields*. The Physics of Sun and Star Spots, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, Volume 273, p. 126-133, 2011.
- [46] KOMM, R. W.; HOWE, R. AND HILL, F. *Width and energy of solar p-modes observed by GONG*. Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 32, p.803, 2000.
- [47] GOLDREICH, P.; MURRAY, N.; WILLETTE, G. AND KUMAR, P. *Implications of solar p-mode frequency shifts*. Astrophysical Journal, Part 1, vol. 370, April 1, 1991, p. 752-762.