

이자율모형을 이용한 우리나라 기대인플레이션의 추정 및 특징

송 준 혁

(한국외국어대학교 경제학과 부교수)

Analyzing Expected Inflation Based on a Term Structure Model: A Case of Korea

Joonhyuk Song

(Associate Professor, Department of Economics,
Hankuk University of Foreign Studies)

* 본 연구는 한국외국어대학교 2013년 교내학술연구비 지원에 의해 이루어졌으며, 한국은행 외부연구 용역보고서의 내용을 일부 수정·보완하여 작성한 것임을 밝힌다. 본 논문에 대해 유익한 심사평을 보내 주신 익명의 검토자 두 분께 깊이 감사드린다.

송준혁: (e-mail) jhsong@hufs.ac.kr, (address) Department of Economics, Hankuk University of Foreign Studies, 107, Imun-ro, Dongdaemun-gu, Seoul, 130-791, Korea.

- Key Word: 수익률곡선(Yield Curve), 기대인플레이션(Expected Inflation)
- JEL Code: E43, E52
- Received: 2014. 1. 3 • Referee Process Started: 2014. 1. 3
- Referee Reports Completed: 2014. 3. 25

ABSTRACT

This paper estimates and characterizes expected inflations using an affine term structure model based on the empirical stochastic process of the interest rates in Korea.

The empirical results show that the expected inflation which marked above 4% before the global financial crisis has dampened and stabilized after the crisis. Moreover, we investigate the rationality of the various expected inflation measures in terms of the unbiasedness and efficiency and find that unbiasedness is not rejected across the all measures, while the efficiency cannot be empirically warranted. Besides, we run Granger causality tests and conclude that the expected inflations compiled from the Consensus, BOK-Expert have the cross-causality with the long-run actual inflation, while the expected inflation estimated from the term structure model has the cross-causality with the short-run actual inflation.

These results connote that expected inflations collected from different sources and methods have their targets and horizons and the central bank needs to watch all of them with a balanced view instead of preferring one to the other.

본 연구에서는 이자율 변수에 적절한 확률과정을 부여하고 이를 가격함수에 직접 대입한 뒤 최종적으로 자산가격 PDE를 도출하는 재무모형을 이용하여 우리나라 기대인플레이션을 추정하고 그 특성을 살펴보고자 한다.

우리나라의 기대인플레이션은 글로벌 금융위기 이전에는 4%를 상회하는 높은 수준을 보였으나 2008년 후반을 기점으로 하향 안정화되는 모습을 시현했다. 또한 수익률곡선에서 도출된 기대인플레이션과 서베이 등을 통해 실제로 자료의 입수가 가능한 기대인플레이션을 이용하여 경제주체의 기대인플레이션 형성에 체계적인 편익이 존재하지 않고(불편성), 기대형성에 활용 가능한 모든 정보가 반영되었는지(효율성)를 기준으로 합리성을 평가한 결과, 분석에 이용된 모든 기대인플레이션에서 효율성은 기각되나 기대편익은 발생하지 않는 것으로 나타났다. 한편, 실제인플레이션과 기대인플레이션 간의 Granger 인과관계 검정 결과, 대체로 컨센서스 및 BOK 전문가 기대인플레이션은 상대적으로 장기의 실제인플레이션과, 이자율모형에서 도출된 기대인플레이션은 단기의 실제인플레이션과 상호 인과관계가 발생하는 것으로 분석되었다.

이러한 결과는 각각의 인플레이션 지표들이 내포하는 인플레이션의 정보가 상이하다는 것을 방증하고 있다. 이는 중앙은행이 하나의 인플레이션 지표보다는 다양한 지표들을 균형 있는 시각으로 관찰하는 것이 필요함을 시사한다.

I. 서론

이자율 기간구조 또는 수익률곡선은 경제현상을 설명하고 예측하는 도구로서 이론적·실무적으로 상당히 중요한 의미를 가지고 있다. 실제로 중앙은행이 정책금리를 조정하는 것은 이자율 기간구조의 단기 영역을 움직임으로써 궁극적으로 장기금리를 변화시켜 전체적인 수익률곡선의 형태를 조정하여 소비 및 투자 결정에 영향을 미치고자 함이다. 일반적으로 장기금리는 미래의 기대 단기금리와 위험선호를 반영한 프리미엄의 합으로 표현되는 것으로 알려져 있다.

수익률 또는 금리의 확률적 동화과정을 이해하는 것은 통화정책뿐만 아니라 국가부채의 조달, 실질경제활동 및 인플레이션에 대한 기대형성, 포트폴리오에 대한 위험관리 및 이자율 파생상품의 가격결정 등을 이해하는 데 있어서 매우 중요하다. 수익률곡선은 불확실한 미래의 투자기회에 대한 위험과 보상을 포함하고 있어 경기를 선행하는 변수로 사용되기도 한다. 이러한 수익률곡선의 특성에 대해서는 수십 년 동안 학계뿐만 아니라 실무분야에서도 끈질기게 고민하고 연구해 왔으나 아직까지도 수익률곡선에 대한 이해는 주식과 같은 다른 금융상품에 비해 상대적으로 열악한 상황이다. 즉, 채권이나 이자율 파생상품의 가격결정에서 제한적으로 사용되고 있으며, 실질적으로 거시경제를 이해하는 데 있어서의 유용성은 그리 높지 않은 것이 사실이다.

이러한 사실은 수익률곡선의 이론적 배경이 Fisher의 이자율 결정이론에 있음을 감안할 때 상당히 의아스러운 일이다. 물론 수익률곡선과 거시변수 간의 관계를 살펴보기 위한 연구는 1980년대 이후 어느 정도 진행되어 왔다. Stock and Watson(1989)이 55개의 거시경제변수를 대상으로 경기선행변수로서의 유용성을 검정한 결과, 6개월 만기 CP와 6개월 만기 재무성 증권의 금리 스프레드와, 재무성 10년 만기와 1년 만기 채권의 금리 스프레드가 경기선행지표로서 가장 유용하다고 지적한 이래 금리 스프레드와 경기 간의 관계를 살펴보고자 한 연구는 다수 존재한다.¹ 그러나 1990년대 말 이후에는 수익

¹ Estrella and Mishkin(1996)은 수익률곡선이 내포하고 있는 미래 경제성장에 대한 정보를 살펴본 뒤 다음과 같은 결론을 제시하였다. 첫째, 이자율 기간구조는 장기 경제성장에 대한 상당한 예측력을 가지고 있다. 둘째, 이자율 기간구조에 내포되어 있는 미래의 경제성장에 대한 정보는 현재 또는 미래의 통화정책과 무관하다가 그것이다. Deuker(1997)는 불황예고지표로서의 수익률곡선의 유용성을 주장하

률곡선과 거시변수 간의 상호연관성에 대한 학계의 관심이 다소 퇴색한 측면이 있다.

이자율 기간구조모형은 모형의 적합성이나 시장의 불완전성으로부터 발생하는 수익률 곡선상의 잔차 평가를 무시하고 수익률곡선을 통해 모형의 공정가치를 평가한다는 단점이 존재하며, 무차익거래모형은 공정가치와 이자율의 동적 특성을 제대로 설명해 주지 못하고 있으며, 수익률곡선에 대한 과도 적합(overfitting) 문제가 발생할 수 있다는 점이 문제로 지적되고 있다. 수익률곡선에 대한 연구는, Litterman and Scheinkman (1991)이 주성분 분석을 통해 수준(level), 기울기(slope) 및 곡률(curvature)의 세 가지 요인이 이자율 변동의 90%를 설명한다고 주장한 이후 대체로 3개의 요인을 이용하여 금리의 구조와 동학을 설명하려고 하는 것이 큰 추세로 자리 잡았다.² Chen and Scott(1993)은 요인 개수를 하나에서 세 개까지 변화시켜 가며 모형의 표본 내 추정오차를 분석한 결과, 3요인모형이 오차가 가장 적은 모형이라고 주장하였다. 또한 일별 수익률곡선의 형태를 보면 1요인모형의 경우 단기 및 장기 영역에서는 실제 자료에서 관찰되는 수익률곡선의 모양을 잘 따라가지만 중기 영역에서는 불안한 모습을 보이고 있으며, 3요인모형의 경우에는 세 번째 요인의 변동성이 너무 높게 나타나는 경향이 있어 수익률곡선과 관련하여 2요인모형이 더 적합하다고 주장하였다.³ 이자율모형은 Duffie and Kan(1996)에 의해 세 개의 비관측요인을 이용하여 무차익조건을 만족시키는 선형 이자율모형이 출현됨에 따라 관측되지 않는 요인을 이용하여 금리구조의 횡단면과 동학을 모두 설명하고자 하는 방향으로 흘러가게 되었고, 실제로 추정오차가 높은 거시변수들의 상대적 중요성은 낮아지는 양상을 보였다. 무차익거래를 강조하는 이자율모형하에서는 거시변수들이 어떤 식으로 무차익조건을 만족시키는 형태로 모형에 도입될 수 있는지가 분명하지 않음에 따라 관측 가능한 변수를 이용하여 경제를 설명하고자 하는 거시경제의 방향과도 쉽게 접목되지 못한 측면이 있다.

그러나 최근 Ang and Piazzesi(2003)가 거시변수와 금리변수를 결합시킨 거시금융(macro-finance)모형을 제시함에 따라 그동안 소홀했던 거시변수와 금리변수 간의 재

였으며, Mishkin(1990)은 장단기 금리 스프레드가 미래의 인플레이션에 대해 높은 예측력을 가지고 있다고 주장하고 있다.

2 Dai and Singleton(2000)은 이들 요인을 수준, 기울기 및 버터플라이(butterfly)라고 불렀다.

3 다요인모형에서는 이자율 수준에 영향을 미치는 요인과 이자율의 형태, 즉 기울기 및 곡률에 영향을 미치는 요인이 필요하다. 이자율의 형태는 장기채에 의해 크게 영향을 받는데, 장기채 금리는 통상 무작위 보행과 유사한 형태를 가지고 있어 이러한 장기채의 움직임을 포착하기 위해서는 평균회귀성향이 낮은 요인이 존재하여야 하고 또한 장기채 금리는 평균회귀모수의 크기에 많이 의존하는 것으로 알려져 있다. 자세한 내용은 Chen and Scott(1993)을 참조하기 바란다.

결합이 다시 가속화되는 추세이다. 이러한 변화는 비관측요인에 의존했던 기존의 이자율모형에서 탈피하여 비관측요인의 거시경제적 성격을 적극적으로 규명하려고 노력한다는 점에서 상당한 의의를 가지고 있다.⁴

자산가격의 결정과 관련해서는 실질이자율과 더불어 기대인플레이션이 상당히 중요한 역할을 수행한다. 명목가격으로 형성된 자산가격의 경우 예상보다 높은 인플레이션이 발생하면 그만큼 실질가치가 하락하는 위험을 투자자가 안게 된다. 재무학에서는 이러한 위험이 궁극적으로는 프리미엄을 통해 자산가격에 반영된다고 설명한다. 기대인플레이션은 거시경제환경에 의해 형성되고 변화하며 금융상품의 가격에 영향을 미치고, 금융상품의 가격은 다시 투자자들의 미래 인플레이션에 대한 기대를 변화시켜 다시 거시경제에 영향을 미치는 과정을 반복하게 된다. 또한 기대인플레이션은 명목자산으로 표시된 금융상품을 이해하고 투자자들의 기대형성과정을 이해하는 데 상당히 중요한 기능을 수행한다고 할 수 있다.

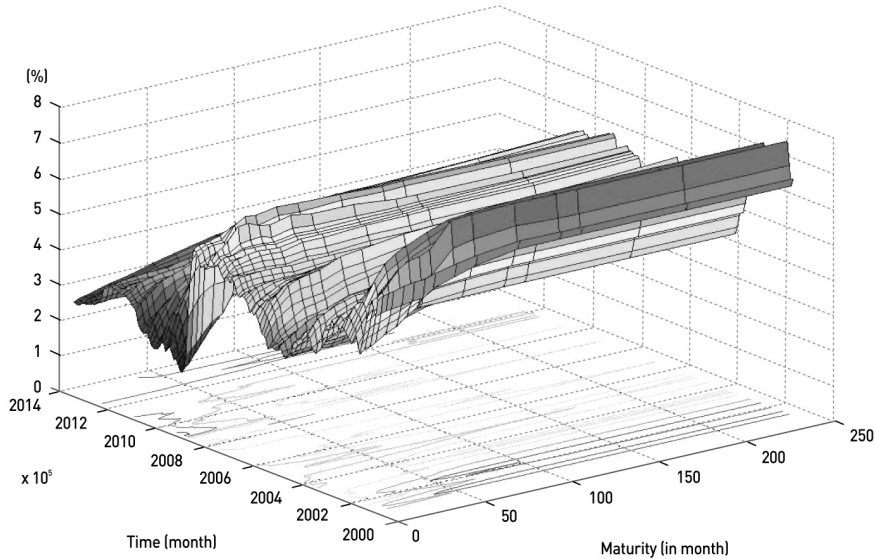
기대인플레이션을 찾기 위한 방법은 일반적으로 거시모형을 기반으로 수익률 정보를 활용하는 방법과, 재무모형을 중심으로 거시정보를 활용하는 방법으로 크게 나누어진다. 거시모형을 기반으로 하는 경우는 거시변수와 금리변수를 포함한 VAR을 구축한 뒤 이 중 일부 변수를 은닉요인으로 처리함으로써 무차익거래조건을 유지하면서 거시변수를 명시적으로 도입하는 방법이고, 재무모형을 중심으로 하는 경우는 거시변수에 적절한 확률과정을 부여하고 이를 가격함수에 직접 대입한 뒤 최종적으로 자산가격 PDE를 도출하는 방법이다. 여기서는 이들 두 방식을 모두 이용하여 재무와 거시변수를 통한 우리나라 기대인플레이션의 시계열을 추출하고 그 추이를 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 우리나라 금리 기간구조의 추이 및 특징

본 연구에서 사용된 데이터는 KIS채권평가(주)로부터 입수한 2001년 1월부터 2013년 9월까지의 월별 국채수익률 관측치이다. 이들 수익률 자료는 3개월, 6개월, 9개월, 1년, 1.5년, 2년, 2.5년, 3년, 4년, 5년, 7년, 9년, 10년, 15년 및 20년 만기를 가진 15개의

4 이러한 노력은 Fama and French 모형에서 3요인 — 시장요인, 중소형주 요인, 가치주 요인 — 을 설명하는 경제변수를 찾는 과정과 유사하다.

[Figure 1] Yield Surface



현물이자율이며, 각 국채의 시장수익률에 bootstrapping 방식을 적용하여 구하였다.⁵ [Figure 1]은 분석기간 중 국고채 시계열 추이를 3차원으로 나타낸 것으로 X축은 각 채권의 만기, Y축은 시간, 그리고 Z축은 수익률을 표시한 것이다. 우리나라 국고채 기간구조는 2000년대 초반에는 심한 변동성을 보였다가 이후 변동폭이나 전체적인 금리 수준이 축소되어 왔었다. 한편, 2008년 글로벌 금융위기 이후에는 국고채 기간구조가 전체적으로 상승하는 모습을 보였으나 최근에는 다시 하향 안정화되는 추세를 보이고 있다.

〈Table 1〉에서는 각 만기별 수익률의 기초통계량을 제시하였다. 수익률은 만기가 증가할수록 꾸준히 상승하는 전형적인 우상향의 모습을 보이고 있다. 변동성의 경우 1~1.5년 만기 채권의 경우가 가장 낮은 수준을 보이고 있으며, 장기물의 경우 오히려 단기물보다 변동성이 크게 나타나고 있어 미국과는 대조적인 모습을 보이고 있다. 한편, 대부분의 만기가 강한 자기상관성을 가지고 있음을 알 수 있다. 왜도를 살펴보면, 단기물과 최장기물은 왼쪽으로 치우친 모습을 보인 반면 나머지 대부분의 만기는 분포가 오른쪽으로 기운 형태를 보였으며, 장기로 갈수록 꼬리 부분이 좀 더 두터운 형상을 보임을

⁵ 9개월, 1.5년, 2.5년, 7년, 9년 만기는 시장에서의 유동성이 높지 않아 실제 분석에서는 제외하였다.

〈Table 1〉 Summary Statistics

	Mean	s.e	SD	s.e	Auto	s.e	Skew	s.e	Kurt	s.e	JB
m03	3.742	0.109	1.042	0.107	0.992	0.009	-0.071	0.156	1.936	0.147	0.001
m06	3.873	0.108	1.035	0.100	0.992	0.010	-0.033	0.16	1.858	0.130	0.001
m09	3.989	0.105	1.007	0.091	0.991	0.009	0.007	0.162	1.802	0.119	0.001
y1	4.070	0.103	0.991	0.089	0.990	0.010	0.047	0.162	1.832	0.126	0.001
y1.5	4.242	0.102	0.987	0.097	0.989	0.010	0.129	0.159	2.010	0.151	0.001
y2	4.344	0.104	1.003	0.108	0.988	0.009	0.162	0.154	2.146	0.165	0.001
y2.5	4.418	0.105	1.012	0.117	0.988	0.009	0.185	0.15	2.270	0.177	0.002
y3	4.469	0.107	1.029	0.129	0.988	0.009	0.218	0.148	2.425	0.198	0.005
y4	4.685	0.11	1.057	0.153	0.988	0.009	0.242	0.158	2.801	0.289	0.030
y5	4.762	0.113	1.087	0.168	0.990	0.008	0.286	0.15	2.897	0.307	0.017
y7	4.946	0.111	1.068	0.168	0.991	0.008	0.154	0.156	3.009	0.323	0.262
y9	5.022	0.108	1.039	0.161	0.990	0.008	0.150	0.156	3.084	0.34	0.251
y10	5.044	0.109	1.044	0.161	0.990	0.008	0.102	0.155	3.046	0.331	0.500
y15	5.130	0.104	1.001	0.152	0.990	0.008	0.060	0.162	3.150	0.351	0.500
y20	5.175	0.105	1.005	0.152	0.990	0.008	-0.050	0.163	3.098	0.342	0.500

Note: JB implies Jarque-bera p-value.

알 수 있다. 일반적인 이자율모형은 대부분 가우시안 정규분포를 가정하고 있으며, 이러한 가정은 상당히 제약적임을 Jarque-Bera 검정을 통해 확인할 수 있다. 다만, 장기물의 경우에는 정규성이 기각되지 않는 것이 특징적인데, 이러한 현상은 우리나라의 국채 거래가 주로 5년 이하 중기물에서 이루어지고 있어 장기물의 경우 유동성 부족으로 적절한 시장가격 형성이 어려워 시장가격이 아닌 이론가격에 의해 시장에서 호가되고 있기 때문으로 추측된다. 이러한 현상을 설명하기 위해서는 유통시장 구조와 더불어 우리나라 채권시장에서 선호영역가설이나 시장분할가설이 성립하는지에 대한 추가적인 실증분석이 필요할 것으로 보인다.

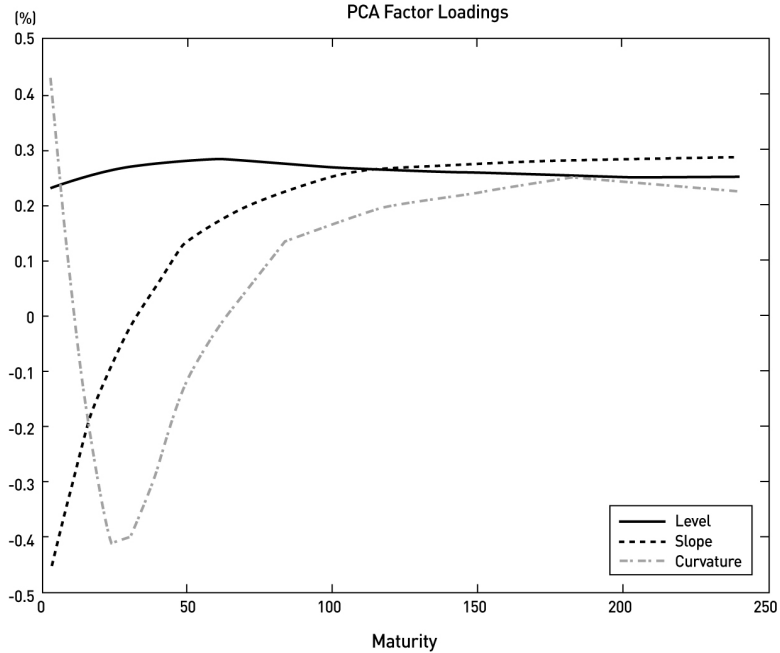
채권수익률의 평균회귀성향을 살펴보기 위해 〈Table 2〉와 같이 자기상관계수를 살펴 보았다. 편자기상관(partial autocorrelation)을 보면 대부분 12개월 정도의 시차에서 음(-)의 부호가 관찰되고 있어 일단 평균회귀성향은 확인되었다. 조자기상관의 경우에는 거의 30개월 정도가 경과해야 평균회귀성향이 나타나는 것을 보면 우리나라의 채권수익률이 상당히 완만하게 움직인다는 사실을 짐작할 수 있다.

<Table 2> Auto- and Partial- Correlation of Interest Rates

	AC				PAC			
	lag1	lag12	lag24	lag30	lag1	lag12	lag24	lag30
3M	0.963	0.418	-0.035	-0.122	0.972	-0.088	0.082	0.077
6M	0.959	0.438	0.006	-0.085	0.969	-0.098	0.069	0.023
9M	0.954	0.460	0.055	-0.043	0.966	-0.174	0.018	0.016
1Y	0.947	0.469	0.076	-0.024	0.960	-0.194	0.011	-0.007
1.5Y	0.938	0.480	0.111	-0.007	0.952	-0.203	0.011	-0.05
2Y	0.936	0.483	0.127	-0.003	0.950	-0.151	-0.023	-0.039
2.5Y	0.946	0.493	0.130	-0.013	0.960	-0.059	-0.091	-0.08
3Y	0.945	0.489	0.140	-0.008	0.958	-0.055	-0.077	-0.041
4Y	0.944	0.478	0.095	-0.045	0.957	-0.053	-0.092	0.032
5Y	0.948	0.476	0.103	-0.035	0.960	-0.057	-0.098	0.009
7Y	0.952	0.478	0.096	-0.03	0.965	-0.097	-0.074	0.000
9Y	0.950	0.463	0.080	-0.04	0.962	-0.088	-0.075	-0.01
10Y	0.950	0.459	0.089	-0.033	0.962	-0.081	-0.090	-0.004
15Y	0.952	0.450	0.066	-0.056	0.963	-0.074	-0.074	0.008
20Y	0.953	0.453	0.067	-0.054	0.966	-0.071	-0.077	0.008

자료로부터 관찰되는 이자율의 구조를 자세히 살펴보기 위해 주성분 분석(principal component analysis)을 수행하였다. 일반적으로 주성분들 중에서 3가지 성분이 현물수익률 변동의 상당히 많은 부분을 설명할 수 있다고 알려져 있는데, 이들 성분은 각각 수준(level), 기울기(slope), 그리고 굴곡도(curvature)로 명명되고 있다. 이러한 주성분 분석은 이자율모형을 선정할 때 몇 가지의 요인변수를 고려해야 하는지에 대한 실마리를 제공한다는 측면에서 분석의 의의가 있다. Piazzesi(2005)는 3개의 상태변수를 설정한 모형은 수준(level), 기울기(slope), 그리고 굴곡도(curvature) 요인의 움직임을, 2개의 상태변수를 설정한 모형은 수준(level)과 기울기(slope) 요인의 움직임을, 1개의 상태변수를 설정한 모형은 수준(level) 요인의 움직임을 설명할 수 있다고 주장하였다. 한편, Litterman and Scheinkman(1991) 이후 많은 연구들에서 수준 및 기울기와 더불어 굴곡도(curvature)도 수익률곡선 결정에 있어서 상당히 중요한 역할을 수행하고 있음을 강조하였다.

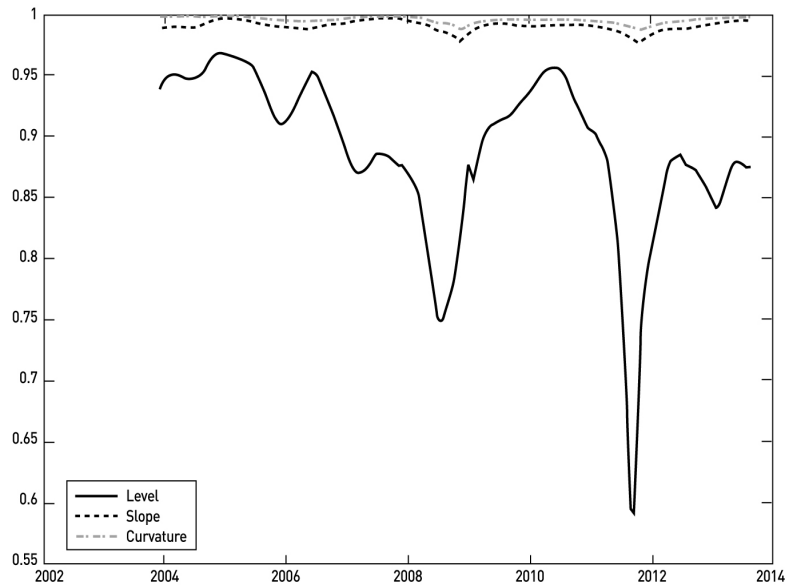
[Figure 2] Principal Factor Loadings



먼저 만기별 요인 부하(factor loading)를 살펴보면 이자율의 수준을 결정짓는 첫 번째 요인의 경우 만기에 상관없이 수평적인 모습을 보여주고 있다. 기울기를 결정짓는 두 번째 요인의 경우에는 단기에서 중기로 갈수록 기울기가 급격히 상승하고 있음을 알 수 있다. 초단기 근처에서는 기울기가 음(-)의 값을 나타내고 있는데, 이는 수익률곡선이 단기 영역에서 하락했다가 다시 상승하는 모습을 시사한다. 한편, 수익률의 곡률을 결정하는 세 번째 요인은 단기에서 곡률이 급격히 하락했다가 중기 이후에는 곡률의 변화가 안정적으로 변화하는 모습을 보이고 있다. 주성분 분석에서 관찰된 요인 부하는 일반적으로 미국 등 선진국 시장에서 관찰되는 만기별 요인 부하의 모습과 대체로 유사하다고 할 수 있다.

주성분 분석에 의해 도출된 이러한 요인들이 이자율 변동을 어느 정도 설명하는지를 살펴보기 위하여 전체 기간을 대상으로 하기보다는 주성분들의 수익률곡선의 설명력에 대한 시계열적 움직임을 살펴보고자 한다. 먼저 52주를 기준으로 moving window 방식으로 window를 하나씩 옮겨가면서 각각의 기간에서의 3개의 주성분들의 설명력을 누적적으로 살펴보았다. 이들 세 가지 성분의 누적설명력은 [Figure 3]에 제시하였다. 그림에서 보듯이 제1성분이 상당히 높은 설명력을 가지나 경우에 따라서는 60%대 이하의

[Figure 3] Decomposing Contributions of Principal Components
Factor Contributions

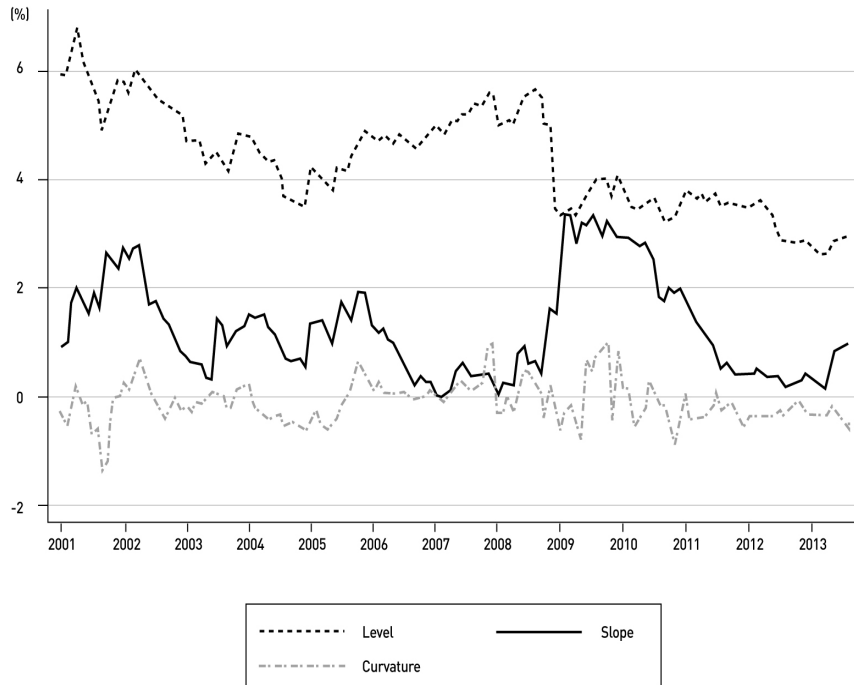


설명력을 가지기 때문에 1개의 요인으로 구성된 이자율 기간구조모형은 설명력에 있어 상당한 제약을 가지고 있다. 이는 우리나라의 이자율 기간구조를 설명하기 위해서는 최소한 2개의 요인을 감안하여 모형을 설정하여야 함을 시사하는 부분이다. 2개의 주성분 만으로도 거의 95% 이상의 높은 설명력을 가지고 있음을 알 수 있다. 세 번째 요인은 여기서의 결과를 보면 반드시 필요한 요인이라고 보기는 어려우나 기존의 연구들이 대부분 3요인을 이용하여 분석하는 것을 기정사실화하고 있음을 감안할 때 연구 결과를 비교한다는 측면에서는 다소 불가피한 경우도 있을 수 있다.

[Figure 4]는 2001년 이후 우리나라의 수익률곡선을 수준, 기울기 및 곡률로 분해하여 추이를 도시한 것이다. 여기서 특징적인 점은 2008년 후반기 들어 금리의 수준은 하락한 반면 기울기는 상당히 높아졌다는 것이다. 그 당시가 글로벌 금융위기가 발생하기 시작한 시점이라는 점에 비추어 보면 상당히 높은 위험프리미엄이 존재하였을 개연성이 높고, 이러한 위험프리미엄은 곡률 요인보다는 기울기 요인에 상당히 영향을 미쳤음을 짐작해 볼 수 있다.

미국의 경우 다양한 만기의 이자율 수준이 전반적으로 유사한 추세를 보이고 있다. 특히 인플레이션이 높은 시기에는 대부분의 이자율이 상승하고, 인플레이션이 낮은 시기에는 대부분의 이자율이 하락하는 모습을 나타낸다. 이에 따라 Diebold *et al.* (2005)은

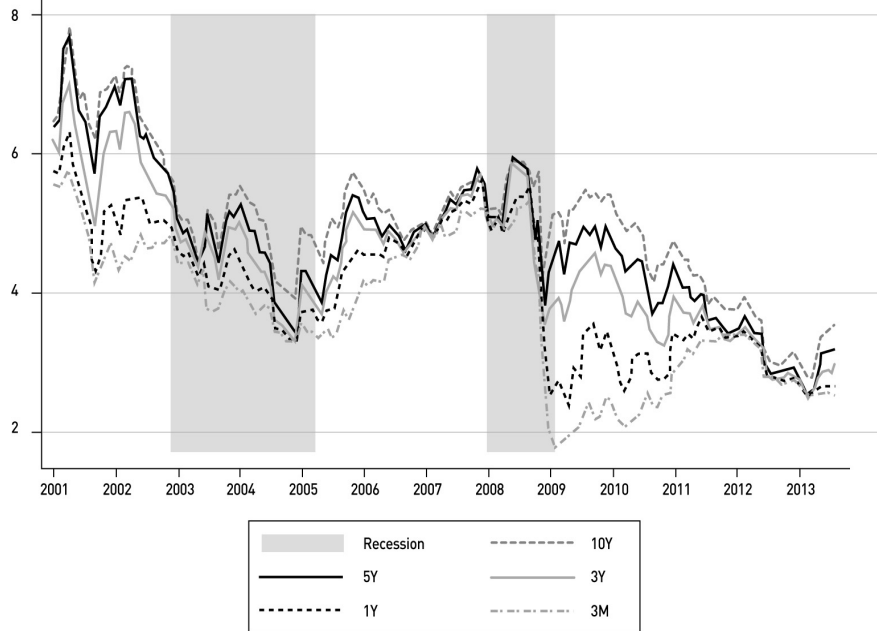
[Figure 4] Historical Trends of Principal Components



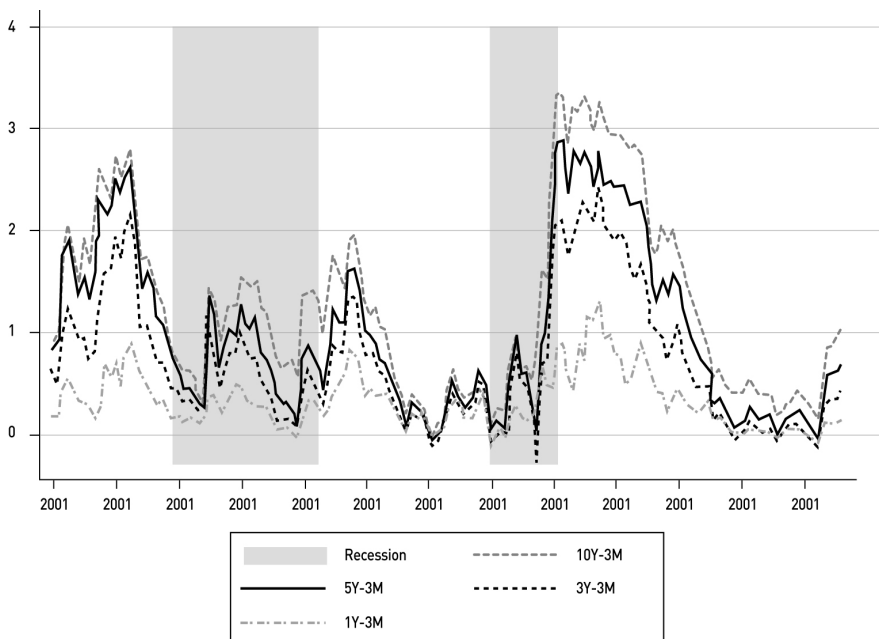
인플레이션은 수준 요인과, 실질경제활동은 기울기 요인과 높은 상관성을 가지는 반면 곡률 요인은 거시변수와 별다른 관련성이 없는 것으로 평가하였다. Rudebusch and Wu(2004)도 이와 유사한 결과를 제시하였는데, 수준 요인은 중앙은행의 중기 인플레이션 목표에 대한 시장참가자들의 기대를 반영하고 있으며, 기울기 요인은 중앙은행의 경기대응적 통화정책의 효과를 반영하고 있다고 주장하였다. Piazzesi(2005)는 실물경제의 충격은 수준이나 곡률에 영향을 미치는 반면 인플레이션 충격은 수익률곡선의 기울기에 영향을 미친다고 설명하고 있다. 우리나라의 경우를 살펴보면 인플레이션보다 경기상황에 따라 금리수준이 움직이는 모습을 보이고 있음을 [Figure 5]를 통해 알 수 있는데, 이는 Piazzesi(2005)의 설명과 어느 정도 일맥상통한다.

한편, 이자율 기간구조의 기울기 부분을 살펴보기 위해 1년, 3년, 5년 및 10년 이자율에서 3개월 이자율을 차감한 스프레드를 [Figure 6]에 도시하였다. 금리의 스프레드 간 격차, 즉 수익률곡선의 기울기는 금리수준보다는 인플레이션과 상관성이 더 높음을 파악할 수 있다. 2002년 인플레이션이 높아지는 시점에서 수익률곡선의 기울기가 가팔라졌으며, 2009년에도 인플레이션이 상승할 때 수익률곡선의 기울기가 상승하였다. 그러나

[Figure 5] Historical Trends of Yields



[Figure 6] Historical Trends in Yield Spreads



〈Table 3〉 Correlation between Inflation and Yield Spreads

	Inflation	Spread (3Y-3M)	Spread (10Y-3M)	Spread (10Y-3Y)
Inflation	1			
Spread (3Y-3M)	-0.0028	1		
Spread (10Y-3M)	0.0246	0.9639	1	
Spread (10Y-3Y)	0.0725	0.6878	0.8562	1

2007년 중순 인플레이션이 급격하게 상승하는 시점에서 수익률곡선의 기울기는 오히려 더 하락하는 모습을 보이고 있어 수익률곡선과 인플레이션 간의 관계가 일의적이지 않음을 알 수 있다.

한편, 우리나라의 인플레이션과 채권수익률 간의 또 다른 특징은 인플레이션과 금리 스프레드 간에 유의한 상관관계가 존재하지 않는다는 점이다. 실제로 3년 만기에서 3개월 만기 국채를 차감한 금리 스프레드와 인플레이션 간의 단순 상관관계를 보면 -0.0028을 보이고 있어 실제로 이들 간의 상관관계는 무시할 만한 수준임을 〈Table 3〉에서 관찰할 수 있다.

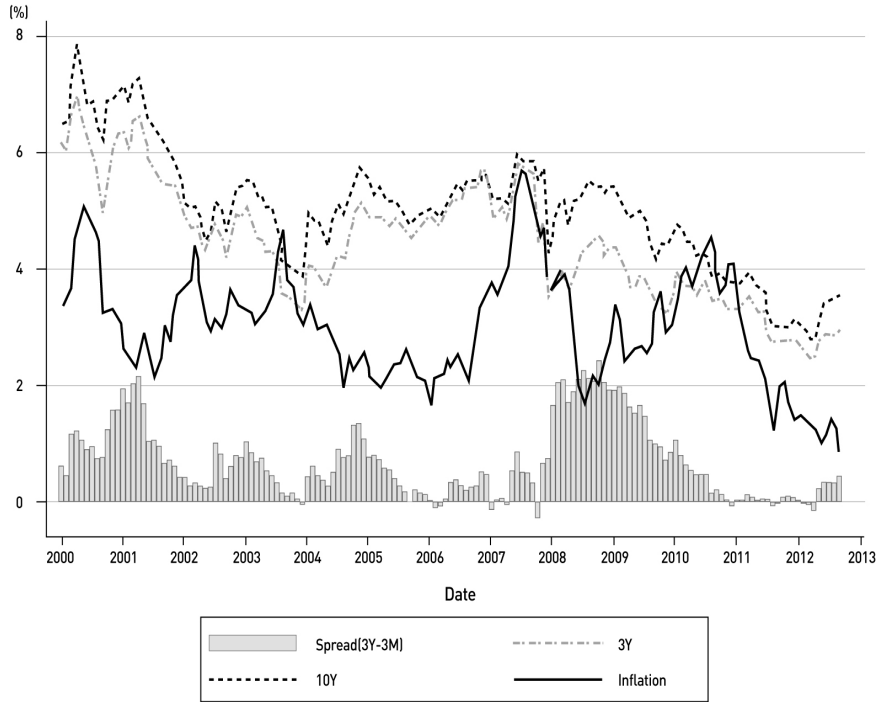
인플레이션과 금리 스프레드 간의 관계를 좀 더 자세히 살펴보기 위해 다양한 금리 스프레드와 인플레이션 간의 상관관계를 살펴보았는데 결과는 대동소이했다. 장단기 금리차는 통상 기대인플레이션과 위험에 대한 프리미엄으로 분리될 수 있는데, 실제로 이러한 변수들을 반영하는 금리차와 실제인플레이션 간의 상관관계가 낮다는 것은 기대인플레이션이 지속성이 아주 강한 시계열임을 유추해 볼 수 있다.

Ⅲ. 모형

현대 재무이론에서는 무차익거래 상황에서는 양(+)의 확률적 할인인자(stochastic discount factor: SDF) 또는 가격커널(pricing kernel) $M(t)$ 가 존재하며, 모든 자산가격($P(t)$)은 다음의 식을 만족하는 것으로 알려져 있다.

$$P(t) = E_t [M(t+1)P(t+1)] \quad (1)$$

[Figure 7] Inflation, Treasury Bond Yield and Yield Spreads



이 식을 이용하면 어떤 자산 i 의 위험에 대한 평균적인 보상, 즉 위험프리미엄은 다음과 같이 결정된다.

$$E_t[r_i(t+1)] - r_f(t) = - \frac{Cov_t(M(t+1)r_i(t+1))}{1 + r_f(t)}$$

이 식이 설명하는 바는 어떠한 자산의 기대수익률은 확률적 할인요인(SDF)과의 공분산이 중요하며 음(-)의 상관관계를 가질수록 더 위험해지는 자산이므로 이에 대한 추가적인 보상을 제공해야 함을 의미한다. 채권가격과 관련된 대부분의 가격모형은 연속시간(continuous time)을 가정하고 있다. 위 식을 따르면 만기가 n 년인 채권의 가격은 다음과 같이 결정된다.

$$P(t, n) = E_t[M(t+1)M(t+2) \cdots M(t+n)]$$

한편, $m(t+n) = M(1)M(2) \cdots M(t+n)$ 이라고 정의하면 위 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$P(t, n) = E_t \left[\frac{m(t+n)}{m(t)} \right]$$

무차익거래조건하에서의 이자율 기간구조모형에서는 모든 만기의 채권에 대해 식 (1)이 항상 성립한다고 가정한다. 무차익거래조건하에서의 만기가 n 인 채권의 수익률은 기대 단기이자율과 위험프리미엄으로 분해될 수 있다. 즉,

$$y(t, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_t[r(t+j-1)] + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta(t, j)$$

선도이자율을 고려할 경우 위의 식이 다음과 동일한 형태로 표현됨은 잘 알려져 있다.

$$f(t, n) = E_t[r(t+n-1)] + \Delta(t, n)$$

이자율 기간구조이론인 기대가설(expectations hypothesis)하에서는 위험프리미엄이 상수로 취급되어 선도이자율은 미래이자율 변화에 대한 정보만을 제공해 줌으로써 미래의 단기이자율은 선도이자율이 시사하는 방향으로만 변화한다고 주장한다. 이에 반해 위험프리미엄가설(risk premium hypothesis)하에서는 시변 기간프리미엄을 가정하기 때문에 미래의 단기이자율은 선도이자율과 더불어 리스크프리미엄의 방향에 의해서 결정된다고 주장한다.

이자율모형에서 실제로 주로 사용되는 선형이자율모형은 다음과 같이 설정된다. 먼저 위험중립 확률측도(risk-neutral probability measure)에서 다음과 같은 연속시간 다변량 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 따른다고 가정한다. 즉,

$$dx(t) = K^*(\theta^* - x(t))dt + \Sigma dB^*(t)$$

요인 개수가 K 인 경우 $dx(t)$ 는 3×1 벡터이고, K^* 는 3×3 행렬로 요인들의 평균회귀성향을 나타내고, θ^* 는 3×1 벡터로 요인들의 장기평균치를 나타내며, Σ 는 3×3 행렬로 요인들의 변동성을 나타낸다. 마지막으로 B^* 는 3×1 벡터 표준 브라우니안 모션을 의미한다. 한편, 초단기이자율은 다음과 같이 요인들의 선형결합으로 표시된다.

$$r(t) = \delta_0 + \delta_1 x(t)$$

여기서 δ_0 는 스칼라이고, δ_1 은 3×1 벡터이다. 초단기이자율은 이론적인 개념으로 실제로 관찰하기는 불가능하다. 한편, 확률적 할인인자 $m(t)$ 는 다음과 같은 형태를 가진

다고 가정한다.

$$\frac{dm(t)}{m} = -r(t)dt - \lambda(t)dB(t)$$

여기서 λ_t 는 3×1 벡터로 위험의 시장가격을 나타낸다. Duffie and Kan(1996)에 따르면 위험중립 확률측도를 실제 확률측도로 변환하기 위해 위험의 시장가격을 다음과 같이 표현하였다.

$$\lambda(t) = \lambda_0 + A_1 x(t)$$

여기서 λ_0 는 3×1 벡터이고, A_1 은 3×3 행렬을 의미한다. 만기까지 남은 기간이 n 년인 채권의 가격은 다음과 같은 로그선형과정을 따른다고 가정한다.

$$P(t, n) = \exp\{A(n) + B(n)'x(t)\}$$

여기서 $A(n)$ 및 $B(n)$ 은 각각 $n \times 1$ 벡터 및 $n \times K$ 행렬이다. 이들 식의 풀이 과정은 <부록>을 참고하기 바란다. 일반적으로 채권자료만 가지고 실증분석을 할 경우 연속시간 가정하에서 수행하는 것이 상대적으로 수월하나 여기서는 최종적으로 거시변수와 재무자료를 병행해서 사용할 것이므로 모형을 이산형으로 변형하여 최종적인 추정작업을 수행하고자 한다.

재무자료를 이용하여 기대인플레이션을 추정하는 작업은 다음과 같이 진행된다. 명목 금리의 선도이자율($f_N(t, t+j)$)은 기대 단기실질금리($E_t[rr(t+j-h)]$),⁶ 기대인플레이션($\pi^e(t+j)$), 선도위험프리미엄($\Delta_{fR}(t+j)$) 및 인플레이션 위험프리미엄($\Delta_\pi(t+j)$)으로 구성되어 있다고 가정한다.

$$f_N(t, t+j) = \underbrace{\{E_t[rr(t+j-h)] + \pi^e(t+j)\}}_{E_t[r(t+j-h)]} + \underbrace{\{\Delta_{fR}(t+j) + \Delta_\pi(t+j)\}}_{\Delta_f(t+j)}$$

이 식은 다음과 같이 기대 단기명목금리와 명목 선도위험프리미엄으로 묶을 수 있으며, 실제로 자료에서는 이러한 두 가지 형태로만 구분된다.

$$f_N(t, t+j) = E_t[r(t+j-h)] + \Delta_f(t+j)$$

한편, 실질금리가 존재한다면 실질금리의 선도이자율($f_R(t, t+j)$)은 다음과 같이 표

6 통상 h 는 임의의 시간을 의미하나 여기서는 1을 가정하고 있다.

현된다.

$$f_R(t, t+j) = E_t[rr(t+j-h)] + \Delta_{fR}(t+j)$$

따라서 기대인플레이션은 간단히 다음과 같이 도출할 수 있다.

$$\pi^e(t+j) = E_t[r(t+j-h)] - E_t[rr(t+j-h)]$$

IV. 추정 결과 분석

실질금리와 명목금리를 각각 사용하여 추정한 결과가 <Table 4> 및 <Table 5>에 제시되어 있다.⁷ [Figure 8]과 [Figure 9]는 실질금리와 명목금리를 이용하여 각각의 기대 단기금리와 선도금리를 추출해 낸 것이다. 실질금리의 경우 선도 및 기대 단기금리는 하향 추세를 기록하였으며, 특히 2010년 하반기에 들어 이러한 금리들이 모두 음(-)의 값들을 보였으나 최근 들어 다시 거의 0의 수준으로 회복하고 있음을 알 수 있다. 선도금리와 기대 단기금리의 차이가 바로 위험프리미엄인데, 이러한 프리미엄은 2011년 하반기 이후 조금 확대되다가 최근 들어 다시 감소하고 있음이 관찰된다.

<Table 4> Estimated Parameters of the Real Term Structure Model

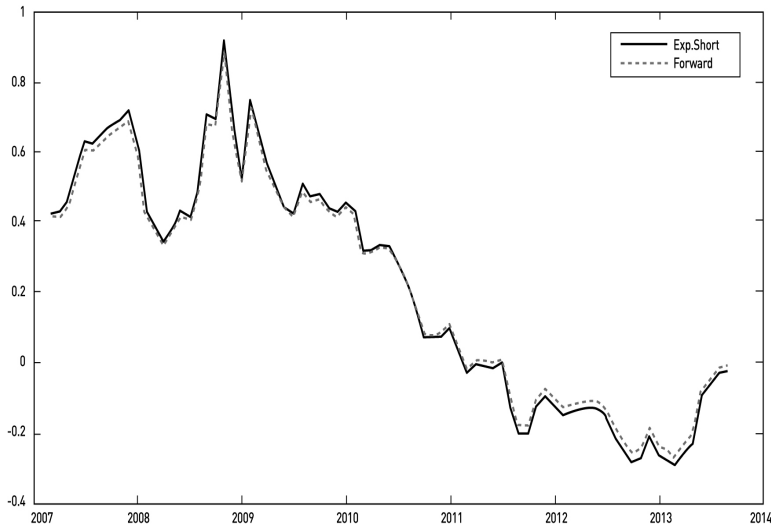
Parameter	Value	Std. Err
F	0.975	0.3257
Σ	4.10E-11	0.001
λ_0	-0.016	0.028
A_1	-0.02	0.012
$\log L$	912.3761	

7 실질금리에 대한 자료는 10년 만기 물가연동채 금리자료만 입수 가능해서 이 자료만을 이용하여 1요인 선형이자율모형을 추정하였다. 금리모형에 대한 추정은 최근 Chen and Scott(1993)의 방법을 사용하는 것이 일반적이나 이를 위해서는 관측변수와 비관측변수의 구분이 가능해야 한다. 그러나 1요인모형에서는 관측과 비관측 요인에 대한 구분이 이루어지지 않기 때문에 여기서는 관측 가능하지 않은 초단 기이자율(instantaneous short-term rate) 상태변수를 가정한 상태에서 통상적인 Kalman filtering을 이용하여 모형을 추정하였다.

〈Table 5〉 Estimated Parameters of the Nominal Term Structure Model

Parameter	Value	Std. Err	Parameter	Value	Std. Err
F_{11}	0.9592	0.3724	Σ_{22}	5.37E-08	0.0003
F_{22}	1.0023	0.4406	$\lambda_{0,1}$	-0.0121	0.3162
F_{21}	0.9591	0.7924	$\lambda_{0,2}$	0.0099	0.7581
F_{33}	0.0065	0.5382	$\lambda_{0,3}$	0.0083	1.0762
F_{31}	0.0016	0.0007	$A_{1,11}$	0.0019	0.0037
F_{32}	1.7358	1.1764	$A_{1,22}$	0.0002	0.0001
Σ_{11}	1.45E-10	0.0007	$A_{1,33}$	-0.0191	0.0601
Σ_{22}	2.53E-08	0.0003	$\log L$	4.49E+03	

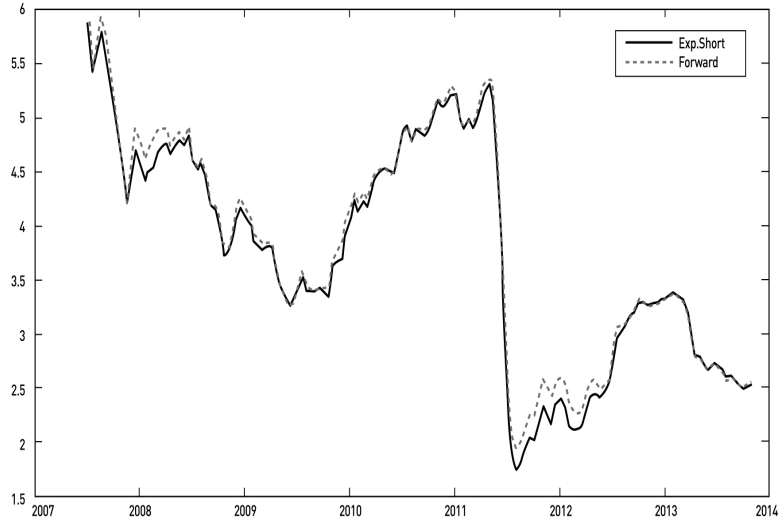
[Figure 8] Expected Short and Forward Rates in Real Interest Rates



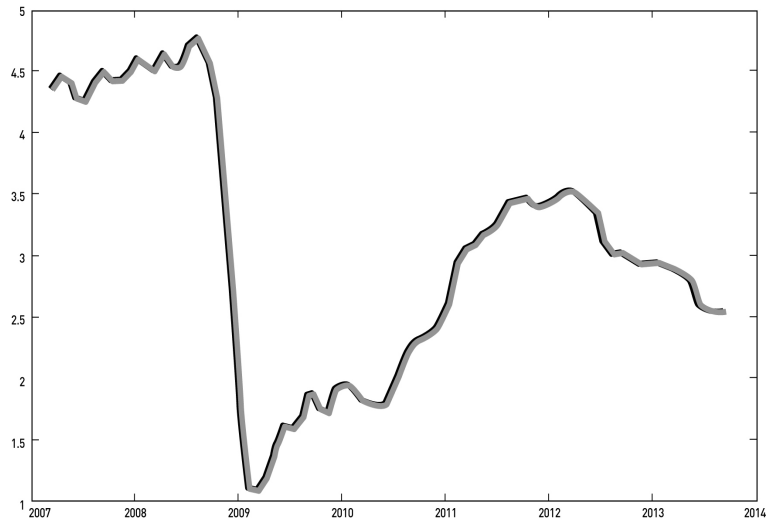
한편, 명목금리를 이용한 기대 단기금리 및 선도금리의 경우 2008년 이후 큰 폭의 하락을 보이고 있는 점이 특징적이다. 이러한 추세는 이후 다시 상승세로 반전하는 모습을 보였으나 2012년 이후 명목금리는 하향세로 다시 돌아선 것으로 나타났다. 2009년에 들어서면서 리스크 프리미엄이 확대되다가 2011년에 다시 축소되는 모습을 보이고 있다.

2008년의 글로벌 금융위기가 단기적으로 자본의 생산성에 큰 영향을 미쳤다고 보기는 어려우며, 이를 반영하여 실질금리는 완만한 하락세를 보이고 있다. 이것과는 대조적으로 명목금리는 당시 급격한 하락을 나타내고 있는데, 이는 기대인플레이션 하락에 기인한 것으로 보인다. 기대 단기명목금리에서 기대 단기실질금리를 차감하면 기대인플레이션을

[Figure 9] Expected Short and Forward Rate in Nominal Interest Rates



[Figure 10] Expected Inflation



도출할 수 있는데, 이렇게 해서 구해진 기대인플레이션을 [Figure 10]에 도시하였다. 기대인플레이션은 2008년 하반기에 큰 폭으로 감소한 뒤 이후 서서히 증가하기 시작하였으며, 최근에는 대략 2.5% 수준을 보이는 것으로 추정되었다.

〈Table 6〉에서는 기대실질이자율, 기대명목이자율 및 기대인플레이션의 통계적 속성을 살펴보고자 ADF, Phillips-Perron 및 KPSS를 이용하여 단위근 검정을 수행하였다.

〈Table 6〉 Unit Root Tests

Stat	Classification	Expected inflation	Expected nominal rate	Expected real rate	ΔExpected inflation	ΔExpected nominal rate	ΔExpected real rate
ADF t-stat	w/o const, w/o trend	-1.060 (-1.950)	-1.178 (-1.950)	-1.196 (-1.950)	-3.841 (-1.950)	-3.756 (-1.950)	-8.346 (-1.950)
	w/ const, w/o trend	-2.140 (-2.909)	-1.910 (-2.910)	-1.009 (-2.908)	-3.842 (-2.909)	-3.791 (-2.910)	-8.336 (-2.908)
	w/ const, w/ trend	-2.116 (-3.474)	-2.023 (-3.475)	-2.715 (-3.473)	-3.838 (-3.474)	-3.795 (-3.475)	-8.281 (-3.473)
Phillips-Perron	z_a	-4.276 (-13.524)	-4.269 (-13.524)	-2.055 (-13.524)	-23.666 (-13.516)	-25.272 (-13.516)	-74.081 (-13.516)
	z_{t_a}	-1.584 (-2.908)	-1.588 (-2.908)	-0.992 (-2.908)	-3.645 (-2.908)	-3.734 (-2.908)	-8.336 (-2.908)
KPSS	Lag 1	0.609 (0.146)	0.603 (0.146)	0.347 (0.146)	0.136 (0.146)	0.109 (0.146)	0.108 (0.146)
	Lag 3	0.317 (0.146)	0.316 (0.146)	0.204 (0.146)	0.089 (0.146)	0.074 (0.146)	0.108 (0.146)
	Lag 5	0.224 (0.146)	0.224 (0.146)	0.160 (0.146)	0.080 (0.146)	0.069 (0.146)	0.114 (0.146)

Note: () denotes the critical value in 5% significance level and Δ implies difference.

〈Table 7〉 Cointegration Test of Expected Real and Nominal Rates

1st stage: expected nominal rate = $\alpha + \beta \times$ expected real rate + u			
Residual	Test statistics	5% significance level	AIC lags
\hat{u}	-2.236	-1.950	2

분석 결과, 이들 추정치 모두 수준 변수에서는 단위근을 가지고 있었으나 차분 변수에서는 단위근 존재가 기각됨에 따라 I(1) 시계열적 특성을 가지는 것으로 나타났다.

다음으로 기대 실질 및 명목 이자율 간에 공적분 관계가 존재하는지 여부를 살펴보기 위해 Engle-Granger 방식의 공적분 검정을 수행하였으며, 그 결과는 〈Table 7〉에 제시하였다. 여기서는 1단계에서 기대명목이자율을 피설명변수로 하고 기대실질이자율을 설명변수로 하여 회귀분석을 수행한 후 여기서 도출된 잔차에 대한 단위근 검정을 수행함으로써 공적분 여부를 판정하게 된다. AIC를 이용하여 최적 시차를 도출한 뒤 잔차의

단위근을 추정한 결과 단위근의 존재가 5% 유의수준하에서 기각되는 것으로 나타남에 따라 기대 실질 및 명목 이자율 간에는 통계적으로 공적분 관계가 존재하는 것으로 판정되었다.

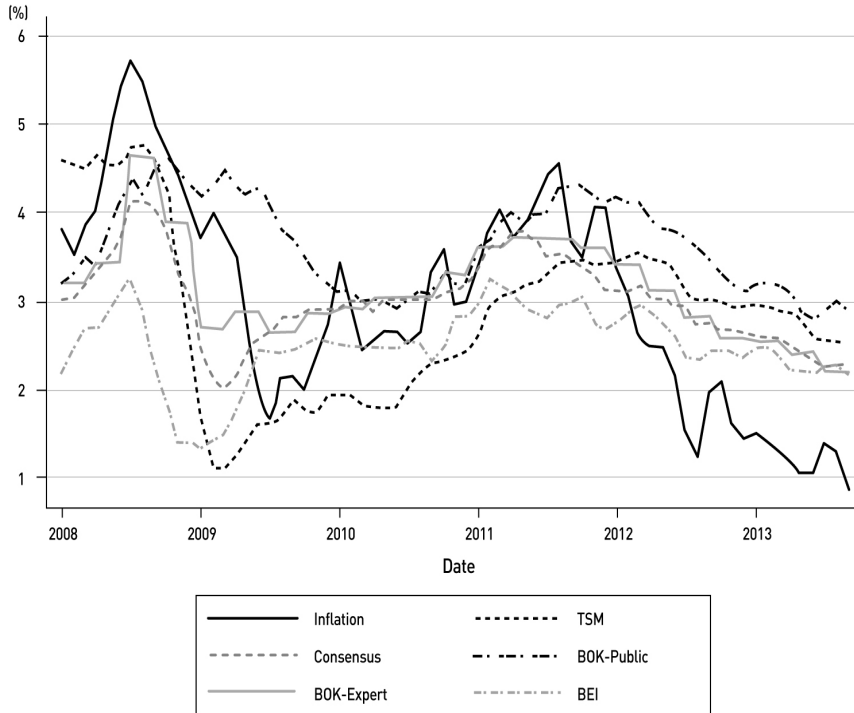
V. 기대인플레이션 지표 간 비교

여기서는 실제로 자료의 입수가 가능한 기대인플레이션 지표 및 이자율 재무모형에서 도출한 기대인플레이션(이하 이자율모형)과 실제인플레이션 간의 관계를 살펴보고자 한다. 여기서 수행하는 분석은 통계적 속성을 모두 감안한 엄밀한 분석이라기보다는 다양한 기대인플레이션 지표 간에 어떤 유사성과 차별성이 존재하는지를 살펴보고자 하는데 일차적인 의의를 가진다고 하겠다. 우리나라에서 현재 자료로서 이용 가능한 기대인플레이션 지표로는 한국은행이 수집하는 일반인(이하 BOK 일반인) 및 전문가(이하 BOK 전문가) 서베이 지표와 물가연동국고채(10년물) 수익률을 이용하여 추정된 손익분기 인플레이션(BEI) 및 영국 소재 거시경제지표 서베이 전문업체인 Consensus Economics가 발표하는 컨센시스 자료가 있다.⁸

BOK 일반인은 한국은행이 2002년 2월부터 작성하는 지표로, 매월 일반인 또는 가구를 대상으로 향후 1년간의 예상 인플레이션을 조사하여 작성되고 있다. 동 지표는 해당 월에 발표하므로 해당 월의 CPI 인플레이션보다는 1개월 앞서 일반에 공표된다. BOK 전문가는 2005년 3/4분기부터 매 분기 첫째 월에 경제연구소 및 금융기관 소속 경제전문가(현재 50명)를 대상으로 향후 2분기, 향후 2개 연도 및 향후 1년 및 5년간의 인플레이션 전망치를 조사한 지표이다. BEI는 명목국고채(10년물)와 물가연동국고채(10년물) 간의 수익률 스프레드로서 금융시장에서 형성된 향후 10년간의 연평균 기대인플레이션을 나타낸다. BEI는 투자자들의 실제 투자 패턴과 이익추구에 따른 시장가격을 반영하기 때문에 물가연동국고채가 발달될수록 인플레이션에 대한 시장 기대가 잘 반영될 것으로 여겨진다. 다만, 이렇게 추정된 수익률 스프레드는 기대인플레이션뿐만 아니라 인플레이션에 대한 리스크 프리미엄도 포함되어 있으므로 진정한 의미에서의 기대인플레이션과는 다소 괴리가 발생할 수 있다. 마지막으로 컨센시스 자료는 매월 투자은행, 증권회사,

⁸ 기대인플레이션 서베이에 대한 내용은 이정익(2012)을 참고하였다.

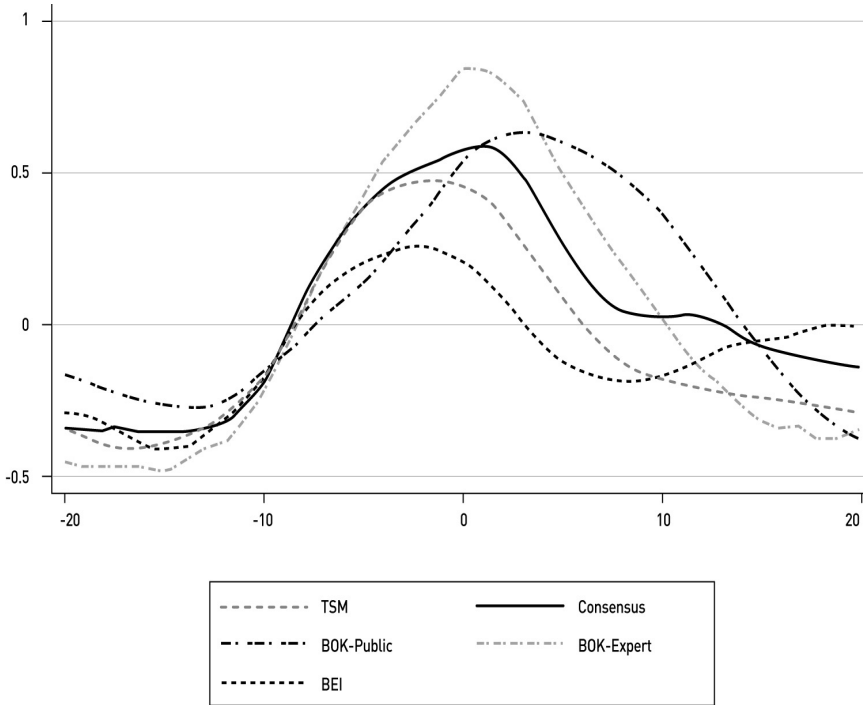
[Figure 11] Trends in Actual and Expected Inflations



경제연구소 등 경제전문가들을 대상으로 조사하는 기대인플레이션에 기초하고 있다. 이 지표 역시 해당 월에 발표함으로써 실제인플레이션율보다는 한 달 정도 앞서 일반에 공개되고 있다.

이자율모형, BOK 일반인, BOK 전문가, 컨센서스, BEI에서의 기대인플레이션 및 실제인플레이션의 시계열 추이를 도시한 것이 [Figure 11]이다. BOK 전문가의 경우 분기 자료이므로 같은 분기에 속하는 월들은 모두 동일한 기대인플레이션 수준을 가지는 것으로 가정하였다. 2008년의 경우를 보면 인플레이션이 급격히 상승할 때는 모든 지표가 실제인플레이션과 같이 상승하다가 하반기 들어서 인플레이션이 꺾이는 시점에서 대부분의 지표는 유사한 변곡을 보이나 BOK 일반인의 경우에는 이러한 변화를 반영하지 못하는 것으로 보인다. BEI의 경우 기대인플레이션과 실제인플레이션 간의 괴리가 상당히 크게 나타남을 알 수 있고 컨센서스와 전문가의 경우에는 실제인플레이션보다 완만한 형태를 보이고 있음이 관찰된다. 이자율모형의 경우에는 2008년에 다른 지표들에 비해 상대적으로 큰 폭의 하락세를 보였으나 이후 실제인플레이션과 유사한 추이를 보이고

[Figure 12] Cross-Correlation of Actual and Expected Inflations



있음이 관찰된다. 2011년 후반 이후 모든 기대인플레이션 지표들이 실제인플레이션을 상회하는 모습을 보이고 있어 최근의 낮은 물가상승률이 조만간 상승할 것이라는 시장의 기대가 완전함을 알 수 있다.

한편, 기대인플레이션의 선행성 여부를 판단하기 위해 실제인플레이션을 독립변수로 하고 기대인플레이션을 종속변수로 하여 교차상관계수를 살펴보았으며, 그 결과를 [Figure 12]에 제시하였다. 여기서 재미있는 부분은 BOK 일반인의 경우 시차가 3인 경우에 가장 높은 상관계수값을 가지는 것으로 나타났는데, 이는 $t+3$ 월의 기대인플레이션과 t 월의 실제인플레이션 간의 상관계수값이 가장 높음을 의미한다. 즉, 일반인들의 인플레이션에 대한 기대의 형성이 오히려 과거 정보에 의존하고 있다. 컨센서스의 경우에도 시차가 1인 경우에 가장 높은 상관계수값을 나타내는데, 지표의 공개시점과 실제인플레이션의 공표시점 간에 1개월의 차이가 있음을 감안하면 서베이에서 예상되고 있는 기대인플레이션은 실제로 공표된 인플레이션 수준에 따라 상당히 영향을 받는 것으로 해석된다. 한편, 이자율모형과 BEI의 경우는 기대인플레이션이 실제인플레이션을 선행

〈Table 8〉 Autoregression of Expected Inflation

Lags	TSM	Consensus	BOK-Public	BOK-Expert	BEI
1	1.409***	1.759***	1.379***	0.982***	0.948***
2	-0.501**	-0.873***	-0.264**	0.075	-0.000
3	-0.026	0.005	-0.326**	-0.040	0.106
4	-0.014	0.049	0.103	-0.071	-0.172
Constant	0.322***	0.155***	0.326***	0.183**	0.361**

Note: *** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1.

하는 시점에서 계수값이 가장 크게 나타나고 있어 이들 지표가 실제인플레이션에 대해 선행성을 가지는 것으로 나타났다. BOK 전문가의 경우 시차가 0일 경우 가장 높은 상관 계수값을 보이고 있는데, 이는 인플레이션의 공표시점이 1개월 후행한다는 점을 감안하면 BOK 전문가의 경우에도 선행성을 어느 정도는 가지고 있는 것으로 보이나 자료가 분기인 점을 감안하면 단순하게 결론을 내리기는 어려울 것이다.

다양한 기대인플레이션 지표들의 특성을 살펴보기 위해 〈Table 8〉에서는 이들 지표들의 자기회귀계수를 추정해 보았다. 기대인플레이션 지표들은 모두 강한 자기상관성을 가지고 있는 것으로 나타났다. 시차 1의 계수값이 1을 초과한 이자율모형, 컨센서스에서는 시차 2의 계수가 모두 통계적으로 유의한 음(-)의 값을 가지고 있으며, 시차 1과 2를 합할 경우 계수값 1을 하회하고 있어 기대인플레이션이 발산하지는 않는 것으로 나타났다. BOK 일반인의 경우에는 시차 3의 계수값도 유의하게 나타났으며, 시차 1~3을 모두 합칠 경우 1을 하회하게 되어 BOK 일반인의 기대인플레이션 역시 발산하지 않음을 알 수 있다.

다음으로 실제인플레이션을 종속변수로 하고 각각의 기대인플레이션을 독립변수로 하여 회귀분석을 수행하였는데, 〈Table 9〉에서 보듯이 이자율모형에서 도출한 기대인플레이션이 실제인플레이션의 변동에 가장 높은 설명력(Adj. R²=0.172)을 가지고 있는 것으로 확인되었다. 그러나 이러한 이자율모형의 결과가 다른 지표에 비해 더 나은 기대인플레이션 수준을 제시한다고 주장하기는 어렵다. 왜냐하면 회귀분석의 결과는 피설명변수와 설명변수 간 공분산에 관한 것으로 표본오차의 분산이 클 경우 더 좋은 기대인플레이션 지표임에도 불구하고 더 낮은 R²를 나타낼 수도 있기 때문이다. 다만, 여기서 얘기하는 바는 이자율모형에서 도출한 기대인플레이션이 실제인플레이션의 움직임과 여타 지표에 비해 상대적으로 높은 상관성을 가진다는 점이다.

〈Table 9〉 Regression of Actual on Expected Inflations

Lag	TSM	Consensus	BOK–Public	BOK–Expert	BEI
0	0.980***	0.847***	0.522***	0.387**	0.506*
1	-1.389**	-1.331***	-0.586**	-0.506**	-0.594
2	0.052	0.201	0.209	0.14	0.49
3	0.408	0.325	-0.151	0	-0.388
Constant	0.08	0.115	0.263	0.171	0.204
Obs.	66	162	137	78	76
Adj. R ²	0.172	0.056	0.036	0.037	0.065

매월의 실제인플레이션은 관측오차로 인해 편차가 크므로 이를 보완하기 위해 3개월 또는 6개월 이동평균을 이용하여 인플레이션을 재구성한 후 다시 이를 각각의 기대인플레이션에 대해 회귀분석을 수행하였는데, 그 결과가 각각 〈Table 10〉 및 〈Table 11〉에 제시되어 있다. 3개월, 6개월 이동평균의 경우 컨센서스 및 BOK 전문가의 설명력이 상당히 높아지는 것으로 나타남에 따라 컨센서스 및 BOK 전문가의 경우 실제인플레이션 저변의 움직임을 다른 지표에 비해 더 잘 반영하고 있는 것으로 보인다.

이정익(2012)은 기대인플레이션이 합리성을 가지기 위해서는 체계적 편의가 없어야 하며, 기대형성시점에서 이용 가능한 정보가 최대한 반영되어야 한다고 주장하였다. 여기서도 이러한 합리성이 담보되는지를 확인하기 위해 이정익(2012)에서와 마찬가지로 다음의 두 가지 분석을 추가적으로 수행하였다.

첫째, 기대인플레이션에 체계적인 편의가 존재하지 않기 위해서는 예측대상 시점에서 1년 후의 실제 기대인플레이션을 정확하게 예측하여야 한다. 이를 검증하기 위해 다음과 같은 회귀식을 설정한다. 여기서는 인플레이션이 I(1)의 성격을 가지므로 이를 차분하여 사용하였다.⁹

$$\Delta \pi_t = \alpha + \beta \Delta \pi_{t|t-12}^e + \epsilon_t$$

여기서 π_t 는 t 기의 실제인플레이션, $\pi_{t|t-12}^e$ 는 $t-12$ 기에서 형성한 t 기의 기대인플

9 이정익(2012)과 유사하게 인플레이션 수준 변수에 대한 불평형 분석을 수행하였으나 결과는 크게 다르지 않은 것으로 나타났다. 인플레이션 자료의 통계적 속성을 고려하여 차분 변수로 분석을 수행할 것을 권고해 준 익명의 검토자에게 감사를 표한다.

〈Table 10〉 Regression of Actual on Expected Inflations (3 months MA)

Lag	TSM	Consensus	BOK–Public	BOK–Expert	BEI
0	0.554***	0.992***	0.309**	0.382***	0.451***
1	-0.247	-0.768***	-0.032	-0.158	-0.215
2	-0.696*	-0.608**	-0.078	-0.116	0.058
3	0.458***	0.504***	-0.182	-0.063	-0.179
Constant	0.044	-0.115	0.187	0.111	-0.045
Obs.	66	162	137	78	76
Adj. R ²	0.277	0.286	0.081	0.178	0.238

〈Table 11〉 Regression of Actual on Expected Inflations (6 months MA)

Lag	TSM	Consensus	BOK–Public	BOK–Expert	BEI
0	0.309***	0.439***	0.228***	0.299***	0.109
1	-0.156	-0.175	0.001	-0.021	-0.013
2	-0.118	-0.019	-0.023	-0.04	0.258
3	0.042	-0.098	-0.156**	-0.125**	-0.213**
Constant	0.03	-0.195***	0.071	-0.102	-0.103
Obs.	66	162	137	78	76
Adj. R ²	0.335	0.484	0.206	0.52	0.263

레이션, ϵ_t 는 오차를, 그리고 α, β 는 회귀계수를 의미한다. 만약 기대인플레이션이 불편성을 가진다면 $\alpha = 0, \beta = 1$ 을 만족시키게 된다. 이러한 조건을 귀무가설로 설정하고 회귀분석을 수행한 결과가 〈Table 12〉에 제시되어 있다. 여기서 보듯이 모든 기대인플레이션은 불편성 기준을 충족시키지 못하는 것으로 나타났다.

다음으로 기대 주체가 인플레이션에 대한 기대를 형성하는 시점에서 정보를 충분히 사용하였는지 여부를 판별하기 위하여 다음과 같은 인플레이션의 차분 회귀식을 설정하였다.

$$\Delta \pi_t - \Delta \pi_{t|t-12}^e = \alpha + \epsilon_t$$

만약 경제주체가 형성한 기대인플레이션의 $t-12$ 시점에서 활용 가능한 모든 정보를

<Table 12> Unbiasedness Test: First-Difference

Variables	model: $\Delta\pi_t = \alpha + \beta\Delta\pi_{t-12}^e + \epsilon_t$				
L12.TSM	-0.019				
L12.Consensus		-0.425**			
L12.BOK-Public			0.072		
L12.BOK-Expert				0.008	
L12.BEI					0.050
Constant	0.001	-0.007	-0.002	-0.004	-0.011
Obs.	56	152	127	68	66
Adj. R ²	-0.018	0.014	-0.007	-0.015	-0.015
F-stat	11.766	17.603	8.037	14.452	7.079
p-value	0.000	0.000	0.001	0.000	0.002

Note: *** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1. HAC (Heteroscedasticity and Auto-correlation Corrected) residuals are used. The null hypothesis for the F-stat is $H_0: \alpha = 0$ and $\beta = 1$.

<Table 13> Expected Bias Test: First Difference

	TSM	Consensus	BOK-Public	BOK-Expert	BEI
Constant	0.030	-0.003	0.004	-0.007	-0.015
Obs.	56	152	127	68	66

Note: *** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1. HAC (Heteroscedasticity and Auto-correlation Corrected) residuals are used.

이용한 것이라면 기대오차 $\eta_t = \Delta\pi_t - \Delta\pi_{t-12}^e$ 는 평균이 0이 되어야 한다. 즉, $\alpha = 0$ 이며, 이를 귀무가설로 하는 회귀분석을 수행한 결과가 <Table 13>에 제시되어 있다. 이전과 마찬가지로 여기서도 모두 $\alpha = 0$ 이라는 귀무가설을 기각하고 있지 않아 기대오차에 편향이 존재하지 않는 것으로 나타났다. 결론적으로 말하자면 본고에서 제시한 다양한 형태의 기대인플레이션 지표들은 불편성과 기대 편의에서 모두 유사한 통계적 성격을 가지고 있는 것으로 분석되었다.

마지막으로 실제인플레이션과 기대인플레이션 간의 인과성 여부를 살펴보기 위해 이들을 차분한 변수들의 시차를 1, 3, 6, 9 및 12개월로 두고 Granger 인과관계 검정을 시도하였으며, 그 결과를 <Table 14>에 제시하였다. 컨센서스, BOK 일반인, BOK 전문가 및 BEI의 경우에는 대부분 장기에서는 실제인플레이션이 인과하는 것으로 나타난 반면 이자율모형에 근거한 기대인플레이션의 경우에는 이러한 인과성이 1개월 정도의 단기에는

<Table 14> Granger Causality Test: First-Difference

X → Actual inflation				Actual inflation → X			
X	chi2	lag order	p-value	X	chi2	lag order	p-value
TSM	0.051	1	0.822	TSM	13.543	1	0.000*
TSM	0.801	3	0.849	TSM	15.499	3	0.001*
TSM	5.617	6	0.467	TSM	11.663	6	0.070
TSM	19.073	9	0.025*	TSM	22.093	9	0.009*
TSM	14.645	12	0.261	TSM	28.197	12	0.005*
Consensus	1.374	1	0.241	Consensus	28.764	1	0.000*
Consensus	0.434	3	0.933	Consensus	51.800	3	0.000*
Consensus	5.682	6	0.460	Consensus	55.094	6	0.000*
Consensus	19.885	9	0.019*	Consensus	55.345	9	0.000*
Consensus	29.367	12	0.003*	Consensus	68.761	12	0.000*
BOK-Public	0.193	1	0.660	BOK-Public	3.692	1	0.055
BOK-Public	7.837	3	0.050*	BOK-Public	5.933	3	0.115
BOK-Public	7.380	6	0.287	BOK-Public	9.221	6	0.162
BOK-Public	20.441	9	0.015*	BOK-Public	14.268	9	0.113
BOK-Public	36.502	12	0.000*	BOK-Public	36.914	12	0.000*
BOK-Expert	0.750	1	0.387	BOK-Expert	6.556	1	0.010*
BOK-Expert	5.413	3	0.144	BOK-Expert	14.320	3	0.003*
BOK-Expert	7.421	6	0.284	BOK-Expert	51.497	6	0.000*
BOK-Expert	18.864	9	0.026	BOK-Expert	57.242	9	0.000*
BOK-Expert	25.354	12	0.013	BOK-Expert	65.713	12	0.000*
BEI	0.019	1	0.890	BEI	11.948	1	0.001*
BEI	9.368	3	0.025*	BEI	6.828	3	0.078
BEI	10.376	6	0.110	BEI	9.634	6	0.141
BEI	15.375	9	0.081	BEI	15.408	9	0.080
BEI	33.206	12	0.001*	BEI	16.925	12	0.152

Note: * implies p-value < 0.05.

〈Table 15〉 Granger Causality Test: First-Difference

X → Actual living cost inflation				Actual living cost inflation → X			
X	chi2	lag order	p-value	X	chi2	lag order	p-value
BOK-Public	0.421	1	0.517	BOK-Public	2.901	1	0.089
BOK-Public	4.336	3	0.227	BOK-Public	4.778	3	0.189
BOK-Public	4.269	6	0.640	BOK-Public	5.030	6	0.540
BOK-Public	16.164	9	0.064	BOK-Public	10.290	9	0.328
BOK-Public	31.170	12	0.002*	BOK-Public	23.622	12	0.023

Note: * implies p-value < 0.05.

어느 정도 존재하나 장기에는 발견되지 않는 것으로 분석되었다. 그러나 반대로 실제인플레이션이 기대인플레이션을 인과하느냐 여부에 대한 Granger 분석 결과 이자율모형의 경우 대부분의 시차에서 이러한 인과성이 존재하는 것으로 나타났음을 알 수 있다.

그리고 컨센서스 BOK 전문가 인플레이션의 경우에도 실제인플레이션에 의해 영향을 받는 것으로 나타났다. 이는 실제인플레이션의 예측이 기대인플레이션을 충분히 설명할 수 있음을 의미한다. 여타 인플레이션 지수들에 비해 이자율모형이 단기의 실제인플레이션에 상호 영향을 받고 있음은 시장상황이나 기대심리에 의해 단기에 영향을 많이 받는 채권시장의 특징에 기인한 것으로 사료된다. 반면, BOK 전문가 및 컨센서스의 경우 단기보다는 장기에서 실제인플레이션과 서로 인과성을 가지는 것으로 분석되었다.

마지막으로 BOK 일반인의 경우 전반적인 물가수준인 CPI보다는 오히려 장바구니 물가라고 할 수 있는 생활물가지수가 기대형성에 더 큰 영향을 미친다고 볼 수 있다. 실제로 이를 검정해 보기 위해 BOK 일반인과 실제 생활물가 인플레이션만을 대상으로 Granger 인과 분석을 추가로 수행해 보았다. 여기서도 차분 변수를 사용하였는데, 그 결과는 〈Table 15〉에서 보는 것처럼 BOK 일반인과 소비자물가 인플레이션과의 인과관계 검정 결과와 크게 다르지 않은 것으로 나타났다. 실제 생활물가 인플레이션에서의 이러한 결과는 BOK 일반인의 기대인플레이션 형성에 있어서 BOK 일반인의 과거 기대인플레이션을 통제한 상태에서는 실제인플레이션이 단기에서는 새로운 정보를 제공하지 못하나 시차가 커질수록 실제인플레이션이 과거 기대인플레이션이 가지지 못했던 정보를 제공하는 것으로 해석된다. 이러한 해석은 실제인플레이션의 경우에도 마찬가지로 적용된다.

여기서 설명하고 있는 기대인플레이션이 향후 1년 동안의 인플레이션 수준에 대한 기댓값임을 감안할 때 시차가 클 경우 기대인플레이션이 실제인플레이션에 유의한 설명력을 가지는 것은 바람직해 보인다. 반면, 합리적 기대가설에 따르면 실제인플레이션에 들어 있는 새로운 정보는 인플레이션 기대형성에 즉시 영향을 미칠 것이므로 실제인플레이션이 오히려 단기의 경우에 기대인플레이션에 유의한 설명력을 가지는 것이 타당할 것이다. 합리적 기대가설의 관점에서 봤을 때 이자율모형이 단기 영역에서 실제인플레이션과 통계적으로 유의한 수준의 상호 인과관계를 가지고 있어 이자율모형을 이용한 기대인플레이션의 추정과 예측은 향후 이자율의 움직임에 대한 시장반응을 감지할 수 있는 유용한 수단일 것이다.

Ⅶ. 결 론

본고에서는 이자율 자료를 기반으로 한 재무모형을 이용하여 최근 관심이 고조되고 있는 기대인플레이션에 대해 추정하고 분석해 보고자 하였다. 재무모형의 경우 물가연동채 및 명목금리의 기간구조모형을 이용하여 이들 각각에 대한 단기 실질 및 명목 금리를 추정함으로써 기대인플레이션 수준을 파악할 수 있다.

분석 결과, 우리나라의 기대인플레이션은 글로벌 금융위기 이전에는 4%를 상회하는 높은 수준을 보였으나 2008년 후반을 기점으로 하여 상당폭 하락하는 모습을 시현하였다. 기대인플레이션은 2009년 초에 저점을 기록한 이후 반전하여 2012년 초까지는 증가하였으나 이후 다시 수그러지는 모습을 나타내고 있다. 기대인플레이션의 이러한 모습이 경제 내 어떠한 요인에 의해 영향을 받는지를 살펴보는 것은 의미 있는 작업이나 본고에서는 이보다는 우리나라 기대인플레이션의 특징을 좀 더 자세히 살펴봄으로써 기대인플레이션에 대한 이해를 제고하고자 하였다.

실제로 자료의 입수가 가능한 다양한 형태의 기대인플레이션 지표와 이자율모형에서 도출된 기대인플레이션을 비교한 결과, 이들은 모두 단위근을 가지고 있는 불안정한 시계열로 판명되었다. 이자율모형과 BEI의 경우 실제인플레이션에 대해 선행성을 가지고 있는 반면 컨센서스와 BOK 일반인의 경우에는 이러한 선행성이 자료에서는 관찰되지 않았다. 기대인플레이션이 실제인플레이션의 변동을 얼마나 잘 설명하는지를 살펴본 결

과, 실제인플레이션을 그대로 이용할 경우 이자율모형의 설명력이 상대적으로 우월한 반면 실제인플레이션의 관측오차를 보정하기 위해 이동평균을 사용한 경우 BOK 전문가와 컨센서스의 설명력이 더 높게 나타남을 확인할 수 있었다. 한편, 경제주체의 기대인플레이션 형성에 체계적인 편이가 존재하지 않고(불편성), 기대형성에 활용 가능한 모든 정보가 반영되었는지(효율성)를 기준으로 합리성을 평가한 결과, 분석대상인 모든 기대인플레이션에서 불편성 기준은 충족되지 않았으나 기대형성의 편이는 존재하지 않는 것으로 분석되었다. 이러한 결과는 1년 후의 기대인플레이션이 경제주체들의 엄밀한 경제적인 효율성에 근거한 기대형성보다는 당시의 경제적 여건이나 심리적인 상황 등 행동경제학적 측면에 영향을 받기 때문으로 해석될 수도 있지만, 1년 후의 인플레이션에 대한 예측을 합리적으로 수행하기 위해 소요되는 비용의 편익이 낮아 활용 가능한 정보를 모두 이용하지 않기 때문에 발생한 현상으로도 해석할 수도 있다. 한편, 본 연구에서 제시된 대부분의 기대인플레이션들이 과거 실제인플레이션과 높은 상호 인과관계를 가지고 있는데, 이는 미래의 기대인플레이션 안정을 위해서는 결국 현재의 인플레이션 수준을 안정시키는 것이 중요하다는 사실을 다시 한 번 상기시켜 주고 있다.

참고문헌

- 이정익, 「우리나라 기대인플레이션의 특징」, BOK 경제리뷰, BOK Discussion Paper Series, No. 2012-1, 2012.
- Ang, Andrew and Monika Piazzesi, “A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables,” *Journal of Monetary Economics* 50, 2003, pp.745~787.
- Chen, Ren-Raw and Louis Scott, “Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates,” *Journal of Fixed Income* 3(3), 1993, pp.14~31.
- Dai, Q. and Kenneth Singleton, “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *Journal of Finance* 55, 2002, pp.1943~1978.
- Deuker, Michael J., “Strengthening the Case for the Yield Curve as a Predictor of U.S. Recession,” *FRB of St. Louis Review* 79, 1997, pp.41~51.
- Diebold, Francis X., Glenn D. Rudebusch, and Boragan S. Aruoba, “The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach,” *Journal of Econometrics* 113(1), 2005, pp.309~338.
- Duffie, Darrell and R. Kan, “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance* 6, 1996, pp.379~406.
- Estrella, Arturo and Frederic S. Mishkin, “The Yield Curve as a Predictor of U.S. Recessions,” Current Issues FRB New York, 1996.
- Litterman, R. and Jose Scheinkman, “Common Factors Affecting Bond Returns,” *Journal of Fixed Income* 1, 1991, pp.51~61.
- Mishkin, Frederic S., “What Does the Term Structure Tell Us about Future Inflation?” *Journal of Monetary Economics* 25, 1990, pp.77~95.
- Piazzesi, Monika, “Bond Yields and the Federal Reserve,” *Journal of Political Economy* 113(2), 2005, pp.311~344.
- Rudebusch, Glenn D. and Tao Wu, “A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy,” FRB of San Francisco Working Paper, 2004.
- Stock, James H. and Mark W. Watson, “New Indexes of Coincident and Leading

Economic Indicators,” *NBER Macroeconomic Annual* 4, 1989, pp.351~394.

〈관련 자료 목록〉

- Ang, Andrew, Geert Bekaert, and Min Wei, “The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation,” *Journal of Finance* 63(2), 2008, pp.797~849.
- Backus, David, Silverio Foresi, and Chris Telmer, “Discrete Time Models of Bond Pricing,” NBER Working Paper, No. 6736, 1998.
- Balduzz, Pierluigi, Sanjiv R. Das, Silverio Foresi, and Rangarajan Sundaram, “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models,” *Journal of Fixed Income* 6(3), 1996, pp.43~53.
- Bolder, David J., “Affine Term Structure Models: Theory and Implementation,” Bank of Canada Working Paper, No. 2001-15, 2001.
- Campbell, John Y. and Robert J. Shiller, “Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird’s Eye View,” *Review of Economics Studies* 58(3), 1991, pp.495~514.
- Chernov, Mikhail and Phillippe Mueller, “The Term Structure of Inflation Expectations,” *Journal of Financial Economics* 106, 2012, pp.367~394.
- Cuchiero, Christina, Damir Filipovic, and Josef Teichmann, “Affine Models,” Vienna Institute of Finance Working Paper, No. 8, 2008.
- Diebold, Francis X., Monika Piazzesi, and Glenn D. Rudebusch, “Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics,” Working Paper, 2005.
- Durham, Benson J., “An Estimate of the Inflation Risk Premium Using a Three-Factor Affine Term Structure Model,” FRB Working Paper 2006-42, 2006.
- Favero, Carlo A, Linlin Niu, and Luca Sala, “Term Structure Forecasting: No Arbitrage Restrictions Versus Large Information Set,” *Journal of Forecasting* 10, 2010, pp.15~40.
- Fisher, Mark, “Modeling the Term Structure of Interest Rates: An Introduction,” *Economic Review* 3, 2004, pp.41~62.
- Kim, Don H. and Jonathan H. Wright, “An Arbitrage-Free Three Factor Term Structure Model and the Recent Behavior of Long-Term Yields and Distant-Horizon Forward Rates,” FRB Finance and Economics Discussion Paper Series 2005-33, 2005.
- Mishkin, Frederic S., “A Multi-Country Study of the Information in the Term Structure about Future Inflation,” *Journal of International Money and Finance* 19, 1991, pp.2~22.

선형이자율모형의 점화식

연속시간모형을 가정할 경우 위험중립 확률측도하에서의 채권가격은 다음과 같은 편미분 방정식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{dA(n)}{dn} = \theta^* K^{*'} B(n) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\Sigma' B(n))_j^2 \lambda_{0,j} - \delta_0$$

$$\frac{dB(n)}{dn} = -K^{*'} B(n) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\Sigma' B(n))_j^2 A_{1,j} - \delta_1$$

이들 편미분 방정식은 실제 확률측도하에서는 $K, \theta, \Sigma, \lambda_0, A_1$ 의 함수로 표시되는데, 위험중립 확률측도와 실제 확률측도는 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$K = K^* - \Sigma A_1$$

$$\theta = K^{-1}(K^* \theta^* + \Sigma \lambda_0)$$

여기서 K 및 θ 는 실제 확률측도에 대응하는 위험중립 확률측도하에서의 K^*, θ^* 의 값을 의미한다.

그러나 본고에서는 이산시간(discrete time)모형하에서의 채권가격을 상정하고 모형을 도출하고자 하므로 연속시간모형을 이산형으로 변형시켜 문제를 다시 정의해야 한다. 이를 위해서는 먼저 식 (2)의 양변에 로그를 취한 뒤 로그노말 분포의 특성을 이용하여 다음과 같은 식을 도출한다.¹

$$p_t = E_t[m_{t+1} + p_{t+1}] + \frac{1}{2} \text{Var}_t(m_{t+1} + p_{t+1})$$

¹ 로그를 취한 변수를 소문자로 표현한다.

- 상태방정식(state variable dynamics)

$$x_t = \mu + Fx_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, \Omega)$$

- 단기이자율(short rate)

$$r_t = \delta_0 + \delta_1' x_t$$

- 위험의 시장가격(market price of risk)

$$\lambda_t = \lambda_0 + \Lambda_1 x_t$$

- 가격 커널(pricing kernel)

$$m_{t+1} = -r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \Omega \lambda_t - \lambda_t' x_{t+1}$$

선형이자율모형에서는 t 시점에서 만기가 n 기간 남은 채권의 가격이 다음과 같은 지수선형 형태를 가진다고 가정한다.

$$P_t^{(n)} = \exp\{A_n + B_n' X_t\}$$

여기서는 모형의 식별을 위해서 Dai and Singleton(2002)에서와 유사하게 다음과 같은 가정을 한다.² 먼저 δ_0 는 3개월 만기 채권 금리의 평균 수준에서 결정되도록 정한다.

$$\delta_1' = [1, 1, 1]$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mu = 0$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix}$$

² 특히 그들은 선형이자율모형이 식별되기 위해서는 연속모형에서의 K행렬 — 이산모형에서는 F행렬 — 이 하방삼각행렬이 되어야 함을 지적하였다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{1,11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1,33} \end{pmatrix}$$

본문의 식 (2)를 이용하여 식들을 순차적으로 풀면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} P_t^{(n+1)} &= E_t[m_{t+1}P_{t+1}^{(n)}] \\ &= E_t\left\{\exp\left[-r_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t - \lambda'_t\nu_{t+1}\right]\exp\{A_n + B'_nX_{t+1}\}\right\} \\ &= \exp\left[-r_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t + A_n\right]E_t\left\{\exp\{-\lambda'_t\nu_{t+1} + B'_nX_{t+1}\}\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 - \delta'_1X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t + A_n\right]E_t\left\{\exp\{-\lambda'_t\nu_{t+1} + B'_n(\mu + FX_t + \nu_{t+1})\}\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 - \delta'_1X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t + A_n + B'_n(\mu + FX_t)\right]E_t\left\{\exp\{-\lambda'_t\nu_{t+1} + B'_n\nu_{t+1}\}\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t\right]E_t\left\{\exp(-\lambda'_t + B'_n)v_{t+1}\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t\right]\exp\left\{E_t[(-\lambda'_t + B'_n)v_{t+1}] + \frac{1}{2}\text{var}[(-\lambda'_t + B'_n)v_{t+1}]\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\text{var}[(-\lambda'_t + B'_n)v_{t+1}]\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t\right]\exp\left\{\frac{1}{2}E_t[(-\lambda'_t + B'_n)v_{t+1}v'_{t+1}(-\lambda_t + B_n)]\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\Omega\lambda_t\right]\exp\left\{\frac{1}{2}[\lambda'_t\Omega\lambda_t - 2B'_n\Omega\lambda_t + B'_n\Omega B_n]\right\} \\ &= \exp\left[-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - B_n\Omega\lambda_t + \frac{1}{2}B'_n\Omega B'_n\right] \\ &= \exp\left\{-\delta_0 + A_n + B'_n\mu + (B'_nF - \delta'_1)X_t - B'_n\Omega(\lambda_0 + A_1X_t) + \frac{1}{2}B'_n\Omega B'_n\right\} \\ &= \exp\left\{-\delta_0 + A_n + B'_n(\mu - \Omega\lambda_0) + \frac{1}{2}B'_n\Omega B_n + (B'_nF - B'_n\Omega A_1 - \delta'_1)X_t\right\} \\ &= \exp\left\{[A_1 + A_n + B'_n(\mu - \Omega\lambda_0) + \frac{1}{2}B'_n\Omega B_n] + [B'_n(F - \Omega A_1) + B'_1]X_t\right\} \end{aligned}$$

한편, $P_t^{(n+1)}$ 은 어파인 모형 가정에 의해 $\exp\{A_{n+1} + B'^{n+1}X_t\}$ 이므로 상수는 상수끼리, X_t 는 X_t 끼리 묶어서 정리하면 다음과 같은 점화식을 도출할 수 있다.

$$A_{n+1} = A_n + B'_n (\mu - \Omega \lambda_0) + \frac{1}{2} B'_n \Omega B_n - \delta_0$$

$$B_{n+1} = (F - \Omega A_1)' B_n - \delta_1$$

여기서 $A_0 = 0$, $A_1 = -\delta_0$ 이고, $B_0 = 0$, $B_1 = -\delta_1$ 임은 만기 채권과 다음 기가 만기인 채권의 가격을 이용하면 쉽게 도출할 수 있다. 실제 추정은 이러한 점화식을 축차적으로 사용하여 금리 간 무차익거래조건을 적용한 뒤 최우추정법을 사용하는 방식으로 이루어진다.