Memorias
del
Séptimo Foro de la
Enseñanza
de las Matemáticas

Ibero 2017, sede ITESO

14 - 15 de septiembre

Guadalajara, Jalisco

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA
CIUDAD DE MÉXICO ®

ITESO, Universidad
Jesuita de Guadalajara

ÍNDICE. **PÁG.**

Experiencias con los alumnos

S. Nuño Sánchez

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente
Departamento de Matemáticas y Física
saulnuno@iteso.mx

***Resumen*—La sociedad al ser un sistema dinámico evoluciona con el tiempo. Esta evolución también se presenta en las distintas generaciones de estudiantes. El objetivo de estas memorias basadas en el trato diario con los estudiantes es recabar distintos rasgos de la generación actual de estudiantes y las bases matemáticas que éstos necesitan para incorporarse satisfactoriamente a la educación superior. El contar con el perfil de los estudiantes actuales puede permitir diseñar diferentes actividades de aprendizaje e implementar nuevas metodologías de enseñanza para satisfacer las necesidades emergentes que estas demandan.**

***Palabras clave*—Perfil de los estudiantes, educación superior, conocimientos mínimos, aptitudes numéricas.**

I. Introducción

Las nuevas generaciones de estudiantes cuentan con una identidad propia [4], misma que evoluciona constantemente. Este hecho ha traído como consecuencia no sólo el reestructurar los viejos planteamientos en la docencia, sino también en la formación misma de los docentes [5], [6], [7], quienes deben ser capaces de atender estudiantes diversos con metodologías [2] y tecnologías diferentes [3] en escenarios multinivel [8].

Gracias al acompañamiento que se proporciona a los estudiantes, mediante el asesoramiento y regularización en matemáticas básicas, para que ellos puedan transitar más fácilmente sus primeros ciclos escolares, ha permitido recolectar diversas experiencias que los jóvenes de hoy en día viven, las cuales permiten obtener un perfil de los estudiantes de hoy en día para así diseñar diversas estrategias y metodologías de enseñanza como los mejores profesores lo harían [1].

En estas memorias también se aborda el tema de los conocimientos mínimos que los estudiantes requieren para transitar a la educación superior con éxito, mismos que se han derivado de las experiencias recabadas con el trabajo constante con los alumnos.

II. Contexto educativo

A través del diálogo sostenido con los alumnos y de la convivencia se ha analizado la situación del nivel educativo de diversas preparatorias, de la región y foráneas, en el área de las matemáticas, tanto públicas como privadas. En general, la enseñanza de las matemáticas ha sufrido un deterioro. Dicho deterioro en el servicio educativo se resume en los siguientes puntos:

- Las preparatorias acreditan cada vez a más alumnos sin las competencias necesarias, están dejando de reprobarlos por los trámites administrativos que esto implica.
- Hay preparatorias en donde el personal docente crea una falsa ilusión del nivel educativo con el que cuentan los estudiantes, es decir, crean falsas expectativas al pasar a alumnos con notas altas, siendo que en ocasiones ni siquiera cuentan con los conocimientos mínimos.
- Se han realizado recortes a los temarios de matemáticas, omitiendo tópicos relevantes.
- El recorte en los temarios de matemáticas va en aumento.
- Se han eliminado cursos de matemáticas necesarios en el ámbito de la ingeniería y en algunos casos han llegado al extremo de no ofrecer ningún curso de matemáticas.
- Hay la existencia de escuelas que como área optativa de formación no ofrecen cursos de precálculo ni taller de solución de problemas matemáticos, física o química, entre otras asignaturas que permitan al estudiante tener un acercamiento a las áreas de ingeniería.
- Se han dado casos de escuelas en donde el

profesor a cargo del grupo no es competente en el área (no tiene dominio de los temas o transmite conocimiento falso), y que en ocasiones llega a ser inexistente (sólo lo ven al inicio del semestre y hasta el final cuando debe otorgar la nota).

Los puntos anteriormente descritos, y muchos otros que no fueron abordados, han contribuido a que el perfil de muchos estudiantes tenga una base débil en matemáticas y una falsa percepción en su imagen.

III. RASGOS GENERACIONALES

Los estudiantes de hoy en día presentan una serie de comportamientos, actitudes y valores, que los han caracterizado y distinguen de las generaciones anteriores. Algunas de estas características se describen en las siguientes viñetas:

- Pese al rezago en matemáticas con el que ingresan los alumnos se les ve poco motivados a buscar ayuda en asesoría o a solicitar ayuda para su regularización (hay que convencerlos de que es necesario trabajar arduamente para nivelarse y superarse).
- Pese a ofertarse una amplia gama de horarios para apoyo a alumnos, muchos de ellos no quieren dedicar horas fuera de su horario regular para trabajar en su nivelación si esto implica renunciar a su descanso u otro tipo de actividades lúdicas.
- Algunos alumnos pierden rápido el interés por mejorar, esto debido a que no observan resultados rápidos, por lo cual se desmotivan muy pronto y renuncian a las asesorías o al apoyo. Son pocos los que son constantes y firmes con sus metas.
- Cada vez son más los alumnos que presentan poca tolerancia a la frustración. Esto se ha visto reflejado en alumnos que estaban acostumbrados a obtener buenas notas en la preparatoria y enfrentan una realidad diferente optan por la deserción (cambio de carrera o incluso de su escuela).
- Los alumnos han dejado de librar sus propias batallas, una aclaración de calificación de examen o nota final, entre otros problemas escolares, en lugar de ellos envían a sus padres.
- Los alumnos sienten la necesidad de querer aplicar cualquier conocimiento que se les enseña en clase o en asesoría, aunque éste sólo sea la base para temas más complejos.
- Algunos alumnos buscan acreditar un curso realizando la menor cantidad de trabajo posible, para ello tratan de copiar productos o reciclar lo que han realizado otras personas, lo que conlleva a imitar errores y se elimina el aprendizaje por medio de la práctica y repetición.
- Si ya existe algún software que haga un cálculo en particular, ellos pierden el interés por hacerlos manualmente.
- En ocasiones la pasión por el uso del software los lleva a que desarrollen menores capacidades cognitivas y un exceso de confianza queriendo que el software les resuelva todo.
- Hay alumnos que no reconocen el criterio y experiencia del profesorado y pretenden autoevaluarse en lugar de aceptar la retroalimentación del profesor, es decir, de nuevo se presenta el problema de no querer aceptar la realidad en la que se desenvuelven.
- Los alumnos presentan dificultades con la lectura. Se han dado casos en que los alumnos mejoran al enseñarlos a leer cuidadosamente los problemas que tienen que resolver.
- Muchos estudiantes se confían de fuentes secundarias de información en lugar de consultar fuentes primarias de información o contrastar diversas fuentes.
- Los alumnos no saben sintetizar ideas en ejercicios de lectura, sólo buscan realizar plagio de páginas de internet.
- Muchos alumnos no saben cómo organizar su tiempo. El estudiante universitario al tener mayor libertad, tanto estudiantes locales como foráneos, busca la diversión y el ocio en lugar del estudio.
- Muchos alumnos no conocen técnicas de estudio, o bien, no reconocen el tipo de estudiante que son de acuerdo a su modo de aprender (visuales, auditivos o kinestésicos).
- Gran parte del día es consumido por el uso de distintas aplicaciones y redes sociales.
- Los estudiantes se distraen constantemente con celulares o dispositivos electrónicos.
- Algunos alumnos cargan con muchos problemas personales y familiares que no suelen compartir para que sean tratados.
- Los alumnos demandan cada vez más una atención o seguimiento en clase más personalizado para alcanzar el nivel de conocimiento que desean.

- Generalmente los alumnos buscan una recompensa por el esfuerzo y no por el conocimiento adquirido.
- Los alumnos buscan una mayor flexibilidad al momento de ser evaluados.
- Los alumnos buscan problemas retadores; pero cuando no pueden afrontarlos se desmotivan rápido y renuncian a ellos.
- Al obtener respuestas rápidas con diversos buscadores (el más común Google), si no se encuentra una respuesta rápida para los problemas o retos suelen desmotivarse.
- Cada vez es más común que los alumnos tomen fotografías o vídeos de las clases con sus celulares o IPAD en lugar de tomar notas a mano, por lo que los apuntes de diversos alumnos suelen ser desorganizados.
- Les gusta crear escenarios falsos a través de selfies para ser compartidos en redes sociales con diversos hashtags como #AquiEnClase, #EnExamen, #Estudiando, entre otros, para proyectar una imagen falsa que sea reconocida por sus colegas, o bien, para recibir comentarios de apoyo de conocidos o desconocidos.
- Hacen recaer la consecuencia de sus decisiones y sus actos sobre los profesores.
- En ocasiones hacen uso de su creatividad para evadir responsabilidades.

No todas las características que presentan los alumnos son negativas, también presentan los siguientes rasgos positivos:

- Muestran, cuando se lo proponen, bastante creatividad e ingenio en las soluciones a problemas y proyectos.
- Tienen bastante energía que puede ser canalizada en ejercicios que sean retadores para ellos cuando el conocimiento resulta significativo y pueden ponerlo en acción.
- Pueden formar verdaderos equipos de trabajo, no un grupo de trabajo, en donde se genera sinergia.
- Pueden dominar con rapidez el uso de tecnologías de información para un aprendizaje más profundo.
- Tienen hambre de aprender y aplicar el conocimiento adquirido.

IV. TEMAS MINIMOS EN LA EDUCACION SUPERIOR

El que los alumnos cuenten con una base sólida en matemáticas permite una transición más fácil a las áreas de ingeniería en la educación superior.

De acuerdo a la experiencia recabada al trabajar con alumnos de primer ingreso en áreas de ingeniería, las siguientes viñetas resumen los temas que se consideran necesarios para que el alumno sea capaz de integrarse con mayor facilidad durante el primer semestre de su carrera y el por qué son necesarios dichos temas.

- Descomponer un número en factores primos y cálculo de Máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Estos tópicos son fundamentales para que el alumno pueda simplificar fracciones y realizar operaciones entre ellas de manera satisfactoria.
- Operaciones básicas con fracciones. Este tema de aritmética básica es fundamental en las operaciones diarias que se enfrenta el estudiante en los cursos de matemáticas para ingeniería. El no dominar este tema ha ocasionado serios rezagos en el avance dado a errores serios desde tratar de simplificar fracciones de manera equivocada hasta no saber realizar las operaciones de suma y resta de fracciones cuando se evalúan límites o integrales.
- Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis. Gran parte de los errores que cometen los alumnos de nuevo ingreso es no aplicar de manera correcta el orden que dictan las operaciones y cómo realizar las operaciones que indica un paréntesis. En el día a día es importante que un estudiante tenga la competencia de poder leer y escribir de manera correcta las ideas algebraicas que trata de transmitir. Asimismo, esto también abona a poder resolver de manera éxitos distintas operaciones.
- Ley de los signos, ley de los exponentes y manipulación algebraica de ecuaciones. Estos son temas cruciales para poder resolver ecuaciones y para manipular correctamente diversas expresiones algebraicas que son comunes cualquier curso de matemáticas para ingeniería.
- Productos notables. Es un tema útil para que el alumno tenga más agilidad en realizar distintas operaciones; sin embargo, es suficiente con que el alumno tenga la competencia de poder realizar la multiplicación algebraica de manera correcta. El problema actual es que gran parte de los alumnos de recién ingreso no dominan ninguno de los dos temas, además

de haber aprendido reglas incorrectas.

- Factorización de polinomios. El poder factorizar de manera exitosa distintas expresiones algebraicas le permiten al alumno resolver algunas ecuaciones de manera más sencilla y en algunos casos simplificar expresiones para obtener una derivada o una integral más fácilmente. Además, este tema es sumamente importante cuando el alumno comienza el estudio de límites y debe eliminar indeterminaciones.
- Resolver ecuaciones de segundo grado usando la fórmula general. Dado a que no siempre cualquier ecuación de segundo grado es posible factorizarla (de manera sencilla) es útil conocer cómo determinar su solución sobre todo cuando existen raíces complejas lo cual es común en la solución de ecuaciones diferenciales.
- Racionalización. Racionalizar una expresión algebraica puede ayudar al estudiante a simplificar ciertas expresiones. Además, este tema también es importante para eliminar ciertas indeterminaciones y determinar el límite de dichas expresiones. Asimismo, el conocer este tema facilita abordar el tema de división de números complejos.
- Ecuación de la recta, conceptos asociados a la ecuación recta (pendiente, ordenada al origen, variable dependiente, variable independiente, entre otros) y graficado de la recta. Muchos alumnos tienen la dificultad de abordar y plantear diversos problemas porque no son capaces de distinguir entre los tipos de variables. Cuando se le pide al estudiante modelar un fenómeno, no suelen comenzar con el modelo lineal porque no dominan dicho tema. En el curso de cálculo diferencial determinar la ecuación de la recta en diversos problemas es común. También cuando el alumno recibe una introducción a la programación lineal no son capaces de plantear ecuaciones lineales y mucho menos graficarlas para abordar problemas de dos variables por el método gráfico.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales (métodos de sumas y restas, igualación o sustitución) y su interpretación gráfica. En muchos problemas, como el determinar los coeficientes para obtener un modelo, resolver problemas de aplicación mediante el modelado con sistemas de ecuaciones lineales o resolver los sistemas de ecuaciones para descomponer una fracción en suma de fracciones parciales es común en diversas disciplinas de ingeniería.
- Desigualdades y valor absoluto. En problemas en donde el alumno debe determinar el dominio de funciones es común plantear y resolver desigualdades. Además, los alumnos que abordan los temas de conjuntos requieren de su uso para expresarlos por comprensión. También las desigualdades son básicas en problemas de programación lineal.
- Obtención de perímetro, áreas y volúmenes. El tema de optimización es común abordarlo con problemas geométricos, por lo que no dominar las fórmulas básicas implica que el alumno no sea capaz de hacer el planteamiento básico del modelo para poder llevar a cabo la optimización. También en cursos como álgebra lineal en donde se analiza la geometría a través de vectores han enfrentado dificultades por no recordar estos temas básicos.
- Clasificación de los triángulos por sus lados y por sus ángulos. En algunos problemas geométricos en cursos de Cálculo, Álgebra lineal o mecánica el alumno quiere aplicar propiedades de un triángulo rectángulo siendo que el triángulo con el que se enfrentan no tiene un ángulo recto. Cuando el alumno aborda las integrales por sustitución trigonométrica en ocasiones no sabe distinguir los catetos de la hipotenusa por lo que no obtiene las funciones trigonométricas básicas de manera correcta. Asimismo, el alumno puede llegar a tener problemas en el modelado de situaciones clásicas que implican razones de cambio afines.
- Funciones trigonométricas básicas (Seno, coseno, tangente). Es suficiente que el alumno conozca la definición de estas funciones pues son necesarias para técnicas de integración y para conocer como derivar funciones trigonométricas (sin memorizar fórmulas).
- Conversión de unidades. El conocer de manera formal como hacer transformación de unidades le permite al estudiante convertir de grados a radianes y viceversa sin dificultad. Con ello puede resolver distintos problemas trigonométricos y usar de manera adecuada su calculadora de acuerdo a la unidad de medición.
- Ecuación de la parábola. En particular es importante que el alumno identifique la

forma general de la ecuación y conozca cómo graficarla. El alumno también debe tener en claro que es el vértice de la parábola y cómo determinarlo de manera analítica, lo cual resulta provechoso cuando contrasta los conocimientos que adquiere de máximos y mínimos.

- Ecuación de la circunferencia (forma general y canónica). El llevar una ecuación de la circunferencia a su forma canónica le permite al alumno graficar diversos conjuntos complejos. Además, es común resolver problemas de áreas que la involucran en Cálculo Integral.

V. CONCLUSIONES

La experiencia recolectada de los alumnos puede permitir obtener un perfil o caracterizar a la generación actual de los estudiantes. El conocer dicho perfil puede permitir diseñar metodologías y actividades que puedan incidir con mayor eficiencia en esta generación actual.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente el apoyo y motivación e la participación al Séptimo foro de enseñanza de las matemáticas IBERO 2017, sede ITESO, en especial a Eduardo Miranda Montoya.

VII. REFERENCIAS

[1] K. Bain, "Lo que hacen los mejores profesores universitarios," *Valencia: Universitat de València*, 2006.

[2] F. Camarero Suárez, F. Martin del Buey and J. Herrero Diez, "Estilos y estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios," *Psicothema*. 12(4), 2000, pp.615-622.

[3] J, Fielden, "Higher Education Staff Development: Continuing Mission" Thematic Debate of the Follow-up to the World Conference on Higher Education. UNESCO. Disponible en: www.unesco.org

[4] P. Hernández y J. M. Pastor, "Características socioeconómicas de los estudiantes de nuevo ingreso de la Universitat de València," *Valencia: Universitat de vàlencia Centre de Formació i Qualitat Manuel Sanchis Guarner. Anejos de @tic*. volume 1, 2011. Acceso 9/17 http://ojs.uv.es/index.php/anejos

[5] P. Morales Vallejo, "Nuevos roles de profesores y alumnos, nuevas formas de enseñar y de aprender," *En PRIETO NAVARRO, L. (Coord.). La enseñanza centrada en el aprendizaje: estrategias útiles para el profesorado. Barcelona: Octaedro*. 2008.

[6] P. Ramsden, "Learning to Teach in Higher Education," *London: Routledge*. 1992.

[7] S. Rodríguez Espinar, "La nueva formación del profesorado universitario," *En: J. Ortega Esteban (Co) Nuevos retos de la Pedagogía Social: la formación del profesorado*. Salamanca: Sociedad Ibérica de Pedagogía Social, 2002, pp. 41-94.

[8] S. Rodríguez Espinar, "Los estudiantes universitarios de hoy: una visión multinivel," *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 2015 vol. 13(2), pp. 91-124.

Usando la Historia y presente de las Matemáticas en el aula

Elihu Benjamín Ortiz Cadena

ITESO
Departamento de Matemáticas y Física
eliuortiz@iteso.mx

(

***Resumen*—Se discute el uso de la Historia de las Matemáticas como una herramienta coadyuvante para la mejora del aprendizaje. Se ofrecen varias razones de la importancia del uso de la historia en el aula. Se analizan los avances en los últimos años al respecto y se propone la implementación más activa de herramientas relacionadas en el contexto de la educación en México**

***Palabras clave*—Historia de las Matemáticas, educación, aprendizaje, aula.**

I. INTRODUCCION

Hace ya varios años se comenzó a hacer énfasis en la integración de la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza aprendizaje. Como resultado a lo largo de los últimos 30 años se han logrado importantes investigaciones y avances al respecto. Por ejemplo en 1995 el Instituto sobre la Historia de las Matemáticas y su uso en la enseñanza (IHMT) fue creado. Posteriormente en 1996 en el Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICME) se plantea la necesidad de realizar estudios y experiencias coordinadas y retroalimentadas a largo plazo sobre el uso de la historia de las matemáticas en distintos niveles educativos. Se han hecho varios estudios en los últimos 20 años que han mostrado en la mayoría de los casos resultados positivos del uso en clase de la historia de las matemáticas. (Fauvel & Maanen, [3]; Marshall, [7]; Liu, [6]; Furinghetti, [5])

En el contexto de la educación en México pocos profesores hacen uso activo de la historia de las matemáticas en clase, lo cual representa importantes oportunidades de aprendizaje desperdiciadas.

II. BENEFICIOS DEL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN CLASE

Existen importantes razones por las cuales la historia de las matemáticas debería ser incluida en el aula. Se mencionan algunas a continuación.

A) CONOCIMIENTO HISTORICO QUE COADYUVA A LA MOTIVACION.

A nivel motivacional se puede establecer en un marco basado en ejemplos reales la importancia del trabajo sostenido y perseverante. La historia de las matemáticas ofrece un abanico rico al respeto. Por ejemplo al estudiar los números complejos resulta esclarecedor seguir el contexto histórico y desarrollo gradual del concepto, los tropiezos conceptuales y de aceptación que se tuvieron y el largo camino seguido hasta el status actual.

B) MEJOR APRECIACION DEL PROCESO DE DESCUBRIMIENTO MATEMATICO Y CIENTIFICO

La forma estándar de presentación en los libros de texto matemáticos (y a veces en clase por parte de los profesores) de los temas matemáticos al estilo resultado, demostración depurada, ejemplo y aplicaciones obscurece el camino real del descubrimiento científico. Con el uso de ejemplos históricos adecuados al curso en cuestión se muestra al estudiante la realidad no lineal del desarrollo del edificio de conocimiento matemático. Las teorías matemáticas nunca avanzan a ritmo constante. Existen periodos de avance vertiginoso seguidos por intervalos de crecimiento más bien lento. En el aula a nivel motivacional se logran en el alumno grandes beneficios al entender éste que en el mismo aprendizaje (y sobretodo en la práctica de la ciencia e ingeniería) se enfrentarán a dificultades y trampas normales en el camino. Un ejemplo clásico de usar pedagógicamente éstas posibilidades es el libro

Genetics Approach to Calculus de Otto Toeplitz construido enteramente sobre una perspectiva histórica que arroja luz sobre como las ideas que forman la columna del Análisis Matemático evolucionaron a lo largo de siglos con el trabajo de distintos hombres y mujeres de nacionalidades, gustos y excentricidades diferentes.

C) ENTENDIMIENTO DE LA UNICIDAD DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO

Tradicionalmente la forma de presentar en las ingenierías las matemáticas suele conducir a la falsa percepción de que éstas son un terreno divido en parcelas sin conexión alguna entre ellas. Tal concepción errónea resulta común en el estudiante y dañina al momento de interrelacionar todo el aprendizaje. Si bien es cierto que por cuestiones prácticas y de tiempo se ofertan cursos separados (Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Álgebra Lineal, etc) un daño colateral de ésta separación es la pérdida de la unicidad de todo el edificio matemático en la mente del estudiante. Cuando se presenta al alumno en clase pequeñas dosis históricas se logra hacer énfasis en la continuidad y afinidad de las ramas de las matemáticas. Se pueden destacar en el aula historias clásicas en matemáticas sobre como un desarrollo implicó del uso e interrelación de varios campos del quehacer matemático. (El nacimiento y desarrollo de la Geometría Analítica, Geometría Algebraica, Topología Combinatoria, Topología diferencial, Topología Algebraica son clásicos ejemplos).

D) APRECIACION DE LAS MATEMATICAS EN UN CONTEXTO SOCIAL Y HUMANO

La influencia social de las matemáticas es un tema muy comúnmente olvidado pero de vital importancia. Es importante fomentar en el alumno un aprendizaje técnico-científico con responsabilidad social e interconexiones con la sociedad actual con vistas a obtener una formación interdisciplinaria. Es deseable que el estudiante contemple las matemáticas como una ciencia que revela distintas tradiciones, diferentes culturas, sentimientos, gustos y personalidades de sus creadores y necesidades de las épocas de creación.

E) LA MATEMATICAS SON UN CAMPO VIVO DE CONOCIMIENTO

Es sorprendente la cantidad de alumnos que consideran aun en grado universitario que las matemáticas son un cuerpo de conocimientos terminado. Obviamente ésta concepción es errónea. El uso de la historia de las matemáticas en clase no solo debería mirar hacia el pasado sino brindar al alumno una perspectiva de acuerdo al nivel de éste de la realidad vibrante de las matemáticas. Se pueden presentar noticias actuales del ámbito matemático y aplicaciones reales.

III. HERRAMIENTAS PARA USAR LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN EL AULA

En un artículo como éste es imposible ofrecer un desarrollo exhaustivo de las herramientas disponibles para hacer uso de la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza aprendizaje. Baste mencionar algunas ideas y recursos.

Es deseable que los profesores de matemáticas tengan conocimientos históricos del desarrollo de la ciencia que imparten. En México existen pocas oportunidades en la formación del profesorado dirigidas a obtener tal conocimiento. Debería ofertarse un curso de Historia de las Matemáticas en todo programa de formación de docentes. En Estados Unidos se han comenzado a ofertar no solo para futuros profesores sino incluso para otras carreras cursos especiales de Historia de las Matemáticas. Mientras llegamos a ese ideal en México, existen muchas otras posibilidades con las cuales los profesores pueden subsanar esa deficiencia.

Existen en la literatura matemática excelentes libros que desarrollan el conocimiento matemático para los estudiantes usando una perspectiva histórica. En los últimos años han surgido con el propósito de divulgar las matemáticas interesantes documentos en audio y video de gran calidad (muchos desarrollados por prestigiosos matemáticos actuales) que hacen un uso preponderante de la historia en su contenido.

Igualmente en la red existen muchos recursos al respecto para todos los niveles de educación. Para mencionar solo un ejemplo The Mathematical Association of America's History of Mathematics Special Interest Group (HOMSIGMAA) ofrece interesantes recursos en su página. Cada profesor interesado puede navegar y usar ideas o adaptar otras dependiendo de las necesidades y características de sus alumnos.

IV. CONCLUSIONES

Aunque el uso en clase de la historia de las matemáticas resulta poco explorado en nuestro país las experiencias de implementaciones previas del concepto en otros países ha arrojado resultados motivadores. Es lógico suponer que con el paso de los años las herramientas y técnicas se perfeccionaran. En México poco a poco se incrementa la cantidad de docentes que hacen uso de ésta herramienta y se espera un crecimiento en la cantidad de docentes que lo hagan así como intercambio de experiencias entre ellos.

V. REFERENCIAS

[9] Bidwell, J. K. (1993). Humanize Your Classroom with The History of Mathematics. *Mathematics Teacher, 86,* 461-464

[10] Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3–6.

[11] Fauvel, J., Maanen, J. V. (1997). The Role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics discussiondocument for an ICMI study (1997-2000). ZDM, 29 (4), 138-140.

[12] Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science and Education, 10,* 391-408.

[13] Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practise: Case Studies Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 55-61

[14] Liu, P. (2003). Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in their Teaching? *The Mathematics Teacher, 96*(6),416.

[15] Marshall, G. L., & Rich, B. S. (2000). The Role of History in a Mathematics Class. *Mathematics Teacher,* 93(8), 704-706.

[16] Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics,* 20(1), 44 – 55.

[17] Van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics,* 17(2), 39 – 46.

[18] Wilson, P.S., & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.

Reivindicando la Geometría en los Planes de Estudios de las Ingenierías

E. Téllez Fabiani (1), D. Brun Battistini (2)

(1) *Universidad Iberoamericana Ciudad de México*
Departamento de Física y Matemáticas
tellezfabiani@yahoo.com

(2) *Universidad Iberoamericana Ciudad de México*
Departamento de Física y Matemáticas
dominique.brun@ibero.mx

***Resumen*— A lo largo de los últimos años, en cursos básicos de ingenierías, el estudio de la aritmética y del álgebra han sido prioritarios frente al de la geometría. Entre los diferentes problemas en la adquisición del conocimiento en las materias básicas de ingenierías, el de la concepción espacial, sobre todo la visualización de la tercera dimensión en un plano, sea éste el pizarrón o una pantalla, es frecuentemente un impedimento para la resolución de algún problema. En este trabajo se pretende hacer énfasis en la geometría para los cursos básicos de ingenierías, señalando su importancia aún en la física más fundamental. Además, se analiza la importancia de que esta disciplina se trabaje de manera sistemática desde la educación media superior.**

Palabras clave—geometría, espacio, ingenierías

VIII. INTRODUCCIÓN

Al realizar una revisión de los temarios de los propedéuticos y remediales de matemáticas, en la transición de la educación media superior a la superior, se encuentra que la Geometría es prácticamente inexistente.

Se hace mucho énfasis en las funciones trigonométricas, sobre todo en su dominio y rango y en el hecho de que estas funciones no tienen sentido sin un argumento.

A pesar de ello, el estudiante se enfrenta a situaciones, durante sus estudios de licenciatura, en los que la falta de confianza en los conceptos geométricos impedirá la apropiación de nuevo conocimiento.

Si se hace un recuento histórico en México, se encuentra que la Geometría formaba parte fundamental de los planes de estudio de las ingenierías hasta finales de 1985. Todo indica que la imaginación visual se puso de lado para dar lugar al uso de programas de cómputo tales como el *autocad*, lo que tuvo como consecuencia la sustitución del diseño en 2D y el modelaje en 3D con el uso de estilógrafos. Al parecer, el mal-uso (y no el abuso) pedagógico de este tipo de tecnologías ha resultado en detrimento de la competencia visual geométrica.

Cabe aquí hacer mención de los textos escolares de los Colegios Jesuitas en la Nueva España. En aquellos tiempos, todos los textos debían tener una autorización eclesial que se daba esencialmente para evitar herejías. En una ocasión, planeando el inicio de clases, se encontraron con que no tenían la autorización para un texto de matemáticas, e incluyeron uno (se podría decir que de contrabando) en el mismo volumen que una de las mayores metafísicas ya bastante consolidadas de Fco Toledo, S. J., autoridad educativa en Roma. El texto, titulado *La Esfera*, de Maurolicco [1], es el comentario a un documento del mismo nombre de Sacrobosco, texto canónico de las matemáticas. En la Figura 1 se presenta una de las páginas del texto. Tiene que ver con la filosofía natural, en particular con la astronomía que en aquel entonces eran materia subordinadas a la Teología. Lo que se rescata aquí es la importancia que se le dio a la disciplina de las matemáticas.

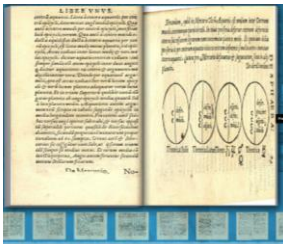


Fig. 1. Extraído de "Sobre La Esfera" (Maurolicco).

El resto del artículo se desarrolla de la siguiente manera: en la sección II se ejemplifica las materias de Cálculo, en la III las materias más aplicadas de Físicas y Químicas Generales y finalmente, en la sección IV se establecen los principales hallazgos y conclusiones.

IX. LA GEOMETRÍA EN LOS CÁLCULOS

En las materias de Cálculo el alumno se enfrenta a temas directamente relacionados con la visión geométrica. Tal vez el primero de ellos sea el del concepto de la función inversa: la función resultado de intercambiar las variables *x* e *y* en la función original será la función inversa. Aunque este tema maneja la geometría en 2D, supone un problema de visualización espacial para la mayoría de los alumnos, quienes prefieren recurrir al método algebraico para hallar la solución. El siguiente gran tema en esta disciplina es el de los sólidos de revolución, donde en las aplicaciones de la integral se pide hallar el sólido generado al hacer girar una función acotada en un intervalo, alrededor del eje *x* o del eje *y*.

El siguiente paso en esta disciplina involucra integrales dobles y triples, de línea y de superficie, en los cuales el problema se agudiza. Por ejemplo, el tratar de visualizar el vector normal a una superficie, cuando ésta no es plana, les resulta un problema mayor.

X. LA GEOMETRÍA EN LAS FÍSICAS Y QUÍMICAS GENERALES

La Física y la Química están llenas de aplicaciones geométricas. Uno clásico es en Óptica Geométrica, caso que se ejemplificará con las preguntas conceptuales del Hewitt [2]. Véase el ejercicio 8 del capítulo 6 extraído en la Figura 2, el estudiante presenta dificultades al dibujar la dirección de los rayos luminosos.

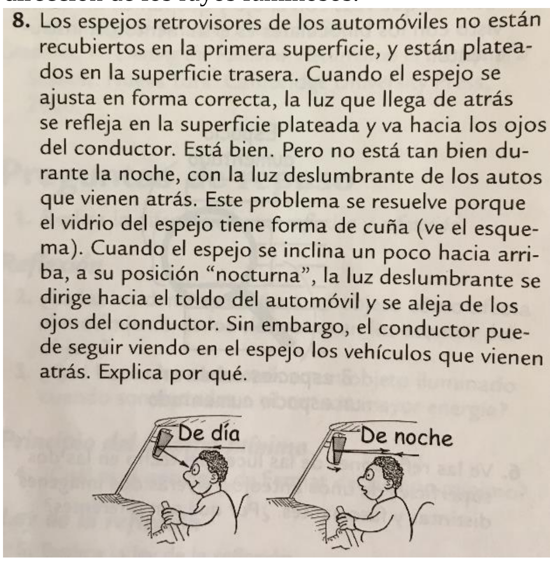

8. Los espejos retrovisores de los automóviles no están recubiertos en la primera superficie, y están plateados en la superficie trasera. Cuando el espejo se ajusta en forma correcta, la luz que llega de atrás se refleja en la superficie plateada y va hacia los ojos del conductor. Está bien. Pero no está tan bien durante la noche, con la luz deslumbrante de los autos que vienen atrás. Este problema se resuelve porque el vidrio del espejo tiene forma de cuña (ve el esquema). Cuando el espejo se inclina un poco hacia arriba, a su posición "nocturna", la luz deslumbrante se dirige hacia el toldo del automóvil y se aleja de los ojos del conductor. Sin embargo, el conductor puede seguir viendo en el espejo los vehículos que vienen atrás. Explica por qué.

Fig. 2. Ejercicio 1 de Óptica Geométrica.

La ilustración (Figura 2), puesta como algo adicional al planteamiento, es prácticamente imposible de imaginar para la gran mayoría de los alumnos; muy a pesar de su experiencia en el uso cotidiano, para algunos de ellos. La ilustración muestra que dicho espejo es un prisma; esto es, tiene dos superficies reflectoras. Algo que se muestra es que una está ahumada y la otra no. Esto es parte de clave para saber por qué una refleja toda la luz y la otra, no. El verdadero problema con este ejercicio cualitativo es que no lo podían 'explicar', como lo pide el texto, porque ni siquiera lo entendían. La posible respuesta, sin agotar la multiplicidad de posibles 'explicaciones', está relacionada por la pequeña rotación del prisma, mostrada en la ilustración. Es un ejemplo modesto pero significativo de pérdida de la capacidad para relacionar el largo texto del planteamiento con la ilustración.

En contraste, el siguiente reactivo, de tan breve, desconcierta a cualquiera. Hay direcciones claras entre los objetos a considerar: la persona (en el avión), el arcoíris y la luz de sol. La luz solar hace un triángulo cuyos vértices son cada uno de los objetos. Hay una condición que restringe toda respuesta posible: las gotas de lluvia que hacen de prismas y que finalmente producen el arcoíris, tiene que estar frente a la visual de la persona (en el avión); de tal manera que, a la pregunta por el lugar de la sombra del avión, solo puede estar en medio del arcoíris, dadas las restricciones, porque el vértice restante, del sol, debe estar atrás del avión. Las múltiples respuestas de los alumnos estuvieron totalmente incoherentes porque tenían que curvar, o quebrar, los rayos del sol para mostrara la sombra y la formación del arcoíris que, además, es una afirmación en el planteamiento, no es una duda (véase la Figura 3).

38. Un arcoiris visto desde un avión puede formar un círculo completo. ¿Dónde aparecerá la sombra del avión? Explica por qué.

Fig. 3. Ejercicio 2 de Óptica Geométrica.

En estos dos ejemplos vemos que los alumnos no usan su mejor herramienta: el sentido común. Quien la usa, garantiza mejores resultados, o al menos, una respuesta relativamente más clara de la realidad. De eso se tratan este tipo de problemas que son cotidianos y cualitativos. Un ejemplo, hasta cierto punto irónico, es plantear solo la ilustración, por ejemplo la cascada de

Escher (Figura 4), con alguna pregunta rápida y concisa: ¿por qué no es posible? Planteada así, en negativo, se vuelve obvio y explícito que no tiene posibilidad de responder si es posible. Les advierte de la imposibilidad.

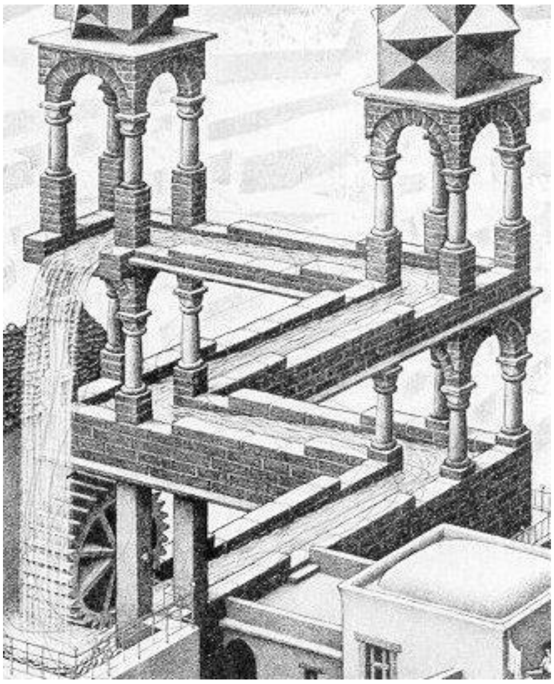


Fig. 4 *Cascada (Escher).*

A pesar de que el sentido común indica la imposibilidad, como tantas otras obras de este autor, algunos lo cuestionan desde su sentido común. El problema es que hay personas que también cuestionan su sentido común. Éste advierte un claro problema entre la segunda (de la representación) y tercera dimensión (de la realidad). Las respuestas, intencionalmente, pueden ser de las más variadas: hidrostática, energía potencial, fuerza de gravedad, etc., y hasta la redacción de sus planteamientos, lo que representa una excelente excusa para revisarla. No importa la resolución que emane de ellas, lo significativo es que recobremos el sentido común, que nos volvamos a reconectar con la realidad física. Y sepamos dar cuenta de ella de varias maneras.

Con la idea de 'subir' el nivel de abstracción, no necesariamente se refiere a la coincidencia de más imbricaciones entre distintos elementos de una unidad, como una telaraña, o una imagen barroca, o inclusive algo inasequible como un átomo, que nos lo representamos de varias maneras, de acuerdo a una cierta consistencia con las ecuaciones. Puede ser algo más sencillo: un punto extendido se convierte en una línea; una línea extendida se convierte en un plano; finalmente, un plano extendido se convierte en un cubo.

Con una idea similar, se puede ilustrar el campo magnético, sin pasar por el monopolo (equivalente al punto en el símil anterior), dada su inexistencia. Un alambre, nos dicen, es considerado como una línea lo suficientemente más larga comparada con su sección transversal. Pero el ejemplo no es literalmente de dimensiones espaciales, sino de 'dobleces' en tercera dimensión [3]. Empezamos con un alambre recto, que lleva una corriente, y dibujamos el campo magnético alrededor de él, de acuerdo a la bien socorrida 'regla de la mano derecha'. Ahora, lo doblamos un poco y volvemos a dibujar el campo magnético, ligeramente distorsionado, para que se vea una diferencia entre las dos situaciones. Después, hacemos una espira (dando una vuelta), y mostramos el campo magnético con su concentración interna y dispersión exterior para que se nota la conveniencia de hacerlo. Pero antes de seguir, preguntamos por los polos magnéticos. Y empiezan los problemas, porque no es claro dónde y en qué dirección se encuentran.

Seguimos haciendo espiras y paramos: el campo magnético sigue igual que en las situaciones anteriores, pero se hace más intenso (esa es la intención). La bobina, en conjunto, ya ofrece un campo magnético similar al de una barra imán. Hacerlo poco a poco, y dibujando con calma, es parte del ejercicio; lo de menos, es presentar los dibujos en *power point*. Pero eso no es lo que permite despertar la imaginación de las cosas existentes y no se ven en la física. Un último doblez: esa bobina ahora intentamos doblarla toda y juntar relativamente bien sus extremos. Tenemos un toroide. Pregunta, ¿dónde y de qué manera apunta su campo magnético? Los alumnos, de pronto, tuercen la cabeza, intentan aplicar de nuevo la 'regla de la mano derecha' y no se imaginan cómo se genera.

Pasando del Electromagnetismo a la Mecánica, un tema que suele ser muy ilustrativo en sesiones didácticas es la Mecánica Celeste [3], donde las leyes de Kepler usan básicamente geometría elemental. Una de ellas, la segunda ley dice: Un planeta recorre distancias áreas en tiempos iguales (ver Figura 5).

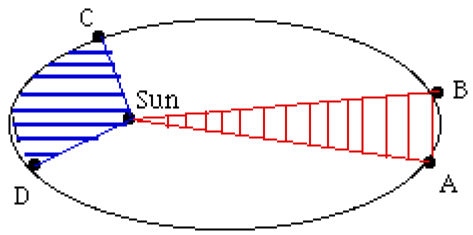


Fig. 5. Ilustración de las leyes de Kepler.

Los estudiantes presentan dificultades al relacionar los meses del año con las áreas. Generalmente los profesores no presentan una cuadrícula para demostrar que las áreas son iguales; los estudiantes, ante insuficiente información, se quedan con una idea errónea o, por lo menos, difícil de digerir.
Tocando un tema más amplio, en la Física se manejan magnitudes vectoriales, entre otras. Los alumnos de ingenierías, en su mayoría, prefieren realizar las operaciones con vectores (básicamente producto escalar y vectorial) con el método de las componentes. A menos que el ángulo entre los vectores sea evidente usarán la ecuación que involucra las magnitudes de los vectores y una función trigonométrica. Curiosamente, al impartir clases a diseñadores industriales, el método gráfico prevalecía.
Por otra parte, en la asignatura de Química General, tradicionalmente, se representan los modelos atómicos de manera geométrica, algunos son muy sencillos y otros mucho más complicados, como es el caso del modelo del átomo de Cesio de la figura 6. Asimismo, en la frontera entre la Química y la Física, se tiene el tema de la cristalización.

XI. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Luego de analizar diferentes escenarios de situaciones problemáticas concernientes a la Geometría, el panorama parece desalentador. Lo grave es que un estudiante puede continuar con su carrera de ingeniería e incluso titularse sin tener una buena base de Geometría en 3D y a veces un conocimiento mínimo en 2D. Algo tan elemental como un vector en 2D les cuesta trabajo, cuantimás en 3D. Sin embargo, si revisamos los exámenes de egreso del CENEVAL (EGEL) nos encontramos que sí tienen una componente más que básica de Geometría (véase la Figura 8).
Una de las ingenierías donde oficialmente se plasma la importancia de la Geometría es en Ingeniería Civil y se observa en el examen de egreso del Ceneval (EGEL), pero el resto adolece fuertemente de la representación geométrica del mundo. Volvemos entonces, a las cosas simples, sin negar la importancia de la tecnología (sin duda es un apoyo, pero no es todo) y tratando de ser pacientes con métodos de dibujo básico. Se intuye que se tendrán mejores resultados. Lo obvio suele ser lo más difícil.

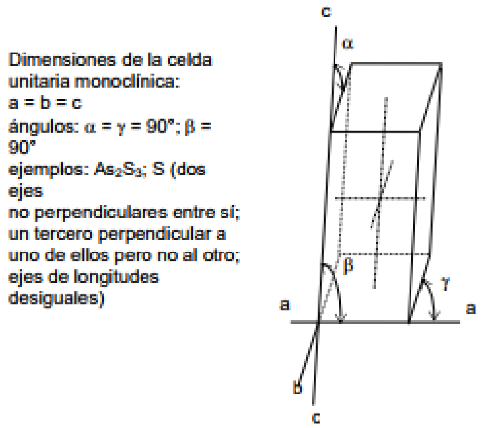


Fig. 6 *Extracto del formulario EGEL de Ingeniería Civil.*

A veces los docentes lamentan que alumnos que consideran inteligentes, son un talento desperdiciado; al no saberlo incorporar dentro de un grupo ese talento se va de las manos. A veces pasa que el profesor puede ser brillante con sus investigaciones pero no logra entusiasmar, ni trasmite adecuadamente sus conocimientos. En ambos casos, hay problemas. Puede ser un círculo vicioso; sin embargo, el profesor tiene la obligación de romperlo primero. Es ahí justo donde debe detenerse a entender las dificultades de sus interlocutores y tratar de solucionarlas. El esfuerzo que supone puede ser mucho o poco, relativamente. Pero vale la pena hacer los cambios que exigen las circunstancias, como hacer una maqueta con hilos estirados que forman figuras geométricas para hacer ver los vectores en tres dimensiones que en el pizarrón solo aparece en dos; llevar plastilina para formar las figuras que de pronto necesitan en los sólidos considerados en electromagnetismo; entre muchas otras cosas.

Los mejores alumnos no son los que obtienen la mejor calificación independientemente del profesor; sino los que obligan a aprender de ellos al profesor. Es un acompañamiento mutuo. Los profesores enseñan lo que necesita el alumno, no lo que quiere el profesor. Es un problema de fondo, nada menor, sobre todo cuando los docentes se enfrentan a alumnos que ya llegan desmotivados porque no han podido aprobar la materia varias veces. Ellos, son nuestra mejor oportunidad, nuestro mejor reto.

V. REFERENCIAS

[19] Maurolicco, *De La Esfera*. http://www.archivo.cehmcarso.com.mx/janium/BCEHM/50010/index.html, p. 333

[20] P. G. Hewitt, *Conceptual Physics.* New York: Pearson Education, 2002.

[21] Sears & Zemansky, *University Physics with Modern Physics*. New York: Addisson-Wesley 13 ed., 2011.

CRÉDITOS DE IMÁGENES:

[Figura 1] referencia [1] p. 333.
[Figura 2-3] referencia [2].
[Figura 4] La Cascada, Escher.
http://www.geocities.ws/fisicas/cientificos/escher.html
recuperado el1/09/2017.
[Figura 5] Leyes de Kepler.
https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Mkepl3laws.htm,
recuperado 1 /09/2017.
[Figura 6] Formulario EGEL Ingeniería Civil.
www.ceneval.edu.mx, recuperado el 10 /09/2017.

Los contenidos matemáticos mínimos que se necesitan en ingeniería

R. Ruiz-Cruz [1]

[1] *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente*
Departamento de Matemáticas y Física
riemannruiz@iteso.mx

***Resumen*—En los estudios de ingeniería es indispensable desarrollar habilidades y conocimientos de matemáticas. El tema de discusión/reflexión en la creación, revisión y mejora de un programa de estudios de ingeniería siempre recae en los conocimientos mínimos necesarios que se deben de abarcar en cada programa. En este artículo se propone discutir el contenido mínimo necesario para una ingeniería con ejemplos concretos para justificar la inclusión.**

***Palabras clave*—Ingeniería, Estudio de matemáticas, Aplicaciones de la ingeniería.**

XII. Introducción

En la formación de estudiantes de una ingeniería es muy importante la inclusión de las matemáticas, debido a que permite adquirir la capacidad de proponer soluciones a problemas, o la mejora de los procesos en una industria. Esta formación es lo que, como profesores, tratamos de transmitir a los alumnos a diario en el salón de clase. Cada profesor usa sus habilidades para idear formas de motivar a los alumnos para el estudio de las matemáticas.

Pero la pregunta que normalmente tienen los alumnos con respecto a las matemáticas es: *¿Esto en que lo voy a aplicar?* Y la respuesta esperada por los estudiantes tiene que estar enfocada al ámbito de la carrera que ellos están estudiando o que pretenden estudiar. Y aquí es donde conviene hacer uso de la experiencia del profesor para responder de tal manera que la motivación de los estudiantes crezca.

Desde mi experiencia, en la mayoría de los casos, el comentario que le sirve a los alumnos es el siguiente: las matemáticas son herramientas de análisis que permiten resolver partes de problemas más grandes, donde es necesario la inclusión de más técnicas que no necesariamente son matemáticas. Las herramientas matemáticas que aprenden son como una tuerca en un automóvil, por si sola tiene un fin muy específico (sujetar una pieza del automóvil), pero esa tuerca forma parte de un gran mecanismo que hace posible que nos transportemos con facilidad.

Debido a esto, los estudiantes tienen que dejar de pensar que no es necesario aprender a derivar o integrar solamente porque en su trabajo ideal no estarán derivando todo el tiempo. La manera en la que he tratado de darles otra perspectiva es mencionándoles que “aprender a sumar o restar” es muy importante, y realmente no andan por la vida sumando y restando todo lo que encuentran, sin embargo, cuando se presentan ocasiones donde se requiere, saber sumar o restar hace la diferencia. Aprender a leer y escribir es obtener una habilidad que no te obliga a ser un escritor, pero si hace la diferencia desde la simple actividad de comunicarte, hasta aprender cosas nuevas en tu profesión.

De forma similar a los ejemplos anteriores, se puede pensar que las matemáticas; son herramientas que como ingeniero no necesariamente las estaremos aplicando en todo lo que vemos, pero es mejor saberlas cuando se requieran. Son como una lámpara en una casa. No siempre la usamos, pero cuando se va la luz, nos facilita las cosas.

En sección siguiente de este artículo se tratarán de definir temas importantes que se deben de aprender en las ingenierías.

XIII. Contenidos matemáticos mínimos

Definir los contenidos mínimos que se requieren en una ingeniería es complejo, debido a que desde la perspectiva de cada ingeniero pueden definir temas importantes. En seguida se tratará de poner en contexto la necesidad de los temas de matemáticas desde el área del control automático, la ciencia de datos, ingeniería financiera e ingeniería electrónica, las cuales son áreas donde me he desempeñado con la aplicación de las matemáticas.

A. Control Automático

- *Algebra Lineal.* La teoría de control moderna para sistemas lineales se basa principalmente en expresar los sistemas reales en su forma en "espacio de estados", la cual es una representación matricial. Se requiere operar el modelo matricial, por lo que inherentemente se requiere tener conocimientos de algebra matricial.
- *Ecuaciones diferenciales*. Para el modelado de sistemas físicos, se requiere tener habilidades en la construcción, manipulación y solución de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior.
- *Cálculo diferencial y multivariable*. Analizar que un sistema tiene puntos de equilibrio, analizar estabilidad y discontinuidades, se requiere tener habilidades en el manejo de cálculo diferencial y calculo multivariable para la obtención de gradientes de sistemas con respecto al tiempo o con respecto a otras variables.

B. Ciencia de datos

- *Estadística.* El análisis de datos o "Data Science" es básicamente la aplicación de medidas estadísticas aplicadas a gran cantidad de datos.
- *Modelos de regresión multivariable*. El área de la ingeniería conocida como "Machine Learning" principalmente se enfoca en el ajuste de modelos de regresión (lineal, polinomial o con Kernel), para el modelado de bases datos que se obtienen de fenómenos de cualquier clase.
- *Probabilidad.* Los modelos basados en datos no tienen un principio determinista. Los modelos requieren obtener medidas de probabilidad para determinar si el modelo explica o no los datos que se están analizando. Estos modelos hacen posible las predicciones de Google[1] para las búsquedas, así como que la plataforma Facebook[2] reconozca los rostros de las personas que publican en esta red social.

C. Ingeniería financiera

La ingeniería financiera consiste principalmente en la aplicación de modelos matemáticos para el modelado de comportamiento variables financieras y poder realizar estimaciones para la toma de decisiones. De los conocimientos mínimos podemos enlistar los siguientes:

- *Probabilidad y estadística.* Uno de los principales problemas que se trata de resolver en la ingeniería financiera es la estimación de precios o rendimientos futuros. Así como basado en los datos históricos de la obtención de medidas estadísticas para tratar de medir el riesgo de las inversiones.
- *Ecuaciones diferenciales.* Se requieren habilidades en el manejo de ecuaciones diferenciales para la valuación de contratos de futuros. Esta valuación también requiere el uso de probabilidad, y a esta mezcla se le conoce como cálculo estocástico.

D. Ingeniería en electrónica

En la ingeniería electrónica, se pueden distinguir dos grandes áreas de aplicación: la electrónica digital y la electrónica analógica. En cada área se requieren de conocimientos de matemáticas para entender el funcionamiento de diseños y poder proponer nuevos. En el área de electrónica digital los contenidos mínimos que considero deben de incluirse son los siguientes:

- *Manejo de bases y exponentes.* La mayoría ha escuchado que el sistema numérico utilizado por cualquier computadora es el binario. Que es una codificación en base 2 de los números reales. Además de la binaria, la codificación hexadecimal (codificación en base 16 de los números reales) es muy utilizada debido a que simplifica la representación de los números en grupos 4 bits. Por lo que el manejo de exponentes es necesario para poder entender la realización de operaciones básicas (como suma, resta, multiplicación, división, …) entre número de diferentes bases.
- *Matemáticas discretas.* Para entender el

[1] Google es marca registrada de Alphabet, Inc.

[2] Facebook es marca registrada de Facebook, Inc.

funcionamiento de las compuertas lógicas y realizar diseños complejos por medio de lógica combinacional. El mapa de entrada y salida de un circuito digital está representado por medio de tablas de verdad, el cual requiere de la llamada algebra booleana para su análisis. En esta algebra se definen las operaciones como de suma, resta, etc. en una base binaria.

- *Ecuaciones en diferencias.* Las telecomunicaciones usan equipos digitales para el manejo de las señales, pero los codificadores, decodificadores y filtros digitales son fácilmente analizados por medio de sus representaciones en ecuaciones en diferencias.

Por otro lado, los contenidos mínimos para adentrarse al mundo de la electrónica analógica pueden enlistarse los siguientes:

- *Sistema de ecuaciones lineales*. En el análisis de circuitos eléctricos con elementos pasivos se requiere encontrar valores de resistencias para garantizar que el circuito no sufra sobre corrientes que lleven a causar daños en los circuitos. Con la aplicación de las Leyes de Kirchhoff se obtienen sistemas de ecuaciones lineales muy grandes que requieren solución por los métodos que se abordan en algebra lineal.
- *Algebra*. Para el análisis de circuitos pequeños puede ser requerido simplemente el uso de algebra básica. (Despeje de variables, lo que implica el manejo de leyes de signos, sumas y retas, etc.)
- *Funciones trigonométricas*. (funciones periódicas seno, coseno), con la finalidad de comprender que las telecomunicaciones se realizan por medio de señales de energía periódica. Y aunque se mencione que las comunicaciones actualmente son digitales, las señales portadoras de la información aún siguen siendo analógicas. Se requiere tener el conocimiento y buen manejo de funciones, composición de funciones para llegar a la operación convolución de funciones, esto implica el manejo de integrales impropias. La aplicación directa de estos conceptos se encuentra en la modulación AM, FM, PM que es la forma en cómo se transporta la información por el aire.
- *Calculo integral.* En análisis entrada-salida de circuitos eléctricos es muy común utilizar la trasformación Laplace, la cual esta expresada como una integral que cambia los sistemas del domino del tiempo al dominio de la frecuencia. Lo cual implica conocer los conceptos de dominio y rango, solución de integrales, manejo de polinomios, factorización de polinomios y despeje de polinomios.

XIV. CONCLUSIONES

De esta misma forma se pueden ir enlistando otros ejemplos que son importantes para un ingeniero en diferentes áreas de aplicación. Estas son aplicaciones especializadas que no solo hacen uso de algebra básica, cálculo diferencial o cálculo integral; y se hace mención de estas tres asignaturas propiamente porque son las más cuestionadas por los alumnos que no logran ver, el para que les pueden servir las herramientas que están aprendiendo.

Además de tener un buen manejo de los contenidos matemáticos, los jóvenes deben de ser capaces de razonar e interpretar los resultados que les proporcionan las operaciones que realizan. Muchas veces no es necesario terminar el proceso algebraico, el despeje, o todo el procedimiento para poder darse cuenta de que el resultado no es correcto; la habilidad de razonar los resultados intermedios es un punto clave para esto.

XV. AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los organizadores del Séptimo Foro de enseñanza de las Matemáticas por la invitación para participar en el evento.

Talento y creatividad matemática

Z. Barraza García (1)

(1) *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores del Occidente*
Departamento de Matemáticas y Física
zbarraza@iteso.mx

***Resumen*— Este trabajo tiene el objetivo de abordar el tema "La enseñanza de las matemáticas para la transición exitosa del bachillerato a la universidad". El propósito de éste es profundizar sobre la importancia del desarrollo del pensamiento creativo en estudiantes con talento matemático.**

***Palabras clave*— *talento, creatividad, enseñanza superior*.**

XVI. Introducción

Quizá una de las definiciones más comunes del talento es la propuesta por (Maker, 2013): "habilidad para resolver los más complejos problemas de la manera más eficiente, eficaz y económica" (p. 71). Sin embargo, los problemas que los estudiantes talentosos resuelven, no siempre son los más complejos y sus soluciones no siempre son las más eficientes o económicas. Es decir, si ponemos atención solo a la resolución de problemas, el talento será descrito como la habilidad para observar problemas desde diferentes ángulos y aplicar soluciones innovadoras y creativas para resolverlos. Es en este sentido que se propone a continuación una visión del talento matemático, no sólo en términos de la complejidad o eficiencia, sino de la creatividad que un individuo manifiesta al resolver problemas.

XVII. Desarrollo

Una gran variedad de estudios sobre la relación entre la creatividad y el talento matemático, se han venido realizado desde hace algunos años, por ejemplo en 2009 se realizó la primera reunión de la Sociedad Matemática Coreana y la Sociedad Matemática Americana en donde uno de los temas principales de estudio fue "Creatividad, Talento y Desarrollo del Talento en Matemáticas" (Sriraman y Kyeong, 2011).

Sriraman (2004) uno de los autores más conocidos por su trabajo en este tema, propone una diferenciación entre la creatividad a nivel profesional y en el contexto escolar: "Creatividad matemática a un nivel profesional: habilidad para producir trabajo original que se extiende significativamente en el conjunto de conocimientos" (p.18). "Creatividad matemática en el nivel escolar: procesos de resolución que resultan inusuales o perspicaces y la formulación de nuevas posibilidades que permiten considerar los problemas ya vistos desde un nuevo ángulo" (p.19).

Otra investigación que hablan sobre la creatividad matemática es la de Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, Christou y Cleanthous (2010). En este modelo la creatividad matemática y el talento matemático se distingue por los siguientes tres elementos:

1. Fluidez o productividad (número de respuestas distintas).
2. Flexibilidad (número de diferentes tipos de respuestas).
3. Originalidad (nivel de unicidad de las respuestas).

En la Figura 1 se presenta uno de los cinco problemas propuestos por estos autores.

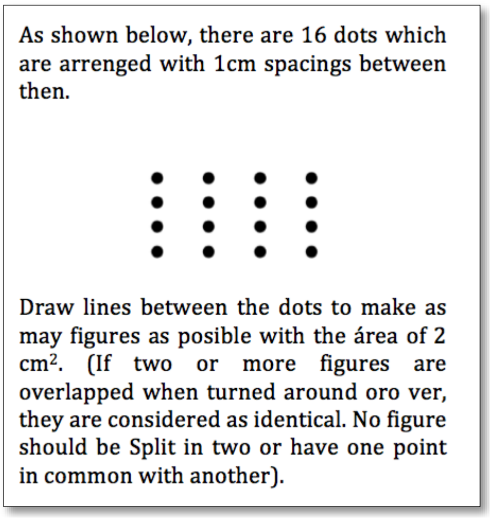


Fig. 1. Problema de un instrumento sobre la identificación de la creatividad matemática, tomado de Kattou y otros (2012).

Como podemos observar en la Figura 1, el problema cumple con la posibilidad de observar las tres características principales que definen estos autores, la creatividad matemática: fluidez o productividad, flexibilidad y originalidad. El instrumento utilizado en este estudio para medir la creatividad matemática incluía cinco problemas matemáticos abiertos de soluciones múltiples, en los cuales se requería ofrecer: (a) múltiples soluciones; (b) soluciones que fueran distintas unas de otras y (c) soluciones que no fueran fáciles de encontrar o que ninguno de sus compañeros pudiera proveer (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi y Christou, 2012).

Es interesante que otros autores que tienen ya más tiempo de haber concluido con sus investigaciones sobre el talento matemático reconocen también a la flexibilidad del pensamiento como una de las habilidades más características del talento, tal es el caso de Krutetskii (1976), que la describe no solo como la posibilidad de ofrecer distintos resultados a un mismo problema sino que además la describe como una habilidad que permite cambiar de una operación mental a otra con facilidad o de un proceso a otro.

¿Y por qué hablar sobre la importancia de la creatividad en los estudiantes con talento y no de estudiantes con problemas de aprendizaje en matemáticas? Este cuestionamiento nos lleva a diversas problemáticas sociales, la primera es la igualdad de oportunidades y de desarrollo que todo individuo debe tener, así lo presenta la UNESCO en el libro "La educación de niños con talento en Iberoamérica", en donde se proyecta lo siguiente:

"Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades y le permita su proyecto de vida. Hacer efectivo ese derecho implica asegurar el principio de igualdad de oportunidades, es decir proporcionar a cada uno las ayudas y recursos que requiere, en función de sus características y necesidades individuales." (2004, p. 9).

Asimismo, en este texto, se menciona que los sistemas educativos siguen ofreciendo respuestas homogéneas a personas con necesidades muy diversas, lo cual supone una barrera para lograr maximizar el potencial de cada uno de los alumnos en la escuela (UNESCO, 2004). Así, los alumnos que no se encuentren dentro de lo "supuestamente normal" quedan con un rezago en cuanto a su potencial intelectual. Además, los estudiantes con talento matemático que llegan a la universidad tienden a aburrirse dentro de clase en los primeros cursos de matemáticas y aunque podrían haber distintas soluciones para que esto no ocurriera, una de las más efectivas, menciona Mann (2006), es fomentar la resolución de problemas creativos para así desarrollar plenamente las habilidades de los estudiantes con talento.

Y por último, considerando que desarrollar el talento y la creatividad matemática en nuestros estudiantes abre la posibilidad de tener cuadros científicos y tecnológicos altamente capacitados, para generar mejores aplicaciones en la industria, en la producción de alimentos y en la salud; resulta una situación apremiante para el crecimiento económico de nuestro país, atender a estos estudiantes con talento desde la educación básica hasta la educación superior.

XVIII. Conclusiones

En resumen, la creatividad mantiene un vínculo estrecho con el desarrollo del talento, es por ello que implementar estrategias que permitan al estudiante resolver problemas con múltiples procesos de resolución o problemas no rutinarios es una tarea que, como docentes, debemos priorizar durante la trayectoria escolar de todos nuestros estudiantes, en igualdad de oportunidades.

XIX. Referencias

[22] Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2012). "Connecting mathematical creativity to mathematical ability". ZDM Mathematics Education. Springer. 45(2), pp. 167-181.

[23] Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., Christou, C., y Cleanthous, E. (2010). "Predicting mathematical creativity". Proceedings of the 6th International Conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted students. Riga, Latvia: International Group for Mathematical Creativity and Giftedness (MCG), pp. 110 – 113.

[24] Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Trad. Teller J.). Chicago, EEUU: The University of Chicago Press (Original en ruso, 1968).

[25] Maker, C. (1993). Creativity, intelligence, and problem solving: A definition and design for cross-cultural research and measurement related to giftedness. Gifted Education International. 9(2). The University of Arizona, USA: Academic Publishers.

[26] Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. Journal for the Education of the Gifted, 30(2), (pp. 236–262).

[27] Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creavity. The Mathematics Educator.

[28] Sriraman, B. y Kyeong, H. (2011). The elements of creativity and the giftedness in mathematics. Países Bajos: Sense Publishers.

[29] UNESCO. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. (M. Benavides, A. Maz, & R. Blanco, Eds.) Santiago, Chile: Trineo S.

Cambios en habilidades, destrezas y conocimientos matemáticos en alumnos de primer ingreso a la Universidad al comparar los años 2003 y 2014

K. Ibarra González (1), C. Eccius-Wellmann (2)

(1) *Universidad Panamericana Campus Guadalajara*
Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales
kibarra@up.edu.mx

(2) *Universidad Panamericana Campus Guadalajara*
Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales
ceccius@up.edu.mx

Resumen—**Las habilidades, destrezas y conocimientos matemáticos de los alumnos de primer ingreso, a las carreras administrativas, son medidas por medio de una evaluación diagnóstica. Objetivo de esta investigación es analizar las diferencias significativas en los índices de facilidad por reactivo en los años 2003 y 2014. Así mismo, se analizan las causas principales de los errores más frecuentes en los reactivos con diferencia significativa. Se encuentra que en 30 de los 42 reactivos el índice de facilidad es estadísticamente mayor en 2003 que en 2014. Un solo reactivo resultó con un índice de facilidad significativamente mayor en 2014. Con estos resultados se concluye, que los alumnos han perdido destrezas, habilidades y conocimientos matemáticos necesarios para su desarrollo universitario y profesional.**

Palabras clave— *Índice de Facilidad, estudiantes de primer ingreso, evaluación diagnóstica, matemáticas*

XX. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los alumnos de primer ingreso a la universidad en las carreras administrativas suelen tener deficiencias en matemáticas. El premio FIMPES 2012 fue otorgado a una investigación titulada: Temas y errores que han provocado baja en el desempeño matemático de los alumnos de primer ingreso a la universidad. En esta investigación se encontró, que los conocimientos y habilidades aritméticos y algebraicos de los alumnos de primer ingreso, en general, han disminuido de forma significativa al comparar una evaluación diagnóstica entre los años 2003 a 2011. En el periodo de tiempo, comprendido entre los años mencionados, los promedios de las puntuaciones totales en la evaluación sufrieron un cambio significativo a la baja cada tres años [1]. Los mismos autores ampliaron la información al año 2014 y reportan, que también en el lapso de 2011 a 2014 hubo una baja significativa en el desempeño de los alumnos de primer ingreso [2].

El objetivo de esta investigación es determinar en qué ítems de la evaluación diagnóstica, entre los años 2003 y 2014, se tiene una diferencia en los índices de facilidad (proporción de acierto) significativa, y determinar las causas más comunes de error en dichos ítems.

Preguntas de investigación:

¿Cuáles son los ítems con una diferencia significativa en los índices de facilidad entre los años 2003 y 2014?

¿En cada ítem de la comparación anterior, con diferencia significativa, cuáles son las causas de los errores más frecuentes?

XXI. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. MARCO TEÓRICO

1. *Índices de facilidad*

Los índices de facilidad o índices de dificultad miden el porcentaje de acierto o desacierto en una prueba por ítem [3], [4]. Para efectos de esta investigación, se considera que el índice de facilidad (IF) es equivalente a la proporción de acierto, por lo cual es posible hacer una comparación de proporciones entre los años 2003 y 2014, por ítem.

2. *Causas de los errores aritméticos y algebraicos más comunes*

Los errores encontrados más comunes que pueden provocar una disminución del índice de facilidad de los reactivos son:

1) Errores en jerarquía de operaciones y signos de agrupación [5].
    a. Se realiza la operación de izquierda a derecha sin considerar jerarquía
    b. No reconocimiento de los signos de agrupación implícitos
    c. Utilización de signos de agrupación "inventados" (donde no existen)
    d. Aplicación de la ley distributiva
2) Operaciones con fracciones
    a. Automatización de reglas de operaciones en base sintáctica [6].
    b. No considerar la opción de simplificación
3) Errores de perseverancia [7].
4) Errores de concatenación [8],[9].
5) Manejo del cero: "el cero no es nada y se puede omitir" [10], o "el cero no cambia nada" [11].
6) Interpretación del signo de igualdad como orden de acción [8], [9], [10].
7) Asociaciones erróneas entre los elementos del ejercicio [10].
8) Falta de metacognición o limitación de los esquemas existentes [9], [10].
9) Falta de sentido de estructura [12].
10) Reparaciones: partes y elementos "molestos" se omiten o desechan [9].
11) Esquemas de tachado indiscriminados [9], [10].
12) Sobre-generalizaciones de esquemas en situaciones no válidas [9], [10].
13) Confusión de elementos neutros según distintas operaciones [10].
14) Confusión visual y percepción incompleta [8], [9].
15) Errores que se pueden atribuir a expresiones verbales [8], [5], [10].
16) Errores con la interpretación de la estructura de los términos [9].
17) Origen en fases de aprendizaje anteriores (Shevarev en [9]).
18) Errores al no diferenciar entre ecuaciones y expresiones algebraicas [5].

B. METODOLOGÍA

1. *Participantes*

Un total de 311 alumnos de primer ingreso a la Universidad, a las carreras administrativas, participaron en el año 2003 y 166 alumnos en el 2014.

2. *Instrumento*

La evaluación diagnóstica es aplicada a los alumnos de primer ingreso a las Carreras de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales con la finalidad de conocer los conocimientos, habilidades y destrezas con las cuales ingresan al Campus. Ésta ha permanecido inmutable desde 2003, por lo cual, es posible hacer un estudio comparativo de los índices de facilidad por reactivo en diferentes generaciones.

La prueba consta de 42 reactivos en los cuales se incluyen temas como jerarquía de operaciones, operaciones con fracciones, radicales, leyes de exponentes, operaciones algebraicas, factorización algebraica, resolución de ecuaciones, función lineal y porcentajes (ver reactivos en la Tabla 1). La evaluación debe realizarse sin calculadora y tiene una duración de una hora.

3. *Procedimientos estadísticos*

Cada reactivo es evaluado como correcto o incorrecto y su índice de facilidad (IF) se calcula, de la siguiente forma:

$$IF_{i,a} = \%\ de\ respuestas\ correctas$$

Donde:

i, a, corresponden al número de ítem y al año de aplicación, 2003 o 2014, respectivamente.

Como hipótesis nula se plantea la igualdad de los índices de facilidad por ítem y por año, alternativamente, se considera la hipótesis de la no igualdad de los índices de facilidad.

H_0: $IF_{i,2003} = IF_{i,2014}$

H_a: $IF_{i,2003} \neq IF_{i,2014}$

Para comparar los índices de facilidad entre los años 2003 y 2014 se calcularon los valores de z de la comparación de proporciones por ítem mediante:

$$z_i = \frac{IF_{i,2003} - IF_{i,2014}}{\sqrt{p_i(1-p_i)\left(\frac{1}{311} + \frac{1}{166}\right)}}$$

Donde:

p_i, corresponde a la proporción conjunta de acierto de los dos años por ítem

$(1-p_i)$, corresponde a la proporción de desacierto conjunta por ítem.

Los valores de z se interpretan con la distribución normal, es decir, todos los valores absolutos de z mayores a 1.645, identifican aquellos reactivos en que las proporciones entre los años 2003 y 2014 difieren estadísticamente con un p-valor menor a 0.05.

XXII. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 1 se comparan los IF por reactivo y por año de análisis. Se observa, que la mayoría de los reactivos, tienen IF's por debajo de 25%, línea horizontal que se marca en la figura. Además, en la mayoría de los reactivos el $IF_{i,2003}$ es mayor al $IF_{i,2014}$, excepto en los reactivos 4, 12, 20, 40 y 42

En la Figura 2, se muestran los valores de z de la prueba de proporciones. Los valores marcados en negro, son aquellos que muestran proporciones significativamente distintas. Las barras negras que tienen un valor positivo, simbolizan que la proporción de 2003 fue significativamente mayor a la de 2014. La barra negra negativa del ítem 20, expresa que en 2014 se tuvo una proporción significativamente mayor a la proporción de 2003.

El cambio de las proporciones de acierto es significativo a la baja de 2003 a 2014 en 30 de los reactivos, mientras que sólo en un reactivo es significativo al alza.

Una vez establecidos los reactivos con diferencia significativa en IF de 2003 a 2014, resulta de interés el conocer las causas de los errores más comunes encontrados. La Tabla 1 presenta los reactivos (1-42) de la evaluación diagnóstica y hace una relación del tipo de error más frecuente (con IF's significativamente diferentes a la baja en 2014 respecto a 2003) según la clasificación dada en el apartado 2 del marco teórico.

En 2003, 17 reactivos, tuvieron un IF mayor a 0.25, mientras que en 2014 el número de reactivos disminuyó a 13.

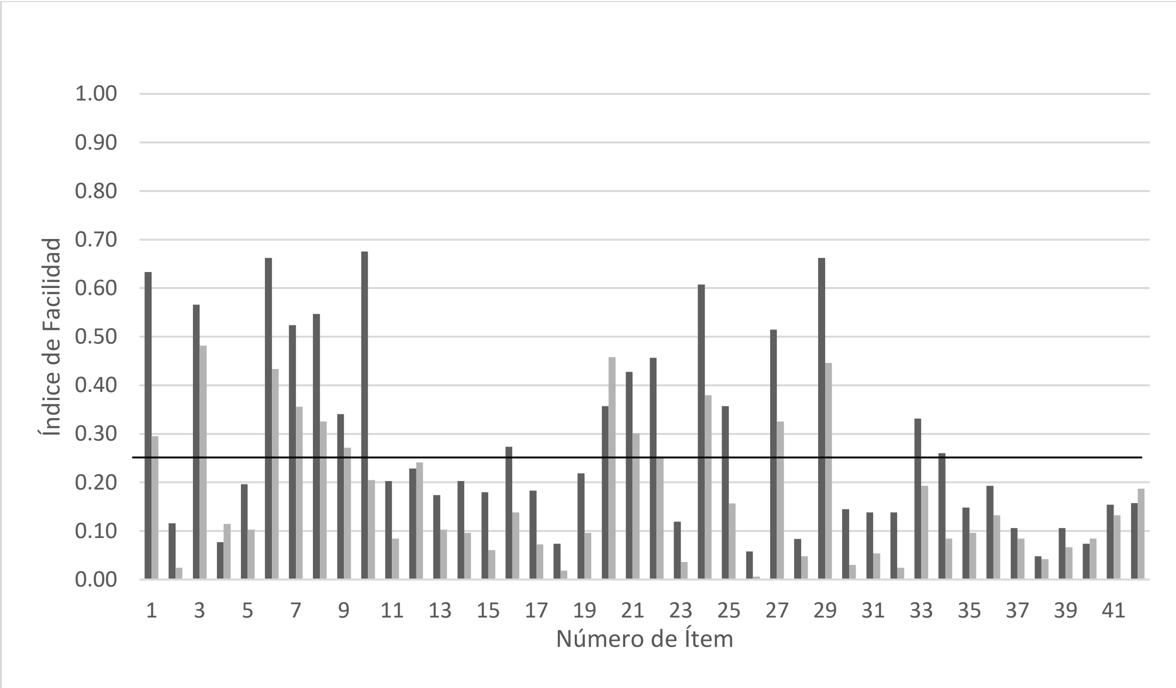


Fig. 1. Comparación de Índices de Facilidad de los 42 ítems de la evaluación diagnóstica de los años 2003 y 2014.
Nota: Las barras en negro corresponden a IF del año 2003, las barras en color gris corresponden a IF del año 2014, por ítem

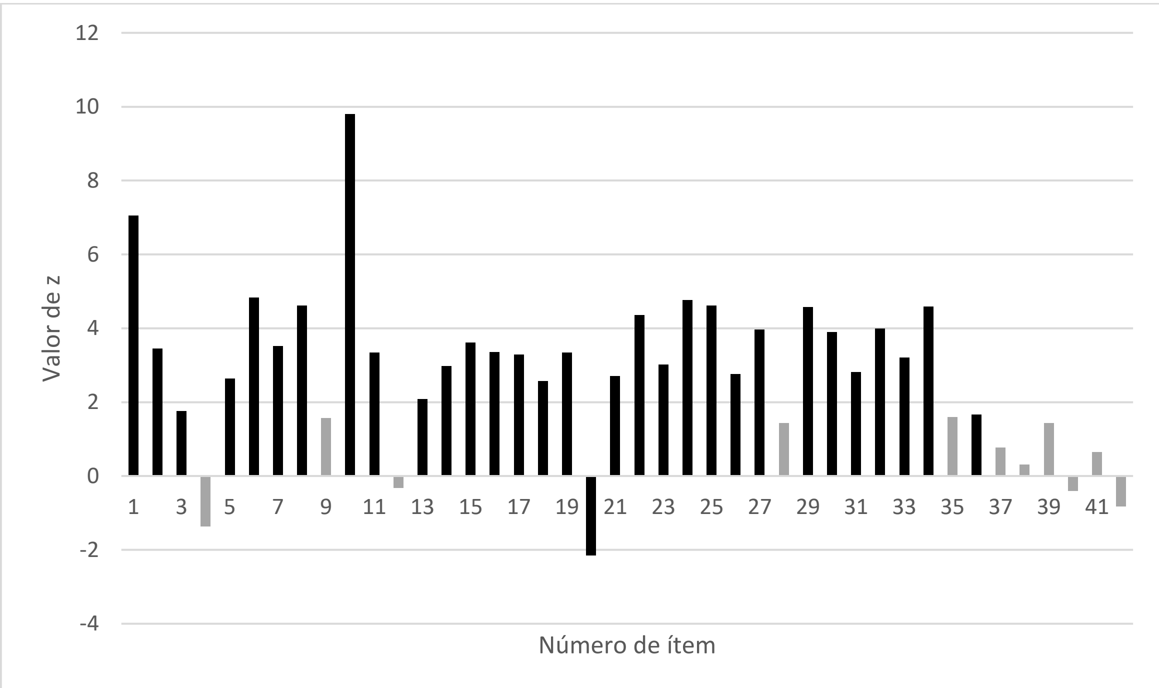


Fig. 2. Valores de z de la comparación de proporciones de acierto por ítem entre los años 2003 y 2014

TABLA 1

REACTIVOS DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y CATEGORIZACIÓN DEL TIPO DE ERROR MÁS FRECUENTE

# de ítem	**Reactivo**	**Tipo de error más frecuente**
Calcula		
1	$25 - 5 \cdot 2 + 4 =$	1a, 1c
2	$2 + 3 \cdot \sqrt{3} - 4 =$	1a, 10
3	$9 \cdot 3 \div 6 \cdot 0 =$	1c, 5
4	$-8^2 =$	Alza, no significativa
5	$\frac{8}{7} \cdot \frac{14}{2} \cdot \frac{9}{4} =$	2a, 2b
6	$\frac{21}{45} \div \frac{7}{15}$	2a, 2b
7	$\sqrt{0.16} =$	3, 8
8	$\sqrt{\frac{1}{9}} =$	3, 8, 10
9	$\sqrt[3]{-64} =$	Baja, no significativa
10	$\sqrt{4^2 + 3^2} =$	1b, 6, 11, 12
Simplifica las expresiones, recuerda que no queden exponentes negativos		
11	$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}} =$	7, 8, 9, 14
12	$b^{3x+1}b^{1-3x} =$	Alza, no significativa
13	$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m} =$	8, 9, 11, 14
14	$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}} =$	7, 8, 9, 11,14
15	$(-3x^{-4})^2 =$	7, 8, 9
16	$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}} =$	7, 8, 16
17	$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} =$	8, 10, 11
18, 23	$\sqrt{x^2 + y^2} =$	1b, 4, 6, 8, 12

Realiza las siguientes operaciones y simplifícalas		
19	$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} =$	7, 14, 15
20	$14x^2 - 6xy + 8xy - 3y^2 =$	Alza significativa de 2003 a 2014
21	$3 \cdot (x-2) + 4 \cdot (3-x) - (x-5) =$	1d, 4, 16, 18
22	$(z^2 - 5z + 4) \cdot (z-1) =$	1d, 4, 18
Factoriza completamente las expresiones algebraicas dadas		
24	$z^2 - 16z + 64 =$	4, 6, 9, 16, 18
25	$9y^2 + 6y + 1 =$	4, 6, 9, 16, 18
26	$x^2 + 1 + 3x(x^2 + 1) =$	4, 6, 8, 9, 16, 18
27	$x^2 - 12x + 35 =$	4, 6, 9, 16, 18
28	$y^3 - 9y =$	Baja, no significativa
Simplifica las fracciones algebraicas		
29	$\frac{(x-5)(x+3)}{(x+3)} =$	2b, 9, 18
30	$\frac{y \cdot (y+2) + (y+2)}{y+2} =$	9, 11, 12, 13, 16, 18
31	$\frac{(z+4) \cdot (z-1) + 2}{z+4} =$	9, 11, 12, 13, 16, 18
32	$\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b} =$	2a, 12, 17
Resuelve las siguientes ecuaciones		
33	$x \cdot (3-x) - 4 \cdot (1+x) + x \cdot (x-3) = 0$	1d, 4
34	$6 - \frac{2x}{3} = 9$	9, 14, 16
35	$\frac{x+3}{x-4} = 0$	Baja, no significativa
Resuelve las ecuaciones cuadráticas por factorización		
36	$x^2 - 4x + 3 = 0$	4, 9, 16, 18
37	$2x^2 + 2x = 0$	Baja, no significativa
Resuelve las ecuaciones cuadráticas por fórmula general		

38	$2x^2 - x - 15 = 0$	Baja, no significativa
39	$z^2 - 9 = 0$	Baja, no significativa
Calcula la intersección entre las rectas		
40	$x - y = 2$ $y - 2x = 1$	Alza, no significativa
Grafica la función		
41	$y = \frac{1}{2}x + 1$	Baja, no significativa
Resuelve la siguiente situación		
42	Un artículo está etiquetado en $232, ya con IVA incluido (16%). ¿Cuál es el precio del artículo antes del IVA?	Alza, no significativa

1. *Conclusiones*

Los estudiantes ingresan a la universidad con una serie de destrezas y habilidades adquiridos a lo largo de su vida estudiantil. Las evaluaciones diagnósticas permiten conocer el nivel de conocimientos y permite comparar diferentes años de aplicación.

Los resultados de este estudio muestran, que las habilidades, conocimientos y destrezas matemáticas han disminuido de 2003 a 2014. De un total de 42 reactivos, 37 mostraron una baja en el IF de 2003 a 2014, de los cuales 30 tuvieron una baja significativa. Únicamente 5 de los reactivos mostraron un alza en el IF, siendo sólo 1 de ellos significativo.

Las causas más frecuentes, detectadas en los errores cometidos por los estudiantes, son: concatenación, falta de metacognición o limitación de esquemas, no diferenciación entre ecuaciones y expresiones algebraicas, errores en la interpretación y sentido de la estructura.

La disminución de las habilidades, destrezas y conocimientos impacta de forma negativa el desempeño de los estudiantes, lo cual se vincula a nivel personal con su autoestima, la satisfacción con su vida, su salud y su capacidad de emplearse más fácilmente. Asimismo, impacta en el nivel de economía de un país, pues se relaciona con alumnos que eligen carreras con contenido matemático, como las ingenierías y las finanzas que actualmente rigen el mundo [13].

XXIII. Referencias

[1] C. Eccius-Wellmann, and K. Ibarra, (2012). Temas y errores que han provocado baja en el desempeño matemático de los alumnos de primer ingreso a la universidad. *FIMPES. Disponible en:* http://www.fimpes.org.mx/index.php/premio-fimpes?showall=&start=2

[2] C. Eccius-Wellmann, and K. Ibarra, “Cambios en el desempeño matemático entre hombres y mujeres. Análisis de tres cohortes generacionales,” *Revista Premisa*, vol. 19, num.72, pp.16-29, 2017.

[3] P. Morales, *Análisis de ítems en las pruebas objetivas*, Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2012.

[4] E. Backhoff, N. Larrazolo, and M. Rosas, “Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA),” *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. *2, num.* 1. 2000.

[5] C. Eccius, *Mathematikdidaktische Fehleranalysen zur Schulalgebra; Schülerwissen und Lehrerprofessionswissen,* Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller, 2008.

[6] F. Padberg, *Didaktik der Bruchrechnung, Gemeine Brüche-Dezimalbrüche*. Ulm: Spektrum, 2002.

[7] H. Radatz, "Error analysis in mathematics education," *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 10, pp. 163-172, 1979.

[8] M. Nolte, *Strukturmomente des Unterrichts und ihre Bedeutung für das Lernen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 1991.

[9] G. Malle, *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg, 1993.

[10] U.P. Tietze, M. Klika and H. Wolpers (Eds.), *Mathematikunterricht in der Sekudarstufe II, Vol, 1 y 2.* Braunschweig: Springer-Verlag, 2013.

[11] F. Padberg, *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. München: Spektrum, Elsevier GmbH, 2005.

[12] M. Hoch, and T. Dreyfus, "Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result," in J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, and N. Stehlíková (Eds.), Proceedings 2006 of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3, pp. 305-312, Prague, Czech Republic: PME.

[13] A.A. Lipnevich, F. Preckel, and S. Krumm, "Mathematics attitudes and their unique contribution to achievement: Going over and above cognitive ability and personality," *Learning and Individual Differences*, vol 47, pp. 70-79, 2016.

Situaciones problema de la vida cotidiana relacionadas con la matemática escolar y la modelación matemática

R. Pantoja Rangel

Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Departamento de Matemáticas
rpantoja@prodigy.net.mx

***Resumen*—Se describe la modelación matemática de situaciones problema, con los que se ha tratado de relacionar la matemática escolar con la vida cotidiana, como son la rueda de bicicleta que gira sin resbalar y sobre su eje, el corredor, el lanzamiento de un objeto, una hoja de árbol, una sandía, entre otros, que se relacionan con las ecuaciones paramétricas, la razón de cambio, la parábola y sólidos de revolución, respectivamente. Los alumnos filman en video o fotografían la situación, que se procesa con Tracker, para obtener distintas representaciones que son interpretadas e interiorizadas con la finalidad de aprender matemáticas.**

Palabras clave— Modelación, Fotografía, Video Situación problema, Tracker.

I. INTRODUCCIÓN

En la conferencia se ejemplifican situaciones problema de la vida cotidiana que se han trabajado en diversos talleres, con distintos alumnos, en distintas instituciones, en variados niveles escolares, con los que se ha tratado de relacionar a la matemática escolar y el contexto habitual para responder el cuestionamiento frecuente de los alumnos, *"¿por qué tengo que aprender esto?* y *¿cómo relaciono eso?* y la clásica respuesta del profesor *"Bueno, ya lo verás, lo vas a necesitar, pero ahora mismo, lo necesitas debido al examen, que te permitirá entrar en una buena universidad, lo que te permitirá obtener un buen trabajo y convertirte en un ciudadano inteligente y seguir adelante"*. Pollak (2007, p 111) comenta *"así que la gratificación siempre se retrasa y pienso que no se puede incentivar la motivación por la belleza de la matemática por si sola sin ver la utilidad"*. En otras palabras, el profesor no quita la duda al estudiante pues la matemática escolar se orienta a procesos algorítmicos no relacionados con su vida diaria y siempre lo posterga para ser tratado en tiempos posteriores de su carrera.

De aquí la importancia de retomar el sentido planteado por Freundenthal (1980, *p. 20*) sobre el uso de la modelación matemática, pues sin duda, lo más trascendental es que el empleo de contextos reales cercanos al habitad de los actores de la educación, motiva a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que muestran interés durante el proceso, además, facilita la retención de todo lo que sea posible construir y que tenga sentido en su contexto, la convivencia colaborativa en la que se propicia el intercambio de ideas, la participación, el respeto, la honestidad y la puntualidad, entre otros valores, tan necesarios en la sociedad mexicana actual.

II. METODOLOGÍA

Los marcos teóricos y metodológicos que han sustentado las propuestas se basan en la Teoría de las Representaciones Semióticas (Duval, 2004), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002), la Modelación Matemática (Arrieta y Díaz, 2015) y ACODESA (Hitt y González, 2014), que se reflejan en las actividades que desarrollaron los alumnos en la fase experimental de cada uno de los talleres en los que puso en juego la propuesta didáctica.

Una vez que se ha seleccionado el tema, por ejemplo, ajuste de polinomios (Pantoja, Bautista,), el concepto de derivada (Leal, Pantoja, 2016).), método de sólidos de revolución (Ferrerya, Pantoja, 2016) o bien la parábola (Ortega, González, 2017), se graban videos o se toman fotografías, para ser procesados con el programa

Tracker o con el programa GeoGebra, dependiendo de los objetivos del tema seleccionado.

A partir del video o de la fotografía, el alumno señala la trayectoria de la forma o del objeto, que las rutinas del Tracker muestran en pantalla en dos formas, a saber: una tabla de datos que representan las variables elegidas y tres gráficas en el plano cartesiano (no se ha trabajado coordenadas polares) para dos variables que el usuario selecciona de las opciones que presenta el programa, en este caso, $(\boldsymbol{x\ vs.t}, \boldsymbol{y\ vs.t}, \boldsymbol{y\ vs.x})$.

Los alumnos con esta información, responden las actividades integradas en una secuencia didáctica (Tobón, 2010), en trabajo colaborativo, elaboran un reporte el reporte para entregar al profesor y una presentación para discutirla con todo el grupo.

El propósito de la plática es ofertar al profesor de matemáticas una serie de ejemplos, valore la incorporación a su labor docente, pues con base en las evidencias recopiladas se propicia la motivación e interés por aprender las matemáticas, además de fortalecer valores como la participación, puntualidad, trabajo colaborativo y honestidad, entre otros; además de promover algunas competencias como la modelación matemática, el manejo de las tecnologías y la escritura de reportes.

Algunas de las situaciones son:

1. **Movimiento de un corredor.**

a) Partir del reposo e incrementar la velocidad. b) Partir del reposo, llegar a la meta y regresar al punto de partida. c) Entrar al set de grabación con velocidad constante y mantenerla hasta la meta. d) Partir del reposo, disminuir, detenerse e incrementar la velocidad a discreción hasta llegar a la meta.

2. **Movimiento de un ciclista, motocicleta y carro de juguete.**

a) Partir del reposo e incrementar la velocidad. b) Partir del reposo, llegar a la meta y regresar al punto de partida. c) Entrar al set de grabación con velocidad constante y mantenerla hasta la meta.

3. **Rueda que gira sobre su propio eje y que se desplaza y gira sin resbalar.**

4. **Lanzamiento de un balón en los juegos de:**

a) Básquetbol. b) Volibol. c) Futbol americano. d) Futbol.

a. **Llenado Recipientes y de floreros.**

b. **Vaciado de botellas con uno y dos orificios.**

5. **La forma de un chorro de agua.**

6. **Manguera con una burbuja.**

7. **Péndulo.**

8. **Resortes.**

9. **Movimiento de un tren de juguete a diferentes velocidades y en tratectoria:**

a) Circular, b) Ovalada, c) Lineal, d) Irregular.

10. **Fotografías de objetos y formas:**

a) Melón, b) Sandía, c) Chorro de agua, d) Fuentes, e) Ventanas, f) Puentes.

III RESULTADOS

Se describen someramente, algunas situaciones problema que se han desarrollado con el video y la fotografía, en la Universidad de Guadalajara, Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán y en la Universidad Autónoma de Nayarit con alumnos de primer o de segundo semestre, de las carreras de ingeniería y de matemáticas.

A. Objetos en movimiento y la derivada

Se desarrolló una propuesta para el aprendizaje de la derivada, apoyado con un sistema de prácticas basado en la modelación de cuerpos en movimiento (Fig. 1), con los programas Tracker y GeoGebra. Además de un aprendizaje situado en contexto y con apoyo de la tecnología, Godino, Batanero y Font (2009) consideran importante llevar a cabo un análisis sobre las representaciones que integran el objeto derivada, distinguir su significado y las configuraciones que lo conforman y del cual emergen, de acuerdo al Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

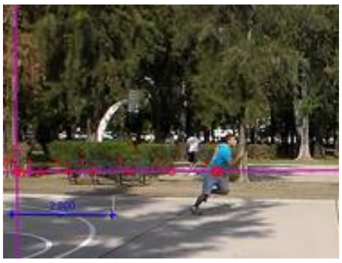


Fig. 1. Alumno que se desplaza.

Godino *et al* (2009) definen un objeto matemático como todo aquello que puede ser indicado y señalado o a lo cual puede hacerse referencia, cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas. Por lo tanto, en el estudio se definió al objeto matemático derivada, como el conjunto de seis objetos matemáticos primarios presentes en la actividad matemática que se lleva a cabo alrededor de este tema, los cuales son: situación problema, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Fig. 2.

Fig. 2. Objetos primarios para la Derivada desde la EOS.

Para la recolección de datos se diseñaron dos instrumentos: una hoja de trabajo, que consistió de ejercicios y preguntas que los alumnos respondieron de acuerdo a la práctica de modelación, y una encuesta sobre la experiencia de los estudiantes con la propuesta, con preguntas de opción múltiple de acuerdo a una escala Likert. Además, se capturó en video cada una de las sesiones para analizar lo que sucedía durante la puesta en escena de cada prueba.

La investigación fue de tipo cualitativa, por lo que se consideraron aspectos relacionados con el proceso de aprendizaje de los alumnos, al realizar las actividades de la propuesta y su motivación al trabajar con situaciones relacionadas con su contexto.

La fase experimental consistió en dos sesiones de trabajo: la primera orientada a la instrucción sobre el uso de los programas Tracker y GeoGebra (Fig. 3) para el análisis de video de cuerpos en movimiento. Se les proporcionó a los alumnos un video, el cual era analizado paso a paso por el investigador, a fin de que aprendieran el uso de las herramientas a emplear.

Para la segunda sesión se formaron de trabajo a los cuales se les proporcionó el material de trabajo, compuesto por las hojas de trabajo y un video de un objeto en movimiento para analizar. Después de la práctica se pidió a los alumnos que pasaran al pizarrón para que expusieran sus ideas respecto a lo que aprendieron. Al final se les aplicó la encuesta sobre su experiencia con la propuesta.

Al analizar los resultados obtenidos en la fase de experimentación, se observó que los alumnos lograron describir, de forma escrita en las hojas de trabajo y verbalmente en la sesión de preguntas, al objeto derivada desde sus diferentes perspectivas, como la pendiente de una recta tangente en un punto de la gráfica de una función, cómo límite de un cociente incremental y como velocidad instantánea.

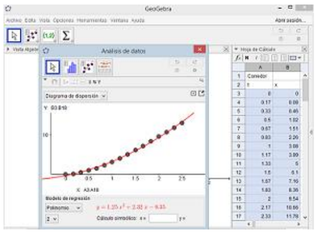


Fig. 3. Gráfica y datos de la modelación del movimiento del corredor con GeoGebra.

Se concluye que con el empleo de la modelación de situaciones de la vida cotidiana, se favorece la comprensión del alumno del objeto matemático derivada, al propiciar la relación entre las matemáticas y su contexto, con lo cual se influye de manera positiva en su motivación e interés hacia esta área de conocimiento.

B. Cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución de la sandía y un florero.

A lo largo de la historia se ha visto que los conocimientos que se adquieren en el aula por lo general se quedan sólo en ejemplos en papel y lápiz, ya que pocas veces son llevados a la práctica, pues la mayoría de los ejercicios revisados en clase, se basan en aplicar un algoritmo y son descontextualizados, lo cual se hace rutinario para los alumnos y no favorece un aprendizaje significativo, es por esto que en esta propuesta se pretende que los alumnos relacionen las aplicaciones del cálculo en su entorno, específicamente del cálculo de sólidos de revolución obtenidos del florero y la sandía.

La experiencia indica que a los estudiantes, se les dificulta aplicar algoritmos vistos en clase a sus actividades rutinarias, simplemente lo que provoca el olvido de lo aprendido en clase, debido a esto, se decidió implementar esta propuesta en alumnos del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, con el uso de actividades para propiciar la construcción de competencias relacionadas con la modelación matemática y el trabajo colaborativo, a partir de situaciones de la vida cotidiana y el empleo de los programas Tracker y GeoGebra.

En este caso Tracker y GeoGebra se orienta a fortalecer la enseñanza y aprendizaje del tema de sólidos de revolución de una sandía y de un florero (Fig. 4).

Fig. 4. Florero y sandía

El uso de situaciones problema relacionadas con la vida cotidiana del estudiante, se omite en las aulas y no se toma en cuenta, por la ignorancia o por decisión propia, pues el origen del conocimiento que inventó y fundamentó el cálculo integral, parte de objetos cotidianos, como el cálculo de áreas de figuras geométricas, entre ellas el círculo y la parábola o el volumen del cono, la esfera y el cilindro.

Otro aspecto que se toca pero luego se omite, es cuando se trata la integral como área bajo la curva, con la llamada suma de Riemann, en la que se divide el intervalo y se realiza una suma de finita (datos discretos) de rectángulos para aproximar el valor del área, *ie*, y sin más preámbulo que una justificación, se plantea que el área bajo la curva es la integral definida y de ahí en adelante se olvidan de la utilización de datos discretos para aproximar el área y dirigen la enseñanza y aprendizaje a la aplicación de ejercicios del texto, con el empleo de los artificios de integración, salvo cuando se trata el capítulo relacionado con los métodos numéricos para aproximar el cálculo de integrales.

Uno de los reportes que se tomó como referencia es el de Heck (2008), que se refiere a calcular el área y el volumen del huevo de gallina. Para dar respuesta a esta cuestión se utilizó la modelación con álgebra, geometría y técnicas de regresión, apoyadas en el software GeoGebra. En la actualidad los actores de la educación disponen de variadas ayudas para enseñar y el aprender, ya que pueden recurrir al software especializado de matemáticas libre y comercial, a los programas multimedia o a los videos digitales explicativos y a las redes sociales como Skype o Youtube®, por mencionar algunas de las TIC más comunes.

En este estudio se empleó la modelación matemática para obtener datos a partir del video de la situación problema, que se manipula con el programa Tracker, enseguida ajustan la función con apoyo de la hoja de cálculo en GeoGebra y mediante las gráficas y los datos, analizan e interpretan la situación dada y la relacionan con las matemáticas, objetivo que se logró al revisar a detalle la información recopilada en los formatos de control y evaluación.

En la investigación se utilizó la sandía y el florero, para que el alumno determinara su volumen; primero lo hizo de manera práctica, es decir, el objeto presentado se seccionó en una cantidad finita de cortes (sección transversal), para enseguida obtener el volumen de cada uno de ellos y sumarlos para calcular una aproximación a su volumen.

Luego se realizó de manera analítica, a partir de la cual se promovió la construcción de significados para los objetos matemáticos del Cálculo Integral en tales contextos, para esto el alumno empleó el software Tracker porque es la interfaz de la vida cotidiana a la computadora, para posteriormente con el uso de GeoGebra, determinar el polinomio que mejor se ajuste a su contorno, se integra y se obtiene su volumen (Fig. 5).

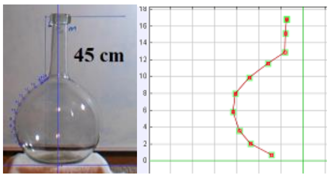


Fig. 6. Florero y el bosquejo de su proyección sobre el plano.

Al finalizar las actividades se aplicó una encuesta a los 22 alumnos, que se cuantificó con una escala de Likert, que después de analizarla, se encontró interés por esta forma de aprendizaje. La evidencia obtenida durante la fase experimental se obtuvo mediante una cámara de video, con las que se grabaron el análisis y discusión de las situaciones problema con las que se trabajó individual y colaborativamente en el aula, además con el análisis de las encuestas y los reportes se afirma que la modelación matemática a partir de situaciones problema en trabajo colaborativo, el empleo de video digital, el programa Tracker y GeoGebra tuvo un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes en el tema de sólidos de revolución y que el alumno logró relacionar las matemáticas con su contexto. En la Fig. 6 se presenta la simulación de la sandía en GeoGebra.

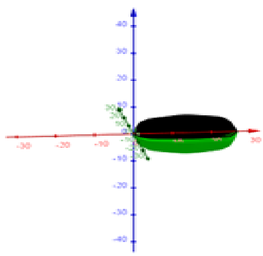


Fig. 6. Simulación de la sandía con el GeoGebra.

C. Situaciones problemas y el ajuste de polinomios con el Tracker y MathCad.

El estudio se desarrolló en el curso de Análisis Numérico en la sección D31 del (CUCEI), en el que se generaron actividades para propiciar la construcción de la competencia relacionada con la modelación matemática, a partir de situaciones de la vida cotidiana, bajo el enfoque de la resolución de problemas, el trabajo colaborativo y los programas de cómputo Tracker y MathCad, herramienta con la que editan ecuaciones, declarar variables, gráficas, así como realizar procedimientos complejos, que en este proyecto fue utilizado como herramienta de cálculo, para obtener el mejor ajuste de los datos obtenidos de una situación de la vida cotidiana.

En una enseñanza tradicional el tema del ajuste de polinomios, se parte de un conjunto de datos obtenidos, por lo general, de los libros de texto, situación que se pretende cambiar con la alternativa didáctica, porque tales datos se obtienen a partir de la filmación de un video de un objeto en movimiento, que manipulan con el programa Tracker, se exportan a MathCad para ajustar la función, analicen e interpreten la situación dada y lo relacionen con el objeto en movimiento.

La modelación matemática se ha integrado en una gran mayoría de instituciones nacionales e internacionales y se complementa con elementos primordiales como la resolución de problemas, el trabajo colaborativo y las TIC en el aula (Hitt, 2007, 2013; Hitt y Cortés, 2009; Arrieta, Carbajal, Díaz, Galicia, Landa, Mancilla, Medina y Miranda, 2007; Ezquerra, s/f, 2005, 2010; Ezquerra, Iturrioz y Díaz, 2011; Pantoja, Ulloa y Nesterova, 2013). Esta situación ha motivado a profesores a plantear el empleo de situaciones de la vida cotidiana, como un área de interés para propiciar el aprendizaje de matemáticas en los estudiantes, mediante problemas seleccionados de física, química, atletismo, hidroneumática, dinámica, ingeniería civil, arquitectura, futbol, basquetbol, termodinámica, entre otras áreas de la vida cotidiana.

Por ejemplo, Ezquerra (2010) trabajó con sus estudiantes la modelación matemática en distintos contextos como la “llave de Judo” en lo que se obtuvo un efecto positivo en el aprendizaje de los participantes y afirma que las propuestas, en las que se hace al estudiante partícipe directo de la investigación, son un marco idóneo para mostrar cómo la ciencia está presente en nuestra vida diaria, hecho que fomenta el interés y motivación de los estudiantes por aprender matemáticas, propósito a alcanzar con esta propuesta.

En el estudio participaron 38 estudiantes de la sección D31 de la materia de Análisis Numérico del ciclo 2013A del CUCEI. Los alumnos fueron elementos activos y grabaron 95 videos de situaciones problema: 46 de lanzamiento de un balón a la canasta de basquetbol (Fig. 7), 15 de desplazamiento de un corredor (Fig. 8), 10 de desplazamiento de un ciclista, 5 de caída libre de una pelota, 9 de llenado de recipientes, 6 de desplazamiento de un carro de juguete, 3 de lanzamiento de balón de una persona a otra y 1 de rodado de un balón.

Fig. 7. Lanzamiento del balón de basquet.

Fig. 8. Movimiento del corredor.

En la fase experimental se organizaron siete grupos con cuatro estudiantes y dos grupos con cinco integrantes (Fig. 9). A cada grupo se le asignaron dos videos de una situación problema y se les dio un manual de Tracker, una hoja de cálculo en MathCad, un reporte que fue llenado por cada grupo colaborativo, el cual incluyó una serie de cuestionamientos sobre el desarrollo del proceso completo y se pidió preparar una exposición en la que se mostró el trabajo realizado, interpretaciones y conclusiones.

La evidencia se obtuvo mediante la grabación del desempeño de los alumnos en las actividades en el aula y en el coliseo olímpico del CUCEI, las exposiciones realizadas por cada grupo colaborativo y la entrevista a los alumnos seleccionados. Del análisis de los videos, de la encuesta, la entrevista, las exposiciones y los reportes, se afirma que la modelación matemática a partir de situaciones problema en trabajo colaborativo, el empleo del video digital, el programa Tracker y el MathCad tuvo un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes en el ajuste de funciones polinomiales de una variable real, tema del curso de Análisis Numérico.

Fig. 9. Explicación previa a los estudiantes de la fase de grabación de video.

Además, algo relevante del estudio y que es interesante desde el punto de vista del modelo educativo de la UdeG, es que el estudiante logra relacionar las matemáticas con situaciones de su contexto en el que identifica variables y ecuaciones, interpreta gráficos, descompone el movimiento de un objeto con las diferentes situaciones problema.

D, La forma de un chorro de agua, la parábola y la ecuación cuadrática

La enseñanza tradicional de la parábola y la ecuación cuadrática se centra en la manipulación algebraica y algorítmica, orientada a la manipulación algebraica de la ecuación de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ para transformarla a la forma canónica $y - k = 4p(x-h)^2$, sin tratar de relacionarla con ejemplos del contexto de la vida diaria del estudiante.

En lo que se refiere al análisis gráfico, su enseñanza en los niveles medio superior y superior se limita a la construcción de una tabla en la que se asignan valores a la variable independiente de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para calcular la variable dependiente y posteriormente ubicar estos puntos en el plano cartesiano, para de ahí evidenciar que se trata de una parábola, situación que a futuro representa un riesgo porque la curva pierde algunas características, como la concavidad, tan útil en los cursos de cálculo (Jiménez, 2012).

En esta propuesta se emplearon distintas fotografías de un chorro de agua en diferentes posiciones (Fig. 10), para que con el *software* Tracker el alumno analice la función, la gráfica y los datos mostrados en pantalla, y a partir de la manipulación de los ejes en distintas posiciones, el alumno logre comprender el efecto que produce sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, cuando los ejes coordenados se trasladan sin girar y cuando se giran 90°, 180° y 270°, en sentido antihorario.

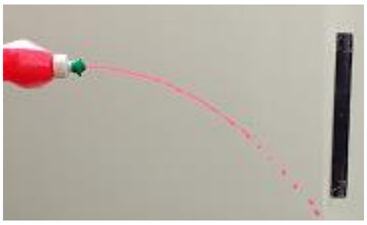


Fig.10. Fotografía de la forma de un chorro de agua.

El taller se desarrolló en tres momentos: 1. El primero se orienta al manejo de los programas Tracker y GeoGebra, para obtener las distintas representaciones semióticas (Fig. 11) relacionadas con la forma del chorro de agua. 2. El segundo momento, se trata del desplazamiento del sistema coordenado a distintas posiciones y que observe como cambian los coeficientes de la ecuación cuadrática, por ejemplo, se le plantea la pregunta ¿Dónde ubicarías los ejes coordenados para que la ecuación representativa de la forma del chorro de agua no tenga coeficiente lineal, ie, $b = 0$? 3. La actividad desarrollada en el tercer momento consistió en rotar los ejes coordenados 90°, 180° y 270°, con la finalidad de que los alumnos logren diferenciar entre las distintas posiciones de la parábola en el plano cartesiano y las ecuaciones $y = ax^2 + bx + c$, $x = ay^2 + by + c$, que representan a las parábolas con ejes principales paralelos a los ejes coordenados (Fig. 12).

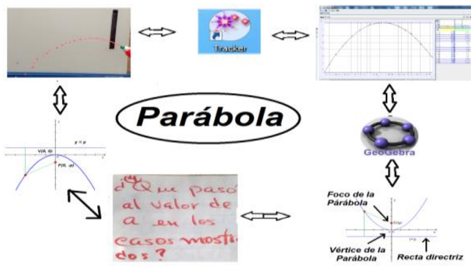


Fig. 11. Representaciones semióticas para el chorro de agua.

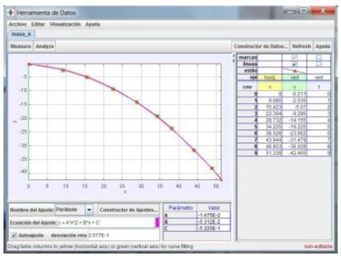


Fig. 12. Gráfica asociada a la forma del chorro de agua.

E. Las hojas de árbol, las figuras fomi y el cálculo de áreas

En el tema de la integral se ha identificado la falta de comprensión del concepto de la integral, y por ende, su trascendencia para aplicarla en la resolución de problemas de cálculo de áreas, volumen, trabajo, centros de gravedad, entre muchas otras aplicaciones, ya que por lo general el aprendizaje que adquieren los estudiantes de la integral, en el mejor de los casos, es de una manera mecánica, que básicamente se limita a conocer los métodos de integración, y dejan de lado, lo esencial, su significado y sus aplicaciones.

En la búsqueda por hacer más atractiva y eficiente las clases de matemáticas para los estudiantes que cursan el nivel superior (incluso otros niveles educativos), se han trabajado estrategias muy interesantes con la modelación matemática, que Blum (1993, citado en Peña y Morales, 2016) interpreta como el “proceso de construcción de un modelo, dirigido de una situación real a un modelo matemático, específicamente, la manera de conectar el mundo real con las matemáticas”.

Lo interesante de la modelación de situaciones problema planteadas en las clases de matemáticas, es que se generan en los estudiantes capacidades y habilidades necesarias para la solución de posibles problemas prácticos cotidianos, en otras palabras, los hace competentes.

Para Arrieta y Díaz (2015) la modelación se constituye como una práctica, que establece puentes entre la escuela y su entorno, pues a partir del análisis del video con el Tracker, las gráficas, los datos y la expresión algebraica toman sentido en el estudiante, pues estos objetos, que se aprenden en el aula son interpretados en el contexto cotidiano por el alumno.

Algunas bondades, que se han identificado en el estudiante con la alternativa educativa propuesta son: se siente motivado por lo que trabaja y en consecuencia se apropia de manera significativa de los conceptos tratados; se involucra totalmente en el proceso del trabajo, puede interactuar con sus compañeros y construir hipótesis en colaboración, así como las conclusiones de manera más enriquecida; se convierte en constructor de su aprendizaje y le encuentra significado a lo que realiza.

Hitt (2003) en su estudio sobre dificultades en el aprendizaje del cálculo, menciona una necesidad de utilizar diferentes representaciones en forma coherente para la apropiación de conceptos por parte de los estudiantes. Sugiere promover la visualización matemática al emplear diferentes representaciones, a la vez que se promueve un uso racional de las TIC, que sirvan como herramienta para dar significado concreto de las nociones matemáticas.

A partir de las sugerencias de Hitt (2016) sobre el empleo de situaciones problemas en el contexto del estudiante, para el estudio se utilizaron secciones de variados objetos tales como: cortes transversales de frutas (manzana, melón, carambolo, mamey), hojas de árboles aplanadas completas y con resaques y figuras recortadas en material FOMI (Fig. 13), cuyos contornos asemejen las diversas gráficas de funciones tratadas en el pizarrón o en la computadora (Fig. 14).

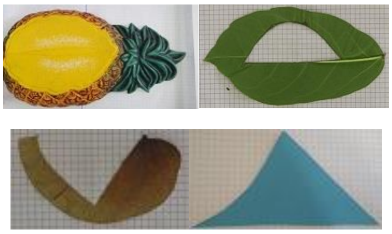


Fig. 13. Áreas de objetos planos.

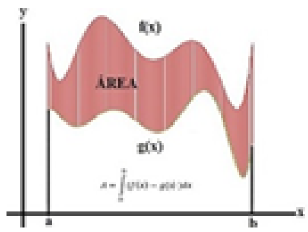


Fig. 14. Región limitada por dos funciones.

Cada uno de las hojas de árbol o figura fomi se fotografió para ser procesado con Tracker y GeoGebra, con la finalidad de que emerjan representaciones semióticas que los alumnos, bajo el marco de la Teoría de Duval (Fig. 15), relacionarán para obtener un modelo matemático del área del objeto y auxiliarse del GeoGebra para aproximar las dimensiones de su superficie.

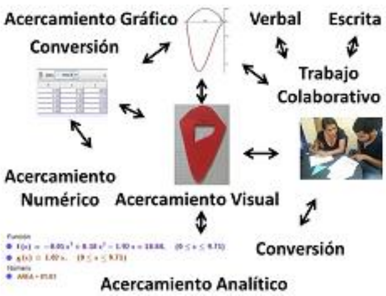


Fig.15. Representación semiótica de la figura fomi.

En la Fig. 16 se muestra la hoja de árbol situada sobre papel cuadriculado, con el fin de que el alumno dibuje los contornos y determine un valor mayor que sea cercano al área y otro valor que sea menor pero cercano a tal área. Posteriormente, la fotografía se procesó con Tracker y los datos con GeoGebra, para determinas las funciones que delimitan la región (Fig. 17), los límites de integración y por medio de la rutina de integración del GeoGebra, aproximar el área.

Fig. 16. Hoja de árbol aplanada y recortada.

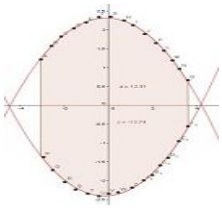


Fig. 17. Región modelada de la hoja de árbol con GeoGebra.

Como valores agregados al conocimiento adquirido, los estudiantes adquirieron habilidades en el manejo de fotografía y video, además de fomentar los valores como participación, colaboración, motivación, puntualidad, honestidad, entre otros.

E. El tren de juguete y el concepto de parámetro

Desde los ochenta, Lave (1988) y Walkerdine (1988) reportan cierta separación entre la escuela y su entorno. Abordan el viejo problema educativo de la transferencia del conocimiento y, al respecto, puntualizan que las comprensiones cotidianas no escolares y los procedimientos mentales, que involucran ciertos funcionamientos y relaciones matemáticas elementales, son totalmente diferentes de aquellas que se esperan de estudiantes en la escuela y en tareas experimentales semejantes, no obstante que involucren las mismas acciones y que estas comprensiones cotidianas y procedimientos, no deben ser juzgados como algo de menor calidad que aquellos desarrollados en el currículum tradicional.

En este contexto, las ecuaciones paramétricas es un tema que se trata de una manera muy superficial en los libros de texto y por consiguiente en el aula, sin pensar en encontrarlas en el contexto cotidiano. Por ejemplo, en el libro de Geometría Analítica de Lehmann (1989) se escribe "En este capítulo consideraremos la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable" y se ejemplifica con la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=1$, que también se representa por dos ecuaciones en función de una tercera variable independiente t, que puede tomar cualquier valor real, a saber, $x(t)=\cos(t)$ y $y(t)=sen(t)$. No es claro cómo se determina el parámetro para representar la curva C como un par de ecuaciones, ni en qué momento se describe la relación matemática entre las variables x, y, t.

Una de las representaciones paramétricas ancestrales es la que desarrolló Galileo y que denominó descomposición del movimiento de un objeto esférico rodando por un riel sin fricción y lanzado en caída libre lo abandona. Galileo describe que el movimiento del objeto tiene una componente horizontal $x(t)=a_1t+b_1$ y una componente vertical $y(t)=a_2t^2+b_2t+c_2$, ecuaciones paramétricas del tiro parabólico o caída libre: $f(t)=(a_1t+b_1,\ a_2t^2+b_2t+c_2)$

Así como la caída libre o tiro parabólico, existen otros ejemplos de la física que se emplean para obtener la representación de la curva plana por medio de ecuaciones paramétricas, como puede ser la trayectoria de un punto $P(x,y)$ sobre la circunferencia de un rueda de bicicleta, en dos momentos, el primero que gira sobre su eje y el segundo, que rueda sin resbalar. En ambos casos se interpreta el tiempo t como el parámetro y surgen las ecuaciones paramétricas de un círculo $x=a\ \cos(t)$ y $y=a\ sen(t)$ y la cicloide $x(t)=a(t-sen(t))$ y $y(t)=a(1-\cos(t))$.

Por otra parte en el libro de cálculo de Leithold inicia el tema con el ejemplo de una partícula en movimiento en un tiempo representado por t, para luego explicar que si se elimina el parámetro t se obtiene una ecuación cartesiana, de ahí que los ejemplos siguientes consisten en la eliminación del parámetro t, dejando a un lado la explicación o justificación de eliminar dicho parámetro.

Para la fase experimental se ha seleccionado el video de un tren que recorre la vía que incluye el acercamiento a tres formas geométricas, a saber: circular, elíptica y recta. El alumno diseña el set de grabación del video del recorrido del tren (Fig. 18), para ser analizado con el Tracker para obtener las coordenadas de los puntos que bosquejan la trayectoria, datos que son exportados a GeoGebra para ajustarlos a la función que mejor lo describa. En este caso es una función de la forma $x(t) = A\cos(Bt + C)$ y $y(t) = Asen(Bt + C)$.

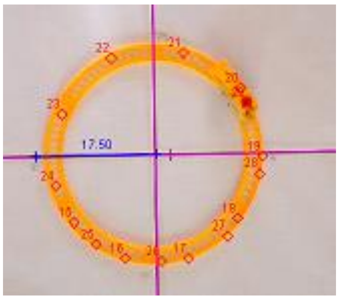


Fig. 18. La vía del tren de juguete en acercamiento circular.

El taller se sustenta en las representaciones semióticas de Raymond Duval (2004), ya que a partir del análisis del video, se obtienen los registros de representación verbal, pictórica, escrita, gráfica, numérica y analítica relacionados con la situación problema. Se espera que el alumno logre transitar entre las representaciones en un mismo registro, llamado Tratamiento, en esta situación en el entendimiento de las tres gráficas (***x* vs. *t*, *y* vs. *t*, *y* vs. *x***) y entre dos distintos registros (Conversión), con la obtención de la expresión analítica de la modelación del movimiento a partir del registro numérico (Fig. 19, 20, 21).

Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas, proporciona los medios para comprender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático, tendiente a lograr la ***noesis*** a partir de la ***semiosis***, en este caso para la comprensión del concepto de parámetro y las ecuaciones paramétricas.

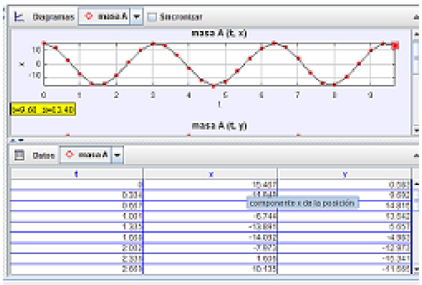


Fig. 19. Registro gráfico y Registro numérico del movimiento del tren.

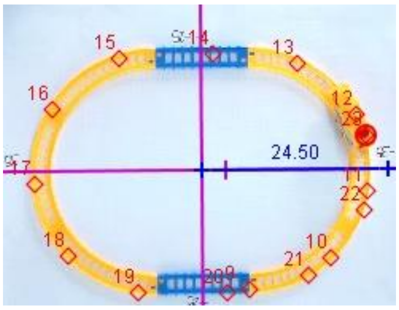


Fig. 20. Registro gráfico y Registro numérico del movimiento del tren.

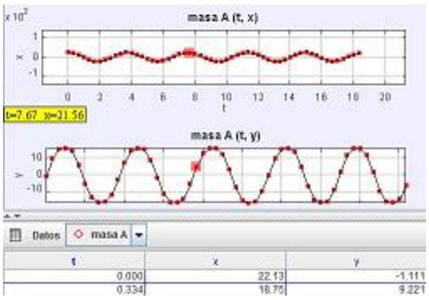


Fig. 21. Registro gráfico y y numérico del movimiento del tren sobre la vía elíptica.

A los alumnos se les entregó la actividad por escrito, que es analizada y discutida por cada equipo y se elabora el reporte para su presentación ante todo el grupo y entrega al profesor. Cada equipo elabora un reporte que se entrega al profesor y se presenta al grupo el reporte con un PowerPoint y se genera discusión grupal.

Se ha diseñado este taller con el propósito de que las actividades motiven al estudiante a aprender matemáticas, que relacione la matemática escolar con el entorno cotidiano, en el que además se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en un ambiente de aprendizaje adecuado con las TIC, en el que se propicie el trabajo individual y colaborativo, en el que tome la iniciativa y sea el responsable de lograr un aprendizaje significativo.

IV CONCLUSIONES

Se afirma que incluir situaciones problema relacionados con el contexto de la vida cotidiana en el aula escolar, motivan e interesan por la forma en que se plantean estas alternativas, para propiciar aprendizaje de las matemáticas, pues "aparentemente" se les responde la pregunta ancestral "para que sirven las matemáticas", pero eso no infiere que el alumno haya logrado un aprendizaje significativo del tema de matemáticas, por tal motivo el profesor debe de ser cuidadoso, y sobre todo, diseñar instrumentos de evaluación validados, que permitan sustentar que el alumno aprendió matemáticas.

Se plantea en la actualidad, que en un proceso educativo es ideal que se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente de aprendizaje adecuado con las Tecnologías de la Información y Comunicación, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa, con el firme propósito de lograr un aprendizaje significativo. De igual manera, la importancia del aprendizaje colaborativo es primordial, ya que mediante la interacción social con compañeros de clases, maestros y otros, propician la motivación para que construya su conocimiento.

V REFERENCIAS

[1] A. Ezquerra, I. Iturrioz, M. Díaz, (2011), Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. Disponible en http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

[2] A. Heck, *Mathematical Brooding over an egg*. Disponible http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Heck/Measurements.html(2008).

[3] F. Córdoba, "La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería." Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional. Cd. de México. 2011

[4] F. Hitt, ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Electrónica AMIUTEM*, 1-16. 2013.

[5] F. Hitt, A. González, "Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method." *Springer Science+Business Media*, 201-219. 2015.

[6] F. Hitt, C. Cortés, Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital matemática*, 10(1), 2-30. 2009.

[7] F. Hitt, Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En L. Guerrero, R. García R, A. Sepúlveda & C. Cortés (Ed.), Memorias de las conferencias plenarias del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas. Morelia, Michoacán, pp. 1-26. Dsiponible en en http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc. 2003.

[8] F. Hitt, Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage conception et usages, regards croisés. Éditorial Herms*. Págs. 65-88. 2007.

[9] H. Freundenthal. "Major Problems of Mathematics Education," en *Conferencia Plenaria ICME 4, Berkeley. Educational Studies in Mathematics 12. Antología de Educación Matemática.* Sección Matemática Educativa CINVESTAV-IPN: pp. 7-42. 1980

[10] H. Pollak Mathematical Modelling- A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, G. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (pp. 109-120). Springer. 2007.

[11] J. A. Jofrey, "Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases," *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005. 2010

[12] J. Arrieta, L. Díaz, "Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología," *RELIME*, 18 (1), pp. 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811. 2015

[13] M. Bautista. "La modelación matemática en la vida cotidiana como recurso para propiciar aprendizaje significativo en el ajuste de polinomios reales de una variable real." Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemáticas, CUCEI. Universidad de Guadalajara. Jalisco México. 2014

[14] O. Leal. "Sistema de prácticas de modelación con el Tracker y GeoGebra de cuerpos en movimiento, para el aprendizaje del objeto matemático derivada." Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco. 2016

[15] R. Duval. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*.: Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0. 2004.

[16] R. Ferreyra. "Empleo de situaciones problema de la vida cotidiana, video digital, Tracker y GeoGebra para el aprendizaje del tema de sólidos de revolución." Tesis de maestría publicada. Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco. 2016

[17] R. Pantoja, L. Guerrero, R. Ulloa, E. Nesterova (2016, Mayo*)*. Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Disponible en: http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978

Cuarenta años en el aula: Pasado, Presente y Perspectivas

José Humberto Mondragón Suárez* y Alfredo Sandoval Villalbazo*
*Académicos de Tiempo del Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Iberoamericana Cd-Mx.

SÉPTIMO FORO DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS IBERO 2017
ITESO, ZAPOPAN, MÉXICO
SEPTIEMBRE 14 Y 15 de 2017

RESUMEN

Las metodologías tradicionales utilizadas en el aula han sido rebasadas en el marco de la vertiginosa carrera tecnológica. El estudiante actual, inmerso en ella, no se acopla a los métodos usuales de enseñanza-aprendizaje y espera que en la Universidad las cosas cambien, teniendo una perspectiva muy alta que al no ser satisfecha genera desconcierto y apatía. Por otro lado, su necesidad de que los contenidos satisfagan su visión de utilidad, tampoco es satisfecha; debido a esto, el estudiante pierde interés a sus materias. Simultáneamente, las instituciones determinan su permanencia con base en calificaciones que desvían el sentido de aprendizaje, generando en el alumno una ansiedad por un “promedio buen”. Lo anterior hace imperativo cambiar el rumbo en los métodos utilizados en la enseñanza, los cuales deben ser acompañados por el uso de tecnología, priorizando en el alumno la importancia del concepto y su uso apropiado para la resolución de problemas. El presente trabajo tiene la intención de provocar una reflexión en el profesor que le permita abordar esta problemática, generando nuevas actividades de apropiación de las matemáticas y sus aplicaciones.

CONTEXTO Y ENTORNO

1 **Sistema educativo**

Es bien sabido que existe un sistema educativo primario poco eficiente, el cual acondiciona al alumno a facilitar el pase al siguiente grado de una manera sencilla con un mínimo esfuerzo y con la posibilidad de realizar evaluaciones de manera indefinida [1].

2 **Método de evaluación**

Para ingresar a una universidad o para permanecer en ella, ésta interpone filtros "de calidad" que obligan al alumno a superarlos, muchas veces a cualquier costo, olvidándose de sus objetivos principales de aprendizaje [3].

3 **Metodología**

Como consecuencia de los puntos anteriores, el alumno carece de metodología para el estudio y muestra una fuerte deficiencia en procesos cognitivos de comprensión de lectura, razonamiento matemático y análisis de situaciones, entre otras [2].

PROPUESTA

ETAPA I*

Considerando los resultados en estos últimos años, y tomando en cuenta las nuevas habilidades de los estudiantes nuestra propuesta (enfocada a nivel universitario básico) es la siguiente:

1. Tomar el tema a tratar y <u>motivarlo</u> por medio del diálogo en el pleno del salón (conocimientos previos necesarios, alcance, importancia, posible aplicación, etc.).

2. Abordar el tema <u>asegurándose</u> de que los puntos importantes han sido asimilados (preguntas, exámenes cortos en clase, discusión entre alumnos, etc.).

3. Examinar algunos ejemplos simples donde sobresalga la necesidad de considerar los **conceptos** revisados. Posteriormente se debe permitir que el alumno intente y analice algún ejemplo del mismo grado de dificultad.

* Estas ideas son compatibles con esquemas constructivistas de la enseñanza de las matemáticas, más no se intenta reproducir dogmáticamente este enfoque [1].

ETAPA II

1. UTILIZAR algún paquete matemático (Mathematica, Mat lab, etc.) y resolver en tiempo real los mismos ejemplos anteriores con ayuda del mismo [5, 6].
2. Complementar los ejemplos con gráficas y/o animaciones.
3. Analizar y discutir los resultados modificando las condiciones originales.
4. Finalmente invitar al alumno a que resuelva un problema nuevo (más complejo) utilizando la herramienta que prefiera.

CONCLUSIONES

El trabajo realizado en el aula, apoyado en software matemático, permite priorizar el entendimiento de conceptos y facilita su aplicación a problemas variados en grado de dificultad, para después analizar los resultados obtenidos. De acuerdo a nuestra experiencia, este enfoque motiva al alumno a ir más allá de la memorización de fórmulas y su uso mecánico.

Esta forma de llevar al alumno dentro del aula permite además avanzar más rápidamente en los contenidos, de forma que el alumno adquiere la habilidad de ir un poco más allá, completando lo no visto o resolviendo preguntas nacidas de lo visto en clase, y le permite aplicar su creatividad en la resolución de dichas *autopreguntas*.

El éxito de este tipo de metodologías requiere una preparación especializada por parte de los docentes, trascendiendo a las técnicas tradicionales de enseñanza utilizando como única herramienta el pizarrón.

REFERENCIAS

[1] ACUERDO número 648 por el que se establecen normas generales para la evaluación, acreditación, promoción y certificación en la educación básica.

DOF: 17/08/2012

[2] "Enfatizar calificaciones, una causa del bajo nivel matemático de estudiantes" (entrevista de A. Sandoval-Villalbazo para Prensa Ibero en el marco del Cuarto Foro de Enseñanza de las Matemáticas Ibero), 28 de junio de 2014.

http://www.ibero.mx/prensa/enfatizar-calificaciones-una-causa-del-bajo-nivel-matem-tico-de-estudiantes

[3] Programme for International Student Assessment (PISA) "México en PISA 2015", OCDE (2015)

https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

[4] M. Kline, "El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar", S XXI editores, México, 1988.

[5] A. Sandoval-Villalbazo y J.H. Mondragón-Suárez, "La ley de Biot-Savart como efecto relativista", Coloquio Docentes 2017, Ibero Puebla (25 de marzo de 2017).

[6] J.H. Mondragón-Suárez y A. Sandoval-Villalbazo, "Empleo de transformaciones matriciales en el establecimiento de campos electromagnéticos a novel básico: de la carga puntual a distribuciones de carga en movimiento", Cartel presentado en el LX Congreso Nacional de Física, Monterrey, Nuevo León (12 de octubre de 2017).

Aplicación de un proceso remedial en matemáticas básicas basado en una taxonomía de los errores

A. Acosta González [1]

[1] *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente*
Departamento de Matemáticas y Física
aacosta@iteso.mx

***Resumen*— Este trabajo presenta los resultados de la aplicación de un proceso remedial de nivelación en matemáticas básicas con alumnos de ingeniería del ITESO, en la asignatura de Cálculo diferencial. Está sustentado en investigaciones realizadas sobre el análisis y clasificación de tipos de errores que cometen los estudiantes en aritmética y álgebra. Se aportan datos que podrían justificar la necesidad de implementar cursos remediales en matemáticas, principalmente enfocados al aprendizaje a través del análisis de los errores y el uso de las TIC´s, ya que en este caso, se logró mejorar significativamente el nivel de conocimientos en los alumnos, así como los porcentajes de aprobación en la asignatura.**

Palabras clave*— *Proceso remedial, matemáticas básicas, clasificación de errores, uso de TIC´s, estudio comparativo.

XXIV. Introducción

El trabajo que se presenta es una investigación sobre los efectos de la aplicación de un proceso remedial de nivelación en matemáticas básicas, implementado en algunos grupos de alumnos de ingeniería del ITESO, en la asignatura de Cálculo Diferencial, durante cinco semestres consecutivos desde el semestre de primavera 2015 hasta el de primavera de 2017. La finalidad principal de la investigación es la de aportar datos para el diseño e implementación de cursos de nivelación que permitan generar las condiciones para un aprendizaje significativo de las matemáticas.

La propuesta de implementar cursos remediales en matemáticas básicas a nivel universitario, surge de la necesidad de apoyar a algunos estudiantes para solventar carencias que tienen en conocimientos de matemáticas básicas. Cálculo Diferencial es la primera de las asignaturas de matemáticas, obligatorias para las carreras de ingeniería y está adscrita al DMAF: Departamento de Matemáticas y Física del ITESO. Históricamente esta asignatura ha registrado altos porcentajes de reprobación y deserción, de acuerdo con datos del Departamento de control escolar del ITESO. Aunque las causas de esta situación pueden ser multifactoriales, tenemos amplios argumentos para sospechar que una de esas causas es la falta de conocimientos en matemáticas básicas, con la que ingresan a la universidad algunos estudiantes. Cabe mencionar que el DMAF ha estado realizando importantes esfuerzos por resolver esta situación y se espera que este trabajo haga su aportación en esa dirección.

Esta investigación se enmarca en la vertiente sobre el análisis y clasificación de los tipos de errores que cometen los estudiantes al resolver ejercicios y problemas de aritmética y álgebra desde nivel básico hasta nivel pre-universitario y que de acuerdo con Bouvier [1], Popper, Bachelard y Lakatos (citados en [4]), los errores no aparecen al azar, sino que surgen de conocimientos adquiridos y al tratar de discernir en su naturaleza, se puede contribuir positivamente en el aprendizaje.

En relación a la importancia de establecer categorías de los errores para implementar procesos remediales es necesario mencionar la siguiente cita:

“Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que ha permitido elaborar clasificaciones de los mismos. Las categorías no son compartimentos estancos, y suelen solaparse unas con otras (ya que rara vez un error obedece a una única causa) pero permiten postular posibles razones para su aparición, y guiar, de ese modo, en la elección de actividades remediales.”

"La implementación de cuestionarios para detección de errores, y la posterior clasificación de los mismos en base en alguna de las categorizaciones vigentes, es una metodología que permite obtener un "radiografía" del estado de conocimiento de los alumnos y constituye una valiosa ayuda a la hora de reorganizar la práctica pedagógica" [3].

De acuerdo con Socas [5], el error matemático se explica por la presencia del obstáculo cognitivo, el cual es conocimiento que funciona bien en cierto contexto, pero se sobre-generaliza para otras situaciones, y el hecho de que en ocasiones funcione "bien", promueve que el error se refuerce. Ello promueve la ausencia de sentido en algunos sistemas de representación, la aparición de errores de álgebra de origen aritmético y la aplicación incorrecta de reglas. También menciona sobre la presencia de actitudes afectivas y emocionales que pudieran incidir en la ocurrencia del error.

Para el diseño del proceso remedial de este trabajo, fueron consultadas diversas clasificaciones de los errores en matemáticas, principalmente las siguientes:

- Clasificación de Radatz (citado en [4]), enfocada a categorizar la causa del error como aprendizajes deficientes de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Clasificación de Vega y Castro [7], donde distingue los errores propios del álgebra y los que devienen de la aritmética, además de la generalización de un mismo procedimiento.
- Clasificación de Ruano, Socas y Palarea [5], en la que se resalta la sobre-generalización de la propiedad distributiva, la falta de jerarquía de la operaciones, la particularización de expresiones algebraicas con valores numéricos y la necesidad de clausura (dar un resultado), entre otras.
- Clasificación de Del Puerto, Minaard y Seminara [3], en la que se enfatiza en la aplicación automática de algoritmos sin constatar su pertinencia y la sobre-generalización de la propiedad distributiva.

En la consideración de los referentes antes mencionados, se diseñó una taxonomía de los errores que se fue reelaborando conforme avanzaba el proyecto. En cada semestre que se replicó el estudio, durante la primer semana del curso de Cálculo Diferencial, en los grupos de estudiantes a cargo de la autora de este trabajo, se aplicaron exámenes de diagnóstico, que permitieron por un lado, detectar a los alumnos que requerían apoyo con un curso remedial, y por otro, analizar y categorizar el tipo de errores que cometían en la resolución de los ejercicios. Los alumnos seleccionados fueron invitados a participar voluntariamente en un curso remedial semi-presencial de aproximadamente 7 horas: 4 horas presenciales (grupal) y 3 horas de actividades en página moodle (individual). Al ser voluntaria la participación, algunos alumnos que fueron seleccionados, por diversas razones no participaron en el proceso. El curso presencial se enfocó principalmente a que el alumno revisara y corrigiera, las preguntas del examen resueltas incorrectamente o sin responder. La principal función de la profesora en esta etapa, fue la de guiar al alumno para que por sí mismo descubriera su error y confrontara sus concepciones. Posterior a la parte presencial y con el objetivo de reforzar lo re-aprendido, se aplicaron exámenes en línea en página moodle, con retroalimentación, enlaces a documentos, videos de internet y la opción a corregir respuestas.

Este proceso se aplicó en el semestre de primavera 2015, y adicionalmente a partir de otoño de 2015 y hasta primavera de 2017, se aplicó además, otro examen muy similar al diagnóstico, entre la semana 9 y 12 del curso de Cálculo Diferencial. Esto se realizó con el fin de detectar la ganancia en puntaje en los exámenes que lograron los estudiantes que participaron en el proceso remedial, en comparación con aquellos estudiantes que no lo hicieron, y detectar además, las diferencias en porcentajes de aprobación de la asignatura de Cálculo Diferencial.

La taxonomía de los errores que se manejó fue fundamental tanto en la fase del diseño de los exámenes, como en la aplicación de la secuencia didáctica presencial y en la fase del reforzamiento del conocimiento, ya que permitió elaborar reactivos, preguntas y material didáctico que permitieron evidenciar y corregir en la medida de lo posible, el tipo de error en el que podría estar incurriendo el alumno.

XXV. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A partir de las consideraciones antes planteadas, se muestra la taxonomía de los errores que se estableció para guiar el diseño e implementación del proceso remedial con estudiantes de Cálculo Diferencial, así como la metodología que se siguió para establecer un comparativo de la efectividad del mismo, tanto en los porcentajes de aprobación en dicha asignatura, como en la ganancia de puntaje pretest- postest en la aplicación de exámenes de aritmética y álgebra básicas.

A. Taxonomía de los errores.

La siguiente clasificación muestra los tipos de errores algebraicos y aritméticos que de acuerdo con los autores antes mencionados y la experiencia de colegas y propia, se presentan con mayor frecuencia. La denominación de cada categoría trata de describir la lógica del proceso erróneo o posible causa del mismo.

1. *Errores debidos a la pérdida del significado de la operación y/o de la naturaleza de la cantidad*. En este tipo de errores se impone la necesidad de aplicar reglas sin verificar las condiciones, y de dar un resultado sin analizar su pertinencia. En esta categoría quedan enmarcados los errores sobre jerarquía de operaciones, leyes de los exponentes, simplificación de términos semejantes, confusión al multiplicar por cero, etc. Ejemplos:

$$(x)(x)(x) = 3x, \qquad 2^3 = 6,$$

$$x^2 + x^4 = x^6, \quad x^2x^3 = x^6,$$

$$\sqrt{a+2} = \sqrt{2a}$$

$$si \ \ \frac{3x-1}{x^2} = 0, \qquad 3x - 1 = x^2$$

2. *Errores debidos a la distribución de la operación (abuso-truncamiento de la propiedad distributiva)*. En este tipo de errores, una operación (o signo) aplicada a elementos dentro de un paréntesis o suma afecta por igual a cada uno de ellos. También en esta categoría quedan enmarcados los errores de factorización. Ejemplos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, \quad \sqrt{a^2+b^2} = a + b$$

$$3(xy) = 3x3y,$$

$$-2\sqrt{x-9} = \sqrt{-2x+18}$$

3. *Errores debidos al manejo inadecuado de fracciones y común denominador*. En este tipo de errores se encuentran las sumas (restas) lineales o arbitrarias, cancelación entre numerador y denominador con sumandos, errores en el manejo de recíprocos, etc.
Ejemplos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$$

$$\frac{9x-y}{3} = 3x - y$$

$$\frac{3x^2+2}{x^2+1} = 3 + 2$$

4. *Errores en despejes de ecuaciones lineales*. En este tipo de errores la lógica que parece aplicar es: "pasa al otro lado de la ecuación con el contrario, en cualquier orden". También se presenta el error de que "despejar la variable", se interpreta como "pasar la variable al otro lado de la ecuación".
Ejemplos:

$$-8x = 2, x = 2 + 8, \quad o \ \ x = \frac{2}{+8}$$

$$3x + 2 = 8, \ \ x = \frac{8}{3} - 2$$

5. *Errores por la transformación de un proceso de simplificación en ecuación igualada a cero.*
Ejemplo:
Simplificar 3*x*-24+5*x*

$$3x\text{-}24+5x=8x\text{-}24,\ \ 8x=24,\ x=3.$$

B. Los tests y la selección de estudiantes

En base a la taxonomía de los errores descrita anteriormente, se elaboraron los reactivos de los exámenes de diagnóstico (pretest), del postest y del examen en línea. En la semana 1 del curso de Cálculo Diferencial se aplicó el pretest, así como el curso presencial remedial. En la semana 2 y 3 se aplicó el examen en línea y en la semana 9 a 12 el postest. El pretest y postest se elaboraron con el mismo número de reactivos muy similares entre sí, con el objetivo de poder establecer un comparativo en la ganancia o pérdida de puntajes con instrumentos de medición similares. Con la aplicación del pretest se seleccionaron los estudiantes que obtuvieron menos del 50% del puntaje para ser invitados a tomar el curso remedial de forma voluntaria. De esta forma quedaron conformados dos grupos: seleccionados participantes y no participantes. En la Tabla I se muestra la cantidad de alumnos seleccionados en los semestres que se realizó el estudio, indicando la cantidad de alumnos participantes y no participantes en el proceso remedial.

TABLA I
ESTUDIANTES SELECCIONADOS EN EL PRETEST

Semestre	Total	Con Remedial	Sin Remedial
Prim2015	23	14	9
Oto2015	24	14	10
Prim 2016	16	6	10
Oto2016	18	10	18
Prim2017	24	13	11

Como se había mencionado anteriormente, a partir del semestre de otoño de 2015, se aplicó un postest en la semana 9 a 12, para comparar la ganancia en puntaje que obtuvieron los estudiantes en relación con su propio puntaje en el pretest. En este caso, no todos los estudiantes seleccionados en el pretest presentaron postest, pues muchos desertaron del curso o no se presentaron el día del examen. De los estudiantes que se seleccionaron en el pretest y presentaron postest, se ubicaron aquellos que no participaron en el proceso remedial como grupo control (GC) y los que si participaron como grupo experimental (GE). La tabla II muestra el número de alumnos en cada uno.

TABLA II
ESTUDIANTES SELECCIONADOS CON PRETEST Y POSTEST

Semestre	Total	GC Sin remedial	GE Con remedial
Oto2015	18	7	11
Prim 2016	15	7	8
Oto2016	21	7	14
Prim2017	16	5	11

C. Diseño del experimento y estadísticos

Para el estudio comparativo entre el grupo de control GC y el grupo experimental GE se aplicó un diseño cuasi-experimental de grupo de control no equivalente [2] y se tomaron las diferencias de puntaje de postest-pretest para establecer el avance que tuvo cada estudiante con respecto a su puntaje inicial.

GC: Pretest Postest

GE: Pretest Remedial Postest

La razón por la que se eligió este diseño es porque no se pudo garantizar en los grupos una equivalencia pre-experimental de muestreo, ya que éstos se conformaron naturalmente.

Para la interpretación de resultados se utilizó la prueba estadística no paramétrica de Beherens-Fisher o Prueba poderosa de rangos ordenados [3], la cual es una prueba que compara las medianas de los grupos considerando que pueden existir variabilidad en los mismos, ya que aunque los estudiantes fueron seleccionados bajo el mismo criterio, los grupos no necesariamente son equivalentes, debido a la disponibilidad o interés que tuvieron por tomar el curso remedial.

Las razones por las cuales se escogió una prueba no paramétrica es porque los puntos de ganancia, que es la variable en estudio, se encuentran en una escala ordinal. Además, los grupos estudiados son de tamaño pequeño y no se tiene el dato de que la población de la que fueron extraídos esté normalmente distribuida. En este caso, la hipótesis nula establece que la ganancia en puntaje postets-pretest es igual en ambos grupos, mientras la hipótesis alterna establece que la ganancia en puntaje postets-pretest es menor en el grupo de control GC que en el grupo experimental GE. Para aplicar esta prueba las puntuaciones de ambos grupos se combinan y se ordenan de menor a mayor para asignarles un rango.

Con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ se aplicó el estadístico U para la prueba poderosa de rangos ordenados

$$U = \frac{mU(YX) - nU(XY)}{2\sqrt{Vx + Vy + U(XY)U(YX)}} \qquad (1)$$

donde,

m: número de observaciones del GC

n: número de observaciones del GE.

$U(YXi)$ número de observaciones del GE que prececeden a cada observación Xi del GC.

$U(YX)$ media de los valores $U(YXi)$.

Vx índice de variabilidad del GC:

$$V_x = \sum_{i=1}^{m} [U(YXi) - U(YX)]^2 \qquad (2)$$

$U(XYi)$ número de observaciones del GC que prececeden a cada observación Yi del GE.

$U(XY)$ media de los valores $U(XYi)$.

Vy índice de variabilidad del GE:

$$V_y = \sum_{i=1}^{m} [U(XYi) - U(XY)]^2 \qquad (3)$$

El estadístico U se aplica principalmente para valores $m \leq n \leq 12$, aunque si m y n aumentan, la distribución muestral U se aproxima a la distribución normal Z.

D. *Análisis de datos*

Para establecer un comparativo en los porcentajes de aprobación entre los alumnos seleccionados en el pretest que participaron en el proceso remedial y los que no lo hicieron, se obtuvieron los porcentajes relativos al total de cada grupo por separado.

Esto se muestra en la Tabla III, y en el comparativo gráfico de la Figura I.

TABLA III
COMPARATIVO DE PORCENTAJES DE APROBACIÓN

Semestre	Aprobados con Remedial	Aprobados sin Remedial
Prim2015	6/9=66%	7/14=50%
Oto2015	7/10=70%	3/14=21%
Prim 2016	5/10=50%	2/6=33%
Oto2016	10/18=55%	0/10=0%
Prim2017	8/11=72%	3/13=23%

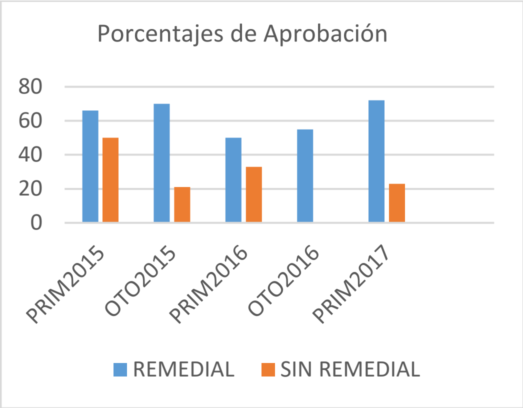


Fig. 1. Gráfica de porcentajes de aprobación

Para el estudio comparativo del puntaje postest-pretest en la resolución de ejercicios de artimética y álgebra, entre el grupo de control GC (sin remedial) y experimental GE (con remedial) se compararon las medianas de cada grupo después de ordenar las puntuaciones combinadas de los dos grupos y estableciendo las hipótesis nula y alterna:

$$H_0: \theta_C = \theta_E \qquad H_A: \theta_C < \theta_E$$

donde θ_C es la mediana del grupo de control y θ_E, es la mediana del grupo experimental. Aplicando el estadístico U para la prueba poderosa de rangos ordenados, con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, y puesto que H_A plantea la diferencia predicha, la región de rechazo es unidireccional (lado izquierdo de la distribución, valores negativos) y consiste en los valores de U, tan extremos que la probabilidad asociada a su ocurrencia cuando H_0 es verdadera, es menor o igual $\alpha = 0.05$. De acuerdo con tablas de valores para la distribución muestral U [6], si el valor de obtenido con el estadístico es menor a -1.776

para $\alpha = 0.05$ entonces se rechaza la hipótesis nula H_0. La tabla IV muestra los valores obtenidos del estadístico, de acuerdo a la fórmula (1), para cada semestre que se replicó el estudio y la correspondiente decisión.

TABLA IV
VALORES DEL ESTADÍSTICO U Y DECISIÓN

Semestre	U	Decisión
Oto2015	-1.9394	Se acepta H_A
Prim 2016	-0.17076	No se rechaza H_0
Oto2016	-3.56788	Se acepta H_A
Prim2017	-1.86152	Se acepta H_A

Como puede observarse, los valores negativos del estadístico indican que el rendimiento de puntaje del grupo experimental GE siempre fue mayor que el del grupo de control GC, aunque en el semestre primavera 2016 esta diferencia no fue estadísticamente significativa.

XXVI. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La aplicación del proceso remedial antes referido, con alumnos de Cálculo diferencial, logró mayores porcentajes de aprobación de la asignatura, en comparación con los alumnos que no llevaron dicho tratamiento, durante los cinco semestres de su aplicación.

Además, los alumnos que llevaron el proceso remedial lograron elevar significativamente su puntaje en la resolución de ejercicios de álgebra, en comparación con los alumnos que no llevaron dicho tratamiento, durante los cuatro semestres de su aplicación, (aunque en uno de ellos la diferencia no fue significativa).

Para el diseño e implementación de procesos remediales se hacen las siguientes recomendaciones:

- Reconstruir y reforzar el significado **geométrico** de las operaciones básicas, de las cantidades, y de las expresiones algebraicas en contextos muy concretos.
- No repetir clases expositivas temáticas, sino enfocarse al análisis y corrección de errores; menos temas pero más consolidados.
- Es importante mantener una ejercitación constante en la internalización de los procesos y más personalizada, para lo que se sugiere en esta etapa, la implementación de cursos semi-presenciales con diseño de rutas de aprendizaje en página moodle.

El presente proceso remedial aplicado no es un proceso acabado, sigue en construcción y adaptándose a nuevas situaciones, hallazgos y mejoras. Lo que es innegable es reconocer la necesidad de implementar este tipo de procesos que permitan al alumno que ingresa a la universidad, en especial a las carreras de ingeniería, a garantizar los conocimientos previos que se requieren para lograr el aprendizaje significativo de las matemáticas.

XXVII. AGRADECIMIENTOS

Mi sincero agradecimiento a la maestra Cristina González por brindarme el apoyo en el manejo de la página moodle y la motivación por utilizar este recurso en mi práctica educativa.

VI. REFERENCIAS

[30] A. Bouvie, “El derecho a cometer errores”. *For the learning of Mathematics* 7, 8 (November 1987) FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

[31] D. T. Campbell, J. C. Stanley, *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social.* Buenos Aires, 1982, Amorrortu editores pp. 93-99.

[32] S.M. Del Puerto, C.L. Minnaard, S.A. Seminara, "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas" *Revista Iberoamericana de Educación,* 2006, Issue 4.

[33] E. Ramírez Rincón, “Errores cometidos por los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un problema de variación en matemáticas”. *Matemática educativa: Fundamentos de la matemática universitaria*. Editorial escuela colombiana de ingeniería. 2004, Bogotá. Pp. 149-159.

[34] R. M. Ruano, M. M. Socas, M. Palarea, “Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en algebra”, *Revista de investigacion en Didactica de la Matematica*, Jan, 2008, Vol.2(2), p.61(14).

[35] S. Siegel, N.J.Castellan, *Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta,* México, 1995, Editorial Trillas pp.166-174.

[36] D. Vega-Castro, M. Molina, E. Castro, “Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2012) 15 (2): 233-258.

Practica de representación gráfica de la derivada (¿dónde no es posible derivar?).

D. Gómez Salazar

Instituto Tecnologico de Estudios Superiores de Occidentebla
Departamento de Matematicas y fisica
davidgs@iteso.mx

***Resumen*— En este taller veremos la implementación de una práctica educativa para que el concepto de derivabilidad quede mejor comprendido, para ellos se utiliza una aplicación que puede ser utilizando en computadoras o en dispositivos móviles además tiene la ventaja de ser de acceso gratuito y no requerir mucha memoria. En el desarrollo de la práctica se tocan los cuatro casos, función continua derivable, función continua no derivable por contener una asíntota vertical, función continua no derivable por contener un pico y una función no continua no derivable. El tiempo en que los alumnos desarrollan la actividad es de 20 a 30 minutos.**

Palabras clave—Derivada, Geogebra, Derivabilidad.

XXVIII. Introducción

En los cursos es necesario incorporar elementos interactivos, el uso de graficadores en las clases no es algo nuevo. sin embargo, la facilidad que hay para incorporar en los celulares buenos graficadores ha facilitado esta actividad. El Geogebra es un software interactivo libre, creado en el año de 2001, es una herramienta que reúne la geometría, el álgebra y el cálculo [1]. Este software lo he utilizado cotidianamente en las clases para favoreces la comprensión gráfica de los conceptos. Las actividades muchas veces las hago guiadas mostrando en el proyector lo que quiero que realicen los alumnos en el graficador y ellos me siguen en otras veces solo les doy las instrucciones de lo que quiero que realicen. El fin de estas actividades es que el alumno tenga la experiencia del uso del graficador como un apoyo visual interactivo donde podrá experimentar lo que sucede en las gráficas al cambiar parámetros e identifique el concepto de derivabilidad

Las funciones no son derivables en un punto $x=a$ cuando presentas una de las siguientes características en dicho punto; una esquina o pico como $f(x)=|x|$ en $x=0$, una discontinuidad como $f(x)=|x|/x$ en $x=0$, una tangente vertical como $f(x)=x^{1/3}$ en $x=0$[2]. La práctica aquí expuesta muestra los tres casos. El ejercicio comienza con una función continua y derivable y se deja como trabajo del alumno revisar los tres casos en que no es derivable.

.

XXIX. Desarrollo de la práctica.

A continuación, haremos una ejemplificación del uso del Geómetra para la comprensión de dónde una función no es derivable.

Paso 01. Busca y abre la página de geogebra.org en un navegador de internet de tu computadora o en tu dispositivo móvil. Selecciona calculadora gráfica (figura 01) (trabajaremos en línea sin embargo es posible descargarlo como aplicación para equipos móviles e iniciar sesión para poder acceder a materiales en línea).

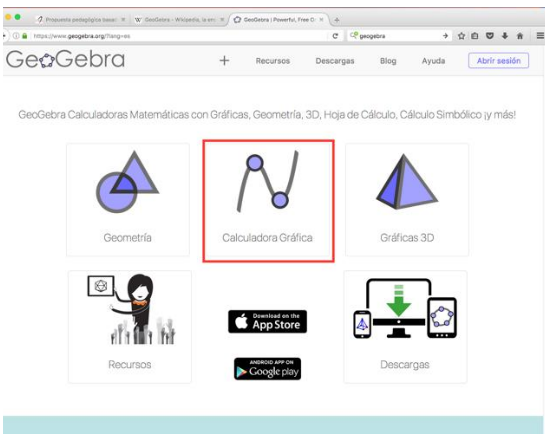


Fig. 01. Página de Geogebra-

Paso 02. Comenzaremos ingresando una función al graficador. (figura 02)Esto se hace haciendo click sobre la palabra entrada.

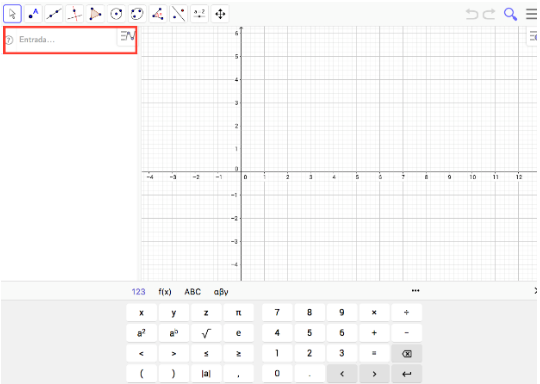


Fig. 02. Ingresar función

Paso 03. una vez activa se escribe la función *f(x)=2*exp(0.14*x)* al momento se mostrará la gráfica, presiona la tecla enter para concluir (figura 03).

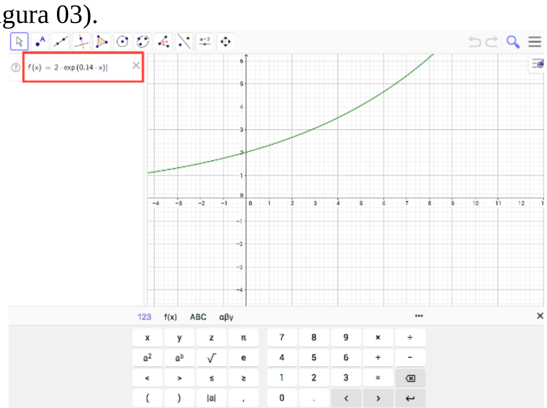


Fig. 03. Función.

Paso 04. Colocaremos un punto sobre la función escribiendo en la entrada *(8,f(8))*, el programa lo nombrara como A (figura 04).

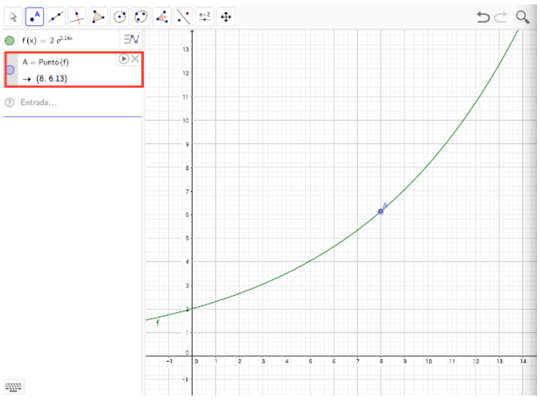


Fig. 04. Ingresar un punto.

Paso 05. Agregaremos un deslizador (figura 05).

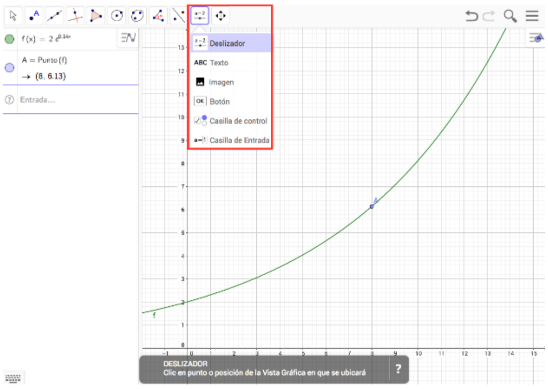


Fig. 05. Deslizador.

Paso 06. Este debe contener valores de *0* a *3* con incrementos de *0.1* y lo nombraremos *a* (figura 06)

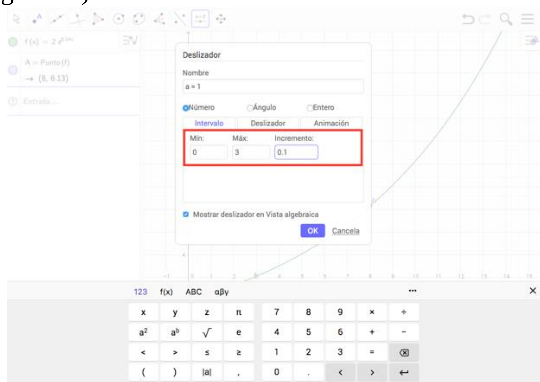


Fig. 06. Parametros para deslizador.

Paso 07. Se muestra el deslizador (figura 07)

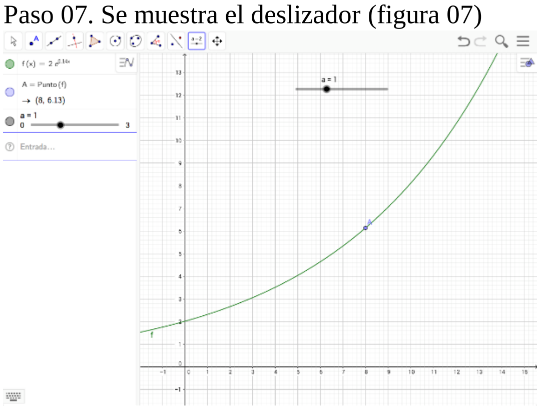


Fig. 07. Deslizador concluido.

Paso 08. Agregaremos dos puntos más:
(8+a,f(8+a)) este punto el programa lo nombrara B.
(8-a,f(8-a)) este punto el programa lo nombrara C (figura 08).

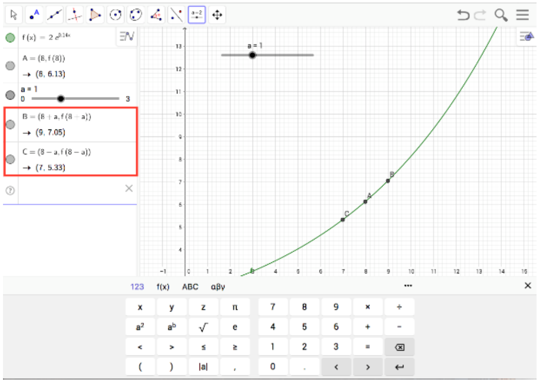


Fig. 08. Ingresar dos puntos más.

Paso 09. En las herramientas seleccionamos segmento de recta (figura 09).

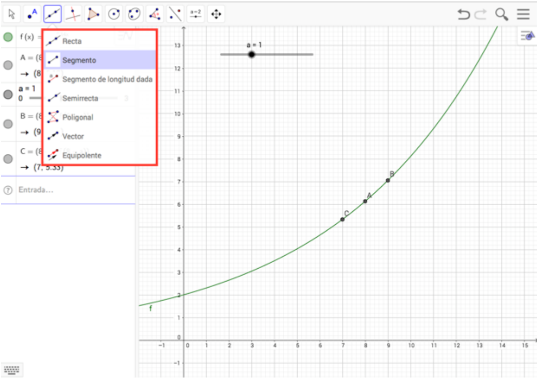


Fig. 09. Segmento de recta

Paso 10. Uniremos mediante un segmento de recta los punto *A* con *B* y *C* con *A* (figura 10).

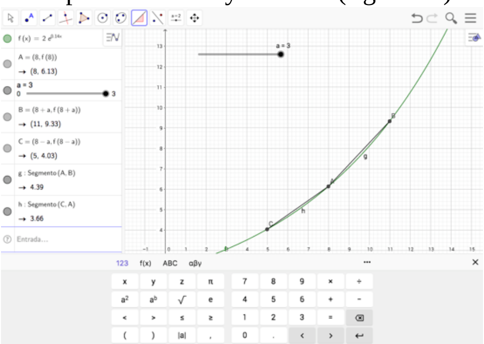


Fig. 10. Trazado de segmentos de linea.

Paso 11. Haciendo clik derecho en el mouse sobre los elementos estos se pueden editan seleccionado Propiedades (figura 11).

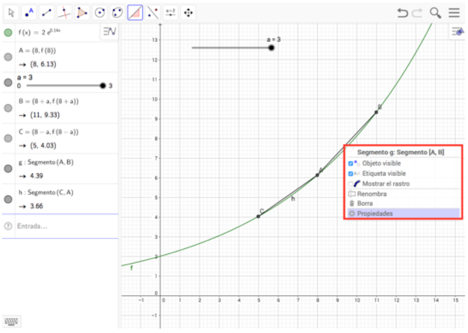
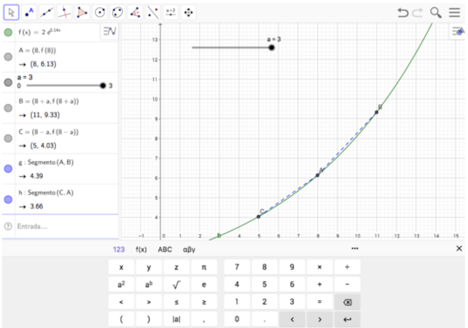
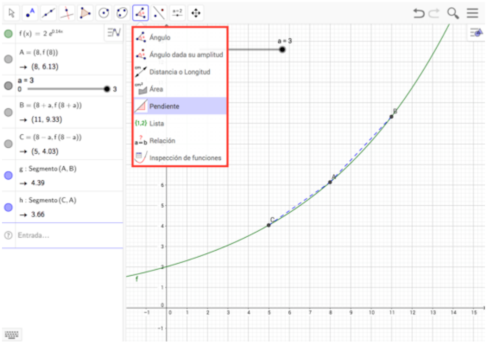


Fig. 11 edicion de rectas.

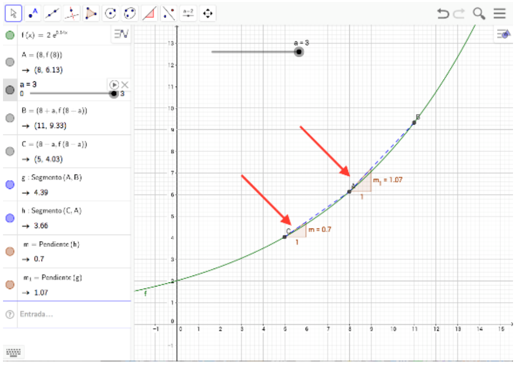
Paso 12. Modificamos la apariencia de las rectas



Paso 13. El programa puede evaluar la pendiente de los segmentos de línea, seleccionado la herramienta de Pendiente.



Paso 14. Se mostrarán las pendientes de los segmentos mediante unos triángulos de base uno y altura igual al valor numérico de la pendiente.



Paso 15. Mediante el cursor mueve el

deslizador para modificar su valor. Es posible modificar la escala de la gráfica y disminuir el paso del deslizador.

Paso 16. En este punto se les pide a los alumnos que interactúen con la gráfica y que reflexionen sobre el valor de la pendiente de las dos rectas conforme el deslizador toma valores más pequeños. Las siguientes preguntas pueden ser utilizadas para iniciar la reflexión.

¿Cómo deben ser los valores de los limites por la izquierda de *a* y por la derecha de *a* en una función para que el limite exista en el punto *a*?
¿Cómo se define la derivada de una función?
¿Toda función continua es derivable?

Paso 17. Una vez concluido esto se les pide que repitan la actividad ahora con las siguientes funciones.

- *f(x)=4*x^(1/9)* y comenzar en el punto (0,f(0)).

[39]

- *f(x)=Si(x>5,-(x-5)^(1/2)+2, -(5-x)^(1/2)+2)* y comenzar en el punto *(5,f(5))*.
- *f(x)=Si(x>5,-(x-5)^(1/2)+1.5, (5-x)^(1/2))* y comenzar en el punto *(5,f(5))*.

XXX. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La implementación de este tipo de actividades favorece la asimilación de conceptos matemáticos. Ya que el alumno puede experimentar con diferentes valores en las gráficas y ver qué es lo que ocurre, yo en mis clases procuro que este tipo de actividades sean frecuentes, cabe notar que esta no es la primera actividad que hacen los alumnos en el curso y ya tiene habilidad en el uso del programa.

VII. REFERENCIAS

[37] Carrillo de Albornoz Torres, Agustín, and Inmaculada Llamas Centeno. Geogebra, Mucho Más Que Geometría Dinámica. México: Alfaomega, 2010.
[38] Stewart, James. Cálculo De Una Variable: Trascendentes Tempranas. México: Cengage Learning, 2012, p. 159,

Diagnóstico y estrategia para la nivelación en matemáticas de estudiantes de ingenierías de nuevo ingreso en la UIA Puebla

S. Carrasco-Romo[(1)], D. Gómez-García[(2)], B. González-Fernández[(3)], M. Valdez-Gutiérrez[(4)], G. Vargas-Salcedo[(5)]

Universidad Iberoamericana de Puebla
Departamento de Ciencias e Ingenierías
[(1)] sergio.carrasco@iberopuebla.mx; [(2)] edwin.gomez@iberopuebla.mx;
[(3)]belinka.gonzalez.fernandez@iberopuebla.mx; [(4)] margarita.valdez.gutierrez@iberopuebla.mx;
[(5)] 711695@iberopuebla.mx

***Resumen* — La dificultad para aprender matemáticas a lo largo de toda la educación básica y media superior es un problema generalizado en nuestro país, que tiene serias consecuencias en el aprovechamiento de las y los estudiantes a lo largo de su formación profesional. Para resolver las dificultades derivadas de esta situación, la Coordinación de Ciencias Básicas de la Universidad Iberoamericana Puebla ha determinado que, en primera instancia, es necesario identificar el nivel académico y perfil de quienes ingresan, para poder plantear estrategias de resolución. En la primera parte de este trabajo se evalúan los resultados del examen de admisión del CENEVAL, así como de un examen diagnóstico construido *ex profeso* y los exámenes departamentales de las materias de Cálculo I, II y III, que se aplican en nuestra institución. Al final, se discuten las opciones remediales que se consideraron y por cuál se optó, para terminar planteando perspectivas futuras.**

Palabras clave — Matemáticas preuniversitarias, evaluación, examen diagnóstico, examen departamental, examen de admisión.

XXXI. Introducción

Existen conocimientos de matemáticas que son considerados básicos desde la secundaria y la preparatoria. Éstos permiten a las y los estudiantes construir aprendizajes más complejos y profundos relativos a sus carreras profesionales. Del nivel de dominio que se tenga de éstos dependerá, en gran medida, el aprovechamiento de materias en matemáticas avanzadas (como cálculo o álgebra lineal) y de física (como estática, dinámica, electromagnetismo, etc.).

Es por esta razón que en el Departamento de Ciencias e Ingenierías (DCeI), de la Universidad Iberoamericana Puebla (UIAP), nos interesa conocer el perfil de la población que ingresa a las carreras que ofrecemos, así como su nivel de conocimiento de matemática. Esperamos que esto nos permita diseñar políticas académicas que ayuden a reducir el número de bajas de materia, así como los índices de reprobación, deserción, ausentismo, cambios de carrera y, en casos extremos, bajas totales de la universidad, además de elevar la calidad académica de nuestros programas educativos y, por ende, de quienes de ellos egresan.

A continuación, presentamos un análisis del tipo de instrumentos que hemos utilizado para diagnosticar a quienes han ingresado, y estudian, en alguna de las carreras que ofrece el DCeI, y la estrategia por la que optamos, como una primera aproximación, para resolver la disparidad de niveles encontrada, además de los retos que se plantean a mediano y largo plazo.

XXXII. Resultados del examen Ceneval de ingreso EXANI II

Buscando obtener información del examen de admisión que se aplica a quienes ingresan al DCeI, de la UIAP, revisamos los resultados del Examen Ceneval de Ingreso, Exani II. Sin embargo, encontramos que esta herramienta no arroja datos suficientes para evaluar el nivel de matemáticas básicas con el que llegan los estudiantes de nuevo ingreso a nuestras carreras.

El mayor inconveniente radica en que los estudiantes provenientes de instituciones con las cuales la UIAP tiene convenios no presentan el examen de admisión; específicamente, en el ingreso de Otoño 2017, el 42.37 % de quienes ingresaron a la oferta de programas de ingeniería lo hicieron sin pasar por este filtro.

Además, los resultados presentados por el Ceneval no muestran el número real de aciertos que obtuvieron las y los estudiantes, y, por la manera en que este instrumento está diseñado, las calificaciones que se asignan están basadas en un puntaje medio esperado, no en valores absolutos.

A continuación, en la Tabla I, mostramos los resultados que pudimos obtener del Exani II.

TABLA I: OTOÑO 2017
CENEVAL INGRESO EXANI II

	Número de estudiantes de programas de ingeniería
TOTAL	177
Aprobados	79
Reprobados	23
No presentaron	75

Los resultados muestran que esta herramienta no ofrece suficientes elementos para hacer un diagnóstico adecuado, por lo cual decidimos analizar lo obtenido en el examen diagnóstico que se ha diseñado especialmente para este fin, y que se describe en la siguiente sección.

XXXIII. RESULTADOS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO EXMAINGE

El Examen de Matemáticas en Ingeniería (ExMaInge) es un instrumento de medición, calibrado y estandarizado, que permite conocer el dominio que tienen los estudiantes que ingresan a una carrera de ingeniería de los conceptos básicos de esta área. Éste ha sido perfeccionado a lo largo de varios lustros por el Dr. Sergio Carrasco, especialista en este tipo de pruebas, y quien actualmente desarrolla un proyecto de investigación educativa en la UIAP basado en este examen.

Consta de dos partes: la primera, conformada por 40 reactivos, evalúa las destrezas para resolver aspectos de aritmética, álgebra, trigonometría y geometría analítica; la segunda, con 15, se enfoca en conocimientos básicos sobre funciones, límites, derivadas e integrales.

Este instrumento se ha aplicado a en los períodos académicos de Primavera y Otoño de 2016 y Primavera de 2017. Al principio se aplicó a estudiantes que estaban cursando Cálculo I y Cálculo II, pero en primavera de 2017 se extendió la aplicación a estudiantes de Cálculo III.

Los resultados muestran una gran heterogeneidad en el dominio de conceptos de matemáticas preuniversitarias por parte de quienes cursan las distintas materias de cálculo. Además, se observa que no hay grandes diferencias estadísticas al avanzar por los distintos niveles, comparando los resultados globales de cada materia, lo cual parece indicar que los conocimientos básicos no se consolidan o mejoran conforme el plan curricular avanza.

II.1 Resultados de Primavera 2017

A continuación, en las tablas II y III, se muestra el número de aplicaciones y el promedio general (base 10), por nivel, obtenido en los tres niveles de Cálculo en Primavera 2017.

TABLA II: PRIMAVERA 2017
NÚMERO DE APLICACIONES DE EXMAINGE

Materia	No. de aplicaciones	No. de grupos
Cálculo 01	74	4
Cálculo 02	136	7
Cálculo 03	42	2

TABLA III: PRIMAVERA 2017
CALIFICACIÓN POR SECCIÓN DE EXMAINGE

	Cálc_01	Cálc_02	Cálc_03
Calificación Parte 1	4.3	5.5	5.2
Calificación Parte 2	1.1	3.1	2.5
Total =	3.4	4.9	4.5

Analizando la información arrojada por este instrumento, se encontró que sólo el 12% de la población de Cálculo I tiene una calificación superior a 5.0; en contraste, el 46% de la población de Cálculo II alcanza una nota mayor que 5.0; en el caso de Cálculo III la calificación de 5.0 o mayor la obtiene el 31% de la población.

Como se mencionó anteriormente, un porcentaje considerable de estudiantes sigue presentando un bajo nivel en las áreas de aritmética y álgebra a lo largo de los cursos avanzados. Adicionalmente en las tres materias de cálculo, las áreas de trigonometría y geometría analítica muestran una deficiencia muy marcada que no logra remitirse con la formación curricular que estas asignaturas comprenden, a decir de los resultados que no muestran grandes diferencias entre ellas. Parece ser que estás carencias, que se arrastran desde los niveles educativos anteriores, no logran variar aún con la formación universitaria, lo cual resulta preocupante.

II.2 Resultados de Otoño 2017

En las evaluaciones de Otoño 2017, comparamos los 40 reactivos (10 de Aritmética, 15 de Álgebra, 7 de trigonometría, 8 de geometría analítica), de la primera parte del examen, que se evalúan en los exámenes de todos los cursos de Cálculo.

A continuación, en la tabla IV y la figura 1, mostramos el número de aplicaciones y el promedio general, por nivel, obtenido en este periodo.

TABLA IV: OTOÑO 2017
PORCENTAJE QUE OBTUVO CALIFICACIONES APROBATORIAS POR CURSO

	Cálculo 01	Cálculo 02	Cálculo 03
Menor a 6	82%	60%	67%
Mayor o igual a 6	18%	40%	33%

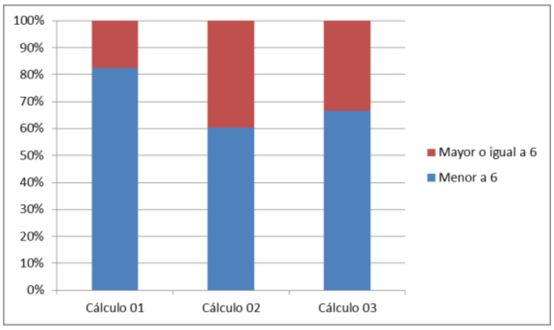


Fig. 1: Porcentaje que obtuvo calificación mayor o igual a 6, en rojo, y menor que 6, en azul

XXXIV. RESULTADOS DEL EXAMEN DEPARTAMENTAL DE CÁLCULO

Finalmente, para evaluar el efecto de las deficiencias en matemáticas preuniversitarias, así como diagnosticar el aprovechamiento de quienes cursan materias de matemáticas superiores, se han diseñado los exámenes departamentales.

Éstos han sido hechos por los profesores que imparten estas asignaturas, quienes generaron un banco de reactivos a partir del cual se construyen las evaluaciones de cada periodo, centrándose en la importancia del manejo y dominio de conceptos, más que en la habilidad de aplicar las matemáticas mecánicamente.

Actualmente se aplican en nuestra institución haciendo uso de la plataforma Moodle, lo cual permite tener resultados de manera inmediata (que pueden obtenerse como una tabla de Excel), aunque quienes los presentan pueden usar hojas para hacer los cálculos que requieran. Su duración es de 80 minutos.

TABLA V: PRIMAVERA 2017
RESULTADOS DE LOS EXÁMENES DEPARTAMENTALES DE CÁLCULO

	Cálculo I	**Cálculo II**	**Cálculo III**
Población	58	110	56
Promedio	6.0	6.8	6.4
% Aprobado	48	67	61
% Reprobado	52	33	39

En la tabla V se muestran los resultados obtenidos para este instrumento, en los cursos de Cálculo, en el periodo de Primavera 2017. Podemos ver que éstos distan mucho de ser los deseables; pareciera que el aprovechamiento de los cursos impartidos está siendo fuertemente afectado por las deficiencias que se leen del ExMaInge, aunque aún queda pendiente hacer el análisis cruzando la información de los distintos instrumentos, estudiante por estudiante, para verificar esta hipótesis.

XXXV. PROPUESTAS DE SOLUCIÓN

En el DCeI nos interesa fuertemente resolver esta situación. Para ello, se han considerado distintas propuestas, fundamentadas en esfuerzos anteriores dentro de nuestra universidad, o inspiradas en estrategias que otras instituciones del SUJ han implementado.

Actualmente hay un sistema de asesorías, impartidas tanto por profesores como por estudiantes, dedicadas a resolver dudas puntuales sobre las principales materias ofrecidas por la Coordinación de Ciencias Básicas (tanto de matemáticas como de física). El inconveniente de este sistema es que la capacidad de atención es limitada, y el seguimiento que se les puede dar a quienes buscan el servicio es poco constante, ya que depende de que las y los estudiantes acudan a pedirlas.

Buscando una solución más eficaz, y aprovechando las experiencias compartidas en el Sexto Foro de Enseñanza de las Matemáticas, Ibero 2016, realizado en la UIA CDMX , hemos pensado que lo ideal sería implementar cursos remediales separados por niveles, como los que se imparten en la Universidad Iberoamericana León. En esta modalidad, dependiendo del nivel de las y los estudiantes se les pide que tomen un curso remedial. Para quienes vienen con un nivel demasiado bajo, se ofrece un curso de matemáticas básicas que dura todo el primer semestre; en caso de que el desnivel no sea tan grave, se les pide que tomen un curso intensivo de 5 semanas, que, de terminar exitosamente, les permite inscribir el primer curso de Cálculo en el mismo semestre (lo cual evita que quienes lo requieran tengan que perder un semestre).

Si bien esta medida puede representar una extensión en la duración de los estudios de quienes, con estas deficiencias, se inscriban a una carrera de ingenierías, consideramos que es una inversión de tiempo que evitará muchos conflictos de reprobación, deserción e incluso bajas, apuntalando, además, el nivel con el que egresarían quienes los cursaran. Sin embargo, tal estrategia requeriría cambios curriculares fundamentales, que el Departamento aún no está en condiciones de implementar.

Finalmente, intentando encontrar una solución a corto plazo, que no requiriera una labor individual tan intensiva y, a la vez, permitiera un acompañamiento más sistemático y relativamente personalizado, se optó por hacer uso de la plataforma ALEKS (por sus siglas en inglés), de Mc Graw Hill. Esta decisión se basó en diversas ventajas que encontramos en ella. Primero, dicha plataforma comienza haciendo un examen diagnóstico, y se personaliza dependiendo del resultado obtenido en él; por ello, los temas en los que se enfatiza son aquellos en los que cada quién más lo requiera. Además, funciona de manera automática, no sólo evaluando ejercicios, sino explicando cómo se hacen. Por último, permite al profesor o profesora monitorear el avance de cada estudiante, sin necesidad de calificar tareas o problemas. Algunas desventajas que encontramos que presenta es que los temarios en español son limitados (sólo llega a precálculo) y que no ofrece retroalimentaciones en correspondientes al tipo de error conceptual que las y los estudiantes pueden tener a la hora de hacer la elección de cierta opción múltiple.

XXXVI. Perspectivas Futuras

Aún queda mucho por hacer, en el corto, mediano y largo plazo.

En principio, será necesario analizar el alcance de ALEKS para nivelar a quienes ingresan a nuestros programas y requieren apoyo en matemáticas básicas, además de su efecto en el aprovechamiento de cursos avanzados de matemáticas y, en general, ciencias básicas.

Además, será necesario hacer una propuesta seria y robusta, a mediano plazo, para hacer las modificaciones curriculares que permitan incluir cursos de nivelación, idealmente en un esquema similar al que se expuso en la sección V.

Aún más importante, será fundamental formarnos como equipo, junto con el resto de nuestros docentes, para de ser capaces de crear cursos basados en herramientas, más que en contenidos curriculares, que ayuden quienes los tomen a aprender a construir su propio conocimiento, y despertar el disfrute del aprendizaje de ciencias básicas. En esta labor esperamos poder contar, además de con la comunidad de la UIAP, con la colaboración de todas las instituciones hermanas de la Red que comparten nuestras preocupaciones, puesto que se antoja que requerirá el trabajo colegiado de todas y todos.

XXXVII. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A lo largo de este análisis, hicimos varios hallazgos. En primer lugar, existen deficiencias sustanciales en los conocimientos básicos de matemáticas con los que llegan quienes ingresan a las carreras que ofrece el DCeI. Éstas afectan significativamente el aprovechamiento en cursos avanzados y, de manera preocupante, encontramos que no se están remediando a lo largo de ellos.

Para revertir esta situación, se han propuesto distintas estrategias, algunas de las cuales aún no se pueden implementar, pero que deben mantenerse presentes, madurarse y perfeccionarse, para ser aplicadas cuando sea propicio.

Sobre la herramienta que se decidió usar a corto plazo, habrá que analizar el impacto que tenga en la formación del alumnado, para determinar en qué medida es útil o qué tan urgente es suplirla.

Finalmente, como todos los escenarios desafortunados, creemos que ésta es una buena oportunidad para, mediante el trabajo conjunto de todos los que estamos interesados en este tipo de problemas, crear una estrategia no sólo buena, sino excepcional, que permita que quienes aprendan establezcan una relación distinta, significativa y satisfactoria, con su proceso de construcción del conocimiento y con las ciencias básicas.

XXXVIII. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al ITESO, por su gran esfuerzo y hospitalidad, y a la Ibero Ciudad de México, que a través de este tipo de eventos crea un contexto en el que reconocemos objetivos comunes, propiciando el intercambio, el diálogo y la construcción de saberes, experiencias y estrategias, y fortaleciendo un sentido de pertenencia y comunidad entre las instituciones del SUJ.

VIII. REFERENCIAS

[40] L. R. Aiken, *Test psicológicos y evaluación* (Undécima edición). México.: Edit. Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2003.

[41] Y. Alsina, "La resolución de problemas matemáticos por estudiantes mexicano – norteamericanas" *Educación Matemática*, Vol. 2 No. 3 pp. 47-54 Diciembre 1990.

[42] Assessment Systems Corporation, *User's Manual for the Item and Test Analysis Package for Windows*, St. Paul MN: Author, 2007.

[43] *Ceneval, Centro Nacional de Evaluación A.C.* Cuaderno Técnico, No. 8 Procedimientos básicos para el análisis de reactivos. Disponible en: http://www.ceneval.edu.mx/ceneval-web/content.do?page=1689 12 de enero de 2013

[44] R. Chain, N.Cruz, M. Martínez & N. Jácome, "Examen de selección y trayectoria escolar" *Revista de la Educación Superior*, Vol. XXXII (1) No. 125, pp. 41-52. Enero–Marzo 2003.

[45] T. M. Haladyna, S. M. Downing & M. C. Rodriguez, "*A Review of Multiple-Choice Item-Writing Guidelines for Classroom Assessment*" *Applied Measurement in Education*, Vol. 15, No. 3, pp. 309–334 2002.

[46] M. Maldonado & G. Rodríguez, Taller "Métodos para la Estructuración de Ejercicios de Opción Múltiple", 6to. Congreso Latinoamericano de The College Board, Ciudad de Monterrey, México. 13–15 de Marzo de 2002.

[47] R. Martínez, *Psicometría: Teoría de los Test Psicológicos y Educativos.* 2a. Reimpresión. España, Editorial Síntesis S. A., 2005.

[48] J. Muñiz, *Teoría clásica de los tests*. España.: Edit. Ediciones Pirámide, S.A., 2000.

[49] L. A. Tristán & U. R. Vidal, *Estándares de calidad para pruebas objetivas.* Bogotá, Colombia: Colección Aula Abierta, Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

[50] S. Carrasco-Romo, *Reporte del examen diagnóstico de matemáticas aplicado a estudiantes de Cálculo en la Ibero Puebla*, 2017. Pendiente de ser publicado en el Repositorio de la Universidad Iberoamericana Puebla.

[51] M. Valdez-Gutiérrez, *Reporte de Exámenes Departamentales de las Academias de Álgebra Lineal y Cálculo: implementación, aplicación y resultados generales, Primavera 2017*, Repositorio de la Universidad Iberoamericana Puebla. Disponible en: http://repositorio.iberopuebla.mx/handle/20.500.11777/2691

[52] Ceneval. Resultados del Exani II para la Universidad Iberoamericana Puebla, agosto 2017

[53] ALEKS, Mc Graw Hill Education. Disponible en: https://latam.aleks.com/

“¿Son las clases en línea el futuro de la enseñanza de las matemáticas en educación superior?”

C. González Bermúdez [1]

[1] *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente*
Departamento de Matemáticas y Física
cristig@iteso.mx

***Resumen*—Gracias a la tecnología se cuenta ahora con tutoriales de matemáticas y ciencias exactas que se pueden distribuir de manera masiva. Este artículo describe la completa implementación de un curso de cálculo en línea en el ITESO y explora la posible amenaza (u oportunidad) para los maestros de ser reemplazados (o apoyados) por las ventajas que ofrece la tecnología actual.**

En un experimento que la autora llevó a cabo por varios semestres, se indagó acerca de la efectividad de un curso de Cálculo Integral semi-presencial en la universidad, el cual ha tomado ímpetu y aceptación entre los estudiantes. Los resultados han sido reservados en el sentido de que se lograron resultados similares que los de grupos presenciales de comparación, con la ventaja que se ha logrado autonomía, autoaprendizaje y autogestión de parte de los estudiantes. Queda por averiguar si el curso se puede replicar con un maestro diferente o es necesario cierto perfil específico, así como las oportunidades que se abren con este formato.

***Palabras clave*—Aprendizaje a distancia, autogestión educativa, enseñanza de las matemáticas, futuro de la enseñanza.**

XXXIX. Introducción

Durante varios años me había dado a la tarea de grabar y publicar cientos de tutoriales en YouTube de álgebra y cálculo. Posteriormente surgió la idea de preparar el curso completo de Cálculo Integral en línea, con una estructura secuenciada, tutoriales, ejercicios, lecturas, tareas y exámenes en una misma plataforma. Después de un tiempo considerable de desarrollo y pruebas, y muchos obstáculos, se ofreció el curso por primera vez en la modalidad “semipresencial” en la universidad ITESO en el año 2014. Desde entonces se ha impartido ininterrumpidamente por siete semestres consecutivos. Otras universidades en todo el mundo ofrecen cursos de cálculo similares, algunas de manera abierta y masiva (MOOC) Referencias. Se da aquí una descripción detallada de la estructura del curso semipresencial del ITESO, se presentan resultados relevantes, así como ventajas y desventajas del mismo, la aceptación/rechazo entre los estudiantes, y finalmente se hace un análisis de las perspectivas de la modalidad y sus posibles réplicas, pensando en si éste puede ser el futuro o una amenaza en la enseñanza de las matemáticas.

XL. Desarrollo

El curso de Cálculo Integral en el ITESO abarca desde el concepto de integral hasta series y sucesiones, pasando por métodos de integración y aplicaciones de las integrales. El experimento consistió en probar si se podía llevar a la modalidad en línea o, en su defecto, semi-presencial (los estudiantes asisten únicamente a una sesión a la semana frente al profesor, de tres programadas en el horario, es decir, la parte presencial es al 33.33%)

ESTRUCTURA DEL CURSO:

El curso fue desarrollado en la plataforma Moodle. Lleva bucles de secuencias del tipo: Video(s)-Práctica(s) para posteriormente concluir con una tarea para cada apartado de cada unidad o capítulo [2]. Los videos son lo más cortos posibles, de preferencia de no más de diez minutos (hay sus excepciones). Después de cada video sigue una pequeña práctica para el estudiante referente al material contenido en el mismo. Esta secuencia de video-práctica puede continuar por tres o cuatro veces hasta que se ha cubierto totalmente el tema de ese apartado. Posteriormente sigue una tarea obligatoria y con calificación (ver Figura I).

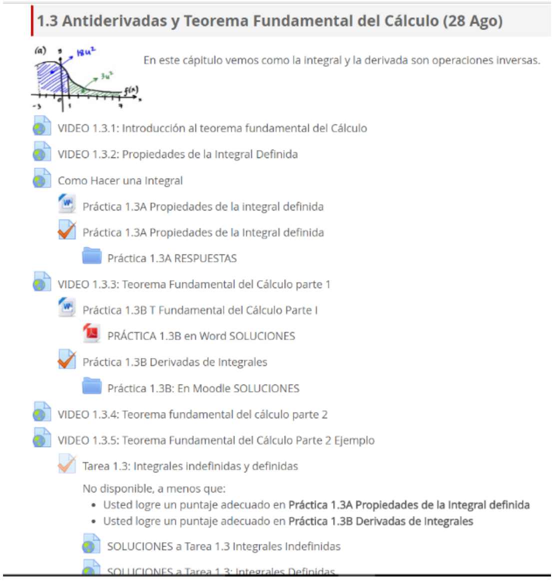


Figura I: Ejemplo de un apartado en Moodle

Las tareas tienen candado, es decir, si el estudiante no contesta al menos el 50% de las prácticas correspondientes, no puede iniciar la tarea. Las prácticas no tienen valor a calificación, simplemente sirven para desbloquear la tarea.

Cada actividad (práctica o tarea) tiene los ejercicios parametrizados, es decir, a cada estudiante le aparece el mismo ejercicio, pero con datos diferentes, de tal manera que sea difícil copiarse entre sí, con la intención de fomentar el trabajo colaborativo, es decir, con la intención de que un estudiante que quiera ayudar a otro le explique el proceso para llegar al resultado más que simplemente pasarle la respuesta correcta. Los ejercicios NO son de opción múltiple y se califican automáticamente y de manera inmediata gracias a la programación que Moodle permite. Asimismo, el estudiante tiene intentos ilimitados para contestar una práctica o una tarea. Si se equivoca en una pregunta o problema, simplemente corrige su procedimiento y teclea el nuevo resultado y lo vuelve a enviar, para que le sea calificado de nuevo.

Tanto las prácticas como las tareas cuentan con un archivo de PDF (u otro video) con las respuestas detalladas de cada ejercicio. Considerando la parametrización de las preguntas, el alumno puede consultar las respuestas detalladas cuando tenga duda en algún ejercicio en particular, en el entendido de que deberá seguir el mismo proceso, con datos diferentes, para resolver su propio ejercicio en cuestión.

El curso cuenta también con exámenes cortos, dos por cada capítulo, para que el estudiante pueda probar cómo va y qué le está fallando. Los exámenes cortos no tienen intentos ilimitados y sí castigan el error.

Hasta ahora, los exámenes departamentales o de cada capítulo, no se han llevado a la virtualidad por cuestiones de uniformidad con la academia. Se hacen de manera presencial, con lápiz y papel, en el salón de clases.

En adición, los estudiantes cuentan con una línea de ayuda, disponible para ellos 24/7 a través de WhatsApp. Esta línea es atendida directamente por su maestra y es frecuentemente utilizada por los alumnos. Las respuestas a sus inquietudes no necesariamente son inmediatas, más siempre se les responde, sin juicios ni adjetivos calificativos.

XLI. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

RESULTADOS COMPARATIVOS:

Los resultados no son significativamente diferentes comparados con los de los grupos presenciales de la misma materia. No se puede decir que cuantitativamente la modalidad sea una diferencia que haga que mejore el número de aprobados o el promedio global del grupo, como se puede ver en la Tabla 1.

CARACTERÍSTICA:	DIFERENCIA:
Diferencia entre % de aprobados en Semi Presencial y en Presencial:	+2 puntos porcentuales
Diferencia en promedios en Semi Presencial y en Presencial.	+0.5 puntos
Número de deserciones en ambas modalidades	El mismo

Tabla I: Diferencias en resultados entre semipresencial y presencial

Sin embargo, cualitativamente, las opiniones de los muchachos son muy satisfactorias, se van contentos con el curso y con su desempeño. Logran aprender por su cuenta y ser más independientes, además de aprender a manejar su tiempo, como lo dicen los siguientes testimonios, entre otros:

"*Básicamente me han encantado las clases, tanto en línea como presencial, ya que la clase en línea es muy accesible a nuestro horario y es fácil al tener al acceso los videos otorgados, y creo que el plan de los temas se ha logrado sacar adelante con el grupo unido.*"

"Muy buena clase y grandiosos métodos de aprendizaje!"

"La metodología de la clase me gustó mucho, puedo ver los vídeos una y otra vez hasta que me queda claro."

"...gracias a ella y su innovadora manera de enseñar me di cuenta de que me gusta esta materia y que soy mejor de lo que pensaba, creo que todas las materias deberían apoyarse en herramientas en línea".

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Ventajas:

- Estudiantes avanzan a su propio ritmo, aprenden a administrar su tiempo y a ser autodidactas.
- Retroalimentación inmediata al estudiante para tareas, prácticas y exámenes.
- Sesiones presenciales se canalizan a contestar dudas de los estudiantes, más que a presentar nuevo material [3].
- Los estudiantes mejoran su comunicación escrita al plantear sus dudas a través de WhatsApp.
- El maestro tiene tiempo para atender a sus estudiantes con más dedicación y de manera personalizada aún a distancia.

Desventajas:

- Preparar el curso por primera vez es pesado, es muchísimo trabajo.
- El curso no es muy flexible, cualquier cambio en el programa implica excesiva preparación previa al semestre.
- No es para todos los perfiles de estudiantes.
- Deseable ofrecerlo en horarios no populares (7 am o 4 pm), para que valga la pena la parte semi-presencial para los estudiantes.
- Los tutoriales en videos no fomentan la lectura en general ni la lectura matemática.

PERSPECTIVAS:

Aun cuando no se tienen resultados significativamente diferentes desde el punto de vista meramente académico, la modalidad en línea tiene características que se pueden implementar en cursos totalmente presenciales, como las tareas con candado y automatizadas, que se califican solas y los exámenes cortos. El refuerzo que permiten los tutoriales en video y las respuestas en PDF también podrían ser aprovechados por las sesiones presenciales. La línea de ayuda es una buena práctica, se puede tener un teléfono institucional y que cada maestro lo tenga por una semana al semestre, para contestar las dudas e inquietudes de los muchachos, las cuales quedan documentadas por completo.

CONCLUSIONES

El diseño y la implementación del curso en línea permitió un nuevo enfoque en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en el que el alumno se convierte en elemento activo y deja de jugar el rol de receptor pasivo de información. El experimento muestra que el aprendizaje en línea del cálculo integral no es la panacea, más tampoco representa una desventaja con respecto a los cursos presenciales y trae beneficios colaterales como autonomía y disciplina para el estudiante.

IX. REFERENCIAS

[54] R. Ghrist, "Calculus Single Variable," *University of Pennsylvania, Coursera*. Disponible en: https://www.coursera.org/learn/single-variable-calculus

[55] Wiggins, G., & McTighe, J. (1998). Understanding by design. Alexandria, Association for Supervision and Curriculum Development, USA.

[56] Alvarez, B. (2011). *Flipping the classroom: Homework in class, lessons at home*. Education Digest: Essential Readings Condensed For Quick Review, 77 (8): 18–21.