

Titre: Title:	Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions numériques plus complètes
Auteurs: Authors:	Robert P. Chapuis
Date:	2002
Type:	Rapport / Report
Référence: Citation:	Chapuis, Robert P. (2002). Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions numériques plus complètes. Rapport technique. EPM-RT-2002-03.



Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	http://publications.polymtl.ca/2596/
Version:	Version officielle de l'éditeur / Published version Non révisé par les pairs / Unrefereed
Conditions d'utilisation: Terms of Use:	Autre / Other



Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Maison d'édition: Publisher:	École Polytechnique de Montréal
URL officiel: Official URL:	http://publications.polymtl.ca/2596/
Mention légale: Legal notice:	Tous droits réservés / All rights reserved

**Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie,
le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal**

This file has been downloaded from PolyPublie, the
institutional repository of Polytechnique Montréal

<http://publications.polymtl.ca>

EPM-RT-2002-03

Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions numériques plus complètes

Robert P. Chapuis

**Département des génies civil,
géologique et des mines**

Août 2002



**ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

*Le génie
sans frontières*

AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ
DE MONTRÉAL

EPM-RT-02-03

**Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère
incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions
numériques plus complètes**

Robert P. Chapuis

**Département CGM, École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079 Succ. CV, Montréal, QC, Canada, H3C 3A7**

**Tél. : (514) 340 4711, poste 4427 – Fax : (514) 340 4477
E-mail : robert.chapuis@polymtl.ca**

Août 2002

©2002
Robert P. Chapuis
Tous droits réservés

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale du Québec, 2002
Bibliothèque nationale du Canada, 2002

EPM-RT-02-03

Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions numériques plus complètes

par : Robert P. Chapuis

Département des génies civil, géologique et des mines

École Polytechnique de Montréal

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le Bottin sur le site <http://www.polymtl.ca/>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal
Bibliothèque – Service de fourniture de documents
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-4846
Télécopie : (514) 340-4026
Courrier électronique : biblio.sfd@courriel.polymtl.ca

Pour se procurer une copie de ce rapport, s'adresser à la Bibliothèque de l'École Polytechnique.

Prix : 25.00\$ (sujet à changement sans préavis)

Régler par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Toute commande doit être accompagnée d'un paiement sauf en cas d'entente préalable avec des établissements d'enseignement, des sociétés et des organismes canadiens.

Résumé

Ce rapport technique fournit la solution mathématique décrivant l'écoulement en régime permanent de l'eau dans un aquifère idéal à nappe libre, de conductivité hydraulique saturée k , incliné d'un angle α , et rechargé par une infiltration efficace N , quand on néglige l'écoulement non saturé au-dessus de la nappe. La solution est obtenue à partir de l'équation de conservation, équation différentielle établie en utilisant les propriétés géométriques de l'écoulement souterrain, sans faire appel aux hypothèses de Dupuit ni à l'équation de Boussinesq. Si la pente est nulle, cette équation se simplifie en l'équation usuelle connue pour le cas du substratum horizontal. Dans le cas du substratum incliné, la solution de l'équation différentielle peut prendre trois formes différentes selon la valeur de $(k/N)^{1/2} \tan \alpha$. Les prédictions de cette solution analytique ont été comparées aux prédictions numériques d'un code de calcul en éléments finis qui considère l'équation locale de conservation sous sa forme complète ainsi que les fonctions de rétention capillaire et de perméabilité non saturée. Les prédictions théoriques et numériques correspondent à quelques centimètres près dans le cas des matériaux ayant une très faible valeur d'entrée d'air (VAE), qui sont les matériaux les plus proches du matériau idéal de la solution théorique. Dans le cas de matériaux aux propriétés plus réalistes, ayant une VAE de -2 kPa, l'écart entre les solutions numériques et la solution théorique reste faible, décroissant d'environ 20 cm au sommet de la pente à 0 cm au pied de la pente.

Mots clés : Eau souterraine, nappe libre, pente, régime permanent, solution analytique.

Abstract

This technical report provides the closed-form solution describing steady state seepage conditions in an ideal unconfined aquifer having a saturated hydraulic conductivity k , sloping at an angle α , and recharged by a uniform effective infiltration N , when the unsaturated seepage above the water table is neglected. The solution is obtained from the conservation equation within the slope, a differential equation established by using the geometric properties of ground water flow, without calling for the assumptions of Dupuit or to the equation of Boussinesq. When there is no slope, this equation simplifies into the usual known equation for the case of horizontal substratum. In a case of a sloping substratum, the solution of the differential equation can take three different forms depending on the value of $(k/N)^{1/2} \tan \alpha$. The predictions of the closed-form solutions have been compared with the numerical predictions of a numerical code using the finite element method and considering the local conservation equation under its complete form, as well as the functions of capillary retention and unsaturated hydraulic conductivity. The theoretical and numerical predictions are similar to a few centimeters in the case of materials having a very small air-entry value (AEV), that are the closest materials to the ideal material of the theoretical solution. In the case of materials having more realistic properties, with an AEV of -2 kPa, the difference between the numerical solutions and the theoretical solution remains small, decreasing from about 20 cm at the top of the slope to 0 cm at the toe of the slope.

Key words: Groundwater, unconfined aquifer, slope, steady state, closed-form solution.

Solution analytique de l'écoulement en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre, et comparaison de cette solution avec des solutions numériques plus complètes

1. Introduction

Plusieurs solutions théoriques décrivent le régime permanent d'une nappe libre d'eau souterraine dans une strate homogène horizontale. Ce rapport technique présente la solution analytique du cas d'une strate inclinée, solution se ramenant aux solutions connues si la strate est horizontale. La strate d'épaisseur totale b , et de conductivité hydraulique saturée k , est rechargée par une infiltration efficace N (Figs. 1, 2 et 3). Son substratum imperméable peut être horizontal ou incliné d'un angle α . On utilise un axe x horizontal, un axe incliné x' le long du substratum imperméable (Fig. 3), et un axe vertical z . Sur les frontières perpendiculaires à la pente, on peut avoir en haut ($x = x' = 0$) une condition de débit nul ou non ($Q = Q_0$, cas d'un réservoir à charge constante h_0), et une condition de charge constante (rivière, canal, lac) à $x = L$.

Dans le cas du substratum imperméable horizontal, plusieurs solutions sont connues [1-7]. Toutes ont utilisé les hypothèses de Dupuit [1,2], les équipotentielles étant verticales et la valeur de la pente étant censée donner le gradient hydraulique qu'on suppose constant sur toute l'épaisseur saturée. L'écoulement non saturé au-dessus de la nappe est ignoré. On résume brièvement ces solutions avant de présenter la nouvelle solution qui ne fait pas appel aux hypothèses de Dupuit [1,2], ni à l'équation de Boussinesq [3,4].

2. Rappels sur les solutions disponibles

Pour un substratum horizontal ($\alpha = 0$), en supposant l'écoulement unidirectionnel (Fig. 1), la charge hydraulique, h , est définie par

$$(1) \quad h(x, z) = h(x)$$

Le vecteur gradient se réduit alors à une seule composante en x

$$(2) \quad \text{gradient} = - (dh/dx)$$

et la vitesse de Darcy a également une seule composante

$$(3) \quad V_{\text{Darcy}} = -k (dh/dx)$$

Le débit q (par largeur unité), peut varier avec x , donc $q(x)$ est défini par le produit

$$(4) \quad q(x) = \text{section } V_{\text{Darcy}}$$

où la section perpendiculaire à l'écoulement est ($h * \text{largeur unité}$) et donc

$$(5) \quad q(x) = -k h(x) (dh/dx)$$

Dans le cas du substratum horizontal et de la recharge nulle ($\alpha = 0, N = 0$), le débit $q(x)$ est constant et l'intégration de (5) donne:

$$(6) \quad h^2(x) = Ax + B$$

où A et B sont les constantes d'intégration. Si les conditions aux frontières sont $h(x=0) = h_1$ et $h(x=L) = h_2$, (6) devient

$$(7) \quad h^2(x) = - (h_1^2 - h_2^2) (x/L) + h_1^2$$

qui est connue sous le nom d'équation de Dupuit.

Dans le cas de la recharge non nulle ($\alpha = 0, N > 0$ si infiltration ou $N < 0$ si évapotranspiration), le débit $q(x)$ n'est pas constant. L'équation de conservation du débit à l'abscisse x

$$(8) \quad -k h (dh/dx) = Nx$$

est intégrée en

$$(9) \quad k h^2(x) + N x^2 = Ax + B$$

où A et B sont les constantes d'intégration. Si les conditions aux frontières sont $h(x=0) = h_1$ et $h(x=L) = h_2$, (9) devient

$$(10) \quad h^2(x) = h_1^2 - (h_1^2 - h_2^2) (x/L) + (N/k) (L-x) x$$

Le débit $q(x)$ est donné par

$$(11) \quad q(x) = Nx + q_j$$

où q_j est le débit à une abscisse x_j . La hauteur maximum ($N > 0$) ou minimum ($N < 0$) de la surface de la nappe correspond au point où la dérivée de h est nulle, soit en $x = x_m$ telle que

$$(12) \quad x_m = (L/2) - (k (h_1^2 - h_2^2) / 2LN)$$

Dans le cas d'un substratum imperméable incliné de α sur l'axe horizontal des x , et $N = 0$, pour lequel le débit $q(x)$ est constant, Polubarinova-Kochina [6] a proposé d'écrire

$$(13) \quad q(x) = -k (h - x \tan \alpha) (dh/dx)$$

$$(14) \quad (dx/dh) - (k/q) x \tan \alpha + kh/q = 0$$

qui s'intègre en

$$(15) \quad h(x) = x \tan \alpha - (q / k \tan \alpha) + B \exp(-k h \tan \alpha / q)$$

où B est la constante d'intégration. D'autres équations en termes de x' (axe suivant le substratum) ont été proposées par Dupuit [2] et Pavlovsky [8].

Dans le cas d'un substratum imperméable incliné de α sur l'axe horizontal des x , avec $N \neq 0$, le débit $q(x)$ n'est pas constant. Plusieurs auteurs [9,10] ont essayé de résoudre le problème du régime permanent en tentant d'intégrer l'équation de conservation proposée par Boussinesq [4] pour le régime transitoire, avant de faire tendre le temps vers l'infini pour essayer d'obtenir la solution en régime permanent.

3. Solution proposée, cas du substratum imperméable incliné avec recharge ($\alpha > 0$, $N \neq 0$)

La solution proposée, sans faire appel aux hypothèses de Dupuit ou à l'équation de Boussinesq, provient de l'équation de conservation qui est établie spécifiquement en utilisant les propriétés géométriques de l'écoulement (Fig.4). Les axes x et x' prennent leur origine au sommet de la pente. Les hypothèses du problème sont :

1. La strate est homogène,
2. Sa conductivité hydraulique saturée, k , est isotrope,
3. Le substratum imperméable fait un angle constant α avec l'horizontale,
4. La recharge N est constante (volume d'eau par unité de surface horizontale par unité de temps),
5. Seul le régime permanent est considéré,
6. L'écoulement non saturé au-dessus de la nappe est négligé,
7. Des hypothèses précédentes, il résulte que les équipotentielles sont des droites perpendiculaires au substratum imperméable et donc $h(x, z) = h(x')$,
8. Il en résulte aussi que la vitesse de Darcy est constante le long d'une équipotentielle.

L'équipotentielle BC est perpendiculaire au substratum imperméable et le point C appartient à la surface de la nappe où la pression d'eau interstitielle, u_w , est égale à la pression atmosphérique, p_{atm} , i.e. $u_w = p_{atm} = 0$ par définition. L'équation de conservation, pour une longueur unité perpendiculaire à la pente, peut être obtenue de la façon suivante. En supposant que l'eau infiltrée sur le petit segment A'C' ne passe entre B et C, mais entre C et C',

$$(16) \quad Q_{in} = N x_{A'} = N x_B = N x'_B \cos \alpha$$

$$(17) \quad Q_{out} = \text{section} * v_{Darcy} = - (BC) k (dh/dx')_B = -k h'_B \cos \alpha (dh/dx')_B$$

où h'_B est définie par BA (Fig. 4) et représente approximativement (la pente de la nappe n'étant pas exactement égale à α) l'épaisseur saturée mesurée verticalement au-dessus de B (Fig. 4). On peut écrire

$$(18) \quad h_B = z_B + u_{wB} / \gamma_w = z_C = z_B + BD = z_B + h'_B \cos^2 \alpha$$

$$(19) \quad (dh/dx')_B = (dz/dx')_B + \cos^2 \alpha (dh'/dx')_B$$

$$(20) \quad z_B = EB = BF \sin \alpha = (\text{constante} - x'_B) \sin \alpha$$

$$(21) \quad (dz/dx')_B = - \sin \alpha$$

$$(22) \quad (dh/dx')_B = - \sin \alpha + \cos^2 \alpha (dh'/dx')_B$$

En régime permanent, le débit entrant est égal au débit sortant, $Q_{in} = Q_{out}$ (Fig. 4) et donc

$$(23) \quad N x'_B \cos \alpha + Q_0 = -k h'_B \cos \alpha [- \sin \alpha + \cos^2 \alpha (dh'/dx')_B]$$

où Q_0 est le débit entrant dans la pente à $x = 0$, qui peut être dû, par exemple, à un réservoir à charge constante. En réarrangeant (23) on obtient

$$(24) \quad k \cos^2 \alpha h'_B (dh'/dx')_B - k h'_B \sin \alpha + N x'_B + (Q_0 / \cos \alpha) = 0$$

qui est l'équation différentielle à résoudre. On notera que lorsque $Q_0 = 0$ à $x = 0$, $x' = 0$ (cas d'une ligne de partage des eaux au sommet de la pente), alors $h'(x=0) = 0$ selon (24) ce qui est physiquement correct. Notons aussi que si $\alpha = 0$, (24) se réduit à (8), ce qui ramène aux solutions connues pour un substratum horizontal. Pour résoudre (24), posons

$$(25) \quad Y = h'(x') \quad \text{et}$$

$$(26) \quad N x' + (Q_0 / \cos \alpha) = X (N / k \cos^2 \alpha)^{1/2}$$

$$(27) \quad X = x' (N / k \cos^2 \alpha)^{1/2} + [Q_0 / (Nk)]^{1/2}$$

Alors (24) devient

$$(28) \quad (dh'/dx')_B = (dY/dX) (dX/dx') = Y' (N / k \cos^2 \alpha)^{1/2}$$

$$(29) \quad k \cos^2 \alpha Y Y' (N / k \cos^2 \alpha)^{1/2} - k Y \sin \alpha + N X (k \cos^2 \alpha / N)^{1/2} = 0$$

$$(30) \quad (N k \cos^2 \alpha)^{1/2} Y Y' - k Y \sin \alpha + X (N k \cos^2 \alpha)^{1/2} = 0$$

$$(31) \quad Y Y' + a Y + X = 0 \quad \text{avec}$$

$$(32) \quad a = - (k/N)^{1/2} \tan \alpha$$

La solution de (31) peut prendre trois formes selon que la valeur absolue de a est inférieure, égale ou supérieure à 2. D'un point de vue pratique, la solution du régime permanent correspond aux conditions moyennes annuelles de recharge, avec N de l'ordre de 10^{-8} m/s et k de l'ordre de 10^{-4} m/s, et donc $(k/N)^{1/2}$ est de l'ordre de 100 alors que $\tan \alpha$ est généralement supérieure à 0.02. Il en résulte que le cas le plus fréquent serait $|a| > 2$ pour lequel la solution de (31) est

$$(33) \quad |Y - \lambda X|^\lambda = C |Y - \mu X|^\mu \quad \text{où}$$

$$(34) \quad \lambda, \mu = -0.5 a \pm 0.5 (a^2 - 4)^{1/2}$$

et C est la constante d'intégration.

Si $|a| = 2$, la solution de (31) est

$$(35) \quad (X \pm Y) \exp [X / (X \pm Y)] = C$$

où C est la constante d'intégration.

Si $|a| < 2$, la solution de (31) est

$$(36) \quad \ln |Y^2 + aXY + X^2| - [2a / (4 - a^2)^{1/2}] \arctan [(2Y + aX) / X(4 - a^2)^{1/2}] = C$$

où C est la constante d'intégration.

On notera que le problème où $Q_0 > 0$ (débit non nul entrant dans la pente en $x = 0$) – qui pourrait être traité aussi comme un problème où $h = h_0$ en $x = 0$ – est équivalent au problème d'une ligne de partage des eaux au sommet d'une pente qui serait prolongée à l'amont (zone des $x' < 0$) d'une longueur $\Delta x'$

$$(37) \quad \Delta x' = Q_0 / N \cos \alpha$$

Dans les chapitres suivants, les prédictions de cette solution analytique sont comparées aux prédictions numériques d'un code de calcul en éléments finis qui traite au complet l'équation locale de conservation sans aucune approximation sur les écoulements non saturés.

4. Comparaisons des solutions théoriques avec des solutions numériques

Les valeurs et les graphiques représentant les solutions analytiques implicites (33-36) peuvent être obtenus à l'aide d'un code mathématique ou d'un chiffrier (e.g. Excel) ayant une fonction "solver". Ces solutions analytiques ont été comparées aux solutions numériques fournies par un code numérique qui résout les équations au complet, que l'écoulement souterrain soit saturé ou non saturé, et qui n'a donc pas besoin des simplifications requises pour obtenir une solution analytique. Les résultats relatifs à deux cas d'aquifère incliné, l'un avec $|a| < 2$ et l'autre avec $|a| > 2$ sont présentés dans ce rapport technique..

Code numérique – méthode des éléments finis

Un code utilisant la méthode des éléments finis a été utilisé pour étudier des problèmes d'écoulement

souterrain en régime permanent dans un aquifère incliné à nappe libre. Les capacités de ce code avaient été vérifiées, ayant servi à illustrer une méthode d'évaluation de la performance des codes d'écoulement souterrain [11]. Ce code numérique considère les courbes caractéristiques des matériaux, c'est-à-dire les fonctions $k(u_w)$ et $\theta(u_w)$ où k est la conductivité hydraulique, u_w est la pression d'eau interstitielle, et θ est la teneur en eau volumique du matériau ($\theta = nS_r$, où n est la porosité totale et S_r le degré de saturation en eau). Les équations différentielles complètes (Darcy et conservation) sont résolues numériquement avec u_w comme variable. Dans les problèmes considérés, il faut mailler finement (20 cm maximum dans la direction verticale, z) la zone non saturée (zone des grandes variations de k et de θ) afin de faciliter la convergence qui peut être vérifiée de plusieurs façons [12].

Fonctions $k(u_w)$ et $\theta(u_w)$

Pour les deux cas présentés dans ce rapport technique, plusieurs ensembles de courbes caractéristiques ont été considérés. En premier lieu, deux sables ont été considérés comme matériau aquifère. Leurs granulométries sont fournies par la Fig. 5. Les courbes de rétention capillaire, $\theta(u_w)$, correspondant à ces deux granulométries, obtenues par la méthode de Arya et Paris [13], sont montrées sur la Fig. 6. Ensuite, les courbes correspondantes de conductivité hydraulique non saturée, $k(u_w)$, obtenues par la méthode de Green and Corey [14], basée sur le modèle statistique de Childs et Collis-George [15], sont montrées sur la Fig. 7. Ces méthodes et d'autres sont incluses dans le code numérique [16]. Les courbes résultantes pour $k(u_w)$ et $\theta(u_w)$ correspondent à des valeurs d'entrée d'air (VAE) presque nulles et donc la frange capillaire a une épaisseur négligeable avec ces courbes caractéristiques. Afin d'étudier numériquement l'influence de la frange capillaire, un 3^e sable ayant une VAE de -2 kPa a été considéré (Figs. 6 et 7) : physiquement, ce sable aurait une frange capillaire presque saturée de 20 cm au-dessus d'une nappe libre immobile.

Cas 1 avec $|a| > 2$, solution (33)

Le premier cas d'aquifère à nappe libre (Fig. 8) avec une valeur $k = k_{sat} = 5 \times 10^{-5}$ m/s, a une longueur $L = 500$ m mesurée horizontalement, une pente $\tan \alpha = 4\%$, une infiltration efficace $N = 1.5868 \times 10^{-8}$ m/s (Note : numériquement on doit appliquer sur la surface du terrain une infiltration $N / \cos \alpha = 0.5$ m/y). Les paramètres mathématiques dans (33) sont $a = -2.2454$, $\lambda = 1.6330$ et $\mu = 0.6124$. Dans l'analyse numérique des écoulements saturés et non saturés, deux ensembles de courbes caractéristiques ont été considérés, soit le sable GS1 et le sable (AEV = -2 kPa).

Le code numérique fournit des résultats détaillés sous forme de graphiques et de tableaux. Quelques résultats importants sont présentés et commentés ici. Partant à la surface du terrain, les lignes d'écoulement sont à peu près verticales et les équipotentielles sont à peu près horizontales (Fig. 8). Avant d'atteindre la surface de la nappe, les lignes d'écoulement changent brusquement de direction. Sous la surface de la nappe, les lignes d'écoulement sont à peu près parallèles au substratum imperméable alors que les équipotentielles lui sont perpendiculaires (Fig. 8). L'évaluation visuelle des angles sur la Fig. 8 est très approximative parce que les échelles, horizontale et verticale, sont très différentes. Les valeurs de $k(u)$ pour le cas de la Fig. 8 sont présentés sur la Fig. 9 avec différents symboles pour la zone au-dessus de la surface de la nappe (lignes d'écoulement à peu près verticales) et pour la zone au-dessous de la surface de la nappe (lignes d'écoulement parallèles au substratum imperméable). Selon la Fig. 9, le changement de direction des lignes d'écoulement et des équipotentielles se produit quand k est voisine de 5×10^{-7} m/s et donc que le rapport k_{sat} / k est voisin de 100, quelles que soient les courbes caractéristiques utilisées. Par conséquent, le changement de direction n'est qu'une conséquence de la loi de réfraction.

La solution analytique (33), valable pour ce premier aquifère à nappe libre, a été comparée aux solutions plus complètes du code numérique (ici "plus complètes" signifie que les conditions d'écoulement saturé et non saturé sont établies par le code). Quand la VAE est voisine de 0 (courbes GS1), la comparaison est presque parfaite (Fig. 10). Quand la VAE = -2 kPa, la différence entre les deux solutions, analytique et numérique, est voisine de 20 cm dans le haut de la pente, et elle décroît progressivement pour s'annuler sur la frontière à charge constante du bas, à $x = L$.

Cas où $|a| < 2$, solution (36)

Le second cas d'aquifère à nappe libre (Fig. 11) avec $k = k_{\text{sat}} = 3 \times 10^{-4}$ m/s, a une longueur $L = 1000$ m mesurée horizontalement, une pente $\tan \alpha = 1\%$, une infiltration efficace $N = 1.9027 \times 10^{-8}$ m/s (Note : numériquement on applique sur la surface du terrain une valeur $N / \cos \alpha = 0.6$ m/y). Le paramètre dans (36) est $a = -1.2557$. Dans l'analyse numérique des écoulements saturés et non saturés, deux ensembles de courbes caractéristiques ont été considérés, soit le sable GS2 et le sable (AEV = -2 kPa).

Le code numérique fournit des résultats détaillés sous forme de graphiques et de tableaux. Quelques résultats importants sont présentés et commentés ici. Les lignes d'écoulement et les équipotentielles (Fig. 11) présentent les mêmes caractéristiques que dans le cas précédent, le changement de direction au-dessus de la surface de la nappe étant simplement le résultat de la loi de réfraction.

La solution analytique (36), valable pour ce 2^e aquifère à nappe libre, a été comparée aux solutions plus complètes du code numérique. Quand la VAE est voisine de 0 (courbes GS2), la comparaison est presque parfaite (Fig. 12). Quand la VAE = -2 kPa, la différence entre les deux solutions, analytique et numérique, est voisine de 20 cm dans le haut de la pente, et elle décroît progressivement pour s'annuler sur la frontière à charge constante du bas, à $x = L$. Cette différence entre les deux solutions apparaît de façon plus détaillée dans la Fig. 13.

5. Discussion et conclusion

Ce rapport technique fournit la solution mathématique décrivant l'écoulement en régime permanent de l'eau dans un aquifère idéal à nappe libre, de conductivité hydraulique saturée k , incliné d'un angle α , et rechargé par une infiltration efficace N , quand on néglige l'écoulement non saturé au-dessus de la nappe. Dans un premier temps, on établit l'équation différentielle de conservation sans faire appel aux hypothèses de Dupuit ni à l'équation de Boussinesq. Si la pente est nulle, cette équation se simplifie en l'équation usuelle dont les solutions sont connues. Dans le cas du substratum incliné, la solution de la nouvelle équation différentielle peut prendre trois formes différentes selon la valeur de $(k/N)^{1/2} \tan \alpha$.

Dans un second temps, les prédictions de cette solution analytique ont été comparées aux prédictions numériques d'un code de calcul en éléments finis qui considère l'équation locale de conservation sous sa forme complète ainsi que les fonctions de rétention capillaire et de perméabilité non saturée. Les prédictions théoriques et numériques correspondent à quelques centimètres près dans le cas des matériaux ayant une très faible valeur d'entrée d'air (VAE), qui sont les matériaux les plus proches du matériau idéal de la solution théorique. Dans le cas de matériaux aux propriétés plus réalistes, ayant une VAE de -2 kPa, l'écart entre les solutions numériques et la solution théorique reste faible, décroissant d'environ 20 cm au sommet de la pente à 0 cm au pied de la pente.

Sur le plan pratique, l'équation de conservation (24) permet d'estimer la conductivité hydraulique saturée, k , de l'aquifère dans le cas où les eaux se partagent au sommet de la pente. Pour cela, on considère que N est l'infiltration efficace déterminée sur une base annuelle, et que la position mesurée pour la nappe à un instant donné est voisine de la position moyenne correspondant au régime permanent. On mesure au même moment deux valeurs de la charge hydraulique, $h_1(x_1)$ et $h_2(x_2)$, dans deux piézomètres distants de $(x_2 - x_1) \geq 0.1$ L pour avoir une certaine précision. La valeur de la pente est déterminée par les levés d'arpentage et les coupes des sondages. La valeur k tirée de (24) est alors considérée comme la valeur moyenne à grande échelle. Cette technique d'évaluation de la valeur k à grande échelle est similaire aux techniques de bilan régional [17] applicables aux aquifères sur substratum horizontal. Les résultats de la Figure 14 montrent qu'on peut obtenir une bonne évaluation de k en utilisant (24) à condition que les charges soient mesurées dans la partie basse (moitié inférieure) de l'aquifère. L'évaluation de la précision de cette méthode d'estimation de k demandera cependant des études plus poussées en régime transitoire.

Remerciements. L'auteur remercie le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada qui a subventionné ces études.

Références

- [1] Dupuit, J., 1857. Mémoire sur le mouvement des eaux dans les terrains perméables. Mémoire déposé en 1857, rapporté aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris, tome LII, séance du 3 juin 1861.
- [2] Dupuit, J., 1863. *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*. 2e édition, Dunod, chapitre 7, pp. 229-293.
- [3] Boussinesq, J., 1877. Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoire de l'Acad. Sci. Inst. Fra., **23**(1): 252-260
- [4] Boussinesq, J., 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Jnl. Math. Pures Appliq. **11**: 363-394.
- [5] Bear, J., 1972. *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier, New York.
- [6] Polubarinova-Kochina, P.Y., 1962. *Theory of ground water movement*. Traduit du Russe par R.J.M. DeWiest, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [7] Schoeller, H., 1962. *Les eaux souterraines: hydrologie dynamique et chimique, exploitation et évaluation des ressources*. Masson, Paris.
- [8] Pavlovsky, N.N., 1956. *Motion of ground water*. Collected Works, Academy of Sciences, Moscow-Leningrad.
- [9] Brutsaert, W., 1994. The unit response of groundwater outflow from a hillslope. Water Resources Research, **30**: 2759-2763.
- [10] Verhoest, N.F.C. and Troch, P.A., 2000. Some analytical solutions of the linearized Boussinesq equation with recharge for a sloping aquifer. Water Resources Research, **36**: 793-800.
- [11] Chapuis, R.P., Chenaf, D., Bussière, B., Aubertin, M. and Crespo, R. 2001. A user's approach to assess numerical codes for saturated and unsaturated seepage conditions. Canadian Geotechnical Journal, **38**(5): 1113-1126.
- [12] Chenaf, D., et Chapuis R.P. 1999. Analyse numérique de la hauteur de suintement dans un puits pompant un aquifère à nappe libre. Comptes rendus, 52^e Conférence canadienne de géotechnique, Regina, pp.245-251.
- [13] Arya, L.M. and Paris, J.F. 1981. A physicoempirical model predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. Soil Science Society of America Journal, **45**: 1023-1030.
- [14] Green, R.E., and Corey, J.C. 1971. Calculation of hydraulic conductivity: a further evaluation of some predictive models. Soil Science Society of America Proceedings, **35**:3-8
- [15] Childs, E.C. and Collis-George, N. 1950. The permeability of porous materials. Proceedings of the Royal Society, **A201**: 392-405.
- [16] Geo-Slope, 2001. *Seep/W for finite element seepage analysis. User's Guide*. Geo-Slope International, Calgary, Alberta
- [17] Chapuis, R.P. 1995. Controlling the quality of ground water parameters: some examples. Canadian Geotechnical Journal, **32**(1): 172-177.

Figure 1 : Aquifère à nappe libre sur un substratum horizontal imperméable, sans recharge ($\alpha = 0$, $N = 0$).

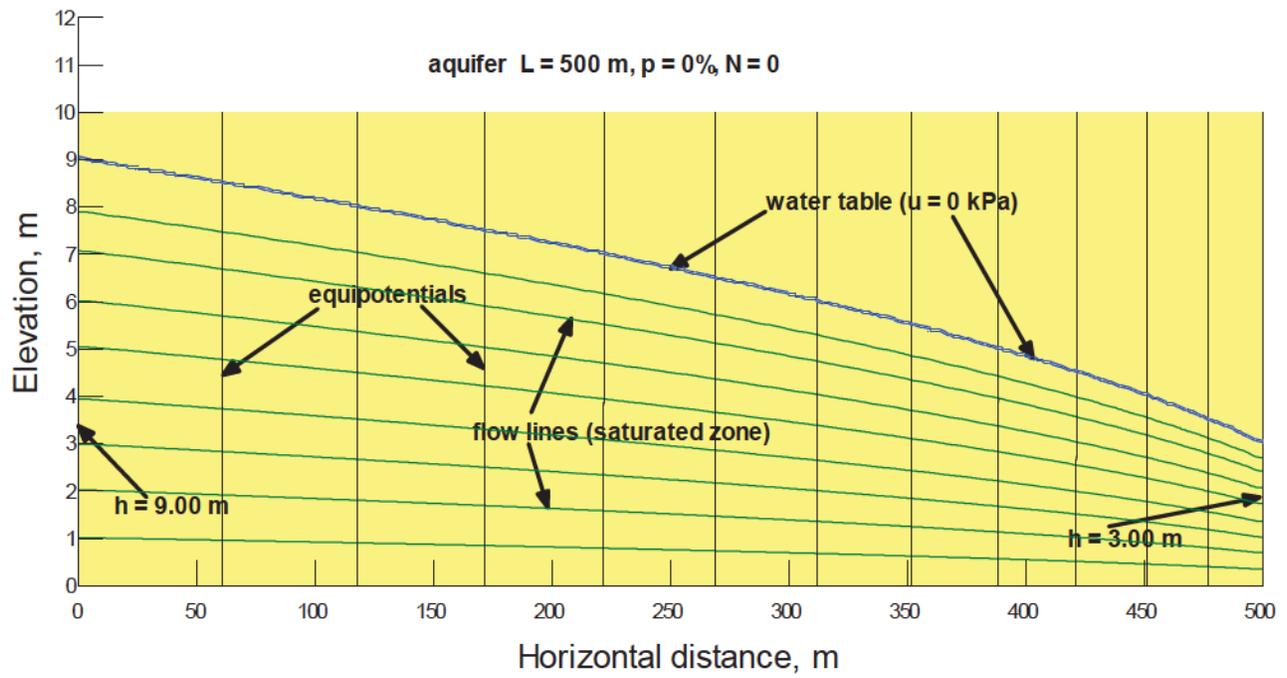


Figure 2 : Aquifère à nappe libre sur un substratum horizontal imperméable, avec recharge ($\alpha = 0$, $N > 0$).

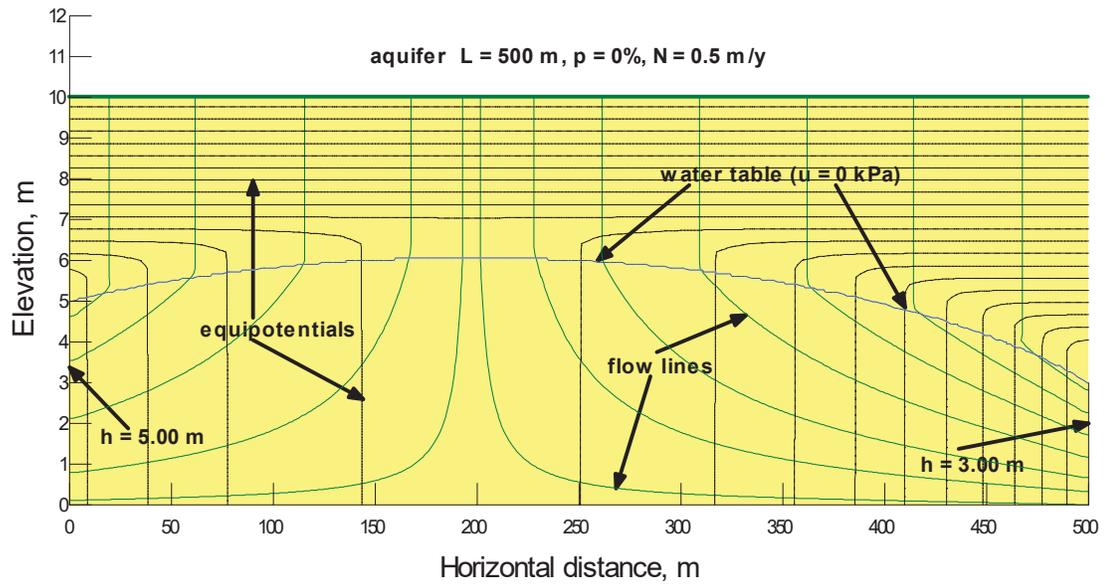


Figure 3 : Aquifère à nappe libre sur un substratum imperméable incliné avec recharge ($\alpha > 0$, $N > 0$).

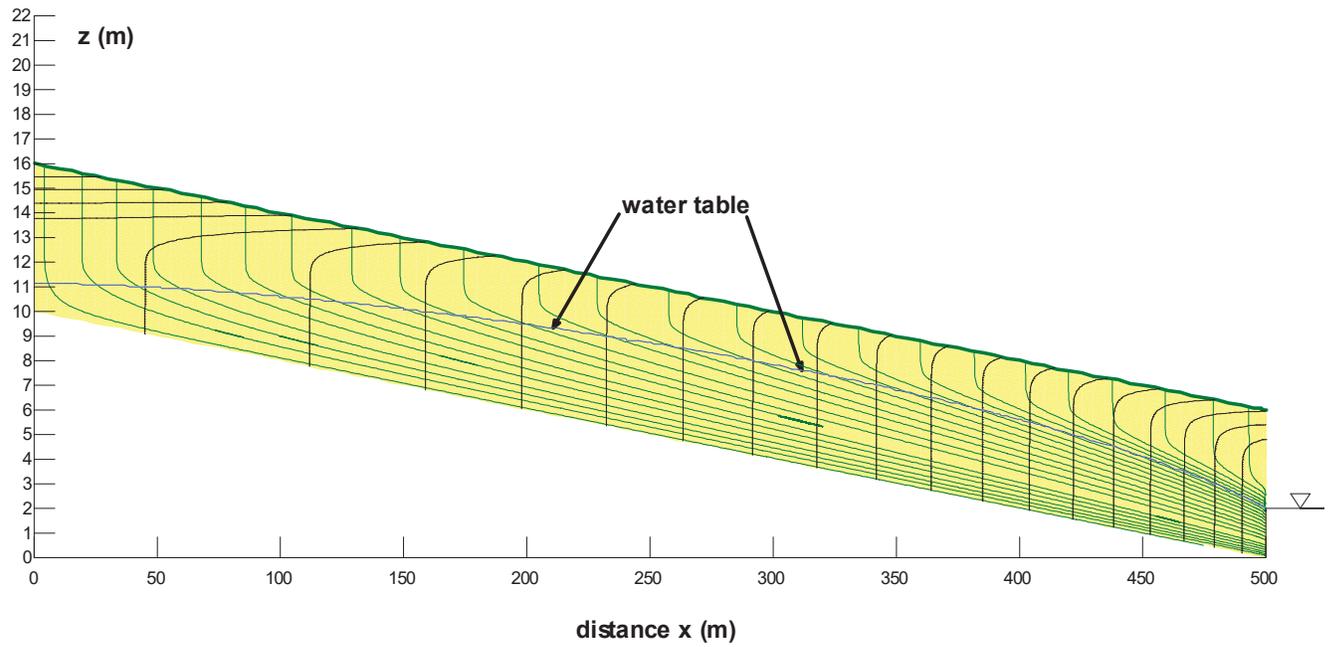


Figure 4 : Détails de la Fig. 3 et paramètres géométriques du problème. Attention aux distorsions d'échelle, la longueur L est très grande par rapport à l'épaisseur b et l'angle α est petit.

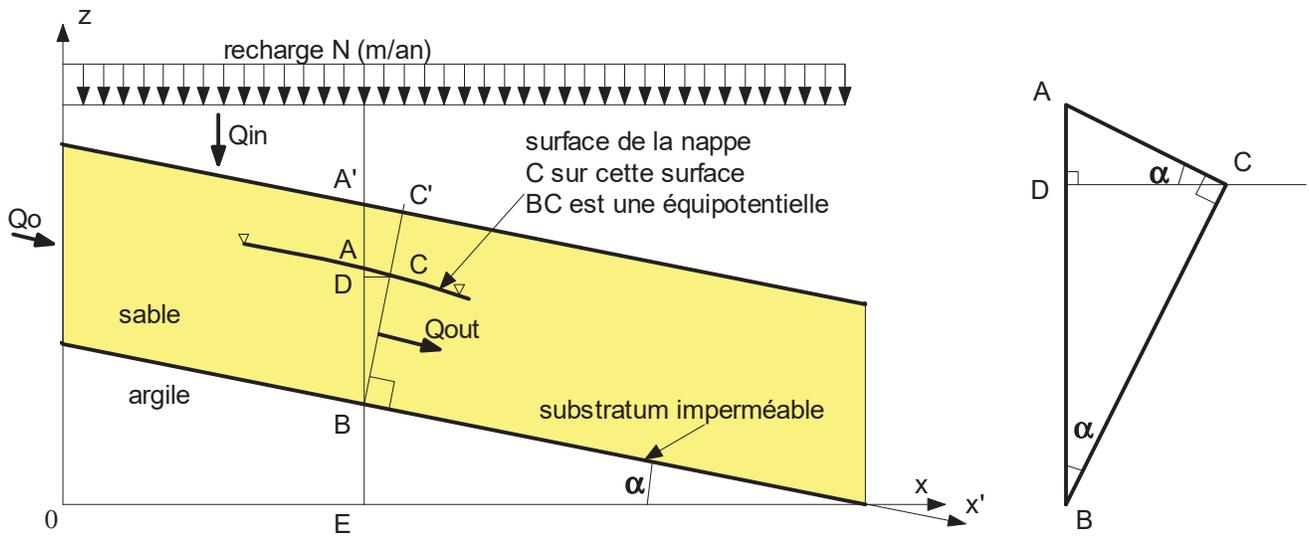


Figure 5 : Granulométries des deux sables considérés.

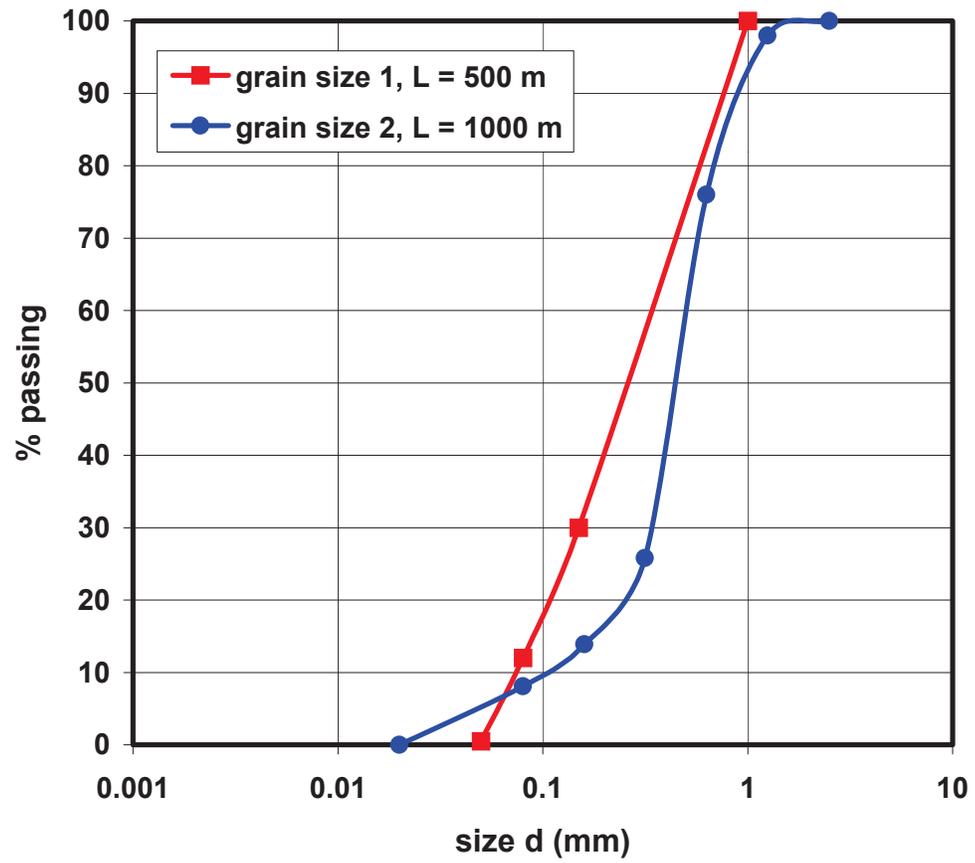


Figure 6 : Fonctions $\theta(u_w)$ utilisées dans les analyses numériques. En fait, la fonction $\theta(u_w)$ n'est pas requise dans les analyses numériques qui sont faites uniquement en régime permanent.

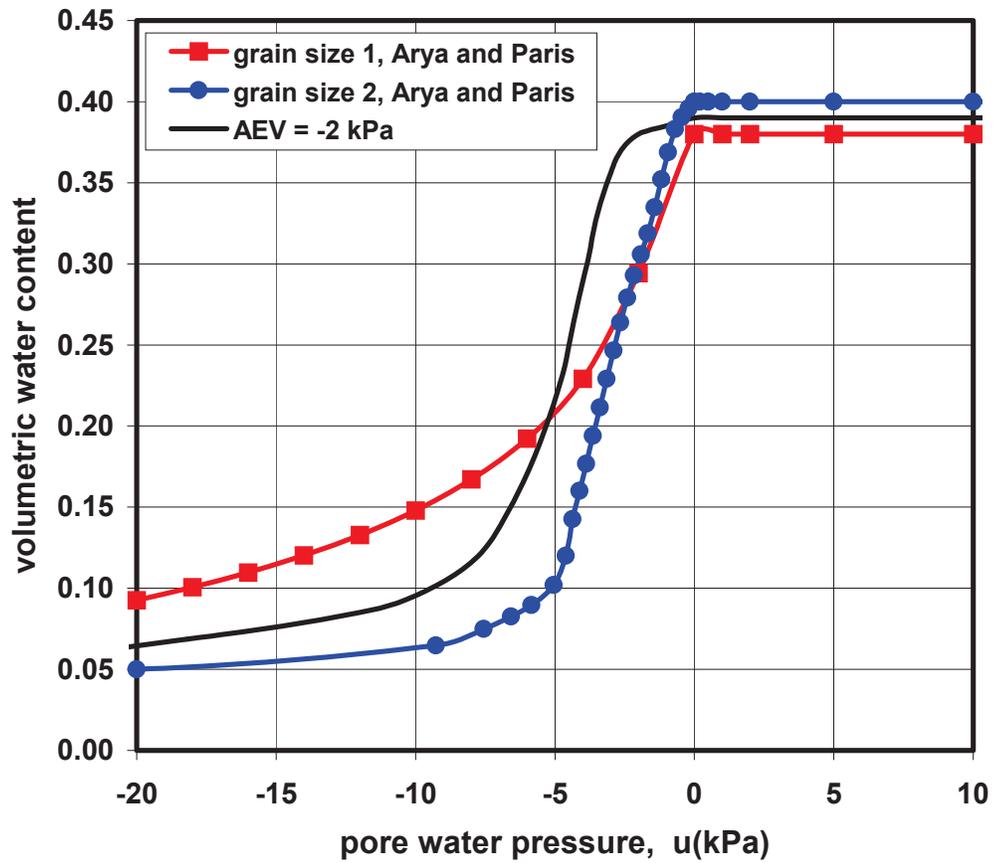
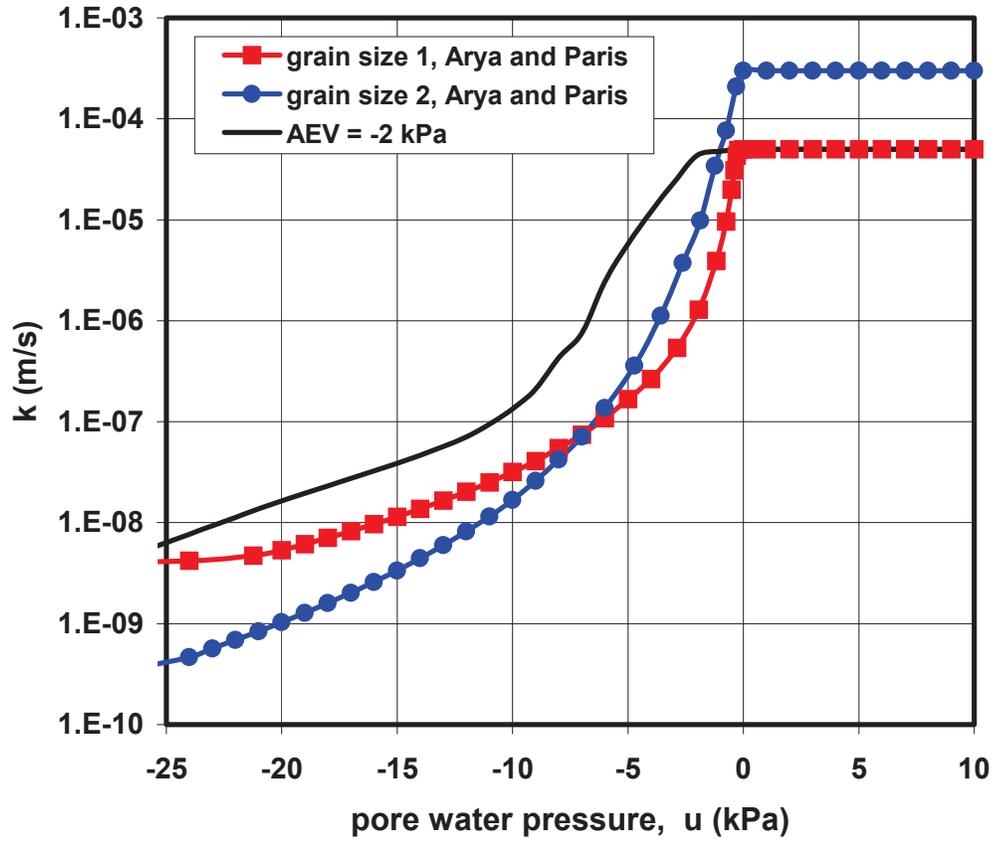


Figure 7 : Fonctions $k(u_w)$ utilisées dans les analyses numériques.

**Figure 8 : Premier exemple numérique, pente $\tan \alpha = 0.04$, longueur $L = 500$ m, $h(L) = 4$ m,
 $N / \cos \alpha = 0.5$ m/y, $k = 5 \times 10^{-5}$ m/s.**

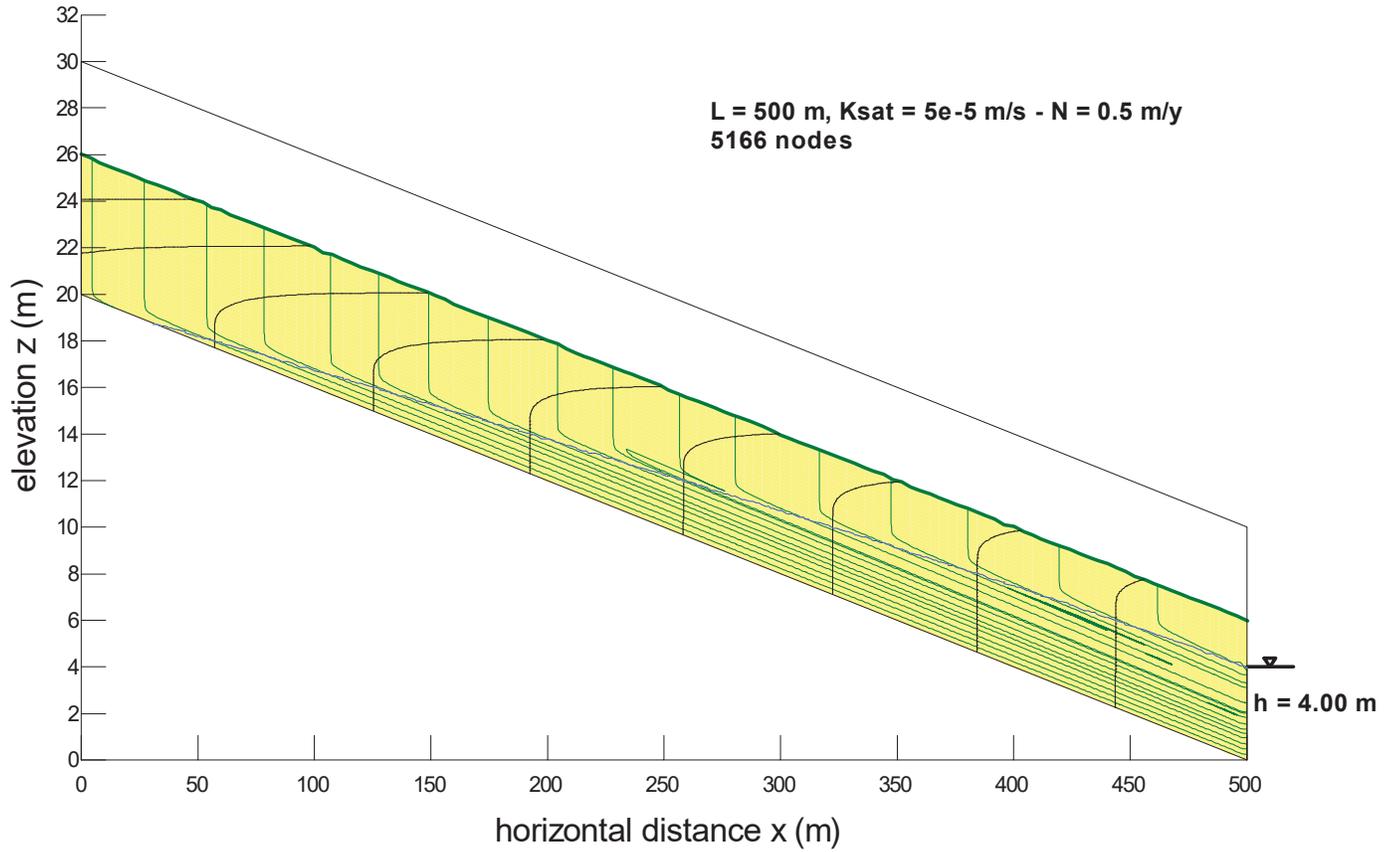


Figure 9 : Premier exemple numérique : étude du changement de direction des lignes d'écoulement et des équipotentielles au-dessus de la surface de la nappe.

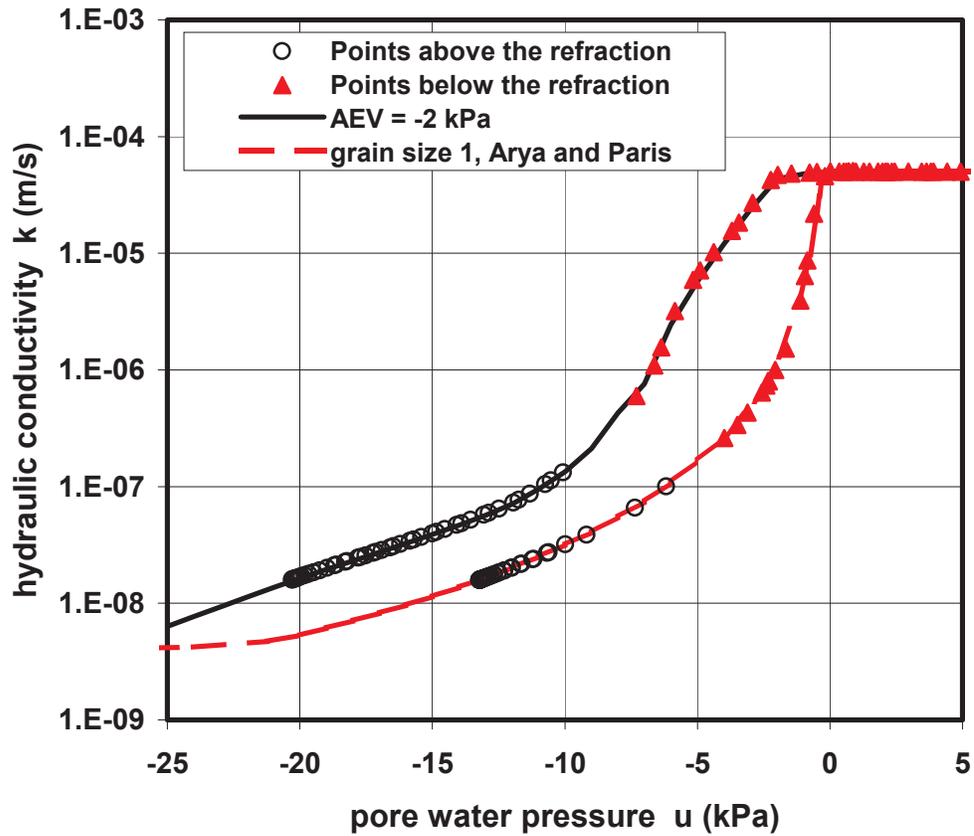


Figure 10 : Comparaison des deux solutions, analytique et numérique, pour le cas de la Fig. 8.

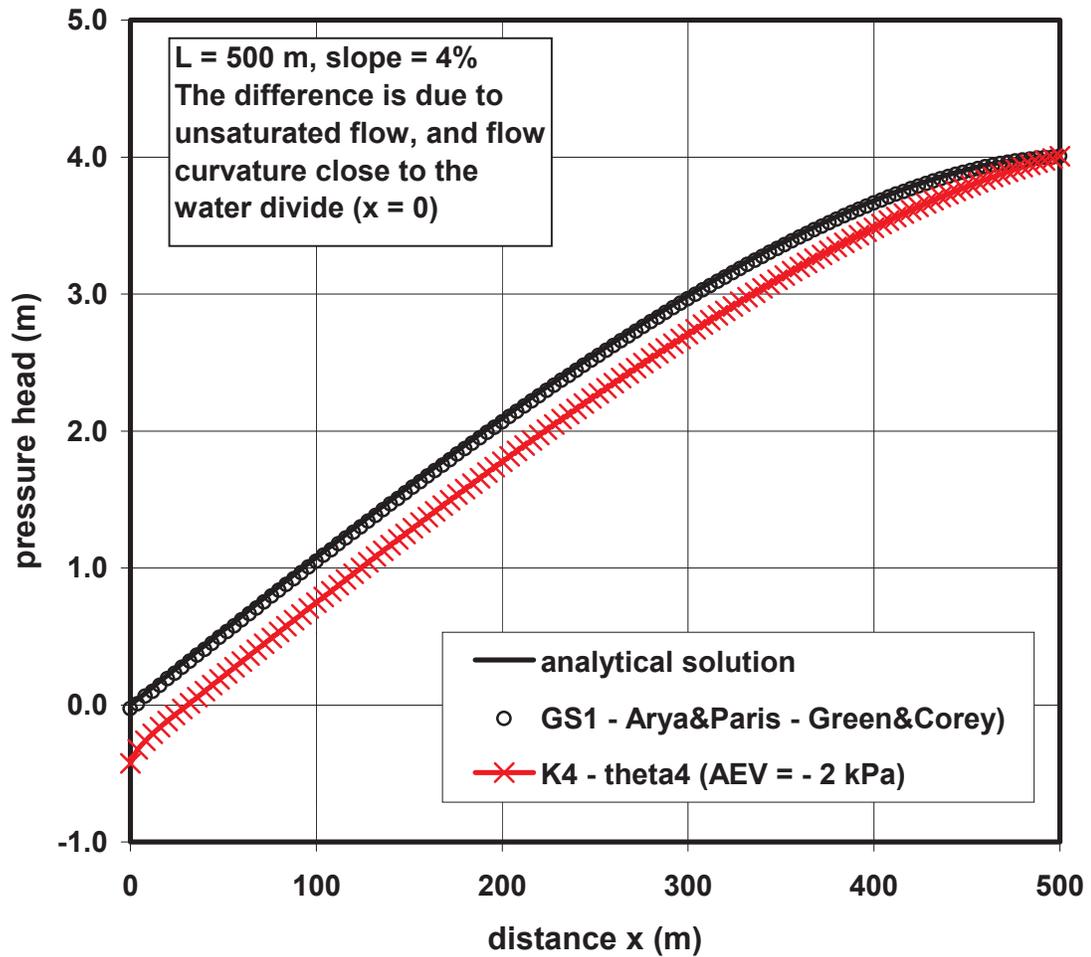


Figure 11 : Second exemple numérique, pente $\alpha = 0.01$, longueur $L = 1000$ m, $k = 3 \times 10^{-4}$ m/s, $N / \cos \alpha = 0.6$ m/an sur la pente du terrain.

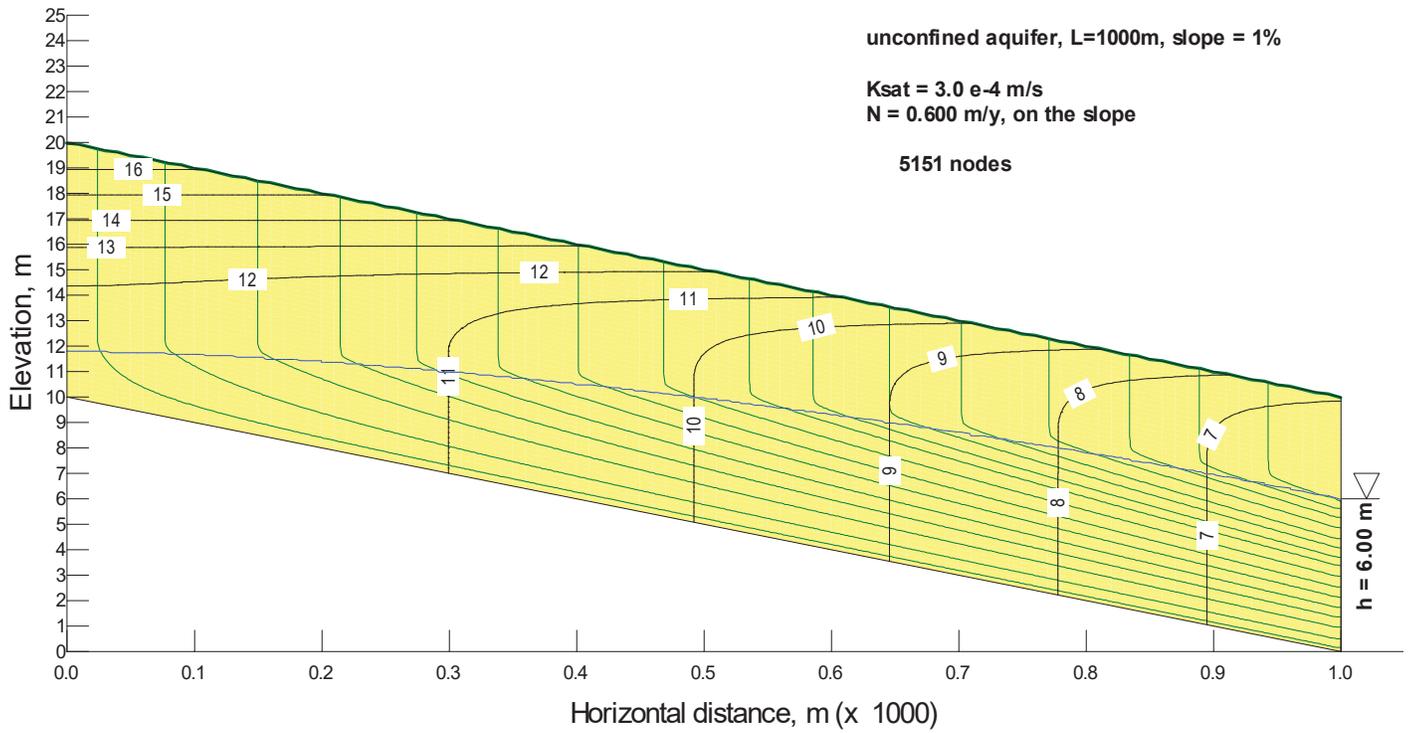


Figure 12: Comparaison des deux solutions, analytique et numérique, pour le cas de la Fig. 11.

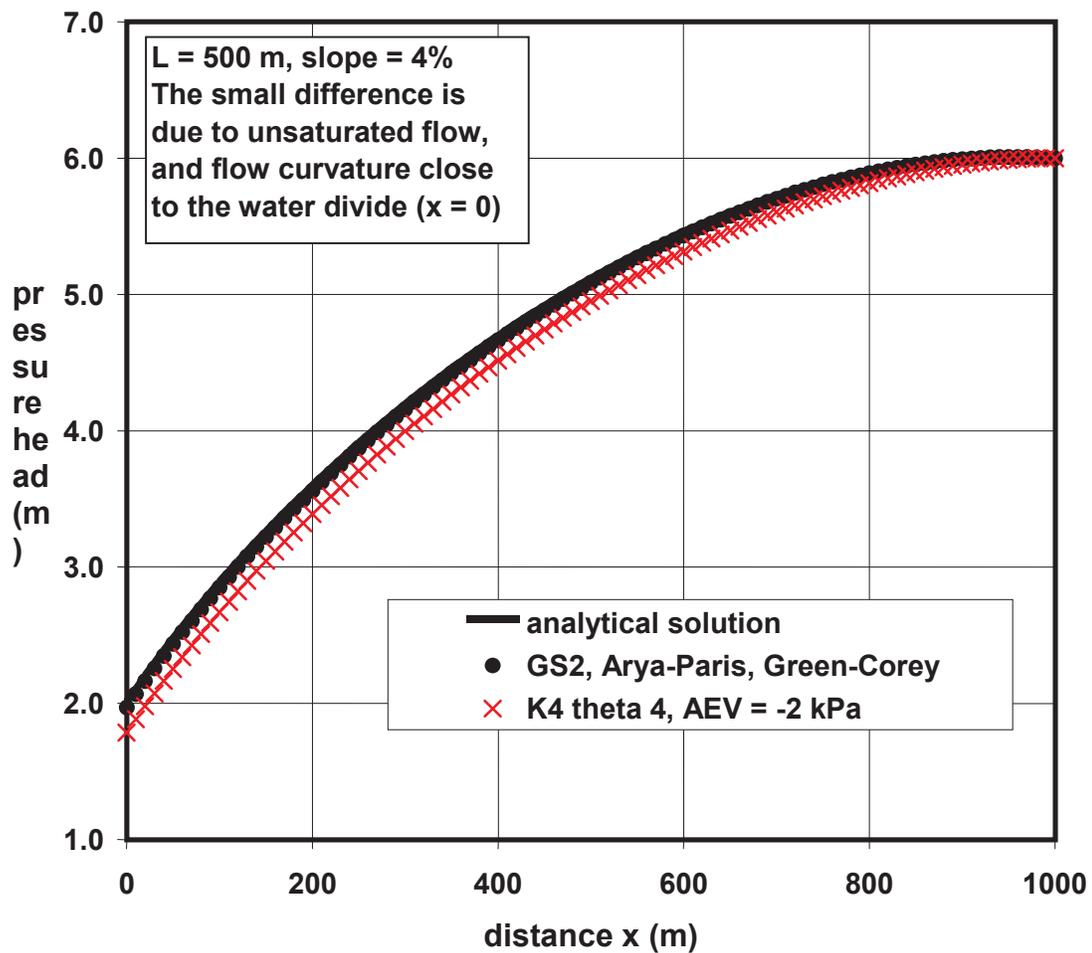


Figure 13 : Différence entre les deux solutions, analytique et numérique, de la Fig. 12.

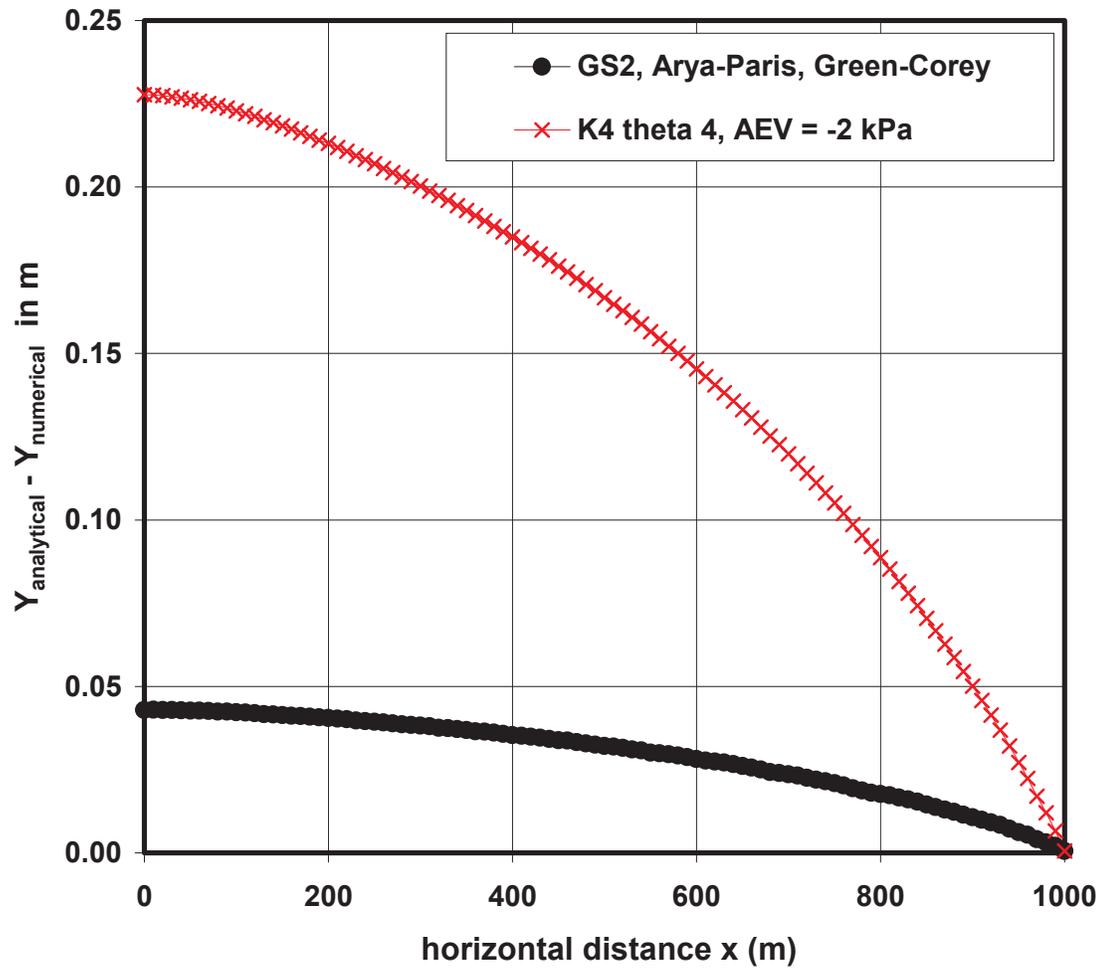
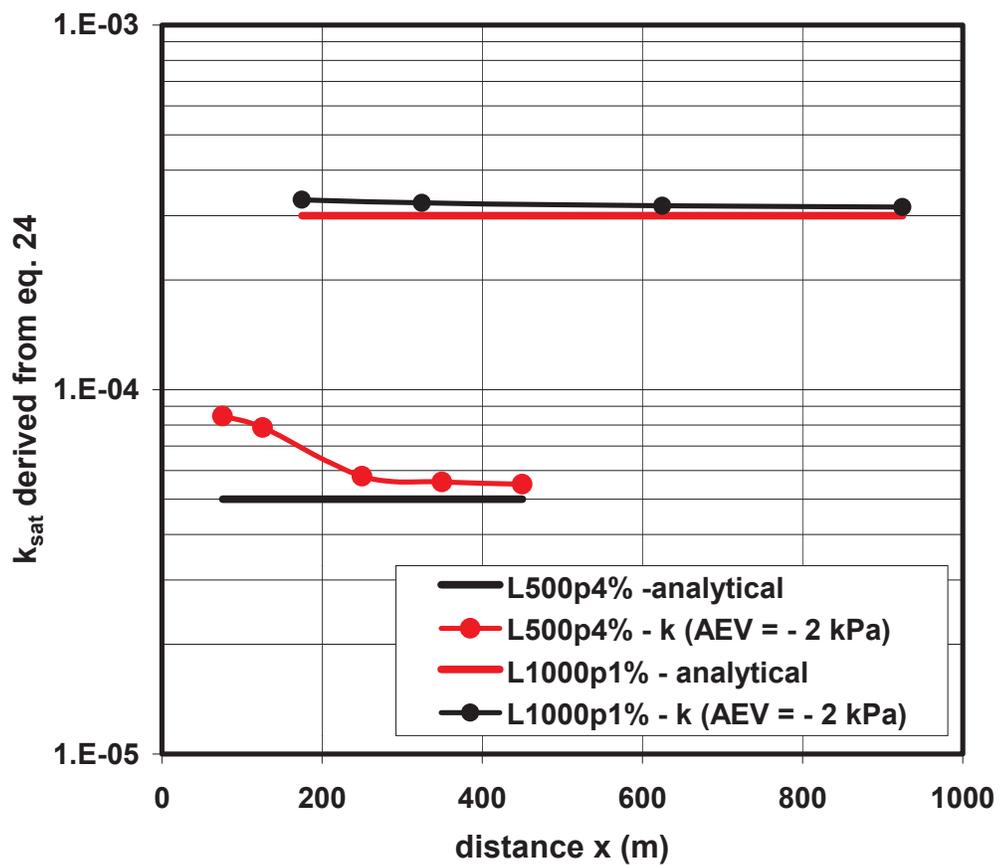


Figure 14 : Estimations de la conductivité hydraulique saturée, k , à partir des charges de deux piézomètres distants de 50 m ou 100 m.



École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3A7

