Estimating the Yield Curve

Rodrigo Alfaro

Central Bank of Chile, Universidad de Chile

17. July 2009

Estimación de la Curva de Rendimiento

Rodrigo A. Alfaro

July 17, 2009

1 Introducción

La curva de rendimiento recoge mucha información sobre las expectativas de los agentes económicos respecto de la evolución de la economía. En particular, una curva con pendiente positiva implica que nos encontramos en un período de bajo crecimiento y bajo una inflación acotada es posible que la Política Monetaria está siendo expansiva. Esto último pues dicha política actual sobre la tasa más corta de la curva que corresponde a la interbancaria. Una política activa incentiva actividad por lo que los descuentos a mayores plazo son más alto, reflejando de paso un ajuste de la política hacia la neutralidad.

La estimación de la curva de rendimiento ha despertado el interés tanto académico como de los analistas financieros. Estos últimos han desarrollado modelos que permiten interpolaciones de madurez a fin de poder completar la curva. Esta visión es estática en el sentido que no explota la dimensión de series de tiempo de las tasas de interés que podría implicar una estimación más eficiente de la curva. Por otra parte los modelos teóricos más puros nacen de la mano de la modelación de procesos estocásticos y son acotados a modelos que no presentan oportunidades de arbitraje. En la práctica estos modelos no han sido completamente satisfactorios para tanto un adecuado ajuste estático de la curva como elementos de predicción. Diebold (200x) discute sobre las bondades del modelo de Nelson y Siegel (1987), el cual puede ser entendido como un modelo dinámico más complejo que los presentados por la literatura de modelos de no arbitraje.

2 Elementos Teóricos

En esta sección presentamos los elementos teóricos relevantes para el desarrollo de la curva de rendimiento. Una revisión exhaustiva de los conceptos acá desarrollados se encuentran en los capítulos 10 y 11 de Campbell y otros (1997).

2.1 Bonos de Descuento

Consideremos a Z_{nt} como la tasa de descuento que se aplica en t para un flujo que se recibirá en el período $t+n$. De esta forma podemos definir el precio de un bono de descuento o cero cupón que paga una unidad monetaria n períodos adelante como $B_{nt} = (1+Z_{nt})^{-n}$. Para simplificar el análisis utilizaremos la versión de capitalización continua de la tasa que corresponde a $z_{nt} = \log(1+Z_{nt})$.[1] De esta forma, el logaritmo del precio del bono de descuento (b_{nt}) y la tasa de descuento capitalizada continua (z_{nt}) se relacionan como sigue: $b_{nt} = -nz_{nt}$.

2.2 La Hipótesis de Expectativas

Adicionalmente, tomaremos el retorno neto ($R_{n,t+1}$) de mantener un bono de descuento de madurez n por un período de tiempo como $(1+R_{n,t+1}) = B_{n-1,t+1}/B_{nt}$. Siguiendo con las definiciones previas esto se expresa como $r_{n,t+1} = b_{n-1,t+1} - b_{nt} = nz_{nt} - (n-1)z_{n-1,t+1}$. Esta ecuación implica que la actual tasa de descuento de madurez n puede ser entendida como un promedio ponderado de tasas del próximo período: $z_{nt} = (1/n)r_{n,t+1}/n + [(n-1)/n]z_{n-1,t+1}$. Análogamente tenemos que $z_{n-1,t} = [1/(n-1)]r_{n-1,t+1} + [(n-2)/(n-1)]z_{n-2,t+1}$. Adelantando un período la ecuación: $z_{n-1,t+1} = [1/(n-1)]r_{n-1,t+2} + [(n-2)/(n-1)]z_{n-2,t+2}$ y reemplazando en la tasa actual: $z_{nt} = (1/n)(r_{n,t+1} + r_{n-1,t+2}) + [(n-2)/n]z_{n-2,t+2}$. Notamos que $r_{1,t+n} = z_{1,t+n-1}$, de modo que en reemplazos sucesivos tenemos que: $z_{nt} = (1/n)\sum_{i=0}^{n-1} r_{n-i,t+1+i}$.

Con información en t, los retornos $r_{n-i,t+1+i}$ no son conocidos. Sin embargo, la hipótesis de expectativas puras en logaritmo indica que por arbitraje el valor esperado de estos retornos, condicional a la información en t debieran ser similares los retornos de las estrategias de inversión

[1] Notamos que por Taylor se tiene que $\log(1+Z_{nt}) = Z_{nt} + O\left(Z_{nt}^2\right)$ cuando la función se expande en torno a cero. Dado que las tasas en general son pequeñas, esto significa que en la práctica ambas tasas son similares.

segura. Esta corresponde a compra un bono de descuento que madure en el próximo período, esto significa que $E_{t+i}(r_{n-i,t+1+i}) = z_{1,t+i}$. Finalmente por expectativas iterativas tenemos que $E_t[E_{t+i}(r_{n-i,t+1+i})] = E_t(z_{1,t+i})$ lo que implica que:

$$z_{nt} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_t(z_{1,t+i}). \tag{1}$$

Esta ecuación es fundamental para la construcción de la curva de rendimiento ya que indica que la estructura completa de tasas se obtiene de las expectativas de la tasa corta.

2.3 La Ecuación de Euler

Alternativamente es posible construir la curva de rendimiento a través de la ecuacióbn de Euler. En ella se establece que el precio de un activo se encuentra relacionado con sus pagos futuros descontados según el Factor de Descuento Estocástico (FDE) el cual se obtiene de fundamentales de la economía. Usualmente el FDE, denotado por M_{t+1}, se relaciona con el ratio de utilidades marginales del consumo del agente representativo de la economía aunque esta relación puede generalizarse a factores fundamentales de la economía (x_t). De este modo, el precio de un bono de descuento esta ecuación se obtiene de esta ecuación como sigue: $B_{nt} = E_t(B_{n-1,t+1}M_{t+1})$, donde M_{t+1} es función de los factores x_{t+1}. Por simplicidad trabajaremos con el logaritmo del FDE (m_{t+1}). De este modo el precio del bono de descuento bajo la ecuación de Euler es:

$$b_{nt} = E_t(b_{n-1,t+1} + m_{t+1}) + \nu \tag{2}$$

con $m_{t+1} \equiv g(x_{t+1})$, donde g es una función tratable. Por otro lado, ν es el factor de Jensen que debiera ser en la práctica pequeño por lo que será eliminado del análisis.

2.4 Bonos con Cupones

Usualmente los bonos de descuento se encuentran concentrados en el tramo más corto de la curva de rendimiento, mientras que para el tramo mediano y de largo plazo los bonos contienen cupones. Esto introduce una dificultad adicional al separar lo que corresponde a una tasa pura de descuento con respecto de una tasa de descuento de un bono (TIR). Esta última corresponde a la tasa de rendimiento que obtendría el inversionista si mantuviera el bono con cupones hasta madurez, recibiendo todos y cada uno de los pagos consignados en el contrato. El precio de un bono con cupones (P_{nt}) depende de los flujos (F_i) que entregue, los cuales son descontados a su TIR (Y_{nt}):

$$P_{nt} = \frac{F_1}{(1+Y_{nt})} + \frac{F_2}{(1+Y_{nt})^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+Y_{nt})^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+Y_{nt})^i} \tag{3}$$

Para simplificar la discusión introduciremos el concepto de duración de Macaulay (D_{cnt}), el cual corresponde al promedio ponderado de las "madureces" de cada cupón. El ponderador corresponde al valor presente de cada cupón.

$$D_{nt} = \frac{1}{P_{nt}} \left[\frac{1 \cdot F_1}{(1+Y_{nt})} + \frac{2 \cdot F_2}{(1+Y_{nt})^2} + \cdots + \frac{n \cdot F_n}{(1+Y_{nt})^n} \right] = \frac{1}{P_{nt}} \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot F_i}{(1+Y_{nt})^i} \tag{4}$$

Es claro de (4) que para el caso de bonos de descuento $F_i = 0$ para todo $i < n$ mientras que $F_n = 1$. Por ello para esos bonos tenemos que $D_{nt} = n$. Por otra parte, notamos que al derivar el precio con respecto al retorno bruto tenemos que

$$\frac{dP_{nt}}{d(1+Y_{nt})} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot F_i}{(1+Y_{nt})^{i+1}}.$$

Este resultado es similar a la definición de duración. De hecho podemos observar que la duración corresponde a la elasticidad precio-TIR:

$$\frac{dp_{nt}}{dy_{nt}} \equiv \frac{dP_{nt}}{d(1+Y_{nt})} \frac{(1+Y_{nt})}{P_{nt}} = -\frac{1}{P_{nt}} \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot F_i}{(1+Y_{nt})^i} = -D_{nt}.$$

Esto implica que la duración corresponde al efecto de primer orden en cambios de la TIR, es decir, i se cumple que los cambios en la curva de retorno son paralelo, entonces es posible considerar que los cambios en precios cuando cambia el retorno de un bono con cupones (en términos porcentuales) ofrecen una medida del tiempo en que el documento retorna la inversión o en términos más burdos es su madurez "sintética".

Al comparar los bonos con cupones con los de descuento observamos que el término duración opera de forma similar que la madurez de los últimos. Por este motivo el ajuste natural para la aplicación de los modelos que se basan en bonos con descuento es cambiar el término de madurez por la duración de los bonos. Es importante notar que esta aproximación se realiza en término de los retornos de los bonos ($y_{nt} \sim z_{Dt}$) y no con respecto a su precio.

3 Modelación Empírica

En esta sección revisamos las modelación de la curva de rendimiento. En esta revisión consideramos los modelos que trabajan en las ecuaciones (1) o (2), es decir modelos de factores.

3.1 Dinámica Autoregresiva

Un mecanismo natural para genera la curva de rendimiento viene de la consideración de un proceso estocástico para la tasa más corta de la curva. A modo de ejemplo consideremos un proceso AR(1):

$$z_{1,t+1} = c + \phi z_{1t} + e_{1,t+1}$$

donde $0 < \phi < 1$ y $e_{1,t+1}$ es un error con media cero y varianza finita. De este proceso notamos su media incondicional como $E(z_{1,t+i}) = c/(1-\phi) \equiv z^*$, mientras que la esperanza condicional con información en t es $E_t(z_{1,t+i}) = c(1-\phi^i)/(1-\phi) + \phi^i z_t = (1-\phi^i)z^* + \phi^i z_t$, esto es un promedio ponderado entre la esperanza incondicional y el valor conocido.

Theorem 3.1. *Utilizando la ecuación del promedio (1) y la estructura autoregresiva para la tasa más corta: $z_{1,t+1} = c + \phi z_{1t} + e_{1,t+1}$, tenemos que la tasa de descuento de madurez n obedece a la siguiente estructura:*

$$z_{nt} \quad = \quad z^* + \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right)\frac{(z_{1t} - z^*)}{n}$$

con $z^* \equiv c/(1-\phi)$ el valor de equilibrio del sistema dinámico.

Proof. Por series tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi^i = \frac{1-\phi^n}{1-\phi}$$

aplicando este resultado sobre el modelo tenemos:

$$\begin{aligned} z_{nt} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[(1-\phi^i)z^* + \phi^i z_t\right] \\ &= z^* - \frac{z^*}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{z_{1t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) \\ &= z^* + \left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right)\frac{(z_{1t}-z^*)}{n} \end{aligned}$$

□

Notamos que en equilibrio ($z_{1t} = z^*$) el modelo implica $z_{nt} = z^*$ lo que significa observar una curva de rendimiento plana. Adicionalmente el caso de raíz unitaria puede ser analizado considerando que: $\lim_{\phi\to 1}(1-\phi^n)/(1-\phi) =^{LH} \lim_{\phi\to 1} -n\phi^{n-1}/(-1) = n$ por lo que bajo no estacionaridad del proceso z_{1t} tenemos que $z_{nt} = z_{1t}$ lo cual indica que todas las tasas de interés tienen raíces unitarias, situación que en la práctica es difícil de rechazar.

Notamos que la tasa de descuento para el bono de madurez infinita es z^* debido a que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\phi^n}{n(1-\phi)} =^{LH} \lim_{n\to\infty}\frac{-\phi^n \log(\phi)}{(1-\phi)} = 0. \tag{5}$$

3.2 Vasicek (1977)

Vasicek (1977) considera que hay un factor que caracteriza toda la curva de rendimiento. Este postulado obecede tanto a la ecuación del promedio (1) como a la ecuación de Euler (2). En este apartado presentando la discusión del modelo siguiendo la ecuación de Euler. La notación sigue de cerca al material presentado en el capítulo 11 de Campbell y otros (1997).

Primero, consideremos que m_{t+1} depende linealmente de un factor dinámico homocedástico, es decir: $m_{t+1} = -x_t + \beta e_{t+1}$, con $x_t = c + \phi x_{t-1} + e_t$, donde $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ y β es el elemento de correlación entre el FDE y el factor x. Esto implica que m_{t+1} puede ser escrito como un

ARMA(1,1), debido a que $m_{t+1} - \phi m_t = -x_t + \beta e_{t+1} + \phi x_{t-1} - \phi\beta e_t$, lo que ordenadamente sería: $m_{t+1} = -c + \phi m_t + \xi_{t+1} + \theta\xi_t$, donde $\xi_t \equiv \beta e_t$ y $\theta \equiv -(1+\beta\phi)/\beta$.

Para completar el análisis consideraremos que la solución genérica para el precio de un bono de descuento como $b_{nt} = F_n - G_n x_t$, donde F_n y G_n son funciones de los parámetros del modelo y de la madurez (n). Tomando el lado derecho de (2) tenemos que $E_t(m_{t+1}) = -x_t$ y $E_t(p_{n-1,t+1}) = F_{n-1} - G_{n-1}E_t(x_{t+1})$. Al igualar los términos asociados con x_t tenemos que $G_n = 1 + \phi G_{n-1}$, mientras que los términos libres implican lo siguiente: $F_n = F_{n-1} - cG_{n-1}$. Resolviendo recursivamente: $G_n = (1-\phi^n)/(1-\phi)$.

Para determinar los valores iniciales consideremos $n = 1$ en cuyo caso $b_{1t} = E_t(m_{t+1} + b_{0,t+1})$. Por construcción $b_{0,t+1} = 0$, luego $b_{1t} = -x_t$ lo que implica que $F_1 = 0$ y $G_1 = 1$. Debido a que la tasa puede ser obtenida como $z_{nt} = -(1/n)b_{nt}$ tenemos que $z_{1t} = -b_{1t} = -F_1 + G_1 x_t = x_t$, lo que identifica al factor como la tasa de interés más corta de la economía. Dado que x_t es un AR(1) este modelo coincide con el presentado en el apartado anterior.

Empíricamente es difícil ajustar toda la curva con un solo factor por tanto consideremos el caso de dos factores no correlacionados, esto es $m_{t+1} = -x_{1t} - x_{2t} + \beta e_{t+1}$, con $x_{it} = c_i + \phi_i x_{i,t-1} + e_{i,t}$. Considerando la misma solución genérica: $b_{nt} = F_n - G_n x_{1t} - H_n x_{2t}$. Tomando el lado derecho de (2) tenemos que $E_t(m_{t+1}) = -x_{1t} - x_{2t}$ y $E_t(p_{n-1,t+1}) = F_{n-1} - G_{n-1}E_t(x_{1,t+1}) - H_{n-1}E_t(x_{2,t+1})$. Al igual los términos asociados con x's tenemos: $G_n = 1 + \phi_1 G_{n-1}$ y $H_n = 1 + \phi_2 H_{n-1}$. Los términos libres implican: $F_n = F_{n-1} - c_1 G_{n-1} - c_2 H_{n-1}$. De manera análoga al caso de un factor tenemos: $G_n = (1-\phi_1^n)/(1-\phi_1)$ y $H_n = (1-\phi_2^n)/(1-\phi_2)$. En este caso la tasa de descuento obedece a la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} z_{nt} &= -\frac{F_n}{n} + \frac{G_n}{n}x_{1t} + \frac{H_n}{n}x_{2t} \\ &= \gamma_n + \frac{x_{1t}}{n}\left(\frac{1-\phi_1^n}{1-\phi_1}\right) + \frac{x_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right) \end{aligned}$$

En un espíritu similar Cortazar y otros (2002) presentan un modelo de 3 factores lineales homocedásticos. Dicho modelo constituye la base para la estimación de la curva de rendimiento que realiza RiskAmerica, institución de análisis de mercado perteneciente a la Universidad Católica.

Por otra parte de la sección anterior, observamos que si $\phi_1 \to 1$ entonces $G_n \to n$. Esta observación tiene una información adicional que es que el proceso estocástico de x_{1t} es una raíz unitaria. Para simplicidad asumiremos en dicho caso que $c_1 = 0$, es decir, una caminata aleatoria pura. Como complemento de este caso diremos que el proceso x_{2t} es estacionario con media cero lo que lleva a que $c_2 = 0$ y con ello $\gamma_n = 0$. De esta forma el modelo se reduce a:

$$z_{nt} = x_{1t} + \frac{x_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi_2^n}{1-\phi_2}\right) \tag{6}$$

El modelo (6) se basa en que las tasas de descuento se encuentran explicadas por dos factores dinámicos. Estos factores son homocedásticos, centrados en cero y no están correlacionados. Además el primero de ellos es una raíz unitaria y el segundo un proceso AR(1) estacionario.

Notamos de este modelo que bajo $n = 1$ entonces $z_{1t} = x_{1t} + x_{2t}$, mientras que basado en (5) tenemos que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = x_{1t}$. Esto nos indica que el primer factor corresponde a la tasa de largo plazo mientras que el segundo es la diferencia corta-larga, lo que corresponde al negativo del premio por plazo.

3.3 Nelson y Siegel (1987)

Los autores trabajan en un modelo de tiempo continuo donde modelan la estructura de la tasa forward instantánea. Utilizando (1) en su versión continua los autores obtienen la curva de rendimiento la cual depende de los parámetros de la tasa forward. Con datos efectivos de rendimiento de bonos de descuento estiman los parámetros.

La modelación de la tasa forward permite una consistencia entre las tasas de descuento observadas y la directa interpretación de las expectativas de cambios en la tasa instantánea o de más corto plazo. El resultado del artículo es que la tasa de descuento depende de la madurez del instrumento, ajuste que ha sido implementado por algunos analistas a través de polinomios. La ventaja de Nelson-Siegel (NS) es que es un modelo parsimonioso, es decir, requiere un número pequeño de parámetros para caracterizar completamente la curva de rendimiento.

La motivación original de NS es un modelo lineal con un parámetro calibrado. En aplicaciones empíricas típicamente se estima este parámetro no lienal en conjunto con el resto de los parámetros. Por simplicidad consideraremos el espíritu original de NS y presentamos el modelo en tiempo discreto adecuándolo a la notación presentada en la sección anterior.

En este caso el modelo es determinístico por lo que el valor esperado de (1) es innecesario. Los autores asumen la siguiente que la tasa forward instantánea en función del tiempo como sigue: $f(i) = \beta_1 + \beta_2 \exp(-\alpha i) + \alpha\beta_3 i \exp(-\alpha i)$, lo que se traduce después de la integración en

$$z(n) \quad = \quad \beta_1 + \beta_2 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n}\right] + \beta_3 \left[\frac{1-\exp(-\alpha n)}{\alpha n} - \exp(-\alpha n)\right] \tag{7}$$

La versión discreta considerada en este artículo se basa en que $\exp(-\alpha) = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$, es decir cuando α es pequeño podemos considerar $\exp(-\alpha) \approx 1 - \alpha \equiv \phi$, de modo que $0 < \phi < 1$. Así la discretización del modelo NS sería:

$$z_{1,t+i} = \beta_{1t} + \beta_{2t}\phi^i + \beta_{3t}(1-\phi)i\phi^{i-1}.$$

En comparación con otros modelos de ajuste de curva determinísticos como las ecuaciones cúbicas, NS presenta un ajuste con una función acotada (ϕ^n). Notamos que el exponente reducido del tercer componente es un ajuste para la discretización que permite calzar la tasa de corto plazo.

Theorem 3.2. *Considerando la ecuación del promedio (1) y la estructura no aleatoria para la tasa más corta* $z_{1,t+i} = \beta_{1t} + \beta_{2t}\phi^i + \beta_{3t}(1-\phi)i\phi^{i-1}$*, tenemos que la tasa de descuento de madurez* n *obedece a la siguiente estructura:*

$$z_{nt} \quad = \quad \beta_{1t} + \frac{\beta_{2t}}{n}\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) + \frac{\beta_{3t}}{n}\left[\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}\right] \tag{8}$$

Proof. Lo novedoso es el último término. Sin embargo por series tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\phi^i = \frac{\phi}{(1-\phi)^2}\left[1 - n\phi^{n-1} + (n-1)\phi^n\right]$$

lo que nos permite trabajar el último término como sigue:

$$(1-\phi)\sum_{i=0}^{n-1} i\phi^{i-1} = \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{n-1} i\phi^{i} = \frac{1-n\phi^{n-1}+(n-1)\phi^{n}}{1-\phi} = \left(\frac{1-\phi^{n}}{1-\phi}\right) - n\phi^{n-1}.$$

$\square$

El resultado obtenido en (8) es la versión discreta del Nelson-Siegel continuo presentado en (7). Al igual que NS, nuestra tasa más corta implica bajo este modelo que $z_{1t} = \beta_{1t} + \beta_{2t}$, mientras que $\lim_{n\to\infty} z_{nt} = \beta_{1t}$. Este resultado está basado en (5) y en el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \phi^n = 0$ dado que $0 < \phi < 1$. Pese a que NS es un modelo determinístico en madurez, presenta consistencia en los valores de las tasas tanto corta como largas. De hecho estos resultados muestran que β_{1t} corresponde a la tasa más larga de la economía, mientras β_{2t} es el negativo del premio por plazo. Exactamente los mismos resultados se obtuvieron con el modelo con 2 factores dinámicos, los cuales eran lineales, homocedásticos y no correlacionados.

Diebold y otros (200x) discuten sobre las propiedades de NS estableciendo que su bondad de ajuste se basa precisamente en que el tercer factor (β_{3t}) es suficientemente flexible para capturar movimientos de la curva que no pueden ser replicados con un tercer factor dinámico tipo Vasicek.

Referencias

Campbell, J., A. Lo y A. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets* Princeton University Press.

Diebold, F. y C. Li (2006) "Forecasting the term structure of government bond yields" Journal of Econometrics 130:337-364.

Nelson, C. y A. Siegel (1987) "Parsimonious Modeling of Yield Curve" The Journal of Business 60(4):473-489.