Bulletin de la Sabix
Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique

57 | 2015
Eugène Catalan (1814-1894, X 1833)

Chapitre 8 : Catalan et ses polyèdres

Jean-Jacques Dupas et Norbert Verdier

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/sabix/1971
ISSN : 2114-2130

Éditeur
Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée
Date de publication : 1 juin 2015
Pagination : 57-64
ISSN : 0989-30-59

Référence électronique
Jean-Jacques Dupas et Norbert Verdier, « Chapitre 8 : Catalan et ses polyèdres », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 57 | 2015, mis en ligne le 25 juillet 2018, consulté le 22 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/sabix/1971

Chapitre 8

CATALAN ET SES POLYÈDRES

Jean-Jacques Dupas & Norbert Verdier

« Faire l'énumération complète de tous ces divers polyèdres » [*Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816-1817), p. 256], se questionner sur le nombre de diagonales d'un polyèdre [*Nouvelles annales de mathématiques*, I, 4 (1845), p. 368] sont des questions qui animent la presse mathématique de la première moitié du XIX^{e} siècle. L'Académie des sciences n'est pas en reste et propose en 1861 un prix qui récompenserait une avancée significative dans la théorie géométrique des polyèdres. Catalan y participe est c'est là son principal travail sur les polyèdres.

Eugène Charles Catalan publia de nombreux articles dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (*Journal de Liouville*), mais en 1854 il cessa quasiment de publier dans ce journal, tout en continuant à publier dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et dans de nombreuses autres revues dont les *Nouvelles annales de mathématiques*. Au début des années soixante, Catalan recherche une position académique. En 1860, Bertrand, Hermite et Serret avaient tous les deux été élus à l'Académie. Lors de l'élection de Serret en cette année 1860, Catalan était sur la liste, mais il n'était que quatrième, derrière Serret, Bonnet et Puiseux [Jongmans 1986]. En 1861 l'Académie des sciences, donne comme sujet de concours pour le grand prix de mathématiques : « Perfectionner, en quelque point important, la théorie géométrique des polyèdres. ». Cependant, le prix fut reporté à 1863. Catalan remit un mémoire mais fut invité à soumettre une nouvelle version de sa copie en 1862, ce qu'il fit le 22 décembre 1862. Ce mémoire fut examiné par un comité composé de Bertrand, Chasles, Liouville et Serret. Notons que Bertrand était un grand connaisseur des polyèdres sur lesquels il avait produit des théorèmes fondamentaux et une note synthétique dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* [Bertrand 1858]. Chasles et Liouville, son grand ami, souhaitaient voir Catalan primé, mais les autres proposèrent que le prix ne soit pas accordé. Deux mémoires furent distingués, ceux de Catalan, que nous allons détailler, et de Möbius. L'Académie des sciences ne reçut que huit mémoires. Nous ne sommes pas parvenu à localiser le mémoire de Möbius qui n'a, semble-t-il, pas été publié. Citons également la tentative de Pierre, Marie, Eugène Prouhet (1817-1867) [Archives de l'École polytechnique, VI 1b2 (1857) & X2C 26/1843][15]. Il aurait déposé un mémoire avant de le retirer après avoir découvert une erreur dans ses écrits. À la mort d'Olry Terquem (1782-1862), en 1862, Prouhet prend la co-direction des *Nouvelles annales de mathématiques* et publie notamment une note « sur le nombre des diagonales d'un polyèdre » [Prouhet 1863] ; en fait, c'est une adaptation d'une réponse à une question proposée en 1845 et ouvrant notre chapitre. Prouhet revient sur une solution proposée par un certain Henri Binder, alors élève en mathématiques élémentaires au collège Charlemagne de Paris. Il est curieux de constater que Prouhet ne cite pas la réponse publiée dans ces mêmes *Nouvelles annales* en 1845 [Binder 1845] mais celle traduite en allemand dans *Archiv der Mathematik und Physik* [Binder 1846]. En 1865, Prouhet écrit à Catalan et revient à propos des animosités de Catalan à l'encontre de Bertrand, Bonnet et Serret et considère que le meilleur mémoire sur les polyèdres et celui de Catalan. En revanche, Prouhet – connaisseur de l'historiographie sur le sujet – signale un certain nombre de sources anciennes qu'ignorait probablement Catalan [Jongmans 1996, p. 119-120 & 188].

En revanche, Catalan connaissait très bien la géométrie et en particulier la géométrie descriptive qu'il avait enseignée, en temps que répétiteur à l'École polytechnique de 1838 à 1850, tellement bien qu'il rédigera un manuel de géométrie descriptive [Catalan 1861-1862]. En 1865, il fait publier dans le *Journal de l'École polytechnique* son « Mémoire sur la théorie des polyèdres » [Catalan 1865] ; une note de bas de page, datée du 23 janvier 1865, stipule : « Le présent Mémoire est la reproduction, aussi fidèle que possible, de celui qui a été déposé au Secrétariat de l'Institut le 22 décembre 1862. Sauf quelques renvois, nécessités par la nouvelle disposition des figures, pas un mot de la rédaction primitive n'a été changé. » [*ibid*., p. 1]

---

[15] Nous remercions Olivier Azzola – chargé des archives à la Bibliothèque de l'École polytechnique – de nous avoir communiqué ces documents sur Eugène Prouhet.

« Quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres » par Gergonne, en 1824-1825

Catalan s'appuie essentiellement sur un article de Gergonne dans ses *Annales* [Gergonne 1824-1825]. Dans ce texte Gergonne analyse la formule d'Euler, à savoir S+F=A+2 où S représente le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes du polyèdre, Gergonne remarque très judicieusement que S et F joue un rôle symétrique ce qui lui permet de définir la conjugaison de deux polyèdres en échangeant les rôles de S et F puis par simple analyse de la formule d'Euler, il déduisit tout une série de théorèmes que l'on peut décliner soit en caractéristiques des sommets soit, par conjugaison, en caractéristiques des faces.

Catalan reprend cette idée et sa très bonne connaissance de la théorie des nombres lui permet en manipulant les équations issues de la formule d'Euler de déduire à son tour un grand nombre de théorèmes exprimés soit en termes de sommets soit en termes de faces, ainsi que des conditions régissant l'existence des polyèdres.

La formule d'Euler est fascinante : on peut déduire les caractéristiques des cinq polyèdres de Platon (dont le fait qu'ils ne sont que cinq) uniquement en manipulant des nombres entiers, et donc sans jamais faire de géométrie comme le fait Gergonne.

Et un « commencement de solution » par un abonné des *Annales de Gergonne*

Catalan est aussi parti d'un autre texte toujours extrait des *Annales de Gergonne* [Abonné 1818-1819] ; c'est un élément de réponse à une question sur les polyèdres posé en 1816-1817 et ouvrant notre article. Il est signé « par un abonné » mais nous avons de bonnes raisons de penser que le signataire est Gergonne lui-même. D'une part c'était une pratique courante chez Gergonne de signer « par un abonné » des articles qu'il rédigeait lui-même comme l'a montré Christian Gérini dans sa thèse consacrée à l'étude des *Annales de Gergonne* [Gérini 2002] ; d'autre part, le sujet des polygones était un sujet qui intéressait particulièrement Gergonne. C'est, à titre d'exemple, lui qui a adapté dès 1812-1813, un article du genevois Simon, Jean, Antoine Lhuillier (1750-1840) pour les *Annales* [Lhuillier & Gergonne 1812-1813][16].

Dans son texte, Gergonne définit le polygone régulier et l'angle polyèdre régulier, la conjugaison des polyèdres et le polyèdre régulier : faces régulières égales et angles polyèdres réguliers égaux. Cette dernière condition est tellement restrictive que l'auteur se demande si de tels polyèdres existent. Grâce à la formule d'Euler, l'auteur retrouve les cinq polyèdres de Platon auquel il ajoute le polygone régulier et le digone (polygone constitué de deux sommets, une arête (en fait deux arêtes confondus)), puis il ajoute la sphère divisée en une infinité de compartiments infiniment petits, carrés, triangulaires et hexagonaux. Beaucoup plus tard, l'ingénieur des mines, ami et collaborateur de Jules Verne, Albert Badoureau[17] montrera que ces divisions infinies de la sphère n'existent pas [Badoureau 1878 &1881]. Puis l'auteur anonyme, repartant des cinq polyèdres réguliers, ajoute sur chaque face des pyramides en choisissant astucieusement la hauteur de ces pyramides, deux faces latérales de ces pyramides partageant la même arête du polyèdre primitif peuvent être dans le même plan auquel cas les faces sont des losanges (aussi nommés rhombes) d'où l'obtention :

- Du cube à partir du tétraèdre régulier
- Du dodécaèdre rhombique à partir du cube ou de l'octaèdre régulier ;
- Du triacontaèdre rhombique à partir du dodécaèdre régulier ou de l'icosaèdre régulier

---

[16] Gergonne a ici volontairement « abrégé » l'article initial de Lhuillier qui a beaucoup œuvré autour des polyèdres en laissant plusieurs manuscrits sur ce sujet ainsi que l'atteste la notice biographique publié dans le *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques* en 1856 [*Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, 2 (1856), p. 140-146]. À noter également que Gergonne dans un rapport à l'Académie du Gard a été très critique envers les conceptions mathématiques de Lhuillier exposées dans ses *Éléments raisonnés d'algèbre* [Gérini 2002, p. 86-90].

[17] Pour les liens entre Badoureau et Verne et pour ses apports à l'étude de certains polyèdres, nous renvoyons au dossier que lui a consacré le magazine *Quadrature* [Crovisier Jacques & Crovisier Sylvain 2007].

Il ne reconnaît :

- Ni le dodécaèdre rhombique qui est certainement connu depuis la nuit des temps puisque de nombreux cristaux possèdent cette forme ;
- Ni le triacontaèdre rhombique décrit par Kepler.

L'auteur nomme ces polyèdres semi-réguliers par excès de première classe.

Si les faces latérales des pyramides ne s'alignent pas on peut néanmoins choisir la hauteur des pyramides afin que les angles polyèdres soient réguliers et nous obtenons 5 polyèdres que l'auteur anonyme qualifie de semi-régulier par excès de seconde classe.

De même repartant des cinq polyèdres réguliers, il retranche sur chaque sommet des pyramides ; le sommet du polyèdre primitif est le sommet de la pyramide, les faces concourantes en ce sommet contiennent les faces latérales de la pyramide, en choisissant astucieusement la hauteur de ces pyramides, les sommets des nouveaux polyèdre se trouvent au milieu des arêtes du polyèdre primitif d'où l'obtention :

- De l'octaèdre à partir du tétraèdre régulier ;
- Du cuboctaèdre à partir du cube ou de l'octaèdre régulier ;
- De l'icosidodécaèdre à partir du dodécaèdre régulier ou de l'icosaèdre régulier.

Il ne reconnaît

- Ni le cuboctaèdre ;
- Ni l'icosidodécaèdre ;

qu'il nomme polyèdres semi-réguliers par défaut de première classe.

Si les arêtes des faces latérales des pyramides n'atteignent pas le milieu des arêtes des polyèdres primitifs, on peut encore une fois néanmoins choisir la hauteur des pyramides afin que les faces des polyèdres soient régulières et nous obtenons cinq polyèdres que l'auteur qualifie de semi-réguliers par défaut de seconde classe. Nous reconnaissons :

- Le tétraèdre tronqué ;
- Le cube tronqué ;
- Le dodécaèdre tronqué ;
- L'icosaèdre tronqué.

Il affirme qu'aucun géomètre n'a étudié ces polyèdres semi-réguliers. Nous verrons que c'est en grande partie faux et constatons qu'il ne qualifie pas précisément cette notion. Tous les polyèdres décrits par cet auteur ne sont décrits qu'en termes de nombre de sommets, arêtes et faces ; leurs caractéristiques géométriques, angles de faces, rayons inscrits… ne sont pas précisées.

Catalan

Catalan reprend tous cela de façon beaucoup plus systématique et va chercher à obtenir tous les cas possibles. Il définit précisément la notion de polyèdres semi-réguliers :

> « J'appelle polyèdre semi-régulier, soit celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles polyèdres sont égaux (ou symétriques), soit celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont réguliers. J'admets en outre que, dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les faces de même espèce sont égales, et que, dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les angles polyèdres de même espèce sont égaux » [Catalan 1865].

Mais Catalan découvre un peu tard qu'une partie de ses découvertes ont déjà été faites :

> « Cette définition, aussi bien que la plus grande partie du présent Mémoire, date de l'année dernière. Il y a quelques semaines, j'ai appris, par hasard, que les polyèdres semi-réguliers, du premier genre sont connus presque tous depuis longtemps sous le nom de solides d'Archimède. Nil Novi sub Sole ! 24 avril 1862 » [*ibid*.].

Il commence par étudier les polyèdres semi-réguliers, du premier genre en établissant préalablement une série de théorèmes généraux qui l'aideront dans sa démarche :

- Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, a les arêtes égales entre elles ;
- Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, a les angles dièdres égaux entre eux ;
- Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres ;
- Dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales ;
- Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, est inscriptible ;
- Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les angles dièdres, déterminés par des faces respectivement égales, sont égaux entre eux ;
- Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets adjacents à un sommet donné sont situés sur une circonférence ayant pour pôle le sommet donné.

Puis partant de ses fondations solides, il établit la liste des quinze polyèdres possibles. Il prouve l'existence de chaque polyèdre puis pour tous les polyèdres non repérés dans l'article des *Annales de Gergonne*, il calcule les angles entre faces et les rayons inscrits des faces. Notons que ces quinze polyèdres sont les deux familles infinies des prismes et des antiprismes, et les 13 polyèdres archimédiens ont été ainsi nommés car ils ont été décrits par Archimède dans un ouvrage aujourd'hui perdu mais dont Pappus s'est fait l'écho dans les collections mathématiques. À la renaissance tous ces polyèdres semi-réguliers ont été redécouverts et étudiés par Kepler. Ces polyèdres étaient connus de Poinsot [Poinsot 1810], au travers de l'annexe appelée « Description De Quelques Solides Semi-Réguliers, Appelés Les Corps D'Archimède » contenue dans un ouvrage de Nicolas-Joseph Lidonne (1757-1830)[18] publié en 1808 [Lidonne 1808]. Par rapport aux *Annales de Gergonne*, Catalan a donc redécouvert le petit rhombi-cuboctaèdre, le grand rhombi-cuboctaèdre, le petit rhomb-icosidodécaèdre, le grand rhomb-icosidodécaèdre, le cube camus, le dodécaèdre camus, les prismes et les antiprismes. Puis aussi méthodiquement et avec beaucoup de persévérance il étudie les polyèdres semi-réguliers du deuxième genre. Ceux-ci deviendront les polyèdres de Catalan.

---

[18] Pour une notice biographique, nous renvoyons à celle (anonyme) publiée dans la biographie de Michaud : [Michaud 1843, p.1].

… et ses polyèdres

De même que pour les polyèdres semi-réguliers du premier genre, il commence par établir une série de théorèmes généraux :

- Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est conjugué d'un polyèdre semi-régulier, du premier genre et vice versa ;
- Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est circonscriptible
- Si deux polyèdres conjugués, P, p, sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à la même sphère O, de façon que les sommets du premier soient les pôles des faces du second, et vice versa, deux arêtes correspondantes quelconques sont réciproques ;
- Si deux polyèdres P, p, semi-réguliers et conjugués, sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même sphère :
    - Les sommets de P, adjacents à un sommet A, sont situés sur une circonférence qui a pour pôle le sommet A ;
    - Les faces de p, adjacentes à une face a, sont tangentes à un cône de révolution dont le sommet est sur le diamètre perpendiculaire à a ;
    - Chacune des faces de p est circonscrite à une circonférence qui a pour centre un sommet de P.

Puis il décrit ces quinze polyèdres, en remarquant que le dodécaèdre rhombique [Illustration III.4, figure 53] est connu des cristallographes et que le triacontaèdre rhombique [Illustration III.4, figure 61] était connu du minéralogiste Jean-Baptiste Romé de Lisle (1736-1790). Catalan donne les caractéristiques métriques des quinze polyèdres rencontrés. Si on met à part le dodécaèdre rhombique et le triacontaèdre rhombique, il est le premier à décrire leurs caractéristiques métriques et à faire une représentation graphique. De plus, huit polyèdres de cette famille sont envisagés, pour la première fois, par Catalan.

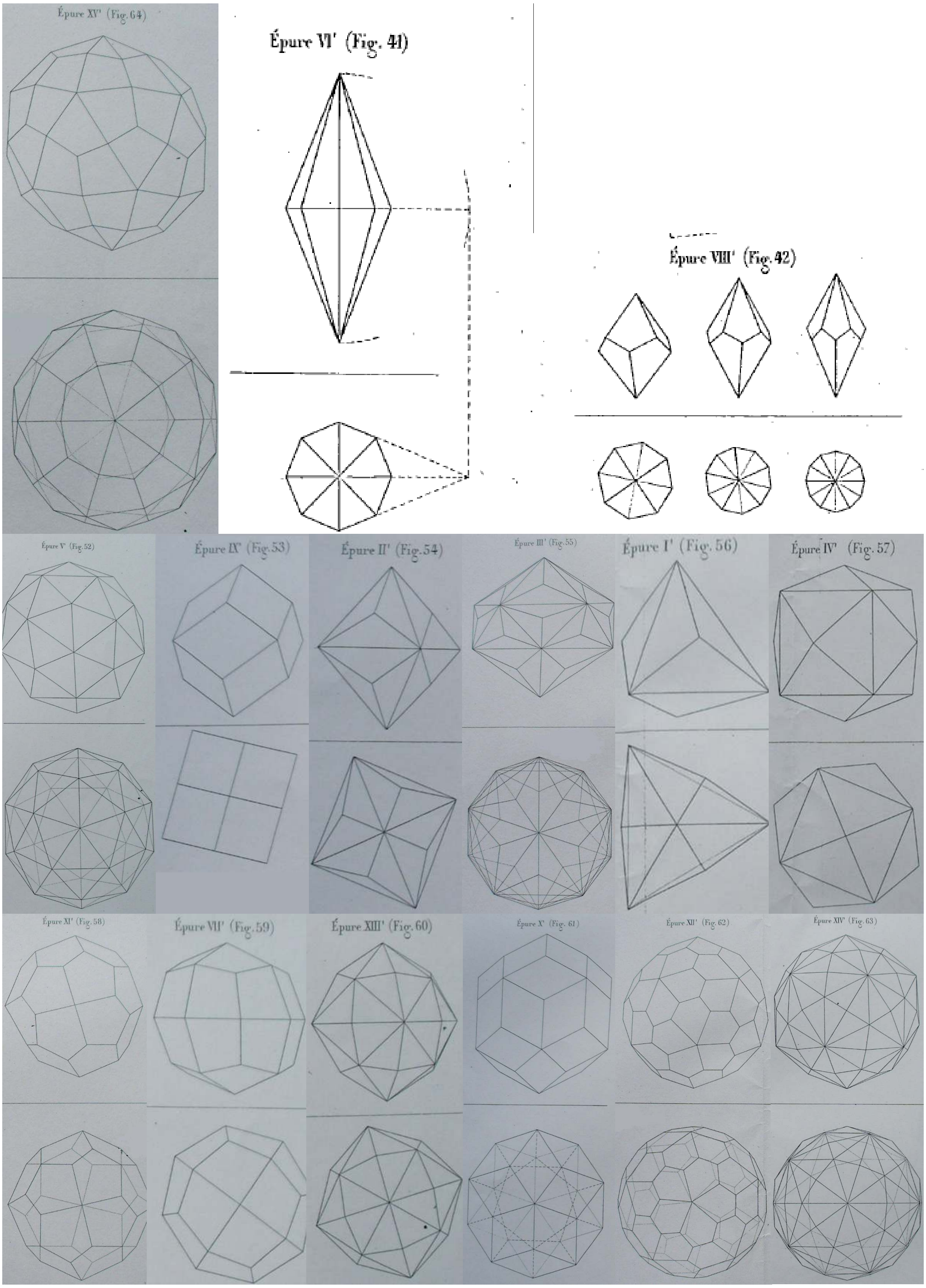

Illustration III.4: Les quinze solides de Catalan

Partant du constat que la liste des polyèdres semi-réguliers n'était pas connue, Catalan a produit un travail remarquable de généralisation en établissant cette liste et en caractérisant tous ses membres. Pour ce faire, il s'est appuyé sur ses talents de géomètre et de théoricien des nombres. Malheureusement, une grande partie de ses découvertes avait déjà été faite par le passé ce qui amoindrit considérablement la portée de son mémoire. Aujourd'hui à l'ère d'internet, les recherches bibliographiques sont faciles. Il n'en n'était rien dans le courant du XIXe siècle, la même mésaventure était arrivée à Poinsot dont deux des quatre polyèdres qu'il avait imaginés étaient connus de Kepler. Cependant, l'approche de Catalan était originale et systématique. Sans parler de ses épures magnifiques dues à l'atelier de gravure « Dulos sc »[19]. Ce n'est que justice qu'une famille de polyèdres porte son nom. Rappelons que les solides de Catalan sont les conjugués des solides archimédiens, c'est-à-dire que leurs faces sont égales, leurs angles polyèdres sont réguliers et ils approximent la sphère, qu'ils circonscrivent, par excès.

■

Bibliographie

ABONNÉ (par un)
[1818-1819] « Géométrie élémentaire. Recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commencement de solution du problème proposé à la page 256 du VIIe volume des *Annales de mathématiques pures et appliquées* », 9 (1818-1819), p. 321-344.

BADOUREAU (Albert)
[1878] « Sur les figures isocèles », *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 87 (1878), p. 823-825.
[1881] « Mémoire sur les figures isocèles », *Journal de l'École polytechnique*, 49 (1881), p. 47-172.

BERTRAND (Joseph)
[1858] « Note sur la théorie des polyèdres réguliers », *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, XLVI (1858), p. 79-82.

BINDER (Henri)
[1845] « Solution du problème 98 », *Nouvelles annales de mathématiques*, I, 4 (1845), p. 656-658.
[1846] « Anzahl der Diagonalen eines Polyeders », *Archiv der Mathematik und Physik*, VIII (1846), p. 221-223.

CATALAN (Eugène)
[1865] « Mémoire sur la théorie des polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, 41 (1865), p. 1-71 et sept planches.
[1861-1862] *Traité élémentaire de géométrie descriptive*, deuxième édition, Paris : Dunod.

CROVISIER (Jacques)
[2007] « Albert Badoureau, mathématicien oublié », *Quadrature*, 66 (2007), p. 15-19.

CROVISIER (Sylvain)
[2007] « Badoureau à la recherche des polyèdres isocèles », *Quadrature*, 66 (2007), p. 20-23.

[19] Au début de la seconde moitié du XIXe siècle, Pierre Dulos supplante les autres graveurs et devient le graveur attitré de la presse mathématique. Il ne se contente pas de faire de la gravure sur cuivre, « à l'ancienne » : il améliore les procédés. Avant lui, les gravures en creux provoquaient, après encrage et transfert sur la page, des tracés qui n'étaient pas toujours nets. Il améliore chimiquement le procédé au début des années soixante en tentant d'avoir un aval académique. Avec Dulos, la gravure atteint sa maturité et entre dans une autre histoire, celle de sa pré-industrialisation : les burins des graveurs sont, avec Dulos, définitivement remplacés par des procédés chimiques qui rendent possible l'insertion des figures à des coûts accessibles et avec une netteté graphique irréprochable. Pour obtenir davantage d'information sur les techniques de graveurs des planches de mathématiques au XIXe siècle, nous renvoyons à [Verdier 2009, p. 137-149].

GERGONNE (Joseph, Diez)
[1824-1825] « Géométrie élémentaire. Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824-1825), p. 157-164.

GÉRINI (Christian)
[2002] *Les « annales » de Gergonne: apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Villeneuve d'Asq : Septentrion, 2002.

JONGMANS (François)
[1986] « Une élection orageuse à l'Institut », *Bulletin de la Société royale des sciences de Liège*, 5-6 (1986), p. 581-603.
[1996] *Eugène Catalan : Géomètre sans patrie. Républicain sans république*, Mons: Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 1996.

LHUILLIER (Simon, Jean, Antoine) & GERGONNE (Joseph, Diez)
[1812-1813] « Géométrie. Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1812-1813), p. 169-189.

LIDONNE (Nicolas, Joseph)
[1808] *Tables de tous les diviseurs des nombres, calculées depuis un jusqu'à cent deux mille, et destinées à faciliter les principales opérations de l'arithmétique*, Paris : Courcier.

MICHAUD (Joseph, François)
[1843] *Biographie universelle, ancienne et moderne, ou suite de l'histoire, par ordre alphabétique, de la vie publique et privée de tous les hommes qui se sont fait remarquer par leurs écrits, leurs actions, leurs talents, leurs vertus ou leurs crimes*, LID-MAQ, Paris : Michaud, 1843.

POINSOT (Louis)
[1810]. « Mémoire sur les polygones et les polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, 4 (1810), p. 16-49.

PROUHET (Pierre, Marie, Eugène)
[1863] « Sur le nombre des diagonales d'un polyèdre », *Nouvelles annales de mathématiques*, II, 2 (1863), p. 77-79.

VERDIER (Norbert)
[2009] *Le* Journal de Liouville *et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824 – 1885)*, thèse de doctorat de l'université Paris-Sud XI, sous la direction d'Hélène Gispert, 2009.