

# MPRA

Munich Personal RePEc Archive

## **New characterization of efficient solution in multi-objective combinatorial optimization**

Joseph Okitonyumbe Y.F. and Berthold E.-L. Ulungu

Institut Supérieur Pédagogique de Mbanza-Ngungu, Institut  
Supérieur des Techniques Appliquées de Kinshasa

December 2013

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/66123/>

MPRA Paper No. 66123, posted 15. August 2015 22:43 UTC

## Nouvelle caractérisation des solutions efficaces des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif

Joseph OKITONYUMBE Y. F.

Département de Mathématiques & Informatique, ISP/Mbanza-Ngungu République Démocratique du Congo

E-mail : josephfak@ispmbanza-ngungu.com

Berthold ULUNGU E.-L.

ISTA/Kinshasa République Démocratique du Congo

E-mail : Ulungu.berthold@gmail.com

**Résumé :** *Les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif sont classées en méthodes exactes et métaheuristiques. Cette dernière classe est plus compétitive que la première, permettant de résoudre des problèmes de plus grande taille. Mais la mise en application de ces méthodes exactes et métaheuristiques pose deux problèmes, à savoir : la caractérisation des solutions efficaces et les règles d'acceptation d'un système de voisinages. Le présent article essaie d'apporter une contribution à la première préoccupation.*

**Mots clés :** Ensemble des solutions efficaces (supportées et non), Espace de décisions, Espace des objectifs, Optimisation combinatoire multi-objectif.

### New characterization of efficient solution in multi-objective combinatorial optimization

**Abstract :** *Methods for solving multi-objective combinatorial optimization problems are classified in two categories indeed exact and metaheuristics methods. The latter class is more competitive than the first, for solving larger problems, But the implementation of these exacts and metaheuristics methods presents two inherent difficulties namely the characterization of efficient solutions and acceptance rules for neighborhoods system. This article tackles the first problem.*

**KEY WORDS :** Decision space, Set of efficient solution (supported or non-supported), Multi-objective combinatorial optimization, Objective space.

### 1 . Introduction

Un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif, (notation anglo-saxonne : **M**ulti **O**bjective **C**ombinatorial **O**ptimization, en sigle MOCO) est un problème décisionnel qui consiste à optimiser conjointement un ensemble de  $m$  fonctions objectif linéaires ( $m \geq 2$ ), souvent conflictuelles et soumises à un ensemble de contraintes linéaires, le tout en présence des variables binaires.

Résoudre un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif c'est trouver tout ou une partie de l'ensemble de solutions efficaces noté  $E(P)$  que nous pouvons définir soit en compréhension ou soit en extension.

Définir  $E(P)$  en compréhension c'est caractériser toutes les solutions efficaces du problème, c'est-à-dire, donner une propriété commune définissant tous les éléments de  $E(P)$ , cela présente beaucoup de difficultés vu que le domaine d'admissibilité  $D$  n'est pas convexe. Dans ce cas, on sait (*Ulungu et Teghem, 1999*) que  $E(P)$  se décompose en solutions efficaces supportées  $SE(P)$  et solutions efficaces non supportées  $NSE(P)$ . Ainsi il n'est pas aisé de trouver une caractérisation générale de toutes les solutions efficaces.

Définir  $E(P)$  en extension implique l'énumération exhaustive de toutes les solutions efficaces. Malheureusement, cet ensemble peut être de grande cardinalité, parfois

$$E(P) \cong D.$$

Bien plus, lorsque le nombre d'objectifs est suffisamment grand ( $m > 2$ ) et le nombre de variables de décision élevé ( $n > 10$ ), le problème devient intraitable par des méthodes exactes et le recours aux métaheuristiques est requis avec comme objectif de trouver une "bonne" approximation  $\overline{E(P)}$  de  $E(P)$  (*Okitonyumbe, 2012*). La nécessité de pouvoir caractériser les solutions efficaces reste donc une préoccupation.

A ce jour, les théorèmes caractérisant les solutions efficaces utilisent tous une fonction scalarisante ainsi, seules les solutions efficaces dites supportées car situées sur l'enveloppe convexe de  $D$  sont trouvées.

Nous proposons, à travers cet article, une caractérisation sans fonction scalarisante capable de trouver tant les solutions efficaces supportées que les solutions efficaces non supportées, c'est-à-dire tout l'ensemble des solutions efficaces.

Dans l'aide multi-objectif à la décision on distingue deux méthodologies selon la nature du problème étudié :

1° l'analyse multi-objectif, lorsque l'ensemble de solutions possibles est fini et donné explicitement ;

2° la programmation mathématique multi-objectif (ou programmation multi-objectif), lorsque cet ensemble, de cardinal souvent infini, est implicitement donné par la satisfaction d'un certain nombre de contraintes.

C'est dans cette deuxième méthodologie que nous menons notre recherche.

Cet article est organisé de la manière suivante : après cette introduction, la section 2 modélise le problème MOCO, la section 3 présente une revue des anciennes caractérisations des solutions efficaces, la section 4 donne notre contribution et ses outils conceptuels; finalement, une conclusion et les perspectives de recherches futures terminent l'article.

## 2. Modélisation et formulation mathématique du problème

### Définition 1

Soit un ensemble fini de variables de décision  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ainsi que les domaines  $D_i$  associés à chaque variable  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'**espace de décision** est le produit cartésien de tous les domaines :  $S = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ . Un élément  $a \in S$  est appelé une **solution**.

### Remarque 1

En optimisation combinatoire, par définition,  $D_i = \{0,1\}$  et par conséquent  $S = \{0,1\}^n$ .

### Définition 2

Soit  $S$  un espace de décision et un ensemble de fonctions de contrainte

$$C_l : S \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

Un **espace de décision réalisable ou admissible** noté  $D$  est défini par :

$$D = \{a \in S \text{ tel que } C_l(a) \text{ op } 0, \forall l, \text{ op} \in \{=, \geq, \leq\}\}.$$

Chaque élément de  $D$  est appelé **solution réalisable ou solution admissible**,  $D \subset S$ .

### Définition 3

Soient un espace de décisions réalisables  $D$  et un ensemble de fonctions objectif  $f_j$ ;  $j = 1, \dots, m$ ;  $m > 1$ . Le **domaine des valeurs d'une fonction objectif j** est défini par :

$$\Omega_j = \{f_j(a), a \in D\}.$$

Un **espace des objectifs** est noté par  $O$  et défini par le produit cartésien :

$$O = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_m.$$

Une solution dans l'espace des objectifs est le vecteur image par  $F$  noté :

$$z \in O \quad \text{avec} \quad z = F(a) = (f_j(a)),$$

$j = 1, \dots, m$  et  $a \in D$ .

#### Définition 4

Soient deux solutions  $z_1$  et  $z_2$  définies dans l'espace des objectifs  $O$ , le **principe de dominance** représenté par l'opérateur  $\leq$  (respectivement  $\geq$ ) est tel que  $z_1 \leq z_2$  (respectivement  $z_1 \geq z_2$ ), qui signifie que la solution  $z_1$  domine la solution  $z_2$  si et seulement si, dans l'espace de décisions réalisables, il existe  $a_1$  et  $a_2$ , solutions associées à  $z_1$  et  $z_2$  respectivement, satisfaisant les deux conditions suivantes pour un problème de minimisation (respectivement maximisation) :

$$(1^\circ) f_j(a_1) \leq f_j(a_2) \quad (\text{respectivement } f_j(a_1) \geq f_j(a_2)), \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

$$(2^\circ) \exists j' \text{ tel que } f_{j'}(a_1) < f_{j'}(a_2) \quad (\text{respectivement } f_{j'}(a_1) > f_{j'}(a_2)), 1 \leq j' \leq m.$$

C'est-à-dire que la solution  $a_1$  est au moins aussi bonne que  $a_2$  sur tous les objectifs et,  $a_1$  est meilleure que  $a_2$  sur au moins un objectif  $j'$ . Remarquons que l'opérateur de dominance est non symétrique.

#### Définition 5

Soit un espace des objectifs  $O$ , un **ensemble des solutions efficaces** d'un problème  $P$  est un ensemble dénombrable de solutions non dominées défini par :

$$E(P) = \{ \{ z_1, z_2, \dots, z_r \} \subset O \text{ tel que } z_s \not\leq z_t \text{ et } z_t \not\leq z_s, \forall s, t = 1, 2, \dots, r; s \neq t \}.$$

Cette définition s'interprète de la manière suivante : « une solution  $z$  est efficace pour un problème  $P$  s'il n'existe pas de solution réalisable  $z'$  qui améliore la valeur d'un objectif sans détériorer au moins celle d'un autre objectif ».

L'ensemble des solutions efficaces est aussi connu sous le nom de l'**ensemble Pareto optimal** ou **ensemble des solutions non dominées** ou **non inférieures**.

A présent, nous pouvons donner la formulation mathématique du problème étudié.

### Définition 6

Un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif, abréviation anglo-saxonne (MOCO) pour « **M**ulti-**O**bjective **C**ombinatorial **O**ptimization », est défini par :  $a \in S$ ;  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ , l'espace des objectifs  $O$ , l'ensemble de  $m$  fonctions objectif  $f_j$  et  $k$  fonctions de contraintes  $C_l$  et a la forme :

$$MOCO \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \text{"min"} f_j(a), & j = 1, 2, \dots, m; \\ C_l(a) \text{ op } 0, & l = 1, 2, \dots, k \\ a \in S \end{array} \right.$$

où  $op \in \{=, \geq, \leq\}$  selon le type de contraintes.

Un MOCO est résolu par l'obtention de l'ensemble des solutions efficaces  $E(P) \subset O$ .

### 3. Revue des anciennes caractérisations des solutions efficaces des problèmes MOCO

Une fonction scalarisante est une fonction d'agrégation des plusieurs fonctions objectif en une seule. Dans la littérature, il en existe différents types. L'usage des fonctions scalarisantes permet de caractériser partiellement l'ensemble des solutions efficaces d'un problème MOCO.

En effet, leur optimisation conduit généralement à la résolution de problèmes multiparamétriques, peu aisés à traiter dès que le nombre de paramètres (égal au nombre d'objectifs) est élevé (*Ulungu, 1999*).

Depuis la formalisation de ce domaine de recherche à ce jour, quatre théorèmes de caractérisation des solutions efficaces sont mis en exergue. Dans cette section, nous présentons, de manière condensée, ces résultats tout en soulignant qu'un lecteur intéressé peut trouver les détails et démonstrations dans (*Steuer, 1986*).

#### Notation

$$\Lambda = \left\{ \lambda_j \text{ tels que } \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \text{ et } \lambda_j > 0, j = 1, \dots, m \right\}, \text{ l'ensemble des poids de } m \text{ objectifs;}$$

$P \equiv \min_{x \in D} f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, m$ , le problème à résoudre;

$\theta(P) = \{\tilde{x} \in D : f_j(\tilde{x}) = \min f_j(x)\}$ , l'ensemble de solutions  
optimales du problème  $P$ .

### **Théorème 1**

Soit  $(P_1)$

$$\equiv \min_{\substack{x \in D \\ \lambda \in \Lambda}} s_1(F(x), \lambda),$$

$$s_1(F, \lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j$$

a) Si  $x \in \theta(P_1)$ , alors  $x \in E(P)$

b) Si  $x \in E(P)$  et  $O$  convexe alors  $\exists \lambda \in \Lambda$  t.q.  
 $x \in \theta(P_1)$ .

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Geoffrion (Steuer, 1986).

### **Remarques 3**

Si les poids  $\lambda_j$  n'étaient pas tous strictement positifs, la condition a) n'assurerait que la faible efficacité de  $x$  dans le cas où  $x$  n'est pas solution optimale unique.

Dans la situation du problème de programmation linéaire multi-objectif, l'espace des objectifs est convexe ainsi la résolution du problème paramétrique permet donc de déterminer tout l'ensemble de solutions efficaces.

Notons cependant qu'en présence de variables discrètes dans le problème linéaire, l'espace des objectifs n'est plus convexe; dès lors, la résolution du problème paramétrique ne permet de générer qu'un sous-ensemble des solutions efficaces celle dites supportées (Ulungu, 1993).

### **THÉORÈME 2**

Soit  $(P_2) \equiv \min_{x \in D} s_2(F(x), \lambda, \bar{F})$ ,

$\lambda \in \Lambda$

$$s_2(F, \lambda, \bar{F}) = \max_{j=1, \dots, m} (\lambda_j |f_j - \bar{f}_j|)$$

où  $\bar{F} : \bar{f}_j \leq M_j \forall j$  et  $\bar{F} \neq M$ ,

$M$  étant le point idéal

alors  $x \in E(P) \Leftrightarrow x \in \theta(P_2)$ , l'unique.

### Théorème 3

Soit  $(P_3) \equiv \min_{x \in D} s_3(F(x), \lambda, \bar{F})$

- a) Si  $x \in \theta(P_1)$ , alors  $x \in E(P_1)$
- b) Si  $x \in E(P_3)$ ,  $\exists \lambda \in \Lambda$  et  $\rho > 0$  t.q.  $x \in \theta(P_3)$ .

$s_3$  est la distance pondérée augmentée de Tchebychev :

$$s_3(F, \lambda, \bar{F}) = \max_{j=1, \dots, m} (\lambda_j |f_j - \bar{f}_j|) + \rho \left( \sum_{j=1}^m |f_j - \bar{f}_j| \right), \quad \rho > 0.$$

N.B. Les théorèmes 2 et 3 sont dus à Bowman (Steuer, 1986).

### Théorème 4

Soit  $(P_4) \equiv$

$\min f_l(x)$

$$f_j(x) \leq \alpha_j, \quad j \neq l \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$

$$\text{alors } x \in E(P) \Leftrightarrow x \in \theta(P_4)$$

Ce théorème est l'œuvre de Soland (Steuer, 1986).

### Remarques 4

Les quatre théorèmes de caractérisation ci-dessus utilisent une agrégation des objectifs grâce à une fonction scalarisante, ce qui réduit la dimension multi-objectif du problème traité et fragilise l'obtention subséquente des solutions efficaces.

Notons que les deux derniers de ces théorèmes restent valables même si le domaine d'admissibilité  $D$  n'est pas convexe.

#### 4. Nouvelle caractérisation des solutions efficaces des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif

Comme l'on peut s'en apercevoir, dans la suite, nous nous sommes inspiré du théorème dit de contact ( Collette et Siarry, 2002 *Page 32* ), théorème élogieux que nous démontrons formellement pour la première fois, étant donné que les auteurs le considérant confusément comme une définition, s'en sont servis de son aspect pratique et intuitif.

Pour notre part, nous en faisons un théorème que nous allons démontrer. A ce propos, Signalons modestement que les auteurs du théorème semblent entretenir une confusion entre l'espace de décisions réalisables et son image directe qui est l'espace des objectifs.

En effet, tel que défini, le cône négatif, que nous appelons orthant discret dans  $\mathbb{Z}^m$ , base du théorème de contact est un sous ensemble de l'espace de décisions réalisables mais curieusement, lors de l'illustration, il est représenté dans l'espace des objectifs. Cette confusion amène les auteurs à énoncer leur théorème dans l'espace de décision au lieu de l'espace des objectifs.

Devant la difficulté d'établir le théorème, ils ont préféré le baptiser au nom d'une définition peut être pour éviter sa démonstration. Nous corrigeons d'abord le théorème en l'énonçant dans l'espace des objectifs pour qu'il soit démontrable.

Par ailleurs, nous faisons remarquer que les définitions et théorèmes qui suivent sont présentés dans un espace de dimension  $m = 2$  mais qu'ils peuvent être aisément étendus pour  $m > 2$ .

Ainsi, relativement à un problème dont le sens d'optimisation est la minimisation (maximisation), nous décidons d'introduire d'abord la notion d'orthant négatif (positif) discret avant la démonstration proprement dite du théorème précité.

##### Définition 6

Un **orthant négatif (positif) discret** [Okitonyumbe 2012], est défini dans  $\mathbb{Z}^m$  de la manière suivante :

$$C^-(C^+) = \{z \in \mathbb{Z}^m / z = F(x) \leq 0 \text{ (respectivement } \geq 0), x \in S\}.$$

**Théorème 5 (Théorème de contact)** (Okitonyumbe & Ulungu 2013)

Soit un vecteur  $y \in O$ , si  $y$  est une solution efficace pour un problème MOCO alors,

$$(C^- + \{y\}) \cap O = \{y\}.$$

### Preuve

Nous devons montrer que :

$C^- + \{y\} \cap O \neq \emptyset$  et que si  $z \in E(P)$  et  $z \in C^- + \{y\} \cap O$  alors  $z = y$ .

$$\begin{aligned} \text{D'une part, } C^- + \{y\} \cap O &= \{x : x \in C^- + \{y\} \text{ et } x \in O\} \\ &= \{x : \exists t \in C^-, x = t + y \text{ et } x \in O\}. \end{aligned}$$

Or  $0 \in C^-$  et  $0 + y = y$  avec  $y \in E(P) \subset O$  donc  $y \in C^- + \{y\} \cap O$ , par conséquent

$$C^- + \{y\} \cap O \neq \emptyset.$$

D'autre part, supposons par l'absurde qu'il existe

$$z \in E(P) \text{ et } z \neq y \text{ avec } z \in C^- + \{y\} \cap O.$$

Dire que  $z \in C^- + \{y\} \cap O$  signifie qu'il existe  $t \in C^-$  tel que  $z = t + y$  et  $z \in O$ . D'où, comme  $t \leq 0$ , par définition de  $C^-$ , des deux choses l'une soit  $z = y$  pour  $t = 0$ , soit  $z < y$  lorsque  $t < 0$ . Dans les deux cas, il y a contradiction :

-Primo, conclure que  $z = y$  est absurde vu l'hypothèse que  $z \neq y$ .

-Secundo, conclure que  $z < y$  est aussi absurde car  $y$  est une solution efficace par hypothèse c'est-à-dire non dominée.

Finalement, on a bien que :  $(C^- + \{y\}) \cap O = \{y\}$ . ■

L'utilisation de ce théorème est illustrée dans la figure ci-dessous lorsque  $m = 2$ .

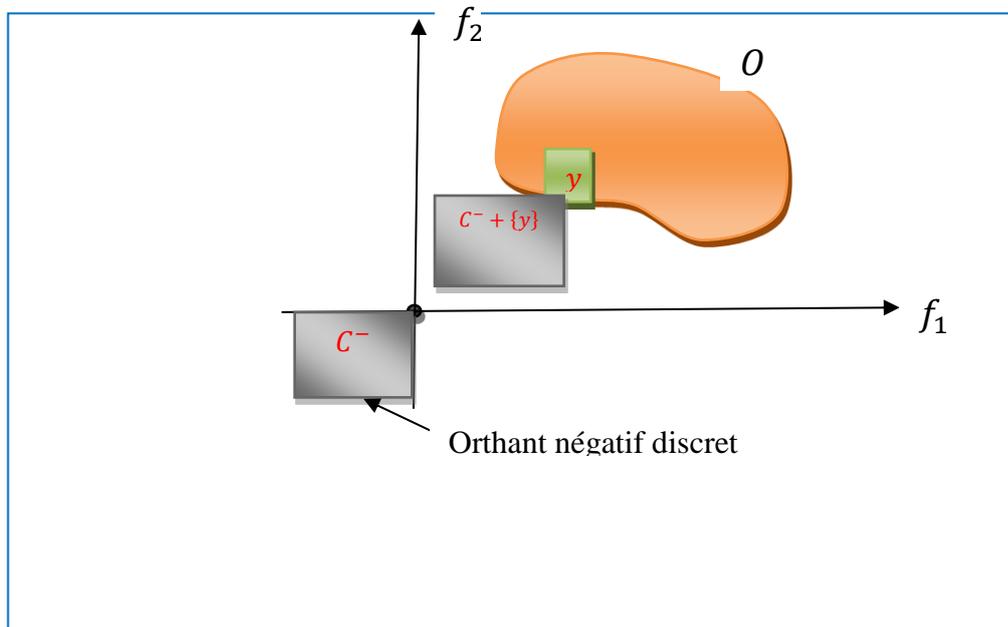


Fig. 1 : Illustration du théorème de contact pour un problème bi-objectif à minimum

### Zones de préférences

Lorsque l'on applique la définition de la dominance au sens de Pareto, on peut engendrer quatre zones auxquelles on attribue des préférences. Ces zones sont représentées par la figure 2. Cette figure reprend le découpage défini par l'orthant négatif (définition 6) et l'étend sur tout l'espace des objectifs.

Par exemple, si ce graphique est centré sur une solution  $a$  que l'on compare avec une solution  $b$ , on aura les éventualités suivantes :

- (i) si la solution  $b$  se trouve dans le quadrant I, alors la solution  $a$  est préférée à la solution  $b$ ;
- (ii) si la solution  $b$  se situe dans le quadrant III, alors la solution  $a$  est dominée par la solution  $b$ ;
- (iii) si la solution  $b$  se situe dans l'un des quadrants II ou IV, alors on ne peut pas se prononcer sur la préférence de  $a$  sur  $b$  ou celle de  $b$  sur  $a$  ;
- (iv) si la solution  $b$  se situe sur un demi-axe négatif, alors elle domine faiblement  $a$  et, si elle est située sur un demi-axe positif, alors elle est faiblement dominée par la solution  $a$ .

Ces quatre zones sont illustrées dans la figure 2 ci-dessous.

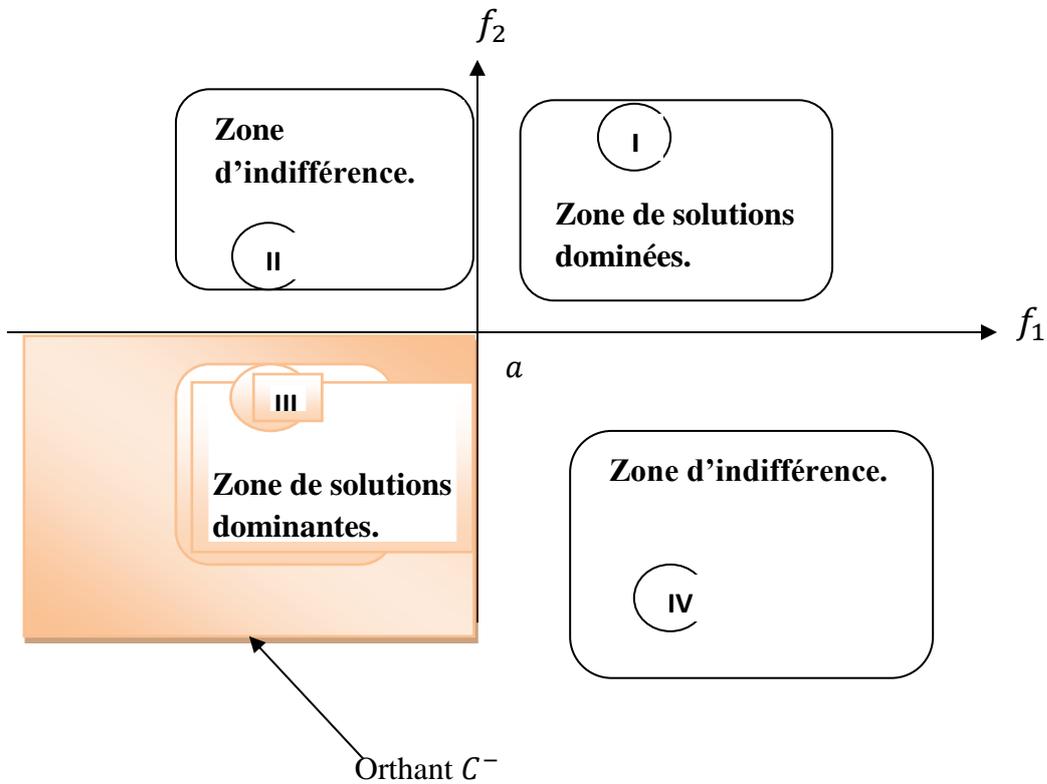


Fig. 2 : Les quatre zones de préférences dans la relation de dominance

### Définition 7

On appelle **repère préférentiel de dominance** d'une solution  $a$ , un repère orthonormé d'origine  $a$ , divisant l'espace en quatre zones de préférence conformément au schéma de la figure 2 (Okitonyumbe, 2012).

### Définition 8

Considérons  $O$  l'espace des objectifs d'un problème MOCO,  $z_1, z_2 \in O$  et  $V(z_1)$  un voisinage de  $z_1$ . On dit que la solution  $z_2 \in V(z_1)$  améliore certainement  $z_1$  si  $z_2$  est situé dans la zone de solutions dominantes du repère préférentiel de  $z_1$ . Dans ce cas, la probabilité d'acceptation de  $z_2$  vaut 1. Elle améliore  $z_1$  avec une probabilité d'acceptation  $\rho$ ,

( $0 < \rho < 1$ ) lorsqu'elle est située dans une zone d'indifférence du repère préférentiel de  $z_1$ . Et avec une probabilité d'acceptation nulle dans la zone de solutions dominées [Okitonyumbe 2012].

En d'autre terme, si  $\rho \equiv \mathbb{P}[\text{acceptation du voisin } z_2 \text{ de } z_1]$  alors :

$$\begin{cases} \rho = 1 & \text{si } z_2 \in \text{III} \\ 0 < \rho < 1 & \text{si } z_2 \in \text{II} \cup \text{IV} \\ \rho = 0 & \text{si } z_2 \in \text{I} \end{cases}$$

**Théorème 6 (Nouvelle caractérisation des solutions efficaces des problèmes MOCO) :**

Considérons  $O$  l'espace des objectifs d'un problème MOCO  $z^* \in O$ .

Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $z^*$  est une solution efficace;
- (ii) Il n'existe pas de solution  $z \in O$  telle que  $z^*$  soit située dans la zone de solutions dominées du repère préférentiel de  $z$ ;
- (iii) Il n'existe pas de solution  $z \in O$  telle que  $z$  soit située dans la zone de solutions dominantes du repère préférentiel  $z^*$ .

**Preuve**

Pour établir ce théorème nous allons démontrer les équivalences suivantes : (i)  $\Leftrightarrow$

(ii) et (i)  $\Leftrightarrow$  (iii), ce qui implique, par transitivité de la relation d'équivalence, que (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) :

Soit  $z^*$  une solution efficace d'un problème MOCO. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution  $z \in O$  tel que la solution  $z^*$  soit située dans la zone des solutions dominées du repère préférentiel de  $z$ . Ce qui est équivalent à dire qu'il existe une solution  $z$  dans l'espace des objectifs telle que  $z \leq z^*$  ce qui signifie que  $z^* \notin E(P)$  c'est-à-dire que  $z^*$  n'est pas une solution efficace. D'où contradiction.

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii) :

Soit  $z^*$  une solution efficace d'un problème MOCO. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution  $z \in O$  telle que la solution  $z$  soit située dans la zone des solutions dominantes du repère préférentiel de  $z^*$ . Ce qui signifie que la solution  $z^*$  est dominée par  $z$  par conséquent  $z^* \notin E(P)$ . D'où contradiction.

Nous avons les bi implications suivantes : (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) et (i)  $\Leftrightarrow$  (iii), nous déduisons par transitivité de la bi implication que (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) ■

### **Corollaire 1**

Soient  $z_1, z_2 \in O$ .

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux solutions efficaces, alors  $z_1$  et  $z_2$  sont mutuellement situées dans les zones d'indifférence de leurs repères préférentiels de dominances respectifs.

### **Démonstration**

Supposons par l'absurde que  $z_2$  ne soit pas située dans une zone d'indifférence du repère préférentiel de dominance de  $z_1$ . Cela signifie que  $z_2$  est située soit dans la zone des solutions dominées, soit dans celle des solutions dominantes du repère préférentiel de dominance de  $z_1$ . Ainsi, l'une de deux solutions n'est pas efficace. Il y a contradiction et donc le corollaire subsiste. ■

### **Corollaire 2**

Soient  $O$  l'espace des objectifs d'un problème MOCO et  $z_1, z_2 \in O$ .

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux solutions indifférentes et si  $z_1$  est une solution efficace alors  $z_2$  est une solution nécessairement efficace.

### **Démonstration**

Supposons par l'absurde que  $z_2$  ne soit pas efficace; cela entraîne que  $z_2$  est dominée par  $z_1$ . Ce qui entraîne que  $z_2$  est située dans la zone des solutions dominées du repère préférentiel de dominance de  $z_2$ . Ce qui est une contradiction au fait que  $z_1$  et  $z_2$  soient deux solutions indifférentes. Donc le corollaire subsiste. ■

### **Résultats et discussion**

Lorsque  $m = 2$ , on distingue quatre problématiques :

- la minimisation simultanée de deux objectifs noté min-min,
- la maximisation simultanée de deux objectifs noté max-max,
- la minimisation du premier objectif suivie de maximisation du second min-max et enfin,
- la maximisation du premier objectif avec minimisation du second max-min.

N.B. En réalité, les quatre problématiques sont équivalentes car maximiser  $f(x)$  revient à minimiser  $-f(x)$ ,  $x \in D$ .

Voici le comportement du repère préférentiel de dominance dans chacune de ces problématiques :

1° Le résultat présenté par les zones de préférence, figure 2 ci-haut est une version min-min de la nouvelle caractérisation des solutions efficaces.

2° Pour une version max-max, le repère préférentiel de dominance subit une rotation d'angle  $\pi$  de sorte que les zones des solutions dominantes et dominées se permutent. Dans ce cas, on considère un orthant positif.

3° Pour sa version min-max, la rotation est de  $\frac{3}{2}\pi$  de sorte que les solutions dominantes occupent la zone II, les solutions dominées la zone IV et les solutions indifférentes les zones I et III.

4° Enfin, pour un problème max-min, la rotation sera de  $\pi/2$  pour situer les solutions dominantes dans la zone IV, les solutions dominées dans la zone II et les solutions indifférentes dans les zones I et III.

Ce théorème 6 nous ouvre une piste de recherche orientée dans la direction théorique vers la conception d'une méthode de résolution des problèmes MOCO, basée sur le repère préférentiel de dominance.

#### **Méthode du repère préférentiel de dominance (MRPD)**

Voici, la version min-min de la méthode du repère préférentiel de dominance (MRPD) :

**Input:**

D : Ensemble de solutions admissibles du problème P

$O = F(D) = (f_i(a))_{i=1,\dots,m}, a \in D.$

Output: E(P) : Ensemble de solutions efficaces du problème P.

Début

$E(P) \leftarrow \emptyset$

Représenter graphiquement O

**Tant que**  $O \neq \emptyset$  faire

    Choisir z dans O

    Tracer le repère préférentiel de dominance de z

**Pour tout**  $z'$  dans  $O \setminus \{z\}$  faire

**Si**  $z'$  est situé dans la zone des solutions dominantes du repère  
        préférentiel de dominance de z alors

$E(P) \leftarrow E(P) \cup \{z'\}$

$O \leftarrow O \setminus \{z'\}$

**Fin si**

**Si**  $z'$  est situé dans la zone des solutions dominées du repère  
        préférentiel de dominance de z alors

$O \leftarrow O \setminus \{z'\}$

**Fin si**

**Si** la zone des solutions dominantes du repère préférentiel de dominance  
    de z est vide alors

$E(P) \leftarrow E(P) \cup \{z'\}$

$O \leftarrow O \setminus \{z'\}$

**Fin si**

**Fin pour tout**

**SI**  $z'$  est situé dans une zone d'indifférence du repère préférentiel de  
    dominance de z alors

$z \leftarrow z'$

$E(P) \leftarrow E(P) \cup \{z'\}$

$O \leftarrow O \setminus \{z'\}$

**Fin si**

**Fin tant que**

Choisir z dans E(P)

Tracer le repère préférentiel de dominance de z

**Pour tout**  $z'$  dans  $E(P) \setminus \{z\}$  faire

**Si**  $z'$  est situé dans la zone des solutions dominantes du repère  
    préférentiel de dominance de z alors

$E(P) \leftarrow E(P) \setminus \{z\}$

**Fin si**

**Si**  $z'$  est situé dans la zone des solutions dominées du repère  
    préférentiel de dominance de z alors

$E(P) \leftarrow E(P) \setminus \{z'\}$

**Fin si**

**Fin pour tout**

Afficher E(P)

Fin

### Illustrations de la méthode du repère préférentiel de dominance pour une version max-max

Reprenons ce problème d'optimisation bi-objectif inspiré de (Ulungu 1993)

$$(P_1) \begin{cases} \text{"max"} f_1(X) = 8x_1 + 4x_2 + x_3 \\ f_2(X) = x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

L'ensemble de toutes les solutions est :

$$S = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Les décisions admissibles forment l'ensemble :

$D = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$  ; et leurs images dans l'espace des objectifs forment l'ensemble :

$$O = \{(0,0), (8,1), (4,4), (1,8)\}.$$

En appliquant la méthode du repère préférentiel de dominance sur  $O$ , nous avons la situation suivante :

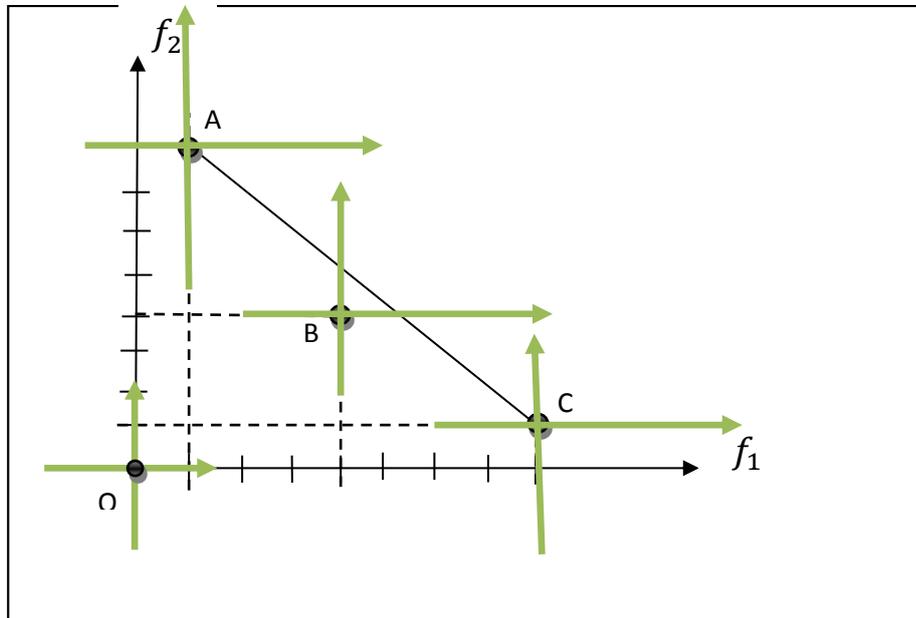


Fig.4 Espace des objectifs du problème  $(P_1)$

Nous constatons que le point de coordonnées (0,0) est dominé car les points A, B et C sont situés dans la zone de dominance de son repère préférentiel de dominance.

Et que les trois points A, B, C ne sont pas dominés car situés mutuellement dans les zones d'indifférence de leurs repères préférentiels de dominances respectifs.

$$\text{Donc } E(P_1) = \{A(1, 8), B(4,4), C(8,1)\}$$

L'enveloppe convexe du problème bi-objectif ( $P_1$ ) est constituée des droites d'équations :

$$(d_1) \equiv y + x - 9 = 0. \quad (d_2) \equiv x = 0 \quad \text{et} \quad (d_3) \equiv y = 0$$

Par conséquent, comme les points A et C sont situés sur la frontière convexe ( $d_1$ ), elles sont des solutions efficaces dites supportées, la solution B étant non supportée et on a :

$$SE(P_1) = \{A(1, 8), C(8,1)\} \text{ et } NSE(P_1) = \{B(4,4)\}.$$

Elargissons notre illustration pour un problème à trois objectifs ( $P_2$ ) :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \max f_1(X) = 8x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \max f_2(X) = x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \max f_3(X) = 14x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array} \right.$$

L'ensemble S de toutes les solutions est le même que dans l'exemple précédent.

Les décisions réalisables pour ( $P_2$ ) constituent l'ensemble :  $D = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  et, leurs images dans l'espace des objectifs forment l'ensemble :  $O = \{(0, 0, 0), (8, 1, 14), (4, 4, 6), (1, 8, 4)\}$ .

En appliquant, une fois de plus, la méthode du repère préférentiel de dominance sur  $O$ , nous avons la représentation graphique suivante :

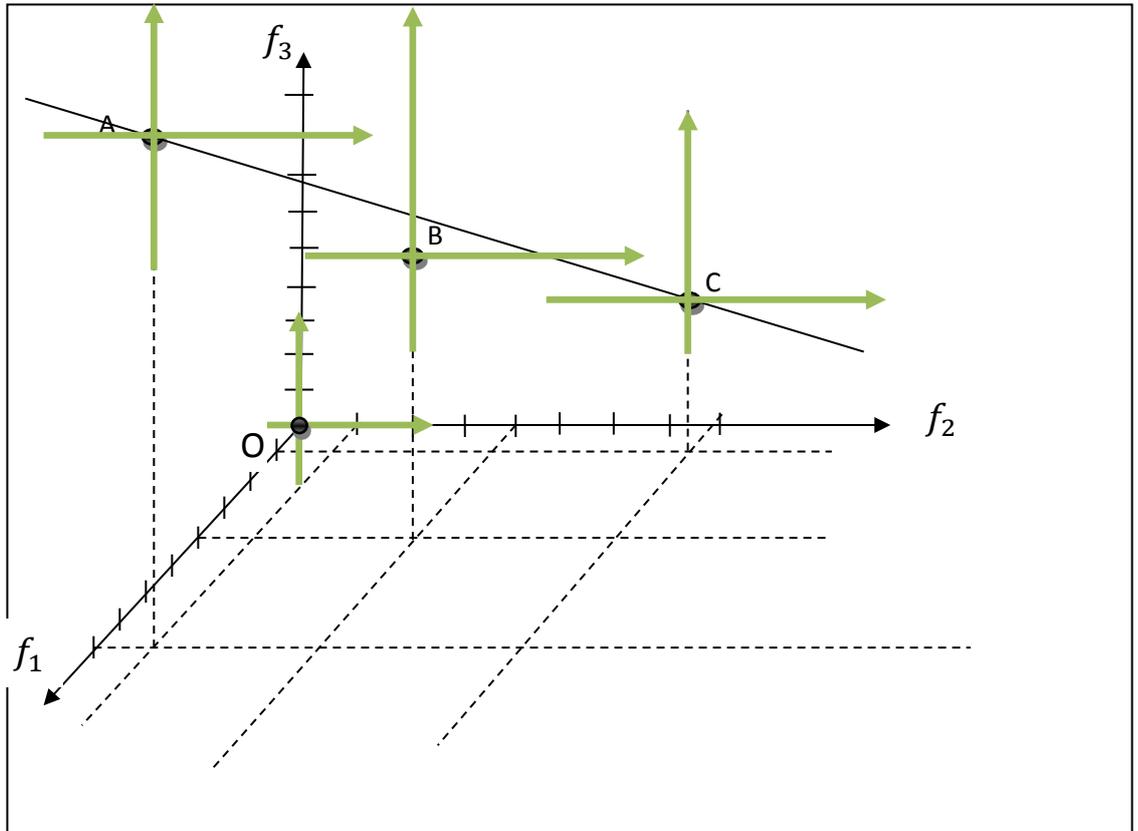


Fig.5 Espace des objectifs du problème ( $P_2$ )

Nous constatons, en traçant un repère préférentiel de dominance en tous les points de  $O$ , que le point de coordonnées  $(0,0,0)$  est dominé car les points  $B$  et  $C$  sont situés dans la zone des solutions dominantes de son repère préférentiel de dominance et que les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas dominés car mutuellement situés dans les zones d'indifférence de leurs repères préférentiels de dominances respectifs.

$$\text{Donc } E(P_2) = \{A(1, 8, 14), B(4, 4, 6), C(8, 1, 4)\}$$

L'enveloppe convexe de ce problème tri-objectifs  $P_2$  est formée des hyperplans d'équations :

$$(\mathcal{H}_1) \equiv x = 0, (\mathcal{H}_2) \equiv y = 0, (\mathcal{H}_3) \equiv z = 0 \text{ et } (\mathcal{H}_4) \equiv 2y + 12x - 7z = 0.$$

Par conséquent, étant donné que les solutions  $A$  et  $C$  sont situés sur la frontière convexe ( $\mathcal{P}_2$ ) et que la solution  $B$  se situe dans les voisinages de celle-ci, on a :

$$SE(P_2) = \{A(1, 8, 14), C(8, 1, 4)\} \text{ et } NSE(P_2) = \{B(4, 4, 6)\}.$$

## 5. Conclusion et perspective

La méthode du repère préférentiel de dominance (MRPD) fonctionne correctement dans le cas de deux et trois objectifs car elle génère tant les solutions efficaces supportées que les solutions efficaces non supportées. En effet, toutes ces solutions efficaces sont mutuellement situées dans les zones d'indifférences de repères préférentiels de dominance respectifs.

La particularité de notre nouvelle caractérisation et de la méthode qui en résulte (MRPD) est d'exploiter l'aspect multi-objectif du problème étudié alors que la plupart de résultats trouvés dans la littérature se servent d'une fonction scalarisante pour agréger les différents objectifs en un objectif unique grâce aux poids fournis par le décideur et procèdent à une optimisation mono-objectif.

Du fait que le domaine d'admissibilité  $D$  n'est pas convexe en optimisation combinatoire, certaines solutions efficaces dites non supportées échappent à ces méthodes d'agrégation alors que notre méthode permet de les générer.

La plus grande faiblesse de notre méthode est d'exiger la représentation graphique de l'espace des objectifs pour dégager l'ensemble des solutions efficaces qui peut parfois se révéler de grande cardinalité. Cette représentation n'est pas aisée si le nombre d'objectifs  $m$  est supérieur à 3; néanmoins, cette difficulté peut être surmontée par la puissance de calcul des ordinateurs.

Une voie de recherche ouverte ici est l'implémentation de la méthode du repère préférentiel de dominance dans un langage de programmation approprié. Ce qui réduirait le temps de recherche de l'ensemble des solutions efficaces, abrégeant ainsi les méthodes de résolution des problèmes MOCO.

## 6. Bibliographie

Okitonyumbe Y.F., *Optimisation combinatoire multi-objectif: méthodes exactes et métaheuristiques*, Mémoire de DEA, Mathématiques Appliquées, Université Pédagogique Nationale, R.D. CONGO, Septembre 2012.

Okitonyu mbe Y.F. et Ulungu E.-L., Sur le théorème de contact de Collette & Siarry, *REBUTO/RDC*, N°39(1), pp. 22-30, 2013.

Steuer R.E. *Multiple criteria optimization: theory computation and application* Krieger Pub Co, 1986.

Ulungu B., Teghem J., Fortemps Ph. and Tuyttens D., MOSA Method : a tool for solving multiobjective combinatorial optimization problems. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, 1999, 8, pp 221-236.

Ulungu B., *Optimisation Combinatoire Multicritère : détermination de l'ensemble des solutions efficaces et méthodes interactives*, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, octobre 1993.

Ulungu B. and Teghem J.; Multiobjective Combinatorial Optimization Problem : A survey. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 3, 1994, pp 33-104.

Yann Collette et Patrick Siarry, *Optimisation multi-objectif*, Eyrolles, Paris, 2002.