

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX DES
VIBRATIONS INDUITES PAR RELÂCHER TOURBILLONNAIRE

ADRIEN MOULIN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AVRIL 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SIMULATION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX DES
VIBRATIONS INDUITES PAR RELÂCHER TOURBILLONNAIRE

présenté par : MOULIN Adrien

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. VÉTEL Jérôme, Doctorat, président

M. GARON André, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. ÉTIENNE Stéphane, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., membre

DÉDICACE

À ma famille et mes proches,

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier André Garon pour avoir accepté d'être mon directeur de recherche et m'avoir fait découvrir le monde fascinant des méthodes numériques. Merci pour le soutien actif tout au long de ce projet ainsi que pour les innombrables gâteaux et cafés qui m'ont gardé éveillé devant mon écran.

Je remercie aussi mes codirecteurs Stéphane Étienne et Dominique Pelletier pour leurs conseils avisés qui m'ont débloqué à maintes reprises.

Merci à Jérôme Vétel et Ricardo Camarero d'avoir accepté d'être respectivement président et membre de ce jury malgré les délais très courts imposés. Je remercie aussi personnellement Jérôme pour son humour et sa bonne humeur. Merci aussi à Alain Roubidoux pour son assistance technique lorsque Linux faisait des siennes.

Cette année et demie passée dans une pièce de 8m² sans fenêtre aurait été complètement différente sans Martin. Merci d'avoir toujours été présent, de m'avoir éclairé dans les moments sombres mais surtout amusé le reste du temps. Travailler dos à dos avec toi fut une expérience très enrichissante que je n'oublierai pas.

Je pense aussi à ma famille qui m'a soutenu tout au long de ma scolarité et sans qui je ne serai pas à Montréal aujourd'hui. Merci d'avoir subvenu à mes besoins pendant toutes ces années et de m'avoir offert le cadre idéal pour m'épanouir.

Je salue mes camarades de Polytechnique Montréal qui m'ont accompagné pendant cette maîtrise, je pense notamment à Julien, Jean-Baptiste, Philippe, Jacques, Mathieu, Ines, Yann et Nicolas. Merci aussi à mes amis du Mile-End pour cette année riche en couleurs et en émotions. La liste à citer est trop longue pour cette petite page de remerciement.

Enfin je tiens à remercier tout particulièrement Anne-Laure pour avoir été à mes côtés et m'avoir encouragé sur la dernière ligne droite de ce projet.

RÉSUMÉ

Les vibrations induites par relâcher tourbillonnaire (Vortex-induced Vibrations, VIV) sont un phénomène d'interaction fluide-structure où un corps immergé dans un fluide se met à vibrer selon une ou plusieurs directions à cause des lâchers de tourbillons engendrés par l'écoulement à sa paroi. Dans certaines conditions, ce couplage entre les mouvements du fluide et du corps peut induire des vibrations importantes sur ce dernier et l'endommager par fatigue. Ce projet de recherche vise à simuler ce phénomène avec un cylindre dans un écoulement tridimensionnel à faible nombre de Reynolds $Re < 300$, pour le cas extrême où le cylindre a une inertie négligeable face à celle du fluide et peut vibrer à la fois transversalement et dans la direction de l'écoulement. L'étude s'inscrit dans la lignée des travaux réalisés à l'École Polytechnique de Montréal pour des cas de figure comparables avec des écoulements bidimensionnels. Les simulations sont réalisées avec un code d'éléments spectraux en développement, la première étape de ce projet vise à le rendre fonctionnel et à l'adapter pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure dans un second temps. Le projet se décompose donc en deux parties, la première moitié de l'étude se concentre sur la vérification, la validation et l'optimisation du code. Un schéma implicite fortement couplé est implémenté pour résoudre le couplage étudié dans le référentiel relatif au cylindre. La seconde partie du projet est tournée vers la simulation du phénomène des VIV et son analyse détaillée, un ensemble de simulations bidimensionnelles permet de valider le modèle avant le passage à la troisième dimension très coûteuse en ressources.

ABSTRACT

Vortex-induced vibrations (VIV) are a fluid-structure interaction phenomenon where an immersed body vibrates due to the vortex shedding generated by the flow along its walls. Under certain conditions, the coupling between the motion of the body and the flow may induce important vibrations and damage it by fatigue. The objective of this research project is to simulate the VIV phenomenon for a zero mass cylinder with two degrees of freedom, in a three-dimensional flow at low Reynolds number ($Re < 300$). This work follows previous VIV studies in two-dimensional laminar flows performed by researchers at Polytechnique Montréal. The numerical study is carried out with an in-house code based on the spectral element method. Before any VIV simulations, the first step of the project is to adapt this code to solve fluid-structure coupling problems. This study is therefore divided in two parts, the first half focuses on verification, validation and optimization of the code. An implicit strongly coupled scheme is implemented to solve the specific VIV coupling. The second part is dedicated to the simulation of the VIV phenomenon and its detailed analysis. Two-dimensional cases are simulated to validate the numerical model before the final three-dimensional study.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xv
LISTE DES ANNEXES	xix
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	3
2.1 Introduction au phénomène des VIV	3
2.2 Vibrations à ratio de masse nul	6
2.3 Vibrations selon deux degrés de liberté	6
2.4 Simulations numériques tridimensionnelles	10
CHAPITRE 3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX	12
3.1 Formulation des équations de Navier-Stokes	12
3.1.1 Formulation forte	12
3.1.2 Formulation faible	13
3.1.3 Conditions limites	15
3.2 Discrétisation spatiale	15
3.2.1 Méthode de Galerkin	15
3.2.2 Choix des polynômes d'interpolation	18
3.2.3 Décomposition élémentaire	19
3.3 Discrétisation temporelle	20

3.4	Résolution numérique	21
3.4.1	Intégration numérique	21
3.4.2	Système non linéaire	24
3.5	Spécificités de la méthode des éléments spectraux	26
CHAPITRE 4 ASPECTS NUMÉRIQUES		31
4.1	Introduction au programme	31
4.2	Problématique d'optimisation d'un code spectral	34
4.3	Analyse par profilage	35
4.4	Utilisation du solveur direct INTEL Pardiso	37
4.5	Parallélisation OpenMP	39
4.6	Résultats	42
4.6.1	Cas 1	43
4.6.2	Cas 2	44
4.6.3	Cas 3	44
CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION		47
5.1	Vérification et validation en CFD	47
5.2	Vérification	47
5.2.1	Comparaison éléments finis et éléments spectraux	48
5.2.2	Diffusion thermique	49
5.2.3	Écoulement de Poiseuille	51
5.3	Validation	52
5.3.1	Problème de la cavité entraînée	52
5.3.2	Écoulement de Taylor-Couette	56
5.3.3	Expérience de Fenstermacher <i>et al.</i> (1979)	58
5.3.4	Modélisation numérique	59
5.3.5	Résultats	63
CHAPITRE 6 ÉTUDE VIV SUR UN CYLINDRE À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ		69
6.1	Dynamique du système dans un repère mobile	69
6.1.1	Mise en place des repères	69
6.1.2	Équation de mouvement du cylindre	70
6.1.3	Équations de Navier Stokes	71
6.1.4	Insertion de l'effet d'inertie dans les forces et la pression	73
6.1.5	Adimensionnalisation du système d'équations	74
6.2	Modélisation et résolution	76

6.2.1	Conditions aux limites de l'écoulement	76
6.2.2	Implémentation d'un schéma de résolution monolithique	79
6.3	Validation et optimisation du modèle avec un cas 2D	82
6.3.1	Méthodes de mesure et de comparaison	83
6.3.2	Validation du modèle	86
6.3.3	Résolution avec la méthode des éléments spectraux	89
6.4	Étude de cas 3D à $Re = 300$	95
6.4.1	Analyses préliminaires	95
6.4.2	Configuration de simulation	100
6.4.3	Analyses	101
CHAPITRE 7 CONCLUSION		109
CHAPITRE 8 RECOMMANDATIONS		110
RÉFÉRENCES		111
ANNEXES		116
C.1	Espace fonctionnel linéaire	118
C.2	Produit scalaire	118
C.3	Norme	118
C.4	Espace de Hilbert	119
C.5	Espace de Sobolev	119
C.6	Forme bilinéaire	119
C.7	Théorème de Lax-Milgram	120
E.1	Formule de Bour	123
E.2	Composition des vitesses	123
E.3	Composition de l'accélération	124

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Serveurs de calcul disponibles	33
Tableau 4.2	Transcription vers le format d'entrée Pardiso - matrice étudiée (gauche) et vecteur d'entrée obtenu (droite)	39
Tableau 4.3	Ensemble des simulations tests	43
Tableau 4.4	Résultats du cas d'étude 1	43
Tableau 4.5	Résultats du cas d'étude 2	44
Tableau 4.6	Résultat du cas d'étude 3 en 2D	45
Tableau 4.7	Résultat du cas d'étude 3 en 3D	45
Tableau 5.1	Ensemble des simulations effectuées	53
Tableau 5.2	Écarts relatifs de la position et de la vorticité ω_z des centres des vortex	55
Tableau 5.3	Écarts relatifs du champ de vitesse et de la vorticité au centre du carré	55
Tableau 5.4	Écarts relatifs de la vorticité ω_z jusqu'au point de singularité	56
Tableau 5.5	Dimensions géométriques	60
Tableau 5.6	Paramètres de la perturbation w_p	63
Tableau 5.7	Comparaison du nombre de Reynolds critique pour l'état TVF	65
Tableau 6.1	Récapitulatif des conditions limites aux bords du domaine 3D	79
Tableau 6.2	Comparaison des deux simulations	86
Tableau 6.3	Convergence en fonction de H	90
Tableau 6.4	Convergence en fonction de L_e	90
Tableau 6.5	Convergence en fonction de L_s	90
Tableau 6.6	Dimensions du domaine de référence	91
Tableau 6.7	Effet de la condition de limite en sortie	91
Tableau 6.8	Effet de l'ordre de discrétisation spatiale	91
Tableau 6.9	Paramètres des simulations	94
Tableau 6.10	Indicateurs de comparaison	94
Tableau 6.11	Indicateurs d'optimisation	94
Tableau 6.12	Comparaison de la traînée moyenne et du nombre de Strouhal aux va- leurs expérimentales obtenues respectivement par Wieselsberger (1922) et Williamson (1996)	98
Tableau 6.13	Caractéristiques du système	100
Tableau 6.14	Paramètres de simulation	101
Tableau 6.15	Indicateurs du calcul	101
Tableau 6.16	Caractéristiques de la trajectoire en fonction du diamètre du cylindre D	102

Tableau 6.17	Caractéristiques des coefficients C_D et C_L	104
Tableau 6.18	Rapport de la fréquence de relâcher tourbillonnaire par rapport à la fréquence naturelle du cylindre et au nombre de Strouhal d'un cylindre fixe à $Re = 300$ (Williamson, 1996)	105

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	(a) Réponse en amplitude du cylindre en fonction de la vitesse réduite - \square $r_m = 2.4$ (Khalak et Williamson, 1997) - \diamond $r_m = 248$ (Feng, 1968) (b) Évolution du rapport de la fréquence d'oscillation sur la fréquence naturelle du cylindre en fonction de la vitesse réduite, on note la plage d'accrochage importante (Khalak et Williamson, 1997)	7
Figure 2.2	Régimes d'écoulement le long d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds (Lienhard, 1966)	8
Figure 2.3	Évolution de l'amplitude d'oscillation en fonction du nombre de Reynolds pour des ratios de masse très faibles et nuls avec un ou deux degrés de liberté (Yu <i>et al.</i> , 2013), les valeurs non définies par la légende intégrée dans le graphe sont tirés des travaux de Williamson et Govardhan (2006)	8
Figure 3.1	Discrétisation et décomposition élémentaire du domaine	20
Figure 3.2	Points de Gauss-Lobatto-Legendre	24
Figure 3.3	Phénomène de Runge - Fonction de Runge (noir) et ses approximations par interpolation lagrangienne de degré 2 (bleu) à 14 (cyan) pour une répartition homogène des points de colocations	28
Figure 3.4	Base lagrangienne FEM de degré 4 avec intégration optimale de Ψ_i^2 . Les points d'intégration (en noir) et d'interpolation (cercle) sont dissociés	30
Figure 3.5	Base lagrangienne SEM de degré 4 avec intégration sous-optimale de Ψ_i^2 . Les points d'intégration (en noir) et d'interpolation (cercle) ont les mêmes coordonnées	30
Figure 4.1	Entrée et sortie du programme <i>EF6</i>	31
Figure 4.2	Programme <i>EF6</i> - Vision globale	33
Figure 4.3	Évolution du nombre de degrés de liberté par élément en fonction du degré d'interpolation	35
Figure 4.4	Processus d'optimisation	35
Figure 4.5	Exemple de profilage - Problème de diffusion stationnaire avec 9 <i>threads</i> - Activité des <i>threads</i> : actif (marron), inactif (vert), synchronisation ou attente (orange)	36
Figure 4.6	Optimisation de la lecture par pointeur d'un vecteur de longueur $M \times N$ - Les numéros représentent l'ordre de lecture avant et après optimisation	37

Figure 4.7	Évolution générale de la parallélisation - avant (gauche) et après (droite) optimisation	41
Figure 4.8	Parallélisation à double niveau des constructions matricielles élémentaires - avant (haut) et après (bas) optimisation	42
Figure 5.1	Fonction à modéliser $f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 0.08 \sin(20\pi y)$. .	48
Figure 5.2	Évolution de l'erreur suivant la norme L_2 (voir annexe C) et du conditionnement de la matrice globale en fonction du nombre de degrés de liberté du système	49
Figure 5.3	Évolution de l'erreur suivant la norme L_2 et du conditionnement de la matrice globale en fonction du degré d'interpolation	50
Figure 5.4	Champ de vitesse axial obtenu	51
Figure 5.5	Vue générale de la simulation	53
Figure 5.6	Lignes de courant à Reynolds = 1000 - Cas 2	54
Figure 5.7	Iso-contours de vorticité ω_z à Reynolds = 1000 - Cas 2 (à gauche) et Botella et Peyret (1998) (à droite)	54
Figure 5.8	Profil de couette (AZI) - Profil de Taylor-Couette (TVF) - Profil avec oscillations azimutales des anneaux (WVF) (Donnelly, 1991)	57
Figure 5.9	Modèle utilisé	59
Figure 5.10	Discrétisation spatiale	61
Figure 5.11	évolution du champ de vitesse dans le plan axial en fonction de Re - Cas réaliste	64
Figure 5.12	évolution du champ de vitesse dans le plan axial en fonction de Re - Cylindre infini	65
Figure 5.13	Champ de vecteurs pour deux cellules successives - isocontours de la vitesse axiale w	66
Figure 5.14	�tat WVF � $Re = 3Re_{exp}^{TVF}$ - isocontours de la vitesse azimutale v_θ . .	66
Figure 5.15	Visualisation globale des oscillations propres à l'�tat WVF � $Re = 3Re_{exp}^{TVF}$ - isocontours de la vitesse azimutale v_θ	67
Figure 5.16	Mise en évidence de la circulation locale inter-cellulaire - isocontours de la vitesse azimutale en arrière plan	67
Figure 6.1	Disposition des repères R_0 et R_{mo}	70
Figure 6.2	Système à deux degrés de liberté	71
Figure 6.3	Ensemble des bords du domaine pour une simulation bidimensionnelle	77
Figure 6.4	Exemple de trajectoire ($Re = 125, U_r = 11, r_m = 0$)	84
Figure 6.5	Exemple de relevé de mesures - ($Re = 125, U_r = 11$)	85

Figure 6.6	Régime permanent étudié - 7 cycles de déplacement du cylindre - ($Re = 125, U_r = 11$)	85
Figure 6.7	Dimensions du domaine	86
Figure 6.8	Maillage de validation	87
Figure 6.9	Trajectoire du cylindre et indicateurs - <i>EF6</i> (en bleu) et (Yu <i>et al.</i> , 2013) (en vert) - ($Re = 125, U_R = 5, r_m = 0$)	88
Figure 6.10	Courbes de stabilité du cylindre et indicateurs - <i>EF6</i> (en bleu) et (Yu <i>et al.</i> , 2013) (en vert) - ($Re = 125, U_R = 11, r_m = 0$)	88
Figure 6.11	Trajectoire du cylindre et indicateurs - <i>EF6</i> (en bleu) et (Yu <i>et al.</i> , 2013) (en vert) - ($Re = 125, U_R = 11, r_m = 0$)	92
Figure 6.12	Maillage transfini optimal	93
Figure 6.13	Courbes de stabilité - <i>EF6</i> sol. de référence 2a (rouge) - <i>EF6</i> sol. optimisée S (bleu) - Yu <i>et al.</i> (2013) (vert) - ($Re = 125, U_R = 11, r_m = 0$)	94
Figure 6.14	Maillage spectral ajusté pour $Re = 300$	96
Figure 6.15	Évolution du sillage à $Re = 300$ en fonction de l'intégration numérique du terme de convection - isocontours de u [1.4, -0.8] au même instant t	97
Figure 6.16	Trajectoire du cylindre $y_c = f(x_c)$ pour une simulation bidimensionnelle - $r_m = 0$ - $U_r = 12$ - $Re = 300$	98
Figure 6.17	Trajectoire du cylindre $y_c = f(x_c)$ pour une simulation 3D - ($Re = 300, U_r = 12, r_m = 0$)	102
Figure 6.18	Évolution de l'amplitude maximale A_y en fonction de Re - * Étude présente - \circ (Yu <i>et al.</i> , 2013) - Loi proposée par Williamson et Govardhan (2006) pour des cylindres à un degré de liberté et $r_m = 0$	103
Figure 6.19	Évolution en fonction du temps et analyse spectrale des coefficients C_D et C_L au régime quasi-permanent	104
Figure 6.20	Sillage du cylindre en position basse sur son cycle avec les isocontours de vorticité en Z et X	107
Figure 6.21	Visualisation du mode de relâcher 2P	108

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Acronymes

API	Application-Programming Interface
AZI	Azimutal Laminar FLOW
BDF	Backward Differentiation Formula
CFD	Computational Fluid Dynamics
DDL	Degré de Liberté
FEM	Finite Element Analysis
GLL	Gauss-Lobatto-Legendre
IRK	Implicit-Runge-Kutta
LES	Large Eddy Simulation
MPI	Message Passing Interface
OpenMp	Open MultiProcessing
PIV	Particle Image Velocimetry
SEM	Spectral Element Analysis
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes equation
RAM	Random-Access Memory
TVF	Taylor Vortex Flow
VIV	Vortex-Induced Vibration
WVF	Wavy Vortex Flow

Théorie des éléments finis et spectraux

x, y, z	Coordonnées spatiales
\mathbf{u}, p	Champs de vitesse et de pression
\mathbf{u}_h, p_h	Champs de vitesse et de pression discrétisés
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes totales
\mathbf{f}	Force volumique appliquée sur l'écoulement
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tenseur des déformations de l'écoulement
ρ	Masse volumique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
t	Temps

t_0	Temps initial
ψ	Fonction test
Ω	Domaine d'étude
Ω_e	Domaine élémentaire
$\hat{\Omega}_e$	Domaine élémentaire de référence
L_2	Espace de Hilbert
H^1	Espace de Sobolev
Γ	Bord du domaine
γ	Portion du bord du domaine
V, Q	Espaces continus des champs de vitesse et de pression
V_h, Q_h	Espaces discrets des champs de vitesse et de pression approchés
\mathbf{n}	Normale au bord
Γ_N	Bord du domaine avec imposition des conditions de Neumann
Γ_D	Bord du domaine avec imposition des conditions de Dirichlet
Ψ_i, Φ_i	Fonctions d'interpolations des champs de vitesse et de pression
n_u, n_p	Nombre de fonctions d'interpolation en vitesse et pression
δu	Perturbation du champs de vitesse
\mathbf{I}	Tenseur identité
$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Matrices de masse, de diffusion, de divergence et de convection
\mathbf{A}	Matrice globale du système
\mathbf{L}, \mathbf{U}	Matrices triangulaires inférieures et supérieures de \mathbf{A}
\mathbf{U}, \mathbf{P}	Vecteurs comprenant les degrés de libertés de vitesse et de pression
\mathbf{X}	Vecteur inconnu du système matriciel
$\delta \mathbf{X}$	Perturbation du vecteur inconnu
\mathbf{X}_0	Vecteur inconnu initial
\mathbf{R}	Vecteur résidu
\mathbf{J}_R	Matrice jacobienne du résidu
l_i	Polynômes de Lagrange
ω_i	Poids d'intégration
E_n	Erreur d'intégration numérique

Écoulements de Taylor-Couette

ϵ	Erreur numérique
ω_z	Vorticité selon l'axe z
Ω	Vitesse angulaire
$Re_{exp}^{TVF}, Re_{exp}^{WVF}$	Nombres de Reynolds critiques des régimes TVF et WVF
Γ	Ratio d'aspect
η	Rapport de rayon
Δt	Pas de temps numérique
w_p	Vitesse axiale de perturbation
r, θ, z	Coordonnées cylindriques
v_r, v_θ, w	Champs de vitesses en coordonnées cylindriques

Étude VIV

Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
r_m	Ratio de masse
U_r	Vitesse réduite
Γ	Ratio d'aspect
ζ	Coefficient d'amortissement
A_y, A_x	Amplitude de vibration transversale et dans le sens de l'écoulement
ρ_c, ρ_f	Masses volumiques du cylindre et du fluide
\mathbf{x}_c	Vecteur position du cylindre dans le repère absolu
X_c	Position centrale de la trajectoire permanente du cylindre
U	Vitesse du fluide non perturbé
m_c	Masse du cylindre
M_a	Masse ajoutée
f_n	Fréquence naturelle du cylindre immergé
f_r	Fréquence de relâcher tourbillonnaire
2T, 2P, 2S, C(2S)	Modes de relâcher tourbillonnaire
R_0	Repère absolu
R_{mo}	Repère relatif du cylindre
'	Variable exprimée dans le repère absolu
*	Variable dimensionnelle
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vecteurs coordonnées unitaires
C_D	Coefficient de traînée
C_L	Coefficient de portance

\mathbf{F}_f	Force exercée par le fluide sur le cylindre
$\hat{\mathbf{F}}_f$	Force exercée par le fluide sur le cylindre avec effet d'inertie ajouté
\mathbf{F}_r	Force de rappel sur le cylindre
\hat{p}	Champ de pression avec effet d'inertie ajouté
\mathbf{t}	Vecteur contrainte à la paroi
\mathbf{n}	Normale au bord
$\mathbf{A}(\mathbf{b}/\mathbf{c})$	Accélération du point b dans le repère c
V, D, L	Volume, diamètre et longueur axiale du cylindre
H, L_e, L_s	Dimensions du domaine de fluide
Γ_e	Bord d'entrée du domaine de fluide
Γ_s	Bord de sortie du domaine de fluide
Γ_c	Paroi du cylindre
λ_i	Coefficients multiplicateurs de Lagrange

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	FORMULATION FAIBLE DE NAVIER-STOKES	116
Annexe B	THÉORÈME DE LA DIVERGENCE	117
Annexe C	NOTIONS D'ESPACES FONCTIONNELS	118
Annexe D	DÉMONSTRATION DU CRITÈRE DE STABILITÉ DE RAYLEIGH	121
Annexe E	FORMULES DE GÉNIE MÉCANIQUE	123

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les interactions fluide-structure sont actuellement un axe de recherche important en mécanique des fluides numérique. En particulier, les vibrations induites par relâcher tourbillonnaire (VIV pour *Vortex Induced Vibrations*) font l'objet d'un intérêt important depuis qu'on sait qu'elles peuvent endommager les structures par fatigue. Ces vibrations sont dues à un couplage fort entre les mouvements d'un corps et du fluide dans lequel il est immergé. Elles apparaissent lorsque le solide est libre de se déplacer dans au moins une direction et sont en général d'amplitude maximale lorsque la fréquence des relâchers tourbillonnaires approche la fréquence naturelle de vibration du corps, on parle alors d'accrochage de fréquences ou *lock-in*. De nombreuses études numériques et expérimentales ont été réalisées sur des corps libres de vibrer transversalement à l'écoulement mais la littérature est restreinte pour les cas où le solide peut aussi vibrer dans la direction de l'écoulement. Or, cette liberté de mouvement existe dans la plupart des cas d'applications. Plusieurs investigations avec deux degrés de liberté ont déjà été menées à l'École Polytechnique de Montréal sur des écoulements bidimensionnels à faible nombre de Reynolds $Re < 175$, la recherche est maintenant axée vers l'étude d'écoulements présentant des modes tridimensionnels. L'objectif de cette maîtrise est de simuler et d'analyser le phénomène des VIV sur un cylindre, à deux degrés de liberté et ratio de masse nul, évoluant dans un écoulement tridimensionnel à faible nombre de Reynolds $Re \leq 300$. Le ratio de masse nul correspond au cas extrême et virtuel où le cylindre n'a pas d'inertie. Il induit une plage infinie d'accrochage de fréquences avec des amplitudes de vibrations maximales, son étude permet donc d'obtenir la limite maximale des amplitudes de vibration pour un écoulement donné.

L'étude numérique est réalisée avec le code *EF6* développé au sein du LADYF, le laboratoire de dynamique des fluides de l'École Polytechnique de Montréal. *EF6* est basé sur la méthode des éléments spectraux, une approche voisine de celle des éléments finis qui privilégie l'utilisation de polynômes d'interpolation de degré élevé pour améliorer la convergence et la précision des résultats. Le code étant en développement, un important travail de vérification, validation et optimisation doit être réalisé sur *EF6* avant toute application relative aux VIV. Le couplage fort à la base de ce phénomène nécessite par ailleurs l'implémentation d'un solveur implicite spécifique.

Les étapes de cette maîtrise sont donc les suivantes :

1. Réaliser la vérification, la validation et l'optimisation du code *EF6* basé sur la méthode des éléments spectraux.
2. Implémenter dans *EF6* un schéma de résolution implicite fortement couplé spécifique aux problèmes d'interaction fluide-structure de type VIV.
3. Simuler et analyser le phénomène des VIV sur un cylindre à deux degrés de liberté et ratio de masse nul pour un nombre de Reynolds $Re = 300$ dans un écoulement tridimensionnel.

Ce mémoire reprend les différents points introduits précédemment et présente les principaux développements en détaillant les éléments indispensables à leur compréhension.

Le chapitre 1 présente les notions physiques nécessaires à la compréhension du phénomène des VIV et dresse un bilan de l'état actuel de la recherche dans le domaine.

Le chapitre 2 propose une approche simplifiée pour appréhender la méthode des éléments finis et sa variante spectrale. L'aspect mathématique est limité au profit de la démarche globale permettant d'obtenir un système matriciel discrétisé à partir d'un ensemble d'équations différentielles.

Le chapitre 3 aborde les aspects numériques relatifs au code *EF6*, son fonctionnement global, son optimisation et sa parallélisation.

Le chapitre 4 présente la vérification et la validation de *EF6* indispensables à son utilisation pour des cas d'étude concrets.

Le chapitre 5 développe le cadre théorique et numérique propre au phénomène des VIV. Il présente les résultats obtenus pour les simulations bidimensionnelles et tridimensionnelles, l'analyse de ces dernières étant l'objectif final de cette maîtrise.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Introduction au phénomène des VIV

Lorsqu'on plonge un corps dans un fluide visqueux en mouvement, l'écoulement est perturbé et sa vitesse devient nulle à la paroi du solide. La viscosité provoquant un cisaillement entre deux couches de fluide adjacentes aux vitesses différentes, une couche limite avec gradient de vitesse se forme autour du corps immergé. Dans le cas où celui-ci n'est pas profilé, l'écoulement n'arrive pas à suivre les contours de la paroi et finit par se séparer de celle-ci. La variation de pression engendrée amplifie le phénomène et décale le point de décollement vers l'avant du profil en augmentant la taille de la zone affectée. À l'intérieur de celle-ci, la vitesse du fluide est plus faible et le cisaillement induit entraîne une recirculation dans le sens inverse à l'écoulement. Pour le cas d'un cylindre, l'écoulement se sépare à partir d'un nombre de Reynolds $Re = 5$ et deux zones de recirculation symétriques apparaissent, dont la taille augmente avec le nombre de Reynolds (voir figure 2.2). À partir d'une certaine valeur de celui-ci, des instabilités inertielles de type Kelvin-Helmholtz apparaissent dans le sillage du cylindre à la jonction des deux pans de l'écoulement et déclenchent un relâcher tourbillonnaire. Les deux zones de recirculation lâchent alors des tourbillons de manière alternée, on voit apparaître dans le sillage une succession de vortex communément appelée allée de Von Karman. Strouhal (1878) a montré que la fréquence des relâchers dépend de la vitesse et du nombre de Reynolds de l'écoulement, il introduit un nombre adimensionnel, le nombre de Strouhal St , défini comme étant le rapport de la vitesse de relâcher des tourbillons sur la vitesse de l'écoulement.

Lors d'un relâcher, le rapport de taille des zones de recirculation évolue et cela affecte le champ de pression à la paroi du cylindre. Les efforts du fluide sur le cylindre varient au fil des relâchers et si le cylindre est libre de se déplacer, il se met à osciller. Cette oscillation perturbe les zones de recirculation et entraîne une modification du relâcher tourbillonnaire. Cela affecte le champ de pression à la paroi et donc les efforts sur le cylindre. Le mouvement du cylindre devient couplé au mouvement du fluide et l'ensemble est auto-régulé, c'est le phénomène des vibrations induites par relâcher tourbillonnaire plus connu sous le nom de VIV.

Depuis les années 1970, ce phénomène fait l'objet d'un réel intérêt de la part des milieux académique et industriel. Cet attrait s'explique par son importance dans de nombreux cas d'applications en ingénierie. Ces vibrations doivent en effet être considérées lors des phases de conception et de dimensionnement dans des secteurs aussi variés que l'industrie *offshore*,

la construction d'ouvrages d'art ou l'optimisation des échangeurs de chaleur. De nombreuses études ont été menées pour mieux comprendre ce phénomène d'interaction fluide-structure, on peut se référer aux revues de littérature et ouvrages de Sarpkaya (2004, 2010), Bearman (1984, 2011) et Williamson et Govardhan (2004) pour avoir un aperçu de la multitude de recherches effectuées sur le sujet. Ils offrent une vision d'ensemble pertinente des progrès réalisés dans la compréhension des VIV au fil des dernières décennies. On note que la majeure partie des auteurs s'est concentrée sur l'étude VIV pour des cylindres, car ils sont couramment utilisés dans l'industrie et les écoulements autour d'un cylindre fixe bénéficient d'une littérature exhaustive. Les différentes avancées ont permis de dresser la liste des paramètres adimensionnels caractéristiques du phénomène, on peut citer notamment le ratio de masse r_m qui est le rapport de la masse volumique du corps sur celle du fluide, le coefficient adimensionnel d'amortissement de la structure ζ , la vitesse réduite U_r qui est le rapport de celle de l'écoulement sur une vitesse dépendant de l'oscillation naturelle du cylindre ou encore le nombre de Reynolds Re qui caractérise l'écoulement.

L'un des objectifs principaux de la recherche en VIV est la détermination de l'amplitude maximale de vibration pour une situation donnée, car c'est le cas critique où la structure est la plus sollicitée et qui détermine sa durée de vie en fatigue. Feng (1968) constate expérimentalement que cette amplitude de vibration est maximale lorsque la fréquence de relâcher tourbillonnaire s'approche de la fréquence naturelle du cylindre si on le considère comme un système masse-ressort :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \quad (2.1)$$

avec y le déplacement transversal du cylindre, m sa masse, c son coefficient d'amortissement, k son coefficient de raideur et F la force exercée sur le cylindre. Feng note la présence de deux branches d'amplitudes différentes de part et d'autre de cette fréquence, le cylindre se met d'abord à fortement vibrer à l'approche de sa fréquence naturelle. Les oscillations chutent ensuite jusqu'à disparaître avec la désynchronisation des deux ensembles. Pour un cylindre fixe, l'augmentation de la vitesse de l'écoulement entraîne celle de la fréquence des relâchers tourbillonnaires selon la loi de Strouhal. En revanche dans le cas d'un cylindre oscillant aux alentours de sa fréquence naturelle, la fréquence de relâcher des tourbillons s'écarte de cette loi et s'accroche à la fréquence naturelle du cylindre. C'est le phénomène d'accrochage de fréquences ou *lock-in* qui est à l'origine des vibrations importantes autour de la fréquence naturelle. En 1980, Griffin (1980) propose d'étudier l'amplitude maximale de vibration en considérant seulement le produit du ratio de masse et du coefficient d'amortissement du cylindre. Toutefois, Khalak et Williamson (1996, 1997) démontrent la dépendance distincte de

l'amplitude de vibration du cylindre vis à vis du ratio de masse, d'une part, et du coefficient d'amortissement, d'autre part. En étudiant expérimentalement le déplacement transversal d'un cylindre à très faible ratio de masse $r_m = 2.4$, soit deux ordres de grandeur inférieurs à celui utilisé par Feng ($r_m = 248$), ils découvrent une réponse complètement différente. Les amplitudes de vibration maximales sont deux fois supérieures et la plage d'accrochage de fréquences est quatre fois plus grande, elle forme même une nouvelle branche intermédiaire au niveau de la réponse du cylindre (voir figure 2.1). En réalisant des expériences avec des ratios de masse importants où la plage d'accrochage est faible, on a d'abord estimé que le cylindre entre en résonance uniquement lorsque sa fréquence d'oscillation, sa fréquence naturelle et la fréquence de relâcher tourbillonnaire sont équivalentes, soit à une vitesse réduite proche de l'inverse du nombre de Strouhal. Pour un écoulement laminaire cela équivaut à $U_r \approx 5-6$. Les études à très faible ratio de masse contredisent cette hypothèse et Sarpkaya définit la plage d'accrochage comme étant l'intervalle où seules les fréquences de relâcher et d'oscillation sont équivalentes.

Un autre objectif de recherche important est la compréhension de la dynamique tourbillonnaire et son impact sur la réponse en amplitude du cylindre. Le développement de la méthode des *Particle Image Velocimetry* (PIV), qui permet des mesures expérimentales de vorticité précises, et les progrès dans le domaine numérique ont permis de réaliser des avancées importantes en la matière. Feng (1968) sugg erait déjà que l'écart entre les deux branches est du  a un changement de mode de relâcher tourbillonnaire. Cette hypothèse est confirmée par Gu *et al.* (1994) à l'aide de la méthode PIV. Les tourbillons sont relâchés un par un à chaque oscillation du cylindre sur la première branche (mode 2S) puis par paire sur la deuxième (mode 2P). Pour le cas des faibles ratios de masse, le mode 2P apparaît au passage à la branche intermédiaire spécifique de ce type de cas et reste présent à la dernière branche. Williamson et Govardhan (2000) expliquent les transitions entre les trois branches par les sauts de d ephaseage entre le mouvement du cylindre et les forces qu'il subit. Ils différencient notamment les efforts dus aux tourbillons seuls de l'effort total exerc e par le fluide sur le cylindre.

Le nombre de Reynolds a d'abord été n eglig e lors des premières études de VIV (Griffin, 1980), ce n'est qu'en 2006 que Williamson et Govardhan proposent de prendre en compte ce paramètre. Ils montrent une variation linéaire de l'amplitude d'oscillation en fonction du logarithme du nombre de Reynolds pour $5 \times 10^2 < Re < 5 \times 10^4$ (voir figure 2.3). D'autres études montrent des variations encore plus importantes pour des régimes d'écoulement au nombre de Reynolds supérieur (Raghavan et Bernitsas, 2011). Dans certaines conditions, cette amplitude peut aussi varier fortement dans le régime laminaire à bas nombre de Reynolds (voir section 2.3).

Aux cours des quarante dernières années, les efforts pour comprendre le phénomène des VIV ont été colossaux et de nombreuses avancées ont été faites, mais beaucoup reste encore à découvrir et encore plus à comprendre. C’est un domaine complexe avec une multitude de ramifications et autant d’études annexes. La très large diversité des applications étudiées implique une variation de l’importance des différents paramètres adimensionnels caractéristiques, certains sont déterminants sur un intervalle d’étude donné et perdent en influence sur un autre. Dans l’eau, les ratios de masse sont d’un ordre de grandeur deux à trois fois inférieur à ceux utilisés dans l’air, cet écart implique des dynamiques éloignées qui rendent la compréhension du phénomène global plus difficile et écartent la possibilité d’un modèle universel. Dans la suite de cette revue, on se concentre sur trois points nécessaires à la réalisation des objectifs fixés pour ce projet.

2.2 Vibrations à ratio de masse nul

Après avoir démontré que les amplitudes de vibrations augmentent lorsque le ratio de masse diminue, Williamson et Govardhan (2000, 2002) découvrent l’existence d’un ratio de masse critique $r_m = 0.54$ en dessous duquel la plage d’accrochage de fréquence devient infinie et le cylindre vibre avec de grandes amplitudes ($A_y \approx 0.8D$) pour des vitesses réduites très supérieures à la valeur classique $U_r \approx 5 - 6$. Ce concept de ratio de masse critique est retrouvé pour différentes configurations, notamment pour des sphères ou des cylindres élastiques. À l’aide d’un code basé sur un modèle d’éléments finis de frontière, Shiels *et al.* (2001) obtiennent une amplitude $A_y = 0.47D$ pour un cylindre à masse, raideur et amortissement nuls pour un nombre de Reynolds $Re = 100$. Par définition, un cylindre libre de mouvement n’a pas de fréquence naturelle. Pourtant, leurs résultats montrent des oscillations importantes comparables à une phase d’accrochage de fréquences. Bien que virtuel, le cas limite du ratio de masse nul permet de fixer une limite d’amplitude maximale en fonction des caractéristiques de l’écoulement. Son étude est exigeante, car elle demande de résoudre numériquement le couplage fort entre le cylindre et l’écoulement résultant de l’absence d’inertie pour le cylindre. Réaliser des simulations numériques DNS nécessite ainsi la résolution par une méthode implicite fortement couplée (Etienne et Pelletier, 2012; Yu *et al.*, 2013).

2.3 Vibrations selon deux degrés de liberté

Le phénomène des VIV a été soigneusement étudié pour les cas où le cylindre vibre uniquement dans la direction transversale à l’écoulement mais l’intérêt apporté aux vibrations selon deux axes X et Y est beaucoup plus récent (X définissant l’axe de l’écoulement et Y

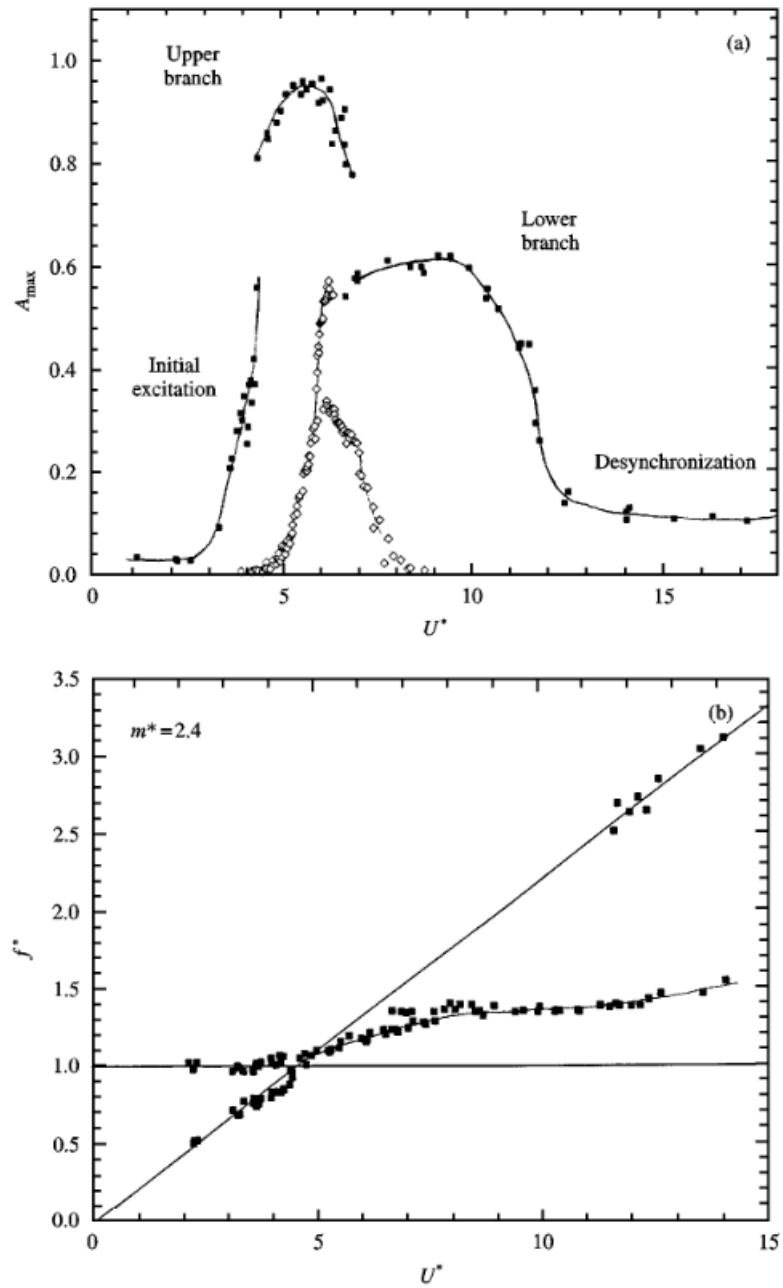


Figure 2.1 (a) Réponse en amplitude du cylindre en fonction de la vitesse réduite - $\square r_m = 2.4$ (Khalak et Williamson, 1997) - $\diamond r_m = 248$ (Feng, 1968) (b) Évolution du rapport de la fréquence d'oscillation sur la fréquence naturelle du cylindre en fonction de la vitesse réduite, on note la plage d'accrochage importante (Khalak et Williamson, 1997)

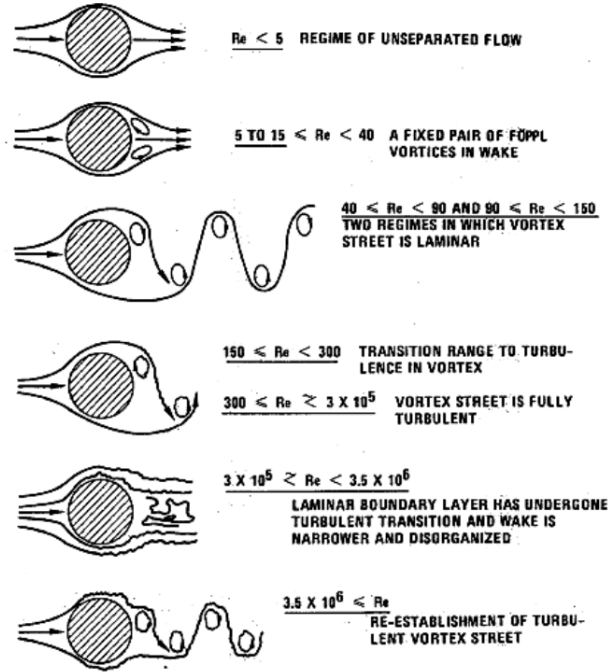


Figure 2.2 Régimes d'écoulement le long d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds (Lienhard, 1966)

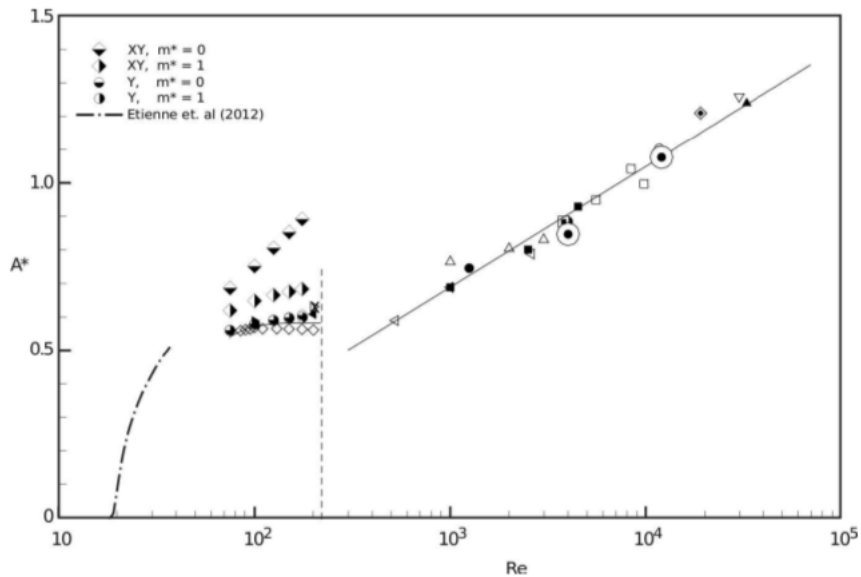


Figure 2.3 Évolution de l'amplitude d'oscillation en fonction du nombre de Reynolds pour des ratios de masse très faibles et nuls avec un ou deux degrés de liberté (Yu *et al.*, 2013), les valeurs non définies par la légende intégrée dans le graphe sont tirés des travaux de Williamson et Govardhan (2006)

sa direction transversale). Quelques études ont été réalisées au XX^{ème} siècle mais elles sont généralement effectuées avec un ratio de masse important et la réponse du cylindre est similaire au cas transversal (Moe et Wu, 1990; Sarpkaya, 1995). Des mesures sur des structures maritimes révèlent pourtant l'existence d'oscillations dans le sens de l'écoulement, Wootton *et al.* (1972) obtiennent une amplitude $A_x \approx 0.17$ pour $A_y \approx 1.0$. Dans la plupart des applications, les fréquences naturelles et les ratios de masse sont égaux dans les deux directions mais les vibrations en X et Y sont de périodicité différente. L'oscillation en X, due à la variation de traînée du cylindre, est amplifiée lorsqu'elle est synchronisée avec le relâcher de deux ensembles de tourbillons successifs, soit la moitié d'un cycle de relâcher complet. A contrario, l'oscillation en Y, liée à la variation de portance du cylindre, est amplifiée lorsqu'elle se synchronise avec le cycle complet des tourbillons relâchés de manière alternée de part et d'autre du cylindre. Bien que plus faibles, les oscillations en X sont donc présentes à des plus petites vitesses réduites que les oscillations transversales et le cylindre peut difficilement entrer en résonance dans les deux directions en même temps. Sur un cylindre libre en X et Y, Dahl *et al.* (2010) révèlent expérimentalement que la double résonance est caractérisée par un ratio de fréquences naturelles efficaces proche de deux, celles-ci étant calculées en tenant compte de la masse de fluide ajoutée au cylindre pour sa dynamique. Ils trouvent aussi un troisième mode harmonique sur la portance du cylindre. Avec des fréquences naturelles équivalentes selon les deux axes comme dans la réalité, Jauvtis et Williamson (2003, 2004a,b) démontrent que les études menées avec un seul degré de liberté sont transposables aux cas à deux degrés de liberté pour des ratios de masse supérieurs à 6. Pour des ratios de masses plus faibles, ils découvrent en revanche une réponse du cylindre complètement nouvelle avec des amplitudes beaucoup plus importantes, $A_y \approx 1.5$ au lieu de $A_y \approx 1$, et un nouveau mode de relâcher tourbillonnaire, le mode 2T où deux triplets de tourbillons sont relâchés par cycle d'oscillation. Les trajectoires du cylindre dans le plan XY prennent généralement une «forme en huit» permanente plus ou moins écrasée similaire aux figures de Lissajou. En d'autres termes, dans le cas où les ratios de masse sont élevés, les plages d'accrochage de fréquences sont éloignées et l'ajout d'un degré de liberté en X affecte peu le mouvement global du cylindre. En revanche si les ratios de masse sont très faibles, les plages d'accrochages s'étendent fortement (voir section 2.2) et peuvent se recouper, on déclenche une double résonance et le mouvement du cylindre est maximal. L'ajout d'une liberté de mouvement en X augmente alors l'amplitude d'oscillation transversale. Ces découvertes sont importantes pour le secteur maritime dont le ratio de masse correspond à cet ordre de grandeur, les études actuelles dans le domaine prennent maintenant systématiquement en compte ce second degré de liberté (Peppia *et al.*, 2015, 2016; Pontaza *et al.*, 2009; Pontaza et Menon, 2013). Etienne et Pelletier (2012) et Yu *et al.* (2013) réalisent d'ailleurs leurs études à ratio de masse nul en ajoutant un second degré

de liberté au cylindre, la combinaison du ratio de masse nul au mouvement XY donne le cas extrême aux amplitudes maximales. Pour des régimes laminaires avec un nombre de Reynolds compris entre 40 et 175, ils obtiennent des réponses en amplitude jusqu'à 50% supérieures aux études précédentes réalisées avec un seul degré de liberté (voir figure 2.3).

2.4 Simulations numériques tridimensionnelles

Pour un écoulement autour d'un cylindre, les premiers modes tridimensionnels apparaissent à partir d'un nombre de Reynolds $Re \approx 190$ et présentent une périodicité spatiale d'environ 3 à 4 diamètres. Des seconds modes d'une longueur d'onde d'un diamètre apparaissent ensuite pour la plage $230 < Re < 250$ (Williamson, 1996). Les tourbillons se disloquent et sont décorrélés le long du cylindre, entraînant la diminution des efforts exercés sur celui-ci. Réaliser des simulations VIV bidimensionnelles pour un nombre de Reynolds $Re > 190$ perd donc en pertinence, car les amplitudes de vibrations sont surestimées (Mittal et Balachandar, 1995). Les progrès importants réalisés en calcul numérique permettent la réalisation de simulations tridimensionnelles mais le coût est exponentiel par rapport à celui des simulations bidimensionnelles, les simulations nécessitent généralement des semaines de calcul et des plateformes de calcul ultra-performantes avec des milliers de processeurs. Les possibilités de simulations 3D sont donc réelles mais réduites, notamment au niveau de la discrétisation axiale et du nombre de Reynolds employé.

Différents axes de recherche sont actuellement à l'étude, certains se concentrent sur la simulation DNS du mouvement libre ou forcé de cylindres courts et rigides à faible ou moyen nombre de Reynolds (Blackburn *et al.*, 2001; Dong et Karniadakis, 2005; Peppas *et al.*, 2015, 2016) tandis que d'autres étudient les mouvements de cylindres longs et élastiques ou de cylindres rigides pour des nombres de Reynolds élevés en utilisant des modèles de turbulence de type LES (Pontaza et Chen, 2007; Pontaza *et al.*, 2009; Pontaza et Menon, 2013; Wu *et al.*, 2012). Pour des cylindres rigides fixes avec un nombre de Reynolds égal à 1000, Lei *et al.* (2001) déterminent qu'un ratio d'aspect¹ $\Gamma = 2$ avec des conditions périodiques aux bords du domaine suffit pour représenter correctement l'écoulement tridimensionnel. Concernant les simulations DNS, on peut relever l'étude de Dong et Karniadakis (2005) qui réussit à simuler un écoulement autour d'un cylindre en mouvement forcé pour un nombre de Reynolds $Re = 10000$ au prix d'une parallélisation massive utilisant 1500 processeurs. En utilisant un code DNS 3D, Blackburn *et al.* (2001) arrivent pour la première fois à faire correspondre avec succès une simulation VIV numérique et son équivalent expérimental, les résultats obtenus sont comparables. On note que la plupart des simulations DNS sont réalisées avec la méthode

1. Le ratio d'aspect Γ est le rapport de la longueur du cylindre sur son diamètre.

des éléments spectraux afin d'augmenter la précision spatiale, Peppia *et al.* (2016) l'utilisent pour obtenir le mouvement forcé en X et Y d'un cylindre pour un nombre de Reynolds $Re = 400$. Il existe très peu de simulations VIV en X et Y tridimensionnelles à très faible ratio de masse où le système est réellement couplé sans forces imposées. L'étude réalisée par Pontaza et Chen (2007) en est une mais leur nombre de Reynolds est très élevé $Re = 10^5$ et nécessite un modèle de turbulence LES. Les amplitudes obtenues pour un ratio de masse égal à 1 et un amortissement très faible sont égales à $A_y = 0.824$ et $A_x = 0.0795$. Aucune simulation 3D avec un cylindre à ratio de masse nul et libre en X et Y n'est connue à ce jour.

CHAPITRE 3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

Ce chapitre est une introduction aux méthodes des éléments finis et spectraux et à leur utilisation en mécanique des fluides, il se concentre principalement sur la démarche de discrétisation du problème. Pour une analyse plus complète du principe des éléments finis, on peut se reporter aux ouvrages de Fortin et Garon (2009) et Reddy (1993).

3.1 Formulation des équations de Navier-Stokes

3.1.1 Formulation forte

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes. Cette dénomination regroupe généralement trois équations, l'équation de bilan de la quantité de mouvement, l'équation de continuité et l'équation de bilan de l'énergie (Batchelor, 1967). Pour la suite de l'étude, on ignore l'équation énergétique qui est découplée des deux premières en incompressible. On peut définir les deux autres équations dans un repère multidimensionnel avec la formulation suivante :

— Équation de bilan de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

— Équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

On définit la variable espace $\mathbf{x} \in \Omega$ avec $\Omega \in \mathbb{R}^n$ pour n compris entre 1 et 3 et la variable temps $t \in [0, T]$. Les champs vectoriels considérés sont le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le champ de pression $p(\mathbf{x}, t)$. Les variables ρ et μ définissent respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide, elles sont toutes les deux considérées constantes dans le cadre de l'étude. La composante $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ est une force volumique appliquée sur le fluide et $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. En considérant que le fluide est Newtonien, on peut établir une relation linéaire entre le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ et le tenseur des déformations de l'écoulement $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}) \quad (3.3)$$

On obtient le système suivant qui est la forme forte du problème :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (3.4)$$

Le système n'est pas encore complètement défini et il est nécessaire d'imposer des conditions limites aux bornes Γ du domaine Ω . Ces conditions sont présentées dans la section 6.2.1. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le terme dépendant du temps disparaît de l'équation de bilan du mouvement.

3.1.2 Formulation faible

Les équations non linéaires de Navier-Stokes sont connues depuis plus d'un siècle mais leur résolution reste encore considérée comme impossible, aucune solution générale n'a jamais été proposée. Seuls certains cas particuliers avec des hypothèses simplificatrices possèdent des solutions analytiques, notamment les écoulements potentiels à viscosité nulle ou les écoulements de Stokes pour lesquels on néglige le terme de convection non linéaire. La résolution des écoulements qui ne rentrent pas dans ces cas de figure simplifiés doit être réalisée à l'aide de méthodes numériques.

La méthode des éléments spectraux, et plus généralement la méthode des éléments finis, ne résolvent pas directement les équations de Navier-Stokes mais leur formulation affaiblie, aussi appelée forme faible, qui est obtenue par intégration de la forme forte sur le domaine de l'écoulement.

Pour la suite de l'étude, on néglige les forces volumiques afin de simplifier les expressions. En multipliant les équations (3.4) par des fonctions tests ψ et q puis en intégrant sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \psi \cdot \left(-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \right) d\Omega & \psi, \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n \\ \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega &= 0 & q, p \in L_2(\Omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

On obtient la forme faible finale après plusieurs intégrations par parties (voir annexe A) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \psi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) : \nabla \psi d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \psi d\Omega \\ = \int_{\Gamma} (-p \mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \cdot \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad q, p \in L_2(\Omega) \quad \psi, \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n \end{aligned} \quad (3.6)$$

Utiliser cette formulation mixte nécessite que les fonctions solutions appartiennent à des espaces fonctionnels spécifiques, appelés espaces de Hilbert et de Sobolev. On peut définir les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
L_2(\Omega) &= \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L_2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \forall i = 1..3 \right\} \\
H_0^1(\Omega) &= \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma} = 0 \right\} \\
H_{\gamma_0}^1(\Omega) &= \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\gamma} = 0, \gamma \subseteq \Gamma \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Les propriétés particulières de ces espaces et leur intérêt sont présentés en annexe (C). Pour la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes, l'espace des fonctions admissibles en pression doit appartenir à l'espace $L_2(\Omega)$ tandis que les champs de vitesse solutions de (3.6) doivent appartenir à $[H^1(\Omega)]^n$ et, selon le type de conditions limites, à $[H_0^1(\Omega)]^n$ ou $[H_{\gamma_0}^1(\Omega)]^n$. On note que ces contraintes sont à prendre en compte lors de la phase de discrétisation, les fonctions servant de bases pour l'approximation numérique doivent être comprises dans ces espaces. L'utilisation généralisée de polynômes permet la vérification immédiate de ces conditions.

Soient \mathbf{V} et \mathbf{Q} respectivement les espaces continus contenant les champs de vitesse et de pression solutions de (3.6) :

$$\mathbf{V} = [H^1(\Omega)]^n \text{ avec } n = 1..3 \qquad \mathbf{Q} = L_2(\Omega) \tag{3.8}$$

On peut réduire l'expression (3.6) en introduisant les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
a : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} & a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\psi} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} d\Omega \\
b : V \times Q &\rightarrow \mathbb{R} & b(\boldsymbol{\psi}, p) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega \\
a_{\Gamma} : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} & a_{\Gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_{\Gamma} (-p + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.9}$$

On a alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + b(\boldsymbol{\psi}, p) &= a_{\Gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \\
b(\mathbf{u}, q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Contrairement à b et a_Γ , a n'a pas un caractère bilinéaire à cause de son terme de convection, il est toutefois possible de linéariser le problème et de le résoudre avec une méthode itérative de type Newton (voir section 3.4.2).

3.1.3 Conditions limites

Qu'il soit sous sa forme forte ou sa forme faible, le problème doit être complété avec des conditions limites aux bords du domaine de l'écoulement. Il existe deux types principaux de conditions limites :

- Les conditions de Dirichlet ou conditions homogènes imposent une valeur au champ de vitesse sur une partie du bord Γ_D .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (3.11)$$

Dans le cadre de la méthode de Galerkin (voir section 3.2.1), les fonctions tests $\boldsymbol{\psi}$ sont considérées comme des perturbations de la solution $\boldsymbol{\delta u}$. Imposer une condition de Dirichlet implique de poser des perturbations nulles. Les fonctions tests $\boldsymbol{\psi}$ et par la suite le terme de droite de l'équation (3.6) s'annulent donc sur Γ_D .

- Les conditions de Neumann ou conditions naturelles imposent la valeur de la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ exercée sur le fluide sur une partie du bord Γ_N de normale \mathbf{n} .

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (3.12)$$

Les contraintes totales regroupent les contraintes dues à la pression et aux effets visqueux, on a ainsi $\boldsymbol{\sigma} = (-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}))$. On remarque que le terme de droite de l'équation (3.6) équivaut à $\int_\Gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$, il n'est donc pas possible d'imposer à la fois une condition de Dirichlet et une condition de Neumann au même endroit sur le bord, d'où $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Par ailleurs, on note qu'imposer une contrainte nulle au bord annule ce terme.

3.2 Discrétisation spatiale

3.2.1 Méthode de Galerkin

Les méthodes des éléments finis et spectraux sont basées sur la discrétisation de la forme faible des équations de Navier-Stokes. Soient \mathbf{u}_h et p_h les solutions approchées de (3.6) obtenues

sur des espaces discrets de fonctions inclus dans les espaces continus des solutions exactes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &\in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V} \\ p_h &\in \mathbf{Q}_h \subset \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\approx \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_u} \mathbf{u}_i(t) \Psi_i(\mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x}, t) &\approx p_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_p} p_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les fonctions d'interpolation Φ_i et les vecteurs composés des fonctions Ψ_i forment les bases des espaces discrets \mathbf{V}_h et \mathbf{Q}_h . Plus ces bases sont riches, meilleure sera la solution numérique obtenue dans le cas où le problème est posé correctement.

On note que les fonctions tests n'ont pas encore été définies, elles peuvent prendre n'importe quelle expression qui vérifie leur appartenance aux espaces continus \mathbf{V} et \mathbf{Q} . Dans le cas de la méthode de Galerkin, les fonctions tests sont prises parmi les fonctions d'interpolation. On leur fait prendre tour à tour l'expression de chacun des éléments des bases des espaces discrets, afin d'obtenir un système d'équations résoluble avec autant d'inconnues que d'équations. Pour le problème continu, on a $n + 1$ inconnues et autant d'équations, l'équation de bilan du mouvement se décompose en n équations en séparant les composantes indépendantes des fonctions tests. Pour le problème discret, le nombre d'inconnues passe à $n \times n_u + n_p$ en ne tenant pas compte des conditions limites, il faut donc poser les équations avec $n \times n_u + n_p$ fonctions tests différentes. Les inconnues sont les valeurs \mathbf{u}_i et p_i , les équations sont les formes faibles de Navier-Stokes posées avec les fonctions tests prenant l'expression de chacune des fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} \psi &= \Psi_i^j & \forall i \in [1, n_u], \forall j \in [1, n] \\ q &= \Phi_i & \forall i \in [1, n_p] \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec Ψ_i^j le vecteur à n composantes pour lequel la $j^{\text{ème}}$ composante est égale à Ψ_i et les autres sont nulles.

On peut discrétiser le système (3.10) en considérant un problème simplifié par souci de compréhension. Soit un domaine unidimensionnel avec des conditions de Dirichlet sur Γ :

$$\begin{aligned} a(u_h, \Psi_i) + b(\Psi_i, p_h) &= 0 & \forall i \in [1, n_u] \\ b(u_h, \Phi_i) &= 0 & \forall i \in [1, n_p] \end{aligned} \quad (3.16)$$

en considérant l'application linéarisée a^* :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_u} a^*(\Psi_k, \Psi_i) u_k + \sum_{k=1}^{n_p} b(\Psi_i, \Phi_k) p_k &= 0 \quad \forall i \in [1, n_u] \\ \sum_{k=1}^{n_u} b(\Psi_k, \Phi_i) u_k &= 0 \quad \forall i \in [1, n_p] \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_u} a_{ki}^* u_k + \sum_{k=1}^{n_p} b_{ik} p_k &= 0 \quad \forall i \in [1, n_u] \\ \sum_{k=1}^{n_u} b_{ki} u_k &= 0 \quad \forall i \in [1, n_p] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Il est possible de représenter le système sous forme matricielle en créant un vecteur inconnu \mathbf{X} de longueur $n_u + n_p$ qui comprend l'ensemble des inconnues u_k et p_k appelées degrés de liberté du système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_u} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n_p} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

le caractère non linéaire de a peut être pris en compte avec l'ajout d'un terme \mathbf{C} lié à la convection :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

- \mathbf{M} est la matrice masse obtenue à partir de a^* , de dimension n_u par n_u
- \mathbf{K} est la matrice de diffusion obtenue à partir de a^* , de dimension n_u par n_u
- \mathbf{B} est la matrice de divergence obtenue à partir de b , de dimension n_p par n_u
- \mathbf{C} est la matrice de convection obtenue à partir de a , de dimension n_u par n_u

Le passage au multidimensionnel augmente seulement la taille du système matriciel, \mathbf{X} étant de longueur totale $n \times n_u + n_p$. On note par ailleurs que les conditions limites de Dirichlet n'ont pas encore été prises en compte, elles vont entraîner la suppression d'un nombre n_D de

lignes du système matriciel égal à la quantité de degrés de liberté bloqués par leur mise en place. La discrétisation temporelle du terme dérivé est rapidement décrite dans la section 3.3 et le principe de résolution du système non linéaire est présenté à la section 3.4.2.

3.2.2 Choix des polynômes d'interpolation

Dans le cas de la méthode des éléments finis et de sa variante spectrale, l'interpolation Lagrangienne est très souvent employée pour interpoler les champs d'inconnues, vitesse et pression, du problème ainsi que la géométrie du domaine étudié. La base de fonctions utilisée se compose des polynômes de Lagrange qui sont définis de la manière suivante :

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.22)$$

Ils sont de degré maximal m et prennent une valeur binaire aux points de collocation x_i :

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad i, j = 0 \dots m \quad (3.23)$$

Soient les points (x_i, y_i) avec $i \in [0, m]$, le polynôme L est l'unique polynôme non nul de degré maximal m passant par ces m points :

$$L(X) = \sum_{i=0}^m y_i l_i(X) \quad (3.24)$$

Pour l'interpolation du champ de valeurs recherché, sachant que $L(x_i) = y_i$, les variables y_i sont les valeurs de la fonction interpolée aux points de collocation. Utiliser l'interpolation Lagrangienne revient donc à donner une signification physique à p_i et \mathbf{u}_i définis par (3.14), ce sont les valeurs des champs de pression et de vitesse en un point donné du domaine :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{n_u} \mathbf{u}_i(t) l_i(\mathbf{x}) \\ p_h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{n_p} p_i(t) l_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Une fois tous les degrés de liberté connus, on peut interpoler la fonction solution et obtenir la valeur interpolée de la solution en tout point du domaine.

Le choix du degré des interpolants pour le couple vitesse-pression est soumis à différentes contraintes, le couple d'interpolants doit notamment vérifier la condition de stabilité de Brezzi-Babuska aussi appelée condition inf-sup afin d'assurer l'existence et l'unicité de la

solution au problème discrétisé (Babuska, 1971; Brezzi, 1974). Sans rentrer dans les détails mathématiques, cette condition est vérifiée s'il existe une constante strictement positive β telle que la forme bilinéaire b vérifie :

$$\inf_{q \in \mathbf{Q}_h} \sup_{\psi \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\psi, q)}{\|q\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}} \geq \beta \quad (3.26)$$

Avec $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ les normes des espaces \mathbf{Q} et \mathbf{V} (voir annexe C). Les couples de polynômes vitesse-pression de type $P_k - P_{k-1}$ vérifient en général cette condition (Brezzi et Fortin, 1991), ils sont à la base des éléments de Taylor-Hood communément employés dans la méthode des éléments finis.

3.2.3 Décomposition élémentaire

Dans le cas où on résout le système (3.21) directement sur tout le domaine Ω avec des fonctions d'interpolation globales, on emploie la méthode de Ritz. Sa mise en place devient rapidement compliquée dans le cas où la géométrie du domaine est complexe et multi-dimensionnelle. Par ailleurs, cette méthode nécessite un ajustement spécifique à chaque problème selon ses conditions limites. Pour palier à ces problèmes, une approche systématique a été proposée avec la décomposition du domaine en un nombre discret d'éléments formant un maillage et contenant chacun sur leurs noeuds une certaine quantité de degrés de liberté, les inconnues du problème. C'est le principe général de la méthode des éléments finis duquel découle la méthode des éléments spectraux. Les problèmes complexes sont décomposés en une multitude de problèmes accessibles. Pour chaque élément, le système matriciel élémentaire de type (3.21) est déterminé puis assemblé aux autres systèmes pour former le système global qui est ensuite résolu de manière directe ou indirecte. En reprenant l'exemple précédent avec N_e le nombre d'éléments du domaine discrétisé :

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{n_u} a_{ki}^{e*} u_k^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{n_p} b_{ik}^e p_k^e &= 0 & \forall i \in [1, n_u] \\ \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{n_p} b_{ki}^e u_k^e &= 0 & \forall i \in [1, n_p] \end{aligned} \quad (3.27)$$

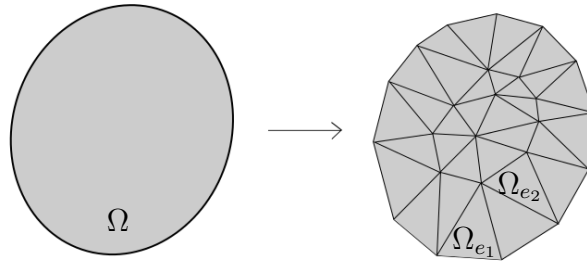


Figure 3.1 Discrétisation et décomposition élémentaire du domaine

Par ailleurs, la géométrie de chacun des éléments est interpolée par rapport à un élément de référence aux dimensions normalisées et, comme l'interpolation des champs d'inconnues, l'interpolation géométrique est réalisée à partir d'une base lagrangienne. Cette opération permet l'utilisation d'une unique base d'interpolants exprimée dans le repère local de référence commun à tous les éléments. Les équations sont ainsi résolues de manière locale sur un élément de référence normalisé puis leurs solutions sont renvoyées dans le domaine géométrique par le biais du jacobien de la transformation liant cet élément à chaque élément géométrique. Cette normalisation offre par ailleurs la possibilité d'utiliser les règles de quadrature pour l'intégration numérique (voir section 3.4.1), celles-ci étant applicables sur des intervalles normalisés.

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_e \text{ Élément physique} & & \hat{\Omega}_e \text{ Élément de référence} \\
 x \in [X_1^e, X_2^e] & \iff & \xi \in [-1, 1]
 \end{array}$$

3.3 Discrétisation temporelle

Dans le cas d'écoulements instationnaires, il est nécessaire de discrétiser le terme de dérivée temporelle présent dans le système matriciel (3.21). Son approximation est obtenue à partir de la valeur du champ de vitesse à un ou plusieurs instants précédant le temps de résolution. En général les schémas explicites sont écartés du fait de leur caractère conditionnellement stable et des limitations contraignantes sur la valeur du pas de temps utilisable. Les schémas implicites sont privilégiés puisqu'ils offrent une stabilité inconditionnelle jusqu'à l'ordre 2 et leur mise en place est facilitée car le reste de la résolution est déjà implicite.

Schéma d'Euler explicite d'ordre 1

$$\begin{cases} \frac{U_n - U_{n-1}}{\Delta t} = f(t_{n-1}, U_{n-1}) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite d'ordre 1

$$\begin{cases} \frac{U_n - U_{n-1}}{\Delta t} = f(t_n, U_n) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

Parmi les schémas communément employés on peut citer les θ -schémas à un pas :

$$U_n = U_{n-1} + \Delta t[\theta f_n + (1 - \theta)f_{n-1}] \quad (3.28)$$

- $\theta = 1$ correspond au schéma d'Euler implicite d'ordre 1
- $\theta = 2$ correspond au schéma implicite de Crank-Nicholson d'ordre 2

Le système matriciel se réduit alors à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}' & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Avec \mathbf{N} le terme additionnel calculé à partir du champ de vitesse aux pas de temps précédents et \mathbf{M}' la matrice masse \mathbf{M} à un coefficient près.

Il existe de nombreuses autres méthodes d'ordre supérieur avec pas multiples qui offrent une meilleure précision et souvent un gain de performance, on peut notamment citer la famille des Backward Difference Formulas (BDF). Leur stabilité est toutefois limitée à partir de l'ordre 3 et ces méthodes sont inconditionnellement instables à partir du degré 6 (Brayton *et al.*, 1972). Les deux premiers schémas BDF d'ordre 1 et 2 sont respectivement le schéma d'Euler implicite et le schéma de Gear.

3.4 Résolution numérique

3.4.1 Intégration numérique

Les sections précédentes ont succinctement présenté les différentes étapes menant au système matriciel permettant de résoudre le problème, il reste toutefois à déterminer numériquement les composantes de la matrice globale. Celles-ci étant toutes formées à partir d'intégrales sur les éléments de référence, on utilise des règles de quadrature pour obtenir leurs valeurs numériques. Ces méthodes numériques permettent d'obtenir la valeur exacte ou approximée de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné. Cette valeur est obtenue à partir de la somme pondérée des valeurs de cette fonction calculées en un nombre fini de points, appelés points d'intégration.

3.4.1.1 Quadrature de Gauss-Legendre

La quadrature de Gauss-Legendre est une règle de quadrature qui permet de calculer exactement sur l'intervalle $[-1,1]$ l'intégrale d'un polynôme de degré $2n - 1$ en connaissant sa valeur en seulement n points de cet intervalle. La formule générale de cette quadrature est :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_n \quad (3.30)$$

Le point d'intégration de coordonnée x_i est la $i^{\text{ème}}$ racine du polynôme de Legendre P_n :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (3.31)$$

Les poids d'intégration w_i sont définis par :

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]} \quad (3.32)$$

L'erreur est définie de la manière suivante :

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad -1 < \xi < 1 \quad (3.33)$$

On note que l'erreur dépend directement de la $2n^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction interpolée. Si cette dérivée est nulle, l'erreur l'est aussi et l'intégration numérique est alors exacte. En d'autres termes, on peut obtenir l'intégration numérique exacte d'une fonction avec n points d'intégration si celle-ci est un polynôme de degré égal ou inférieur à $2n - 1$. Ces relations sont transposables pour des cas bidimensionnels et tridimensionnels.

3.4.1.2 Quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre

Aussi appelée quadrature de Padau ou Lobatto, la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) est une quadrature de Gauss spécifique qui inclut les bords de l'intervalle d'intégration $[-1, 1]$ dans l'ensemble des n points utilisés pour l'intégration numérique. On note qu'il y a donc $r = n - 2$ points d'intégration avec des abscisses non fixées. La formule générale est :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{n(n-1)} (f(-1) + f(1)) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) + E_n \quad (3.34)$$

Avec les poids suivants calculés à partir des polynômes de Legendre :

$$w_i = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2} \quad x_i \neq \pm 1 \quad (3.35)$$

Les points d'intégration utilisés sont les points de Gauss-Lobatto-Legendre. Pour $i \in [2, n-1]$, le point de coordonnée x_i est la $(i-1)^{\text{ème}}$ racine du polynôme de Legendre P'_{n-1} (voir figure ?).

L'erreur est définie de la manière suivante :

$$E_n = \frac{-n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi) \quad -1 < \xi < 1 \quad (3.36)$$

On note que l'erreur dépend directement de la $2n - 2^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction interpolée. Si cette dérivée est nulle, l'erreur l'est aussi et l'intégration numérique est alors exacte. En d'autres termes, on peut obtenir l'intégration numérique exacte d'une fonction avec n points d'intégration si celle-ci est un polynôme de degré égal ou inférieur à $2n - 3$.

On note que cette quadrature est moins efficace que la quadrature de Gauss-Legendre, car pour un nombre de points d'intégration égal, le polynôme intégré exactement est de deux degrés plus faible. Elle présente toutefois d'autres avantages et est utilisée dans la méthode des éléments spectraux.

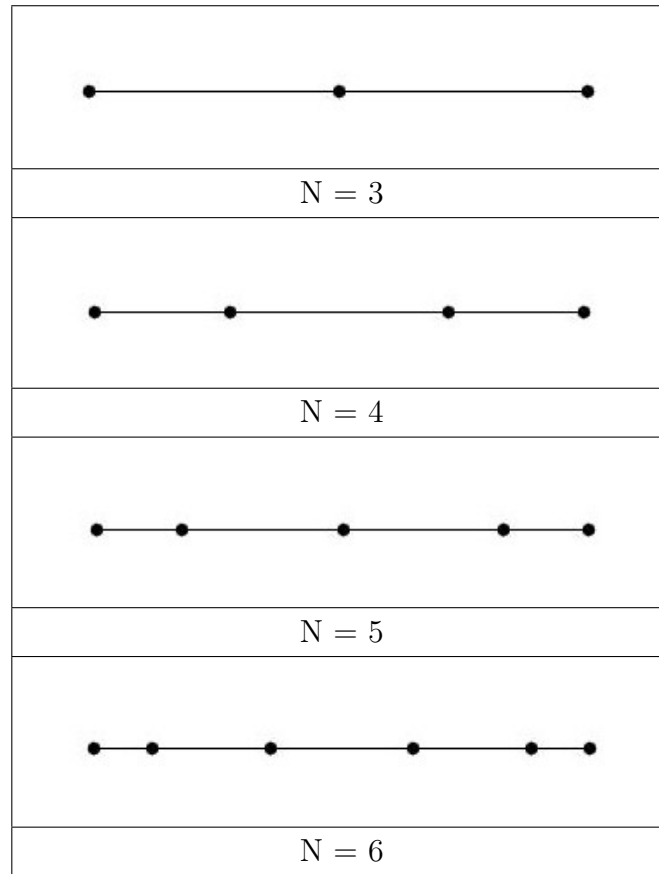


Figure 3.2 Points de Gauss-Lobatto-Legendre

3.4.2 Système non linéaire

Le système matricielle global (3.29) formé par assemblage des matrices élémentaires peut être réduit à :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3.37)$$

Avec :

- \mathbf{A} la matrice globale du système
- \mathbf{X} le vecteur inconnu comprenant tous les degrés de liberté du système
- \mathbf{F} le terme de droite comprenant les termes liés aux conditions limites, aux forces volumiques et à la variation temporelle du système

La matrice globale \mathbf{A} est non linéaire dans le cas général où on considère que les effets de convection ne sont pas négligeables. Pour résoudre le système, il est nécessaire de linéariser sa partie convective et d'utiliser une méthode de résolution itérative de type Newton. Pour

le système (3.37), on peut présenter la méthode de Newton sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = -\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F} \quad (3.38)$$

La variable \mathbf{R} est le résidu de la solution, on considère que la solution a convergé lorsque \mathbf{R} est inférieur à un seuil de tolérance acceptable. À partir d'une valeur établie \mathbf{X}_0 , on cherche à perturber la solution d'une valeur $\delta\mathbf{X}$ telle que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) = 0 \quad (3.39)$$

En développant (3.38) :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}_0) - \left(\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} \right) \cdot \delta\mathbf{X} + \theta(\delta\mathbf{X}^2) \quad (3.40)$$

Au premier ordre d'approximation :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_0) = \left(\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} \right) \cdot \delta\mathbf{X} = \left(-\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0} \right) \cdot \delta\mathbf{X} \quad (3.41)$$

Soit la matrice jacobienne de \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_0) = -\mathbf{J}_R(\mathbf{X}_0) \cdot \delta\mathbf{X} \quad (3.42)$$

Au premier ordre :

$$\mathbf{J}_R(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1(\mathbf{X}_0)}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial R_1(\mathbf{X}_0)}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_n(\mathbf{X}_0)}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial R_n(\mathbf{X}_0)}{\partial X_n} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{R_1(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_1) - R_1(\mathbf{X}_0)}{\delta X_1} & \cdots & \frac{R_1(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_n) - R_1(\mathbf{X}_0)}{\delta X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_n(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_1) - R_n(\mathbf{X}_0)}{\delta X_1} & \cdots & \frac{R_n(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_n) - R_n(\mathbf{X}_0)}{\delta X_n} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Pour chaque itération, on calcule le résidu ainsi que sa matrice jacobienne à partir du champ de solution des itérations actuelle et précédente. On résout ensuite le système de manière directe en utilisant une décomposition LU. Cette méthode est aussi appelée algorithme de correction du résidu :

```

Begin
 $\epsilon_X$  = tolérance pour  $\delta \mathbf{X}$ 
 $\epsilon_R$  = tolérance pour  $\mathbf{R}$ 
 $\mathbf{X}_0$  = Solution initiale
while  $\|\delta \mathbf{X}\| > \epsilon_X$  or  $\|\mathbf{R}\| > \epsilon_R$  do
  Calcul de  $\mathbf{R}(\mathbf{X}_0)$ 
  Calcul de  $\mathbf{R}(\mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X})$ 
  Calcul de  $\mathbf{J}_R(\mathbf{X}_0)$ 
  Résolution  $\mathbf{R}(\mathbf{X}_0) = -\mathbf{J}_R(\mathbf{X}_0) \cdot \delta \mathbf{X}$ 
   $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}$ 
end while
 $\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0$ 

```

Algorithm 1 Algorithme de Newton

Dans le cas particulier où \mathbf{A} est linéaire, on peut théoriquement résoudre le système directement par décomposition LU de \mathbf{A} en une seule opération. En réalité les systèmes à résoudre sont généralement énormes avec plusieurs millions voir milliards de termes pour les cas multidimensionnels complexes et leur résolution avec une seule itération n'est pas envisageable. La matrice globale est entâchée d'erreurs numériques, parfois même insérées volontairement pour résoudre plus facilement le système. De fait la méthode de Newton est aussi employée dans le cas où le système matriciel est linéaire et quelques itérations sont nécessaires pour permettre à la solution de converger correctement.

3.5 Spécificités de la méthode des éléments spectraux

Dans le cas de la méthode des éléments finis classique, les points de collocation utilisés pour l'interpolation lagrangienne des champs d'inconnues sont répartis de manière uniforme sur l'élément. Les polynômes d'interpolation sont généralement de faible degré avec une interpolation linéaire pour la pression et quadratique pour la vitesse. Ce choix a plusieurs avantages, notamment l'utilisation des mêmes polynômes pour l'interpolation des inconnues et de la géométrie. Les éléments sont alors de type isoparamétrique, ce qui facilite la mise en oeuvre numérique. La méthode d'intégration numérique employée est la quadrature de Gauss-Legendre qui est la plus économique en terme de nombre de points d'intégration.

On peut distinguer deux possibilités pour améliorer la précision des résultats :

Raffinement du maillage (h-FEM) On augmente le nombre d'éléments composant le domaine en gardant fixe le degré des polynômes d'interpolation employés. C'est le moyen le plus simple d'améliorer la précision de la solution mais cette possibilité comporte plusieurs inconvénients. L'utilisation de polynômes linéaire ou quadratique implique une convergence lente des résultats de type $O(h)$ ou $O(h^2)$ avec h le pas spatial de discrétisation. Réduire la taille des éléments par deux diminue au mieux l'erreur par deux ou quatre et obtenir une très bonne précision peut nécessiter un maillage conséquent. Or, la taille du système matriciel est directement relié à la taille du maillage, son augmentation peut fortement complexifier la résolution du système global.

Augmentation de l'ordre d'interpolation On augmente le degré des polynômes d'interpolation en gardant constant le nombre d'éléments du maillage. Dans le cas de la méthode des éléments finis standard, où les points de collocation sont répartis de manière uniforme sur les éléments de référence, cette possibilité est peu employée car elle peut fortement affecter la précision de la solution. Pour des points de collocation uniformément répartis, Runge (1901) a montré au début du XX^{ème} siècle qu'utiliser des interpolants d'ordre trop élevé peut provoquer l'apparition de fortes oscillations aux bords de l'élément (voir figure 3.3). À partir d'un certain ordre et selon le problème, augmenter le degré des fonctions d'interpolation augmente l'erreur de la solution interpolée et l'écarte de plus en plus de la solution exacte. Ce phénomène est rédhibitoire pour l'utilisation de polynômes d'ordre élevé avec des points de collocation uniformément répartis. Une variante (p-FEM) de la méthode des éléments finis classique a été proposée par Babuska *et al.* (1981), elle permet d'obtenir une convergence exponentielle de la solution en augmentant l'ordre d'interpolation mais nécessite une interpolation hiérarchique basée sur les polynômes de Legendre. De plus, les degrés de liberté ne renvoient plus directement aux valeurs du champ d'inconnues.

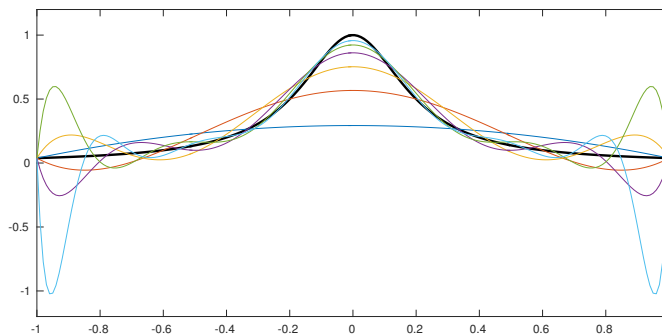


Figure 3.3 Phénomène de Runge - Fonction de Runge (noir) et ses approximations par interpolation lagrangienne de degré 2 (bleu) à 14 (cyan) pour une répartition homogène des points de colocations

La méthode des éléments spectraux (SEM) est une combinaison des méthodes h-FEM et p-FEM qui réalise l'interpolation des champs d'inconnus avec une base lagrangienne d'ordre élevé. La première formulation théorique de cette méthode est l'oeuvre de Gottlieb *et al.* (1977). Canuto *et al.* (2012) et Patera (1984) ont ensuite contribué au développement de son cadre numérique et à son utilisation pour des problèmes de mécanique des fluides. Cette interpolation à haut degré obtenue sans phénomène de Runge est permise grâce à une répartition spécifique non homogène des points de collocation employés pour l'interpolation. Ceux-ci sont disposés aux points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) qui sont l'une des meilleures combinaisons de points d'interpolation avec ceux de Chebyshev (Pena, 2009). Utiliser ces points a un autre avantage, il permet de tirer profit de la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre qui utilise les points GLL comme points d'intégration. Utiliser cette même série de points pour l'interpolation et l'intégration permet d'obtenir une base d'interpolation orthogonale selon le produit scalaire discret défini par la quadrature GLL (voir figures 3.4 et 3.5). Pour deux polynômes différents de la base d'interpolation, l'intégrale numérique de leur produit par la quadrature GLL s'annule. La matrice masse est ainsi diagonale pour le système global et son inversion est simplifiée. On peut en faire la démonstration en reprenant l'exemple unidimensionnel utilisé précédemment, soit la partie instationnaire a_t de la forme bilinéaire a :

$$\begin{aligned}
a_t(u_h, \Psi_i) &= \int_{\Omega} \rho \Psi_i(x) \frac{\partial u_h(x, t)}{\partial t} dx \\
a_t(u_h, \Psi_i) &= \int_{\hat{\Omega}} \rho \Psi_i(\xi) \frac{\partial u_h(\xi, t)}{\partial t} \frac{dx}{d\xi} d\xi \\
a_t(u_h, \Psi_i) &= \sum_{k=1}^n \omega_k(\xi_k) \left(\rho \Psi_i(\xi_k) \sum_{j=1}^n \dot{u}_j(t) \Psi_j(\xi_k) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi_k} \right) \\
a_t(u_h, \Psi_i) &= \rho \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_k(\xi_k) \Psi_i(\xi_k) \Psi_j(\xi_k) \dot{u}_j(t) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi_k} \\
a_t(u_h, \Psi_i) &= \begin{cases} \rho \omega_i(\xi_i) \Psi_i^2(\xi_i) \dot{u}_i(t) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
a_t(u_h, \Psi_i) &= \begin{cases} \rho \omega_i(\xi_i) \dot{u}_i(t) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

On en déduit l'expression de la matrice masse pour le cas spectral :

$$M_{ij} = \begin{cases} \rho \omega_i(\xi_i) \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{3.45}$$

Afin d'avoir les mêmes points d'interpolation et d'intégration GLL, l'intégration numérique est sous-optimale. Ainsi la méthode des éléments spectraux utilise n points pour intégrer le produit de fonctions Ψ_i^2 d'ordre $2n - 2$, soit un point de moins que pour l'intégration exacte optimale et l'écart est encore plus important pour le terme de convection.

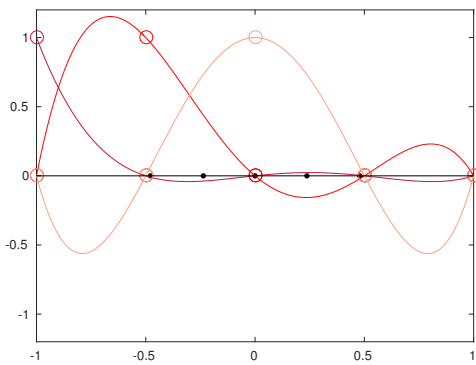


Figure 3.4 Base lagrangienne FEM de degré 4 avec intégration optimale de Ψ_i^2 . Les points d'intégration (en noir) et d'interpolation (cercle) sont dissociés

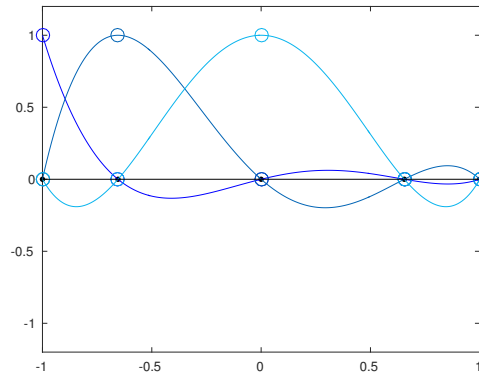


Figure 3.5 Base lagrangienne SEM de degré 4 avec intégration sous-optimale de Ψ_i^2 . Les points d'intégration (en noir) et d'interpolation (cercle) ont les mêmes coordonnées

L'intérêt principal de la méthode des éléments spectraux est qu'elle permet une convergence plus rapide grâce à l'utilisation de polynômes d'ordre élevé (voir le chapitre 5). À un nombre de degrés de liberté égal, la précision de la méthode des éléments spectraux est généralement fortement supérieure à celle des méthodes p-FEM et h-FEM, parfois de plusieurs ordres de grandeur. Cette propriété permet de réduire la taille des systèmes matriciels tout en obtenant des solutions de même précision. Cela entraîne un meilleur conditionnement de la matrice globale et des gains de performance remarquables au niveau de la résolution numérique du problème. Ces avantages sont obtenus au prix de certaines contraintes, notamment un manque d'atténuation des instabilités non physiques de haute fréquence (Xu et Pasquetti, 2004) ainsi qu'une plus grande complexité de mise en oeuvre au niveau de la programmation.

CHAPITRE 4 ASPECTS NUMÉRIQUES

4.1 Introduction au programme

Le code *EF6* employé pour l'étude est issu des travaux d'André Garon, professeur à Polytechnique Montréal. Basé sur les méthodes des éléments finis standards et spectraux, *EF6* permet de résoudre des problèmes multidimensionnels, stationnaires ou instationnaires, relatifs à la thermique et à la mécanique des fluides. Il nécessite comme entrée un maillage, généralement réalisé avec le programme open-source Gmsh (Geuzaine et Remacle, 2009), et renvoie en sortie le vecteur solution du système matriciel. Le champ de solution peut ensuite être visualisé graphiquement à partir d'un logiciel de post-traitement (voir figure 4.1. Le solveur intégré au programme est la version INTEL du solveur direct Pardiso (Kuzmin *et al.*, 2013). Les plateformes de calcul disponibles sont présentées dans le tableau 4.1. Les processeurs employés étant tous dotés de la technologie *Hyperthreading*, chaque coeur physique peut lancer deux *threads* (fils d'exécution), c'est à dire travailler sur deux tâches en parallèle comme deux coeurs distincts. Un coeur physique équivaut ainsi à deux coeurs logiques.

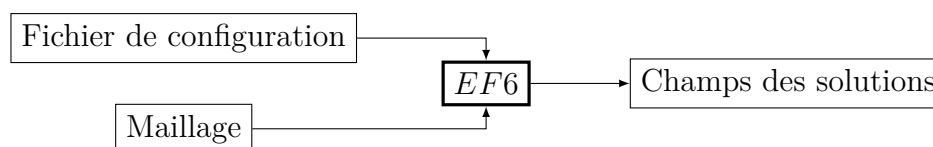


Figure 4.1 Entrée et sortie du programme *EF6*

EF6 se décompose en trois phases distinctes (voir figure 4.2) :

Etape I - Initialisation Le programme réquisitionne les ressources mémoire nécessaires, il initialise les différentes structures de données et récupère les paramètres d'entrée choisis par l'utilisateur qui définissent le problème et la manière de le résoudre. Le maillage est analysé et les relations entre les éléments qui le composent sont définies. Le solveur externe *Pardiso* est initialisé avec la mise en place de la structure du système matriciel, son fonctionnement est détaillé dans la section 4.4. Cette étape est réalisée une seule fois par simulation.

Etape II - Résolution C'est le coeur du programme où est résolu le système matriciel définissant le problème. Que le cas soit linéaire ou non, on résout le problème en utilisant l'algorithme de correction du résidu (voir section 3.4.2). Le calcul des résidus

élémentaires est réalisé en premier, les matrices élémentaires sont ensuite obtenues soit directement soit via le résidu. À partir des termes non nuls des matrices élémentaires, le solveur réalise une factorisation LU de la matrice globale et inverse le système pour ensuite le résoudre. Un calcul non stationnaire nécessite la résolution du système à plusieurs étapes de temps et la méthode itérative de résolution par correction du résidu implique de recalculer les différents termes du système plusieurs fois par pas de temps. Trois tolérances caractérisent le déroulement du processus :

Tolérance de non linéarité Selon la valeur des normes des vecteurs résidu et correction, l'algorithme de Newton accepte l'itération ou en réalise une nouvelle à la même étape de temps.

Tolérance de factorisation Elle est liée à un heuristique basé sur l'algorithme de Newton et les normes des vecteurs résidu et correction. Celui-ci évalue la possibilité de ne pas recalculer les matrices élémentaires et d'éviter la refactorisation du système matriciel global en réutilisant la décomposition calculée à l'itération corrective précédente de l'étape de temps donnée.

Tolérance de discrétisation temporelle Selon la valeur de la norme de l'erreur temporelle, la résolution à une étape de temps est acceptée ou refusée. Si elle est refusée, l'étape II est relancée à un pas de temps plus faible et l'algorithme de Newton doit être réalisé intégralement une nouvelle fois. Si l'erreur temporelle est acceptable, le temps est avancé du pas de temps validé.

Selon l'importance de la non linéarité ou de la durée de simulation, l'étape II peut-être répétée un nombre de fois très important. Essentiellement parallèle, elle concentre la majorité des efforts pour réduire le temps de calcul.

Etape III - Conclusion Les structures de données sont supprimées, la mémoire allouée est libérée et le vecteur de la solution est conservé pour la phase d'analyse et de post-traitement.

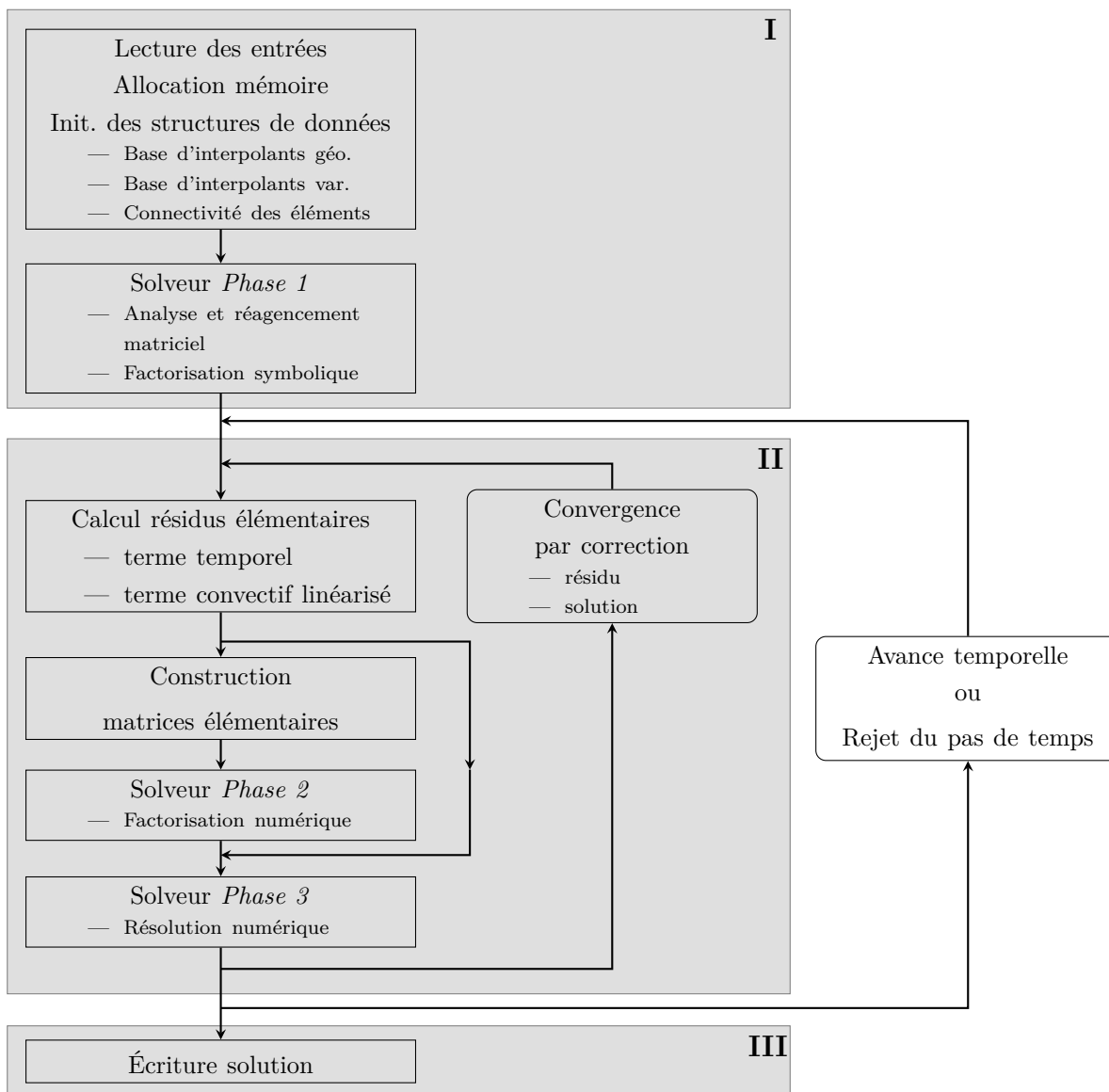
Figure 4.2 Programme *EF6* - Vision globale

Tableau 4.1 Serveurs de calcul disponibles

	CPU	Nb. coeurs réels	Fréq. (GHz)	RAM (Go)	Fréq. (MHz)
M41	E5-2620	12	2	128	1333 - ddr3
Titan	Xeon X7550	32	2	1024	1066 - ddr3
Atlas	Xeon X7550	64	2	1408	1066 - ddr3

4.2 Problématique d'optimisation d'un code spectral

L'implémentation de la fonctionnalité spectrale utilisée pour l'étude est relativement récente et son utilisation intensive a fait apparaître des problématiques nouvelles par rapport à la durée d'exécution et à la répartition des ressources informatiques employées. Un code basé sur la méthode des éléments spectraux ne se comporte pas comme un code d'éléments finis classique. Le nombre d'éléments est très réduit, au maximum quelques milliers avec les ressources disponibles et le nombre de degrés de liberté par élément augmente exponentiellement avec le degré d'interpolation à partir d'un certain ordre (voir figure 4.3). La répartition des efforts de calcul est complètement renouvelée avec l'augmentation du nombre d'opérations numériques par élément. Certains algorithmes itératifs ont des performances fortement diminuées et ralentissent le programme tandis qu'un parallélisme habituellement efficace peut s'avérer mal adapté pour un nombre d'éléments trop faible.

Négligeables dans certains cas, les temps de calculs prennent une importance capitale pour les simulations tridimensionnelles instationnaires où ils peuvent atteindre une durée d'un mois. Ils deviennent alors un paramètre à prendre en compte, au-même titre que la précision de la solution et influent le choix de l'ordre d'interpolation, celui-ci devenant un compromis pour obtenir des résultats pertinents dans un temps réduit.

Une phase d'optimisation est donc nécessaire pour améliorer les performances du code et réduire les temps de calcul. Optimiser un code est un processus itératif basé sur une analyse critique globale, il est nécessaire de détecter les points optimisables mais surtout de les traiter par ordre de priorité et de simplicité. Les efforts doivent être concentrés où les potentiels de gain en temps sont les plus importants et les plus faciles à obtenir. À chaque itération, le temps global de simulation décroît et l'ordre de priorité évolue (voir figure 4.4).

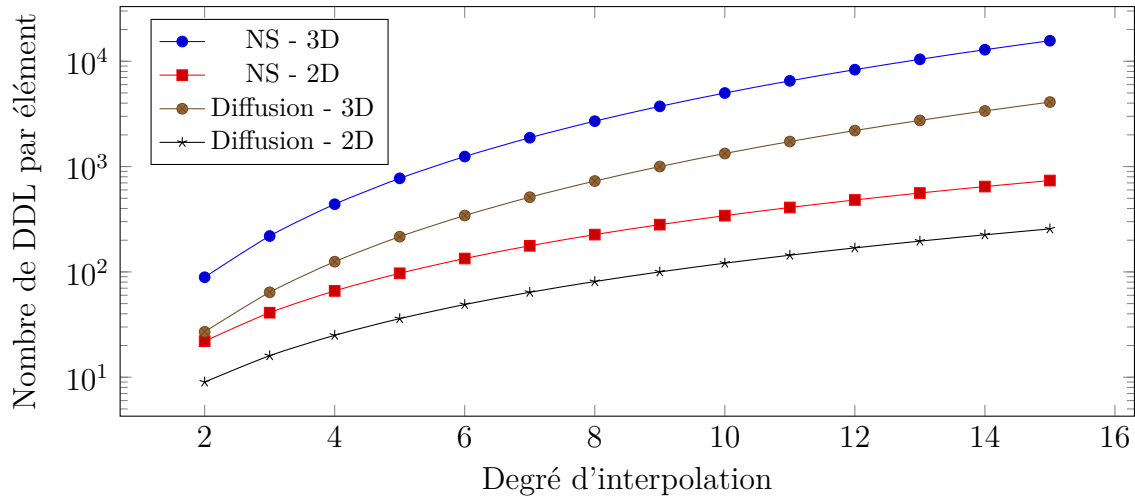


Figure 4.3 Évolution du nombre de degrés de liberté par élément en fonction du degré d'interpolation

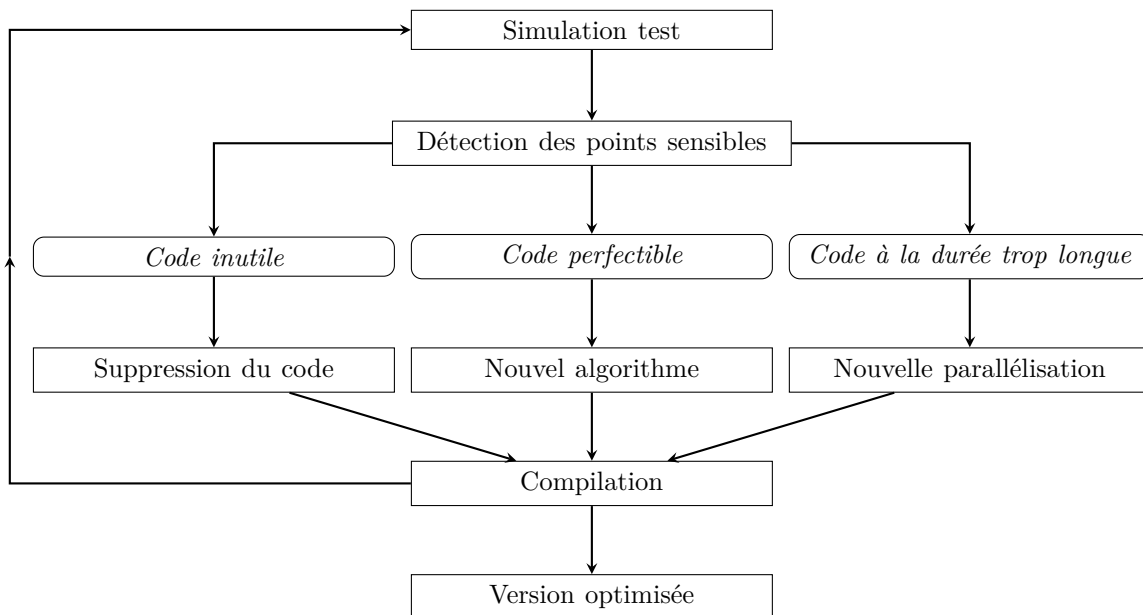
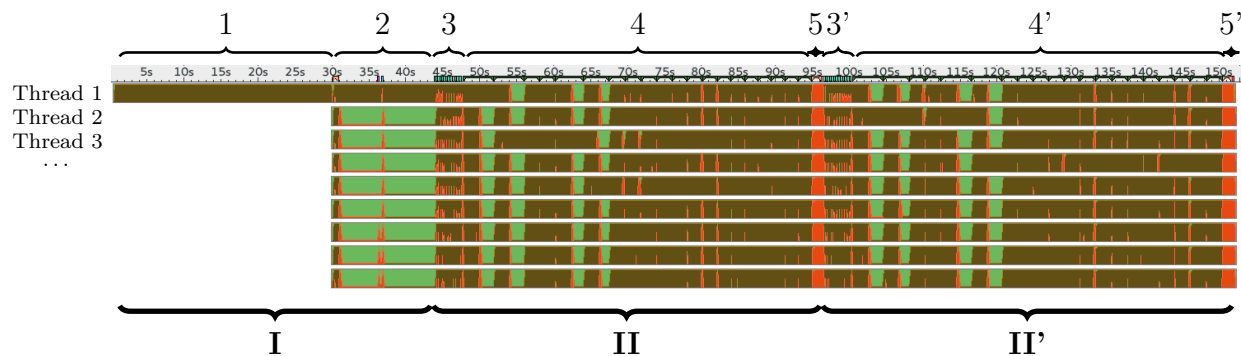


Figure 4.4 Processus d'optimisation

4.3 Analyse par profilage

Le profilage permet d'analyser le comportement d'un code au cours de son exécution. Il suit le déroulement du programme, de son lancement à son arrêt final, en relevant l'activité de tous les processeurs impliqués dans le processus. Le logiciel de profilage utilisé est INTEL Vtune,

il est particulièrement adapté pour suivre les activités des processeurs de la même marque. Vtune permet de déterminer les principaux processus qui affectent la durée d'exécution du programme ou encore l'activité des différents *threads* dans le cas où une partie des opérations est réalisée en parallèle. Les actions de chacun des *threads* sont enregistrées pendant toute la durée d'exécution, cela permet notamment de déterminer si le parallélisme est utile à l'exécution ou si les pertes de temps générées par les échanges entre les différents *threads* (*overhead*) sont supérieures aux gains engendrés.



1. Initiation des structures de données
2. Solveur *Phase 1*
3. Calcul résidus
4. Calcul matrices élémentaires
5. Solveur *Phases 2-3*

Figure 4.5 Exemple de profilage - Problème de diffusion stationnaire avec 9 *threads* - Activité des *threads* : actif (marron), inactif (vert), synchronisation ou attente (orange)

La figure 4.5 présente un exemple de profilage obtenu avec Vtune pour un calcul lancé avec 9 *threads*. La simulation est stationnaire et deux itérations sont nécessaires pour réaliser la convergence de l'algorithme de correction du résidu. On peut souligner l'importance d'optimiser en priorité l'étape II du programme, elle est responsable de la majorité du temps d'exécution en stationnaire et peut être relancée plusieurs dizaines de milliers de fois pour un cas instationnaire. Pour la plupart des cas, le rapport entre le temps passé à la construction des résidus (3) et celui lié à la construction des matrices élémentaires (4) est conservé. Cela souligne l'importance de la tolérance de factorisation qui permet de conserver la même décomposition LU de la matrice globale pour plusieurs itérations correctives. L'indicateur d'activité des *threads* est faussé lorsque le solveur Pardiso est sollicité, Vtune n'arrive pas

à mesurer correctement l'activité des processeurs. Le *thread* 1, appelé *master thread*, est le fil d'exécution primaire sur lequel est lancé le programme, il appelle et dirige une série de *threads* adjoints ou *slave threads*. Pour cet exemple simple, l'étape III est réalisée en moins d'une seconde à la fin de l'exécution et n'a pas été marquée.

Au cours de la phase d'optimisation, le logiciel Vtune a permis la suppression de nombreuses lignes de code inutiles, un réagencement optimisé de certaines classes du programme et la découverte d'un important défaut de programmation très coûteux en spectral qui concerne les structures de données. De fait, de nombreux algorithmes au sein du programme utilisent des doubles boucles, notamment au niveau du remplissage des vecteurs résidus et des matrices élémentaires. Chaque terme de ces deux composantes est calculé en bouclant sur le nombre de fonctions d'interpolations employées et le nombre de points d'intégration utilisés pour l'intégration numérique. Codé en C++, le programme a la particularité de représenter des matrices de dimensions N par M par des vecteurs de longueur $N \times M$, des pointeurs permettent de se déplacer virtuellement sur les deux dimensions et de chercher les informations nécessaires au calcul. Leur mise en place a toutefois été mal paramétrée initialement et ils réalisent d'incessants aller-retour inutiles (voir figure 4.6) en sautant des intervalles de longueur M sur le vecteur lu. Le ralentissement engendré n'a pas été détecté avec le mode d'éléments finis classique, car il est négligeable pour des faibles ordres d'interpolation où M est petit. Il prend, en revanche, des proportions énormes lorsqu'on augmente la taille des structures et que M devient très grand.



Figure 4.6 Optimisation de la lecture par pointeur d'un vecteur de longueur $M \times N$ - Les numéros représentent l'ordre de lecture avant et après optimisation

4.4 Utilisation du solveur direct INTEL Pardiso

La résolution du système matriciel est effectuée par le solveur externe INTEL Pardiso. Celui-ci est une référence dans la résolution directe des systèmes matriciels linéaires par décomposition LU . Descendant directement du solveur Pardiso disponible en open-source (Kuzmin *et al.*, 2013), il est implémenté dans la librairie INTEL MKL et utilise de manière intensive les routines optimisées BLAS-3 implémentées dans celle-ci. Ces routines sont spécialement

conçues pour les calculs matriciels à haute performance. Pardiso peut résoudre des systèmes creux de plusieurs millions voir milliards d'inconnues. Pour assurer la stabilité numérique de systèmes de cette envergure, de nombreuses opérations sont effectuées sur la matrice comme une mise à échelle, *scaling*, ou l'insertion de termes supplémentaires sur la diagonale (Kuzmin *et al.*, 2013). La factorisation de la matrice n'est donc pas exacte et la résolution peut nécessiter plusieurs itérations.

L'action du solveur se décompose en trois étapes :

Phase 1 - Analyse de la matrice et factorisation symbolique Avec la connectivité des éléments, la répartition des degrés de liberté et le système d'équations à résoudre, il est possible de déterminer la disposition des termes non nuls de la matrice globale. Le solveur analyse la structure de la matrice globale non symétrique \mathbf{A} reçue sous forme d'un vecteur d'entrée et réalise sa factorisation symbolique sans connaître la valeur de ses termes. Cette phase est réalisée une seule fois lors de l'exécution du programme et prépare la factorisation numérique en réordonnant les rangées et les colonnes de la matrice pour diminuer son remplissage.

Phase 2 - Factorisation numérique Une fois les termes des matrices élémentaires calculés, le solveur effectue la factorisation numérique de la matrice globale pour la décomposer sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ avec \mathbf{L} et \mathbf{U} , deux matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure.

Phase 3 - Résolution du système matriciel Le système est résolu par la méthode de descente-remontée en plusieurs itérations :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases} \quad (4.1)$$

L'optimisation liée au solveur INTEL Pardiso porte principalement sur deux points :

La parallélisation des différentes phases Le solveur est programmé pour pouvoir fonctionner avec plusieurs *threads* en parallèle via la librairie INTEL OpenMP (voir section 4.5), seule l'analyse matricielle de la Phase 1 est nécessairement séquentielle. Une des modifications réalisées a été de forcer la parallélisation de la phase de factorisation symbolique. L'emploi de routines BLAS empêche toutefois l'utilisation efficace de l'*Hyperthreading*. Par défaut, le solveur lance au maximum un *thread* par coeur physique.

L'algorithme de préparation du vecteur d'entrée Afin de ne prendre en compte que les termes non nuls de la matrice globale, le solveur demande une structure d'entrée particulière sous la forme d'un tableau à trois colonnes (voir tableau 4.2). L'éco-

nomie réalisée est très importante, car la majorité des matrices étudiées sont fortement creuses et leur proportion de termes non nuls est souvent inférieure à 0.1%. Après une analyse par profilage de l’algorithme de construction du vecteur d’entrée, il a été découvert que les déplacements des pointeurs lors de la construction du vecteur étaient fortement rallongés à cause de l’inversion de boucles (voir section 4.3). Contrairement aux cas relativement simples présentés précédemment, les modifications ont été importantes pour cet algorithme et il a dû être entièrement réécrit.

Tableau 4.2 Transcription vers le format d’entrée Pardiso - matrice étudiée (gauche) et vecteur d’entrée obtenu (droite)

	1	2	3	4				
1	5		2		Ligne	Sommation par ligne	Position sur la ligne	Valeur
2		3		1	1	1	1	5
3			1		2	3	3	2
4	4			8	3	5	2	3
					4	6	4	1
						8	3	1
							1	4
							4	8

4.5 Parallélisation OpenMP

INTEL OpenMP (Open Multiprocessing) est une interface de programmation (API) conçue pour le calcul parallèle sur des plateformes à mémoire partagée. Par le biais de fonctions normalisées, elle permet la parallélisation à faible coût d’un programme et offre des gains de performances potentiellement considérables sans nécessiter une importante restructuration du code. Toute parallélisation implique toutefois une complexité croissante du programme, chaque action et chaque paramètre doivent être soigneusement analysés pour éviter tout conflit entre les différents *threads*. OpenMP est généralement utilisé pour réaliser en parallèle des processus indépendants aux durées d’exécution comparables ou pour paralléliser des boucles, les *threads* se partageant les itérations pour accélérer le calcul. L’inconvénient majeur d’OpenMP est son incompatibilité avec la majeure partie des plateformes de calcul, celles-ci étant très généralement à mémoire distribuée. Il existe ainsi une limite de parallélisation implicite de quelques centaines de coeurs. Pour des calculs plus exigeants, il est nécessaire d’utiliser la bibliothèque plus complexe MPI (Message Passing interface) qui fonctionne sur des architectures à mémoire distribuée.

L'effort de parallélisation est essentiellement concentré sur l'étape II du programme (voir figure 4.7), car celle-ci est prédominante dans toutes les simulations. Pour des calculs instationnaires, le rapport entre le temps dépensé à l'exécution de cette partie et le temps d'exécution total est même très proche de 1. Les constructions des structures élémentaires se prêtent par ailleurs très bien à la parallélisation. Lors de la lecture du maillage un algorithme répartit l'ensemble des éléments dans différents groupes appelés *couleurs*, chaque *couleur* comprend un certain nombre d'éléments indépendants et non connectés au sein du maillage. Les constructions élémentaires sont réalisées *couleur* après *couleur* et au sein d'une même *couleur* les contributions de chacun des éléments sont ajoutées en parallèle dans la matrice et le résidu globaux. Le solveur Pardiso utilise aussi massivement OpenMP pour la factorisation numérique et la résolution du système matriciel.

L'utilisation de la méthode des éléments spectraux apporte une nouvelle problématique, les maillages deviennent tellement grossiers que le nombre de *threads* disponibles est parfois supérieur au nombre d'éléments présents dans une *couleur*. Dans ce cas, certains *threads* sont inutiles et les ressources disponibles sont sous-exploitées. Afin de supprimer cette limite et de réduire les temps de calcul, un parallélisme imbriqué à deux niveaux (*nested*) est implémenté pour le calcul particulièrement coûteux des matrices élémentaires. Pour chaque élément d'une *couleur*, des *threads* supplémentaires sont appelés pour boucler en parallèle sa contribution au système global (voir figure 4.8). Cette parallélisation imbriquée permet de solliciter plus de *threads* pour un même nombre limité d'éléments par couleur. Dans le cas de la méthode des éléments finis, cette parallélisation à double niveau n'est pas utile car les ordres d'interpolation et d'intégration sont trop faibles pour obtenir un gain de temps en calculant la contribution d'un élément en parallèle. En revanche, pour la méthode des éléments spectraux, les boucles d'intégration numériques deviennent considérables, notamment en trois dimensions avec plusieurs milliers de points d'intégration par élément et leur parallélisation est particulièrement appropriée.

L'algorithme réalisant la transcription des structures de données élémentaires vers le format d'entrée imposé par le solveur *Pardiso* est aussi parallélisé, l'étape I du code devient partiellement parallélisée. Pour des simulations temporelles instationnaires, les gains obtenus par cette amélioration sont faibles vis à vis du temps passé dans le reste du code. Toutefois, elle apporte un gain de temps non négligeable pour des calculs courts où les étapes I et II ont des temps d'exécution comparables.

La dernière étape d'optimisation se concentre sur le choix des paramètres de parallélisation. Il est vital de réduire au maximum les temps d'attente et les pertes dues aux délais de synchronisation entre les différents *threads*. Dans le cas de la parallélisation des boucles, le

comportement des *threads* est défini par de nombreux paramètres. Il est par exemple possible de répartir, dès le lancement de la boucle, l'intégralité des itérations entre les différents *threads* ou de les forcer à communiquer avec le *master thread* après chaque itération pour en demander une nouvelle à calculer. Il existe un comportement adapté à chaque situation qui permet une réduction, voir une suppression des pertes dues aux communications entre les *threads*. Il est par ailleurs toujours important d'avoir une vision d'ensemble et de toujours paralléliser au plus haut niveau possible, plus les tâches parallélisées sont courtes et plus les gains obtenus par parallélisation sont faibles. La parallélisation peut même avoir un impact négatif et ralentir le code dans le cas où plusieurs *threads* mettent plus de temps qu'un seul *thread* à réaliser un processus à cause du temps nécessaire à la synchronisation.

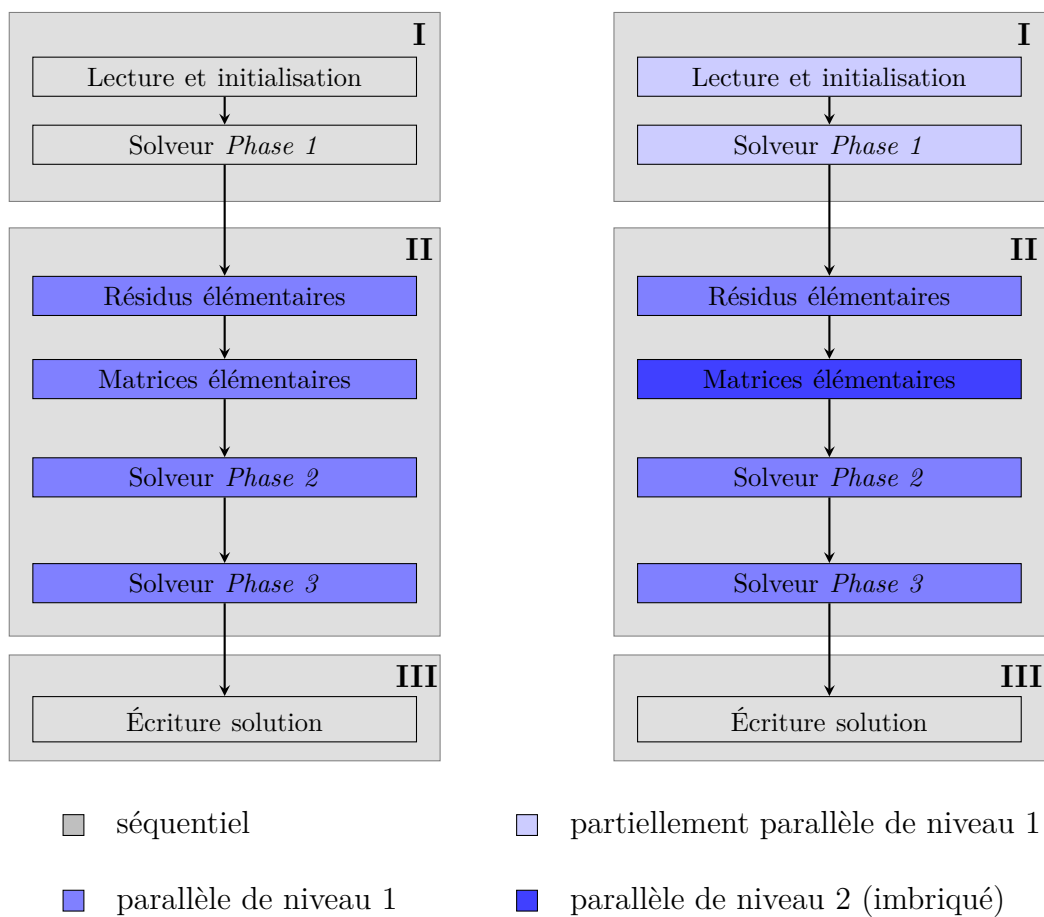


Figure 4.7 Évolution générale de la parallélisation - avant (gauche) et après (droite) optimisation

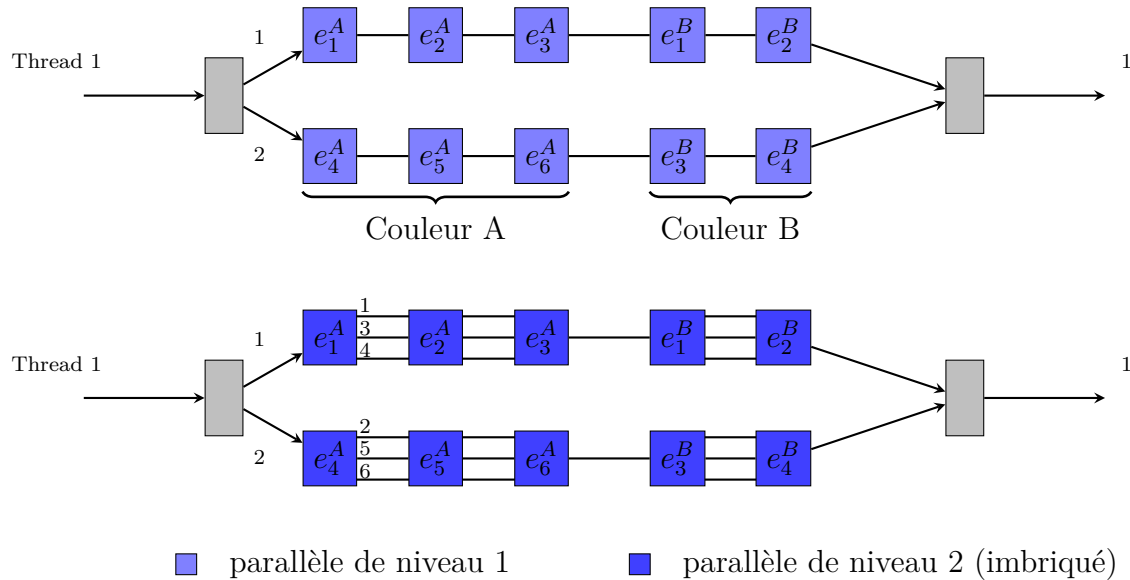


Figure 4.8 Parallélisation à double niveau des constructions matricielles élémentaires - avant (haut) et après (bas) optimisation

4.6 Résultats

Trois simulations sont lancées à la fois avec le programme *EF6* initial et avec sa version optimisée finale comprenant l'ensemble des optimisations présentées précédemment, chacune d'entre elles permet de tester un point particulier du programme (voir tableau 4.3) :

Cas 1 Problème de diffusion thermique bidimensionnel avec peu d'éléments mais un ordre d'interpolation et d'intégration numérique élevés. Les efforts sont concentrés au niveau des boucles des constructions élémentaires. Le problème est volontairement réduit afin de pouvoir le tester en séquentiel et calculer l'accélération obtenue grâce au parallélisme.

Cas 2 Problème de diffusion thermique bidimensionnel avec beaucoup d'éléments mais un ordre d'interpolation et d'intégration numérique faibles. Les efforts sont concentrés au niveau des phases de lecture, d'écriture, d'assemblage et de résolution matricielles. Le degré d'interpolation est choisi volontairement faible, il varie entre 2 et 3. L'intérêt de la simulation est d'analyser l'effet des optimisations réalisées sur la construction globale en choisissant des petites structures élémentaires formant une importante structure globale. La parallélisation de niveau 2 est inutile pour ce cas de figure.

Cas 3 Problème de type Navier-Stokes avec un écoulement visqueux instationnaire autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds égal à 50. Son étude est importante,

car c'est un cas comparable aux simulations réalisées par la suite en VIV (voir chapitre 6). L'étape II du code se complexifie fortement avec un système matriciel non linéaire, une variation temporelle impliquant une résolution pour différents pas de temps et un nombre de variables inconnues passant de 1 à 3 par rapport aux problèmes précédents. La parallélisation de niveau 2 est activée.

Chaque simulation a été lancée au moins trois fois afin de moyenniser les résultats et d'atténuer les variations transitoires de performance des calculateurs dues à la présence de processus externes. Le calculateur M41 à 12 coeurs physiques et 24 coeurs logiques est utilisé pour les cas 1 et 2. Le dernier cas nécessite le calculateur Atlas qui possède 64 coeurs physiques et le double de coeurs logiques (voir tableau 4.1).

Tableau 4.3 Ensemble des simulations tests

Cas	Problème	Régime	Éléments	Degré	DDL	Parallélisme
1	Diffusion Thermique 2D	Stationnaire	100	P15	$O(10^4)$	Niveau 1 12 threads
2	Diffusion Thermique 2D	Stationnaire	1 000 000	P2 P3	$O(10^6)$ $O(10^7)$	Niveau 1 20 threads
3	Écoulement NS 2D 3D	Instationnaire (20 s)	202	P7-P6 P9-P8 P5-P4	$O(10^4)$ $O(10^6)$	Niveaux 1 - 2 20×2 threads

4.6.1 Cas 1

Tableau 4.4 Résultats du cas d'étude 1

	Séquentiel	Parallèle (temps cpu) 12 threads	Accélération parallèle
Code initial	147 s	87 s (163 s)	1.7
Code optimisé	39.4 s	7.2 s (69 s)	5.5
Rapport de gain	3.7	12.1	

Le premier cas d'étude est lancé d'abord de manière séquentielle et ensuite en parallèle avec 12 threads (voir tableau 4.4). La parallélisation est pertinente avec un nombre d'éléments par couleur comparable au nombre de *threads* employé. Les gains obtenus dans les deux cas sont importants, le temps d'exécution du programme est divisé par 4 en séquentiel et

12 en parallèle. De plus on note que l'accélération parallèle (*speed up*), rapport du temps d'exécution en parallèle sur celui obtenu en séquentiel, évolue de 1.7 à 5.5 avec l'optimisation du code. Celui-ci est parallélisé de manière plus efficace, sa proportion de parallélisation est plus importante et les *threads* sont mieux employés. L'optimisation réalisée est donc particulièrement performante au niveau de l'étape de construction des résidus et matrices élémentaires, phase dominante ici, ainsi que pour la phase d'initialisation du programme. Les gains vont être d'autant plus marqués que la construction élémentaire va être importante.

4.6.2 Cas 2

Tableau 4.5 Résultats du cas d'étude 2

Degré	Parallèle - 20 threads (temps cpu)	
	P2	P3
Code initial	175 s (485 s)	494 s (1148 s)
Code optimisé	78 s (431 s)	171 s (971 s)
Rapport de gain	2.2	2.9

Le second cas d'étude est effectué uniquement en parallèle afin de limiter les temps d'exécution (voir tableau 4.5). La parallélisation est réalisée avec 20 *threads* et le nombre d'éléments par couleur du maillage est quatre ordres de grandeur plus grand. Pour une interpolation quadratique, les gains en temps d'exécution sont de l'ordre de 2, ils passent à 3 avec une interpolation cubique. Ce cas test montre l'impact notable de l'optimisation sur la phase de construction du système matriciel global.

4.6.3 Cas 3

Le nombre de *threads* alloué au niveau 1 du parallélisme est soit égal au nombre moyen d'éléments par couleur du maillage, soit au double. L'objectif est de savoir s'il existe un intérêt à utiliser plus de *threads* que d'éléments par couleur. En théorie, si aucun niveau 2 de parallélisation n'est activé, les *threads* supplémentaires ne sont utiles que pour les phases liées à *Pardiso* et seulement s'ils ne dépassent pas le nombre de coeurs physiques, auquel cas ils ne sont pas utilisés (voir section 4.5).

Il est important de noter que les simulations réalisées avec uniquement 20 *threads* sont lancées une par une, cela signifie que l'activité de la plateforme de calcul est moindre par rapport à une sollicitation plus importante de 40 *threads*. L'inactivité des 20 *threads* restants

influe fortement sur les performances du calculateur et donc sur les temps d'exécution. En trois dimensions, les temps d'exécution des simulations utilisant 20 *threads* sont quasiment doublés lorsque celles-ci sont lancées deux par deux. Le fait de réaliser les simulations de 20 *threads* sans solliciter les 20 *threads* rendus disponibles est un paramètre de mesure important, pour les résultats suivants on a soit 20 *threads* actifs et 20 autres libres soit 40 *threads* actifs.

Tableau 4.6 Résultat du cas d'étude 3 en 2D

Degré	P6P5			P9P8		
Durée de simulation	20 s (60 it)			10 s (50 it)		
Parallélisme	20 × 1	40 × 1	20 × 2	20 × 1	40 × 1	20 × 2
Code initial	78 s	73 s	-	435 s	430 s	-
Code optimisé	27 s	31 s	28 s	112 s	128 s	119 s
Rapport de gain	2.9	2.6	-	3.9	3.4	-

Pour les simulations en deux dimensions (voir tableau 4.6), les gains d'optimisation sont comparables aux deux cas précédents avec un rapport de temps d'exécution variant de 3 à 4 selon le degré d'interpolation. Pour les deux versions, on note par ailleurs que les temps d'exécution sont comparables selon qu'on utilise 20 ou 40 *threads* au niveau 1 du parallélisme, voire légèrement meilleurs avec 20 *threads*. Pour un niveau unique de parallélisation, l'utilisation de *threads* supplémentaires est donc inutile voire contre productive pour ces cas de figure, il est préférable d'utiliser seulement 20 *threads* pour désengorger la plateforme de calcul. L'ajout du niveau 2 de parallélisation permet uniquement de revenir à un niveau de performance obtenu avec 20 *threads*. En deux dimensions, on peut donc considérer que la double parallélisation n'est pas utile, des gains apparaissent seulement pour des constructions élémentaires très importantes avec des ordres d'interpolation très élevés. Même avec des polynômes d'interpolation de degré 9, les boucles de construction élémentaires sont trop petites pour nécessiter l'action conjointe de plusieurs *threads*.

Tableau 4.7 Résultat du cas d'étude 3 en 3D

Degré	P5P4		
Durée de simulation	1 s (35 it)		
Parallélisme	20 × 1	40 × 1	20 × 2
Code optimisé	1320 s ≈ 22 min	1650 s ≈ 27 min	1110 s ≈ 19 min
Gain	-	-25 %	16 %

Les simulations en trois dimensions ont été réalisées uniquement avec le code optimisé, les calculs étant trop longs avec la version initiale. Lancée sur une seconde, la simulation a nécessité 35 itérations temporelles, 51 reconstructions et 121 résolutions du système matriciel (voir tableau 4.7). Il est important de rappeler que le deuxième niveau de parallélisation implémenté n'agit qu'au niveau de la reconstruction matricielle en accélérant la construction des matrices élémentaires. Contrairement aux simulations précédentes, les gains obtenus par une double parallélisation sont clairement visibles. En 51 reconstructions, la double parallélisation permet de réduire les temps de calcul d'environ 16% pour les simulations tridimensionnelles de degrés d'interpolation P5P4. Ces gains vont forcément s'amplifier en augmentant le degré d'interpolation puisque cela va faire croître de manière exponentielle les structures élémentaires et les boucles affiliées pour lesquelles sont utilisées la double parallélisation (voir figure 4.3). On note par ailleurs l'importante perte de performance dans le cas où les 40 *threads* sont lancés au niveau 1 avec un temps d'exécution qui s'allonge de 25%. Comme mentionné auparavant, ces résultats sont fortement dépendants de l'activité de la plateforme de calcul Atlas. Lors des simulations utilisant 20 *threads*, les 20 *threads* non utilisés sont délibérément inactifs. Dans le cas où ils sont occupés par une activité annexe, le temps d'exécution à 20 *threads* passe de 22 min à environ 46 minutes, l'utilisation de 40 *threads* au niveau 1 devient alors viable.

En conclusion, les différentes simulations tests montrent clairement que l'optimisation réalisée sur le code engendre des gains importants sur les temps d'exécution de l'ensemble des processus internes, avec un temps d'exécution global au moins divisé par 2 en deux dimensions. Ces gains sont accentués dans le cas de l'utilisation de la méthode des éléments spectraux basée sur des bases d'interpolants d'ordre élevé avec des temps d'exécution divisés par 4 et plus. Les écarts de performance sont encore plus forts en trois dimensions avec la forte complexification des structures de données engendrée par l'ajout d'une dimension. Pour finir, l'utilisation d'un nombre de *threads* supérieur au nombre d'éléments par *couleur* du maillage doit se faire avec précaution, plus de parallélisation que nécessaire ne signifie pas forcément un gain en performance, l'effet peut même être négatif. L'utilité de la double parallélisation est démontrée pour les cas les plus complexes, elle devient déterminante en trois dimensions lorsque sont employés des polynômes d'interpolation à ordre élevé.

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION

5.1 Vérification et validation en CFD

La vérification et la validation d'un code sont deux étapes clés de son développement, elles permettent de s'assurer de son bon fonctionnement et d'estimer l'intervalle d'erreur numérique des résultats obtenus sur une plage d'étude donnée. Roache (1998) a particulièrement développé cette branche d'étude en CFD :

Vérification Première étape qui se concentre sur le comportement du code afin de s'assurer qu'il résout correctement ce qui lui est demandé. L'implémentation numérique du modèle théorique lié à l'étude est analysée en profondeur pour trouver et éliminer les erreurs de programmation (*bugs*). Cette étape est généralement réalisée avec la méthode des solutions manufacturées.

Validation Seconde étape où est analysée la validité des équations résolues par le code vis à vis du phénomène physique étudié. Pour reprendre Roache (1998), si la vérification est l'étape où l'on vérifie que le code résout correctement les équations demandées, la validation est celle où l'on vérifie qu'il résout les bonnes. L'objectif étant de valider le modèle physique implémenté, il est préférable de réaliser la validation du code en comparant ses résultats avec ceux tirés d'une expérience. Toutefois des résultats numériques obtenus par un code certifié peuvent servir de références.

5.2 Vérification

La méthode des solutions manufacturées est couramment employée pour vérifier un code de calcul, elle consiste à réaliser la simulation d'un problème dont la solution analytique exacte est déjà connue. En choisissant correctement les conditions limites et les termes sources en fonction de cette solution analytique, on peut ensuite comparer les résultats obtenus par simulation et les résultats exacts du problème. Différentes étapes de vérification sont présentées dans cette partie, d'abord une vérification des propriétés spectrales puis une analyse du comportement du code pour un problème thermique et enfin pour un écoulement bien connu, l'écoulement de Poiseuille.

5.2.1 Comparaison éléments finis et éléments spectraux

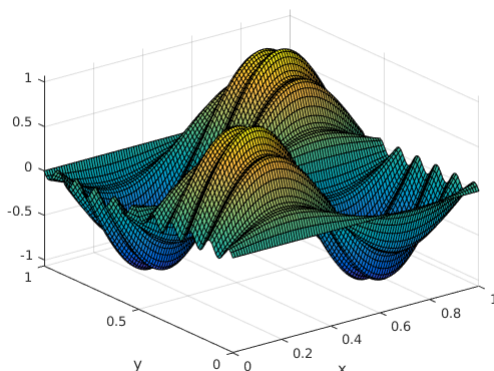


Figure 5.1 Fonction à modéliser $f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 0.08 \sin(20\pi y)$

La comparaison des propriétés des éléments finis et spectraux est réalisée avec un problème de diffusion thermique bidimensionnel stationnaire. La fonction f utilisée comme solution manufacturée du problème est présentée à la figure 5.1, sa complexité spatiale avec des oscillations sinusoidales aux fréquences éloignées d'un ordre de grandeur permet de tester le comportement des deux méthodes face à des cas difficiles. Le maillage utilisé avec la méthode spectrale est fixe et contient 16 éléments tandis que celui utilisé avec la méthode des éléments finis est raffiné au fil de l'étude (h-raffinement). La figure 5.2 souligne la différence de comportement entre la méthode des éléments spectraux et celle des éléments finis au niveau de la rapidité de convergence des résultats, les interpolations linéaire et quadratique permettent au mieux une convergence égale à leurs ordres respectifs alors que la convergence spectrale est exponentielle à partir d'un certain nombre de degrés de liberté. Pour la suite de l'étude, l'erreur numérique est définie comme $\|\epsilon\|_{L_2} = \|u_{ex} - u_{num}\|_{L_2}$. Obtenir une solution approchée avec une erreur inférieure à 10^{-6} nécessite l'utilisation de 3×10^3 degrés de liberté en spectral et plus de 2×10^6 en quadratique, soit une différence de trois ordres de grandeur. A contrario, le conditionnement de la matrice globale évolue de manière identique entre les différentes méthodes, les éléments spectraux permettent donc d'obtenir une erreur très faible avec un nombre de degrés de liberté et un conditionnement réduits. Les deux graphes de la figure 5.3 sont en accord avec les résultats présentés par Deville *et al.* (2002), ils résument à eux seuls tout l'intérêt de la méthode spectrale et ses avantages sur la méthode des éléments finis classique. Pour la partie spectrale, on note que les oscillations de haute fréquence semblent compliquer la convergence de l'erreur qui décroît par palier.

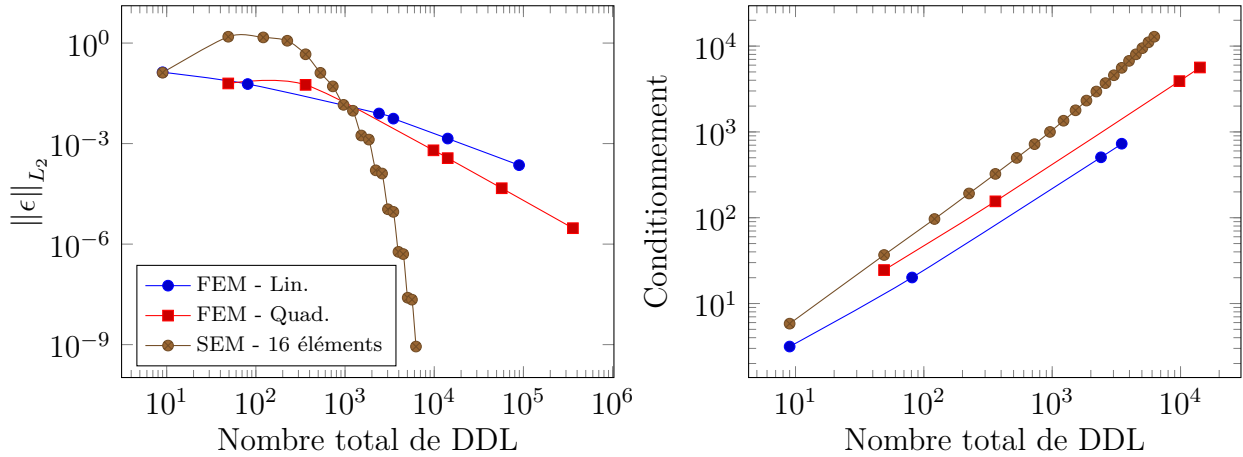
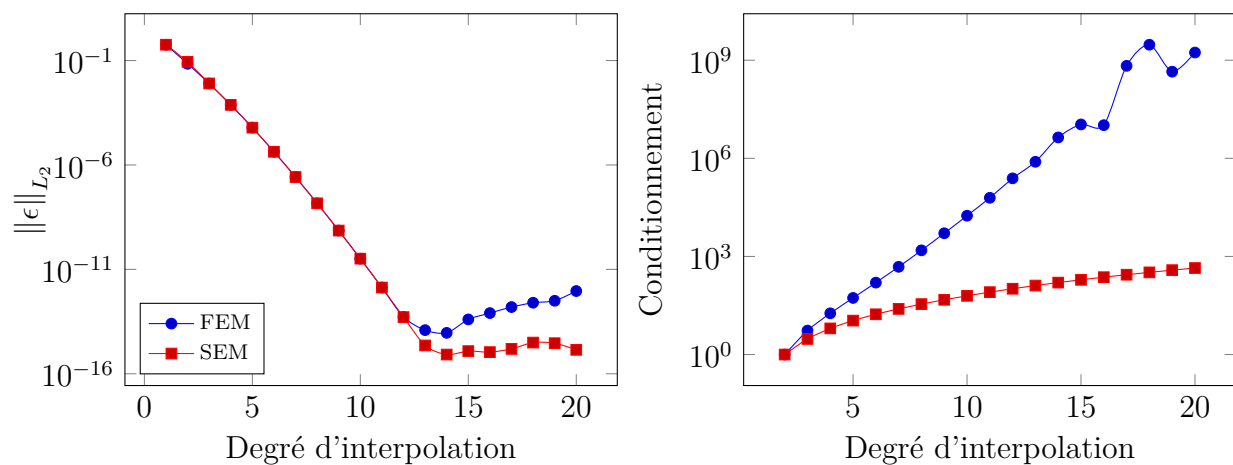


Figure 5.2 Évolution de l'erreur suivant la norme L_2 (voir annexe C) et du conditionnement de la matrice globale en fonction du nombre de degrés de liberté du système

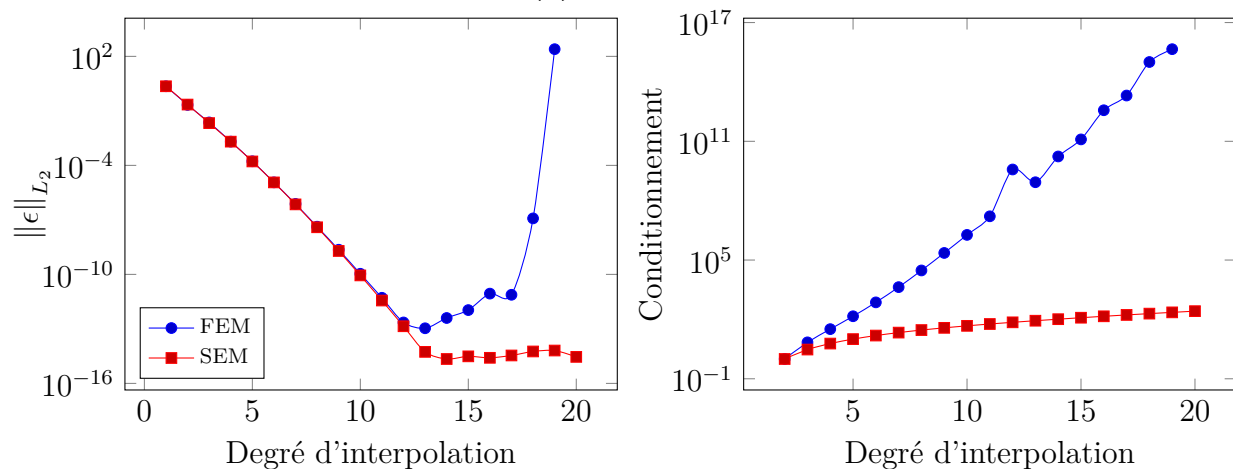
5.2.2 Diffusion thermique

Le code est vérifié en 1D, 2D et 3D avec les équations de la diffusion thermique en utilisant les méthodes des éléments finis et spectraux. L'étude est réalisée en collaboration avec Martin Wasselet, étudiant en maîtrise recherche à Polytechnique Montréal (Wasselet, 2016). Les simulations sont effectuées en utilisant un seul élément, le raffinement est uniquement réalisé au niveau de l'ordre d'interpolation (p-raffinement). Pour les trois cas, la solution manufacturée utilisée est la fonction f :

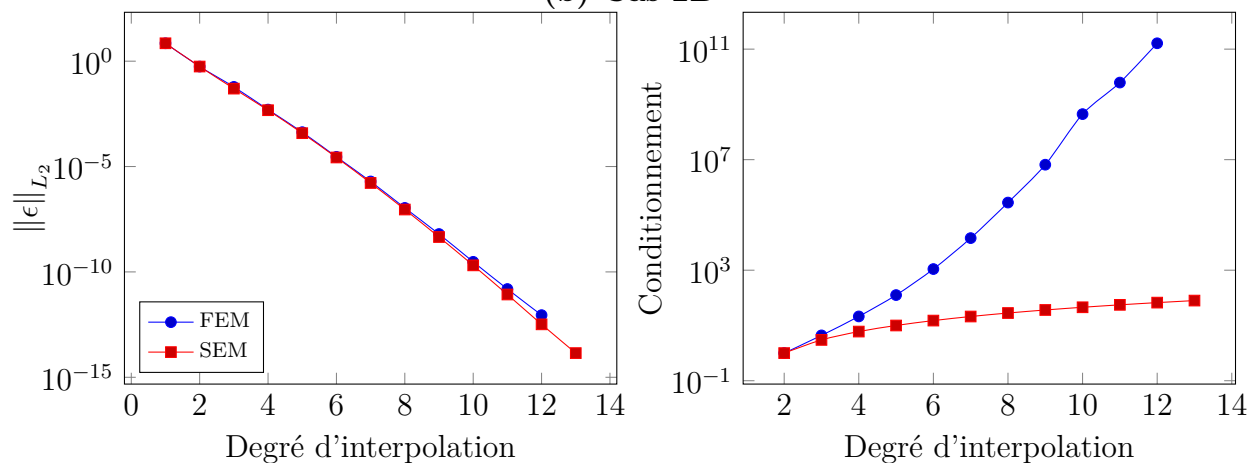
$$f(\mathbf{x}) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \quad \text{avec } n = 1 \dots 3 \quad (5.1)$$



(a) Cas 1D



(b) Cas 2D



(c) Cas 3D

Figure 5.3 Évolution de l'erreur suivant la norme L_2 et du conditionnement de la matrice globale en fonction du degré d'interpolation

Les trois cas présentent des comportements globalement similaires (voir figure 5.3). L'erreur numérique converge correctement pour les deux méthodes jusqu'à un certain point après lequel les résultats divergent avec la méthode des éléments finis. Cette divergence est liée à l'utilisation d'une base de points de collocation uniformément répartie (voir section 3.5). Elle corrèle avec l'augmentation très importante de la valeur du conditionnement de la matrice globale lorsqu'on emploie cette méthode. On note que la valeur du conditionnement et la divergence de l'erreur numérique augmentent avec la dimension du problème. Les simulations 3D ont été arrêtées pour un degré d'interpolation plus faible qu'en 1D et 2D, car les temps de calculs devenaient trop longs. Avec une convergence de l'erreur numérique à 10^{-15} pour les trois cas étudiés, on peut affirmer que le code fonctionne correctement pour ces cas de figure.

5.2.3 Écoulement de Poiseuille

La dernière étape de vérification présentée est réalisée avec un écoulement de Poiseuille, celui-ci a la particularité de posséder une solution analytique connue. On simule un écoulement laminaire visqueux bidimensionnel dans un canal rectiligne en supposant le non glissement du fluide sur les parois latérales et un écoulement libre en sortie, le nombre de Reynolds est égal à 100. Le champ de vitesse en entrée du domaine est imposé comme étant égal au profil d'un écoulement de Poiseuille pleinement développé :

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 6y(1 - y) & \forall y \in [0, h] \\ v(0, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

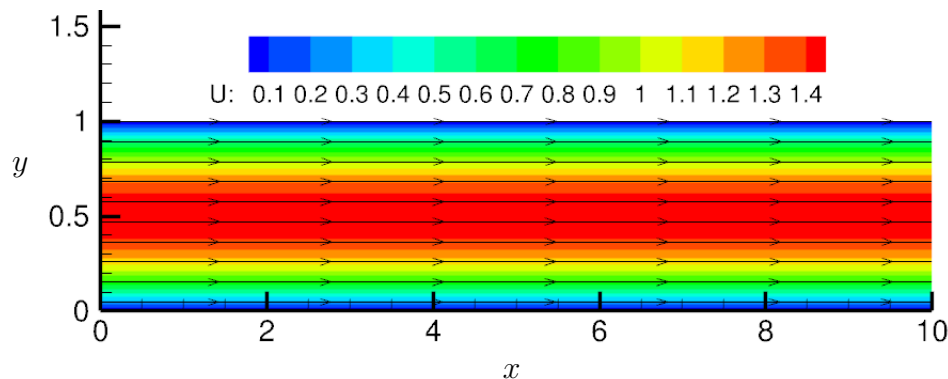


Figure 5.4 Champ de vitesse axial obtenu

La figure 5.4 présente le champ de vitesse u obtenu, la valeur de la vitesse v est inférieure à

10^{-13} dans tout le domaine. On en déduit que l'écoulement obtenu par simulation conserve le profil de vitesse imposé à l'entrée du domaine. Le code retrouve bien comme solution numérique l'écoulement de Poiseuille pleinement développé, son fonctionnement est donc vérifié pour un problème de fluide visqueux. Ces différents cas d'étude ne sont pas exhaustifs, ce ne sont seulement que les premières étapes d'une vérification complète du code mais ils permettent d'affirmer qu'il fonctionne correctement au moins de manière générale.

5.3 Validation

La validation d'un code s'effectue en plusieurs étapes avec des cas d'étude à la complexité croissante. Celle présentée ici se concentre sur l'implémentation générale du modèle de Navier-Stokes. Une validation recentrée sur le phénomène des VIV est réalisée au chapitre 6.

5.3.1 Problème de la cavité entraînée

5.3.1.1 Présentation

Le problème de la cavité entraînée est la première étape de validation du code, elle consiste à étudier le mouvement du fluide présent dans une cavité carrée et entraîné par le déplacement de sa paroi supérieure. L'objectif est de valider globalement les équations de Navier-Stokes implémentées pour un écoulement stationnaire bidimensionnel. Le cas de la cavité a l'avantage d'avoir déjà été étudié en détail (Botella et Peyret, 1998; Burggraf, 1966) et d'être basé sur une géométrie très simple. Son seul inconvénient réside au niveau des jonctions entre la paroi supérieure de la cavité qui est en mouvement et ses parois latérales fixes, la discontinuité non physique du champ de vitesse fait apparaître des singularités au niveau du champ de pression. Cette étape de validation est réalisée avec la méthode des éléments finis classique, car l'emploi d'une interpolation d'ordre élevé augmente l'amplitude de ces singularités.

Les résultats sont comparés à une solution numérique de référence tirée des travaux de Botella et Peyret (1998), ces derniers utilisent une méthode d'éléments spectraux spécifique filtrant les termes irréguliers de pression aux points singuliers. La comparaison est à la fois qualitative et quantitative.

5.3.1.2 Modélisation numérique

Les paramètres de simulation sont présentés dans le tableau 5.1 et les conditions aux bords sont visibles sur la figure 5.5. L'écoulement final est obtenu avec une montée en Reynolds par paliers. La cavité est discrétisée en un maillage ordonné uniforme de 10 000 éléments.

L'écoulement étant en circuit fermé sans condition de Neumann aux bords, le champ de pression n'est pas relié au champ de vitesse et il est nécessaire d'imposer sa valeur à une constante près en un point du domaine. L'intégration numérique est réalisée de manière exacte.

Tableau 5.1 Ensemble des simulations effectuées

Cas	Nb. Éléments	Degré	DDL	Re
1	10 000	P2P1	90 000	1000
2		P3P2	220 000	

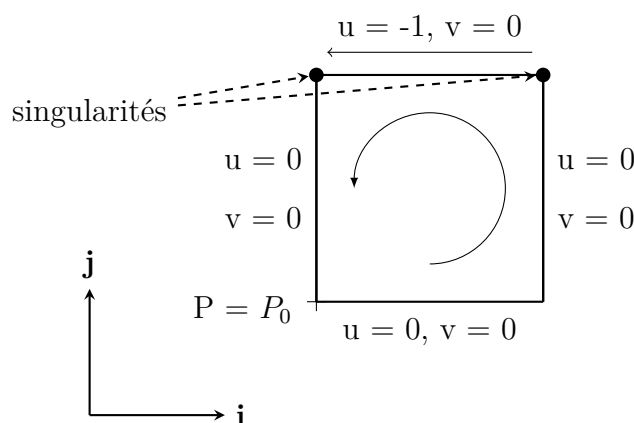


Figure 5.5 Vue générale de la simulation

5.3.1.3 Résultats

Pour un nombre de Reynolds égal à 1000, l'ensemble du fluide présent dans la cavité est entraîné par la paroi mobile (voir figure 5.6). Les lignes de courant à proximité du bord supérieur de la cavité suivent son déplacement, le fluide entraîné déclenche un mouvement rotationnel permanent et un vortex primaire englobe la quasi totalité de la cavité, son centre est légèrement au dessus du centre de la cavité. Deux zones de recirculation apparaissent sur les coins inférieurs de la cavité, les vortex secondaires *A* (à gauche) et *B* (à droite).

Avec la figure 5.7, on peut comparer visuellement les isocontours de vorticité tirés du cas 2 et de la simulation de Botella et Peyret (1998). Hormis une différence visible au centre de la cavité où la vorticité est plus importante pour le cas 2, les résultats sont quasiment identiques. Le mouvement global du fluide est similaire et les isocontours aux bords de la

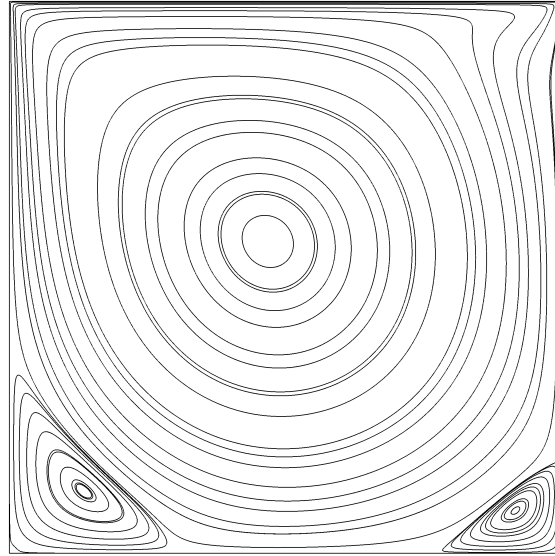
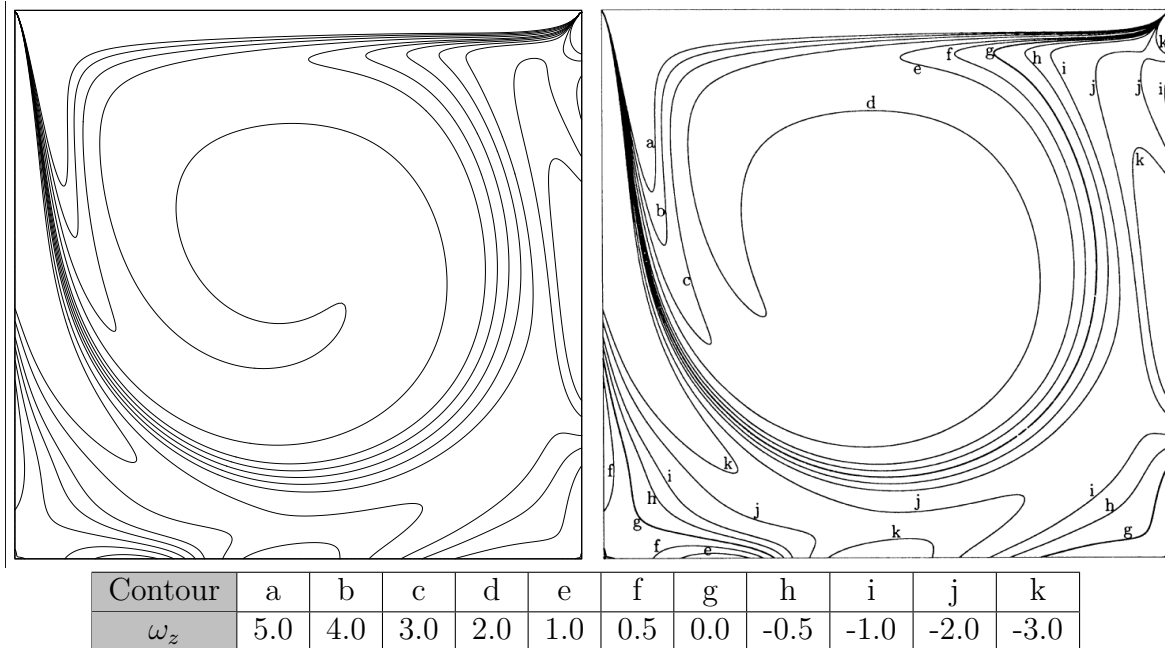


Figure 5.6 Lignes de courant à Reynolds = 1000 - Cas 2

Figure 5.7 Iso-contours de vorticité ω_z à Reynolds = 1000 - Cas 2 (à gauche) et Botella et Peyret (1998) (à droite)

cavité sont équivalents, il existe un léger écart au niveau du coin supérieur droit mais il est probablement dû à leur traitement par filtrage de la singularité. On note par ailleurs que la vorticité n'est pas obtenue directement par le programme *EF6* mais par le logiciel de post-traitement qui dérive du champ de vitesse de l'écoulement. Il existe donc une part d'erreur

numérique externe à $EF6$, comparer les champs de vitesse aurait été plus pertinent mais la simulation de référence (Botella et Peyret, 1998) a été effectuée à l'aide d'une formulation courant-vorticité.

Tableau 5.2 Écarts relatifs de la position et de la vorticité ω_z des centres des vortex

	Vortex Primaire			Vortex secondaire A			Vortex secondaire B		
	x	y	ω_z	x	y	ω_z	x	y	ω_z
Botella et Peyret (1998)	0.4692	0.5652	2.0674	0.1360	0.1118	-1.1097	0.9167	0.0781	-0.3520
Cas 1 - (%)	0.47	0.21	3.6	1.47	-0.18	6.6	-0.03	1.41	9.1
Cas 2 - (%)	0.26	0.04	2.8	0.74	-0.18	5.0	-0.03	1.41	6.2

Les coordonnées des centres des vortex primaire et secondaires diffèrent de moins de 2 % entre le cas 2 et les résultats de Botella et Peyret (1998), les valeurs de vorticité en ces points sont, par ailleurs, comparables avec un écart évoluant autour de 5 % (voir tableau 5.2). La mesure du champ de vitesse au centre de la cavité apporte des résultats comparables, les différences sont inférieures à 5 % (voir tableau 5.3). Une étude de la vorticité indique que, même sans filtrage des modes singuliers, les simulations donnent des résultats relativement précis jusqu'à une distance de 0.05 du point singulier (voir tableau 5.4). Passée cette limite, l'écart devient important et les résultats ne sont plus pertinents. Enfin, on note qu'une augmentation de l'ordre d'interpolation permet une convergence des résultats. En passant d'une base d'interpolation de type P2-P1 (cas 1) à une base de type P3-P2 (cas 2), les écarts avec Botella et Peyret (1998) diminuent globalement pour la majorité des variables de l'écoulement mesurées. Seul l'écart de la vorticité ω_z à proximité de la singularité augmente, cette hausse n'est pas surprenante puisque, comme on l'a précédemment indiqué, une interpolation d'ordre élevé fait augmenter l'amplitude des singularités.

Tableau 5.3 Écarts relatifs du champ de vitesse et de la vorticité au centre du carré

	Centre de la cavité (0.5,0.5)		
	u	v	ω_z
Botella et Peyret (1998)	0.0621	0.0258	2.0672
Cas 1 - (%)	4.9	-0.78	3.64
Cas 2 - (%)	3.3	-0.78	2.77

Tableau 5.4 Écarts relatifs de la vorticité ω_z jusqu'au point de singularité

Position	ω_z		
	(0.5,1)	(0,0.95)	(0,0.999)
Botella et Peyret (1998)	14.753	-83.820	-1444.8
Cas 1 - (%)	-4.47	8.00	117
Cas 2 - (%)	-2.77	6.70	124

5.3.2 Écoulement de Taylor-Couette

5.3.2.1 Introduction

Une seconde étape de validation est réalisée pour évaluer le bon fonctionnement du code pour des écoulements plus complexes à caractère instationnaire.

Le modèle de Taylor-Couette, qu'on peut succinctement présenter comme l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres en rotation, a la particularité de présenter une mise en place numérique accessible tout en permettant l'analyse de phénomènes riches et instationnaires. Ce type d'écoulement évolue du régime laminaire au régime turbulent de manière progressive en passant par plusieurs états stables à la complexité spatiale croissante qui sont entrecoupés par différentes instabilités. Ce modèle a été primordial pour la compréhension des phénomènes liés à la turbulence et aux machines rotatives comme les turbomachines.

Dans le cadre de cette étude, l'objectif est la validation du code pour un phénomène instationnaire tridimensionnel et la détection des deux premières instabilités en les comparant à des résultats expérimentaux et numériques (Antonijoan et Sanchez, 2002; Coles, 1965; Fenstermacher *et al.*, 1979).

5.3.2.2 Mécanisme global

On appelle écoulement de Taylor-Couette, l'ensemble des états d'écoulement du fluide évoluant entre deux cylindres coaxiaux à vitesse variable. Selon la configuration, au moins un des cylindres tourne et entraîne le fluide dans sa rotation par cisaillement visqueux. Le mouvement du fluide est principalement circulaire mais des instabilités peuvent apparaître et engendrer des déplacements axiaux et radiaux qui vont modifier la structure de l'écoulement.

5.3.2.3 Évolution spatiale en configuration rotor-stator

La configuration la plus étudiée est celle avec le cylindre interne en rotation et le cylindre externe fixe, on parle de configuration rotor-stator. L'état de l'écoulement évolue par paliers avec l'apparition successive d'instabilités dépendant de la géométrie, des conditions aux bords du domaine et même de l'historique de l'écoulement. Les premiers paliers de stabilité de l'écoulement sont les suivants :

Azimutal Laminar Flow (AZI) État initial de l'écoulement, le champ de vitesse est purement azimutal et suit le profil de Couette, la pression varie de manière linéaire entre les deux cylindres et augmente du rayon intérieur au rayon extérieur.

Taylor Vortex Flow (TVF) Deuxième état stable obtenu après l'apparition des instabilités de Taylor-Couette pour un nombre de Reynolds critique. Des structures toroïdales sont présentes autour du cylindre interne, l'écoulement de périodicité axiale est invariant selon la direction azimutale.

Wavy Vortex Flow (WVF) Troisième état de stabilité. L'invariance azimutale est perdue avec l'apparition d'ondulations, les anneaux oscillent. Cet état est caractérisé par une complexité spatiale importante et une dépendance importante envers la géométrie et de la cinématique du dispositif.

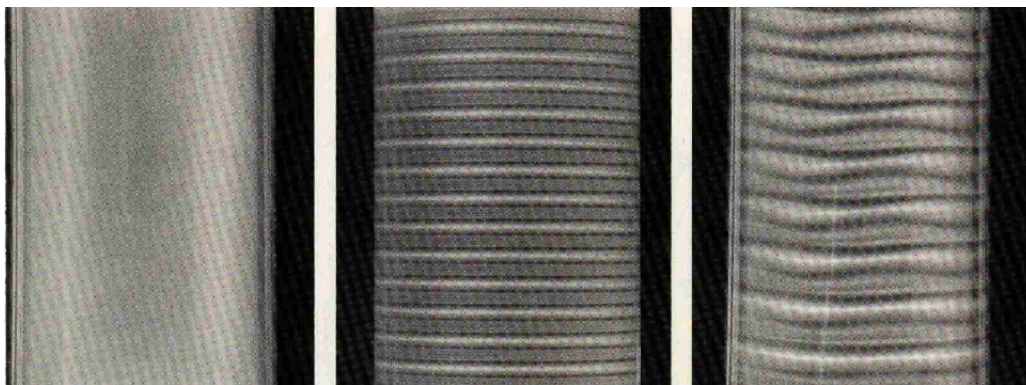


Figure 5.8 Profil de couette (AZI) - Profil de Taylor-Couette (TVF) - Profil avec oscillations azimutales des anneaux (WVF) (Donnelly, 1991)

Dans le cadre de cette validation, les efforts sont concentrés sur le passage de l'état initial AZI au deuxième état stable TVF et sur l'apparition des oscillations de type WVF.

5.3.2.4 Instabilité de Taylor-Couette

L'instabilité de Taylor-Couette est une instabilité centrifuge basée sur l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial s'exerçant en tout point du domaine. C'est

la première instabilité des écoulements de Taylor-Couette qui amène au deuxième état de stabilité TVF.

En 1880, Rayleigh proposa une première formalisation théorique du problème ainsi qu'une condition de stabilité plus connue sous le nom de critère de Rayleigh, valable pour les fluides non visqueux (voir démonstration en annexe D) :

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega(r)) > 0 \quad (5.3)$$

Le système est stable lorsque cette condition est vérifiée et instable dans le cas contraire. L'écoulement initial étant de type Couette circulaire, l'expression du champ de vitesse du fluide est connue et on peut simplifier la condition de stabilité par :

$$r_2^2\Omega_2 > r_1^2\Omega_1 \quad (5.4)$$

L'indice 2 renvoie au cylindre externe et l'indice 1 au cylindre interne.

Selon ce critère, en imposant une vitesse nulle au niveau du cylindre externe, le système est instable pour n'importe quelle vitesse imposée au cylindre interne. L'écoulement devrait donc devenir instable de manière instantanée. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales et l'existence d'un écoulement suivant le profil de Couette jusqu'à une certaine vitesse seuil. Cette divergence entre l'expérimental et la théorie est due à l'effet stabilisant de la viscosité qui empêche l'apparition de l'instabilité en deçà d'une valeur critique de Ω_1 . Dans un article fondateur, Taylor (1923) démontre l'existence de cette valeur seuil pour le cas d'un fluide visqueux. Il réussit à déterminer analytiquement la vitesse critique pour laquelle l'écoulement devient instable pour une configuration particulière et vérifie très précisément ses calculs de manière expérimentale.

5.3.3 Expérience de Fenstermacher *et al.* (1979)

La validation est effectuée en utilisant les résultats expérimentaux de Fenstermacher *et al.* (1979), ces derniers ont analysé les différents états de l'écoulement de Taylor-Couette jusqu'à l'apparition de la turbulence. Le nombre de Reynolds critique expérimental lié au passage de l'écoulement de Couette à celui de type TVF est :

$$Re_{exp}^{TVF} = 119.1 \quad (5.5)$$

À l'aide des résultats expérimentaux de Coles (1965), ils indiquent aussi le nombre de Rey-

nolds critique pour le passage à l'état stable WVF :

$$Re_{exp}^{WVF} = 1.2Re_{exp}^{TVF} = 142.9 \quad (5.6)$$

Dans leur configuration, le cylindre interne est en rotation et le cylindre externe est immobile, le disque supérieur est une surface libre tandis que le disque inférieur est fixe. Ce dernier fait apparaître des vortex d'Eckmann, des anneaux toroïdaux similaires à ceux de Taylor (TVF), qui sont engendrés par cisaillement pariétal. Ils apparaissent à un nombre de Reynolds sous-critique aux TVF et retardent les transitions entre les états de stabilités (Coles, 1965).

5.3.4 Modélisation numérique

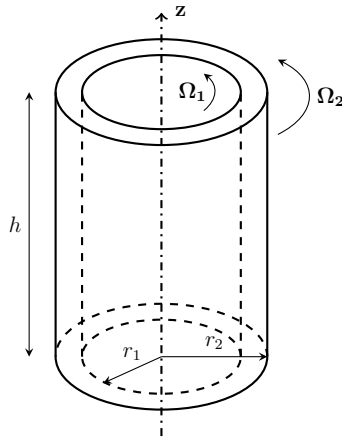


Figure 5.9 Modèle utilisé

5.3.4.1 Paramètres adimensionnels.

Deux paramètres géométriques adimensionnels définissent le comportement de l'écoulement :

1. Le rapport d'aspect

$$\Gamma = \frac{h}{r_2 - r_1} = \frac{h}{d} \quad (5.7)$$

2. Le rapport des rayons

$$\eta = \frac{r_1}{r_2} \quad (5.8)$$

Le nombre de Reynolds spécifique à ce type d'écoulement est :

$$Re = \frac{r_1 \Omega_1 d}{\nu} \quad (5.9)$$

Avec les conditions aux bords et l'accélération donnée au fluide dans certains cas d'étude, ces trois paramètres adimensionnels sont les seuls variables à prendre en compte pour l'étude du système.

5.3.4.2 Modèle de simulation

Dimensions géométriques

Le modèle géométrique adimensionné est présenté dans le tableau 5.5, il correspond au montage expérimental de Fenstermacher *et al.* (1979) :

Tableau 5.5 Dimensions géométriques

η	Γ	r_1	r_2	h
0.877	20	1	1.140	2.805

Discrétisations spatiale et temporelle

Les simulations sont réalisées avec les bases d'interpolation de Lobatto d'ordre P3-P2 et P4-P3. L'intégration temporelle est réalisée avec les méthodes implicites BDF à pas et ordre adaptatifs. L'ordre des BDF utilisées varie de 1 à 4 et le pas de temps adimensionnel varie sur l'intervalle $10^{-4} \leq \Delta t \leq 1$.

Un cylindre creux est très simple à mailler, on utilise un maillage ordonné transfini afin de pouvoir choisir la discrétisation en fonction des directions axiale, radiale et azimutale (voir figure 5.10). En utilisant des ordres d'interpolation intermédiaires, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage très dense. La valeur théorique de la longueur d'onde axiale $\lambda_\infty = 2d \approx 0.35$ donne une première approximation de la taille des cellules TVF pour discrétiser correctement le domaine. La discrétisation selon la distance azimutale doit permettre de capter les oscillations liées aux WVF dont le nombre d'onde est proche de 3 pour cette configuration géométrique (Antonijoan et Sanchez, 2002).

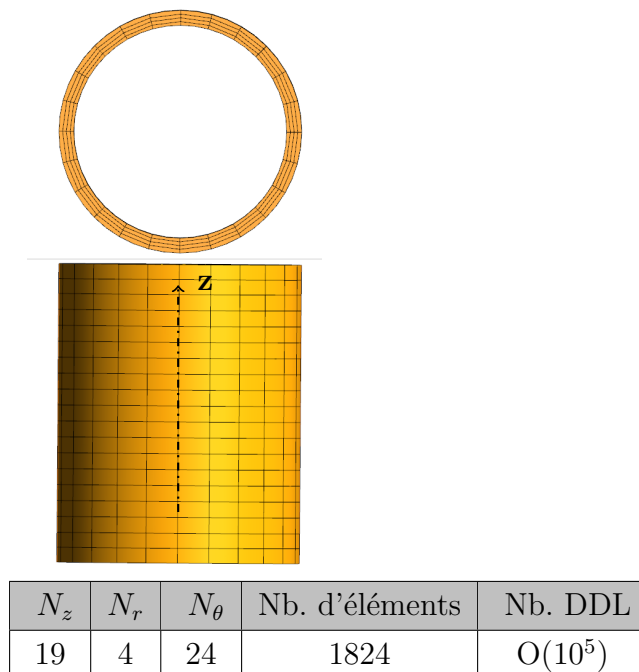


Figure 5.10 Discrétisation spatiale

Conditions limites réalistes

Afin de respecter le cadre expérimental de Fenstermacher *et al.* (1979), on impose des contraintes de non glissement sur les parois cylindriques. On bloque le disque inférieur en y imposant un champ de vitesse nul et on modélise la surface libre supérieure par une paroi non déformable sans cisaillement :

$$\begin{aligned}
 u = v = w = 0 & \quad \text{pour } z = 0 \\
 \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = w = 0 & \quad \text{pour } z = h \\
 u = v = w = 0 & \quad \text{pour } r = r_2 \\
 \begin{cases} u = -r_1 \Omega_1 y \\ v = r_1 \Omega_1 x \\ w = 0 \end{cases} & \quad \text{pour } r = r_1
 \end{aligned}$$

D'autres conditions limites sont employées ponctuellement, au niveau de la paroi interne et du disque inférieur, pour détecter plus précisément le seuil d'instabilité TVF et déclencher les oscillations WVF.

5.3.4.3 Mode opératoire

On décompose l'étude en deux parties, la première a pour objectif de détecter l'apparition des instabilités de Taylor et le passage de l'écoulement de Couette aux structures de type TVF. La deuxième série de simulations est lancée afin de capter des structures de type WVF, elle utilise les solutions finales des premières simulations.

État TVF

Afin de déterminer précisément le nombre de Reynolds critique de la première instabilité, on réalise une montée en Reynolds temporelle tout en gardant constante la valeur de la vitesse du cylindre interne. Cela revient à faire varier dans le temps la viscosité du fluide, le procédé n'est pas réaliste mais facilite l'analyse des résultats et la détection du nombre de Reynolds critique. Dans le cas expérimental avec les conditions limites présentées précédemment (voir 5.3.4.2), le disque inférieur fixe engendre des vortex d'Eckmann qui déclenchent de manière progressive l'apparition des vortex de Taylor (TVF). Il est donc difficile de déterminer le nombre de Reynolds seuil, car les vortex apparaissent peu à peu. Afin de supprimer cette dépendance, on peut imposer au bas du cylindre la même condition de non cisaillement que celle qui est présente sur le disque supérieur. On empêche alors seulement l'écoulement de sortir du domaine. Dans ce cas, les vortex marginaux d'Eckmann n'apparaissent pas et l'apparition des vortex de Taylor est quasi instantanée sur tout le domaine à la vitesse de rotation critique.

État WVF

Pour obtenir les structures de type WVF, il est nécessaire d'introduire des perturbations contrôlées dans l'écoulement. Dans une situation réelle, celles-ci apparaissent d'elles-mêmes à cause de certaines imperfections le long du cylindre ou d'une légère asymétrie. En revanche dans le cas d'une étude numérique, on doit créer virtuellement ces perturbations. Dans cette étude, on perturbe l'écoulement sur la paroi du cylindre interne en imposant une variation de vitesse axiale le long du cylindre. Cette perturbation, de forme hélicoïdale, possède des périodicités temporelle et spatiale selon les directions axiale et azimutale. Son expression mathématique est donnée par :

$$w_p = A \left(\frac{z^2}{h} - z \right) \sin(\omega t + k_\theta \theta + k_z z) \quad (5.10)$$

où A est l'amplitude donnée à la perturbation. Le terme parabolique permet d'annuler la perturbation aux bords du domaine afin de satisfaire les conditions limites. Les trois périodi-

cités doivent être définies avec précaution afin d'amener l'écoulement vers l'état WVF désiré et non l'en écarter. On pose $k_\theta = 3$ pour obtenir des WVF avec des oscillations au nombre d'onde égal à 3 (Antonijoan et Sanchez, 2002). Pour avoir la même périodicité axiale que l'écoulement de TVF, on prend $k_z = \frac{2\pi}{\lambda_\infty} = \frac{\pi}{d} = 22.4$ (voir tableau 5.6).

Tableau 5.6 Paramètres de la perturbation w_p

A	ω	k_θ	k_z
0.09	1	3	22.4

Les conditions limites aux bornes inférieures et supérieures de l'écoulement sont aussi déterminantes dans l'apparition de l'état WVF (Czarny, 2003). Pour les simulations réalisées, les amplitudes des oscillations sont les plus fortes lorsqu'on lie les deux parois inter-cylindriques au cylindre interne en rotation.

5.3.5 Résultats

5.3.5.1 Détection des TVF

Cas réaliste (Fenstermacher et al., 1979)

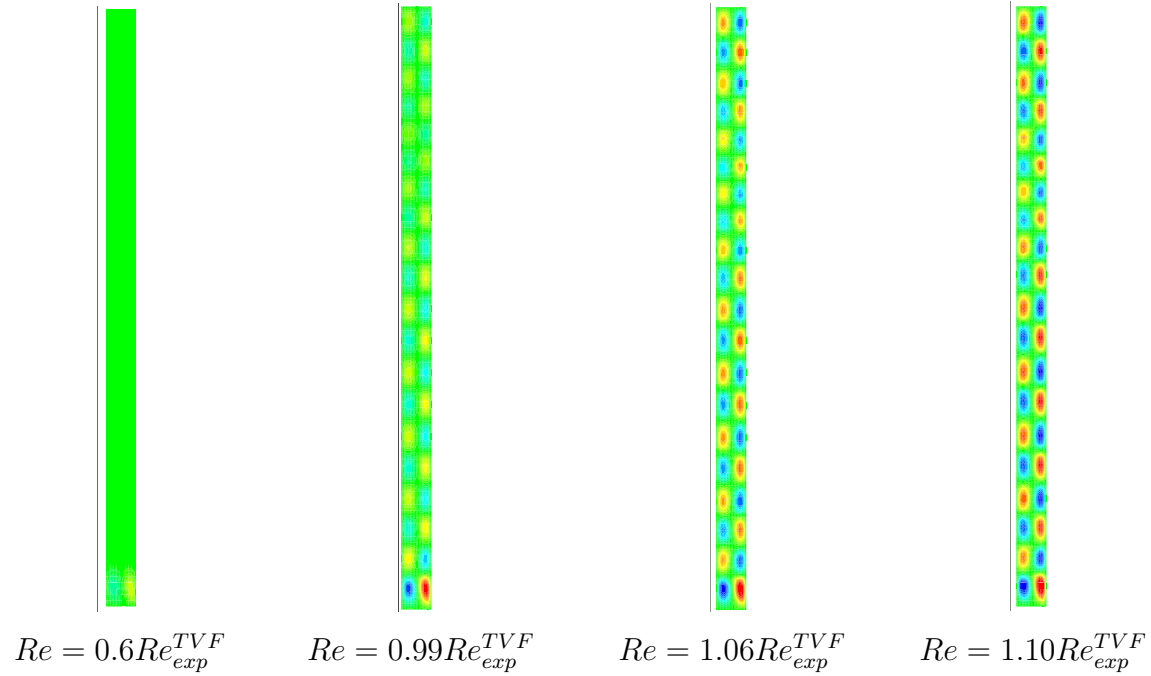


Figure 5.11 Évolution du champ de vitesse dans le plan axial en fonction de Re - Cas réaliste

Lorsqu'on utilise des conditions limites réalistes identiques à celles de l'expérience de Fenstermacher *et al.* (1979), les anneaux de Taylor apparaissent progressivement (voir figure 5.11). Il est difficile de déterminer précisément la limite entre l'état initial de Couette et le second état de stabilité TVF.

Cas du cylindre infini

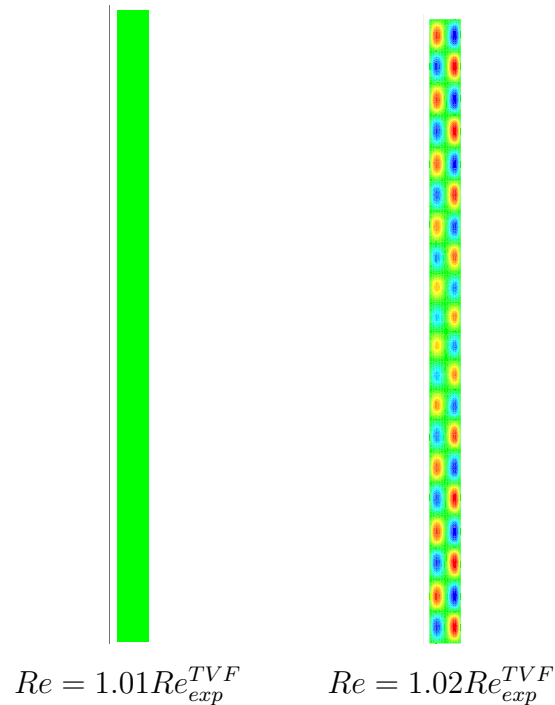


Figure 5.12 Évolution du champ de vitesse dans le plan axial en fonction de Re - Cylindre infini

L'imposition de conditions de non cisaillement à la paroi inter-cylindrique inférieure change complètement la transition entre les deux états de stabilité (voir figure 5.12). Sans vortex d'Eckmann, le passage de l'état de Couette à celui de Taylor-Couette ou TVF est quasi instantané. Une fois le nombre de Reynolds critique atteint, des anneaux apparaissent dans l'ensemble du domaine, leur amplitude augmente ensuite avec la vitesse de rotation du cylindre. Lorsque l'écoulement est stabilisé, sa structure n'évolue plus avant la prochaine instabilité et les particules de fluide d'une cellule sont confinées dans celle-ci (voir figure 5.13). Le nombre de Reynolds critique détecté est très proche de celui qui a été déterminé expérimentalement, l'écart est inférieur à 2% (voir tableau 5.7).

Tableau 5.7 Comparaison du nombre de Reynolds critique pour l'état TVF

	Expérimental Fenstermacher <i>et al.</i> (1979)	<i>EF6</i>	Écart
Re^{TVF}	119.1	120.6 - 121.4	< 2%

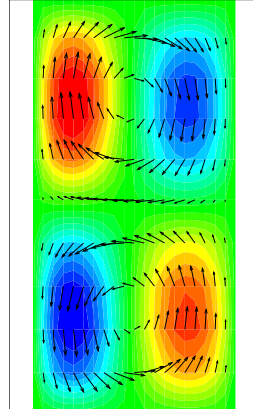


Figure 5.13 Champ de vecteurs pour deux cellules successives - isocontours de la vitesse axiale w

5.3.5.2 Détection des WVF

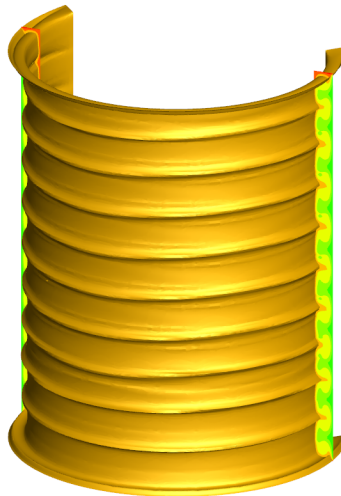


Figure 5.14 État WVF à $Re = 3Re_{exp}^{TVF}$ - isocontours de la vitesse azimutale v_θ

L'état WVF est obtenu après perturbation du champ de vitesse axial le long de la paroi interne et mise en rotation des deux parois inter-cylindriques alors liées au cylindre interne. Il est reconnaissable par les oscillations des anneaux de Taylor (voir figures 5.14 et 5.15) et la circulation du fluide entre les cellules de Taylor adjacentes (voir figure 5.16). Ces résultats sont obtenus une dizaine de cycles après que la perturbation axiale soit arrêtée. En revanche, les oscillations ne sont pas détectées à la valeur de vitesse mesurée expérimentalement (Coles, 1965) et il faut lancer des simulations à des nombres de Reynolds deux à trois fois supérieurs

à la valeur critique expérimentale pour pouvoir les visualiser clairement. De plus, l'état n'est pas stable avec un affaiblissement progressif des oscillations après un pic d'activité. Ces difficultés ne sont pas étonnantes, car la stabilisation des oscillations et leurs relations avec les conditions aux bords sont des sujets complexes encore à l'étude (Czarny, 2003). L'obtention d'oscillations transitoires après avoir passé la période de perturbation virtuelle est déjà un succès en soi.

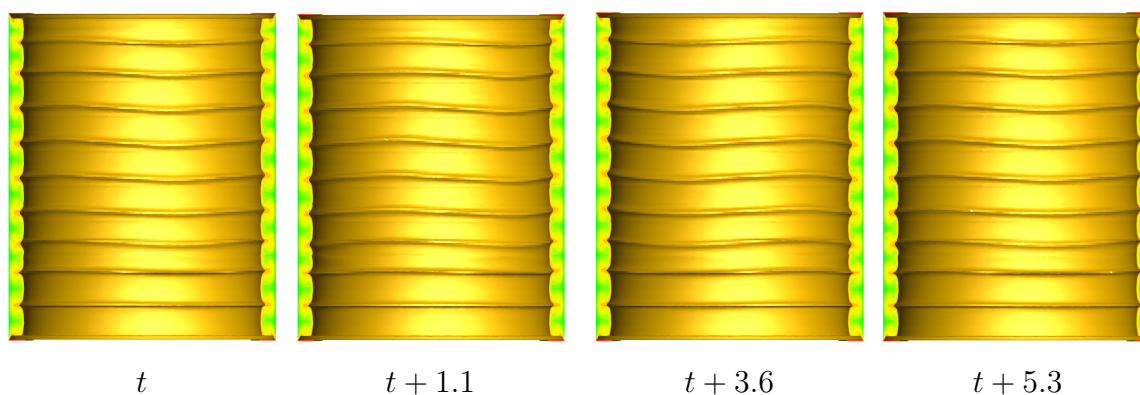


Figure 5.15 Visualisation globale des oscillations propres à l'état WVF à $Re = 3Re_{exp}^{TVF}$ - isocontours de la vitesse azimutale v_θ

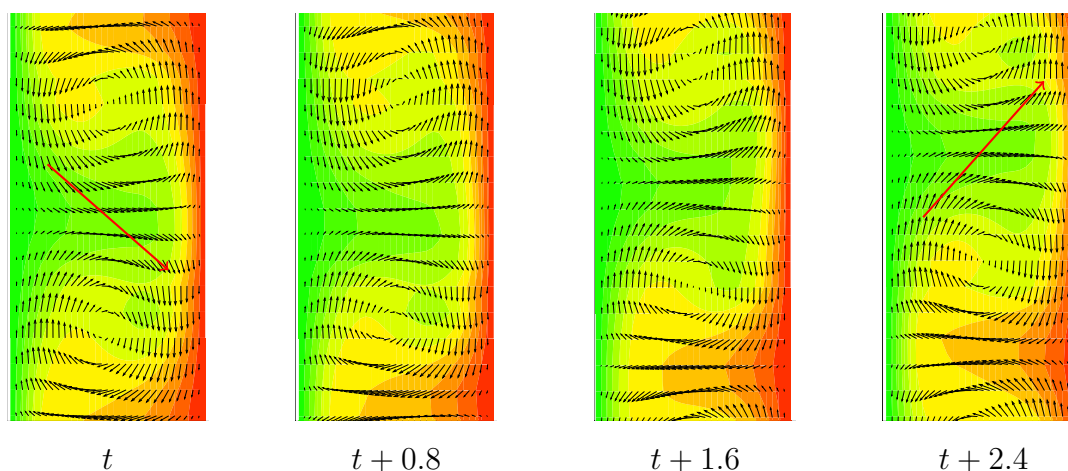


Figure 5.16 Mise en évidence de la circulation locale inter-cellulaire - isocontours de la vitesse azimutale en arrière plan

Le code *EF6* a réussi à capter les deux premières instabilités de l'écoulement de Taylor-Couette avec des ressources réduites. Il a détecté de manière très précise la première transition avec des résultats très proches de ceux obtenus expérimentalement et a capté la seconde en

obtenant un état WVF transitoire. Les résultats de la vérification et validation du code sont positifs et le code est prêt à être utilisé dans le cadre de l'étude des vibrations induites par relâchers tourbillonnaires.

CHAPITRE 6 ÉTUDE VIV SUR UN CYLINDRE À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

Ce chapitre présente l'étude VIV réalisée avec le code *EF6* sur un cylindre à ratio de masse nul, libre selon deux degrés de liberté, pour des écoulements tridimensionnels à faible nombre de Reynolds. Cette étude est l'aboutissement de ce projet de recherche, elle a été rendue possible grâce au travail préalable effectué sur le code *EF6*, de sa vérification à sa validation. Premièrement, la mise en équations du couplage fluide-structure est détaillée dans le repère relatif au cylindre. On présente ensuite le cadre numérique proposé pour simuler le phénomène des VIV et sa validation. La dernière partie se concentre sur le cas d'étude tridimensionnel à $Re = 300$.

6.1 Dynamique du système dans un repère mobile

Dans le cadre d'une étude d'interaction fluide-structure, le système est régi par deux groupes d'équations couplées :

- Les équations mécaniques qui gouvernent le mouvement ou la déformation du solide étudié évoluant dans le fluide.
- Les équations qui régissent l'écoulement du fluide, communément appelées équations de Navier-Stokes.

Dans le cas d'une étude VIV, il est judicieux d'éviter de prendre un référentiel inertiel absolu et d'utiliser à la place le cylindre comme référentiel. Cela permet de réduire les temps de calcul en ne recréant pas le maillage autour du cylindre à chaque itération. L'objectif de cette partie est d'exprimer l'intégralité des équations gouvernantes du problème dans le repère relatif au cylindre, l'adimensionnalisation du système est réalisée dans un second temps. L'étude est réalisée de manière généralisée en trois dimensions en considérant que le cylindre est fixe dans la direction de son axe et que les rotations du cylindre par rapport à l'écoulement sont négligeables.

6.1.1 Mise en place des repères

Soit R_0 le référentiel absolu et R_{mo} le référentiel relatif lié au cylindre (voir figure 6.1) :

$$\begin{aligned} R_0 &= (O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}') \\ R_{mo} &= (G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Soit G le centre du cylindre :

$$\mathbf{OG} = x_c \cdot \mathbf{i}' + y_c \cdot \mathbf{j}' + z_c \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{x}_c \quad (6.2)$$

On pose un point quelconque M dans l'écoulement :

$$\begin{aligned} \mathbf{GM} &= x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} = \mathbf{x} \\ \mathbf{OM} &= x' \cdot \mathbf{i}' + y' \cdot \mathbf{j}' + z' \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.3)$$

La rotation du cylindre dans l'écoulement est négligeable :

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_{mo}/R_0} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Donc à tout instant t :

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}') \quad (6.5)$$

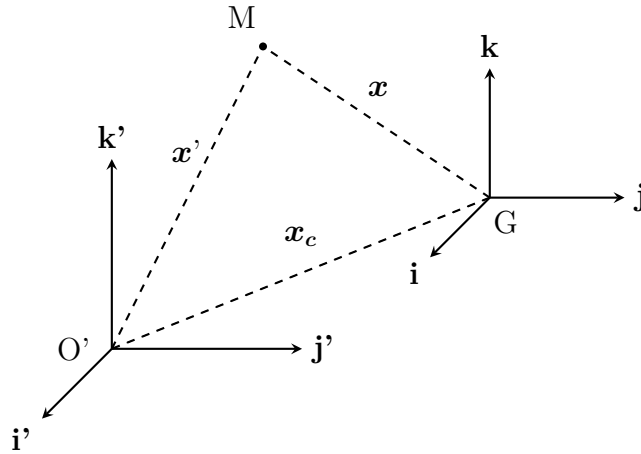


Figure 6.1 Disposition des repères R_0 et R_{mo}

6.1.2 Équation de mouvement du cylindre

Le cylindre subit les forces de l'écoulement \mathbf{F}_f et celles induites par deux ressorts de raideur k qui sont nommées \mathbf{F}_r . Ces dernières sont disposées selon \mathbf{i} et \mathbf{j} , elles modélisent l'existence d'une position d'équilibre stable en O (voir figure 6.2). Lorsque le cylindre est au repos, $G = O$.

En utilisant le principe fondamental de la dynamique sur le cylindre dans le référentiel galiléen

R_0 et en négligeant la gravité :

$$m_c \mathbf{A}(G/0) = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_f \quad (6.6)$$

D'après la formule de composition des accélérations (voir annexe E), sachant que $\boldsymbol{\Omega}_{R_{mo}/R_0} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A}(M/0) = \mathbf{A}(M/mo) + \mathbf{A}(G/0) \quad (6.7)$$

Exprimer l'équation du mouvement du cylindre dans le référentiel non inertiel R_{mo} revient à poser :

$$\begin{aligned} m_c \mathbf{A}(G/mo) &= \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_f - m_c \mathbf{A}(G/0) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_f - m_c \mathbf{A}(G/0) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dans le référentiel R_{mo} , l'accélération du point G est nulle mais il existe une force d'inertie liée à l'accélération non uniforme de R_{mo} dans R_0 . Cela donne au final une équation équivalente à (6.6) :

$$m_c \ddot{\mathbf{x}}_c + k \mathbf{x}_c = \mathbf{F}_f \quad (6.9)$$

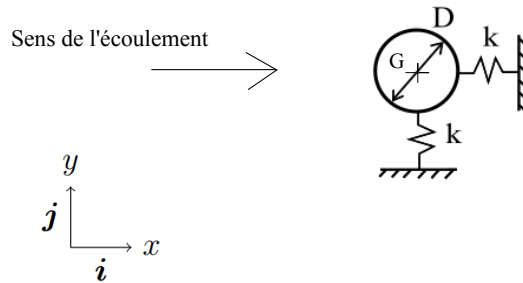


Figure 6.2 Système à deux degrés de liberté

6.1.3 Équations de Navier Stokes

Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}' , les vitesses du fluide en un point M respectivement en fonction des repères inertiel et accéléré :

$$\mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{GM}}{dt} \right)_{R_{mo}} \quad \mathbf{u}' = \left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)_{R_0} \quad (6.10)$$

Les équations de Navier Stokes dans le référentiel inertiel R_0 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \right)_{R_0} + \rho_f (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' &= -\nabla' p + \nabla' \cdot (\mu (\nabla' \mathbf{u}' + (\nabla' \mathbf{u}')^t)) \\ \nabla' \cdot \mathbf{u}' &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sachant que $\mathbf{GM} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} = \mathbf{x}$ et $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$:

$$\begin{aligned} \nabla' &= \nabla \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \dot{\mathbf{x}}_c \end{aligned} \quad (6.12)$$

Par ailleurs la vitesse du point G est seulement dépendante du temps, donc sa dérivée spatiale est nulle. On obtient directement l'équation de continuité :

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (6.13)$$

Enfin, on peut utiliser la formule de composition de l'accélération pour la dérivée temporelle (voir annexe E) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}'}{dt} \right)_{R_0} &= \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{R_{mo}} + \left(\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} \right)_{R_0} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \right)_{R_0} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} \right)_{R_0} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \right)_{R_0} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + \left(\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} \right)_{R_0} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (6.14)$$

On en déduit :

$$\rho_f \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + \left(\frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} \right)_{R_0} \right) + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \quad (6.15)$$

On obtient donc dans le référentiel accéléré R_{mo} :

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) - \rho_f \ddot{\mathbf{x}}_c \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.1.4 Insertion de l'effet d'inertie dans les forces et la pression

Dans le référentiel R_{mo} non inertiel, il est possible d'intégrer le terme volumique dû aux effets d'inertie à l'intérieur de la pression :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla (p + \rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \quad (6.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Cette intégration du terme d'inertie permet de ne pas faire apparaître un terme volumique supplémentaire dans les équations de Navier-Stokes. Ce choix de résolution introduit une nouvelle pression $\hat{p} = p + \rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c$ qui est propre au repère relatif. Le champ de pression réel p est obtenu lors de la phase de post-traitement en soustrayant à \hat{p} le terme d'inertie dû au référentiel non inertiel.

Avec cette nouvelle expression de la pression, il est possible d'exprimer une nouvelle force $\hat{\mathbf{F}}_f$ exercée par le fluide sur le solide qui prend en compte le nouveau terme de pression provenant des effets d'inertie (voir annexe B) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_f &= \int_{S_c} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{p}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \\ \hat{\mathbf{F}}_f &= \int_{S_c} \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) - \hat{p} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS \\ \hat{\mathbf{F}}_f &= \int_{S_c} \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) - (p + \rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS \\ \hat{\mathbf{F}}_f &= \mathbf{F}_f - \int_{S_c} (\rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{n} dS \\ \hat{\mathbf{F}}_f &= \mathbf{F}_f - \rho_f V \ddot{\mathbf{x}}_c \end{aligned} \quad (6.18)$$

L'équation (6.9) devient :

$$(m_c - \rho_f V) \ddot{\mathbf{x}}_c + k \mathbf{x}_c = \hat{\mathbf{F}}_f \quad (6.19)$$

Il y a donc deux expressions différentes de la force exercée par le fluide sur le cylindre, \mathbf{F}_f et $\hat{\mathbf{F}}_f$, qui renvoient respectivement aux forces calculées dans les repères inertiel R_0 et accéléré R_{mo} . Pour la suite des démonstrations, on considère uniquement la force exercée par le fluide $\hat{\mathbf{F}}_f$ dans le repère mobile puisque c'est dans celui-ci que le système est résolu.

Il est important de noter que le terme d'inertie ajouté dans le terme de gauche de l'équation ne renvoie pas au concept de masse tiré des écoulements potentiels, bien que les deux termes sont identiques dans le cas particulier d'un cylindre.

6.1.5 Adimensionnalisation du système d'équations

Rendre adimensionnel le système étudié présente de nombreux avantages, il permet de simplifier la résolution numérique du système en offrant un meilleur conditionnement de la matrice globale, une compréhension plus aisée des phénomènes physiques et une transposition des résultats de l'étude à n'importe quel cas concret.

Soit le système dimensionnel complet dans le référentiel non inertiel R_{mo} :

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \right)_{R_{mo}} + \rho_f (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* &= -\nabla^* (p^* + \rho_f \mathbf{x}^* \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^*) + \nabla^* \cdot (\mu (\nabla^* \mathbf{u}^* + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^t)) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ (m_c - \rho_f V^*) \ddot{\mathbf{x}}_c^* + k \mathbf{x}_c^* &= \hat{\mathbf{F}}_f^* \quad \text{dans } \Omega_c \end{aligned} \quad (6.20)$$

On utilise le diamètre D du cylindre et la vitesse d'entrée du fluide U comme quantités de référence :

$$\begin{aligned} x^* &= Dx & \mathbf{u}^* &= U\mathbf{u} & t^* &= \frac{D}{U}t \\ V^* &= D^3V & \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t^*} &= \frac{U}{D} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} & \nabla^* a &= \frac{1}{D} \nabla a & p^* &= \rho_f U^2 p \end{aligned} \quad (6.21)$$

D'où :

$$\hat{\mathbf{F}}_f^* = \int_{S_c} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n} dS^* = \rho_f U^2 D^2 \int_{S_c} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \rho_f U^2 D^2 \hat{\mathbf{F}}_f \quad (6.22)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{R_{mo}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla (p + \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ (m_c - \rho_f V D^3) \ddot{\mathbf{x}}_c + \frac{k D^2}{U^2} \mathbf{x}_c &= \rho_f D^3 \hat{\mathbf{F}}_f \quad \text{dans } \Omega_c \end{aligned} \quad (6.23)$$

On introduit les paramètres adimensionnels propres au système mécanique r_m et U_r , respectivement le ratio de masse et la vitesse réduite :

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{m_c}{\rho_f V D^3} = \frac{\rho_c}{\rho_f} \\ U_r &= \frac{U}{f_n D} \\ \text{avec } f_n &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_c + M_a}} \text{ la fréquence naturelle efficace du cylindre} \end{aligned} \quad (6.24)$$

La fréquence naturelle efficace est la fréquence naturelle du cylindre lorsqu'il est immergé.

Elle prend en compte une masse de fluide ajoutée M_a dans la dynamique du cylindre et ne dépend pas du changement de repère. Dans le cas particulier du cylindre, on a $M_a = \rho_f V D^3$. L'équation du système mécanique (6.9) devient :

$$(r_m - 1)\ddot{\mathbf{x}}_c + (r_m + 1) \left(\frac{2\pi}{U_r} \right)^2 \mathbf{x}_c = \frac{1}{V} \hat{\mathbf{F}}_f \quad (6.25)$$

Pour toute étude VIV tridimensionnelle, le système adimensionnel final est le suivant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{Re} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla (p + \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ (r_m - 1)\ddot{\mathbf{x}}_c + (r_m + 1) \left(\frac{2\pi}{U_r} \right)^2 \mathbf{x}_c &= \frac{1}{V} \hat{\mathbf{F}}_f \quad \text{dans } \Omega_c \end{aligned} \quad (6.26)$$

Avec les paramètres adimensionnels :

— le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_f U D}{\mu}$

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses à l'intérieur de l'écoulement et caractérise notamment la nature de son régime, laminaire ou turbulent.

— le ratio de masse $r_m = \frac{\rho_c}{\rho_f}$

C'est le rapport entre la masse volumique du cylindre et celle du fluide dans lequel il évolue. L'étude présente est essentiellement réalisée pour un ratio de masse nul.

— la vitesse réduite $U_r = \frac{U}{f_n D}$

C'est une vitesse adimensionnelle qui relie à la fois des paramètres de l'écoulement, U , et du système mécanique, D et f_n .

Il est important de noter que ces trois coefficients sont les paramètres d'entrée du système, ils sont choisis au début de l'étude et le reste des paramètres est déterminé à partir de leurs valeurs.

Il est possible de simplifier l'équation dans le cas où l'étude se fait en deux dimensions ou lorsque l'écoulement ne présente pas de mode tridimensionnel, soit pour $Re < 190$. Avec L la longueur adimensionnelle du cylindre :

$$\hat{\mathbf{F}}_f = L \oint_{\Gamma_c} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = L \hat{\mathbf{F}}_{f_{2D}} \quad (6.27)$$

Or :

$$V = \frac{\pi L}{4} \quad (6.28)$$

On obtient finalement pour ce cas particulier de 2D ou "pseudo" 2D :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)_{R_{mo}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla (p + \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) && \text{dans } \Omega_f \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
(r_m - 1) \ddot{\mathbf{x}}_c + (r_m + 1) \left(\frac{2\pi}{U_r}\right)^2 \mathbf{x}_c &= \frac{4}{\pi} \hat{\mathbf{F}}_{f2D} && \text{dans } \Omega_c
\end{aligned} \tag{6.29}$$

6.2 Modélisation et résolution

6.2.1 Conditions aux limites de l'écoulement

Conditions limites dans le repère relatif

Les conditions de Dirichlet sont modifiées par le passage au référentiel non inertiel, car la vitesse du fluide varie en fonction du repère dans lequel elle est exprimée. En théorie, l'expression des conditions de Neumann n'évolue pas, car les efforts ne dépendent pas du référentiel utilisé. Toutefois, l'expression du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}'^*$ est modifiée artificiellement dans le repère mobile avec l'ajout des termes d'inertie dans le gradient de pression (voir 6.1.4). Le tenseur des contraintes avec effort d'inertie ajouté $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*$ est donc différent dans le repère mobile :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*(\hat{p}^*, \mathbf{u}^*) = \boldsymbol{\sigma}'^*(p^*, \mathbf{u}^*) - \rho_f (\mathbf{x}^* \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^*) \mathbf{I} \tag{6.30}$$

Les conditions limites dans le référentiel non inertiel R_{mo} sont :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}'_D - \dot{\mathbf{x}}_c^* = \mathbf{u}_D^* && \text{sur } \Gamma_D \\
\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}'_N - \rho_f (\mathbf{x}^* \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^*) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N^* && \text{sur } \Gamma_N
\end{aligned} \tag{6.31}$$

En adimensionnalisant ces équations, les conditions deviennent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}'_D}{U} - \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{u}_D && \text{sur } \Gamma_D \\
\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{t}'_N}{\rho_f U^2} - (\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{n} = \mathbf{t}_N && \text{sur } \Gamma_N
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Choix des conditions limites pour chaque bord du domaine

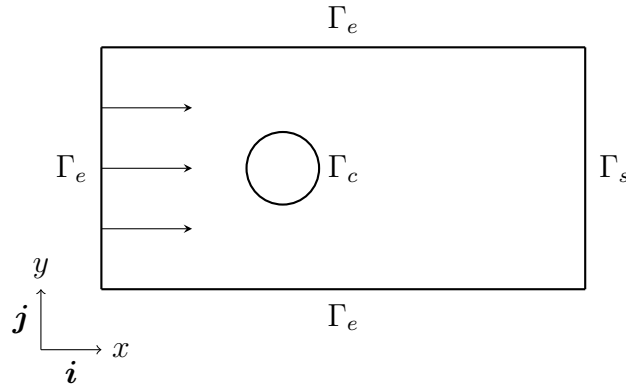


Figure 6.3 Ensemble des bords du domaine pour une simulation bidimensionnelle

Pour l'ensemble des simulations, on décompose le bord du domaine en quatre parties distinctes (voir figure 6.3 et tableau 6.1) :

Γ_e - Les parois d'entrée et latérales de normale \mathbf{j} On impose des conditions de Dirichlet en considérant que le fluide a une vitesse constante uniforme $\mathbf{u}'_D = U\mathbf{i}$ avec des composantes nulles en y et z . Cela suppose que le volume étudié est assez grand pour que les variations de vitesse dues au mouvement de l'écoulement autour du cylindre soient négligeables :

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{i} - \dot{\mathbf{x}}_c \quad \text{sur } \Gamma_e \quad (6.33)$$

Γ_c - La paroi du cylindre On applique une condition de Dirichlet en utilisant l'hypothèse de non-glissement sur l'intégralité de la surface cylindrique :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (6.34)$$

Γ_s - La paroi de sortie Celle-ci fait l'objet d'une attention particulière, car les conditions utilisées vont avoir une influence importante sur la longueur du sillage représenté et donc sur le temps d'exécution des simulations. La distance entre le cylindre et la paroi de sortie doit être assez grande pour que les effets de bord aient un impact négligeable sur l'écoulement présent autour du cylindre et le mouvement de celui-ci :

1. La méthode la plus simple est d'imposer une condition de Dirichlet en sortie, de

manière identique aux autres parois du volume :

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{i} - \dot{\mathbf{x}}_c \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (6.35)$$

Cette possibilité implique qu'au niveau de la paroi l'écoulement ne soit plus perturbé par le cylindre et qu'il soit redevenu uniforme avec une vitesse constante. La paroi de sortie doit donc être fortement éloignée du cylindre afin de ne pas fausser les calculs des efforts sur le cylindre (voir la section 6.3).

2. Une autre possibilité est l'imposition d'une condition naturelle dans le repère absolu $\mathbf{t}' = \mathbf{0}$. Les tractions totales, dues à la pression et au cisaillement visqueux, sont nulles dans le repère absolu mais pas dans celui qui est accéléré, d'après (6.32) :

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c)\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (6.36)$$

Cette solution demande un plus fort couplage entre les équations régissant l'écoulement et celle gouvernant le cylindre, la condition au bord devant être modifiée à chaque nouvelle valeur de l'accélération du cylindre. Elle permet toutefois de réduire le domaine car le contrôle réalisé sur l'écoulement est plus souple qu'avec une condition de Dirichlet.

Γ_z - Les parois latérales de normale \mathbf{z} (cas tridimensionnel) On bloque uniquement l'écoulement selon la direction normale \mathbf{z} à la surface en laissant libre ses variations dans le plan de la paroi :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{i} &= 0 \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_z \quad (6.37)$$

Tableau 6.1 Récapitulatif des conditions limites aux bords du domaine 3D

Bord	Condition limite	Valeurs imposées
Γ_e	Dirichlet	$u = 1 - \dot{x}_c$ $v = -\dot{y}_c$ $w = 0$
Γ_c	Dirichlet	$u = 0$ $v = 0$ $w = 0$
Γ_s	Neumann ou Dirichlet	$\begin{cases} u = 1 - \dot{x}_c \\ v = -\dot{y}_c \\ w = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} t_x = -(x\dot{x}_c + y\dot{y}_c) \\ t_y = 0 \\ t_z = 0 \end{cases}$
Γ_z	Neumann et Dirichlet	$t_x = 0$ $t_y = 0$ $w = 0$

6.2.2 Implémentation d'un schéma de résolution monolithique

6.2.2.1 Système d'équations complet

Dans le cas général tridimensionnel à ratio de masse nul avec des conditions naturelles au bord Γ_s , le système complet définissant le problème est donné par (6.38) .

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)_{R_{mo}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) && \text{dans } \Omega_f \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
-\ddot{\mathbf{x}}_c + \left(\frac{2\pi}{U_r}\right)^2 \mathbf{x}_c &= \frac{1}{V} \hat{\mathbf{F}}_f && \text{dans } \Omega_c \\
\mathbf{u} = \mathbf{i} - \dot{\mathbf{x}}_c &&& \text{sur } \Gamma_e \\
\mathbf{u} = \mathbf{0} &&& \text{sur } \Gamma_c \\
\mathbf{t} = -(\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_s &&& \text{sur } \Gamma_s \\
w = t_x = t_y = 0 &&& \text{sur } \Gamma_z
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Les équations composant (6.38) sont couplées en plusieurs endroits, cela complexifie de manière notable la résolution du système. L'écoulement est dépendant des déplacements du cylindre sur les bords du domaine Γ_e et Γ_s . Le mouvement du cylindre est fonction de la

force $\hat{\mathbf{F}}_f$ exercée par le fluide, il est donc directement dépendant de l'état de l'écoulement à sa paroi. On note que le domaine Ω_c est ponctuel dans ce cas simplifié où le cylindre est considéré comme non déformable. Concernant les conditions initiales au problème, on débute la résolution avec un écoulement nul ou le champ solution d'une simulation précédente.

6.2.2.2 Différents schémas de résolution possibles

Un problème d'interaction fluide-structure avec des équations couplées peut être résolu selon différents schémas (Causin *et al.*, 2005; Fernández et Gerbeau, 2009). L'importance du couplage décide de la méthode de résolution employée, celle-ci doit être la plus rapide possible tout en restant précise et stable :

Explicite C'est le premier type de résolution à considérer pour des couplages faibles. Les résolutions explicites sont les plus simples à mettre en place, les équations du fluide et du solide sont résolues de manière séparée via deux solveurs différents qui peuvent être optimisés chacun séparément. La résolution des deux sous-systèmes d'équations est réalisée de manière décalée au niveau temporel. Le couplage n'est pas assuré à chaque étape de temps, on parle de résolution faiblement couplée. La stabilité n'est pas assurée et dépend du couplage du système.

Semi-Implicite Comme pour le cas explicite, la résolution semi-implicite utilise deux solveurs séparés et les deux groupes d'équations sont résolus à la suite dans une itération temporelle. En revanche, à chaque étape de temps, le couplage est vérifié à l'aide d'un algorithme du point fixe implémenté à l'intérieur de la boucle temporelle, on assure la convergence des résultats des deux sous-systèmes de manière itérative. La résolution est dite fortement couplée, la stabilité du schéma est améliorée mais pas inconditionnelle et les temps d'exécution sont augmentés à cause des itérations.

Monolithique/Implicite La résolution monolithique est intégralement implicite et fortement couplée, les deux sous-systèmes sont résolus en même temps par un seul solveur. Cette résolution implique des temps d'exécution notablement plus importants que les deux premières mais le couplage est vérifié à chaque étape de temps sans itération et le schéma est inconditionnellement stable.

Le problème des vibrations induites par relâchers tourbillonnaires est basé sur un couplage fort qui empêche toute résolution explicite. Au début de l'étude, il a d'abord été envisagé de résoudre le système par une méthode semi-implicite, les efforts sur le cylindre pouvant être obtenus par la méthode des réactions (Wasselet, 2016). Ce type de résolution a été écarté après une phase de tests bidimensionnels qui a souligné l'instabilité du système pour des ratios de masses faibles, aucune simulation n'a convergé pour un ratio de masse inférieur à 1.

- A - Formulation faible de Navier Stokes** La formulation mixte employée est celle présentée dans le chapitre 3, elle est énoncée dans le repère mobile sous une forme adimensionnelle. On note la présence du terme de pression \hat{p} propre au repère relatif.
- B - Équations du mouvement du cylindre** L'équation différentielle de second ordre caractérisant le mouvement du cylindre est partitionnée en deux équations du premier ordre. Cela permet d'utiliser le cadre déjà implémenté dans *EF6* avec les matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} . Le passage au premier ordre nécessite l'introduction d'une nouvelle variable \mathbf{u}_c égale à la vitesse du cylindre dans le plan (i, j) .
- C - Condition de Neumann sur Γ_s** Un terme supplémentaire inséré dans la formulation faible de Navier Stokes assure l'imposition de la condition de Neumann sur la paroi de sortie de l'écoulement.
- D - Conditions de Dirichlet sur Γ_e** L'imposition des vitesses nécessite une mise en relation implicite des variables \mathbf{u} et \mathbf{u}_c . Celle-ci est réalisée en imposant faiblement les conditions de Dirichlet au bord, un terme est ajouté à la forme faible de Navier-Stokes pour modéliser la contrainte sur le bord de l'écoulement. Le procédé est comparable à la minimisation d'une fonctionnelle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (Hay et Pelletier, 2015) et implique l'ajout du coefficient multiplicateur λ_e comme variable du système.
- E - Conditions de Dirichlet sur Γ_c** On impose de manière faible les conditions de Dirichlet sur la paroi du cylindre afin de récupérer les efforts du fluide sur celui-ci. En effet, le coefficient multiplicateur λ_c a un sens physique, en le comparant avec le terme lié à la condition naturelle (C) on remarque qu'il correspond à une contrainte. Ses valeurs sont égales à celles des contraintes imposées par le cylindre sur l'écoulement aux noeuds des éléments du bord Γ_c . L'imposition faible permet d'ajouter comme variable globale le coefficient multiplicateur λ_c .
- F - Calcul des forces sur le cylindre** Les forces exercées par le fluide sur le cylindre sont obtenues par intégration sur sa paroi de la valeur du coefficient multiplicateur λ_c , celui étant inséré par imposition faible des vitesses sur la paroi (E). L'intégration spectrale permet de relever et sommer les valeurs exactes du coefficient multiplicateur aux noeuds des éléments de Γ_c sans rajouter d'erreur par interpolation.

6.3 Validation et optimisation du modèle avec un cas 2D

L'étude VIV pour des écoulements bidimensionnels au nombre de Reynolds $Re < 190$ est un passage indispensable avant toute simulation tridimensionnelle, son intérêt est double :

1. La validation de *EF6* et du solveur monolithique implémenté en comparant les résultats obtenus avec ceux de Yu *et al.* (2013), aucune étude 3D à ratio de masse nul n'ayant jamais été réalisée.
2. L'optimisation du mode opératoire employé afin de réduire le temps de calcul et les ressources utilisées. Les simulations 3D nécessitent énormément de ressources et peuvent prendre plusieurs semaines de calcul, optimiser les simulations 2D permet de préparer le passage à la troisième dimension.

6.3.1 Méthodes de mesure et de comparaison

Les phases de validation et d'optimisation impliquent le lancement de nombreuses simulations, il est nécessaire de déterminer les indicateurs pertinents et de définir les méthodes pour les mesurer afin de pouvoir comparer deux simulations différentes.

6.3.1.1 Trajectoire du cylindre

Dans le cas où le ratio de masse r_m et l'amortissement sont nuls, la force induite par le fluide sur le cylindre dans le référentiel inertiel \mathbf{F}_f est directement proportionnelle à la position du cylindre :

$$\mathbf{F}_f = \frac{\pi^3}{U_r^2} \mathbf{x}_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C_D \\ C_L \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Il n'y a donc pas de déphasage entre l'évolution des efforts sur le cylindre et celle de sa position dans le fluide, les deux profils varient seulement d'un coefficient de proportionnalité. Analyser la trajectoire du cylindre dans le fluide revient à analyser l'évolution des efforts exercés sur le cylindre selon les deux axes de liberté, à un coefficient constant près. L'étude de la trajectoire du cylindre $y_c = f(x_c)$ permet rapidement d'évaluer une simulation et d'analyser les résultats obtenus. Les simulations comprennent une phase transitoire avant d'atteindre un régime permanent où le cylindre suit une trajectoire stable dont la forme en huit varie en fonction des paramètres de l'écoulement (voir figure 6.4).

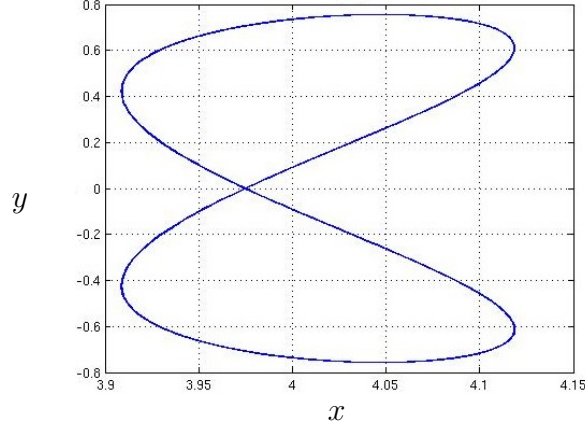


Figure 6.4 Exemple de trajectoire ($Re = 125$, $U_r = 11$, $r_m = 0$)

6.3.1.2 Critères de comparaison

Critères de comparaison rapides

Comparer les trajectoires du cylindre pour deux simulations différentes est le moyen le plus rapide pour évaluer leurs différences. L'étude du mouvement du cylindre permet de voir directement si la simulation a convergé et si le résultat final est cohérent avec les résultats précédents. L'analyse des trajectoires et leurs comparaisons se basent principalement sur la mesure de A_y , l'amplitude de vibration du cylindre selon y , et sur X_c , la position du centre de la courbe. Ce sont les deux critères principaux de comparaison, pour chaque simulation on évalue leurs erreurs relatives par rapport à une simulation posée comme référence :

$$\Delta_r X_c = \left| \frac{X_{c_{ref}} - X_c}{X_{c_{ref}}} \right| \quad (6.41)$$

$$\Delta_r A_y = \left| \frac{A_{y_{ref}} - A_y}{A_{y_{ref}}} \right| \quad (6.42)$$

Critères de comparaison précis

On peut étudier la réponse du cylindre sur plusieurs périodes afin de déterminer la fréquence de relâcher tourbillonnaire, les valeurs moyennes ou maximales des coefficients de trainée et de portance ainsi que leurs écarts types (voir figures 6.5 et 6.6). Les mesures sont réalisées et moyennées sur un échantillon d'une dizaine de cycles de relâcher en régime permanent. On considère avoir atteint celui-ci lorsque la position centrale des cycles est compris dans un intervalle $\delta x \approx 0.001$, soit deux ordres de grandeur inférieurs à la précision recherchée.

On calcule la moyenne du signal par la méthode des trapèzes, car les méthodes d'intégration temporelle utilisées ne sont pas à pas constant. La valeur moyenne du coefficient de portance doit tendre vers zéro avec un écoulement laminaire et un domaine symétrique.

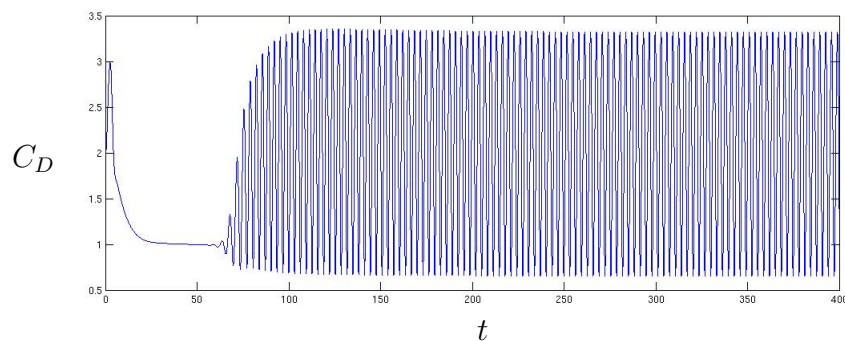


Figure 6.5 Exemple de relevé de mesures - ($Re = 125$, $U_r = 11$)

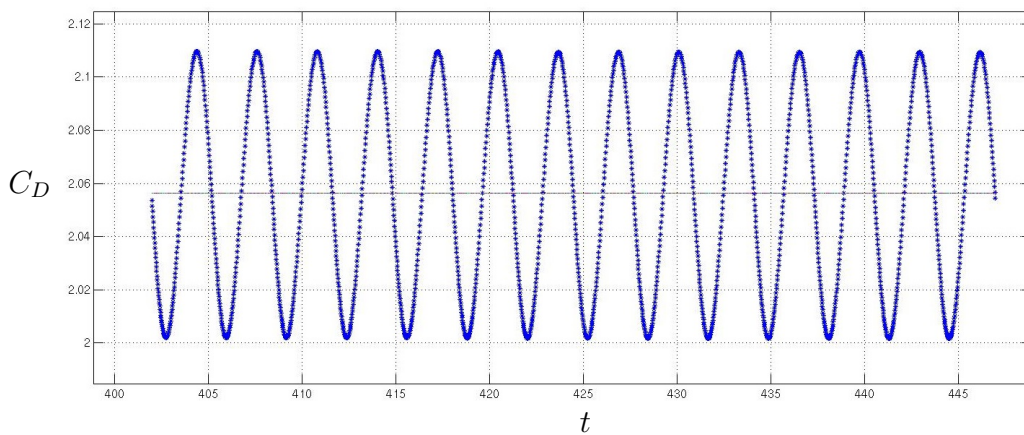


Figure 6.6 Régime permanent étudié - 7 cycles de déplacement du cylindre - ($Re = 125$, $U_r = 11$)

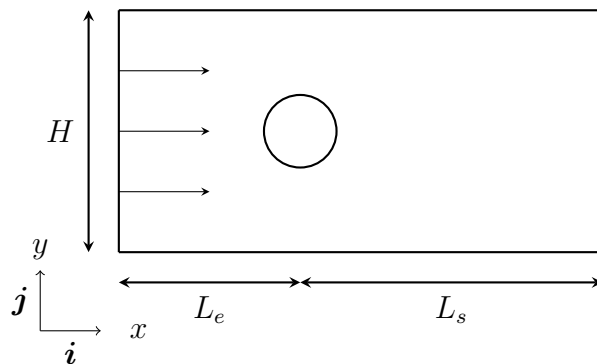


Figure 6.7 Dimensions du domaine

6.3.2 Validation du modèle

6.3.2.1 Modélisation

La validation du module VIV de *EF6* est effectuée à partir des résultats de Yu *et al.* (2013). Ces derniers utilisent une formulation par éléments finis avec une discrétisation de type P2-P1 et une résolution temporelle avec la méthode implicite Runge Kutta (IRK) d'ordre 3 comparable aux schémas BDF employés dans *EF6*. Ils imposent un champ de vitesse uniforme $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \dot{\mathbf{x}}_c$ aux bords du domaine et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur le contour du cylindre (voir section 6.2.1). La simulation de validation est réalisée avec des paramètres similaires aux leurs et le maillage employé comprend 23000 éléments (voir tableau 6.2 et figures 6.7 et 6.8). Les deux cas tests sont réalisés avec un cylindre à ratio de masse nul immergé dans un écoulement bidimensionnel à $Re = 125$. Les vitesses réduites étudiées sont $U_r = 5$ et 11.

Tableau 6.2 Comparaison des deux simulations

Simulation	$H \times (L_e + L_s)$	DDL	Degré interp.	Intégration temporelle	Δt (s)	Durée (s)
1a	$160 \times (80 + 160)$	207 000	P2-P1	BDF 1-3	0.1	350
Yu et al. (2013)	$160 \times (80 + 160)$	239 000	P2-P1	IRK III	0.1	350

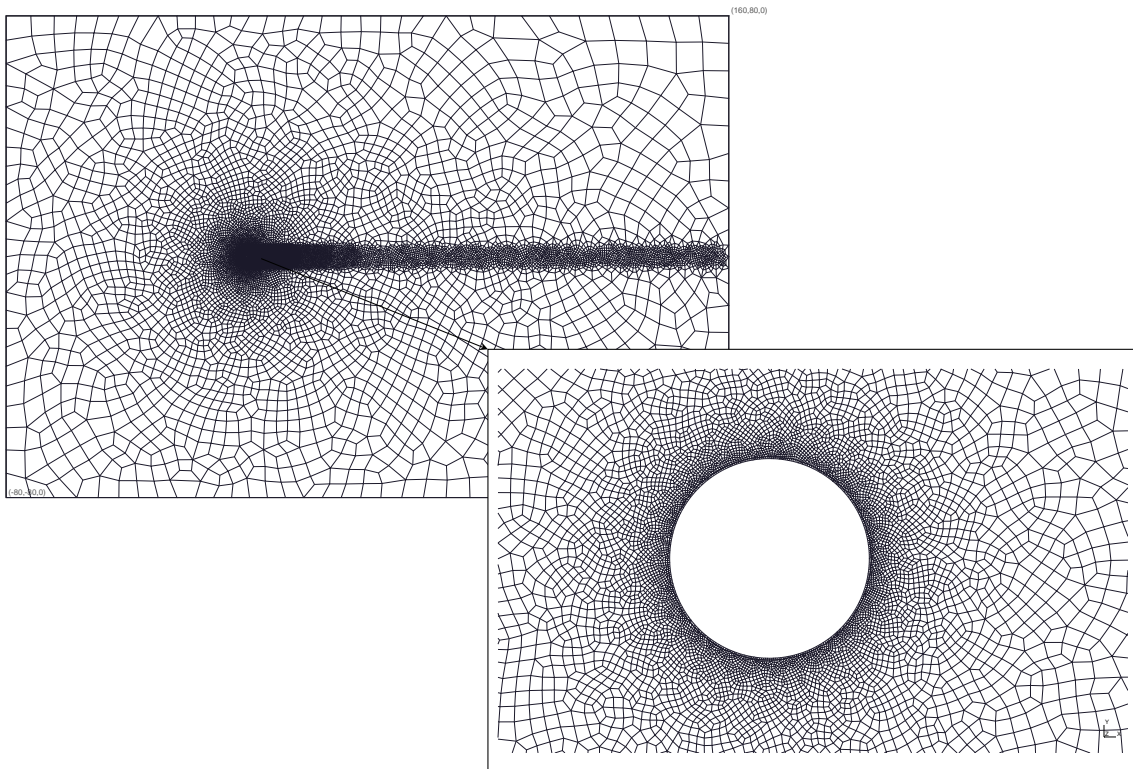
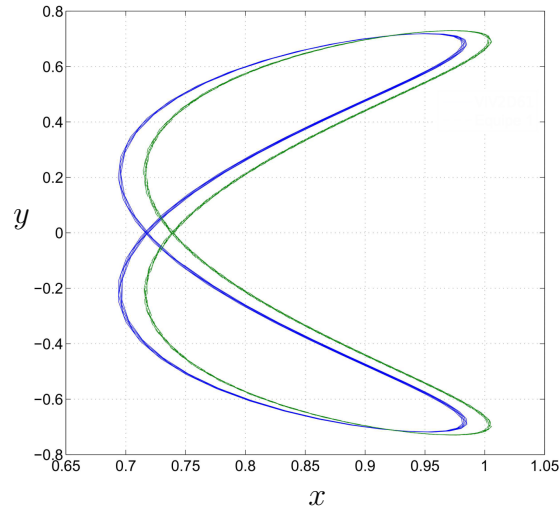


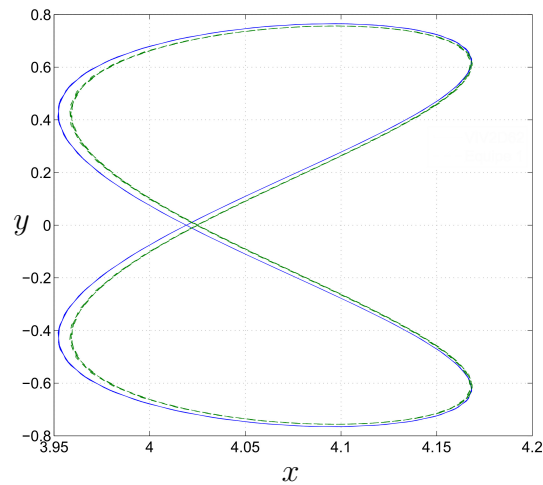
Figure 6.8 Maillage de validation

6.3.2.2 Résultats



Simulation	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\overline{C}_D	$\Delta_r \overline{C}_D$
1a	0.717	2.98%	0.718	1.53%	2.0916	2.38 %
Yu <i>et al.</i> (2013)	0.739	Ref.	0.729	Ref.	2.1427	Ref

Figure 6.9 Trajectoire du cylindre et indicateurs - *EF6* (en bleu) et (Yu *et al.*, 2013) (en vert) - ($Re = 125$, $U_R = 5$, $r_m = 0$)



Simulation	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\overline{C}_D	$\Delta_r \overline{C}_D$
1b	4.019	0.15%	0.764	1.06%	2.0818	0.07 %
Yu <i>et al.</i> (2013)	4.025	Ref.	0.756	Ref.	2.0833	Ref

Figure 6.10 Courbes de stabilité du cylindre et indicateurs - *EF6* (en bleu) et (Yu *et al.*, 2013) (en vert) - ($Re = 125$, $U_R = 11$, $r_m = 0$)

Analyse

Dans les deux cas, les trajectoires du cylindre en régime permanent sont très proches. Les écarts maximaux sont de l'ordre de 3% et concernent le cas $U_R = 5$ où la faible valeur en x amplifie les différences. Superposées, les courbes sont quasiment identiques et les différences sont principalement liées à un décalage statique selon l'axe x . Les amplitudes de variation en y sont équivalentes. Les résultats sont quasiment identiques pour le cas $U_R = 11$ avec des écarts inférieurs à 1%. Ces résultats permettent donc de valider la modélisation employée et le solveur monolithique fortement couplé implémenté dans EF6.

Par ailleurs, on remarque que l'amplitude de vibration à $U_r = 11$ est plus grande que celle obtenue à $U_r = 5$, respectivement $A_y \approx 0.73D$ et $A_y \approx 0.76D$. Le cylindre oscille donc plus fortement à une fréquence de relâcher $f_r \approx 2f_n$ qu'à sa fréquence naturelle efficace f_n . Cette particularité est due aux caractéristiques spécifiques du système. Le ratio de masse nul induit un accrochage de fréquences infini (Williamson et Govardhan, 2002) et l'ajout du second degré de liberté implique une deuxième fréquence naturelle. Du fait des interactions entre les deux plages d'accrochage de fréquences, l'amplitude de vibration n'est plus systématiquement maximale à $U_r = 5$ (Dahl *et al.*, 2010; Yu *et al.*, 2013). La position centrale de la trajectoire du cylindre diffère pour les deux cas (1a) et (1b), car la raideur du système dépend directement de la vitesse réduite.

6.3.3 Résolution avec la méthode des éléments spectraux

L'objectif final de ce projet est l'étude du phénomène des VIV en utilisant la méthode des éléments spectraux dont l'intérêt a été démontré lors de la vérification de EF6 (voir chapitre 5). Le passage aux éléments spectraux se décompose en deux phases :

1. La détermination d'une solution de référence avec la méthode des éléments finis classique. A contrario de la simulation de validation limitée au niveau de la discrétisation temporelle, celle-ci utilise tout le potentiel du code EF6 (en conservant des interpolants de faible degré). Elle doit être la plus précise possible sans restrictions sur le temps de calcul ou les ressources utilisées.
2. La détermination par la méthode des éléments spectraux de la solution la plus proche de la référence qui nécessite le moins de temps et de ressources. On considère acceptables des écarts relatifs de 0.1 – 0.2% par rapport à la solution de référence pour les paramètres X_c , A_y , \overline{C}_D et $C_{L_{max}}$.

6.3.3.1 Détermination d'une solution de référence par étude de convergence

L'étude de convergence est réalisée selon chacun des paramètres de simulation ; les discrétisations spatiale et temporelle, la taille du domaine et les conditions limites. L'ensemble des dimensions est énoncé en fonction du diamètre du cylindre D , les paramètres VIV sont $r_m = 0$, $Re = 125$ et $U_r = 11$.

Convergence en fonction des dimensions du domaine

Les simulations sont réalisées avec l'imposition de la condition naturelle modifiée sur la paroi de sortie. La notion de blocage est définie par la relation (6.43), son impact sur l'écoulement a été analysé par Prasanth *et al.* (2011). Les domaines utilisés sont réalisés avec une valeur de blocage inférieure à 1%.

$$\text{Blocage} = \frac{D}{H} \quad (6.43)$$

Tableau 6.3 Convergence en fonction de H

Simulation	Degré	H × L	Blocage	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\bar{C}_D	$\Delta_r \bar{C}_D$
1a	P2-P1	160 × 240	0.63%	3.992	0.25%	0.756	0.09%	2.0654	0.18 %
2	P2-P1	240 × 240	0.42%	3.983	0.03%	0.756	< 0.01%	2.0622	0.03 %
3	P2-P1	300 × 240	0.33%	3.982	< 0.01%	0.756	< 0.01%	2.0617	<0.01 %
4	P2-P1	360 × 240	0.28%	3.982	Ref.	0.756	Ref.	2.0616	Ref

Tableau 6.4 Convergence en fonction de L_e

Simulation	Degré	H × ($L_e + L_s$)	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\bar{C}_D	$\Delta_r \bar{C}_D$
2	P2-P1	240 × (80 + 160)	3.983	0.29%	0.756	< 0.01%	2.0622	0.28 %
5	P2-P1	240 × (120 + 160)	3.975	0.09%	0.756	< 0.01%	2.0579	0.07 %
6	P2-P1	240 × (160 + 160)	3.971	Ref.	0.756	Ref.	2.0564	Ref

Tableau 6.5 Convergence en fonction de L_s

Simulation	Degré	H × ($L_e + L_s$)	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\bar{C}_D	$\Delta_r \bar{C}_D$
2	P2-P1	240 × (80 + 160)	3.983	< 0.01%	0.756	< 0.01%	2.0622	<0.01 %
7	P2-P1	240 × (80 + 240)	3.983	Ref.	0.756	Ref.	2.0624	Ref

Au vu du tableau 6.3, l'effet de blocage est négligeable à partir d'une distance transversale $H = 240$. La paroi d'entrée est placée à $L_e = 120$ pour une perte de précision inférieure à

0.1% sur \overline{C}_D (voir tableau 6.4). Pour $L_s = 160$, la paroi de sortie est suffisamment distante du cylindre pour n'avoir quasiment aucun impact sur le mouvement du cylindre (voir tableau 6.5).

Pour la suite de l'étude, le domaine de référence prend les dimensions suivantes :

Tableau 6.6 Dimensions du domaine de référence

H	L_e	L_s
240	120	160

Convergence en fonction des conditions de sortie du domaine

Tableau 6.7 Effet de la condition de limite en sortie

Simulation	Degré	Condition en sortie	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\overline{C}_D	$\Delta_r \overline{C}_D$
2b	P2-P1	Dirichlet	3.975	< 0.01%	0.756	< 0.01%	2.0579	<0.01 %
2a	P2-P1	Neumann	3.975	Ref.	0.756	Ref.	2.0579	Ref

Les résultats présent dans le tableau 6.7 sont quasiment identiques, cela confirme que la longueur du sillage est suffisante.

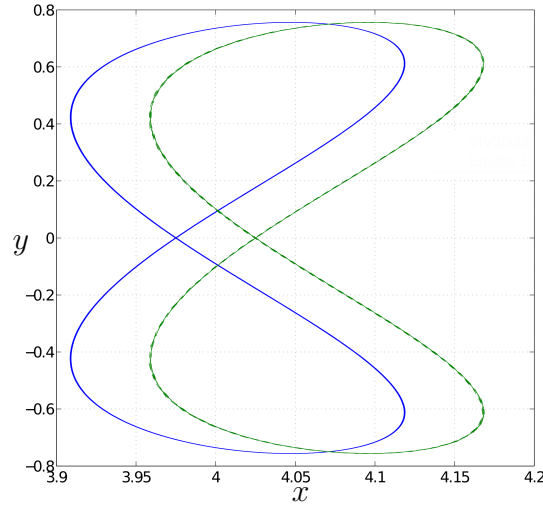
Convergence en fonction du degré d'interpolation

Tableau 6.8 Effet de l'ordre de discrétisation spatiale

Simulation	Degré	DDL	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\overline{C}_D	$\Delta_r \overline{C}_D$
2a	P2-P1	212 700	3.975	< 0.01%	0.756	< 0.01%	2.0579	0.01 %
2c	P4-P3	961 600	3.975	Ref.	0.756	Ref.	2.0581	Ref

Les indicateurs de la solution varient de manière négligeable selon qu'on utilise une discrétisation spatiale standard de degré P2-P1 ou plus élevée de type P4-P3 (voir tableau 6.8). La simulation 2a est donc choisie comme simulation de référence. Elle est caractérisée par l'imposition d'une condition naturelle modifiée en sortie, une discrétisation spatiale de type $P2 - P1$ et un domaine de taille $240 \times (120 + 160)$ composé de 23000 éléments. On peut comparer ses résultats à ceux de Yu *et al.* (2013) en sachant que l'intégration temporelle est enrichie par rapport à ces derniers avec l'utilisation d'un schéma BDF à pas et ordre

adaptatifs. Le pas de temps est compris dans l'intervalle $10^{-4} \leq \Delta t \leq 1$ et l'ordre varie de 1 à 4.



Simulation	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\overline{C}_D	$\Delta_r \overline{C}_D$	f_r
2a	3.975	1.24%	0.756	< 0.01%	2.0579	1.22%	0.1558
Yu <i>et al.</i> (2013)	4.025	Ref.	0.756	Ref.	2.0833	Ref	0.1570

Figure 6.11 Trajectoire du cylindre et indicateurs - *EF6* (en bleu) et (Yu *et al.*, 2013) (en vert) - ($Re = 125$, $U_R = 11$, $r_m = 0$)

Le cycle limite est obtenu pour 350 unités de temps, l'amélioration de l'intégration permet d'obtenir des résultats plus précis en réduisant le pas de temps lors des phases de fortes variations. La solution de référence est légèrement décalée en avant sur l'axe des abscisses mais les deux trajectoires sont identiques et superposables. La différence d'amplitude de vibration transversale A_y est proche de zéro. Le décalage statique en x est couplé à un écart sur le coefficient de traînée moyen qui varie d'environ 1.2% par rapport à Yu *et al.* (2013). Les résultats restent très proches, les différences sont principalement dus aux effets de bord et à l'intégration temporelle d'ordre supérieur avec *EF6*.

6.3.3.2 Détermination d'une simulation spectrale optimisée

Recherche par itération

Avec la méthode des éléments spectraux, il faut réduire drastiquement le maillage employé pour obtenir des gains au niveau du temps d'exécution. L'interpolation géométrique reste toutefois quadratique, on doit donc conserver un nombre suffisant d'éléments sur le périmètre du cylindre pour correctement le représenter. Le degré d'interpolation optimal est défini après

une phase de tests avec différentes combinaisons de pas spatial et de degré d'interpolation. Avec des maillages non structurés, un des problèmes rencontrés lorsqu'on réduit le nombre d'éléments du maillage est l'apparition d'une asymétrie prononcée qui devient visible sur les résultats. Les trajectoires se décalent vis à vis de l'axe des abscisses, ce qui implique une portance non nulle. Avec un écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds, cette portance n'est pas physique et souligne un manque de précision spatiale. L'utilisation d'un maillage transfini permet un meilleur contrôle des zones sensibles et la disparition des irrégularités. Une couche limite est rajoutée autour du cylindre et le maillage est rendu complètement symétrique.

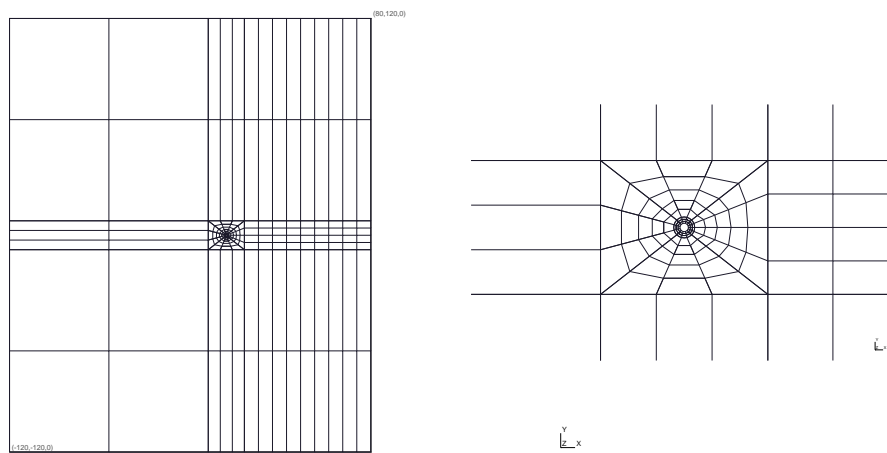


Figure 6.12 Maillage transfini optimal

Résultats de l'optimisation

Une vingtaine de simulations ont été réalisées au cours du processus d'optimisation. Cette progression par itération permet une meilleure compréhension de l'influence du maillage et du degré d'interpolation sur la solution.

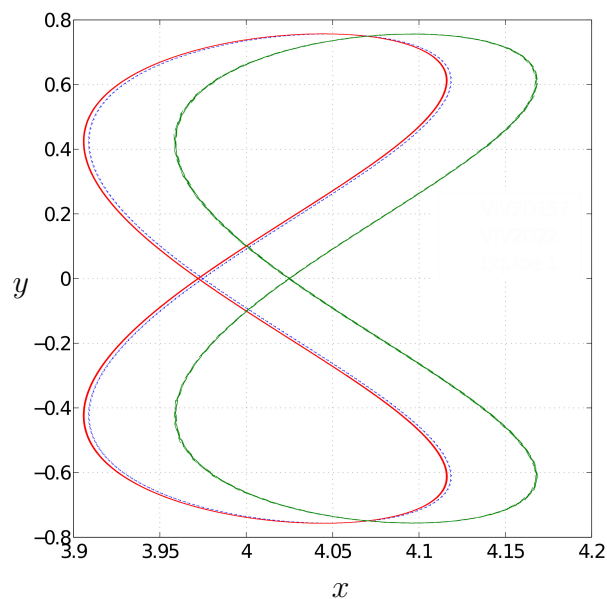


Figure 6.13 Courbes de stabilité - *EF6* sol. de référence 2a (rouge) - *EF6* sol. optimisée S (bleu) - Yu *et al.* (2013) (vert) - ($Re = 125$, $U_R = 11$, $r_m = 0$)

Tableau 6.9 Paramètres des simulations

Simulation	$H \times (L_e + L_s)$	Nb Éléments	Degré interp.	Intégration temporelle	Δt (s)
S	$240 \times (80 + 120)$	202	P6-P5	BDF 1-4	$10^{-4} - 10^{-1}$
2a	$240 \times (80 + 160)$	23300	P2-P1	BDF 1-4	$10^{-4} - 10^{-1}$

Tableau 6.10 Indicateurs de comparaison

Simulation	X_c	$\Delta_r X_c$	A_y	$\Delta_r A_y$	\bar{C}_D	$\Delta_r \bar{C}_D$	$C_{L_{max}}$	$C_{L_{rms}}$	f_r
S	3.972	0.08%	0.757	0.14%	2.0565	0.07%	0.388	0.271	0.1557
2a	3.975	Ref.	0.756	Ref.	2.0579	Ref.	0.387	0.271	0.1558

Tableau 6.11 Indicateurs d'optimisation

Simulation	12 threads (temps cpu)	Rapport de gain en temps	DDL	Coef. non nuls L+U
S	55 min (350 min)	6.4	20 600	5.9×10^6
2a	354 min (4170 min)	Ref.	212 600	51×10^6

Analyse

On obtient une très bonne approximation des coefficients de traînée et de portance à moins de 0.1% près, la fréquence de relâcher est similaire et l'amplitude des déplacements transversaux du cylindre ne diffère que de 0.14% (voir figure 6.10). La solution optimisée proposée remplit les exigences de précision demandées.

Les gains obtenus en temps et en mémoire sont remarquables (voir tableau 6.11). Le temps de calcul est divisé par 6.4. Les quantités de DDL et des coefficients non nuls des matrices triangulaires L et U sont réduits d'un ordre de grandeur. En utilisant 12 cœurs cadencés à 2.0 GHz de la plateforme de calcul M41, la simulation est réalisée en moins d'une heure.

Cette phase d'optimisation confirme le potentiel des éléments spectraux, on obtient des résultats quasiment identiques à ceux de la simulation de référence avec seulement 200 éléments en 6 fois moins de temps. Passer d'un degré d'interpolation spatiale P2-P1 à un degré plus élevé P6-P5 permet une amélioration importante des performances de calcul en deux dimensions. Selon toute logique, les gains vont être amplifiés avec le passage à la troisième dimension. L'utilisation des éléments spectraux est donc déterminante pour la suite de l'étude, elle rend possible la réalisation de simulations 3D sur les plateformes disponibles pour un temps d'exécution et une précision acceptables.

6.4 Étude de cas 3D à $Re = 300$

6.4.1 Analyses préliminaires

6.4.1.1 Influence grandissante du terme convectif

La validation du modèle a été réalisée pour $Re = 125$, car aucune étude n'a encore été présentée à $Re = 300$ pour ce cas extrême combinant ratio de masse nul et deux degrés de liberté. Passer de $Re = 125$ à $Re = 300$ nécessite des ajustements sur le mode opératoire. En plus de l'apparition des modes tridimensionnels, cette augmentation entraîne une hausse importante des effets de convection dans l'écoulement. Dans les équations de Navier-Stokes, le terme de convection non linéaire prend de l'influence. Cela entraîne la divergence des simulations basées sur le modèle précédent (voir section 6.3.3). Deux ajustements sont réalisés :

Amélioration du maillage Le maillage spectral optimisé pour un cas VIV à $Re = 125$ ne permet pas de capter correctement l'écoulement à $Re = 300$, même avec une base d'interpolation de degré supérieur à P6-P5. Plusieurs améliorations sont apportées afin d'améliorer la qualité de la discrétisation du sillage, la couche limite est densifiée et la largeur de la zone arrière raffinée est augmentée afin de capter tous les tourbillons

relâchés (voir figure 6.14). Cette dernière modification est propre à la résolution dans le repère relatif. Celle-ci implique le mouvement transversal des allées de Von Karman dans le maillage. Le ratio de taille entre les différents éléments voisins est globalement affiné autour du cylindre. Ce raffinement a un coût, le nombre total d'éléments passe de 203 à 442 quadrangles.

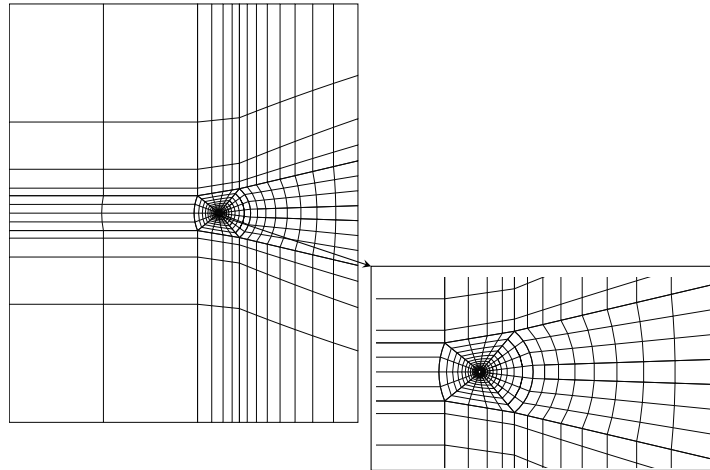
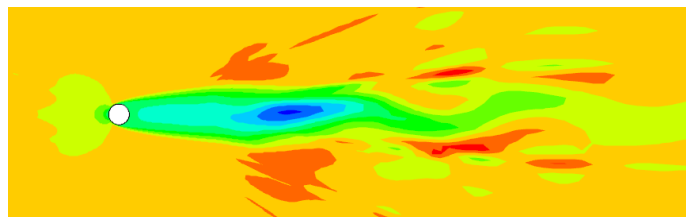
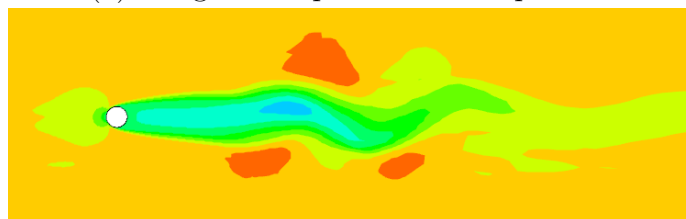


Figure 6.14 Maillage spectral ajusté pour $Re = 300$

Intégration numérique exacte du terme de convection L'étude du phénomène des VIV montre les limites de l'intégration numérique sous-optimale propre à la méthode spectrale, intégrer de manière non exacte le terme de convection provoque ainsi la divergence des calculs (voir figure 6.15). Il est nécessaire d'utiliser une règle de quadrature exacte, la méthode de discrétisation spatiale utilisée s'écarte donc de la méthode spectrale standard et l'effort numérique est accru.



(a) Intégration spectrale sous-optimale



(b) Intégration exacte

Figure 6.15 Évolution du sillage à $Re = 300$ en fonction de l'intégration numérique du terme de convection - isocontours de u $[1.4, -0.8]$ au même instant t

6.4.1.2 Étude bidimensionnelle

À partir de $Re = 190$, les écoulements derrière un cylindre sont tridimensionnels. Toutefois, les simulations bidimensionnelles permettent d'approximer l'écoulement à faible coût (Mittal et Balachandar, 1997). On en réalise une avec le modèle amélioré pour vérifier rapidement qu'on capte correctement les relâchers tourbillonnaires dans le plan XY de l'écoulement à $Re = 300$. Une étude tridimensionnelle est préférable mais même avec une discrétisation axiale grossière, l'ajout d'une dimension pour ce cas de figure multiplie le temps d'exécution par trois ordres de grandeur. Le cylindre est fixé pour ce cas spécifique. L'ensemble des paramètres de simulation est identique au cas 3D (voir section 6.2.1). Avec le raffinement du maillage, on réduit d'un degré l'interpolation spatiale en utilisant une base de type P5-P4 .

Les résultats présentés dans le tableau 6.12 soulignent la précision des discrétisations spatiales et temporelles du modèle employé. Sans tenir compte des effets 3D, la simulation bidimensionnelle donne une approximation précise du nombre de Strouhal et une valeur correcte de la traînée moyenne du cylindre. L'utilisation d'un modèle bidimensionnel permet d'obtenir ces résultats en 15 min seulement avec 12 *threads* en parallèle sur M42.

Tableau 6.12 Comparaison de la traînée moyenne et du nombre de Strouhal aux valeurs expérimentales obtenues respectivement par Wieselsberger (1922) et Williamson (1996)

Étude	\overline{C}_D	St
2D	1.33 (9%)	0.205 (1%)
2D (Mittal et Balachandar, 1997)	1.38 (13%)	0.213 (5%)
Expérimental	1.22	0.203

Face à de tels résultats, on peut s'interroger sur la nécessité de passer à la troisième dimension pour étudier le phénomène des VIV. En réalité, les modes 3D induisent une décorrélation de l'écoulement le long du cylindre, les négliger revient à surestimer les efforts sur le cylindre en imposant une corrélation du champ de pression sur l'intégralité de son contour. Or le couplage entre le mouvement du cylindre et l'écoulement est très sensible à la valeur de ces efforts, leur surestimation entraîne le cylindre dans des oscillations très importantes. La figure 6.16 représente la trajectoire du cylindre pour une étude bidimensionnelle du phénomène à $r_m = 0$, $U_r = 12$ et $Re = 300$. La surévaluation des efforts entraîne la perte de la forme en huit caractéristique.

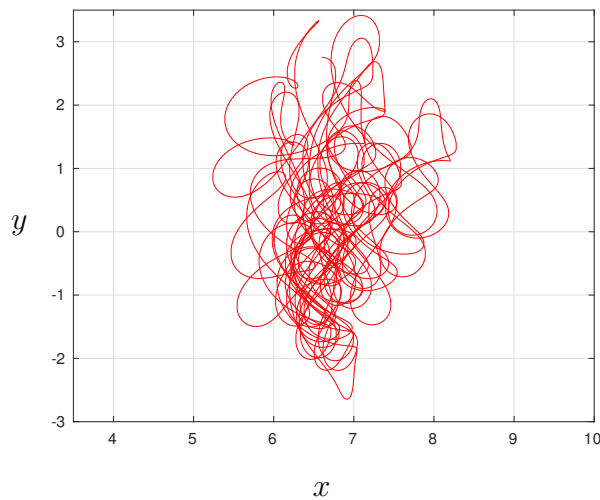


Figure 6.16 Trajectoire du cylindre $y_c = f(x_c)$ pour une simulation bidimensionnelle - $r_m = 0$
- $U_r = 12$ - $Re = 300$

6.4.1.3 Longueur et discrétisation axiale

Pour les simulations tridimensionnelles, le choix de la longueur du cylindre et de sa discrétisation est déterminant. C'est un compromis entre précision et temps de calcul. Si la longueur considérée n'est pas suffisante ou si la résolution de sa discrétisation est trop faible, les simulations ne peuvent pas capter les modes 3D correctement et l'ajout d'une dimension est inutile. En revanche le temps d'exécution des simulations augmente exponentiellement par couche d'éléments ajoutée du fait de l'utilisation de la méthode des éléments spectraux. La formulation qui est implémentée dans *EF6* ne permet pas l'utilisation de tétraèdres et aucun mailleur hexaédrique non structuré n'est disponible. Cela empêche un raffinement axial localisé dans le voisinage du cylindre. Le maillage 2D compte 440 éléments, rajouter une couche de 440 éléments tridimensionnels dans la dimension axiale revient à rajouter 2×10^5 DDL dans la matrice globale pour une interpolation de type P5-P4. Par exemple, si le maillage 3D comprend 5 couches, le système compte 10^6 DDL, soit 10×10^{11} termes dans la matrice globale. En rajoutant une couche, on rajoute 2×10^5 DDL au système et 4.4×10^{11} termes dans la matrice. Celle-ci grossit donc de 44% avec l'ajout d'une seule couche et la hausse du temps de résolution numérique est au moins aussi grande. Le choix du nombre de couches d'éléments dans la direction axiale est donc crucial.

Pour un écoulement derrière un cylindre à $Re = 300$, les modes 3D principaux sont les modes B dont la longueur d'onde est proche du diamètre du cylindre (Williamson, 1996). Mittal et Balachandar (1997) ont étudié le passage numérique du 2D au 3D pour ce cas précis. Plus récemment, Lei *et al.* (2001) ont réalisé une étude comparable par différences finies en prenant 10 DDL par tranche de longueur $l = D$. En utilisant des conditions aux bords périodiques, ils obtiennent tous les deux une approximation correcte des coefficients de l'écoulement à partir d'une longueur axiale $L = 2D$. Les conditions de symétrie imposées dans le cas présent sont plus restrictives (voir 6.1) et imposent d'étudier un intervalle axial plus grand. Dans les études actuelles, la longueur axiale sélectionnée varie entre $L = 3D$ (Yu *et al.*, 2013) à $L = 3\pi D$ (Peppas *et al.*, 2015). Ces derniers utilisent une méthode d'éléments spectraux avec des interpolants de degré 8 et environ 13 DDL par tranche axiale. Ils utilisent 192 coeurs pour leurs calculs, soit plus de 10 fois ce qui est disponible pour cette étude et leurs simulations nécessitent quand même plus de deux semaines de calcul.

Après avoir considéré l'état de la recherche et les ressources à disposition, une quinzaine de processeurs au maximum, il est décidé de réaliser l'étude tridimensionnelle avec une longueur axiale $L = 4D$ et 5 couches d'éléments, soit environ 5 DDL par tranche axiale et 2200 éléments au total. Ce choix tient compte des propriétés de convergence largement supérieures de la méthode des éléments spectraux face aux méthodes d'interpolation de degré faible. Au vu du

comportement propre aux éléments spectraux (voir Chapitre 5), on peut estimer avoir une précision plus élevée que celle obtenue par Lei *et al.* (2001) avec 10 DDL par tranche axiale.

6.4.2 Configuration de simulation

6.4.2.1 Caractéristiques VIV

Le tableau 6.13 reprend l'ensemble des paramètres du cas de VIV étudié. L'objectif de ce projet est de mesurer les amplitudes maximales d'oscillation à $Re = 300$ lorsque le cylindre a un ratio de masse nul et deux degrés de liberté. Le choix de la vitesse réduite est sujet à discussion. Dans le cas généralement étudié où le cylindre a un ratio de masse important et un mouvement seulement transversal, les vibrations sont les plus fortes lorsque la fréquence de relâcher tourbillonnaire approche la fréquence naturelle du cylindre, c'est à dire pour $U_r \approx 5 - 6$. Cependant, avec un ratio de masse nul, le cylindre vibre de manière importante pour n'importe quelle vitesse réduite. De plus, en ajoutant un second degré de liberté, l'amplitude maximale de vibration est détectée à des vitesses réduites de plus en plus élevées à mesure que le nombre de Reynolds augmente (Yu *et al.*, 2013). Au vu des résultats de Yu *et al.* (2013) sur la plage $50 \leq Re \leq 175$, on choisit de réaliser la simulation pour une vitesse réduite $U_r = 12$.

Tableau 6.13 Caractéristiques du système

Re	r_m	U_r	f_n	St
300	0	12	0.083	0.203

6.4.2.2 Paramètres de simulation

Le raffinement effectué sur le maillage pour mieux représenter les effets convectifs permet de réduire d'un degré l'interpolation spatiale. Les termes convectifs sont par ailleurs intégrés exactement. Les conditions aux bords du domaine sont présentées dans le tableau 6.1, on impose une condition naturelle en sortie.

Les tolérancements de l'algorithme de Newton et des méthodes BDF sont augmentés pour accélérer les calculs. Une vérification sur un cas VIV à $Re = 200$ indique que cette modification a des effets négligeables sur la solution. L'amplitude transversale A_y varie de 3% tandis que le centre X_c des trajectoires du cylindre évolue de 2%.

La simulation est lancée sur une durée de 300 unités de temps afin de capter une dizaine de cycles complets de relâchers tourbillonnaires. L'écoulement met une centaine de secondes

adimensionnelles avant d’osciller mais les variations très faibles sur cet intervalle permettent une résolution très rapide de cette phase initiale.

À $r_m = 0$, la mise en place de l’écoulement induit des efforts trop importants sur le cylindre et fait diverger la simulation. Il est nécessaire de lancer la simulation à $r_m = 1$ avant de supprimer l’inertie du cylindre pour la suite des calculs.

Tableau 6.14 Paramètres de simulation

$L \times H \times (L_e + L_s)$	Nb. Éléments	Degré interp.	Int. temp.	Δt (s)	Durée (s)
$4 \times 240 \times (120 + 80)$	440×5	P5 - P4	BDF 1-4	$10^{-4} - 10^{-1}$	190

6.4.3 Analyses

6.4.3.1 Simulation

Tableau 6.15 Indicateurs du calcul

Parallèle - 12 threads	RAM	DDL	Coef. L+U	Nb. étapes temp.	Fact. A
≈ 40 jours	120 Go	10^6	5.8×10^9	1600	3600

Le tableau 6.15 présente quelques indications sur le déroulement de la simulation et l’ordre de grandeur des efforts numériques. La simulation nécessite plus de 40 jours de calcul avec 12 *threads* sur la plateforme de calcul M42. Avec 10^6 DDL, la matrice globale \mathbf{A} compte 10^{12} coefficients mais son remplissage est très faible (0.1%). Elle est décomposée en deux matrices triangulaires \mathbf{L} et \mathbf{U} comprenant 5×10^5 coefficients non nul. La construction et la résolution du système matriciel global sont très coûteuses en temps, cela explique le temps de calcul important. Pour 190 secondes de simulation, la matrice \mathbf{A} est refactorisée environ 3600 fois et le système est résolu plus de 12 000 fois.

6.4.3.2 Trajectoire du cylindre et amplitudes de vibration

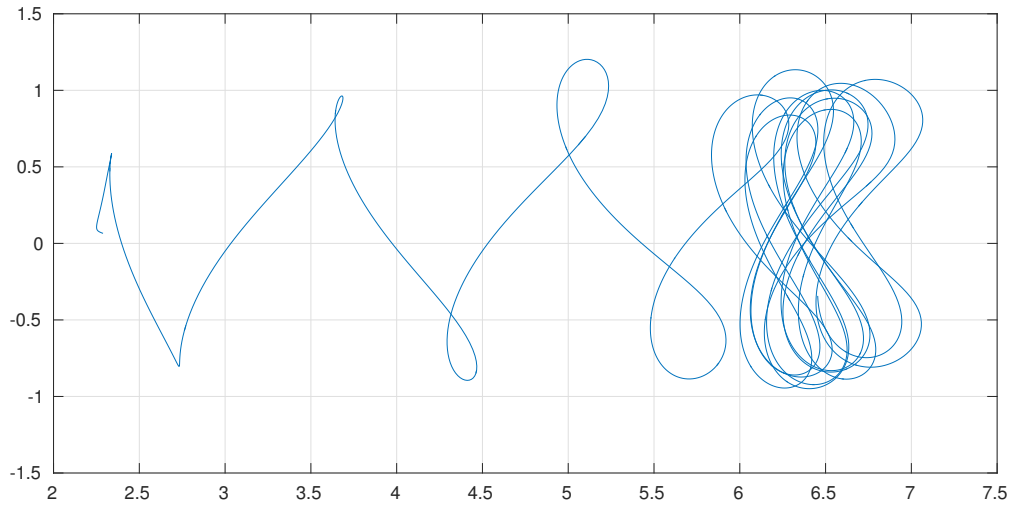


Figure 6.17 Trajectoire du cylindre $y_c = f(x_c)$ pour une simulation 3D - ($Re = 300$, $U_r = 12$, $r_m = 0$)

Tableau 6.16 Caractéristiques de la trajectoire en fonction du diamètre du cylindre D

\bar{A}_y	$A_{y_{RMS}}$	\bar{A}_x	$A_{x_{RMS}}$	\bar{X}_c
0.925	0.030	0.256	0.061	6.45

Le trajectoire du cylindre dans l'écoulement est visible à la figure 6.17, la partie précédant le début des relâchers tourbillonnaires n'est pas représentée. On retrouve une figure en huit propre au phénomène des VIV à deux degrés de liberté. La trajectoire est comparable à celles obtenues avec des écoulements laminares bidimensionnels (Yu *et al.*, 2013). En revanche, le cylindre ne semble pas se stabiliser autour d'une position d'équilibre, il est possible qu'il n'adopte pas de régime permanent pour des écoulements tridimensionnels. On peut aussi supposer qu'une dizaine de cycles n'est pas suffisant et que le cylindre n'a pas encore atteint sa position d'équilibre, la vérification de cette hypothèse est coûteuse, car chaque cycle demande 4 jours de calculs.

Les amplitudes moyennées sur 10 cycles selon les directions transversales et longitudinales sont respectivement $\bar{A}_y = 0.925D$ et $\bar{A}_x = 0.256D$ (voir tableau 6.16). Ces valeurs sont cohérentes vis à vis des résultats de Yu *et al.* (2013) obtenus pour des régimes laminares à

$Re < 200$ mais la tendance est légèrement au niveau de l'évolution de A_y en fonction de Re (voir figure 6.18). Cet écart peut s'expliquer par l'apparition dans l'écoulement d'instabilités tridimensionnelles qui entraînent la décorrélation axiale de l'écoulement le long du cylindre et la diminution de l'effort global exercé par le fluide sur le cylindre. Pour un cylindre vibrant transversalement à $r_m = 0$, Williamson et Govardhan (2006) proposent une loi approximant l'évolution de l'amplitude de vibration A_y pour $Re \geq 300$. Pour un écoulement à $Re = 300$, leur approximation indique $A_y = 0.505$. L'amplitude mesurée dans le cas présent avec un degré de liberté supplémentaire est 83% plus importante. Cet écart souligne l'importance de prendre en compte la liberté de mouvement selon l'axe de l'écoulement pour les ratios de masse très faibles. Elle a un impact très important sur l'amplitude de vibration transversale du cylindre.

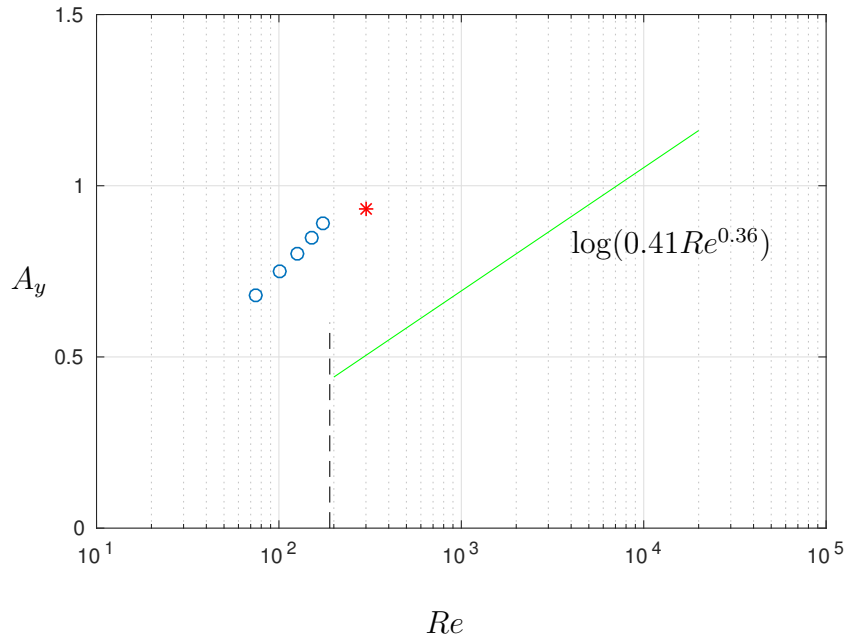


Figure 6.18 Évolution de l'amplitude maximale A_y en fonction de Re - * Étude présente - \circ (Yu *et al.*, 2013) - Loi proposée par Williamson et Govardhan (2006) pour des cylindres à un degré de liberté et $r_m = 0$

6.4.3.3 Efforts

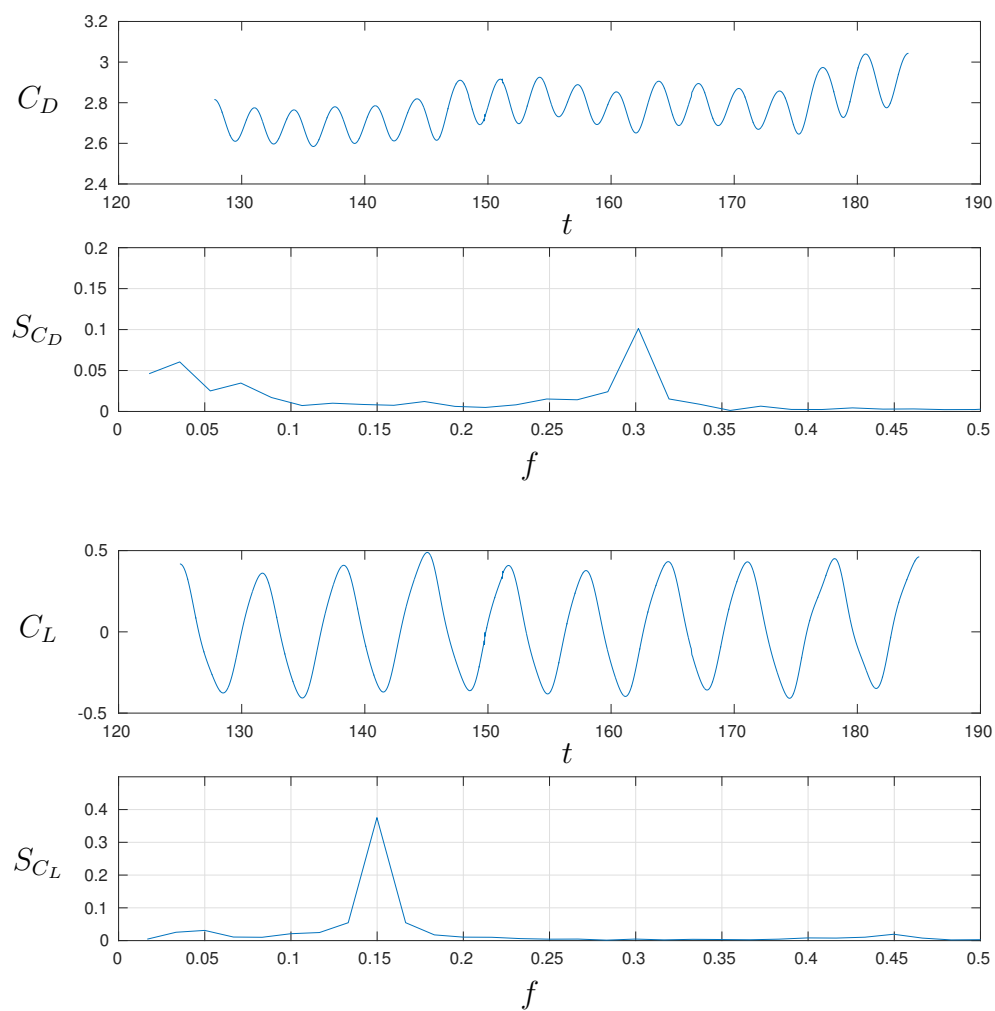


Figure 6.19 Évolution en fonction du temps et analyse spectrale des coefficients C_D et C_L au régime quasi-permanent

Tableau 6.17 Caractéristiques des coefficients C_D et C_L

\bar{C}_D	$C_{D_{RMS}}$	f_{C_D}	\bar{C}_L	$C_{L_{RMS}}$	f_{C_L}
2.777	0.617	0.30	0.022	1.589	0.15

Tableau 6.18 Rapport de la fréquence de relâcher tourbillonnaire par rapport à la fréquence naturelle du cylindre et au nombre de Strouhal d'un cylindre fixe à $Re = 300$ (Williamson, 1996)

f_r	$\frac{f_r}{f_n}$	$\frac{f_r}{St}$
0.15	1.8	0.7

Les caractéristiques des coefficients de portance C_L et de traînée C_D du cylindre et leurs évolutions temporelles sont données dans le tableau 6.17 et la figure 6.20. La moyenne du coefficient de traînée est deux fois plus élevée que celle d'un cylindre fixe pour un même écoulement (Wieselsberger, 1922). Une analyse spectrale confirme que le signal du coefficient C_D a une fréquence exactement égale à deux fois celle du signal de C_L . On rappelle que la fréquence de C_D est égale à celle d'un demi-cycle de relâcher tourbillonnaire alterné et celle de C_L à celle d'un cycle complet.

La traînée n'est pas complètement stabilisée et tend à légèrement augmenter au cours du temps, cette variation est liée aux difficultés à trouver le point d'équilibre du cylindre. Les sommets du signal du coefficient de portance sont légèrement fléchis, on peut établir une correspondance entre ces écarts vis à vis d'une fonction sinusoïdale parfaite et le mode de relâcher tourbillonnaire (voir section 6.4.3.4).

Dans le tableau 6.18, on compare la fréquence de relâcher tourbillonnaire $f_r = f_{C_i}$ à la fréquence naturelle efficace et au nombre de Strouhal du système étudié. La fréquence de relâcher est 1.8 fois plus élevée que la fréquence naturelle efficace du système. Ce rapport est comparable à la valeur $\frac{f_r}{f_n} = 1.4$ obtenue par Yu *et al.* (2013) pour des écoulements laminares à $U_r = 11$. L'écart de 30% entre la fréquence de relâcher et le nombre de Strouhal expérimental obtenu par Williamson (1996) souligne l'importance du phénomène d'accrochage de fréquences.

6.4.3.4 Vorticité et mode de relâcher tourbillonnaire

Le champ de vorticité du sillage est représenté à la figure 6.20. On remarque la présence de deux couples de tourbillons axiaux de taille importante et d'une multitude de plus petites structures, les modes B, engendrées par des instabilités tridimensionnelles. Ils sont nettement visibles en affichant les isocontours de vorticité selon x et on peut constater que leur longueur d'onde est proche d'un diamètre comme l'indique Williamson (1996). Ce sont ces modes qui induisent la décorrélation des efforts sur le cylindre et la diminution de ses oscillations. On

note que l'ensemble de ces structures n'est pas symétrique par rapport au plan central XY de l'écoulement, cela écarte l'hypothèse d'une manifestation d'instabilités purement numériques. La discrétisation et la longueur axiales utilisées semblent suffisantes pour capter les phénomènes tridimensionnels.

Les grandes amplitudes d'oscillation du cylindre et l'apparition des modes B ont tendance à complexifier le sillage. Les tourbillons partent dans des directions différentes selon la vitesse du cylindre au moment où ils sont relâchés. Cela entraîne l'interaction précoce des différents tourbillons relâchés et leur dissipation rapide à proximité du cylindre. Les tourbillons axiaux sont ainsi visibles sur une zone restreinte d'une longueur de quelques diamètres derrière le cylindre. Les modes B participent aussi à la dissipation rapide des allées de Von Karman en les disloquant, les grosses structures axiales transmettent leur énergie aux ensembles de plus petite échelle.

Le mode de relâcher tourbillonnaire détecté à $Re = 300$ est de type 2P, c'est une différence notable par rapport aux études précédentes dans le régime laminaire où les modes de relâcher sont de type 2S ou C(2S) (Etienne et Pelletier, 2012; Yu *et al.*, 2013). Le mode 2P est reconnaissable sur la figure 6.21 où est représenté le sillage de l'écoulement sur un cycle complet. Au cours de celui-ci, le cylindre réalise une figure en huit complète et on note le relâcher de 2 couples de tourbillons. D'une part **C** et **D** entre les temps (1) et (2) puis **E** entre (2) et (3) et enfin **F** entre (3) et (4). Les couples **C-D** et **E-F** sont composés d'un tourbillon principal et d'un secondaire à la vorticité plus faible et opposée. L'image (4) représente l'écoulement après la réalisation d'un cycle complet par rapport à (1), on note les similarités au niveau du sillage pour les deux temps, un nouveau cycle débute avec le relâcher de **G**. Le relâcher des tourbillons principaux de chaque couple est effectué aux valeurs maximales et minimales de C_L , sur les positions transversales extrêmes du cylindre. Le relâcher des tourbillons secondaires semblent être réalisé juste avant le relâcher principal, ce qui explique la légère inflexion de la courbe de portance à ces endroits.

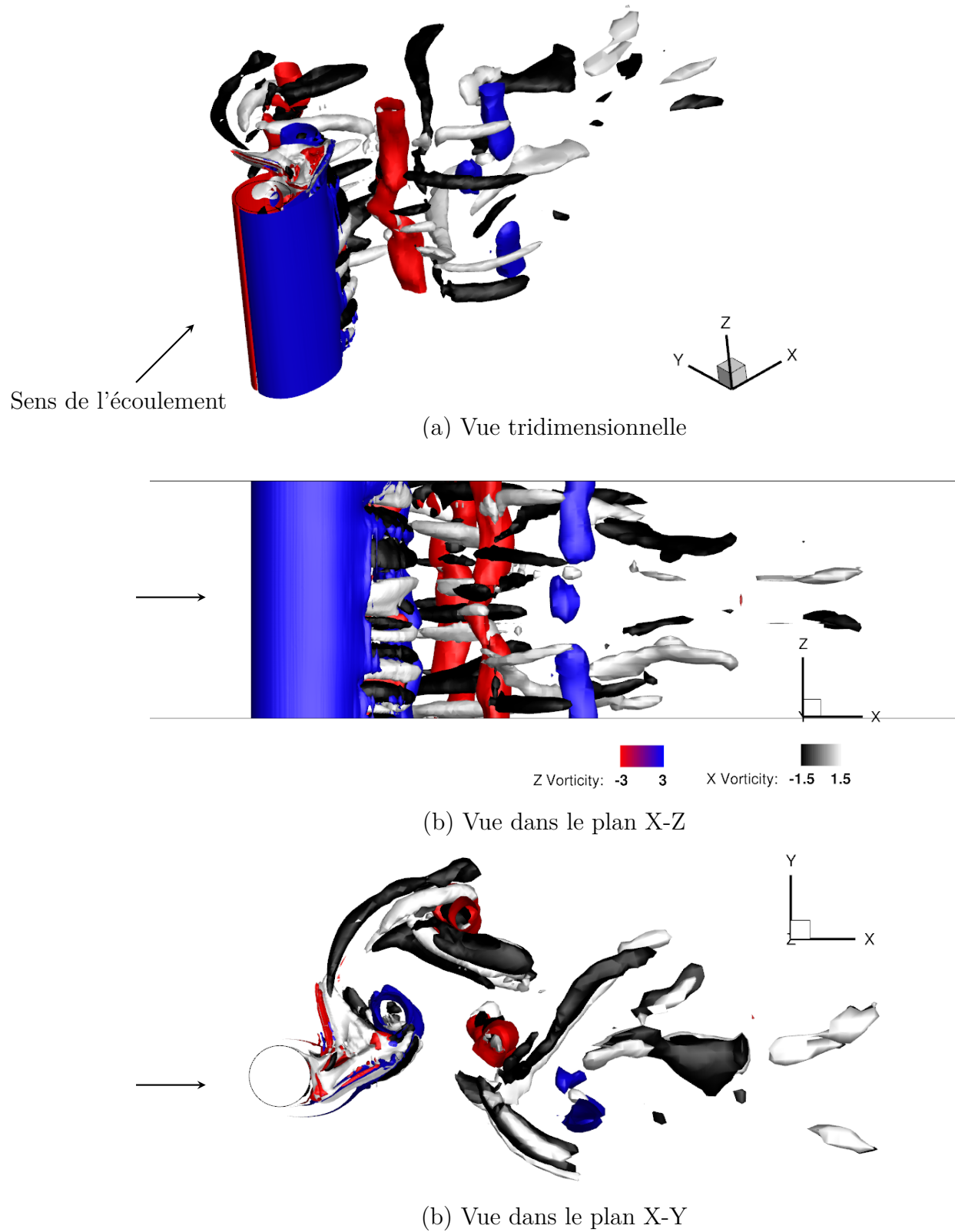


Figure 6.20 Sillage du cylindre en position basse sur son cycle avec les isocontours de vorticité en Z et X

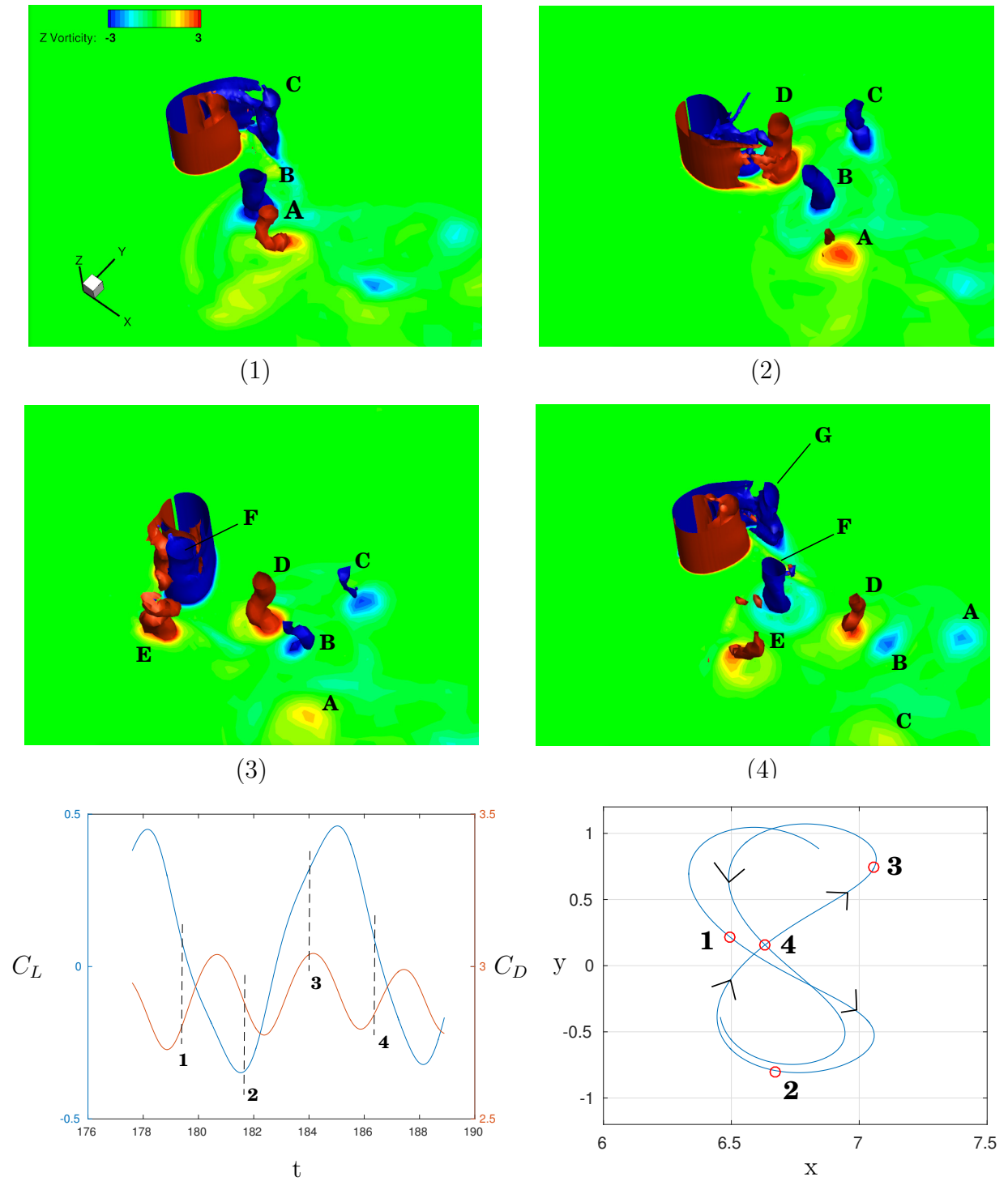


Figure 6.21 Visualisation du mode de relâcher 2P

CHAPITRE 7 CONCLUSION

Ce projet a contribué au développement d'un code d'éléments spectraux ainsi qu'à celui des connaissances dans le domaine des vibrations induites par vortex. L'ensemble des critères de réussite fixés au début de l'étude a été rempli.

Le code *EF6* initialement en développement est maintenant complètement fonctionnel, sa vérification et sa validation ont été réalisées pour des cas d'étude variés en mécanique des fluides et en thermique. Sa capacité à capter des phénomènes instationnaires complexes et des instabilités tridimensionnelles a été démontrée à plusieurs reprises.

Une optimisation complète de *EF6* a été réalisée après une analyse détaillée de son fonctionnement. Elle a conduit à une réduction du temps d'exécution par 2 dans les cas les plus défavorables et par un facteur supérieur dans la majeure partie des situations. Sa capacité de parallélisation a été améliorée avec notamment la mise en place d'un parallélisme imbriqué pour la résolution de problèmes tridimensionnels.

Un solveur monolithique fortement couplé a été implémenté pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure au couplage délicat. Il a permis l'étude du phénomène des VIV sur des cas bidimensionnels et tridimensionnels dans la situation extrême où le cylindre n'a pas d'inertie et peut se déplacer selon deux axes de liberté.

Dans le cadre de l'étude VIV bidimensionnelle, la puissance de la méthode des éléments spectraux a été démontrée avec une réduction du temps d'exécution par 6 à précision égale par rapport à la méthode des éléments finis. Un ordre de grandeur est gagné sur les ressources mémoire nécessaires à la simulation.

L'étude VIV tridimensionnelle à $Re = 300$ pour un cylindre à ratio de masse nul et deux degrés de liberté a été réalisée. Pour une vitesse réduite $U_r = 12$, le cylindre oscille à une amplitude transversale maximale $A_y = 0.925$. Cela représente une augmentation de 80% par rapport à la valeur estimée pour un cylindre pouvant seulement vibrer transversalement à l'écoulement. Cet écart confirme l'importance de prendre en compte ce degré de liberté supplémentaire dans le dimensionnement des structures maritimes au ratio de masse très faible. Enfin, il a été découvert que le mode de relâcher est de type 2P pour un écoulement à $Re = 300$. C'est une différence notable par rapport au comportement du système pour un régime laminaire où les tourbillons sont relâchés un par un.

CHAPITRE 8 RECOMMANDATIONS

Dans la continuité de ce projet, plusieurs axes de développement pourraient faire l'objet de recherches futures :

- La principale contrainte rencontrée au cours de l'étude tridimensionnel des VIV a été numérique. Le code *EF6* est parallélisé sur des machines à mémoire partagée à l'aide d'INTEL OpenMP. Cet outil est puissant et simple à utiliser. Toutefois, il a l'inconvénient majeur d'être incompatible avec la majeure partie des grandes plateformes de calcul, celles-ci étant très généralement à mémoire distribuée. On doit ainsi se contenter d'une dizaine de processeurs pour réaliser les simulations, c'est largement insuffisant pour le passage à la troisième dimension. Les études actuelles, réalisées sur des cas similaires, utilisent des centaines voir des milliers de processeurs. Cette restriction impose de choisir entre précision et temps de calcul acceptable, elle réduit fortement le champ d'applications du code. L'étape suivante dans le développement de *EF6* serait de mettre en place une parallélisation de type MPI à mémoire distribuée. Il serait alors possible de massivement paralléliser *EF6* sur les machines de Calcul Québec et d'intensifier la recherche sur des phénomènes tridimensionnels.
- Pour des raisons de coût numérique qui relève du point précédent, l'étude VIV tridimensionnelle a été réalisée pour une seule vitesse réduite $U_r = 12$. L'amplitude transversale d'oscillation relevée est importante mais rien n'assure que c'est à cette vitesse réduite que le cylindre étudié vibre de manière maximale. Il faudrait relancer plusieurs simulations à des vitesses réduites supérieures afin de mesurer la valeur de l'amplitude et chercher l'intervalle où le cylindre oscille le plus fortement.
- Toujours pour des raisons de coût, l'étude VIV tridimensionnelle n'a pas pu être prolongée d'une dizaine de cycles. Il serait pertinent de continuer la simulation à $U_r = 12$, afin de savoir si le cylindre atteint un régime permanent similaire au cas bidimensionnel avec une trajectoire complètement stabilisée.

RÉFÉRENCES

- Antonijoan, J. and Sanchez, J. (2002). On stable taylor vortices above the transition to wavy vortices. *Physics of fluids*, 14(322), 1661–1665.
- Babuska, Ivo (1971). Error-bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 16(4), 322–333.
- Babuska, Ivo and Szabo, Barna A and Katz, I Norman (1981). The p-version of the finite element method. *SIAM journal on numerical analysis*, 18(3), 515–545.
- Batchelor, G.K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge mathematical library.
- Bearman, P.W. (1984). Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 16(1), 195–222.
- Bearman, P.W. (2011). Circular cylinder wakes and vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 27(5–6), 648 – 658.
- Blackburn, Hugh M. and Govardhan, R.N. and Williamson, C.H.K. (2001). A complementary numerical and physical investigation of vortex-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 15(3), 481–488.
- Botella, O. and Peyret, R. (1998). Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, 27(4), 421–433.
- Brayton, Robert K. and Gustavson, Fred G. and Hachtel, Gary D (1972). A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas. *Proceedings of the IEEE*, 60(1), 98–108.
- Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8(R2), 129–151.
- Brezzi, F. and Fortin, M. (1991). *Mixed and hybrid finite elements methods*. Springer-Verlag.
- Burggraf, O.R. (1966). Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J.Fluid mech*, 24(1), 113–151.
- Canuto, Claudio and Hussaini, M. Yousuff and Quarteroni, Alfio Maria and Thomas Jr., A and others (2012). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Causin, Paola and Gerbeau, Jean-Frédéric and Nobile, Fabio (2005). Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(42), 4506–4527.
- Coles, David (1965). Transition in circular couette flow. *J. Fluid Mech.*, 385–425.

- Czarny, Olivier (2003). *Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.
- Dahl, J. M. and Hover, F. S. and Triantafyllou, M. S. and Oakley, O. H. (2010). Dual resonance in vortex-induced vibrations at subcritical and supercritical reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 643, 395–424.
- Deville, M. O. and Fischer, P. F. and Mund, E. H. (2002). *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge university press.
- Dong, Suchuan and Karniadakis, George E (2005). Dns of flow past a stationary and oscillating cylinder at. *Journal of Fluids and Structures*, 20(4), 519–531.
- Donnelly, Russell. J. (1991). Taylor-couette flow : the early days. *Physics Today*, 32–39.
- Etienne, S. and Pelletier, D. (2012). The low reynolds number limit of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 31, 18 – 29.
- Feng, C.C. (1968). *The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders*. Thèse de doctorat, University of British Columbia.
- Fenstermacher, P.R. and Swinney, H. L. and Gollub, J. P. (1979). Dynamical instabilities and the transition to chaotic taylor vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 103–128.
- Fernández, Miguel Angel and Gerbeau, Jean-Frédéric (2009). Algorithms for fluid-structure interaction problems. L. Formaggia, A. Quarteroni et A. Veneziani, éditeurs, *Cardiovascular Mathematics*, Springer Verlag, vol. 1 de *Modeling, Simulation and Applications*. 307–346.
- Fortin, A. and Garon, A. (2009). *Les éléments finis, de la théorie à la pratique*. GIREF Laval.
- Geuzaine, Christophe and Remacle, Jean-François (2009). Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), 1309–1331.
- Gottlieb, David and Orszag, Steven A. and MA, Cambridge hydrodynamics inc. (1977). *Numerical analysis of spectral methods*, vol. 2. SIAM.
- Griffin, O.M. (1980). Vortex-excited cross-flow vibrations of a single cylindrical tube. *ASME. J. Pressure Vessel Technol*, 102(2), 158–166.
- Gu, W. and Chyu, C. and Rockwell, D. (1994). Timing of vortex formation from an oscillating cylinder. *Physics of Fluids*, 6(11), 3677–3682.
- Hay, A. and Pelletier, D. (2015). *Éléments finis en mécanique des fluides - MEC6210*. École Polytechnique de Montréal.

- Jauvtis, N. and Williamson, C.H.K. (2003). Vortex-induced vibration of a cylinder with two degrees of freedom. *Journal of Fluids and Structures*, 17(7), 1035 – 1042.
- Jauvtis, N. and Williamson, C.H.K. (2004a). A high-amplitude 2t mode of vortex-induced vibration for a light body in {XY} motion. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 23(1), 107 – 114. Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations.
- Jauvtis, N. and Williamson, C. H. K. (2004b). The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics*, 509, 23–62.
- Khalak, A. and Williamson, C.H.K. (1996). Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*, 10(5), 455 – 472.
- Khalak, A. and Williamson, C.H.K. (1997). Fluid forces and dynamics of a hydroelastic structure with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*, 11(8), 973 – 982.
- Kuzmin, A. and Luisier, M. and Schenk, O. (2013). Fast methods for computing selected elements of the greens function in massively parallel nanoelectronic device simulations. F. Wolf, B. Mohr et D. Mey, éditeurs, *Euro-Par 2013 Parallel Processing*, Springer Berlin Heidelberg, vol. 8097 de *Lecture Notes in Computer Science*. 533–544.
- Lei, C. and Cheng, L. and Kavanagh, K. (2001). Spanwise length effects on three-dimensional modelling of flow over a circular cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(22–23), 2909 – 2923.
- Lienhard, John H (1966). *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. Technical Extension Service, Washington State University.
- Mittal, R. and Balachandar, S. (1995). Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders. *Physics of Fluids*, 7(8), 1841–1865.
- Mittal, R. and Balachandar, S. (1997). On the inclusion of three-dimensional effects in simulations of two-dimensional bluff-body wake flows. *Symposium on separated and complex flows, ASME FED meeting, Vancouver*.
- Moe, G. and Wu, Z.-J. (1990). The lift force on a cylinder vibrating in a current. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 112(4), 297–303.
- Patera, Anthony T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3), 468 – 488.
- Pena, Goncalo (2009). *Spectral element approximations of the incompressible Navier-Stokes equations in a moving domain and applications*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Lausanne.

- Peppas, S. and Kaiktsis, L. and Triantafyllou, G.S. (2015). Numerical simulation of three-dimensional flow past a cylinder oscillating at the strouhal frequency. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 137(1), 011302.
- Peppas, Sofia and Kaiktsis, Lambros and Triantafyllou, George S. (2016). Hydrodynamic forces and flow structures in flow past a cylinder forced to vibrate transversely and inline to a steady flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 138(1), 011803.
- Pontaza, J.P. and Chen, H. (2007). Three-dimensional numerical simulations of circular cylinders undergoing two degree-of-freedom vortex-induced vibrations. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 129(3), 158–164.
- Pontaza, J.P. and Chen, H. and Menon, R.G. (2009). Three-dimensional numerical simulations of flows past smooth and rough/bare and helically straked circular cylinders allowed to undergo two degree-of-freedom motions. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 131(2), 021301.
- Pontaza, J.P. and Menon, R.G. (2013). Prediction of vortex-induced vibration response of a pipeline span by coupling a viscous flow solver and a beam finite element solver. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 135(3), 031702.
- Prasanth, T.K. and Premchandran, V. and Mittal, Sanjay (2011). Hysteresis in vortex-induced vibrations : critical blockage and effect of m^* . *Journal of Fluid Mechanics*, 671, 207–225.
- Raghavan, K. and Bernitsas, M.M. (2011). Experimental investigation of reynolds number effect on vortex induced vibration of rigid circular cylinder on elastic supports. *Ocean Engineering*, 38(5–6), 719 – 731.
- Reddy, J.N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method (second edition)*. McGrawHill.
- Roache, P.J. (1998). *Verification and validation computational science and engineering*. Hermosa publishers.
- Runge, Carl (1901). Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46, 224–243.
- Sarpkaya, T. (1995). Hydrodynamic damping, flow-induced oscillations, and biharmonic response. *J. Offshore Mech. Arct. Eng.*, 117(4), 232–238.
- Sarpkaya, T. (2004). A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19(4), 389–447.
- Sarpkaya, T. (2010). *Wave Forces on Offshore Structures*. Cambridge University Press.

- Shiels, D. and Leonard, A. and Roshko, A. (2001). Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters. *Journal of Fluids and Structures*, 15(1), 3 – 21.
- Strouhal, V. (1878). Ueber eine besondere art der tonerregung. *Annalen der Physik*, 241(10), 216–251.
- Taylor, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Royal Society*, 223, 289–342.
- Wasselet, Martin (2016). *Calcul des forces et moments sur des corps immergés par la méthode des éléments spectraux*. Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Montréal, Canada.
- Wieselsberger, C. (1922). New data on the laws of fluid resistance. vol. 84 de *Technical note (United States. National Advisory Committee for Aeronautics)*.
- Williamson, C.H.K. (1996). Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28, 477–539.
- Williamson, C.H.K. and Govardhan, R. (2000). Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 420, 85–130.
- Williamson, C.H.K. and Govardhan, R. (2002). Resonance forever : existence of a critical mass and an infinite regime of resonance in vortex-induced vibration. *Journal of Fluid Mechanics*, 473, 147–166.
- Williamson, C.H.K. and Govardhan, R. (2004). Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1), 413–455.
- Williamson, C.H.K. and Govardhan, R. (2006). Defining the ‘modified griffin plot’ in vortex-induced vibration : revealing the effect of reynolds number using controlled damping. *Journal of Fluid Mechanics*, 561, 147–180.
- Wooton, L.R. and Warner, M.H. and Sainsbury, R.N. and Cooper, D.H. (1972). *Oscillations of piles in marine structures. A resume of full-scale experiments at Immingham*. CIRIA Technical Report 41.
- Wu, X. and Ge, F. and Hong, Y. (2012). A review of recent studies on vortex-induced vibrations of long slender cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, 28, 292–308.
- Xu, Chuanju and Pasquetti, Richard (2004). Stabilized spectral element computations of high reynolds number incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 196(2), 680–704.
- Yu, Kintak Raymond and Hay, Alexander and Pelletier, Dominique and Corbeil-Létourneau, Simon and Ghasemi, Shahin and Etienne, Stéphane (2013). Two degrees of freedom vortex-induced vibration responses with zero mass and damping at low reynolds number. *ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. vol. 7.

ANNEXE A FORMULATION FAIBLE DE NAVIER-STOKES

Soit la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\psi} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \cdot \left(-\nabla p + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \right) d\Omega & \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n \\ \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega &= 0 & q, p \in L_2(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

L'opérateur nabla a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a\mathbf{b}) &= a\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla a \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \cdot (\nabla a \cdot \mathbf{b}) &= (\nabla \cdot \nabla a) \cdot \mathbf{b} + \nabla a : \nabla \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En développant chacun des termes du membre de droite de l'équation de bilan de mouvement et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla p \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\boldsymbol{\psi}) d\Omega + \int_{\Omega} p \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega \\ \int_{\Omega} -\nabla p \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega &= - \int_{\Gamma} p \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} p \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \cdot \mu(\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) d\Omega &= \int_{\Omega} \mu \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Omega - \int_{\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} d\Omega \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \cdot \mu(\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) d\Omega &= \int_{\Gamma} \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On obtient finalement la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\psi} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} d\Omega &= \int_{\Gamma} (-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega &= 0 & q, p \in L_2(\Omega) \quad \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ANNEXE B THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

Démonstration de l'équation (6.18) par une triple utilisation du théorème de la divergence sur le cylindre circulaire de volume V :

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} x \mathbf{n} dS &= \int_{S_c} x n_x dS \mathbf{i} + \int_{S_c} x n_y dS \mathbf{j} + \int_{S_c} x n_z dS \mathbf{k} \\
 \int_{S_c} x \mathbf{n} dS &= \int_{S_c} (x, 0, 0) \cdot \mathbf{n} dS \mathbf{i} + \int_{S_c} (0, x, 0) \cdot \mathbf{n} dS \mathbf{j} + \int_{S_c} (0, 0, x) \cdot \mathbf{n} dS \mathbf{k} \\
 \int_{S_c} x \mathbf{n} dS &= \int_{V_c} \frac{\partial x}{\partial x} dV \mathbf{i} + \int_{V_c} \frac{\partial x}{\partial y} dV \mathbf{j} + \int_{V_c} \frac{\partial x}{\partial z} dV \mathbf{k} \\
 \int_{S_c} x \mathbf{n} dS &= V \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} (\rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{n} dS &= \rho_f \left(\int_{S_c} x \ddot{x}_c \mathbf{n} dS + \int_{S_c} y \ddot{y}_c \mathbf{n} dS + \int_{S_c} z \ddot{z}_c \mathbf{n} dS \right) \\
 \int_{S_c} (\rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{n} dS &= \rho_f (\ddot{x}_c V \mathbf{i} + \ddot{y}_c V \mathbf{j} + \ddot{z}_c V \mathbf{k}) \\
 \int_{S_c} (\rho_f \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c) \mathbf{n} dS &= \rho_f V \ddot{\mathbf{x}}_c
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

ANNEXE C NOTIONS D'ESPACES FONCTIONNELS

Cette annexe est directement tirée de l'ouvrage de Fortin et Garon (2009).

C.1 Espace fonctionnel linéaire

Un espace fonctionnel linéaire est un ensemble S de fonctions définies sur un ouvert Ω vérifiant :

- $u \in S, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow \beta u \in S$
- $u \in S, w \in S \rightarrow (u + w) \in S$

C.2 Produit scalaire

Le produit scalaire sur un espace fonctionnel linéaire S est l'application définie sur $S \times S$ qui à un couple donné (u, w) de $S \times S$ associe un scalaire noté $(u, w)_S$ tel que :

- $(u, w)_S = (w, u)_S \quad \forall u, w \in S$
- $(\beta u, w)_S = (u, \beta w)_S = \beta(u, w)_S \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall u, w \in S$
- $(u_1 + u_2, w)_S = (u_1, w)_S + (u_2, w)_S \quad \forall u_1, u_2, w \in S$
- $(u, u)_S \geq 0$

C.3 Norme

La norme sur un espace fonctionnel linéaire S est une application définie sur S qui, à un élément u de S , associe un réel $\|u\|_S$ dans \mathbb{R} tel que :

- $\|u\|_S > 0 \quad u \in S, \quad \|u\|_S = 0 \iff u = 0$
- $\|\beta u\|_S = |\beta| \|u\|_S \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in S$
- $\|u + v\|_S \leq \|u\|_S + \|v\|_S \quad \forall u, v \in S$

La norme induite sur l'espace S par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_S$ est définie par $\|u\|_S = ((u, u)_S)^{1/2}$

C.4 Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace fonctionnel linéaire muni d'un produit scalaire et qui est complet. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\}$$

avec le produit scalaire :

$$(u, w)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uw \, dv$$

et la norme induite :

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} u^2 \, dv \right)^{1/2}$$

C.5 Espace de Sobolev

On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'espace fonctionnel linéaire suivant :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \forall i = 1 \dots 3 \right\}$$

avec le produit scalaire :

$$(u, w)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uw + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dv$$

et la norme induite :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dv \right)^{1/2}$$

On définit deux autres espaces inclus dans $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$H_{\gamma_0}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\gamma} = 0, \gamma \subseteq \Gamma \right\}$$

C.6 Forme bilinéaire

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui, à un couple (u, w) de $V \times V$, associe le scalaire $a(u, w)$ tel que :

- $a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in S \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$\bullet a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) = \beta_1 a(u_1, w)_S + \beta_2 a(u_2, w)_S \quad \forall u_1, u_2, w \in S \text{ et } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Une forme bilinéaire est dite coercive si :

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V$$

C.7 Théorème de Lax-Milgram

Soit un espace de Hilbert V et soit l et a des formes linéaires et bilinéaires continues sur V et $V \times V$. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver une fonction } u \in V \text{ telle que } a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V$$

ANNEXE D DÉMONSTRATION DU CRITÈRE DE STABILITÉ DE RAYLEIGH

Il est possible de réaliser l'étude de stabilité du système pour le cas d'un fluide non visqueux. L'instabilité de Taylor-Couette est une instabilité centrifuge basée sur l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial s'exerçant en tout point du domaine. Soit le point 1 disposé à une distance radiale r de l'axe des cylindres :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_1 = \rho \frac{V^2(r)}{r} \quad (\text{D.1})$$

En supposant qu'une particule disposée au point 1 s'écarte d'une distance dr de ce point, le moment cinétique est conservé dans le cas d'un fluide non visqueux et on obtient :

$$rV(r) = (r + dr)\tilde{V}(r + dr) \quad (\text{D.2})$$

Or l'équilibre entre force centrifuge et gradient de pression radial en 2 donne (avec $V(r + dr)$ la vitesse des particules présentes initialement en 2) :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_2 = \rho \frac{V^2(r + dr)}{r + dr} \quad (\text{D.3})$$

L'écoulement est stable dans le cas où la particule venant du point 1 est renvoyée vers cette position, c'est à dire lorsque le gradient de pression est plus fort que la force centrifuge exercée sur la particule :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_2 > \rho \frac{\tilde{V}^2(r + dr)}{r + dr} \quad (\text{D.4})$$

Dans le cas contraire, la particule n'est pas arrêtée et continue de s'écarter de l'axe du cylindre, l'écoulement devient instable. À l'aide des trois équations précédentes, on en déduit que l'écoulement est stable si :

$$\begin{aligned} (r + dr)^2 V^2(r + dr) &> r^2 V^2(r) \\ \frac{d}{dr}(r^2 V^2(r)) &> 0 \\ \frac{d}{dr}(r^4 \Omega^2(r)) &> 0 \\ \frac{d}{dr}(r^2 \Omega(r)) &> 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Pour un écoulement de Couette circulaire :

$$\Omega = A + \frac{B}{r^2} \quad (\text{D.6})$$

avec :

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (\text{D.7})$$

on a :

$$\frac{d}{dr}(r^2 \Omega(r)) = 2rA \quad (\text{D.8})$$

La condition de stabilité devant être valide pour tout r , on trouve finalement le critère de stabilité suivant :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (\text{D.9})$$

ANNEXE E FORMULES DE GÉNIE MÉCANIQUE

E.1 Formule de Bour

La formule de Bour est utilisée pour obtenir la dérivée temporelle d'un vecteur quelconque dans un repère donné. Soit le vecteur \mathbf{U} exprimé dans un repère R_1 quelconque par $\mathbf{U} = x \cdot \mathbf{x}_1 + y \cdot \mathbf{y}_1 + z \cdot \mathbf{z}_1$.

La dérivée temporelle de \mathbf{U} dans le repère R_1 est :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{R_1} = \dot{x} \cdot \mathbf{x}_1 + \dot{y} \cdot \mathbf{y}_1 + \dot{z} \cdot \mathbf{z}_1 \quad (\text{E.1})$$

Si maintenant on dérive \mathbf{V} dans un repère différent R_0 , on a :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{R_0} = \dot{x} \cdot \mathbf{x}_1 + \dot{y} \cdot \mathbf{y}_1 + \dot{z} \cdot \mathbf{z}_1 + x \cdot \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} + y \cdot \frac{d\mathbf{y}_1}{dt} + z \cdot \frac{d\mathbf{z}_1}{dt} \quad (\text{E.2})$$

En effet, si le repère R_1 se déplace par rapport au repère R_0 , les vecteurs composant la base du repère R_1 peuvent évoluer dans le temps dans le repère R_0 . Pour des vecteurs unitaires d'une base, on sait que :

$$\left(\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} \right)_{R_1} = \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{x}_1 \quad (\text{E.3})$$

Avec $\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0}$ le vecteur de vitesse de rotation du repère R_1 en fonction du repère R_0 . Donc :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{R_0} = \dot{x} \cdot \mathbf{x}_1 + \dot{y} \cdot \mathbf{y}_1 + \dot{z} \cdot \mathbf{z}_1 + x \cdot \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{x}_1 + y \cdot \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{y}_1 + z \cdot \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{z}_1 \quad (\text{E.4})$$

Donc, finalement :

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{U} \quad (\text{E.5})$$

E.2 Composition des vitesses

On considère les deux référentiels, $R_0 = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ défini comme référentiel absolu et $R_1 = (O', \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ défini comme référentiel relatif. Le point M est défini dans les deux repères par :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= x \cdot \mathbf{x} + y \cdot \mathbf{y} + z \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{O'M} &= x' \cdot \mathbf{x}_1 + y' \cdot \mathbf{y}_1 + z' \cdot \mathbf{z}_1 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

On définit les vitesses de M dans chacun des référentiels R_0 et R_1 , respectivement nommées vitesse absolue et vitesse relative :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(M/0) &= \left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)_{R_0} \\ \mathbf{V}(M/1) &= \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R_1}\end{aligned}\tag{E.7}$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{OM} &= \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M} \\ \left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)_{R_0} &= \left(\frac{d\mathbf{OO'}}{dt} \right)_{R_0} + \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R_0}\end{aligned}\tag{E.8}$$

Le premier terme est la vitesse de O', centre de R_1 , dans le repère R_0 . Le second terme est décomposé par le biais de la formule de Bour afin de retrouver la vitesse de M dans le repère R_1 :

$$\left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O'M}\tag{E.9}$$

Donc on obtient la formule de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(M/0) &= \mathbf{V}(M/1) + \left(\mathbf{V}(O'/0) + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O'M} \right) \\ \mathbf{V}_a(M) &= \mathbf{V}_r(M) + \mathbf{V}_e(M)\end{aligned}\tag{E.10}$$

Avec $\mathbf{V}_a(M)$, la vitesse absolue de M, $\mathbf{V}_r(M)$, sa vitesse relative et $\mathbf{V}_e(M)$ appelée vitesse d'entraînement de M.

E.3 Composition de l'accélération

On définit les accélérations de M dans chacun des référentiels R_0 et R_1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(M/0) &= \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} \right)_{R_0} \\ \mathbf{A}(M/1) &= \left(\frac{d^2\mathbf{O'M}}{dt^2} \right)_{R_1}\end{aligned}\tag{E.11}$$

On a vu que :

$$\mathbf{V}(M/0) = \left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\mathbf{OO'}}{dt} \right)_{R_0} + \left(\frac{d\mathbf{O'M}}{dt} \right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O'M}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} &= \left(\frac{d\mathbf{V}(M/0)}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d^2\mathbf{OO}'}{dt^2}\right)_{R_0} + \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{d\mathbf{O}'M}{dt}\right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O}'M \right)_{R_0} \\ \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} &= \mathbf{A}(O'/0) + \left(\frac{d\mathbf{V}(M/1)}{dt}\right)_{R_0} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \wedge \mathbf{O}'M + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \left(\frac{d\mathbf{O}'M}{dt}\right)_{R_0} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

On applique la formule de Bour aux premier et dernier termes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} &= \mathbf{A}(O'/0) + \left(\left(\frac{d\mathbf{V}(M/1)}{dt}\right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{V}(M/1) \right) \\ &\quad + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \wedge \mathbf{O}'M + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \left(\left(\frac{d\mathbf{O}'M}{dt}\right)_{R_1} + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O}'M \right) \\ \left(\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} &= \mathbf{A}(O'/0) + \mathbf{A}(M/1) + 2\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{V}(M/1) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \wedge \mathbf{O}'M \\ &\quad + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O}'M) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

On obtient finalement la formule de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M/0) &= \mathbf{A}(M/1) \\ &\quad + \left(\mathbf{A}(O'/0) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \wedge \mathbf{O}'M + \boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{O}'M) \right) \\ &\quad + 2\boldsymbol{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \mathbf{V}(M/1) \\ \mathbf{A}_a(M) &= \mathbf{A}_r(M) + \mathbf{A}_e(M) + \mathbf{A}_c(M) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Avec :

\mathbf{A}_a Accélération absolue du point M dans le repère R_0

\mathbf{A}_r Accélération relative du point M dans le repère R_1

\mathbf{A}_e Accélération d'entraînement du point M créée par le déplacement de R_1 dans R_0

\mathbf{A}_c Accélération de Coriolis du point M créée par un mouvement de rotation uniforme de R_1 par rapport R_0