

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE HEURISTIQUE D'OPTIMISATION STOCHASTIQUE DE LA PLANIFICATION
MINIÈRE ET POSITIONNEMENT DES RÉSIDUS MINIERS DANS LA FOSSE

ADRIEN RIMÉLÉ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

AOÛT 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MÉTHODE HEURISTIQUE D'OPTIMISATION STOCHASTIQUE DE LA PLANIFICATION
MINIÈRE ET POSITIONNEMENT DES RÉSIDUS MINIERS DANS LA FOSSE

présenté par : RIMÉLÉ Adrien

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROUSSEAU Louis-Martin, Ph. D., président

M. GAMACHE Michel, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. DIMITRAKOPOULOS Roussos G., Ph. D., membre et codirecteur de recherche

Mme LAMGHARI Amina, Ph. D., membre

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier un certain nombre de personnes qui ont joué un rôle certain dans la réalisation de ce mémoire et sans qui cette expérience de recherche aurait été bien différente.

Je tiens à remercier en premier lieu Dr Michel Gamache, directeur de recherche et Professeur à l'École Polytechnique de Montréal, ainsi que Dr Roussos Dimitrakopoulos, co-directeur et Professeur à l'université McGill. Leurs conseils, leur expertise et leur patience ont guidé le développement de ce mémoire et leur partage de connaissances est inestimable.

Je remercie également le partenaire industriel, la compagnie minière québécoise New Millennium Iron Corp. qui a proposé et financé le projet de recherche. Je remercie tout particulièrement Michael Spleit, M. Eng, interlocuteur privilégié au sein de la compagnie pour sa disponibilité, la mise à disposition des simulations stochastiques du gisement étudié ainsi que de son modèle initial d'optimisation.

Mes remerciements vont ensuite au laboratoire d'optimisation minière stochastique COSMO de l'université McGill et le laboratoire de recherche opérationnelle GERAD de l'université de Montréal, cadres de mes travaux de recherche et sources d'enseignement.

En tant qu'étudiant français en double diplôme, je souhaite exprimer ma gratitude à mes deux universités, à savoir l'École Polytechnique de Montréal et l'École Nationale Supérieure des Mines de Nancy pour cette formidable opportunité. Merci à Dr. Yann Gunzburger, professeur à l'École des Mines de Nancy, pour l'attention portée au bon déroulement de cette expérience à l'étranger.

Sans oublier enfin mes parents, que je remercie tant pour leur soutien moral que financier tout au long de ces années d'études et qui m'ont toujours poussé à réaliser mes rêves.

RÉSUMÉ

La planification minière à long terme est essentielle afin d'estimer la viabilité d'un projet, d'obtenir les investissements nécessaires et d'optimiser les ressources disponibles. La recherche opérationnelle est en mesure de répondre efficacement à ce problème, plusieurs modèles mathématiques de programmation linéaire mixte ont été développés. La principale source d'incertitude, encore très peu considérée conventionnellement, est géologique. Pour la prendre en compte, des simulations conditionnelles, représentations équiprobables du gisement, peuvent être utilisées comme données d'entrée à un modèle stochastique en nombres entiers. Ainsi, l'objectif est de maximiser la valeur présente nette moyenne tout en proposant un ordonnancement de la production robuste à l'incertitude. En ajoutant un nombre conséquent de blocs, plusieurs périodes et destinations ainsi que de nombreuses contraintes opérationnelles, les modèles deviennent trop complexes à résoudre de manière exacte avec un solveur. Des méthodes heuristiques doivent alors être envisagées pour obtenir la meilleure solution possible en un temps réduit. Le travail exposé dans ce mémoire est composé de deux parties correspondant à deux différents articles. La première partie présente la résolution d'un modèle stochastique d'optimisation d'une mine à ciel ouvert à l'aide d'une nouvelle méthode heuristique. Sont tout d'abord proposées deux méthodes d'accélération : une relaxation partielle de la binarité des variables d'extraction en utilisant la structure particulière du modèle et les fortes relations entre variables et une convergence du modèle relaxé vers une solution quasi-binaire. Ensuite, un algorithme de tri topologique stochastique est proposé afin d'obtenir rapidement une solution complètement binaire à partir des résultats issus des stratégies d'accélération précédentes. Les résultats obtenus, testés sur un cas réel, sont concluants par leur rapidité et gap par rapport à la solution optimale. La deuxième partie modélise le stockage des résidus miniers et stériles au sein de la fosse au fur et à mesure de l'exploitation. Cette idée, souhaitée par le partenaire industriel lors de l'étude de faisabilité, permet de s'affranchir d'un espace de stockage limité autour de la fosse, de réduire l'impact environnemental de l'exploitation et de diminuer les coûts de remaniement lors de la réhabilitation finale du site. Cette fois, une méthode heuristique de fenêtre de temps sur un horizon fuyant a été utilisée pour résoudre le modèle. Les résultats sont prometteurs puisque l'impact de la disposition de matériel dans la fosse lors de l'exploitation ne dégrade la solution initiale que de 1.77%.

ABSTRACT

Long-term mine planning is an essential step in order to estimate the viability of a project, to attract investments and to optimize available resources. Operations research is well suited to assess this kind of problem, several mixed integer programming models have been developed over the last decades. Even if still not conventionally considered, the geology is the main source of uncertainty in such a model. To consider it properly, a set of equiprobable conditional simulations of the deposit are used as input in a stochastic integer programming model. The objective is then to maximize the expected net present value while having a robust production schedule to the geological uncertainty. When many blocks are considered but also several destinations and operational constraints, the problem becomes too complex to solve by a general purpose solver. If an exact method is not conceivable, heuristic methods must be used to obtain the best solution as possible in a limited time. The study presented in the thesis is composed of two parts corresponding to two articles. The first one presents a new heuristic method to solve a stochastic open pit mine production scheduling problem. First, two acceleration strategies are proposed: a partial relaxation of the binarity of the extraction variables using the special structure of the model and the strong inter-correlations of the variables; a convergence of the fully relaxed model toward a quasi-binary solution. Then, a stochastic topological sorting algorithm is proposed to quickly obtain a binary solution from the result of the previous acceleration strategies. Applied on a real case study, the results are interesting for their rapidity and their gap to the optimality. The second part establishes a model to store tailings and waste materials directly inside the pit during the operations. This idea was raised in the feasibility of the industrial partner to overpass a limited space for eternal stockpiles, to reduce the environmental impact and the re-handling costs of the rehabilitation phase. This time, to solve the problem, a sliding window time heuristic method was used and the results are promising: the Cplex objective function is only 1.77% lower while considering the in-pit storage and the heuristic method than the initial model solved with an exact method.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	III
RÉSUMÉ.....	IV
ABSTRACT	V
TABLE DES MATIÈRES	VI
LISTE DES TABLEAUX.....	VIII
LISTE DES FIGURES.....	IX
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XII
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Cadre théorique	1
1.2 Problématique.....	3
1.3 Objectifs de la recherche.....	3
1.4 Plan du mémoire.....	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE.....	6
2.1 Modèles déterministes.....	6
2.2 Modèles stochastiques.....	10
2.3 Stockage des résidus miniers et stériles dans la fosse.....	14
CHAPITRE 3 ORGANISATION DU TRAVAIL DE RECHERCHE	16
CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : HEURISTIC METHOD FOR THE STOCHASTIC OPEN PIT MINE PRODUCTION SCHEDULING PROBLEM	18
4.1 Introduction	18
4.2 Model	22
4.2.1 Notation.....	22

4.2.2	General stochastic formulation.....	25
4.3	Acceleration strategies	28
4.3.1	Partial relaxation	28
4.3.2	Binary convergence.....	31
4.4	Heuristic method	34
4.4.1	Linear relaxation	34
4.4.2	Stochastic TopoSort Algorithm.....	35
4.5	Case study	38
4.5.1	Presentation of the deposit	38
4.5.2	Sensitive points and parameters	38
4.5.3	Results: Profits and robustness.....	40
4.6	Conclusions	50
CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : A STOCHASTIC OPTIMIZATION METHOD WITH IN-PIT TAILINGS DISPOSAL FOR THE OPEN PIT MINE PLANNING PROBLEM.....		51
5.1	Introduction	51
5.2	The OMPSIP-ITD mathematical model.....	55
5.2.1	Notation.....	55
5.2.2	Stochastic formulation OMPSIP-ITD	59
5.3	Case study	64
5.3.1	Presentation and details	64
5.3.2	Results	67
5.4	Conclusions	73
CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE		75
CHAPITRE 7 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS		77
LISTE DES RÉFÉRENCES		79

LISTE DES TABLEAUX

Table 4-1 : Comparison between the partially relaxed model and the full binary model	30
Table 4-2 : GAP between the relaxed model and the STA solutions.....	45
Table 4-3 : GAP between the partially relaxed and the converged STA solutions.....	49
Table 5-1 : Tailings storage per strip and period	68

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1 : Distribution pour une période donnée du flux de trésorerie par rapport à un simple modèle estimé (Dimitrakopoulos <i>et al.</i> 2012).....	11
Figure 2-2 : Analyse de risque (Dimitrakopoulos, 2011).....	11
Figure 4-1 : Precedence relationships between blocks.....	22
Figure 4-2 : Vertical section of the checked pattern ore body	23
Figure 4-3 : Case study checked pattern ore body	23
Figure 4-4 : Alternate checked pattern relaxation.....	29
Figure 4-5 : Computational efficiency: partial relaxation vs initial model	31
Figure 4-6 : Number of non-binary values of the partially relaxed model	31
Figure 4-7 : Binary convergence iteration 0.....	32
Figure 4-8 : Binary convergence iteration 1.....	32
Figure 4-9 : Binary convergence.....	33
Figure 4-10 : DCF per year of the binary convergence algorithm after iteration 7	34
Figure 4-11 : Silica grade from the binary convergence algorithm after iteration 7.....	34
Figure 4-12 : Topological sorting steps.....	37
Figure 4-13 : Plan view of the iron ore deposit, feh grades	38
Figure 4-14 : Cross section of the deposit with the low dip layers	38
Figure 4-15 : Schedule plan views	40
Figure 4-16 : Typical schedule E-W sections	41
Figure 4-17 : Destinations plan view	41
Figure 4-18 : Differences between the relaxed and the binary solution.....	42
Figure 4-19 : Concentrate tonnes (iron)	43

Figure 4-20 : Run of mine (material sent to the mill)	43
Figure 4-21 : silica grade.....	43
Figure 4-22 : DTWR grade (recoverable iron grade).....	44
Figure 4-23 : Cumulative DCF.....	44
Figure 4-24 : Discounted cash inflow per period	45
Figure 4-25 : Binary converged schedule	47
Figure 4-26 : Differences partially relaxed vs converged STA solution.....	47
Figure 4-27 : Concentrate tonnes, converged STA.....	48
Figure 4-28 : Silica grade, converged STA.....	48
Figure 4-29 : DTWR, converged STA	48
Figure 4-30 : DCF per period, converged STA.....	49
Figure 5-1 : Precedence relationships between blocks.....	56
Figure 5-2 : Top view of the strips to store the tailings	58
Figure 5-3 : Strips' availability for storage graphs	62
Figure 5-4 : Cross section of mandatory ore block extraction within a strip.....	64
Figure 5-5 : FeH grade sim1 top view.....	65
Figure 5-6 : STWH method.....	66
Figure 5-7 : Top view of the tailings disposal per period and schedule.....	68
Figure 5-8 : Cross section of strip #3: periods of extraction and interpretation of the in-pit storage	69
Figure 5-9 : Top view destinations.....	69
Figure 5-10 : Concentrate tonnes of iron	70
Figure 5-11 : Average silica grade	70
Figure 5-12 : Average DTWR grade.....	70
Figure 5-13 : Cumulative DCF.....	71

Figure 5-14 : DCF per period.....	72
Figure 5-15 : Equivalent dump area.....	72
Figure 5-16 : Iteration computational time and objective value vs it#1 of STWH.....	73

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

DCF	« Discounted Cash Flow », flux de trésorerie actualisé.
DTWR	« Davis Tube Weight Recovery », taux de récupération du tube de Davis
MIP	« Mixed Integer Programming », programmation mixte en nombres entiers.
NPV	« Net Present Value », valeur présente nette.
OMPSIP	« Open pit Mine Planning Stochastic Integer Programming », programmation stochastique mixte en nombres entiers de la planification minière à ciel ouvert.
OMPSIP-ITD	« Open pit Mine Planning Stochastic Integer Programming with In-pit tailings disposal », programmation stochastique mixte en nombres entiers de la planification minière à ciel ouvert avec positionnement des résidus dans la fosse.
R-OMPSIP	« Relaxed-OMPSIP », OMPSIP relaxée.
SIP	« Stochastic Integer Programming », programmation stochastique en nombres entiers.
STA	« Stochastic TopoSort Algorithm », algorithme stochastique de tri topologique.

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Cadre théorique

La planification minière à long terme est une étape essentielle dans l'étude de faisabilité de tout projet minier d'envergure. Celle-ci permet de prédire la production tout au long de la durée de vie de la mine et est également renouvelée lors des opérations pour mettre à jour les prédictions en fonction des observations et nouvelles informations. La planification définit la séquence d'extraction de volumes du gisement ainsi que les options de traitement (destination, mode d'opération, etc.). Cela donne des informations en termes de tonnages, teneurs d'éléments d'intérêt, rendement des opérations ou toute autre indicateur pertinent. Ces informations sont cruciales pour estimer la viabilité d'un projet, évaluer les contrats et obtenir les investissements nécessaires. De plus, compte tenu de l'envergure des projets, une planification améliorant 1% de la valeur présente nette peut représenter des millions de dollars de profits supplémentaires.

En mathématiques appliquées, la recherche opérationnelle propose des modèles de programmation linéaire mixte bien adaptés à la résolution de ces problèmes. Traditionnellement, le gisement est discrétisé en un modèle de blocs, blocs auxquels sont par la suite attribués une période d'extraction et une destination. Chaque bloc possède un ensemble de caractéristiques tels que des teneurs (éléments d'intérêt économique ou au niveau opérationnel), une densité, diverses informations métallurgiques ou encore un temps de transport en camion par exemple. La plupart de ces caractéristiques sont déterminées à partir des données de forage. Ces forages sont très coûteux, entre 100 et 200\$ par mètre selon Riles et Cottrell (2012), et doivent donc être en nombre limité (typiquement des dizaines de milliers de mètres). Leur disposition éparse ne permet pas à tous les blocs d'être traversés par un forage où l'information est mesurée. Ainsi les caractéristiques doivent-elles être interpolées par des méthodes géostatistiques qui prennent en compte les corrélations spatiales. Deux approches se distinguent alors : une approche déterministe et une approche stochastique. La première utilise des méthodes d'estimation qui moyennent les données sans considérer la variabilité locale. Par la suite, cette unique estimation du gisement sert de base à l'optimisation du planning de la production. Cependant, cette démarche ne prend pas en compte l'inévitable incertitude associée à l'interpolation des données

de la géologie. Cette incertitude, qui n'est pas la seule, est néanmoins celle ayant la conséquence la plus directe et importante sur la production réelle. C'est cette source d'incertitude que cherche à prendre en compte la deuxième approche dite stochastique. À la place d'une seule estimation pour représenter le gisement, un ensemble de simulations conditionnelles stochastiques est considéré. Ces simulations sont des représentations équiprobables qui ne lissent pas la distribution des données. Le principe de l'optimisation consiste alors à maximiser la valeur présente nette espérée de la production sur l'ensemble des simulations tout en contrôlant les écarts de production d'une simulation à l'autre. Le résultat d'une telle optimisation se veut robuste à l'incertitude géologique. Un des enjeux associés à un modèle stochastique d'optimisation de la planification minière est sa complexité de résolution. En effet, bien qu'habituellement linéaire, lorsqu'appliqué à un cas réel, un tel modèle va considérer des milliers de blocs, plusieurs destinations et périodes et de nombreuses exigences opérationnelles. En termes de programmation mathématique, cela correspond à des centaines de milliers de variables entières et de contraintes, qui, bien souvent, ne permettent pas une résolution exacte par solveur commercial en un temps raisonnable. Pour répondre à ce problème, des méthodes heuristiques doivent être envisagées afin d'obtenir rapidement une solution de bonne qualité, la plus proche possible de l'optimalité.

Au niveau opérationnel, une source de préoccupation peut concerner les piles de stockage. En effet, les opérations minières produisent de très importants volumes de matériaux non économiques qui doivent être entreposés. Ces matériaux proviennent soit directement de la mine avec des blocs de stérile (blocs sans intérêt économique) qui ont dû être extraits pour permettre d'accéder à d'autres blocs de minerais sous-jacents, soit des résidus à la sortie de l'usine de traitement du minerai. Dans un complexe minier, ces piles de stockage de résidus et de stériles peuvent représenter de très importants volumes. Ce volume peut être problématique lorsque l'espace disponible aux alentours de la fosse est limité. De plus, ce déplacement de volumes modifie profondément le paysage et impacte négativement, de manière non négligeable, l'environnement et l'écosystème local. Enfin, la plupart des pays ont aujourd'hui adopté des mesures concernant la réhabilitation finale du site lorsque les opérations minières ont cessé. Les opérations de réhabilitation peuvent par exemple inclure un comblement de la fosse à partir des piles de stockage, les coûts associés sont conséquents. Pour l'heure, peu d'aide à la décision a été développé sur ce sujet même si plusieurs éléments mériteraient d'être optimisés.

1.2 Problématique

Des modèles stochastiques en nombres entiers pour la planification de mines à ciel ouvert ont été développés et permettent, en utilisant des simulations stochastiques du gisement comme données d'entrée, une prédiction de la production robuste à l'incertitude, notamment géologique. Cependant, lorsqu'un nombre conséquent de blocs est considéré et de nombreuses contraintes opérationnelles (objectifs de production, teneurs moyennes, continuité d'extraction, etc.), le temps de résolution devient prohibitif avec un solveur commercial tel que Cplex. Des méthodes heuristiques ou métaheuristiques sont alors utilisées pour obtenir une solution réalisable rapidement, quitte à prendre le risque de s'éloigner de la solution optimale. Une preuve de proximité de la solution optimale présente donc un grand intérêt lors du développement d'une méthode de résolution heuristique. Évidemment, de nombreuses hypothèses doivent être émises quant aux contraintes opérationnelles mais en inclure certaines est essentiel pour la viabilité du modèle proposé. Outre par exemple des contraintes de mélange et de production de concentrés, le partenaire industriel a fait mention de son souhait de limiter les piles de stockage de résidus miniers et de stériles pour des raisons d'espace disponible réduit, d'impact environnemental et de coût de manutention. Une solution possible serait de stocker ce matériel directement au niveau des espaces disponibles dans la mine. Le gisement, sujet de l'étude, a la particularité de présenter une lithologie de faible pendage et une grande étendue latérale. Ces dimensions ont permis à la compagnie d'imaginer un stockage regroupé en une zone unique définie par des bandes de terrains suivant la direction de plus fort pendage (suivant la pente). L'enjeu d'une telle décision est de ne pas impacter de manière trop négative la production et de ne pas stériliser du minerai d'intérêt économique.

1.3 Objectifs de la recherche

Ce mémoire présente deux objectifs principaux de recherche. Le premier est de proposer une méthode heuristique capable de résoudre un modèle stochastique de la planification à long terme d'une mine à ciel ouvert prenant en compte l'incertitude géologique. Cette méthode doit : être en mesure de considérer un gisement comportant des milliers de blocks; permettre de considérer plusieurs périodes, plusieurs destinations et un certain nombre de contraintes opérationnelles; être

rapide et proposer une preuve d'optimalité (gap d'optimalité). Évidemment, la qualité de la solution obtenue sera évaluée en fonction de ce que l'on attend traditionnellement d'un modèle stochastique, à savoir en termes de valeur présente nette moyenne et de robustesse à l'incertitude géologique. Le deuxième objectif est de proposer une adaptation du modèle stochastique de planification minière au stockage intra-fosse des résidus et stériles en respectant les souhaits exprimés par le partenaire industriel : un stockage unique en « bandes » suivant la direction de plus fort pendage de la lithologie. Ce nouveau modèle devra, lui aussi, être résolu par une méthode heuristique et, tout comme pour le modèle initial, la solution devra être prouvée proche de l'optimalité, satisfaire les contraintes opérationnelles et être robuste à l'incertitude géologique.

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire inclut deux publications scientifiques. Avant de présenter les articles tels que soumis pour publication, une revue de littérature sera proposée au chapitre 2. Cette étude présentera les développements réalisés en optimisation déterministe et stochastique de la planification à long terme de mines à ciel ouvert ainsi qu'une approche visant à modéliser le stockage de stériles dans la fosse. Le chapitre 3 présentera la démarche organisationnelle de la recherche avec notamment la cohésion des deux articles et dans quelle mesure ils répondent aux objectifs de recherche. Le chapitre 4 correspond au premier article intitulé : « *Heuristic method for the stochastic open pit mine production scheduling problem* ». Comme son titre en anglais le mentionne, cet article propose une nouvelle méthode heuristique pour résoudre un modèle stochastique de planification minière. Le modèle, adapté de modèles existants, intègre notamment une contrainte de capacité, plusieurs contraintes de mélange ou encore une continuité spatiale de l'extraction. Deux stratégies d'accélération sont tout d'abord présentées pour la résolution du modèle de programmation linéaire mixte. Ces deux stratégies visent à relaxer des variables binaires, en grande partie responsables de la complexité de la résolution, sans ajouter de contraintes mais en produisant tout de même une solution quasi-binaire. La première de ces méthodes utilise la structure particulière du modèle avec les fortes interconnexions des blocs au sein du graphe orienté des relations de précédence. La deuxième méthode vise, quant à elle, à faire converger le modèle complètement relaxé vers une solution également quasi-binaire, cela en n'ajoutant à chaque itération qu'un nombre limité de contraintes de binarité. Le résultat de ces stratégies,

proche de respecter les contraintes de binarité du modèle initial, est par la suite donné à un algorithme qualifié de tri topologique stochastique afin d'obtenir un résultat final parfaitement binaire et prouvé proche de l'optimalité par calcul de gap. La méthode est appliquée sur une étude de cas et les résultats sont concluants. Le chapitre 5 présente le second article intitulé : « *Stochastic optimization method with in-pit tailings disposal for the open pit mine planning problem* ». Le modèle présenté dans le premier article est ici considéré comme modèle de base auquel est ajouté un ensemble de variables et contraintes supplémentaires pour modéliser le dépôt de résidus et de stériles dans la fosse. La méthode de résolution proposée est une fenêtre de temps sur horizon fuyant avec regroupement de périodes. La formulation finale est également testée sur un gisement réel et démontre l'intérêt de ces considérations, avec un impact sur la production très limité et de multiples bénéfices en termes d'espace économisé, de préservation de l'environnement et de coût de remaniement. Enfin, le chapitre 6 présente les conclusions générales de la recherche et les recommandations pour de futurs développements.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

L'industrie minière appelle à de très nombreux investissements en termes d'exploration et d'infrastructures dans les premières phases d'un projet. Par la suite, les flux de trésorerie sont considérables compte tenu des divers frais d'exploitation ainsi que des volumes de matériaux en jeu. Une prédiction réaliste de la production est alors essentielle à la viabilité d'un projet minier. Vallée (2000) mentionne une étude portant sur 50 projets Nord-Américains faisant état d'un taux d'échec de 38% après seulement un an d'exploitation et seulement 10% des projets réalisant les objectifs de production. La recherche opérationnelle et ses outils d'aide à la décision ont alors toute leur place dans la prédiction et l'optimisation de la production dans la planification minière et notamment à long terme. De nombreux travaux ont été conduits depuis les années 1960 afin d'optimiser différents aspects de l'exploitation minière, Newman *et al.* (2010) proposent une revue de littérature très complète dans le domaine en traitant non seulement de la planification à court et long terme de mines à ciel ouvert et souterraines mais aussi de la sélection d'équipements et leur répartition, des choix de teneurs de coupures jusqu'à des thématiques telles que la ventilation souterraine. L'objet de ce mémoire étant la planification stratégique de mines à ciel ouvert à long terme, la revue de littérature proposée ici se concentre sur les travaux de recherche s'y rapportant. Deux approches s'opposent et seront présentées dans les deux principales parties de cette revue de littérature. La première est dite déterministe en ce qu'elle considère comme certaines, déterminées, les données d'entrée du modèle. La deuxième quant à elle est qualifiée de stochastique. L'information, notamment géologique, étant inévitablement incertaine, les modèles stochastiques utilisent un ensemble de simulations pour appréhender le risque et proposer un ordonnancement de la production robuste à l'incertitude. Une troisième partie s'intéressera à la modélisation du stockage de matériaux au sein de la fosse.

2.1 Modèles déterministes

L'objectif de la planification minière à long terme est de définir la séquence de production au sein d'une limite ultime de la fosse prédéfinie ou en laissant son design libre à l'optimiseur. Le gisement est habituellement discrétisé en un modèle de blocs sur une grille régulière. C'est

précisément la séquence d'extraction de ces blocs qui doit être optimisée pour maximiser la valeur présente nette du projet tout en respectant des contraintes opérationnelles (réserves, accessibilité, continuité spatiale de l'extraction, etc.) et d'objectifs de production (tonnages, teneurs moyennes, etc.). Les contraintes habituelles prises en compte dans les MIP pour la planification à long terme de mines à ciel ouvert sont : les contraintes de réserves (un bloc ne peut être extrait qu'une fois au plus); les contraintes de précédence (extraction préalable des blocs directement sus-jacents à un bloc donné); les contraintes de capacité, de quantités en tonnages, d'heures, etc.; les contraintes de mélanges (teneur moyenne du minerai sur une période); ou encore une continuité spatiale de l'extraction pour une exploitation réalisable en pratique avec les équipements disponibles (une pelle mécanique ne peut, par exemple, être déplacée facilement au sein de la fosse pour des questions de coûts de transport et de durée de l'opération). À chaque bloc est attribué un ensemble de caractéristiques, certaines sont linéaires : tonnages, temps de transport; d'autres sont non linéaires (ou non additives) : typiquement les teneurs ou les taux de récupération dans certains cas. Les méthodes conventionnelles sont dites déterministes puisqu'elles ne considèrent qu'une représentation unique du gisement déterminée à partir d'une méthode d'estimation. En effet, l'information géologique est obtenue à partir de données de forage qui sont très onéreuses et ainsi d'une disposition éparse dans le gisement. Sur l'ensemble du modèle de blocs, seulement un nombre très limité de blocs sont traversés par un forage et les caractéristiques doivent alors être interpolées. Les méthodes d'estimation, telles que le krigeage ou l'inverse de la distance, moyennent spatialement les données en minimisant par exemple la variance d'estimation pour le krigeage. La représentation du gisement étant unique, ces informations sont considérées certaines (sans incertitude) par l'optimiseur qui cherchera à maximiser la valeur présente nette de la production à partir de ces données.

Parmi les tous premiers travaux en recherche opérationnelle pour optimiser la production de mines à ciel ouvert on trouve la thèse de Johnson (1968) intitulée « *Optimum Open Pit Mine Production Scheduling* ». Il propose un modèle linéaire visant à optimiser la séquence d'extraction des blocs mais la continuité de ses variables d'extraction résulte en des extractions partielles qui peuvent se traduire en une séquence non réalisable qui viole les contraintes de précédence. La méthode employée consiste en une décomposition en sous-problèmes résolus en tant que problèmes de flux maximum.

Gershon (1983) a proposé un modèle de programmation linéaire mixte (MIP) mais a été grandement limité par la complexité de résolution de son modèle avec solveur.

De son côté, Dagdelen (1985) résout un MIP en utilisant une relaxation lagrangienne pour réduire de manière substantielle le nombre de contraintes du modèle. Cependant, il ne parvient pas non plus à garantir la réalisabilité de la solution obtenue. Le problème récurrent est la complexité de résolution des modèles compte tenu du nombre très important de variables, souvent binaires, ainsi que des contraintes.

Caccetta et Hill (2003), malgré peu de détails pour raisons de confidentialité, développent un algorithme de *Branch and cut* basé principalement sur la forte dépendance entre variables étant donné que fixer une variable d'extraction à 0 ou 1 réduit nettement l'espace de solutions. La résolution de la relaxation linéaire des sous-problèmes engendrés est alors bien plus simple. Leurs résultats sont très prometteurs même s'il est à noter que le modèle utilisé ne considère qu'une seule destination et pas de contraintes de mélange par exemple. De nombreuses méthodes heuristiques ont alors été proposées pour être en mesure d'obtenir une solution de bonne qualité en un temps raisonnable.

Ramazan et Dimitrakopoulos (2004) cherchent à réduire le nombre de variables binaires en relaxant la contrainte de binarité d'un sous-ensemble de variables d'extraction correspondant aux blocs de valeur économique négative. Ils étudient aussi l'impact de formulations alternatives de certaines contraintes et parviennent ainsi à accélérer le temps de résolution de leur modèle même si le nombre de variables considérées reste limité.

Une autre approche, assez classique en recherche opérationnelle, est une méthode de résolution par fenêtre de temps sur un horizon fuyant utilisée par exemple par Cullenbine *et al.* (2011). Cette méthode itérative consiste à chaque itération à ne conserver la binarité des variables que pour un certain nombre de périodes consécutives (la « fenêtre ») et de rendre les variables continues pour toutes les autres périodes. Le modèle obtenu est alors bien plus facile à résoudre et continue tout de même à considérer l'ensemble des périodes simultanément à la différence d'une méthode purement séquentielle. Une fois le modèle résolu, les résultats correspondant à la première période sont conservés (variables fixées) et la fenêtre est décalée d'une période pour l'itération suivante. Pour un modèle comprenant 25000 blocs et 15 périodes, les auteurs parviennent à obtenir une solution à 2% de l'optimalité.

Plusieurs méthodes d'agrégation ont aussi été développées, ces méthodes visent à réduire le nombre de variables et/ou de contraintes en regroupant des blocs en une seule entité en émettant l'hypothèse qu'ils doivent être extraits ensemble ou par exemple envoyés à la même destination.

Ramazan *et al.* (2005) définissent des « arbres fondamentaux » (« *fundamental trees* » en anglais) qui regroupent des blocs de valeurs économiques similaires et qui peuvent être extraits simultanément vis-à-vis des contraintes de précédence.

Boland *et al.* (2009), quant à eux, déterminent la séquence d'extraction au niveau d'agrégats mais définissent la destination de chaque bloc indépendamment pour plus de flexibilité. Même si ces agrégations facilitent efficacement la résolution, leur problème est que regrouper des blocs sur un quelconque critère est une hypothèse forte qui réduit sensiblement l'espace de solutions car rien ne définit, *a priori*, qu'un bloc devrait être extrait avec un autre à l'optimalité.

Chicoisne *et al.* (2012) présentent une méthode heuristique basée sur un tri topologique des blocs. Pour cela, ils commencent par résoudre la relaxation linéaire de leur modèle (qui ne comprend pas de contraintes de mélange ou de continuité spatiale d'extraction) de manière efficace à l'aide d'une méthode de décomposition qu'ils nomment « *critical multiplier algorithm* ». Ils utilisent alors la séquence fractionnaire obtenue (les blocs peuvent être partiellement extraits à une période donnée) pour calculer une période d'extraction espérée pour chaque bloc. Ces périodes servent alors de poids dans un algorithme de tri topologique sur les relations de précédence entre blocs. Ils terminent leur optimisation par un raffinement de la solution avec un algorithme de recherche locale : seul un petit sous ensemble de blocs est optimisé à la recherche d'une meilleure fonction objectif.

Comme mentionné, toutes ces méthodes sont dites déterministes car elles ne prennent pas en compte l'incertitude, notamment géologique. Cependant, elles restent d'actualité car elles sont encore aujourd'hui les méthodes conventionnellement utilisées dans l'industrie minière et sont au cœur des principaux logiciels commerciaux de planification minière tels que GeoVia Whittle Strategic Mine Planning.

2.2 Modèles stochastiques

Le problème lors l'interpolation des teneurs des blocs entre les données de forages est que, quelle que soit la méthode utilisée, les résultats obtenus seront toujours incertains. Les méthodes d'estimation moyennent les données locales afin de minimiser les erreurs d'estimation mais en faisant cela, elles lissent la distribution des teneurs et ne tiennent pas compte de la variabilité locale au sein du gisement. Puisque l'optimisation de la séquence d'extraction est basée sur un tel modèle estimé, le lissage associé a d'importantes conséquences sur la production réelle, qui peut être bien différente de celle prédite et donc mettre en péril l'ensemble du projet. Parmi les premiers travaux à avoir noté les limites d'une planification basée sur un modèle estimé on trouve l'étude de Ravenscroft (1992). Dans son article, il présente les méthodes d'analyse de sensibilité traditionnellement utilisées pour évaluer la qualité d'une séquence d'extraction conventionnelle et montre que celles-ci ne prennent que trop peu en compte les corrélations spatiales des blocs lors de la détermination de la distribution de probabilité de chaque bloc. Il propose alors l'utilisation de simulations stochastiques conditionnelles, développées déjà depuis quelques années en géostatistique, comme outil d'analyse de sensibilité. Pour une définition précise des concepts des simulations conditionnelles, se référer à Goovaerts (1997) ou Dimitrakopoulos (1998). Ce dernier donne comme définition succincte que les « simulations conditionnelles sont un type de méthodes dites de Monte Carlo qui peuvent être utilisées pour générer des représentations équiprobables de la variabilité in-situ des teneurs et des types de matériaux du gisement » (Dimitrakopoulos, 1998). Ravenscroft teste alors un ensemble de simulations sur une séquence d'extraction obtenue à partir d'un modèle estimé et met en avant la forte probabilité que la production réelle soit très éloignée des espérances de production, notamment pour la teneur moyenne au sein d'une période. Peu après, Dowd (1994) réalise une étude similaire mais en comparant les différences de tonnages obtenus en basant la planification sur une simulation individuelle pour étudier les pertes engendrées par un modèle estimé par rapport à une représentation possible du gisement (simulation). Dimitrakopoulos *et al.* (2002) présentent également une étude approfondie de l'impact d'un modèle estimé sur la production d'une mine d'or et montrent en particulier les conséquences sur le flux de trésorerie actualisé.

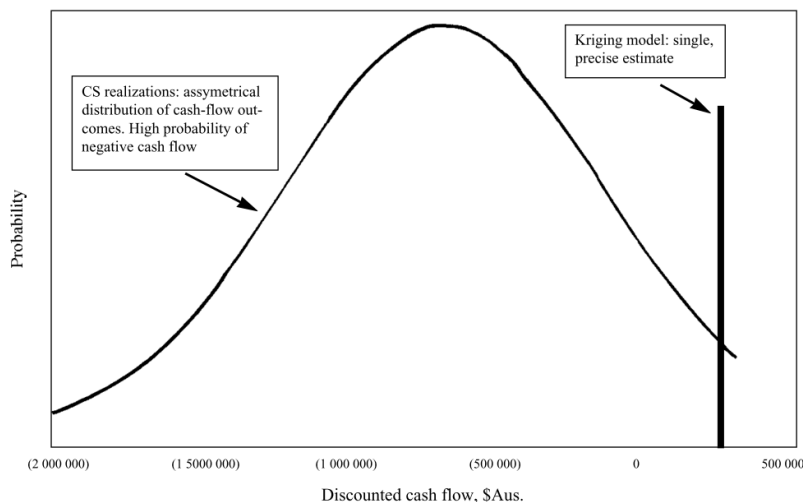


Figure 2-1 Distribution pour une période donnée du flux de trésorerie par rapport à un simple modèle estimé (Dimitrakopoulos *et al.* 2012)

Figure 2-1 montre par exemple que, pour la période 10 de leur étude de cas, il est très probable que le flux de trésorerie actualisé (basé sur les simulations conditionnelles) soit nettement négatif alors que le modèle estimé prévoyait une valeur positive. La Figure 2-2 présente l'analyse de risque, menée par Dimitrakopoulos (2011), d'un modèle déterministe conventionnel évalué sur un ensemble de simulations conditionnelles. On note qu'après 40 périodes d'extraction, la probabilité que la valeur présente nette prédite par le modèle déterministe n'a que de 2 à 4% de chance d'être atteinte en pratique.

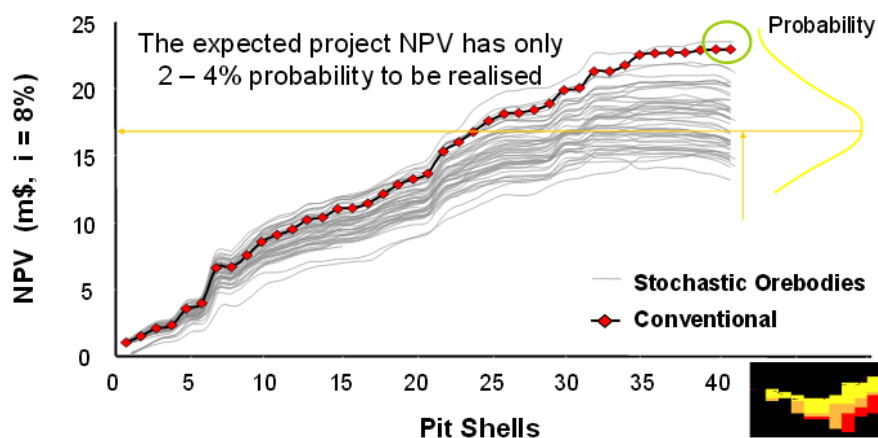


Figure 2-2 Analyse de risque (Dimitrakopoulos, 2011)

Toutes ces études mènent les auteurs à la conclusion qu'optimiser la production minière sur un modèle estimé unique n'est pas suffisant et entraîne un trop grand risque de défaillance du projet.

Les simulations conditionnelles du gisement ne doivent alors pas qu'être utilisées pour l'analyse de sensibilité mais doivent aussi faire partie du processus d'optimisation. L'information que contiennent les simulations sur la variabilité locale des teneurs doit permettre de contrôler le risque associé à la géologie.

Menabde *et al.* (2004) commencent à utiliser les simulations conditionnelles, mais on ne peut encore parler d'optimisation stochastique puisque dans leur modèle, seule la valeur présente nette moyenne est maximisée et donc rien n'empêche certains scénarios de présenter de faibles profits. La méthode qu'ils utilisent est une agrégation de blocs en « panneaux ». Ces panneaux sont définis comme les intersections entre les bancs miniers (niveaux horizontaux) et les phases d'extraction (zones définies par les opérateurs), entités définies au niveau opérationnel. L'optimisation est ensuite réalisée avec Cplex et donne des résultats prometteurs avec un risque mieux contrôlé et une VPN moyenne 20% supérieure à celle de l'approche conventionnelle.

Dimitrakopoulos et Ramazan (2008) sont les premiers à proposer un programme stochastique en nombres entiers pour la planification à long terme de mines à ciel ouvert. Leur formulation prend un ensemble de simulations conditionnelles, appelées scénarios, en données d'entrée et définit une séquence d'extraction dite scenario-indépendante, c'est-à-dire non pas associée à une simulation particulière mais à elles toutes. Le résultat est alors qualifié de robuste à l'incertitude géologique. Ils expriment la fonction-objectif de leur modèle comme suit :

$$\text{Max} \sum_{t=1}^p \left[\sum_{i=1}^n E\{(\text{NPV})_i^t\} b_i^t - \sum_{s=1}^m (c_u^{to} d_{su}^{to} + c_l^{to} d_{sl}^{to} + c_u^{tg} d_{su}^{tg} + c_l^{tg} d_{sl}^{tg}) \right]$$

On distingue deux parties dans cette expression : la première vise à maximiser la valeur présente nette (VPN) moyenne des scénarios (b_i^t étant une variable binaire représentant l'extraction du bloc i à la période t); la deuxième partie pénalise les déviations pour chaque scénario (indice s) par rapport aux objectifs de production en termes de quantité de minerai (indice o) et de teneur moyenne (indice g). L'optimisation est alors un compromis entre maximiser les profits moyens et contrôler au mieux les déviations de chaque scénario pour, au final, obtenir une planification de la production rentable et robuste à l'incertitude géologique. Ils obtiennent une amélioration de 10% de la VPN de leur étude de cas par rapport au modèle déterministe. Ce premier modèle a ensuite servi de base à de nombreux autres travaux et améliore de manière systématique la rentabilité des projets lorsque l'étude de sensibilité est menée sur des simulations du gisement :

jusqu'à 25% pour Dimitrakopoulos (2011); 10% pour Ramazan *et al.* (2013); 16.9% pour Spleit (2014). Ces résultats prouvent l'intérêt indéniable d'une approche stochastique pour la planification minière.

Ces nouvelles considérations compliquent encore un peu plus la résolution des modèles et des méthodes heuristiques sont alors d'autant plus nécessaires.

Ramazan *et al.* (2013) utilisent une méthode exacte avec le solveur Cplex mais considèrent une résolution en deux étapes pour n'optimiser que peu de périodes à la fois.

Spleit (2014) utilise également Cplex mais choisit une approche qui détermine d'abord le contour ultime de la fosse puis discrétise en deux fois cinq périodes, puis enfin en périodes individuelles.

Chatterjee et Dimitrakopoulos (2014) utilisent pour leur part une relaxation lagrangienne associée à une résolution séquentielle. Ils obtiennent également des résultats prometteurs avec notamment une amélioration de 26% de la VPN par rapport à une approche conventionnelle ainsi qu'un contour ultime de la fosse 10% plus grand. Ce dernier constat semble d'ailleurs être fréquent lorsque l'optimisation est réalisée dans un cadre stochastique : l'optimiseur est en mesure de mieux mettre à profit les mélanges de blocs pour rendre des combinaisons rentables et qui satisfassent les contraintes.

Afin de mieux appréhender la complexité de résolution, on note l'emploi de plus en plus fréquent de métaheuristiques. De manière générale, ces méthodes n'utilisent pas de solveurs conventionnels de programmation mathématique mais peuvent être définies comme des algorithmes de recherche itératifs visant l'atteinte d'un maximum local, souhaité proche de l'optimalité.

Lamghari et Dimitrakopoulos (2012) présentent une méthode de recherche tabou pour laquelle dans 92.5% des cas la solution obtenue est prouvée être à moins de 4% de l'optimalité. Cette méthode consiste à partir d'une solution initiale et à effectuer des modifications, des mouvements, au sein d'un voisinage prédéfini qui tolèrent une dégradation de la fonction-objectif si aucune autre option n'est possible. Les derniers mouvements sont gardés en mémoire et interdits pendant un certain temps afin d'éviter une progression cyclique. Aussi, pour de ne pas rester coincé à un maximum local, des stratégies de diversifications sont proposées.

Lamghari et al. (2014a, 2014b) proposent un algorithme de descente sur voisinages variables au sein d'une méthode hybride, et parvient, en moyenne, à obtenir des solutions à moins 3% de l'optimalité pour de grandes instances.

De leur côté, Godoy et Dimitrakopoulos (2004), Montiel et Dimitrakopoulos (2015) et Goodfellow et Dimitrakopoulos (2015) ont développé des métaheuristiques de type recuit simulé. Pour cette méthode, à chaque itération, est choisie une solution dans le voisinage de la solution courante et, dans le cas où cette solution détériore la fonction-objectif, elle est acceptée avec une certaine probabilité. Sans entrer dans les détails, Goodfellow combine cette méthode avec d'autres approches nommées optimisation par essais particuliers (« *particle swarm* ») et un algorithme à évolution différentielle afin, notamment, d'accélérer la convergence. Comparativement à la solution déterministe, Montiel parvient à réduire les déviations des objectifs de production, par exemple, de 22% à 3% pour la capacité de l'usine de traitement du minerai tout en améliorant la VPN moyenne de 5% et Goodfellow de 6.6%.

Lamghari et Dimitrakopoulos (2016) proposent une méthode appelée « *progressive hedging* » qui est une technique de décomposition sur les scénarios couplée à une résolution de sous-problèmes par fenêtre glissante. On peut souvent reprocher à ces approches métaheuristiques, à l'exception des travaux de Lamghari, de ne pas fournir de preuves d'optimalité principalement par absence de borne supérieure pour la fonction-objectif.

2.3 Stockage des résidus miniers et stériles dans la fosse

Ce genre de contraintes est fréquemment retrouvé dans la majeure partie des modèles précédemment mentionnés. Cependant, il est évident que de nombreuses autres contraintes opérationnelles peuvent être ajoutées pour répondre au mieux aux exigences opérationnelles. Une des contraintes qui peut préoccuper les compagnies minières est l'espace disponible pour le stockage des résidus miniers (matériaux une fois le minerai extrait de la roche) et du stérile (roche sans intérêt économique). Ces matériaux représentent un volume considérable et sont habituellement disposés en piles de stockage allant jusqu'à une centaine de mètres de haut et une superficie au sol de plusieurs kilomètres carrés. Une option qui peut alors être envisagée est de stocker ces matériaux directement dans les espaces libres de la fosse pendant l'exploitation. Une

des conditions étant notamment que ces volumes ne seront pas de nouveau déplacés une fois disposés, ainsi le minerai résiduel sur lequel ils reposent sera perdu car ne sera plus accessible.

Dans la littérature, un seul article a été trouvé qui mentionne une telle contrainte. En effet, Zuckerberg *et al.* (2007) présentent le concept d'un modèle déterministe dans lequel ils définissent le positionnement de blocs de stériles dans la fosse. Peu de détails sur la formulation sont donnés pour des raisons de confidentialité puisque leur travail est implémenté dans une extension du logiciel de planification minière Blasor, propriété du groupe minier BHP Billiton's, nommé Blasor-InPitDumping (BlasorIPD). Pour la définition de la séquence d'extraction, une méthode d'agrégation de blocs est utilisée : à chaque agrégat (AGG) est attribuée une période d'extraction. Les destinations sont quant à elles assignées à des subdivisions des AGGs, nommées « *bins* ». Ensuite, pour chaque AGG, le pourcentage de stérile est défini et ce volume peut : soit être envoyé à une pile de stockage externe, soit être stocké directement dans la fosse. Si la deuxième option est choisie, le volume correspondant prend part (décision de l'optimiseur) à une nouvelle unité de stockage, un agrégat de blocs de plus grande dimension que les AGGs, nommé « *refill AGG* », qui a une position définie dans la fosse. La plus grande dimension des *refill AGGs* par rapport aux AGGs est justifiée par le besoin de précision spatiale moindre et par l'économie en variables nécessaires. Ces *refill AGGs* sont assimilés à des nouveaux blocs non déplaçables, c'est-à-dire qu'ils doivent respecter les contraintes de précédence et de réserve. Le résultat de l'optimisation revendiqué dans l'article est une planification de la production qui optimise simultanément la séquence d'extraction des blocs et la disposition de blocs de stériles dans les espaces libres de la fosse. Cependant, le problème qui peut être relevé dans cette approche est l'aspect peu pratique du résultat final. En effet, la disposition spatiale des blocs de stériles (les *refill AGGs*) n'est pas contrôlée et peut donc être très éparse avec des blocs de stériles disséminés dans l'ensemble de la fosse, inimaginable du point de vue opérationnel.

CHAPITRE 3 ORGANISATION DU TRAVAIL DE RECHERCHE

Le travail présenté dans ce mémoire s'articule autour de deux articles répondant chacun à une problématique du partenaire industriel. Le premier article se concentre sur l'aspect computationnel (accélération des temps de calculs) d'une planification minière stochastique à long terme et le deuxième cherche à modéliser et résoudre le même problème avec une nouvelle contrainte opérationnelle.

La première partie du travail de recherche a ainsi débuté avec l'établissement d'un modèle stochastique en nombres entiers pour l'optimisation à long terme d'une mine de fer à ciel ouvert. Basé sur des modèles précédents, notamment ceux présentés dans le mémoire de Spleit (2014), ce modèle prend en données d'entrée un ensemble de dix simulations stochastiques conditionnelles en guise de représentations équiprobables de la géologie du gisement. La fonction-objectif vise à maximiser le flux de trésorerie actualisé moyen du projet tout en pénalisant les déviations par rapport aux objectifs de production afin de satisfaire l'ensemble des scénarios et ainsi obtenir une séquence d'extraction robuste à l'incertitude géologique. Les contraintes considérées incluent des contraintes de capacité, deux types distincts de contraintes de mélange, des contraintes d'extraction au plus tôt et de continuité spatiale de l'extraction. Il est souhaité que la résolution du modèle soit en mesure de fournir une preuve d'optimalité de la solution obtenue avec la possibilité d'obtenir un gap d'optimalité. Pour cette raison, il a été décidé d'utiliser le solveur Cplex et d'implémenter le modèle en C++. Cependant, la taille et complexité du modèle rendent impossible l'obtention d'une solution par Cplex, d'autant que le temps de résolution est souhaité raisonnable. Deux stratégies d'accélération ont alors été proposées et, couplées à une méthode heuristique de tri topologique, un résultat prouvé proche de l'optimalité a été trouvé de manière rapide.

Les résultats concluants obtenus pour la planification de la planification du gisement ont alors motivé la modélisation d'un nouveau type de contrainte opérationnelle. Mentionné dans l'étude de faisabilité de la compagnie minière, le stockage de résidus miniers et de stériles dans la fosse permettrait de s'affranchir d'un espace de stockage extérieur limité et de réduire l'impact environnemental ainsi que les coûts de réhabilitation finale du site. Une formulation mathématique a alors été développée afin de modéliser ce stockage dans la fosse et les

nombreuses contraintes qui y sont associées. Les nouvelles composantes ont été ajoutées au modèle initial, cependant, une méthode heuristique différente a dû être utilisée pour résoudre ce nouveau modèle. En effet, la méthode précédente entraînant des extractions partielles durant le processus d'optimisation, elle n'était pas facilement compatible avec la définition de zones de stockage dans la fosse qui, à cause de la formulation, utilise fortement la binarité des variables d'extraction. Ainsi, une méthode heuristique de fenêtre de temps sur un horizon fuyant a-t-elle été choisie et implémentée pour résoudre le modèle. Le résultat final est également prouvé de bonne qualité et définit une façon selon laquelle le stockage dans la fosse peut être réalisé sans impacter trop négativement la production.

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : HEURISTIC METHOD FOR THE STOCHASTIC OPEN PIT MINE PRODUCTION SCHEDULING PROBLEM

Abstract: Long-term open pit mine scheduling is generally assessed with a mixed integer programming (MIP) formulation which can be solved with different operations research techniques. To be closer to the reality of the exploitation, a model can, for instance, take into account a substantial number of blocks to represent the ore body, include several destinations, or consider the uncertainty of the geology with a stochastic formulation. The inherent complexity of such a model becomes too great to obtain an optimal solution or even a good feasible solution within a reasonable computational time. This paper first proposes several strategies to facilitate the resolution of such an MIP by reducing the number of binary variables. To do so, no assumptions are made over the final result; only a relaxation of binary constraints over a special pattern is considered. A fast heuristic method, defined as a stochastic topological sorting method, is also developed and provides a proof of optimality (gap). The proposed methods are tested on a real case study and provide results within 2% of optimality after 12 minutes and down to 0.3% if a longer running time is allowed.

Keywords: open pit mining, long-term production scheduling, stochastic optimization, topological sorting, partial relaxation, heuristic method.

4.1 Introduction

A realistic forecast of the long-term production is required to evaluate the viability of an open pit mining project. Due to major costs of infrastructure and investments, revenues lower than expected or even delayed returns on investment can compromise all the project and even cause the bankruptcy of the company. Operations research is traditionally used to deal with all kinds of production prediction problems, and mine planning is one of them. Several MIP models have been developed over the last decades, see Ramazan and Dimitrakopoulos (2004) or Newman et al. (2010), for instance. In these models, the ore body is usually discretized into mining blocks

and the objective of the optimizer is to schedule the extraction of the blocks in an optimal most profitable way, which is maximising the net present value over the life of mine. Johnson (1968) was among the first to propose a linear program to optimize the blocks' extraction, but the linearity of its model resulted in partial extractions which could prove to be infeasible. Gershon (1983) formulated an MIP model but the computational requirements limited its use. Dagdelen (1985) solved the MIP model with a Lagrangian relaxation but, again, could not guarantee feasibility. Since then, many improvements and good quality heuristic methods have appeared in the literature. Ramazan and Dimitrakopoulos (2004) successfully reduced the number of binary variables, major source of complexity, to facilitate the resolution. Cullenbine et al. (2011) proposed a sliding time window heuristic method which gave solutions within 2% of optimality. Several methods using aggregations of blocks have also been introduced. Ramazan et al. (2005) proposed what they call fundamental trees, which are aggregations of blocks with respect to the slope constraints and the similarities of the blocks' values. Boland et al. (2009) presented a method that schedules the aggregates but defines the processing at the block level. Although efficient, the drawback of aggregating blocks is the way blocks are grouped, which is a strong assumption that constrains greatly the solution space, misrepresents mining selectivity and provides misleading results. Chicoisne et al. (2012) presented a topological sort based heuristic that is used as a basis of the final algorithm of this paper. The authors first efficiently solve the linear relaxation of a simplified model (without, for instance, blending constraints) with a decomposition method they call critical multiplier algorithm. Then, they use the obtained fractional schedule as an input for a topological sorting algorithm. Finally, they refine the solution with a local search algorithm which only optimizes the schedule of a small subset of blocks. All these methods are deterministic, as they do not account for geological uncertainty, but they are still widely used in the industry. Furthermore, many commercial schedulers use similar methods (GeoVia Whittle Strategic Mine Planning). Nonetheless, in reality the geological data is far from being known with certainty. It comes from drill holes which have to be sparse because of the dimensions of the deposits and the considerable drilling costs. From this data, average interpolations, named estimations (such as kriging), are conducted to attribute to each block its characteristics. These estimations tend to smooth the grades and do not represent the extreme values or the unavoidable uncertainty, which mislead the mine planning optimization. That's why a new stochastic approach has been developed for two decades; see a review in Dowd (1994);

Ramazan and Dimitrakopoulos (2004); Dimitrakopoulos and Godoy (2006); and Dimitrakopoulos (2011). In this risk-based approach, equiprobable simulated realizations of the ore body are generated and used as an input for the mine scheduling. A stochastic conditional simulation can be defined as a “Monte Carlo technique which represents the in-situ ore body grade and material type variability”, Dimitrakopoulos (1998). More details can also be found in Goovaerts (1997). The information provided by the simulations about the grade variability allows managing the risk while maximising the net present value (NPV). Dimitrakopoulos and Ramazan (2008) proposed a Stochastic Integer Programming (SIP) model for the open pit mine scheduling which was then used several times and has proven its efficiency. Compared to a deterministic approach, the stochastic approach consistently increases the NPV (up to 25% see Dimitrakopoulos 2011, Ramazan et al. 2013, Spleit 2014) and better controls the risk of getting a poor quality production over the set of simulations. Of course, solving such models is even harder than for the deterministic case, and exact methods become unpractical when dealing with instances of realistic size. Several methods have been developed. Among them, we find again the use of blocks aggregation (Menabde, 2004) as well as several metaheuristic methods. Metaheuristic methods do not rely on usual operation research solvers but generally start from an initial solution and modify it, allowing temporary deterioration of the objective function. Some metaheuristics have managed to tackle very large instances but their performance depends on the computational time allowed and the definition of many parameters as well as the generation of an initial solution. Lamghari and Dimitrakopoulos (2012) developed a tabu search method. Montiel et al. (2015) and Goodfellow et al. (2015) both used simulated annealing combined with particle swarm optimisation and differential evolution for the second to address stochastic mining complexes. Gilani and Sattarvand (2016) applied an ant colony optimization algorithm. Lamghari and Dimitrakopoulos (2016) presented a progressive hedging method, a scenario-based decomposition technique, hybridized with a sliding time window heuristic.

In this work, an SIP model is proposed and solved. To reduce the computational time, the solution approach takes advantage of the special structure of the problem. The optimisation of the problem is performed using the commercial solver Cplex (CPLEX User’s Manual V12R6 2014, CPLEX Parameters References V12R6 2014) and does not require neither an initial solution nor strong assumptions such as aggregates. The obtained intermediate solution, not fully binary, is then refined using a topological sorting algorithm. The resulting global method aims to rapidly

produce a near-optimal solution. In what follows, we first present the general Open pit Mine Planning Stochastic Integer Program (OMPSIP) based on Dimitrakopoulos and Ramazan's (2008, 2013) and Spleit's (2014) formulations. Then, two strategies of acceleration are proposed, both aiming to reduce the number of binary variables using the strong intercorrelations between the blocks. The first strategy relaxes variables over a special alternate pattern which simplifies the resolution, while still providing an almost binary solution. The second strategy iteratively selects exclusive sets of variables on which binary constraints are applied with the previous pattern, in order to converge toward a binary solution without any loss of optimality. Finally, a fully binary scheduling algorithm is presented as a stochastic topological sorting on the precedence digraph and weighted by the previous partial schedules obtained. The methods are tested on a case study, a real iron ore deposit owned by the industrial partner. Computational results are presented in Section 4.3 and are followed by conclusions.

4.2 Model

This part first presents the SIP model and two computational acceleration strategies. Then, the main algorithm is detailed.

4.2.1 Notation

Diverse sets, indices, and parameters, used in the proposed Open pit Mine Planning Stochastic Integer Programming (OMPSIP) formulation are described below.

Sets and corresponding indices

$\mathcal{B} = \{i = 1, \dots, N\}$	Set of blocks in the ore body;
$\mathcal{P} = \{p = 1, \dots, P\}$	Set of considered periods for the schedule;
$\mathcal{D} = \{0, 1\}$	Set of destinations available for the blocks where 0 represents the waste dump and 1 the mill;
$\mathcal{S} = \{s = 1, \dots, S\}$	Set of scenarios (equiprobable ore body stochastic simulations);
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$	Set of blocks' characteristics, $\mathcal{C}_1 = \{c_1 = 1, \dots, C_1\}$ linear metallurgical characteristics (e.g. tonnages), $\mathcal{C}_2 = \{c_2 = 1, \dots, C_2\}$ nonlinear characteristics (grades);
$G(\mathcal{B}, A)$	Oriented graph representing the precedence relationships between blocks. On Figure 4-1, $(b, e) \in A$ which means that block $b \in \mathcal{B}$ is a predecessor of block $e \in \mathcal{B}$;

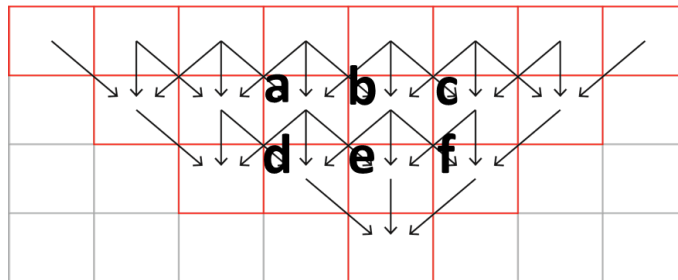


Figure 4-1 Precedence relationships between blocks

$\Gamma_i^+ = \{b \in \mathcal{B}; (i, b) \in A\}$	Set of direct successors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_b^+ = \{d, e, f\}$;
$\Gamma_i^- = \{a \in \mathcal{B}; (a, i) \in A\}$	Set of direct predecessors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_e^- = \{a, b, c\}$;

Γ_i^{-Tot}	Set of the all cone of predecessors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_e^{-Tot} = \{a, b, c\} \cup \Gamma_a^{-Tot} \cup \Gamma_b^{-Tot} \cup \Gamma_c^{-Tot}$;
$\mathcal{N}(i)$	Set of neighbours of block i : typically blocks at the North, East, South and West on the same level and one block below;
$\mathcal{B}^{1/2}$	Subset of the ore body as a checked pattern defining one block on two toward each direction (Figure 4-2 and Figure 4-3);

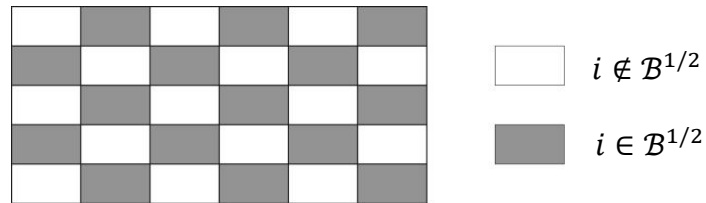


Figure 4-2 Vertical section of the checked pattern ore body

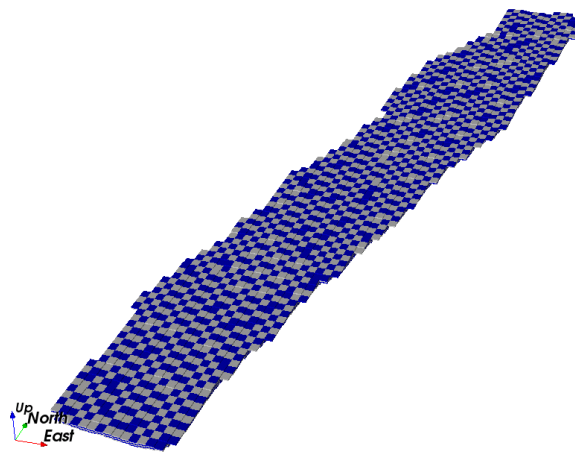


Figure 4-3 Case study checked pattern ore body

Parameters

$v_{i,d,s}$ Economic value of block i in scenario s if it is sent to destination d ;

This economic value depends on several parameters:

$$v_{i,d,s} = \begin{cases} -E_{waste}^{cost} * -TH^{cost} * TH_{i,d} & \text{if } d = 0 \Leftrightarrow \text{waste dump} \\ R_{i,s} - P_{conc}^{cost} * conc_{i,s} - E_{ore}^{cost} * t_{i,s} - TH^{cost} * TH_{i,d} & \text{if } d = 1 \Leftrightarrow \text{mill} \end{cases}$$

Where:

$R_{i,s}$ Revenue from selling the metal content of block i in scenario s ;

$conc_{i,s}$ Concentrate tonnes of block i in scenario s , $conc_{i,s} \in \mathcal{C}_1$;

Where:

$$conc_{i,s} = t_{i,s} * Rec_{i,s}$$

$Rec_{i,s}$ Weight recovery of block i in scenario s , obtained from the simulation of the Davis Tube Weight Recovery (used in the case study);

P_{conc}^{cost} Processing cost of concentrate material per tonne;

E_{ore}^{cost} Extraction cost of ore material per tonne;

E_{waste}^{cost} Extraction cost of waste material per tonne;

$TH_{i,d}$ Truck hours needed to send block i to destination d ;

TH^{cost} Cost per truck hour;

$t_{i,s}$ Tonnage of block i in scenario s ;

$q_{c_1,i,s}$ Quantity of characteristic c_1 of block i in scenario s ;

$g_{c_2,i,s}$ Grade c_2 of block i in scenario s ;

$target_{c,p}^{\pm}$ Minimum (-) and maximum (+) targets of quantity or grade c in period p ;

$pen_{c,p}^{dev\pm}$ Penalty cost of deviation from the targets of quantity or grade c in period p (excess +, shortage -);

r Discount rate taking into account the time value of money and the uncertainty of the future streams of cash flows;

$d_p = \frac{1}{(1+r)^{p-1}}$ Discount factor;

Variables

Binary variables

$$x_{i,d,p} = \begin{cases} 1 & \text{if block } i \in \mathcal{B} \text{ is sent to destination } d \in \mathcal{D} \text{ by period } p \in \mathcal{P}; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases};$$

To simplify the notation, we set $x_{i,d,p=0} = 0, \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}$.

The expression ‘‘by period $p \in \mathcal{P}$ ’’ means that block i was extracted prior to or at period p , formulation used to facilitate the branching during the solving process (Caccetta and Hill, 2003).

Continuous variables

$dev_{c,p,s}^{\pm} \in \mathbb{R}^+$ Deviations from the targets in terms of characteristics $c \in \mathcal{C}$ for scenario $s \in \mathcal{S}$, during period $p \in \mathcal{P}$ (excess +, shortage -);

4.2.2 General stochastic formulation

This section describes the OMPSIP formulation which will be used in the rest of the study.

Objective function

$$\max Z = \overbrace{\frac{1}{S} \sum_{i \in \mathcal{B}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{s \in \mathcal{S}} d_p * v_{i,d,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1})}^{\text{Part 1}} - \overbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{s \in \mathcal{S}} d_p * (pen_{c,p}^{dev+} * dev_{c,p,s}^+ + pen_{c,p}^{dev-} * dev_{c,p,s}^-)}^{\text{Part 2}}$$

The objective function is a trade-off: *Part 1* aims at maximising the average profit, discounted cash flow (DCF), while *Part 2* minimizes the deviations from the production targets; that is, the risk associated with the geological uncertainty. Using this formulation, the expected result is a schedule robust to the set of simulations. This formulation accepts a lower average DCF to better control the risk. The application of the discount factor also delays the risk and favors the extraction of the most valuable blocks in the early periods. The latter is a key point for mining companies as they usually expect a fast return on their investment.

Constraints

Reserve constraints

$$(1) \quad x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}$$

$$(2) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall p \in \mathcal{P}$$

The first set of constraints (1) specifies that a block extracted at a certain period is also defined as already extracted in the following periods, thereby, extracted at most once. The set of constraints (2) states that a block can be sent to only one destination.

Slope constraints

$$(3) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{j,d,p} \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall j \in \Gamma_i^-, \forall p \in \mathcal{P}$$

A block i is available for extraction only if all of its direct predecessors Γ_i^- have already been extracted or are extracted within the same period. This means that the block is reachable; i.e., without blocks above it and that the slope constraints for the stability of the walls are satisfied.

Capacity constraints

(4.1) Upper bound

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} \left(q_{c_1,i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) - dev_{c_1,p,s}^+ \leq target_{c_1,p}^+ \quad \forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

(4.2) Lower bound

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} \left(q_{c_1,i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) + dev_{c_1,p,s}^- \geq target_{c_1,p}^- \quad \forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

These two sets of constraints define soft constraints for the upper (4.1) and lower bound (4.2) on the quantities targets at each period and in each scenario. The variables $dev_{c_1,p,s}^\pm$ are used as buffers to allow deviations but these deviations are penalized in the objective function.

Grade quality constraints

(5.1) Upper bound

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(g_{c_2,i,s} * t_{i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) - dev_{c_2,p,s}^+ \\ \leq target_{c_2,p}^+ * \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(t_{i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) \quad \forall c_2 \in \mathcal{C}_2, d = 1, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

(5.2) Lower bound

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(g_{c_2,i,s} * t_{i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) + dev_{c_2,p,s}^- \\ \geq target_{c_2,p}^- * \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(t_{i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \right) \quad \forall c_2 \in \mathcal{C}_2, d = 1, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Similar to the capacity constraints, constraints (5.1) and (5.2) penalize excess and shortage of the average grade c_2 at each period and for each scenario.

Extraction smoothing constraints

$$(6) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{j,d,p} \quad \forall i \in \mathcal{B}^{1/2}, \forall j \in \mathcal{N}(i), \forall p \in \mathcal{P}$$

These operational constraints impose a continuous sequence of extraction in a way that the extracted blocks, at least within the same period, should be close to each other. We could penalize only nearby blocks not extracted together, but the case study considered in this paper justifies this stronger formulation in which we enforce the blocks on a checked pattern to be simultaneously extracted with their neighbours.

Earliest period of extraction constraints

$$(7) \quad x_{i,d,p} = 0$$

$$\forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \left\{ \bigcup_{c_1 \in \mathcal{C}_1} \left(t \in \mathcal{P}; \forall s \in \mathcal{S}, \sum_{t'=1}^t target_{c_1,t'}^+ - \Delta_{c_1,t'} \leq \sum_{j \in \Gamma_i^{-Tot} \cup \{i\}} q_{c_1,j,s} \right) \right\}$$

These last constraints, equivalent to an earliest start of a job, are optional. They eliminate variables to make the model easier to solve. The idea is that to reach a block i by period p , at least all its full cone of predecessors Γ_i^{-Tot} must be extracted. This cone plus the block i represent a certain tonnage or quantity which can be compared to the sum of the quantity targets from the first period to period p . If this last tonnage is less than the one of the cone, it is impossible to reach i by p , even in the most optimistic situation in which only the cone is mined. As a consequence, in such a case, the corresponding variables $x_{i,d,p}$ can be set to 0, which says that block i will not be extracted at period p , without any loss of optimality. $\forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall t' \in \mathcal{P}, \Delta_{c_1,t'} \in \mathbb{R}^+$ are parameters used to keep the flexibility of the stochastic formulation which allows deviations from the production targets. Typically one can take $\Delta_{c_1,t'} \cong \frac{1}{4} * target_{c_1,t'}^+$.

4.3 Acceleration strategies

4.3.1 Partial relaxation

The main issue when solving this kind of SIP problem with commercial solvers like Cplex is the required computational time. Indeed, often, the larger the number of variables and constraints is, the more complicated it is to obtain an optimal solution. When binary variables are considered, the complexity gets much larger and even obtaining a reasonably good solution may be hopeless, unless the problem is decomposed and solved sequentially. The ideas developed in this section aim to precisely reduce the amount of binary variables in order to accelerate the solution process. Of course, the inherent goal is also to obtain a final result close to the initial formulation; i.e., extraction variables which must be binary.

General assessment

The precedence relationship between two blocks i and j strongly links their extraction variables $x_{i,d,p}$ and $x_{j,d,p}$. Directly from the slope constraints (3), the following expression is obtained:

$$(\forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad x_{i,d,p} = 1) \Rightarrow \left(\forall j \in \Gamma_i^{-Tot}, \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{j,d,p} = 1 \right)$$

This leads to the idea that if one block i is constrained to be binary then its extraction at period p enforces all its predecessors to be fully mined too: all the corresponding extraction variables will be binary since, in practice, a block is sent to only one destination.

Partial relaxation using an alternate checked pattern

For a given mining block i , the reserve constraints (1) and (2) tighten the possible values if for a given period the extraction variables have to be binary. From this assessment comes this idea of enforcing the binarity of only one block on two toward each direction with an alternation between two consecutive periods as shown on Figure 4-4.

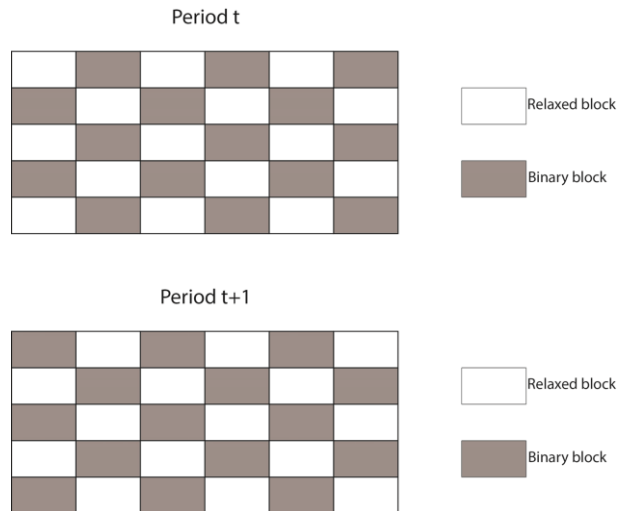


Figure 4-4 Alternate checked pattern relaxation

Formally, this can be defined as:

$$(8) \quad x_{i,d,p} \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{if } \left((i \in \mathcal{B}^{1/2} \text{ and } p \bmod 2 = 0) \text{ or } (i \notin \mathcal{B}^{1/2} \text{ and } p \bmod 2 = 1) \right) \\ [0,1] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}$$

This relaxation divides the number of binary variables by two while leading toward an almost binary result and without adding any constraints.

Based on the above remarks, the following expression is obtained:

$$(\forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad x_{i,d,p} > 0) \Rightarrow (x_{i,d,p+1} = 1)$$

It means that whenever a block has begun to be extracted (partially or fully), it has to be fully extracted by the next period. The definition of the extraction variables by equation (8) reduces quite substantially the solution space.

Then, the extraction variables corresponding to the waste destination $x_{i,d=0,p}$ can also be relaxed. A similar relaxation was proposed by Ramazan and Dimitrakopoulos (2004). The authors predefined the destination of each block based on its economic value and relaxed the extraction variables corresponding to blocks to be sent to the waste dump. The supportive idea is that a block sent to the waste dump is extracted only to access other profitable blocks below it. The solver has no interest in fractioning its extraction so binary values can be expected for these

variables. When adding this new relaxation, the total amount of binary variables is divided by 4 compared to the initial model.

In order to test the efficiency of this partial relaxation, a set of tests has been run with three different integrality gaps (1%, 2% and 5%) and different numbers of periods (2, 3 and 4). The ore body used is the full ore body model presented later in Section 4.5. It contains 8223 blocks and 2 destinations. Table 4.1 presents, for different gaps and different number of periods, the results obtained for the partially relaxed model and the fully binary one. Columns 4 and 5 give the number of binary variables in the model before and after pre-processing in Cplex. Column 6 presents the computational time for the branch and cut algorithm, while column 7 shows the total computational time, including the pre-processing made by Cplex. Column 8 shows the computational efficiency of the partially relaxed model (PR) compared to the fully binary model (FM) as $\frac{Time(PR)}{Time(FM)} * 100\%$. Column 9 shows the difference in the objective function of Cplex between the partially relaxed model and the full one; of course since the full model is more constrained its objective function is slightly lower. Columns 10 and 11 present the resulting number of fully extracted blocks and the remaining non-binary extraction variables.

Tableau 4-1 Comparison between the partially relaxed model and the full binary model

GAP	#PERIODS	MODEL	#binary variables	#binary variables Cplex	branch&cut (s)	time (s)	Comparison PR vs FM	Difference obj. cplex PR-FM	#fully extracted blocks	#non binary extraction variables
1%	2	PR	8223	6919	549	678	41.10%	0.15%	291	43
		FM	32892	9015	1018	1152			361	0
	3	PR	12334	10828	2253	2539	62.50%	0.08%	416	82
		FM	49338	14146	6477	6780			467	0
	4	PR	16446	14871	6858	7339	5.60%	0.07%	521	86
		FM	65784	19407	7318	7773			606	0
2%	2	PR	8223	6919	562	700	32.60%	0.15%	284	43
		FM	32892	9015	996	1039.2			361	0
	3	PR	12334	10828	2258	2560	62.10%	0.08%	416	82
		FM	49338	14146	6472	6756			467	0
	4	PR	16446	14871	6300	6776	13.90%	0.07%	521	86
		FM	65784	19407	7409	7874			606	0
5%	2	PR	8223	6919	13	142	10%	1.10%	484	30
		FM	32892	9015	13	158			494	0
	3	PR	12334	10828	64	358	66.70%	0.94%	595	105
		FM	49338	14146	750	1075			687	0
	4	PR	16446	14871	4354	4841	23.50%	0.40%	834	42
		FM	65784	19407	5834	6324			825	0

PR = Partially Relaxed Model (1on2)

FM = Full Model (all binary)

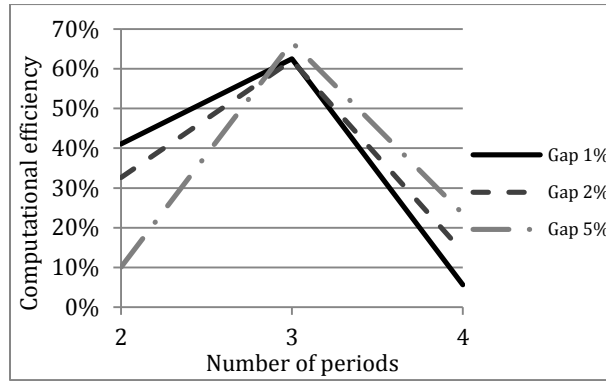


Figure 4-5 Computational efficiency: partial relaxation vs initial model

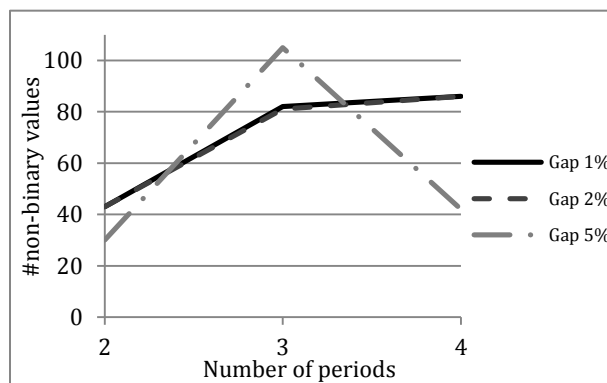


Figure 4-6 Number of non-binary values of the partially relaxed model

Even if it is difficult to define a general tendency about the efficiency of the partial relaxation (Figure 4-5), a computational gain of time is always present, from 5.6% and up to 66.7%. A similar effectiveness can be expected for more periods. Of course, the trade-off of this gain is that some variables remain fractional (Figure 4-6), but they are very few: considering 4 periods those variables are between 42 and 86 (depending on the Gap) out of 65784 initially binary defined variables.

4.3.2 Binary convergence

The previous partial relaxation uses the strong relationship between blocks but these interconnections can be exploited further. Indeed, the optimization process is led by high value blocks which results in that their predecessors are extracted fast and completely. This idea is confirmed by the resolution of the Relaxed OMPSIP (R-OMPSIP) model (for which all the

binary variables are relaxed). The result of the relaxation is a fractional schedule but most of the blocks are either fully mined in one period or within few consecutive periods. As an example, for the following case study, which consists of 8223 blocks, 10 periods and 2 destinations (164460 binary variables), the relaxed solution only presents 4819 fractional values, which corresponds to 1225 different blocks.

A sequential algorithm is proposed to decrease again these non-binary values. The general concept is to solve the relaxed model R-OMPSIP and to apply binary constraints only to a subset of variables, denoted Λ_k , at each iteration k , defined as:

$$\Lambda_k = \{x_{i,d,p}; \exists k' \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, x_{i,d,p}^{k-1} \notin \{0,1\}\}$$

More explicitly, this is the set of all the supposedly binary variables which have been attributed a non-binary value during any previous iteration. On this set is applied the partial relaxation defined in Section 4.3.1. Figure 4-7 presents the result of the relaxed model. The other variables are kept relaxed and not fixed. The blocks identified by a black cross are the partially extracted ones. In the next iteration (Figure 4-8), these same blocks are this time enforced to be binary (white cross), the new result presents other partially extracted blocks which once again will be binary constrained during the following iteration.

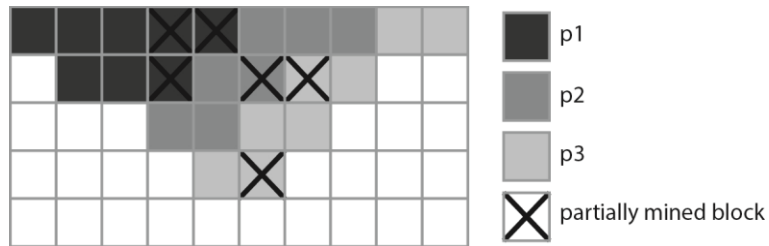


Figure 4-7 Binary convergence iteration 0

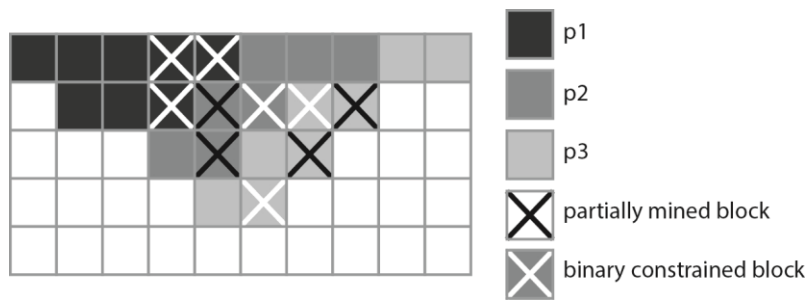


Figure 4-8 Binary convergence iteration 1

The expected result is a decreasing number of fractional variables. An interesting point is that, compared to the initial OMPSIP model, no constraints are added but only binary variables are relaxed, so with the hypothesis that the algorithm converges to a fully binary solution, this solution would also be optimal for the initial model. Of course this is deceptive but a low number of fractional values would be totally satisfactory from the operational point of view and the corresponding objective function represents a tighter upper bound.

The proposed binary convergence algorithm has been tested on the case study deposit with 8 iterations. The results are convincing, after 8 iterations of less than one hour each, the remaining number of fractional values drops to 348 (Figure 4-9), which corresponds to 202 different blocks. Of course, the number of binary constrained variables increases with the number of iterations but remains low: from 2372 at iteration 1 up to 6129 at iteration 7. Figure 4-9 presents the evolution of the number of remaining fractional values iteration after iteration (decreasing function) and the computational time they required.

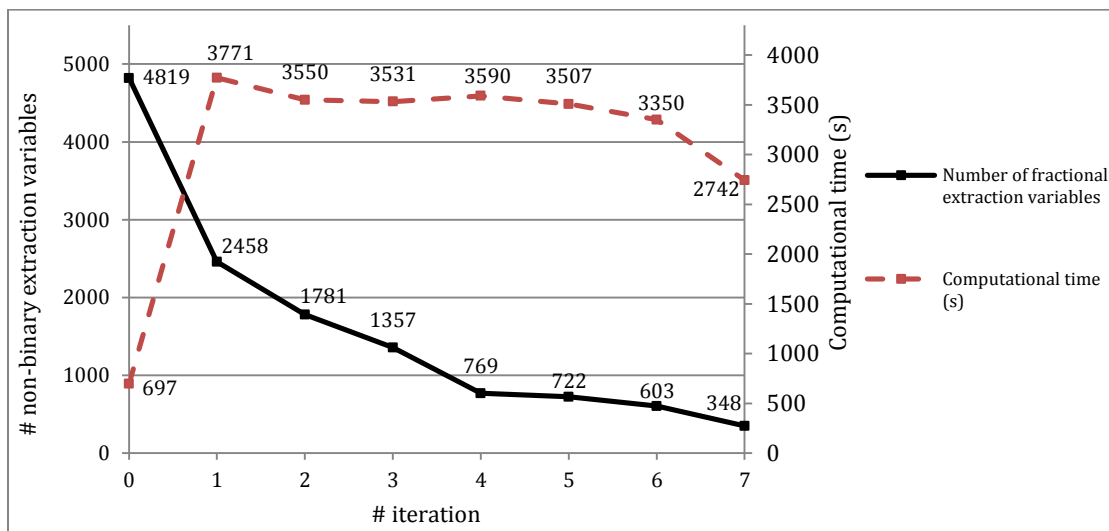


Figure 4-9 Binary convergence

Moreover, the associated risk is also well controlled. For example, Figure 4-10 shows the Discounted Cash Flow (DCF) profiles for all the scenarios and their average. The scenarios do not present significant deviations from the average. Figure 4-11 presents the profiles of the silica grade (main pollutant) which is well in the range of tolerance, only less than 0.1% above for two scenarios and two periods among the late periods. This is acceptable and normal because the risk is differed to the latest periods with the applied discounted factor.

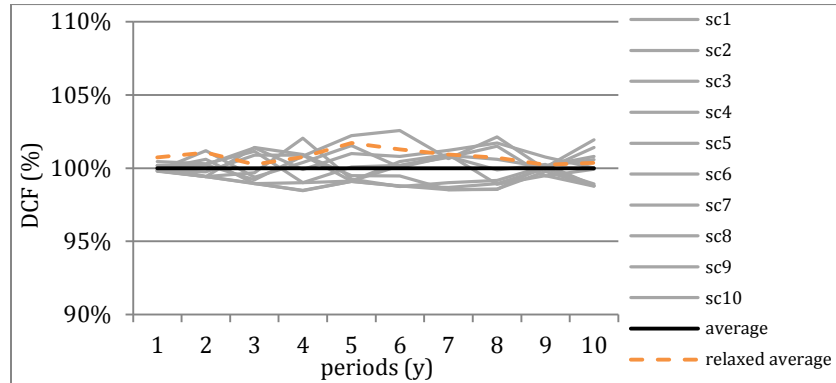


Figure 4-10 DCF per year of the binary convergence algorithm after iteration 7

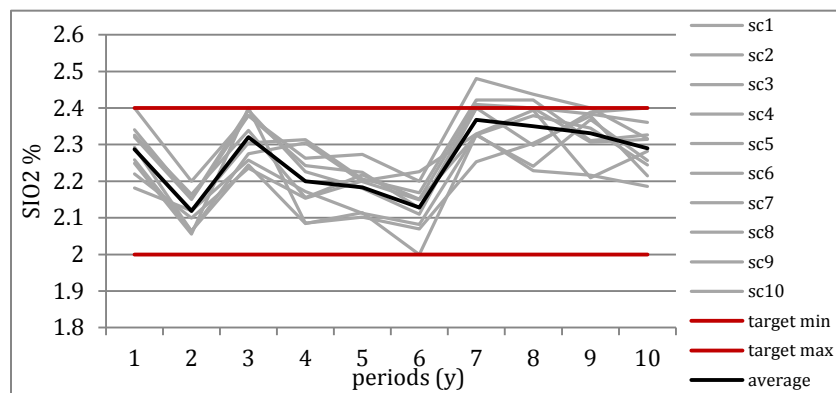


Figure 4-11 Silica grade from the binary convergence algorithm after iteration 7

4.4 Heuristic method

The previous algorithms facilitate the resolution of the OMPSIP model by reducing the number of binary variables, provide a final solution almost but not fully binary and require a reasonable computational time. The objective is now, still using strategies to reduce the computational time, to develop a heuristic method which is fast and which provides a full binary high quality solution. The method here was inspired from Chicoisne and Espinoza's work (2012). It was adapted to a stochastic formulation with several destinations and more block selectivity.

4.4.1 Linear relaxation

The first step is to solve the relaxed model R-OMPSIP described in Section 4.3.2. The result is a fractional schedule which will be used as an input for the main algorithm. Two options can be considered. The first one is to only use this relaxed solution which takes 11 minutes to obtain for

the case study considered in this paper. The other option is to apply a few iterations of the binary convergence algorithm described in section 4.3.2, for which each iteration takes around one hour. This second option gives a more binary input and is supposed to be closer to the optimal binary result. Depending on the time allowed for the total computational time, one option or the other can be used. Both are tested to study their impact on the final schedule.

4.4.2 Stochastic TopoSort Algorithm

The main idea of the algorithm is a topological sorting of the blocks based on pre-defined weights and under the condition that each block, when scheduled, is available; that is, its predecessors have already been extracted. The definition of the weights is essential as, for the assignment of a block to a period, the block having the highest weight among the available blocks is selected. More details are given after the formulation of the algorithm.

Global algorithm

Additional notation

$x_{i,d,p}^*$	Fractional value obtained from the relaxed model representing the percentage of block $i \in \mathcal{B}$ sent to destination $d \in \mathcal{D}$ at period $p \in \mathcal{P} \cup \{0\}$;
$d_{c_1,p,s}^*$	Value of the deviation of $c_1 \in \mathcal{C}_1$ from the quantity target in period $p \in \mathcal{P}$, for scenario $s \in \mathcal{S}$, obtained from the relaxed model;
(p_i, d_i)	Pair of variables used to store the period of extraction and destination assigned to the block $i \in \mathcal{B}$;
$rcap_{c_1,p,s}$	Residual capacity of quantity $c_1 \in \mathcal{C}_1$ in period $p \in \mathcal{P}$ for scenario $s \in \mathcal{S}$; i.e., the quantity that can still fit into period p without exceeding the upper bound target;

Definition of the weights

From the relaxed or partially relaxed solution, two sets of weights $\{w1_i, \forall i \in \mathcal{B}\}$ and $\{w2_{i,d}, \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}\}$ are defined and will be used in the TopoSort algorithm.

$$(9) \quad E1_i = \sum_{p \in \mathcal{P}} p * \sum_{d \in \mathcal{D}} (x_{i,d,p}^* - x_{i,d,p-1}^*) + (P + 1) \left(1 - \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,P}^* \right) \quad \forall i \in \mathcal{B}$$

$$(10) \quad w1_i = -E1_i \quad \forall i \in \mathcal{B}$$

$$(11) \quad w2_{i,d} = \sum_{p=1}^P (x_{i,d,p}^* - x_{i,d,p-1}^*) \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}$$

$E1_i$ can be defined as the expected value of block i 's extraction period. Since the weight $w1_i$ is the opposite of $E1_i$, the higher the weight is the sooner the block is supposed to be extracted. The weight $w2_{i,d}$ represents the percentage of block i sent to destination d from which the most likely destination of the block can be directly determined. The objective of both sets of weights is to give to the main heuristic method an input that allows it to be as close as possible to the relaxed solution while respecting the various constraints.

Heuristic method: Stochastic TopoSort Algorithm (STA)

1. $\forall i \in \mathcal{B}, d_i \leftarrow \arg \max \{w2_{i,d}; d \in \mathcal{D}\}$
2. $j \leftarrow 1$
3. $p_{cu} = 1$
4. $\forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}, rcap_{c_1,p,s} \leftarrow target_{c_1,p}^+$
5. **while** ($j \leq N$) **do**
6. **if** ($\xi = \{i \in \mathcal{B}; \delta^{-1}(i) = \emptyset \text{ and } [(d_i = 1 \text{ and } \forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall s \in \mathcal{S}, rcap_{c_1,p_{cu},s} + d_{c_1,p_{cu},s}^* \geq q_{c_1,i,s}) \text{ or } (d_i = 0)]\} \neq \emptyset$) **do**
7. $x \leftarrow \arg \max \{w1_y; y \in \xi\}$
8. $G \leftarrow G \setminus \{x\}$
9. $p_x \leftarrow p_{cu}$
10. $j \leftarrow j + 1$
11. $\forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall s \in \mathcal{S}, rcap_{c_1,p_{cu},s} \leftarrow rcap_{c_1,p_{cu},s} - q_{c_1,x,s}$
12. **else do**
13. $p_{cu} \leftarrow p_{cu} + 1$
14. **return** $\{(p_i, d_i), \forall i \in \mathcal{B}\}$

Step 1 attributes the most probable destination to every block, using the relaxed solution obtained from the resolution of the R-OMPSIP model. Step 3 defines the current period as the first one. Step 4 states that for each scenario, each period, the initial residual capacity of quantity c_1 is the upper target. With step 5 begins a loop over all the blocks to be scheduled. Step 6 defines, for each iteration, if it exists at least one block that is available from the predecessors' point of view and which fits into the current period. Here, a block "fits" into a period if it has to be sent to the waste dump or if for every scenario, all its linear characteristics c_1 are less than the remaining capacities of the period $rcap_{c,p,cw,s}$ plus the corresponding deviation obtained from the relaxed solution. The cost and impact of this deviation were already considered when solving the relaxed model. If such blocks exist, the one with the highest weight w_1 is selected in step 7, it is removed from the graph G in step 8 and assigned to the current period (step 9). The number of already scheduled blocks and the residual capacities are updated in steps 10 and 11. In the case where no block can fit anymore in the current period, the next period is considered (step 13).

In the initial OMPSIP model, several grade quality or continuous extraction constraints are applied but are not taken into account in the STA. However, the algorithm relies on the relaxed result, which contains and respects, as much as possible, these constraints. As a consequence, it is expected from STA to obtain a satisfactory binary schedule with respect to these constraints.

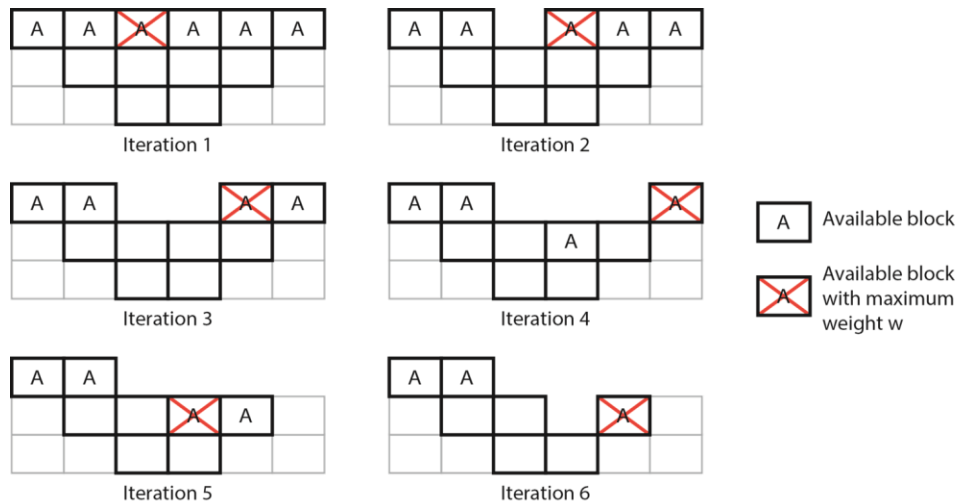


Figure 4-12 Topological sorting steps

4.5 Case study

The stochastic topoSort algorithm was tested on an iron ore deposit, owned by the industrial partner in Labrador, Canada.

4.5.1 Presentation of the deposit

The dimensions of the deposit are around 10 km long from South to North, 2.5km large from East to West and up to 180m deep. A particularity of this deposit is a low slope of around 6° East and the presence of several lithologies. The iron ore is of taconite type which is a sedimentary formation mainly composed of 25-30% magnetite. The typical method to extract the ore from the rock is a magnetic separation after fine crushing. A good estimate of the magnetic recoverable ore is the David Tube test.

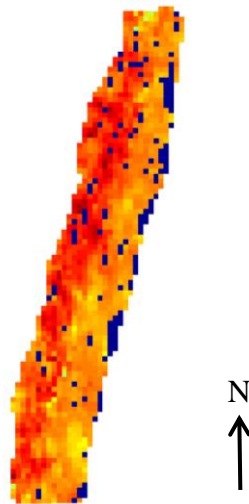


Figure 4-13 Plan view of the iron ore deposit, feh grades

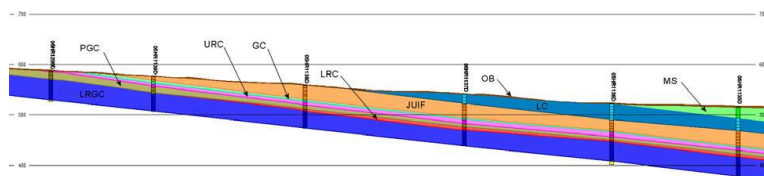


Figure 4-14 Cross section of the deposit with the low dip layers

4.5.2 Sensitive points and parameters

The geological data and uncertainty is based on a set of 10 stochastic conditional simulations provided by the company. The ore body model is composed of 8223 blocks of dimensions 100x100x15m. The method used to simulate, named DBMAFSIM for direct block

minimum/maximum autocorrelation factors simulation (Spleit 2014), first simulates the lithology and then diverse grades: FeH (head iron grade), Fec (concentrate iron grade), DTWR (Davis Tube Weight Recovery) representing the recoverable iron grade, SiC (concentrate silica grade) for the blocks within each layer. In this case study, the only linear characteristic of interest is the amount of concentrate tonnes per period. Two non-linear characteristics are considered: the average DTWR grade per period and the average silica. The silica represents the main pollutant and is crucial for the quality of the production: a low grade assures a premium price on the market and provides a competitive advantage. Two destinations are considered: the mill to process the ore and the waste dump. The scheduling is done over 10 periods.

As previously mentioned, the low dip and great South-North extension of the deposit complicate the scheduling. Indeed, obtaining a continuous sequence of extraction is more delicate because of the amount of blocks without any precedence relationships. Moreover, the low depth does not allow defining an earliest period of extraction for many blocks (not many variables can be set to 0).

When solving the models, independently of the number of periods or blocks, a critical point for the required computational time is the definition of the deviations' costs $pen_{c_1,p}^{dev\pm}$ and $pen_{c_2,p}^{dev\pm}$. These artificial costs are only defined to allow flexibility to the solver in letting it go over the quality constraints but not too much to respect a tolerable margin from the contracts for instance. It was noticed that defining too high such costs not only leads to unnecessary strict constraints which result in a lower DCF but also increases considerably the computational time. This last point comes from the fact that with high penalties, a small modification in the result has a considerable impact on the objective function which forces to test much more combinations. Finding, by trial and error, the smallest cost possible to find a good quality solution (which respects well the targets of production) provides a considerable computational time gain.

With the previous parameters, the OMPSIP model contains 164460 binary variables (extraction variables $x_{i,d,p}$), 600 continuous ones (deviation variables $dev_{c,p,s}^{\pm}$) and around 900000 constraints. The earliest period of extraction constraints (7) fix 3780 binary variables to 0.

4.5.3 Results: Profits and robustness

4.5.3.1 Relaxed solution as an input to the stochastic topoSort algorithm (STA)

In this section, the schedule obtained from the fully relaxed OMPSIP model is used as an input for the STA to calculate the most probable destination of each block and its expected period of extraction (weights). For this case study, which is of relatively small size, the relaxation took only 9 minutes to solve. For larger instances, a stochastic implementation of Bienstock and Zuckerberg's work (2010) on solving the relaxed model could be considered. The STA took 3min to run and the results are discussed below. Figure 4-15 presents the obtained schedule, the blocks being identified with the label “-1” are those that are not extracted. We see the effect of the extraction smoothing constraints (6) with, especially in the Northern part of the deposit, blocks extracted close to each other. However, some isolated spots are also present. Those different zones are satisfactory considering the flatness of the deposit and the size of the blocks, excepting a 400m long zone, they are all more than 800m long.

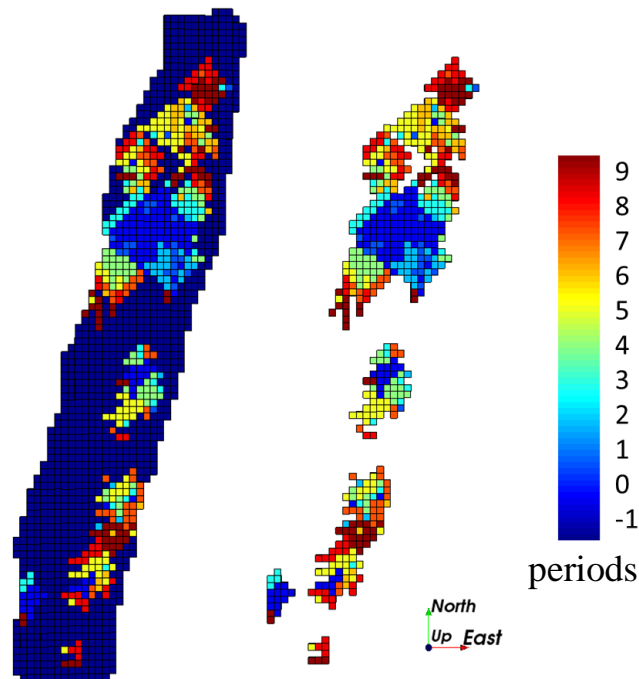


Figure 4-15 Schedule plan views

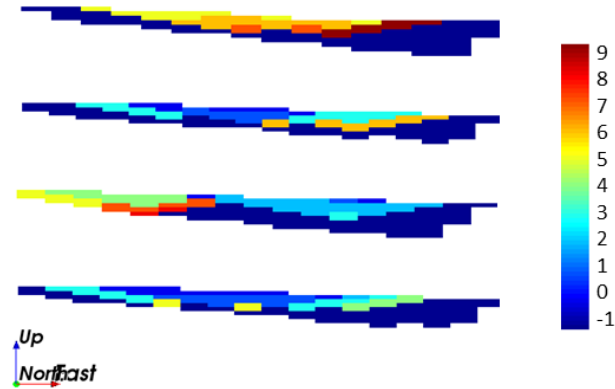


Figure 4-16 Typical schedule E-W sections

Figure 4-16 presents four typical E-W sections of the schedule, we see the connectivity of the blocks extracted within a shared period and also the respect of the precedence constraints.

Figure 4-17 shows the destination of the blocks, we can see that not a lot of waste is extracted.

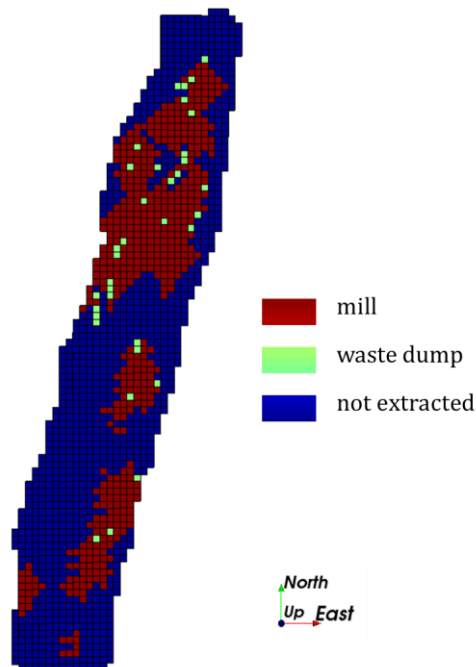


Figure 4-17 Destinations plan view

We know that the value of the relaxed solution represents an upper bound on the optimal value of OMPSIP, an ideal situation in which all blocks can be partially combined to give the highest profitability. To evaluate how close the solution from STA is to the relaxed one, we can calculate for each block the difference between the expected period of extraction (fractional values)

obtained from the relaxed solution and the period of extraction from STA (binary values). The results are presented in Figure 4-18 in which the abscissa represents the number of periods of differences and the ordinate the number of blocks that present this difference. The results are convincing, only 130 blocks are not scheduled within the same year and this number drops to 24 for a difference of at least two years.

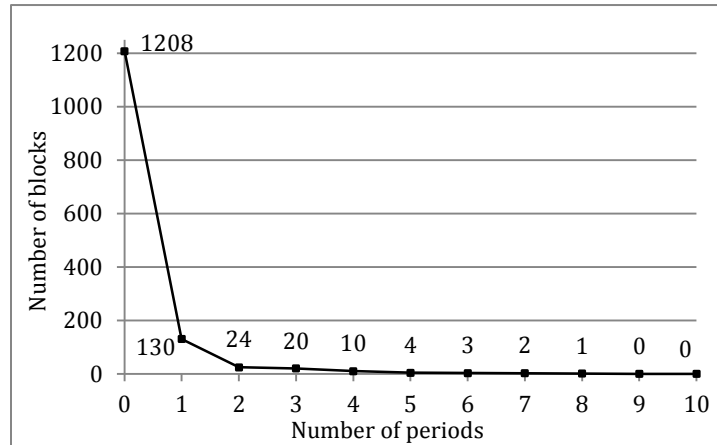


Figure 4-18 Differences between the relaxed and the binary solution

The profiles over the scenarios for the diverse quality constraints are very satisfactory. That is, an average close to the targets and a well-controlled risk distribution. The production concentrate material (concentrate of iron) is very well satisfied, on Figure 4-19 we see that the average production is close the target. The run of mine (total amount of material sent to the mill), which was not constrained, is plotted in Figure 4-20 to make sure the differences between scenarios are not too important. Great differences would require for instance different fleets of trucks and shovels, which is not desirable from the operational side. The silica (Figure 4-21) is also well controlled and the average DTWR grade (Figure 4-22), the recoverable iron grade, fluctuates around the upper target which is not surprising since the higher the average iron grade is, the more profitable the production is. We just want to make sure that not all the highest grade blocks are extracted together in the first periods.

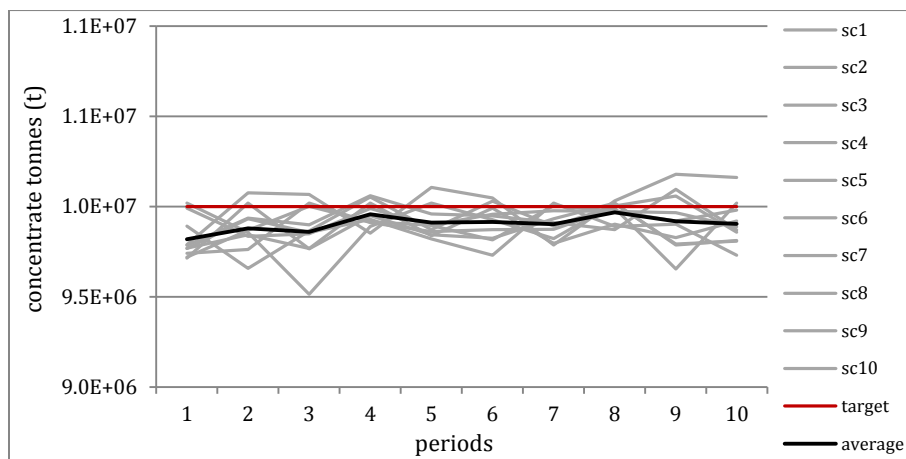


Figure 4-19 Concentrate tonnes (iron)

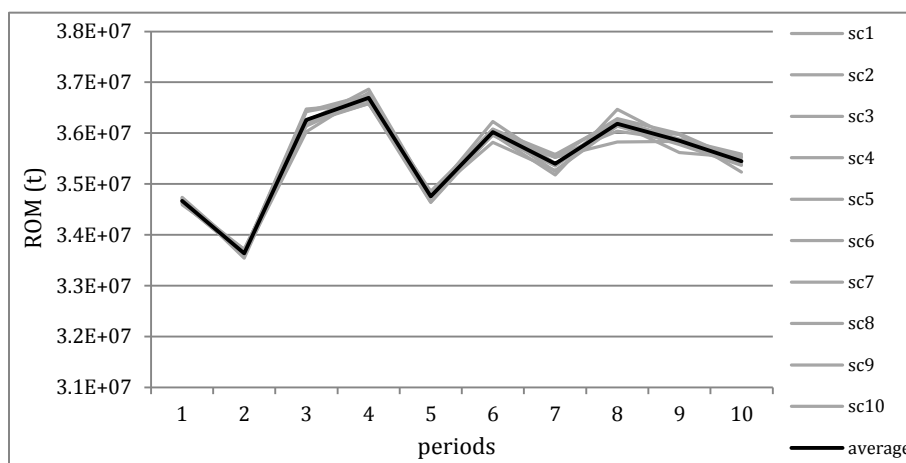


Figure 4-20 Run of mine (material sent to the mill)

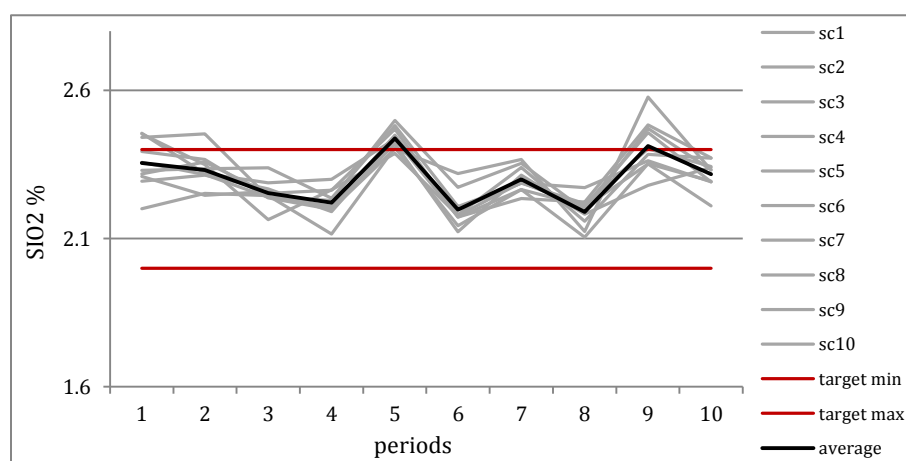


Figure 4-21 silica grade

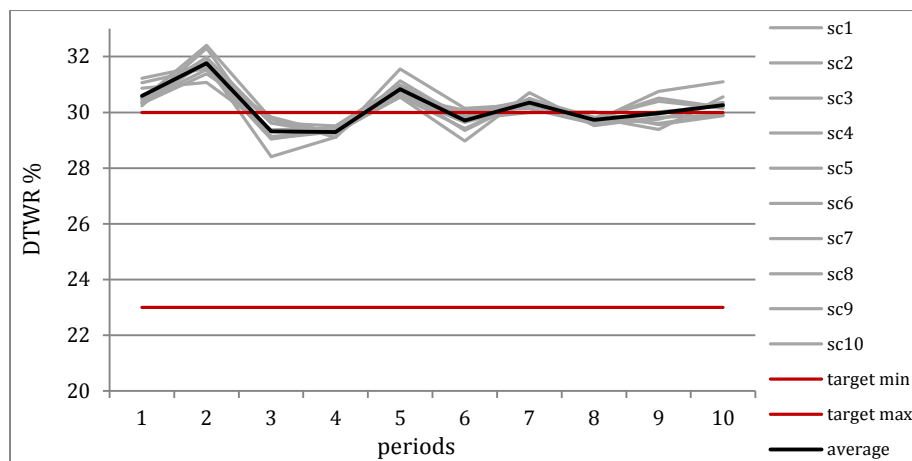


Figure 4-22 DTWR grade (recoverable iron grade)

In terms of discounted cash flow, once again the schedule accounts for the uncertainty with DCF profiles close to their mean. The range of variability after 10 years corresponds to 1.45% of the expected DCF.

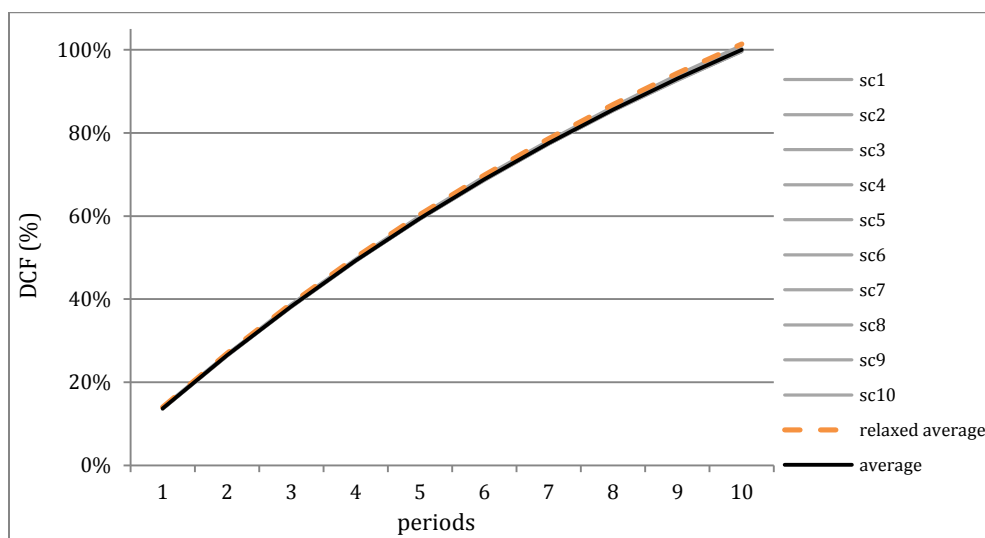


Figure 4-23 Cumulative DCF

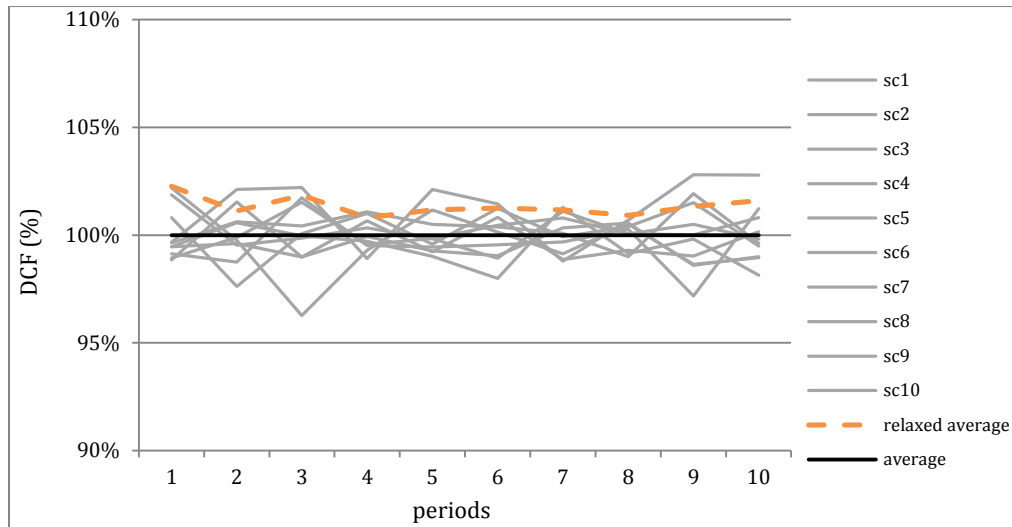


Figure 4-24 Discounted cash inflow per period

The figures above only give information about the robustness of the schedule. To evaluate the quality of the DCF, we can, as previously mentioned, compare for each scenario the DCF of the relaxed solution (upper bound) and the binary solution. For each scenario s , we can calculate a gap defined as: $gap = \frac{DCF_s^{relaxed} - DCF_s^{STA}}{DCF_s^{relaxed}}$, for which the highest calculated value is 1.42%. This means that in the worst case, the schedule obtained from the STA is less than 1.42% away from the optimal solution.

Tableau 4-2 GAP between the relaxed model and the STA solutions

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gap relaxed - STA (%)	1.38	1.36	1.36	1.31	1.37	1.38	1.33	1.36	1.42	1.39

These DCFs do not take into account the penalty costs (*Part2* of the objective function), essential in the resolution of the model. It is also interesting to compare the values of the objective function of Cplex with the new value $gap^{Cplex} = \frac{obj_{Cplex}^{relaxed} - obj_{Cplex}^{STA}}{obj_{Cplex}^{relaxed}}$. This time the gap^{Cplex} is 2.291%. The larger value of here gap^{Cplex} compared to the gaps calculated in term of DCF expresses that the deviations from the targets are larger for the solution from the STA than from the relaxed model, even if they remain moderate.

The obtained results are very satisfactory, especially being within 2.3% of the optimality and as the required computational time is only 629 seconds for the relaxed model and 87 seconds for the TopoSort algorithm, 11min56sec in total with Cplex v12.4 and computer equipped with a processor i7-2600S 2.8GHz and 8GB of RAM.

4.5.3.2 Partially relaxed solution as an input to the STA

In this section, instead of calculating the weights of the STA based on the relaxed model R-OMPSIP, the fractional schedule obtained after a 4 iterations of the binary convergence algorithm defined in section 4.3.2 is used. The objective value of this schedule is a tighter bound on the optimal binary result. Indeed, since more extraction variables are constrained to be binary, the formulation of the last iteration is closer the initial OMPSIP model.

Four iterations of the binary convergence algorithm have been run, the computational times required for each iteration and the number of remaining fractional variables is presented in Figure 4-25. We can see that this number of remaining fractional variables decreases fast and goes down to 166 after 4 iterations. As expected, since additional binary constraints are added at each iteration, the objective value of Cplex decreases up to 1% after three iterations. It is interesting to note that, since this objective value is a tighter upper bound on the optimal binary solution, we can recalculate the $\text{gap}^{\text{Cplex}}$ of the previous STA solution obtained with the relaxed model as input and we obtain now a value of 1.9%.

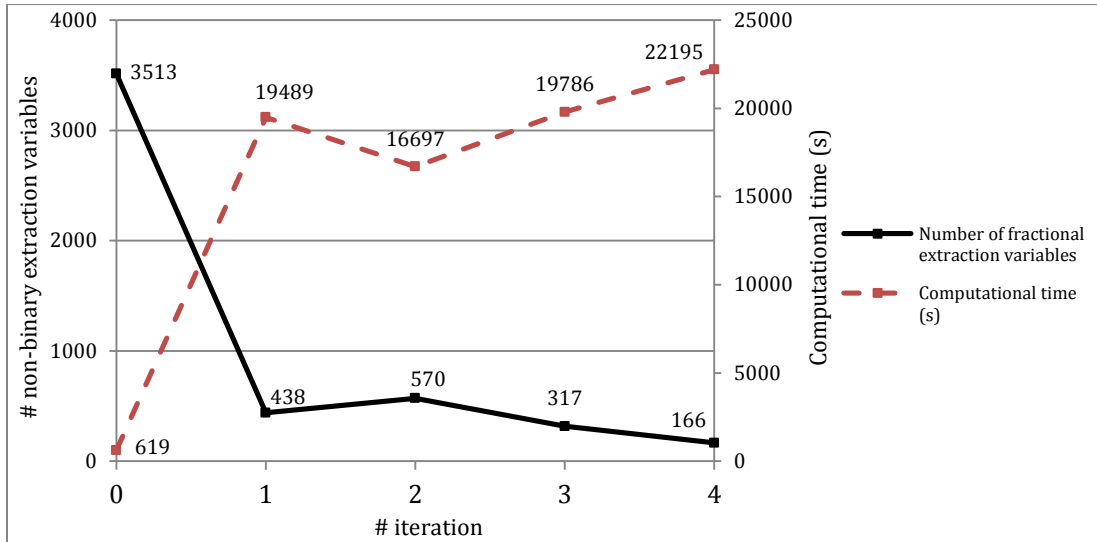


Figure 4-25 Binary converged schedule

The STA is applied using the fractional schedule provided by the 4th iteration (referenced as converged STA) and the results are convincing. First, the differences between the fractional input schedule and the final binary one are small as can be seen on Figure 4-26. Then, the quality constraints are even better respected with a concentrate production very close to the target (Figure 4-27), an average silica grade completely within the range of tolerance (Figure 4-28), and a DTWR grade closer to the upper bound (Figure 4-29).

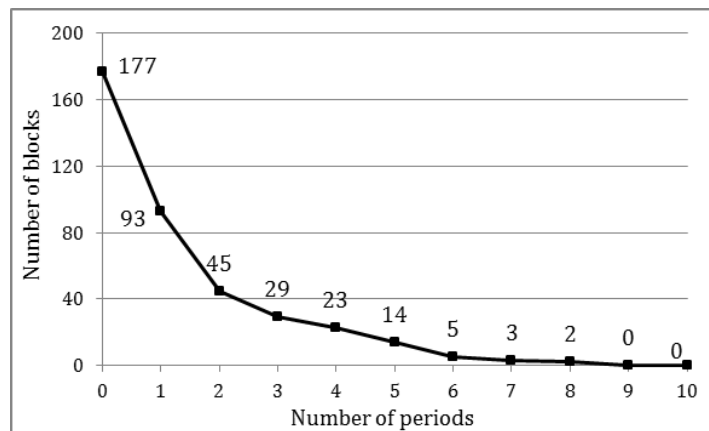


Figure 4-26 Differences partially relaxed vs converged STA solution

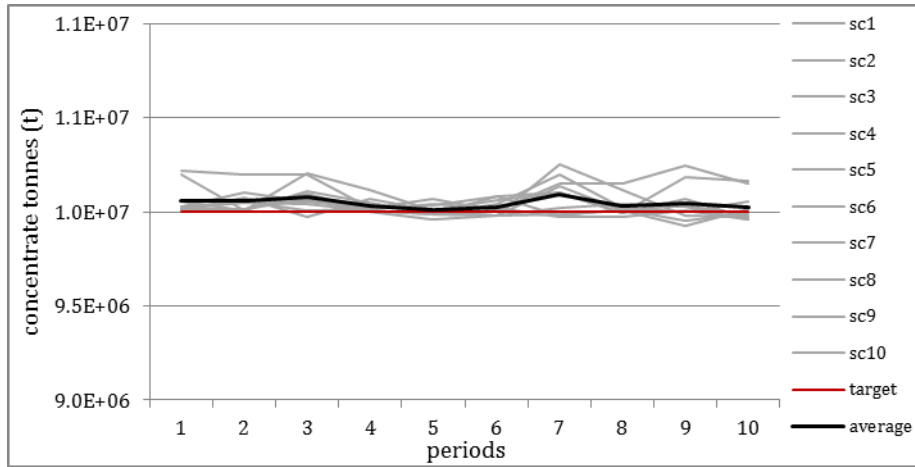


Figure 4-27 Concentrate tonnes, converged STA

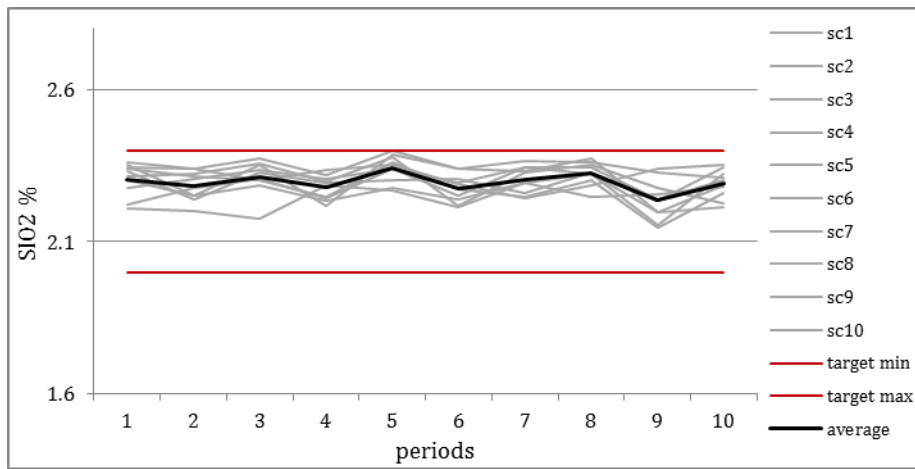


Figure 4-28 Silica grade, converged STA

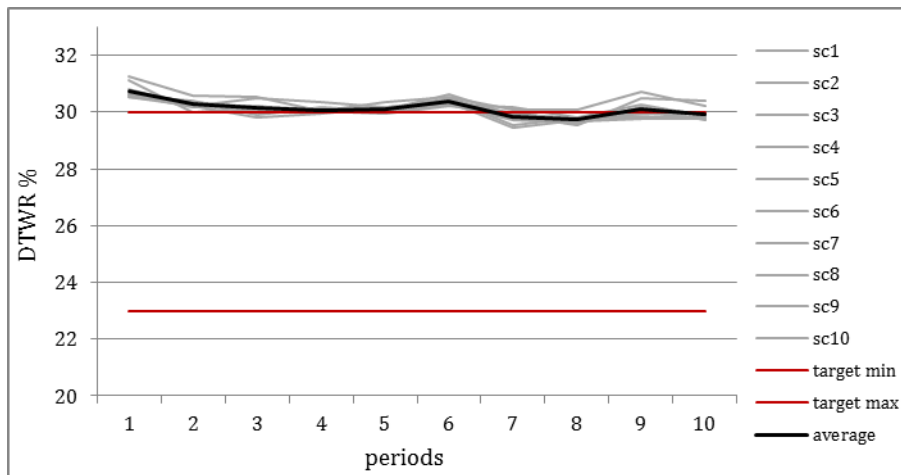


Figure 4-29 DTWR, converged STA

The DCF also presents less risk over the scenarios and its average is closer to the partially relaxed input (Figure 4-30), between 0.01 and 0.03% better (no costs of deviations considered here). When comparing the Cplex objective functions between the schedules obtained from the 4th iteration of the binary convergence algorithm and from the converged STA, a gap^{Cplex} of 0.3% is found. The solution is proven almost optimal.

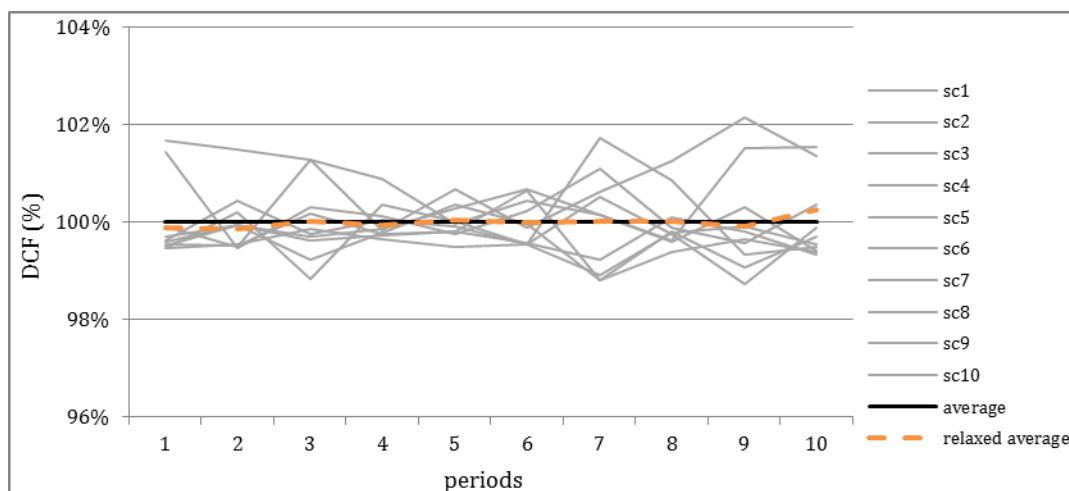


Figure 4-30 DCF per period, converged STA

Tableau 4-3 GAP between the partially relaxed and the converged STA solutions

Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GAP partially relaxed – TopoSort (%)	-0.03	-0.02	-0.02	-0.02	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.03	-0.02

The trade-off of a schedule closer to the optimal solution is a much higher computational cost, 21h53min instead of 12min, one can be more interested in one approach or the other.

4.6 Conclusions

A stochastic topological sorting algorithm was presented to solve the long-term open pit mine planning problem and gave good and fast results for the average discounted cash flow and the control of geological uncertainty. Two options are available as an input for the algorithm. The first option is to provide a fully relaxed solution of the production schedule. The advantage of this approach is the rapidity to obtain a solution, within 2% of optimality after 12min for the case study considered in this paper (more than 160 000 binary variables). The second option is to apply the two proposed acceleration strategies. This approach provides an almost binary optimal schedule in still a reasonable computational time. Depending on the requirement of the operations, the fractional schedule can be used as it is since after several iterations the number of remaining fractional variable is very low. In this case, the solution is optimal since no assumptions have been made except special patterned relaxations. If a fully binary schedule is required, the stochastic topoSort algorithm can be applied to the obtained fractional schedule. The result gets even closer to the optimality: less than 0.3% for the case study in less than 24h.

Extensions of this work could focus on make the proposed acceleration strategies even more aggressive to continue reducing the number of binary variables and to develop an algorithm similar to the one found in Bienstock and Zuckerberg (2010) to solve faster the relaxed model, which can be limiting with larger instances.

CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : A STOCHASTIC OPTIMIZATION METHOD WITH IN-PIT TAILINGS DISPOSAL FOR THE OPEN PIT MINE PLANNING PROBLEM

Abstract: Environmental sustainability and cost optimization have become topics of major importance in the mining industry. Open pit mining operations have an impact on the environment in terms of landscape modification and ecosystem because of the large shifted volumes of material. In particular, external stockpiles take a considerable space, space that can be limited, and involve important transportation costs to bring the material in the first place. Depending on the shape of the deposit and the intended design of the pit, an option can be not to store all the tailings and waste in external stockpiles but to place them directly in free spaces inside the pit. This work presents a mathematical formulation to model this tailings and waste disposal for an iron ore mine in the mined-out pit using a stochastic integer program accounting for geological uncertainty. In addition to the traditional blocks extraction variables, strips of ground following the dip are considered within the pit as decision variables and the optimization process aims to optimally define both the extraction sequence of the mining blocks and the reservation of strips to store material. A sliding time window heuristic strategy is used to solve the model within a reasonable computational time.

Keywords: open pit long-term scheduling, tailings and waste material management, stochastic model, sliding time window heuristic method, mining optimization.

5.1 Introduction

In order to tackle the open pit mine planning problem, mathematical mixed integer programming models (MIP) have been developed for decades considering different hypothesis or approximations and solved using several operations research methods. Good overviews of what has been done in this field can be found in Ramazan and Dimitrakopoulos (2004) and Newman et al. (2010). More lately, stochastic formulations have appeared to take into account uncertainty sources such as geological, supply and market demand uncertainties. The geological information in particular is essential in mine planning and a wrong interpretation of its characteristics can

result in disastrous consequences on the production and the viability of the whole project because of wrong forecasts of the production. Demonstrations of this high risk associated with the geology of the mineral deposit have been repeatedly showed by for instance Ravenscroft (1992), Dowd (1994), Dimitrakopoulos et al. (2002), Dimitrakopoulos and Godoy (2006) or Dimitrakopoulos (2011). The problem comes from the sparse drill hole data on which is based the model of the mined deposit under study. The ore body is discretized in mining blocks which are assigned a set of attributes; typically grades and material types. Since blocks actually crossed by a drill hole are very few compared to the whole ore body model, the attributes are interpolated with geostatistical methods based on spatial correlations between the available data. Deterministic optimisation methods, such as the conventional ones used today, use as inputs of the orebody model interpolation techniques named estimations, like kriging, and base the optimisation process on a single representation of the ore body. The issue with this estimated model is that, by minimizing the variance, the representation of the deposit is smoothed, underrepresenting the local variability. This has a major effect on production scheduling because it leads to poorly informed schedules. To avoid this and tackle unavoidable uncertainty, a set of conditional simulated realizations can be used. These simulations are equally probable representations of the ore body which reproduce the local uncertainty of the deposit's grade (see Goovaerts (1997) and Dimitrakopoulos (1998)). Instead of basing the optimisation on a single representation of the ore body, the optimizer can import this set of simulations to maximize the average profit while minimizing, for each scenario, any deviation from the production targets. The aim is to obtain a schedule that will generate forecasts for the net present value with a low associated risk.

An initial stochastic integer programming model (SIP), which has been widely re-used later, is proposed by Dimitrakopoulos and Ramazan (2008). Several applications were done with diverse solution methods. We distinguish exact methods, heuristic methods, and metaheuristic methods. Within the heuristic methods, aggregating blocks has been quite popular: regrouping blocks with common characteristics and scheduling them together allows a significant reduction of the number of variables in the model. Ramazan et al. (2005) define fundamental trees which are profitable combinations of blocks respecting the precedence relationships. Boland et al. (2009) aggregate blocks for the extraction schedule but define the processing for each individual block. Menabde (2004), while considering a set of conditional simulations, schedules panels which are

defined as intersections of mining phases and benches. The issue of aggregating blocks is the induced reduction of the solution space caused by the strong assumption that some blocks should be extracted at the same period. From a different point of view, a Lagrangian relaxation coupled with a sequential approach was applied on a stochastic formulation by Chatterjee and Dimitrakopoulos (2014). The authors obtained a solution within 2% of optimality. Cullenbine et al. (2011) use a sliding time window strategy to obtain similar results but on a deterministic model. Within a metaheuristic, named progressive hedging, method which is a scenario based decomposition technique for stochastic optimization, Lamghari and Dimitrakopoulos (2016) also employ a sliding time window approach for sub-problems. Ramazan and Dimitrakopoulos (2004) addressed the problem of reducing the number of binary variables by relaxing the extraction variables associated with the negative value mining blocks in the model to facilitate its resolution. Chicoisne et al. (2012) use a topological sort algorithm over the fractional variables from the linear relaxation (relaxation of the binary variables). Rimélé et al. (2016) combine both previous approaches but in a stochastic environment, taking advantage of the special structure of the problem to relax variables. Among the metaheuristic methods, the work of Montiel et al. (2015) or Goodfellow et al. (2015) tackles very large instances and well detailed mining complexes using simulated annealing.

Besides traditional constraints such as accessibility, capacity of production, or blending grades, tailings and waste management can also be considered. This is especially of major importance when the available space for disposal is limited. One way to overcome this issue is to store the material in the free space inside the pit. An intrinsic condition is that the material moved back into the pit will not be moved again later so the underlying ore blocks are sterilized. To the best of our knowledge, the literature on this topic is rather scant; the only found example is the work of Zuckerberg et al. (2007). The authors present an extension version of the mine planning software Blasor, property of BHP Billiton's, named Blasor-InPitDumping (BlasorIPD). Although not many details of the formulation are given for confidentiality reasons, the concept is the following: a period of extraction is assigned to aggregates (AGGs) of blocks and different processing decisions are assigned to subdivisions (bins). Then, the percentage of an AGG going to waste can either go to an external stockpile or a zone inside the pit. If it goes to the pit, it is associated to a "refill AGG", which is an aggregate larger than an AGG but which also respects precedence constraints. BlasorIPD produces a schedule that reduces the external stockpile by

taking advantage of the free space in the pit. However, the sparse disposition of waste material within the pit that can result from the optimization may be very problematic from an operation point of view. Besides, aggregating mining blocks can misrepresent mining selectivity and provide misleading forecast results.

The problem addressed in this paper is similar to that in Zuckerberg et al. (2007). An iron ore company expressed its desire to limit the space required for the external stockpiles for the tailings and waste material by refilling the pit during the exploitation. Their motivation came from different factors: first, a limited space around the pit to be optimized; reducing the environmental impact caused by the considerable displacement of material; and, a cost optimization since the rehabilitation of the site once the operations are finished is required, placing the waste into the mine will reduce the surface to be rehabilitated. Moreover, the particular shape of the deposit (low dips layers and long strike length), can be used as an advantage. In the feasibility study, storing the material in bands, or strips, toward the dip was considered. The storage zone has to be continuous and growing only from one period to another. The ore below the zone must also be previously extracted. The advantage of this disposition is that the storage location is more circumscribed and not all around the open pit.

This paper first presents an SIP model named open pit mine planning stochastic integer program with in-pit tailings disposal (OMPSIP-ITD). It is based on an existing long-term mine planning model (OMPSIP Rimélé et al., 2016) which accounts for geological uncertainty considering a set of equiprobable stochastically simulated scenarios of the deposit attributes of interest. New sets of variables and constraints are added to model the disposal of tailings and waste materials as strips into the pit, with respect to several operational requests. The model OMPSIP-ITD is then tested in Section 5.3. The case study deposit will be presented followed by the obtained results in terms of materials disposal inside the pit, quality of the production forecast (discounted cash flow, production targets, risk associated to geological uncertainty). This is followed by conclusions.

5.2 The OMPSIP-ITD mathematical model

The industrial partner, an iron ore mining company in Labrador, Canada, has showed an interest in storing the tailings and waste materials in the mined out-pit and considered this option in their feasibility study. This possibility was motivated by the dimension of the deposit, large and flat, which allows spaces for storage once the bottom layer is extracted. The deposit owned by the company has a 10km South-North dimension for only 2km large which allows different extraction zones far away from each other from one period to another. Moreover, the 6° dip of the lithology facilitates both the circulation of the trucks and a stable disposal of tailings. The concept coming from the feasibility study and modeled here is to define dip toward strips that, once their ore has been extracted, will be reserved for tailings. The available volume within a strip is the volume of extracted blocks.

The following mathematical model is based on the open pit mine planning stochastic integer programming (OMPSIP) model presented in Rimélé et al. (2016) which was mainly founded on the work of Ramazan and Dimitrakopoulos (2013) and Spleit (2014). To this model are added several new notations, variables and constraints to formulate the in-pit storage. In particular, at each period a top and a bottom strip (respectively the further North one and the further South one) is considered to delimitate the storage zone in the pit. All the strips in-between are reserved for storage. Several hypotheses are made and detailed in the model. The new model is named OMPSIP-In-pit Tailings Disposal (OMPSIP-ITD).

5.2.1 Notation

Diverse sets, indices, parameters and variables, used in the following OMPSIP-ITD formulation are described below.

Sets

$\mathcal{B} = \{i = 1, \dots, N\}$	Set of blocks in the ore body;
$\mathcal{P} = \{p = 1, \dots, P\}$	Set of considered periods for the schedule;
$\mathcal{D} = \{0, 1\}$	Set of destinations available for the blocks $d = 0$ (waste dump) $d = 1$ (mill);

$\mathcal{S} = \{s = 1, \dots, S\}$	Set of scenarios (equiprobable ore body stochastic simulations);
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$	Set of blocks' characteristics, $\mathcal{C}_1 = \{c_1 = 1, \dots, C_1\}$ linear metallurgical characteristics (tonnages), $\mathcal{C}_2 = \{c_2 = 1, \dots, C_2\}$ nonlinear characteristics (grades);
$G(\mathcal{B}, A)$	Oriented graph representing the precedence relationships between blocks. On Figure 4-1, $(b, e) \in A$ which means that block $b \in \mathcal{B}$ is a predecessor of block $e \in \mathcal{B}$;

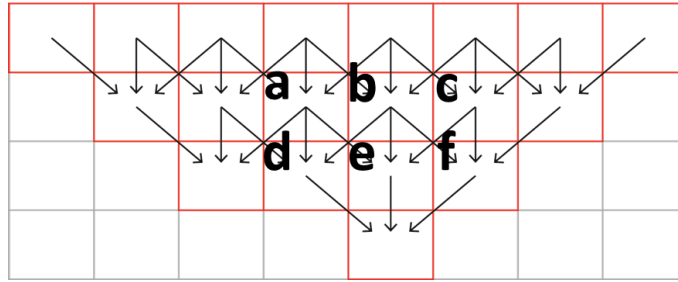


Figure 5-1 Precedence relationships between blocks

$\Gamma_i^+ = \{b \in \mathcal{B}; (i, b) \in A\}$	Set of direct successors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_b^+ = \{d, e, f\}$;
$\Gamma_i^- = \{a \in \mathcal{B}; (a, i) \in A\}$	Set of direct predecessors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_e^- = \{a, b, c\}$;
Γ_i^{-Tot}	Set of the all cone of predecessors of block i . On Figure 4-1, $\Gamma_e^{-Tot} = \{a, b, c\} \cup \Gamma_a^{-Tot} \cup \Gamma_b^{-Tot} \cup \Gamma_c^{-Tot}$;
$\mathcal{K} = \{k = 1, \dots, K\}$	Set of strips considered for storage, $k = 1$ being the southeast strip, $k = K$ the northeast one;
\mathcal{B}_k	Set of blocks which belong to strip k ;

Parameters

$v_{i,d,s}$ Economic value of block i in scenario s if it is sent to destination d ;

This economic value depends on several parameters:

$$v_{i,d,s} = \begin{cases} -E_{waste}^{cost} * t_{i,s} - TH^{cost} * TH_{i,d} & \text{if } d = 0 \\ R_{i,s} - P_{conc}^{cost} * conc_{i,s} - E_{ore}^{cost} * t_{i,s} - TH^{cost} * TH_{i,d} & \text{if } d = 1 \end{cases}$$

With:

$R_{i,s}$ Revenue from selling the metal content of block i in scenario s ;

$conc_{i,s}$ Concentrate tonnes of block i in scenario s , $conc_{i,s} \in \mathcal{C}_1$;

Where:

$$conc_{i,s} = t_{i,s} * Rec_{i,s}$$

$Rec_{i,s}$ Weight recovery of block i in scenario s , obtained from the simulation of the Davis Tube Weight Recovery (used in the case study);

P_{conc}^{cost} Processing cost of concentrate material per tonne;

E_{ore}^{cost} Extraction cost of ore material per tonne;

E_{waste}^{cost} Extraction cost of waste material per tonne;

$TH_{i,d}$ Truck hours needed to send block i to destination d ;

TH^{cost} Cost per truck hour;

$t_{i,s}$ Tonnes of block i in scenario s ;

$q_{c_1,i,s}$ Quantity of characteristic c_1 of block i in scenario s ;

$g_{c_2,i,s}$ Grade c_2 in scenario s of block i ;

$target_{c,p}^{\pm}$ Minimum (-) and maximum (+) targets of quantity or grade c in period p ;

$pen_{c,p}^{dev\pm}$ Penalty cost of deviation from the targets of quantity or grade c in period p (excess +, shortage -);

r Discount rate taking into account the time value of money;

$d_p = \frac{1}{(1+r)^{p-1}}$ Discount factor;

π Maximum number of blocks to be stored outside of the pit;

γ Percentage of ore in a strip that needs to be extracted before storage within this strip;

N_k Number of blocks within strip k ;

Variables

Extraction variables

$$x_{i,d,p} = \begin{cases} 1 & \text{if block } i \in \mathcal{B} \text{ is sent to destination } d \in \mathcal{D} \text{ by period } p \in \mathcal{P}; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

To simplify the notation, we set $x_{i,d,p=0} = 0, \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}$.

The expression “by period $p \in \mathcal{P}$ ” means that block i was extracted prior to or at period p , formulation used to facilitate the branching during the solution process (Caccetta and Hill, 2003).

Deviation variables

$dev_{c,p,s}^{\pm} \in \mathbb{R}^+$ Deviations from the targets in terms of characteristics $c \in \mathcal{C}$ for scenario $s \in \mathcal{S}$, during period $p \in \mathcal{P}$ (excess +, shortage -);

In-pit storage variables

$u_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \in \mathcal{K} \text{ is the top strip at period } p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$l_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \in \mathcal{K} \text{ is the bottom strip at period } p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$z_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{if strip } k \in \mathcal{K} \text{ is available for storage at period } p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$y_{k,p} \in \mathbb{R}^+$ Number of tailings blocks stored in strip $k \in \mathcal{K}$, period $p \in \mathcal{P}$

Figure 5-2 shows the top view of the strips as defined: the strips go toward the dip which is a direction West-East. The top and bottom strips (respectively $u_{k,p} = 1$ and $l_{l,p} = 1$) are identified with red dotted lines. All the strips between them are available for storage ($z_{m,p} = 1$).

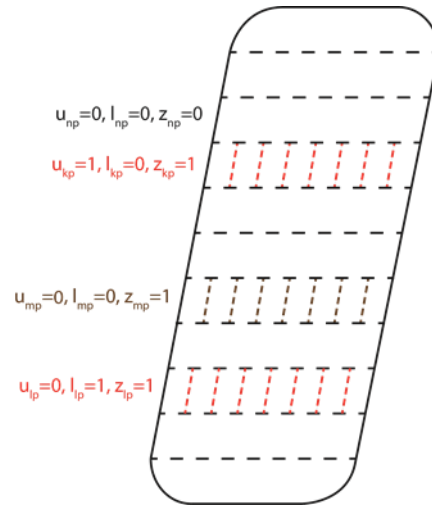


Figure 5-2 Top view of the strips to store the tailings

5.2.2 Stochastic formulation OMPSIP-ITD

This section describes the OMPSIP-ITD formulation used in the rest of the study.

Objective function

$$\max Z = \overbrace{\frac{1}{S} \sum_{i \in \mathcal{B}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{s \in \mathcal{S}} d_p \cdot v_{i,d,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1})}^{\text{Part 1}} - \overbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{s \in \mathcal{S}} d_p * (\text{pen}_{c,p}^{\text{dev}^+} * \text{dev}_{c,p,s}^+ + \text{pen}_{c,p}^{\text{dev}^-} * \text{dev}_{c,p,s}^-)}^{\text{Part 2}}$$

Constraints

Reserve constraints

$$(1) \quad x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \mathcal{P}$$

$$(2) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall p \in \mathcal{P}$$

Precedence constraints

$$(3) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{j,d,p} \quad \forall i \in \mathcal{B}, \forall j \in \Gamma_i^-, \forall p \in \mathcal{P}$$

Capacities constraints

(4.1) Upper bound

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} (q_{c_1,i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1})) - \text{dev}_{c_1,p,s}^+ \leq \text{target}_{c_1,p}^+ \quad \forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

(4.2) Lower bound

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} (q_{c_1,i,s} * (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1})) + \text{dev}_{c_1,p,s}^- \geq \text{target}_{c_1,p}^- \quad \forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

Grade quality constraints

(5.1) Upper bound

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(g_{c_2, i, s} * t_{i, s} * (x_{i, d, p} - x_{i, d, p-1}) \right) - dev_{c_2, p, s}^+ \\ \leq target_{c_2, p}^+ * \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(t_{i, s} * (x_{i, d, p} - x_{i, d, p-1}) \right) \quad \forall c_2 \in \mathcal{C}_2, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

(5.2) Lower bound

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(g_{c_2, i, s} * t_{i, s} * (x_{i, d, p} - x_{i, d, p-1}) \right) + dev_{c_2, p, s}^- \\ \geq target_{c_2, p}^- * \sum_{i \in \mathcal{B}} \left(t_{i, s} * (x_{i, d, p} - x_{i, d, p-1}) \right) \quad \forall c_2 \in \mathcal{C}_2, \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

The objective function and the constraints (1) to (5.2) are similar to the formulation of the OMPSIP model in Rim el e et al. (2016).

The objective function is composed of two parts. *Part 1* aims to optimize the average discounted cash flow over the set of scenarios, *Part 2* penalizes the deviations from the production targets. This second part is essential for the robustness of the schedule to the geological uncertainty.

The set of constraints (1) assures that if a block is extracted at a given period, it remains extracted for the later periods. Constraints (2) allow any block to be sent to only one destination. Constraints (3) define the accessibility of the blocks that is, for a block to be extracted, its direct predecessors have to be extracted too, respecting the precedence constraints for the stability. The sets of constraints (4.1) and (4.2) enforce the scheduled production to respect the quantities targets by allowing deviations $dev_{c_1, p, s}^\pm$ which are penalized in the objective function. Constraints (5.1) and (5.2) have a similar role but for the grade targets. Because of the nonlinearity of the average grade, it is actually the element's amount that is controlled. Other constraints of mining earliest period of extraction are also implemented but will be described later in this paper.

Constraints (6) to (15) aim to model the storage inside the mined-out pit. A detailed description of these constraints is given below.

Uniqueness of the top and bottom strips

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{K}} u_{k,p} \leq 1 \\ \sum_{k \in \mathcal{K}} l_{k,p} \leq 1 \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

For each period, the storage zone is only defined by a maximum of one top strip $u_{k,p}$ and a bottom one $l_{k,p}$. They correspond to the red dotted strips on Figure 5-2.

Order of the top and bottom strips

$$(7) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} k * (u_{k,p} - l_{k,p}) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

By definition, the top strip must be further north than the bottom strip. Equation (7) states that for each period the top strip is further north than the bottom strip.

Increasing dimension of the tailings storage zone

$$(8) \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{K}} k * u_{k,p} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}} k * u_{k,p-1} \\ \sum_{k \in \mathcal{K}} k * l_{k,p} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} k * l_{k,p-1} \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{P} \setminus \{1\}$$

From one period to another, the size of the in-pit storage zone can increase or remain steady because once positioned, the tailings and waste material are not moved again to limit re-handling costs. Equation (8) ensures that between two consecutive periods, the top strip can only be translated to the north and the bottom strip to the south.

Strips' availability for storage

$$(9) \quad z_{k,p} = \sum_{j=k}^{K-1} (u_{j,p} - l_{j+1,p}) + u_{K,p} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall p \in \mathcal{P}$$

A strip is defined as available for storage ($z_{k,p} = 1$) only if it is located between the top and bottom one. The set $\{k \in \mathcal{K}; z_{k,p} = 1\}$ defines the in-pit zone reserved for storage. Figure 5-3 gives explanations about these constraints. The axis corresponds to the strips, from South to North, the blue strips are the top and bottom ones and the red strip is the one considered in equation (9). For a given strip k and a given period p , constraints (9) check the strips which are further north than strip k (the yellow ones) to look for the bottom and top strips. If only the top strip is met, strip k is in the storage zone (case 1); if both the top and the bottom strips are found, strip k is located further south than the storage zone (case 2); finally, if neither the top nor the bottom strips are met, strip k is further north (case 3). Case 4 justifies the " $j + 1$ " in equations (9). Indeed, if strip k is also the bottom strip, it must be available for storage so only the strip above is checked for not being the bottom one.

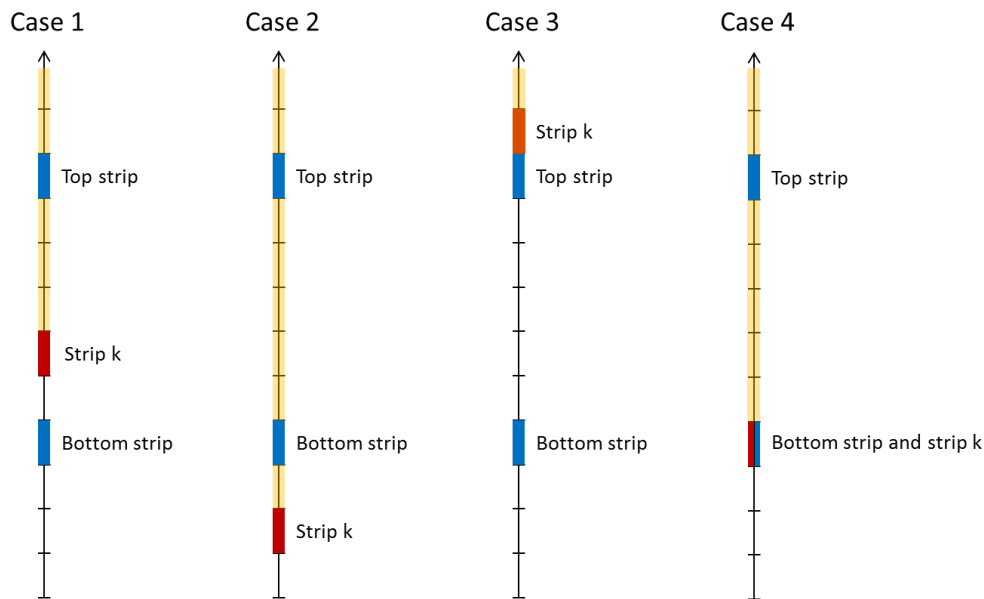


Figure 5-3 Strips' availability for storage graphs

Allowance of storage within a strip

$$(10) \quad y_{k,p} \leq N_k * z_{k,p} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall p \in \mathcal{P}$$

A strip can be filled with material only if it has been defined as available for storage.

Storage available quantity within a strip

$$(11) \quad \sum_{p'=1}^p y_{k,p'} \leq \sum_{i \in B_k} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall p \in \mathcal{P}$$

Per strip, the maximum volume of tailings that can be stored is the volume of ore that has been extracted within this strip. An assumption is made concerning the volume occupied by the tailings: on average any extracted block results in 80% of its volume as tailings to be stored. This is justified by the swelling of the mining blocks (typically an increase of 20-30% of the volume after extraction) and the average iron grade of 30% which, for the blocks sent to the mill, will be extracted and will reduce the resulting volume. Both phenomena compensate each other.

Only the extracted material can be stored

$$(12) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} y_{k,p} \leq \sum_{i \in \mathcal{B}} \sum_{d \in \mathcal{D}} (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

For each period, the amount of stored material has to be less than what has been extracted during this period because tailings or waste are moved just once.

Blocks that can still be extracted

$$(13) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} (x_{i,d,p} - x_{i,d,p-1}) \leq 1 - z_{k,p} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{K}^{-1}(k), \forall p \in \mathcal{P}$$

A block positioned in a strip that has been defined as available for storage cannot be extracted. In other words, the remaining blocks are inaccessible as they are covered by tailings.

Maximum amount of tailings stored outside of the pit

$$(14) \quad \sum_{i \in \mathcal{B}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{i,d,p} - \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{p \in \mathcal{P}} y_{k,p} \leq \pi$$

A maximum amount of storage at external stockpiles located outside the pit, i.e. π , is defined. Above this amount, the storage of tailings has to be done inside the pit.

Extracted ore condition for storage

$$(15) \quad \gamma * N_k * z_{k,p} \leq \sum_{i \in B_k} \sum_{d \in D} x_{i,d,p} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall p \in \mathcal{P}$$

In order to respect governmental rules about accessibility of ore reserves, before storing in a strip all the ore has to be extracted or at least a certain proportion γ of it. These constraints are illustrated in Figure 5-4, which is a cross section of a strip which is considered for storage and the mining blocks of the mineralized layer. The green dotted lined blocks have been extracted (let V_1 be the corresponding total volume) and the red blocks have not (volume V_2). Constraints (15) guarantee that for each strip, before starting to store tailings the inequality: $V_1 \geq \gamma \cdot (V_1 + V_2)$ is respected.

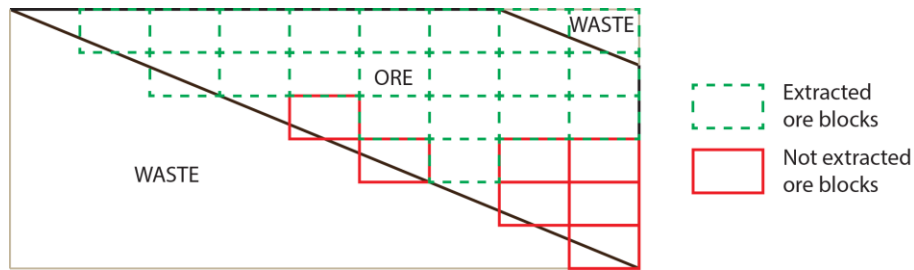


Figure 5-4 Cross section of mandatory ore block extraction within a strip

5.3 Case study

5.3.1 Presentation and details

The OMPSIP-ITD model is applied to an iron ore deposit, located in Labrador, Canada, owned by the industrial partner, a mining company which raised the idea of the in-pit tailings disposal in its feasibility study. As mentioned previously, this deposit is well adapted to an in-pit storage because of its particular shape of a low dip (6° East) and a 10km North-South extension. For computational time reasons and given that the reserves tonnage is way superior to the production target, only the northeast half of the deposit is considered in this application.

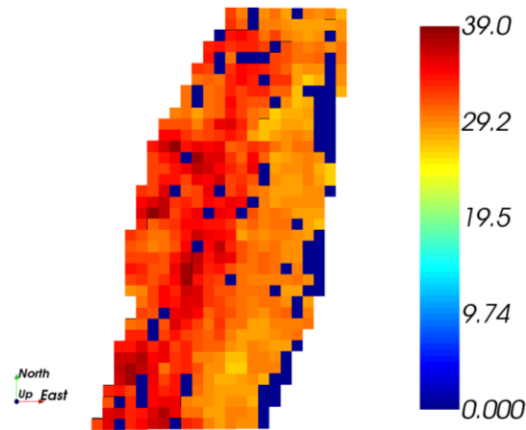


Figure 5-5 FeH grade sim1 top view

Specifically, the schedule is performed on 3177 mining blocks of size 100m*100m*15m, 10 periods, 2 destinations and 38 strips of storage. In this case study, the space of storage outside the pit is limited to 500 blocks, after which all the tailings must be stored in the pit. Also, the percentage of extracted ore within each strip before storage γ is set to 75%. A set of 10 stochastic simulations is used as an input. The quantity constraints are in terms of concentrate tonnes of iron per year while the quality constraints concern the average DTWR (Davis Tube Weight Recovery representing the recoverable iron) average grade per year and the average grade of silica, main impurity in the concentrate product. The initial model OMPSIP contains 63540 binary variables, 300 continuous variables and around 380000 constraints. The new OMPSIP-ITD model adds 1140 binary variables, 380 continuous ones and around 33000 constraints. This model is too complex to be solved by the solver Cplex thus a sliding time window heuristic (STWH) is used instead.

Figure 5-6 illustrates the STWH method. It is an iterative method which, at each iteration, relaxes the binarity of the variables except for a few consecutive periods, the “window”. Once the resulting model is solved, the first period of the window is fixed, the window is moved one period further and the process is reiterated.

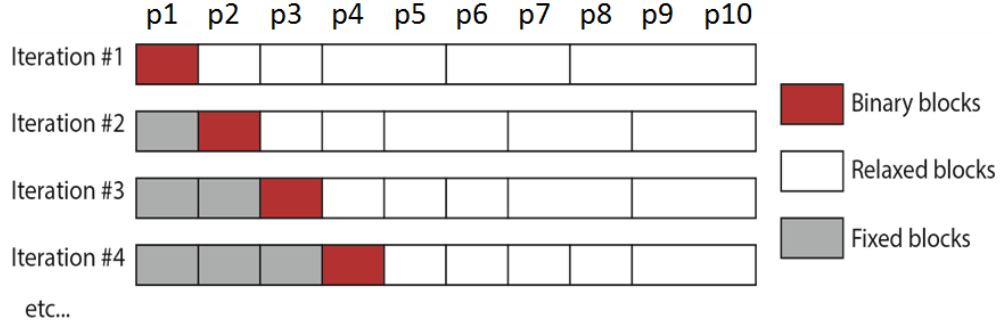


Figure 5-6 STWH method

In this case study, a sliding window of one period is considered and some of the latest periods are merged when relaxed in order to reduce the size of the problem. Moreover, the earliest period of extraction constraints are modified. Rather than using equations (16) (as given in Rimélé et al., 2016), we define these constraints by equations (16') qualified as updated earliest period of extraction.

$$(16) \quad x_{i,d,p} = 0$$

$$\forall i \in \mathcal{B}, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \left\{ \bigcup_{c_1 \in \mathcal{C}_1} \left(t \in \mathcal{P}; \forall s \in \mathcal{S}, \sum_{t'=1}^t target_{c_1,t}^+ - \Delta_{c_1,t'} \leq \sum_{j \in \Gamma_i^{-Tot} \cup \{i\}} q_{c_1,j,s} \right) \right\}$$

$$(16') \quad x_{i,d,p} = 0$$

$$\forall i \in \mathcal{B} \setminus \Phi^k, \forall d \in \mathcal{D}, \forall p \in \left\{ \bigcup_{c_1 \in \mathcal{C}_1} \left(t \in \mathcal{P}; \forall s \in \mathcal{S}, \sum_{t'=k}^t target_{c_1,t}^+ - \Delta_{c_1,t'} \leq \sum_{j \in (\Gamma_i^{-Tot} \cup \{i\}) \setminus \Phi^k} q_{c_1,j,s} \right) \right\}$$

Where $\forall c_1 \in \mathcal{C}_1, \forall t' \in \mathcal{P}, \Delta_{c_1,t'} \in \mathbb{R}^+$ are parameters used to keep the flexibility of the stochastic formulation which allows deviations from the production targets. Typically one can take $\Delta_{c_1,t'} \cong \frac{1}{4} * target_{c_1,t'}^+$.

At each iteration k , the STWH method aims to determine which blocks are extracted in period $p = k$. Φ^k refers to the set of blocks that have been previously assigned to a period anterior to k .

The idea is that now only the remaining blocks are considered, the ones which have not already been defined as extracted by period k . For each of these blocks, the total quantities of its

remaining predecessors are defined. Then, these quantities are compared with the production targets from period k . If the block is not reachable for a given period, the corresponding variable can be set to 0. These new constraints (16') allow fixing more variables at each iteration. The previous version, constraints (16), mainly fixes variables associated within the first periods.

5.3.2 Results

The results are presented in terms of mineability, risk associated to geological uncertainty and profitability.

First, Figure 5-7 presents, in a top view, the disposal of the tailings and waste material inside the pit in parallel of the schedule. On the representation of the schedule are showed in colors the periods of extraction of the blocks (from 1 to 10). Blocks in grey are those not extracted (-1). One can note that the sequence of extraction is well spatially continuous, that is the blocks extracted at the same period are located close to each other. For the tailings part, a bar diagram shows which strips are free (blue ones) and which ones are available for storage (red ones), for all the periods. Within the red part of the bars (zone reserved for the tailings) is written the volume of tailings which have been positioned within this zone at this period. One can notice that the zone of storage respects the previously defined constraints, continuous zone between the top and bottom strip (constraints (9)) and growing from one period to another (constraints (8)). Additionally, the correspondence with the schedule shows that no blocks are extracted in a strip reserved for storage at a given period (constraints (13)). In total, 1177 blocks have been extracted over the 10 years, 677 blocks of tailings have been stored inside the pit and 500 outside.

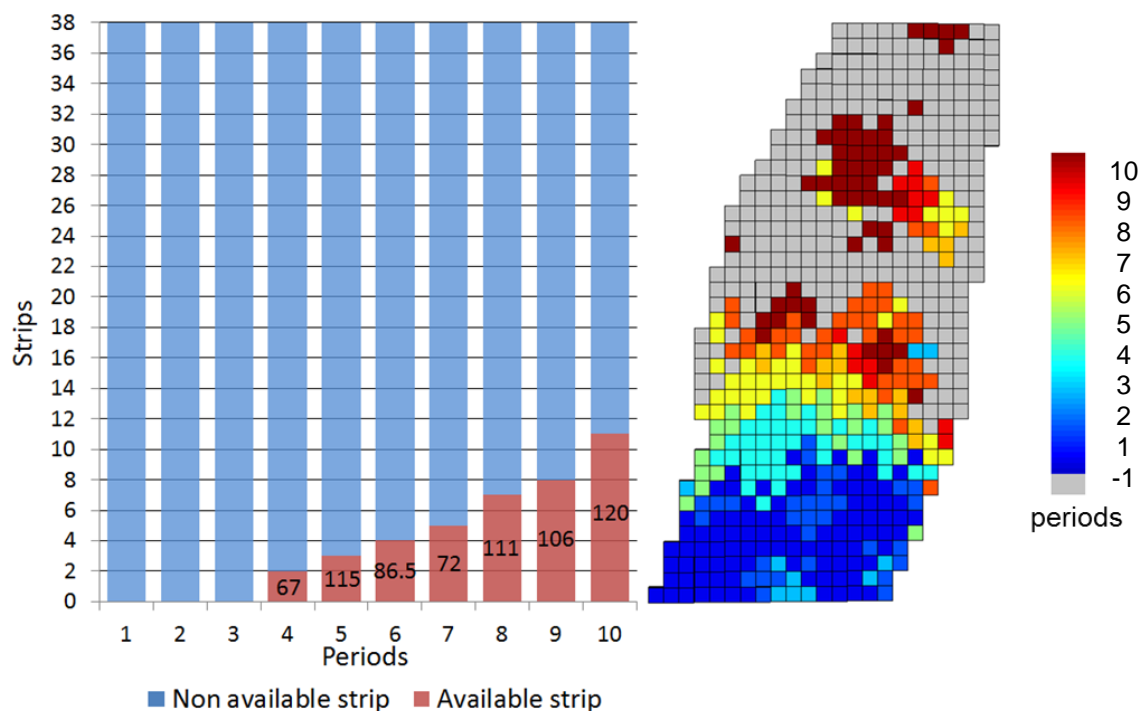


Figure 5-7 Top view of the tailings disposal per period and schedule

Table 5-1 gives more detail about the strips used for storage, at which period, and for how many blocks of tailings (same regular grid as the mining blocks).

Tableau 5-1 Tailings storage per strip and period

#period	4	5		6			7	8		9		10	
#strip	2	1	3	1	3	4	5	6	7	7	8	9	11
nb tailings blocks	67	56.7	57.8	4.3	11.2	71	72	72	39	32	74	69	51

Two cross sections of strip number 3 are presented in Figure 5-8. The first graph shows the periods of extraction of the blocks: all the blocks are extracted between periods 0 and 2. In total, 69 blocks have been extracted in this strip and 23 remained not extracted (exactly 75% of the blocks were extracted as requested by constraints (15)). The second graph represents an interpretation about how the storage within this strip would occur. From the optimization, 57.8 blocks of tailings are stored in the third strip during period 5 and 11.2 during period 6. With the hypothesis on the average volume generated by an extracted block (80% justified by both the swelling of the blocks and the extracted metal), the tailings represent an equivalent volume of respectively 46 and 9 blocks. To keep the dipper blocks on the East side of the deposit accessible, the tailings are planned to be firstly positioned on the west side of the strip.

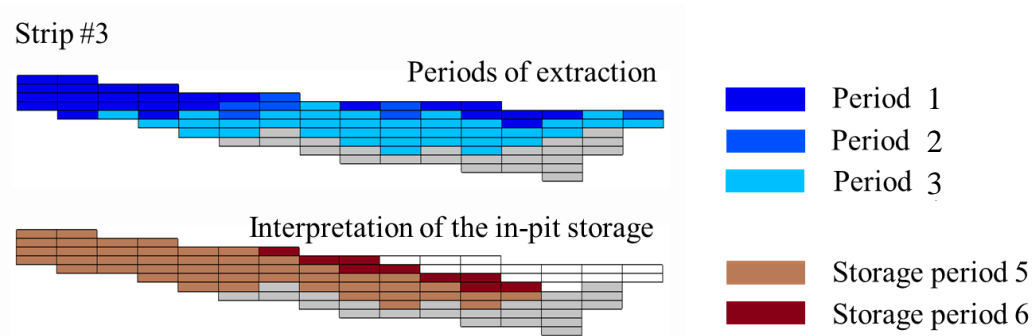


Figure 5-8 Cross section of strip #3: periods of extraction and interpretation of the in-pit storage

Figure 5-9 shows the destinations of the blocks; most of the blocks are considered as ore by the optimizer and sent to the mill.

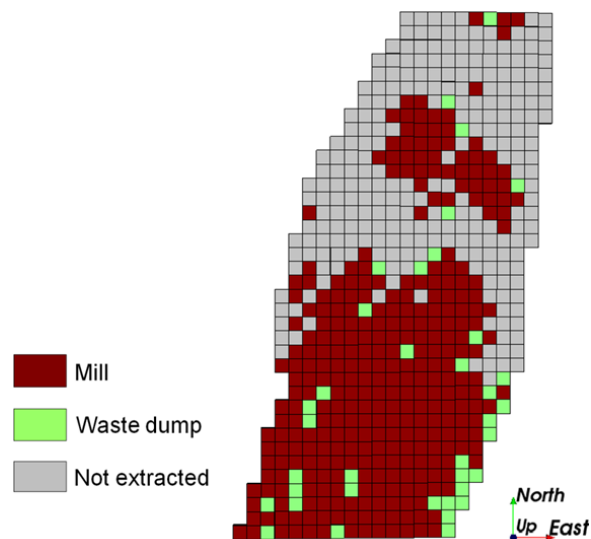


Figure 5-9 Top view destinations

In terms of quality constraints, the risk profiles are all satisfactory. Figure 5-10, Figure 5-11 and Figure 5-12 respectively present the concentrate tonnes, the average silica grade, and the average Davis Tube Weight Recovery (grade of magnetically recoverable iron) for all the simulations and their average as well as the targets. The average concentrate production is close to the target with a low distribution, the silica and the DTWR are within the range of tolerance.

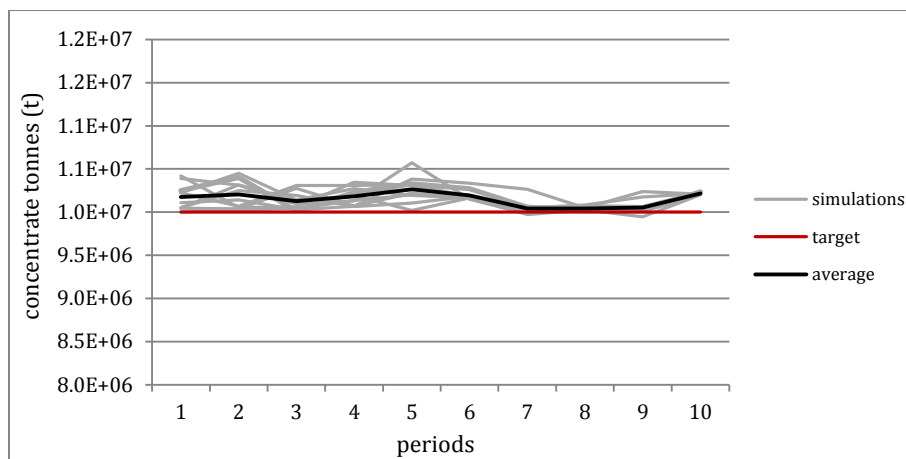


Figure 5-10 Concentrate tonnes of iron

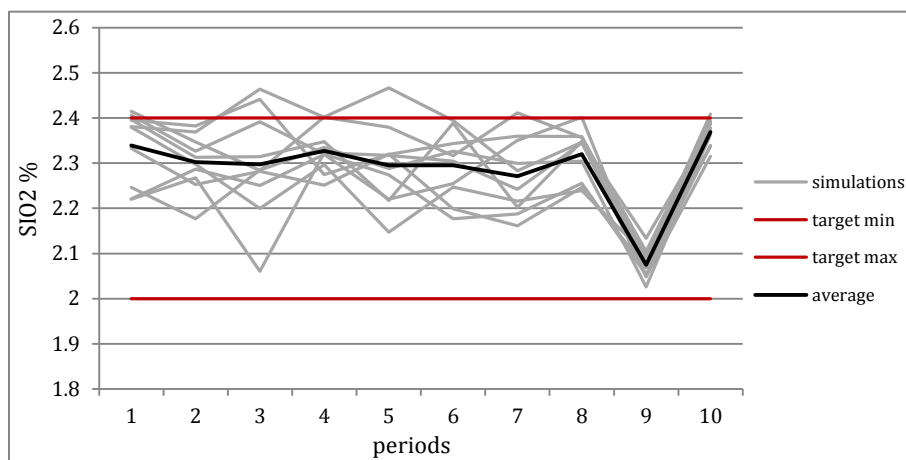


Figure 5-11 Average silica grade

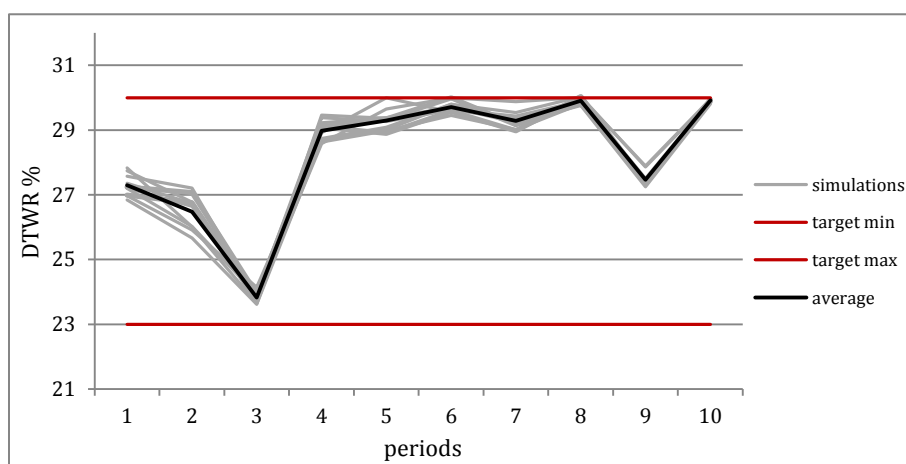


Figure 5-12 Average DTWR grade

The gap in terms of objective value in Cplex between the final binary solution and the relaxed model (relaxation of the extraction variables not the strips) is 1.76%.

$$(gap^{Cplex} = \frac{Obj^{relaxed} - Obj^{heuristic}}{Obj^{relaxed}} = 1.76\%)$$

For the discounted cash flow (DCF), which is equal to the objective value of Cplex but without the artificial penalty costs of deviation, the risk is very well controlled as can be seen from Figure 5-13 and Figure 5-14. The results are given relatively to the average of the simulations. Without the penalty costs, one can observe that the average of the simulations has a higher DCF than the relaxed model. After 10 years, the difference between the highest and lowest DCF over the set of simulations is equal to 1.17% of the average value ($\frac{DCF_{max} - DCF_{min}}{DCF_{average}} = 1.17\%$).

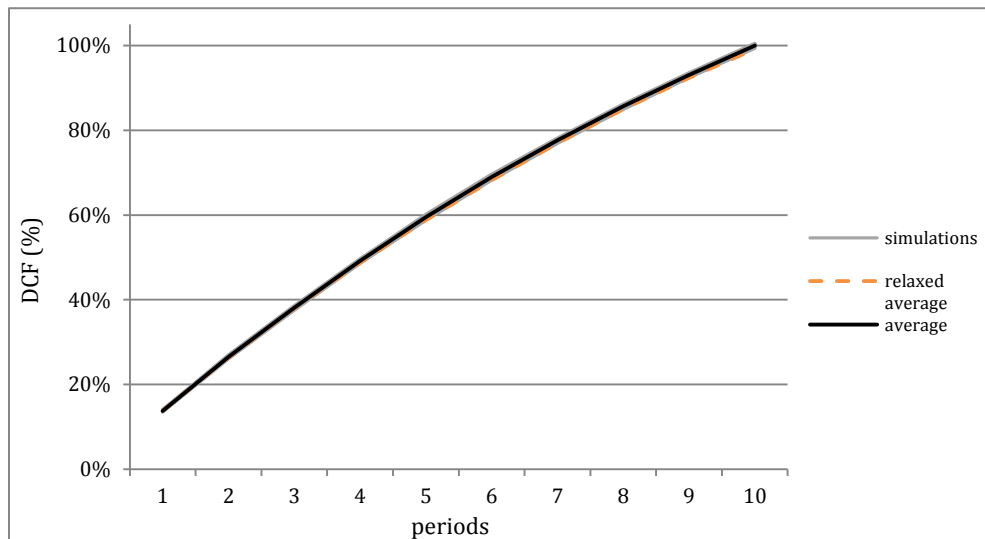


Figure 5-13 Cumulative DCF

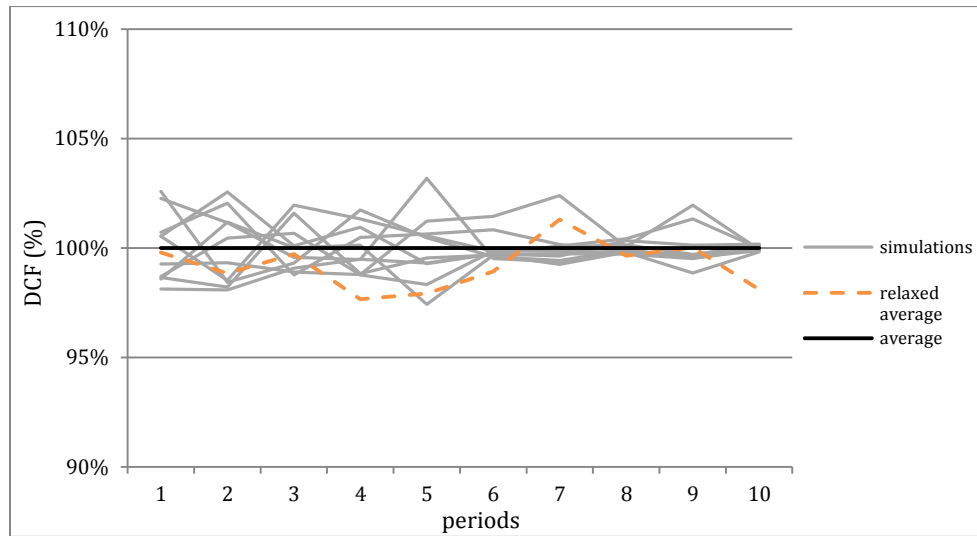


Figure 5-14 DCF per period

The final objective value has also been compared to the model OMPSIP, so with an infinite storage outside the pit, this model could be solved with an exact method (no heuristic involved). The result shows the interest of defining strips for storage because the gap between the the solution obtained from the OMPSIP model and the OMPSIP-ITD model $\left(\frac{Obj^{OMPSIP\ Exact} - Obj^{OMPSIP-ITD\ STWH}}{Obj^{OMPSIP\ Exact}}\right)$ is only of 1.77% even though the savings of not re-handling the tailings for the rehabilitation are not considered.

The amount of material stored inside the pit can be converted to an equivalent dump area to estimate the volume saved in external stockpiles. Figure 5-15 presents the dimensions of the corresponding stockpile, it would represent a volume of 81 million m³, which, with a height of 100m, takes a diameter of 1224m on the ground.

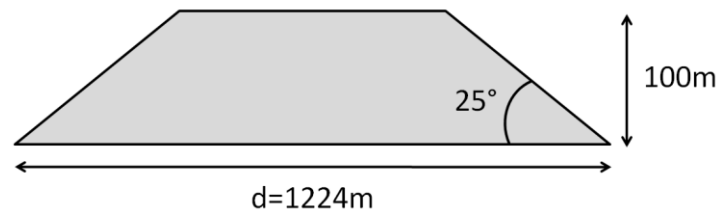


Figure 5-15 Equivalent dump area

Figure 5-16 gives characteristics of the sliding time window solving method. On the first ordinate axis is shown the required computational time for each iteration of the method, in total the resolution took 6h32min (Cplex v12.4, a processor i7-2600S 2.8GHz and 8GB of RAM). The

second ordinate axis presents the decrease of the objective value per iteration, compared to the first iteration for which just the first period was defined binary. The assessment of a decreasing objective value is not surprising since at each iteration the problem is more constrained (binary constraints) and periods ungrouped (especially for the first iterations).

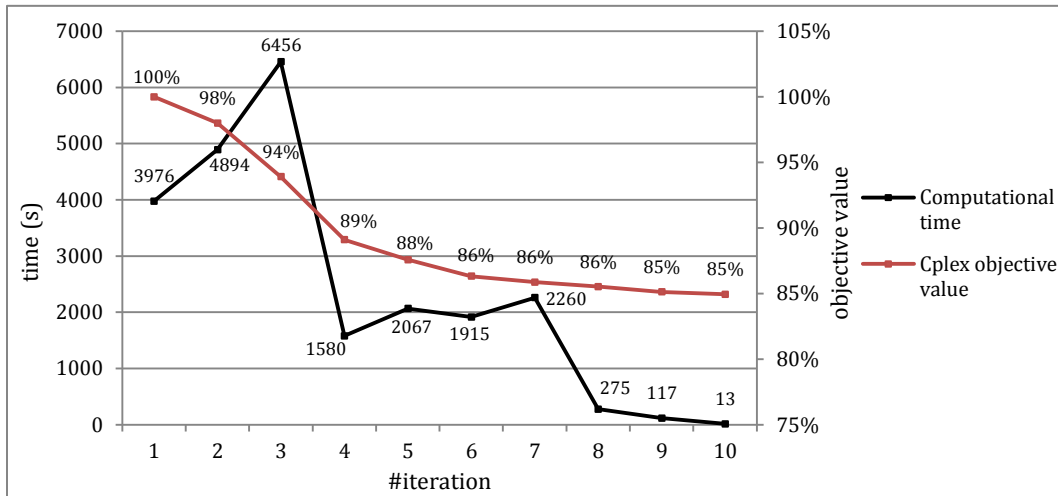


Figure 5-16 Iteration computational time and objective value vs it#1 of STWH

5.4 Conclusions

The mathematical formulation proposed in this paper allows modelling the disposal of tailings and waste materials directly inside the pit and not in an outside stockpile. Thanks to the particular flat shape of the deposit, the disposal is considered by strips toward the dip. Operational constraints ask for a single continuous and growing zone of storage from one period to another and that the ore present in this zone has already been extracted in its majority. The model has successfully been implemented and was solved with a sliding time window heuristic method using the solver Cplex. The results are very satisfactory: enforcing tailings and waste storage inside the pit after a limited amount outside it reduces the objective function by only 1.77%. Besides, while the calculated DCF are similar, the associated benefits are not accounted. This new storage will save considerable costs in re-handling during the rehabilitation phase of the project, will reduce the impact on the local environment and gives a solution to a limited external space for material storage.

To go deeper into this study, developing a metaheuristic method would allow to test the model on larger instances and, for instances, with smaller blocks for more mining selectivity. This should improve the results already obtained. More studies on the equivalence of volumes between an extracted block and a stored one would also be interesting and would provide an even more realistic model.

CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE

Comme mentionné dans l'introduction, les deux articles présentés dans ce mémoire s'intéressent à deux aspects : computationnel pour le premier et plus opérationnel pour le deuxième. Cela correspond aux problématiques de l'industrie en ce qu'elle a besoin d'une optimisation fiable et rapide d'un côté ainsi que d'une modélisation proche de la réalité de l'autre.

Le premier article : « *Heuristic method for the stochastic open pit mine production scheduling problem* » a mis l'accent sur un aspect computationnel en ce que l'objectif principal, outre l'établissement d'un modèle stochastique pour la planification minière, était de développer des méthodes pour accélérer la résolution de tels modèles, et ce en présentant un faible gap d'optimalité. Par l'intermédiaire de deux stratégies d'accélération, complétées par un tri topologique, la méthode heuristique proposée a permis l'obtention d'une solution très rapide à 2% de l'optimalité et d'une autre un peu plus longue mais prouvée à 0.3% de l'optimalité. C'est notamment cette preuve d'optimalité qui manque souvent dans la littérature, en particulier avec les nombreuses méthodes métaheuristiques développées pour résoudre les modèles stochastiques. De plus, les stratégies d'accélération développées pourraient être utilisées comme outils en dehors de la méthode heuristique proposée. En tant que telles, elles permettent l'obtention d'une séquence d'extraction fractionnaire mais présentant très peu de valeurs non entières, résultat qui peut tout à fait satisfaire les compagnies. Ces stratégies peuvent également être aisément réemployées dans d'autres méthodes, heuristiques ou non.

Outre ce besoin d'une séquence d'extraction fiable, le partenaire industriel a fait mention d'un intérêt plus opérationnel. Comme mentionné dans l'introduction, la compagnie souhaitait évaluer la possibilité de stocker des résidus miniers et stériles au sein de la fosse pendant même l'exploitation. Les raisons principales étant un espace extérieur limité, réduire l'impact sur l'environnement local et diminuer les coûts de remaniement pour la réhabilitation future du site. C'est dans ce cadre que s'est inscrit le deuxième article intitulé « *A stochastic optimization method with in-pit tailings disposal for the open pit mine planning problem* ». En respectant les différentes contraintes mentionnées dans l'étude de faisabilité du projet pour un tel stockage, l'objectif a alors été de proposer une formulation mathématique pour modéliser ce concept.

Le modèle, dans un cadre toujours stochastique, devait alors combiner le séquençage d'extraction des blocs miniers et donner les informations essentielles sur comment stocker les matériaux au sein de la fosse. Une des contraintes était notamment d'obtenir un espace de stockage unique dans la fosse, cela représente certainement le principal problème du seul modèle trouvé dans la littérature puisque celui-ci dispose le stockage de manière éparse ce qui est très peu pratique au niveau opérationnel. Une méthode de résolution avec a également été développée pour ce problème spécifique et une comparaison avec un modèle sans le stockage dans la fosse a permis d'évaluer les gains possibles d'une telle démarche.

CHAPITRE 7 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire s'intéresse à des aspects d'une part computationnels et d'autre part plus opérationnels.

La première partie a permis de développer une nouvelle méthode heuristique pour l'optimisation stochastique de mines à ciel ouvert avec faible gap d'optimalité. La méthode proposée, basée sur l'utilisation du solveur Cplex, inclut deux stratégies d'accélération qui visent à réduire sensiblement le nombre de variables binaires du modèle tout en cherchant à conserver la réalisabilité de la solution. L'avantage de ces stratégies est qu'elles n'impliquent que des relaxations linéaires de variables en utilisant la structure particulière du modèle et les fortes relations entre les variables. Ainsi, la solution obtenue est une borne supérieure du résultat optimal, d'autant plus proche que le nombre de variables fractionnaires résultantes est faible. Ce résultat intermédiaire est ensuite utilisé comme donnée d'entrée à un algorithme de tri topologique stochastique qui, cette fois, assure la binarité de l'ensemble des variables ainsi que la réalisabilité de la séquence d'extraction. Deux résultats sont présentés, le premier est obtenu après seulement 12 min de calculs et est prouvé être à moins de 2% de l'optimalité ; le deuxième requiert plus de temps de calcul mais, après 22h, s'approche à moins de 0.3% du résultat optimal.

La deuxième partie se concentre sur la modélisation du stockage de résidus miniers et de stériles dans la fosse, sujet peu étudié dans la littérature. Toujours dans un cadre stochastique, une formulation additionnelle incluant de nombreuses contraintes a été développée et le modèle final a été résolu avec une méthode heuristique de fenêtre de temps sur un horizon fuyant. Le résultat final définit simultanément la séquence d'extraction des blocs de minerai et une zone de stockage unique au sein de la fosse avec des informations sur la quantité de blocs à y envoyer et à quelles périodes. La méthode heuristique utilisée obtient un résultat à 1.77% de l'optimalité et l'impact du stockage de matériaux dans la fosse a été évalué à 1.76% par rapport aux prédictions de production initiales, cela démontre l'intérêt de telles considérations.

De futurs travaux de recherche pourraient chercher à pallier à un certain nombre de limitations rencontrées. Tout d'abord pour la méthode heuristique de tri topologique stochastique, de nouvelles stratégies d'accélération pourraient être étudiées et les méthodes proposées pourraient sans doute être rendues plus agressives pour réduire encore le nombre de variables binaires. Une

attention particulière pourrait aussi être portée à une résolution plus efficace de la relaxation linéaire du modèle car celle-ci prend un temps conséquent qui peut devenir très limitant si un gisement de plus grande dimension est considéré. Pour la partie sur le stockage de matériaux dans les fosses, les résultats sont prometteurs mais la complexité de résolution du modèle, bien supérieure à celle du modèle précédent, mériterait sans doute le développement d'une méthode métaheuristique ou hybride pour tester le modèle sur un exemple de plus grande envergure. De plus, d'autres contraintes opérationnelles pourraient être considérées, notamment au niveau des équivalences de volumes entre blocs extraits et blocs stockés. La question de la pollution par infiltration que peuvent engendrer certains blocs mériterait elle aussi d'être étudiée.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- Bienstock, D., & Zuckerberg, M. (2010). Solving LP relaxations of large-scale precedence constrained problems. *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6080 LNCS, 1–14. http://doi.org/10.1007/978-3-642-13036-6_1
- Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G., & Gleixner, A. M. (2009). LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity. *Computers and Operations Research*, 36(4), 1064–1089. <http://doi.org/10.1016/j.cor.2007.12.006>
- Caccetta, L., & Hill, S. P. (2003). An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of Global Optimization*, 27(2-3), 349–365. <http://doi.org/10.1023/A:1024835022186>
- Chatterjee, S., & Dimitrakopoulos, R. (2014). Production scheduling under uncertainty for an open pit mine using Lagrangian relaxation and branch-and-cut algorithm. *Les Cahiers Du GERAD*.
- Chicoisne, R., Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E., & Rubio, E. (2012). A New Algorithm for the Open-Pit Mine Production Scheduling Problem. *Operations Research*, 60(3), 517–528. <http://doi.org/10.1287/opre.1120.1050>
- Cullenbine, C., Wood, R. K., & Newman, A. (2011). A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing. *Optimization Letters*, 5(3), 365–377. <http://doi.org/10.1007/s11590-011-0306-2>
- Dagdelen, K. (1985). *Optimum multi-period open pit mine production scheduling*. Colorado School of Mines, Golden, Colorado.
- Dimitrakopoulos, R., & Ramazan, S. (2008). Stochastic integer programming for optimising long term production schedules of open pit mines: methods, application and value of stochastic solutions. *Mining Technology: IMM Transactions Section A*, 117(4), 155–160. <http://doi.org/10.1179/174328609X417279>
- Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C. T., & Godoy, M. (2002). Moving forward from traditional optimization : grade uncertainty and risk effects in open-pit design, (April).
- Dimitrakopoulos, R. (1998). Conditional simulation algorithms for modelling orebody uncertainty in open pit optimisation. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 12(4), 173–179. <http://doi.org/10.1080/09208118908944041>
- Dimitrakopoulos, R. (2011). Strategic mine planning under uncertainty. *Journal of Mining Science*, 47(2), 138–150.

- Dimitrakopoulos, R., & Godoy, M. (2006). Demand driven and risk managing strategic mine planning.
- Dowd, P. (1994). Risk assessment in reserve estimation and open-pit planning. *Transactions of The Institution of Mining and Metallurgy*, (January), 148–154. [http://doi.org/10.1016/0148-9062\(95\)97056-O](http://doi.org/10.1016/0148-9062(95)97056-O)
- Gaupp, M. (2008). *Methods for improving the tractability of the block sequencing problem for open pit mining*. Retrieved from <http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA486095>
- GeoVia. (n.d.). Whittle Strategic Mine Planning. Retrieved from <http://www.geovia.com/products/Whittle>
- Gershon, M. E. (1983). Optimal mine production scheduling: evaluation of large scale mathematical programming approaches. *International Journal of Mining Engineering*, 1(4), 315–329. <http://doi.org/10.1007/BF00881548>
- Gilani, S. O., & Sattarvand, J. (2016). Integrating geological uncertainty in long-term open pit mine production planning by ant colony optimization. *Computers and Geosciences*, 87, 31–40. <http://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.11.008>
- Godoy, M., & Dimitrakopoulos, R. (2004). Managing risk and waste mining in long-term production scheduling of open-pit mines. *SME Transactions*, 316(03), 43–50.
- Goodfellow, R. C., & Dimitrakopoulos, R. (2015). Global optimization of open pit mining complexes with uncertainty. *Applied Soft Computing*, (February). <http://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.11.038>
- Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Retrieved from <https://books.google.com/books?hl=fr&lr=&id=CW-7tHAaVR0C&pgis=1>
- IBM ILOG. (2014). CPLEX User's Manual, Version 12 Release 6. *International Business Machines Corporation*. Retrieved from http://www.google.de/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CFAQFjAB&url=http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/cosinfoc/v12r4/topic/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf&ei=8EvtT4_1JpDUsgbDjc2ODw&usg=AFQjCNFzAtP_XVRmgiFiVInmTEALJGDWmg
- IBM ILOG. (2014). CPLEX Parameters Reference Version 12 Release 6. *Manual for Sequencing of Interval Variables*. Retrieved from http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/cosinfoc/v12r6/index.jsp?topic=/ilog.odms.ide.help/OPL_Studio/opllangref/topics/opl_langref_scheduling_sequence.html
- Johnson, B. (1968). *Optimum open pit mine production scheduling*. University of Carlifornia Berkeley.

- Lamghari, A., & Dimitrakopoulos, R. (2016). Progressive hedging applied as a metaheuristic to schedule production in open-pit mines accounting for reserve uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 0, 1–13. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.007>
- Lamghari, A., & Dimitrakopoulos, R. (2012). A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 222(3), 642–652. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.029>
- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R., & Ferland, J. A. (2014). A variable neighbourhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty. *Journal of the Operational Research Society*, 65(9), 1305–1314. <http://doi.org/10.1057/jors.2013.81>
- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R., & Ferland, J. A. (2014). A hybrid method based on linear programming and variable neighborhood descent for scheduling production in open-pit mines. *Journal of Global Optimization*, 63(3), 555–582. <http://doi.org/10.1007/s10898-014-0185-z>
- Menabde, M., Froyland, G., Stone, P., & Yeates, G. (2004). Mining schedule optimisation for conditionally simulated orebodies. *Proceedings of the International Symposium on Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management*, 14, 347–352.
- Montiel, L., & Dimitrakopoulos, R. (2015). Optimizing mining complexes with multiple processing and transportation alternatives: An uncertainty-based approach. *European Journal of Operational Research*, 247(1), 166–178. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.05.002>
- Newman, A. M., Rubio, E., Caro, R., Weintraub, A., & Eurek, K. (2010). A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, 40(3), 222–245. <http://doi.org/10.1287/inte.1090.0492>
- Ramazan, S., Dagdelen, K., & Johnson, T. B. (2005). Fundamental tree algorithm in optimising production scheduling for open pit mine design. *Mining Technology*, 114(1), 45–54. <http://doi.org/10.1179/037178405X44511>
- Ramazan, S., & Dimitrakopoulos, R. (2013). Production scheduling with uncertain supply: A new solution to the open pit mining problem. *Optimization and Engineering*, 14(2), 361–380. <http://doi.org/10.1007/s11081-012-9186-2>
- Ramazan, S., & Dimitrakopoulos, R. (2004). Recent applications of operations research in open pit mining. *SME Transactions*, 316(1), 73–78.
- Ramazan, S., & Dimitrakopoulos, R. (2004). Traditional and New MIP Models for Production Scheduling With In-Situ Grade Variability. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 18(2), 85–98. <http://doi.org/10.1080/13895260412331295367>

- Ravenscroft, P. J. (1992). Risk analysis for mine scheduling by conditional simulation. *Trans. Inst. Min. Metall. (Sec. A: Min. Industry)*, 101. [http://doi.org/10.1016/0148-9062\(93\)90969-K](http://doi.org/10.1016/0148-9062(93)90969-K)
- Riles, A., & Cottrell, B. (2012). Exploration to Engineering. *International Mining*, (August), 4.
- Rimélé, A., Gamache, M., & Dimitrakopoulos, R. (2016). Heuristic method for the stochastic open-pit mine production scheduling problem.
- Spleit, M. (2014). *Stochastic Long-Term Production Scheduling of the LabMag Iron Ore Deposit in Labrador, Canada*. McGill University.
- VALLEE, M. (2000). Mineral resource + engineering, economic and legal feasibility = ore reserve. *CIM Bulletin*, 93(1038), 53–61. Retrieved from <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=1338723>
- Zuckerberg, M., Stone, P., Pasyar, R., & Mader, E. (2007). Joint Ore Extraction And In-Pit Dumping Optimization. *SME Annual Meeting*, 1–3.