

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONCEPTION BAYÉSIENNE DE MÉCANISMES ET QUANTIFICATION DE  
L'ÉQUITÉ APPLIQUÉES À LA CONSTRUCTION D'HORAIRE PERSONNALISÉS

LÊ NGUYÊN HOANG  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
NOVEMBRE 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONCEPTION BAYÉSIENNE DE MÉCANISMES ET QUANTIFICATION DE  
L'ÉQUITÉ APPLIQUÉES À LA CONSTRUCTION D'HORAIRES PERSONNALISÉS

présentée par : HOANG Lê Nguyễn

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. EL HALLAOUI Issmaïl, Ph. D., président

M. SOUMIS François, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. ZACCOUR Georges, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. DELAGE Érick, Ph. D., membre

M. JAILLET Patrick, Ph. D., membre

**DÉDICACE**

*À mes parents et ma sœur,  
et à tous amis du labos...*

## REMERCIEMENTS

“*Les hommes construisent trop de murs et pas assez de ponts.*” (Isaac Newton)

À mi-chemin entre la recherche opérationnelle et la théorie des jeux, entre les preuves formelles et les simulations numériques, entre la théorie et la pratique, l’essence de mon travail de doctorat réside dans une mariage de divers univers des mathématiques appliquées. Étant un amoureux du voyage, attiré par toutes sortes de curiosités locales, les va-et-vient m’auront été non seulement appréciables, mais aussi enrichissants et fructueux — quoique parfois laborieux et fatigants. C’est avec une immense joie que je vous propose de goûter aux fruits de mon périple mathématique<sup>1</sup>.

Si j’ai pu me situer à l’interface de divers domaines, c’est grâce aux solides ancrages que j’ai pu trouver de chaque côté. D’un côté, j’ai eu la chance de bénéficier du soutien de François Soumis. Fin août 2010, alors que je venais de débarquer de Paris, je me suis rendu, en pantacourts, au bureau de François. Il me dit alors : « Bonjour, je vois que tu as de gros mollets. Quand j’ai rencontré ma femme, j’ai vu qu’elle avait de gros mollets. Ça veut dire qu’elle était active. C’est bien ça. Tu joues-tu au squash ? » François Soumis est un exemple fascinant. Sa décontraction n’a d’égal que son génie. Il nous est ainsi arrivé à de nombreuses reprises de finir nos rendez-vous sur une longue dissertation au sujet mon mauvais positionnement au squash ou sur les liens cachés entre certains aspects pointus de ma recherche et son mémoire de maîtrise en topologie pure. François a aussi maintes fois fait des remarques d’une perspicacité sidérante sur divers aspects de mon travail de recherche. Ce fut pour moi une incroyable chance d’avoir été son étudiant, et je l’en remercie profondément.

C’est au cocktail des *Journées d’Optimisation* en mai 2011 que j’ai rencontré mon autre directeur de recherche, alors que je venais parler à Sylvain Sorin pour lui dire que j’avais assisté à son cours de théorie des jeux à l’École Polytechnique ParisTech. Sylvain Sorin se tourna alors vers Georges Zaccour, et me présenta. Georges rétorqua : « Ah mais je le connais ! C’est celui qui passe son temps à jouer aux cartes dans la salle à manger ! » Georges est une figure incontournable en théorie des jeux dynamiques, et ce fut un immense bonheur de devenir par la suite son étudiant. Il m’incita régulièrement à présenter mon travail en séminaires, et chaque présentation m’aida énormément à structurer mes idées. On passa également des journées entières à écrire et réécrire mes articles de recherche, en retravaillant continuellement la terminologie pour la conformer au mieux à l’auditoire auquel les articles étaient destinés. Georges a fait preuve d’une patience remarquable. Il est aussi une source

---

1. Voir le Bulletin du GERAD, Volume 11, no. 1, 2014, pages 10-12.

d'inspiration inégalée, et je ne peux que reconnaître la chance d'avoir eu un tel exemple à suivre. Je l'en remercie vivement.

Je tiens aussi à remercier Guy Desaulniers, qui fut mon co-directeur pendant quelques temps, mon directeur de jury lors de l'examen prédoctoral et un important contributeur de mon quatrième article de thèse. Concernant ce dernier article, je remercie aussi François Lessard, dont le travail de programmation a été vital, ainsi que Mahsa Elahipanah pour la modélisations des préférences, l'utilisation du logiciel MACBETH et l'implantation de fonctionnalités.

Au cours de ma recherche, il m'est souvent arrivé de déranger d'autres étudiants et post-doctorants en leur expliquant mes problèmes et en leur demandant des suggestions. Ces opportunités d'échange ont fréquemment conduit à de nouvelles idées, qui venaient parfois du simple effort de formulation du problème que je devais alors être amené à faire ou des questions inattendues que ces autres étudiants me posaient.

J'ai tout autant — sinon plus encore — apprécié les échanges dans le sens inverse, c'est-à-dire ces moments où les autres étudiants venaient m'expliquer leurs problèmes et me demander mon avis. Si je n'ai pas souvent su aider les autres, j'ai au moins eu, à chaque fois, le bonheur de découvrir une autre sujet fascinant des mathématiques appliquées. Entre autres, j'ai appris :

- l'algèbre tropicale avec Pascal Benschimol,
- l'optimisation stochastique avec Rémi Pacqueau,
- les graphes extrêmes avec Claire Lucas,
- l'optimisation en temps réel avec Antoine Legrain,
- la théorie de la viabilité avec Pablo Andres-Domenech et Claire Bernard,
- les tournées de véhicules stochastiques avec Vincent Huart,
- l'optimisation robuste avec Charles Gauvin,
- la stabilisation des variables duales avec Hocine Bouarab,
- le simplexe intégral avec Samuel Rosat,
- la brisure des automorphismes de graphes avec Sivan Altınakar,
- le *cloud computing* avec Federico Larumbe,
- l'optimisation en réseaux avec Jean-Bertrand Gauthier,
- les algorithmes génétiques avec Marilène Cherkesly,
- la régulation des marchés de l'électricité avec Sébastien Débia,
- les algorithmes de plus courts chemins par étiquetage avec André Linhares,
- le contrôle et les jeux à champs moyen avec Vishwa Puduru Reddy,
- l'optimisation de boîtes noires avec Bastien Talgorn,
- les modèles Bayésiens en statistiques avec Nazim Regnard,

- la grammaire avec Maria Isabel Restrepo,
- la réglementation du trafic aérien avec Thibault Lehouillier et Jérémy Omer,
- l’optimisation concave sur un polyèdre avec Maïkel Geagea,
- la génération de scénarios avec Simon Proulx,
- les jeux coopératifs avec Amal Feriani.

Je remercie tous ces étudiants d’avoir pris le temps de m’instruire.

Même si cela ne fait pas parti de ma thèse, je remercie aussi fortement tous les participants à l’expérience que j’ai conduite sur les stratégies induites par l’inclusion des préférences dans la construction d’horaires. Ces participants étaient regroupés en cinq équipes :

**A-Team** : Thibault Lehouillier, Nadir Amaïoua, Sara Séguin et Jean-Bertrand Gauthier.

**Girl Power** : Claire Bernard, Hélène Michon-Lacaze, Camille Froger et Amal Feriani.

**Fantastic Four** : Iman Dayarian, Patricia Gillet, Adham Ismaïl et Maria Isabel Restrepo.

**Delta Force** : Frédéric Quesnel, Charles Gauvin, Sébastien Débia et Maïkel Geagea.

**X-Men** : Geoffroy Chevalier, Quentin Laudereau, Nazim Regnard et Alexis Mocellin.

Je reviendrai brièvement sur cette expérience dans la conclusion de cette thèse.

Si j’ai pu aller au bout de mon doctorat, c’est aussi grâce à la bonne ambiance que j’ai fréquemment retrouvé au laboratoire. C’est pourquoi, je remercie également ceux que j’ai moins souvent dérangés, mais dont l’amitié m’aura été chère, notamment lors des innombrables parties de cartes du midi. Outre ceux que j’ai déjà cités, je remercie Bertrand Velut, Mélisende Brazeau, Hélène-Sarah Bécotte-Boutin, Martin Cousineau, Romain Montagné, Aïda Reguigui, Marnie Vodounou, Hadhami Dbira, Anthony Guillou, Thibault Barbier, Richard Kidwiringira, Elnaz Kanini, Nahid Massoudi, Elspeth Adams, Anthony Guillou, Xiaoxi Xu, Mathilde Pereyga, Matthieu Delorme, Julien Keutchayan, ainsi que les stagiaires trop nombreux pour être cités. J’ai une pensée particulière pour mes anciens camarades de bureau avec qui on a souvent passé des heures à discuter, parfois du travail et souvent d’autres choses. Ainsi, je remercie fortement Mehdi Towhidi, Camille Froger, Atoosa Kasirzadeh, Jean-Bertrand Gauthier, Samuel Rosat, mais aussi et surtout Marilène Cherkesly. Ces personnes ont eu le mérite de faire de mon arrivée au bureau un moment agréable de mes journées.

Je tiens aussi à remercier les organismes qui m’ont reçus et/ou financés. Je remercie l’entreprise partenaire KRONOS de son financement et de sa collaboration, et je suis reconnaissant envers l’École Polytechnique de Montréal, HEC Montréal et le GERAD pour leurs accueils et/ou financements. Je remercie aussi l’ACFAS pour l’organisation du concours *voire soutenance en 180 secondes* auquel j’ai eu l’honneur et le plaisir — et l’angoisse — de parti-

ciper. Gagner l'édition de l'École Polytechnique et participer<sup>2</sup> au concours inter-universitaire à l'Université Laval à Québec furent des moments solennels et mémorables de ma thèse. À ce sujet, je remercie le professeur Thomas Gervais pour son aide, son soutien et ses conseils.

Enfin, je remercie tous ceux qui, au cours des deux dernières années, m'ont soutenu dans le vaste projet de vulgarisation scientifique que j'ai été amené à initier au cours de ma thèse, à savoir le site Science4All.org. En y travaillant et en bénéficiant des critiques de mes camarades au GERAD, je me suis ainsi trouvé une véritable passion dans l'effort de communication des sujets à la pointe des mathématiques et des sciences à un public averti mais non expert. Dans un monde où la recherche est de plus en plus spécialisée et à l'heure où, pourtant, les moyens de communications n'ont jamais été aussi efficaces, je suis persuadé que le fait de rendre des sujets techniques intelligibles est amené à devenir une étape incontournable de la recherche académique. Ma thèse m'a conforté dans cette conviction, et il ne fait nul doute que la vulgarisation sera amenée à jouer un rôle crucial dans mon futur.

---

2. Je vous invite à regarder ma thèse en 180 secondes : <http://www.youtube.com/watch?v=34EIL-EoCxA>.

## RÉSUMÉ

Le problème de la construction des quarts est un problème classique de recherche opérationnelle. Le progrès dans leurs modélisations mathématiques et l'amélioration des puissances de calculs informatiques ont permis d'intégrer des facteurs de plus en plus complexes. L'objectif de cette thèse est d'inclure les préférences des employés à la construction d'horaires. Toutefois, au-delà des difficultés algorithmiques, cet objectif pose de nombreuses problématiques, à la fois nouvelles, générales et fondamentales. Les employés auront-ils intérêt à révéler leurs préférences de manière honnête ? Peut-on s'assurer de ne pas désavantager les employés honnêtes ? Peut-on garantir l'équité entre les employés ? Comment modéliser mathématiquement cette équité de manière convaincante ? Comment utiliser le concept d'équité pour optimiser la construction de quarts avec préférences des employés ? Nombre de ces questions élémentaires sont en lien avec la théorie des jeux. Mais les théories existantes sont insuffisantes pour adresser la complexité du contexte de la construction de quarts personnalisés. Ceci nous amènera à introduire une nouvelle perspective sur la théorie des jeux, puissante et adaptée aux calculs informatiques, qui se fonde sur un nouvel objet mathématique appelé fonction de retour. Au lieu de se focaliser sur les stratégies, la fonction de retour propose de se concentrer sur les conséquences des actions des individus sur l'issue qui leur est consacrée. Alors que ces fonctions de retour se prêtent mieux aux calculs, de façon cruciale, elles possèdent pourtant toute l'information nécessaire à l'étude des jeux. C'est pourquoi nous utiliserons alors ce nouvel objet mathématique pour une optimisation heuristique de mécanismes favorisant l'honnêteté dans un contexte simplifié de partage équitable de gâteau. Par ailleurs, nous introduirons de nouvelles définitions de l'équité fondées sur des concepts de distributions, d'échanges et de réseaux sociaux. Ces concepts viennent naturellement compléter la théorie des fonctions d'utilité de von Neumann and Morgenstern [1944], qui ne permet pas de déterminer de manière unique et sensée une quantification de la satisfaction des employés. Enfin, en dernier lieu, nous appliquerons les concepts de cette thèse à des instances de construction de quarts avec préférences des employés. Ceci fera intervenir la théorie du multicritère, ainsi qu'un lourd programme d'optimisation en nombres entiers. Toutefois, faute de temps et à cause de la complexité des calculs numériques, nous ne chercherons pas à favoriser l'honnêteté dans cette application.



## ABSTRACT

Shift scheduling is a classical problem of operations research. As mathematical modelings progress and computational capabilities improve, more complex issues are addressed. The main goal of this PhD thesis is to include employees' preferences. Yet, beside algorithmic considerations, our goal raises various new, general and fundamental questions. Will employees have incentives to reveal their preferences truthfully? Can we make sure that truthful employees are not disadvantaged? Can we guarantee the fairness of the shift allocation? How can fairness be formalized mathematically? How can we use a formal definition of fairness to optimize shift scheduling with employees' preferences? Many of these questions are related to game theory. However, game theory yields insufficient tools to address the complexity of a shift scheduling scheme. This will lead us to introduce a new perspective on game theory, which we will argue to be both insightful and more computable. This perspective is based on a new object called the return function. Instead of concentrating on strategies, this return function drives focus on the way individuals' actions affect their outcomes. While return functions appear to be more tractable, importantly, they still contain all relevant information for the study of games. Hence, we will use this object to design a heuristical method to optimize over incentive-compatible mechanisms in a simplified fair cake-cutting problem. Furthermore, we will introduce new measures of fairness that are based on ideas of distributions, trades and social networks. These measures will rely on a natural completion of the utility theory by von Neumann and Morgenstern [1944], which does not yield a unique and sensible way of quantifying one's satisfaction. Finally, we apply concepts to difficult instances of shift scheduling with employees' preferences. This application will require a bit of multicriteria theory, as well as a large-scale integer optimization program. Unfortunately though, because of a lack of time and the hardness of algorithmic computations, we shall not aim at favoring fairness in this application.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	viii
ABSTRACT . . . . .	ix
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	.xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Jeux bayésiens et fonction de retour . . . . .	1
1.2 Honnêteté et conception de mécanisme . . . . .	3
1.3 Normalisation des utilités et mesure de l'équité . . . . .	5
1.4 Multi-attribut et quarts personnalisés . . . . .	6
1.5 Structure de la thèse . . . . .	8
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	9
2.1 Théorie des jeux non-coopérative . . . . .	9
2.1.1 Jeu bayésien . . . . .	10
2.1.2 Théorie algorithmique des jeux . . . . .	11
2.1.3 Jeu à champs moyens . . . . .	13
2.2 Conception de mécanisme . . . . .	14
2.2.1 Honnêteté . . . . .	15
2.2.2 Principe de révélation . . . . .	15
2.2.3 Enchères . . . . .	16
2.2.4 Choix social . . . . .	18
2.3 Équité . . . . .	20
2.3.1 Partage proportionnel . . . . .	20

2.3.2	Partage sans jalousie . . . . .	21
2.3.3	Partage équitable . . . . .	22
2.3.4	Deux autres méthodes . . . . .	22
2.3.5	Partage juste fortement honnête . . . . .	23
2.3.6	Solution de Nash . . . . .	24
2.3.7	Équité max-min . . . . .	25
2.4	Recherche opérationnelle et planification . . . . .	25
2.4.1	Horaires personnalisés dans le secteur aérien . . . . .	26
2.4.2	Construction de quarts . . . . .	28
2.4.3	Affectation des activités . . . . .	29
2.5	Analyse multicritère . . . . .	30

### CHAPITRE 3 ARTICLE 1 : THE RETURN FUNCTION : A NEW COMPUTABLE PERSPECTIVE ON BAYESIAN-NASH EQUILIBRIA . . . . . 32

3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Model and Equilibrium . . . . .	35
3.2.1	Return Function . . . . .	37
3.3	Computation of Equilibria with the Return Function . . . . .	41
3.3.1	Computing the Return Function . . . . .	42
3.3.2	Implementation . . . . .	43
3.4	Illustrative Example : A Cake-Cutting Problem . . . . .	44
3.4.1	The Model . . . . .	44
3.4.2	A Simple Two-Player Example . . . . .	45
3.4.3	Analytical Analysis . . . . .	48
3.4.4	The Non-Linear Component . . . . .	50
3.4.5	A More General Example . . . . .	50
3.5	Theoretical Convergence . . . . .	52
3.5.1	Continuity of $\phi$ . . . . .	54
3.5.2	Best-Reply Dynamics . . . . .	56
3.5.3	Discussion of Hypotheses . . . . .	58
3.5.4	Approached Best-Reply Dynamics . . . . .	60
3.6	Conclusion . . . . .	61
3.7	Proof of Theorem 3 . . . . .	61
3.8	Proof of Theorem 8 . . . . .	63
3.9	Compléments à l'article . . . . .	67

CHAPITRE 4	ARTICLE 2 : A HEURISTIC OPTIMIZATION OF BAYESIAN INCENTIVE-COMPATIBLE CAKE-CUTTING . . . . .	69
4.1	Introduction . . . . .	70
4.2	General Model . . . . .	72
4.2.1	Direct Mechanisms . . . . .	72
4.2.2	Revelation Principle . . . . .	74
4.2.3	Return Function . . . . .	75
4.3	Algorithms . . . . .	76
4.3.1	Fictitious Play . . . . .	76
4.3.2	Revelation Mechanisms . . . . .	77
4.3.3	Principal's Objective Value . . . . .	77
4.4	Application to Cake-Cutting Problem . . . . .	78
4.4.1	Model . . . . .	78
4.4.2	Ideal Mechanism . . . . .	79
4.4.3	Parameterized Mechanisms . . . . .	81
4.4.4	Computational Results . . . . .	81
4.5	Concluding Remarks . . . . .	84
4.6	Compléments à l'article . . . . .	85
CHAPITRE 5	ARTICLE 3 : MEASURING UNFAIRNESS FEELING IN ALLOCATION PROBLEMS . . . . .	88
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Background and Preliminaries . . . . .	90
5.2.1	Generalization to Non-Additive Utility Functions . . . . .	93
5.3	Social Normalization . . . . .	96
5.4	Social Fairness . . . . .	99
5.4.1	Links to Other Fairness Definitions . . . . .	101
5.4.2	Non-Existence of Socially Normalized Utilities . . . . .	104
5.5	Local Fairness . . . . .	106
5.6	Conclusion . . . . .	110
5.7	Appendix . . . . .	111
CHAPITRE 6	ARTICLE 4 : NORMALIZATIONS OF EMPLOYEE PREFERENCES IN PERSONNEL SCHEDULING . . . . .	112
6.1	Introduction . . . . .	113
6.2	Preferences and Scheduling Program . . . . .	115
6.2.1	Linear Multi-Attribute Utility Functions . . . . .	116

6.2.2	Shift Scheduling without Preferences . . . . .	118
6.2.3	Shift Scheduling with Preferences . . . . .	119
6.3	Multi-Attribute Normalizations . . . . .	121
6.3.1	Extreme Value Normalization . . . . .	121
6.3.2	Affinely Multi-Attribute Correlated Social Normalization . . . . .	122
6.4	Results . . . . .	128
6.4.1	Social Normalization . . . . .	129
6.4.2	EVN-SSP . . . . .	130
6.4.3	AMACSN-SSP . . . . .	133
6.4.4	EVN-SSP versus AMACSN-SSP . . . . .	135
6.5	Conclusion . . . . .	137
CHAPITRE 7 DISCUSSIONS GÉNÉRALES . . . . .		138
CHAPITRE 8 CONCLUSION . . . . .		142
8.1	Synthèse des travaux de thèse . . . . .	142
8.1.1	Fonction de retour . . . . .	142
8.1.2	Optimisation heuristique des mécanismes . . . . .	143
8.1.3	Nouvelles définitions de l'équité . . . . .	144
8.1.4	Construction de quarts avec préférences . . . . .	145
8.2	Développements en cours . . . . .	145
8.2.1	Convergence des fonctions de retour . . . . .	146
8.2.2	Analyse théorique du partage de gâteau optimal . . . . .	146
8.2.3	Stratégies dans la construction de quarts avec préférences . . . . .	146
8.3	Futures recherches . . . . .	147
8.3.1	Approximations algorithmiques des fonctions de retour . . . . .	147
8.3.2	Théorie des catégories appliquée aux jeux . . . . .	147
8.3.3	Jeux évolutionnaires bayésiens . . . . .	148
RÉFÉRENCES . . . . .		149

## LISTE DES TABLEAUX

Table 4.1	Ideal values. . . . .	80
Table 4.2	Values of the revelation of the ideal mechanism. . . . .	80
Table 4.3	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 2$ and $ K  = 2$ . . . . .	82
Table 4.4	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 2$ and $ K  = 3$ . . . . .	82
Table 4.5	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 5$ and $ K  = 2$ . . . . .	82
Table 4.6	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 5$ and $ K  = 3$ . . . . .	83
Table 4.7	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 20$ and $ K  = 2$ . . . . .	83
Table 4.8	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 20$ and $ K  = 3$ . . . . .	83
Table 4.9	Best values of revelations of parameterized mechanisms. . . . .	84
Table 4.10	Ideal values for uniform belief. . . . .	85
Table 4.11	Values of the revelation of the ideal mechanism for uniform belief. . . . .	85
Table 4.12	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 2$ and $ K  = 2$ . . . . .	85
Table 4.13	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 2$ and $ K  = 3$ . . . . .	85
Table 4.14	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 5$ and $ K  = 2$ . . . . .	86
Table 4.15	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 5$ and $ K  = 3$ . . . . .	86
Table 4.16	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 20$ and $ K  = 2$ . . . . .	86
Table 4.17	Values of the revelations of parameterized mechanisms for $n = 20$ and $ K  = 3$ . . . . .	86
Table 4.18	Best values of revelations of parameterized mechanisms. . . . .	86
Table 6.1	Averages and standard deviations of SN utilities for AMACSN shift scheduling and EVN shift scheduling. . . . .	136

Table 6.2	Averages and standard deviations of CSN utilities for AMACSN shift scheduling and EVN shift scheduling. . . . .	136
-----------	---	-----

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Variables . . . . .	37
Figure 3.2	Diagram depicting the best-reply correspondences . . . . .	40
Figure 3.3	Bayesian-Nash Equilibrium with 2 Players and 2 Attributes . . . . .	47
Figure 3.4	Slopes of Linear Regressions of Best-Replies to Return Function as Iterations Increase . . . . .	47
Figure 3.5	Mechanism of the Cake-Cutting Problem with 2 Attributes and 2 Players	48
Figure 3.6	Level Curves of a Player's Expected Utilities at a Bayesian-Nash Equilibrium . . . . .	50
Figure 3.7	S-Shape of Computed Bayesian-Nash Equilibrium and the Best-Reply Strategy to a Linear Regression of the Computed Bayesian-Nash Equilibrium . . . . .	51
Figure 3.8	Bayesian-Nash Equilibrium with 20 Players and 3 Attributes . . . . .	52
Figure 3.9	Slopes and Least Average Squares of Linear Regressions for 20 Players and 3 Attributes . . . . .	53
Figure 3.10	Choice of the set $U$ , represented as the shaded area . . . . .	60
Figure 3.11	Bayesian-Nash Equilibrium with 20 Players and 3 Attributes when $\tilde{\theta}$ is uniform . . . . .	67
Figure 3.12	Slopes and Least Average Squares of Linear Regressions for 20 Players and 3 Attributes when $\tilde{\theta}$ is uniform . . . . .	68
Figure 5.1	Socially normalized utility is a comparison of one's utility with a benchmark given by utilities of trades . . . . .	97
Figure 5.2	Exactness, EF, SF and PF and their interrelations. The dotted arrow " <i>bound</i> " from fairness criterion $A$ to SF means that $A$ implies a bound of $1/4$ on the degree of SF. . . . .	103
Figure 5.3	Relations between the different fairness definitions . . . . .	109
Figure 6.1	Convergence of slopes as we iterate operators <b>Regress</b> and <b>Multipliers</b> . . . . .	127
Figure 6.2	Consistent standard utility functions computed with the cumulative allocations given by EVN-SSP in two instances, which will be analyzed in the next Section. These standard utility functions are the ones we use to compute the AMACSN utility functions. . . . .	129
Figure 6.3	EVN utility values from the solutions of EVN-SSP. . . . .	131
Figure 6.4	EVN partial utility values as functions of weights. . . . .	131
Figure 6.5	Employees' SN utilities for shifts given by EVN-SSP. . . . .	132



Figure 6.6	Relation between SN, CSN and EVN. . . . .	132
Figure 6.7	CSN partial utilities as a function of weights. Lines represent linear regressions that make up the best-fit affine standard utility functions. . . . .	133
Figure 6.8	Partial utilities with AMACSN . . . . .	134
Figure 6.9	Utilities with AMACSN . . . . .	134
Figure 6.10	AMACSN compared to CSN and SN . . . . .	135
Figure 6.11	SN utilities of the AMACSN-SSP (pale red) compared to SN utilities of EVN-SSP (dark blue). . . . .	136

**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

BR	Best-Reply
BN	Bayesian-Nash
BIC	Bayesian Incentive-Compatible
DSIC	Dominant Strategy Incentive-Compatible
EF	Envy-Freeness
PF	Proportional Fairness
SN	Social Normalization
CSN	Correlated Social Normalization
EVN	Extreme-Value Normalization
AMACSN	Affine Multi-Attribute Correlated Social Normalization
SS	Shift-Scheduling
SSP	Shift-Scheduling with Preferences
MACBETH	Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

La recherche opérationnelle est une sous-discipline des mathématiques concernée par l'optimisation globale de systèmes complexes. Il arrive souvent que ces systèmes concernent diverses parties prenantes. L'existence d'un cadre multi-agent pose alors des problématiques qui dépassent de loin le domaine usuel de l'optimisation. Dans cette thèse, nous allons adresser trois de ces problématiques et appliquer nos réponses à un problème de construction de quarts de travail incluant les préférences des employés.

### 1.1 Jeux bayésiens et fonction de retour

La première question est la suivante. Dans un cadre multi-agent, chaque agent n'a-t-il pas intérêt à tirer la couverture de son côté ? En particulier, s'il nous faut inclure les préférences des agents dans une certaine prise de décision, les agents auront-ils l'incitatif à ne pas nous révéler leurs préférences de manière honnête ? La question peut paraître tordue. Après tout, si l'on maximise la satisfactions des agents, il semble que les agents ont tout intérêt à nous révéler leurs vraies préférences.

Aussi, prenons un exemple pour illustrer. Supposons que Charlotte, Valentine et Gustave partagent un gâteau moitié chocolat et moitié vanille. Charlotte adore le chocolat, Valentine adore la vanille et Gustave le gourmand veut des deux. Imaginons maintenant qu'un algorithme cherche à maximiser la somme des utilités des trois parties prenantes. Cet algorithme va naturellement être amené à donner le chocolat à celui qui en désire le plus (Charlotte), et la vanille à celui qui en désire le plus (Valentine). Mais alors, Gustave, s'il révèle ses préférences honnêtement, se retrouvera sans part de gâteau. Il aurait en fait mieux fait de prétendre aimer le chocolat plus que Charlotte !

Dans un cadre moins idéalisé, anticiper le comportement stratégique optimal peut être autrement plus complexe. Une difficulté vient du fait que la stratégie optimale de chaque joueur dépend des stratégies des autres. Pour décrire cette interaction des stratégies, Nash [1950a] a introduit le concept d'**équilibre de Nash** qui est depuis devenu un pilier de la théorie des jeux. Un équilibre de Nash est une affectation de stratégies aux joueurs telle que, étant données les stratégies des autres, la stratégie optimale de chacun est précisément celle qui lui est assignée. On remarque alors que, puisqu'au joueur n'a intérêt à dévier de l'équilibre de Nash, tous sont amenés à persister dans cet état d'équilibre.

Toutefois, le concept d'équilibre de Nash se restreint aux jeux à information dite complète, c'est-à-dire aux jeux pour lesquels les joueurs connaissent parfaitement les préférences des autres joueurs et les conséquences de toutes actions. Cette hypothèse réductrice est en général violée. Ceci a amené Harsanyi [1967, 1968a,b] à modéliser l'incomplétude de l'information que possèdent les joueurs par des croyances bayésiennes, c'est-à-dire des distributions de probabilité sur l'information inconnue. Si Gustave ne sait pas exactement ce que Charlotte veut, il imagine peut-être qu'il y a une chance sur deux ou plus qu'elle préfère le chocolat à la vanille. Ou, peut-être, au vu de ses goûts prononcés pour les brownies, qu'il y a 2 chances sur 3 qu'elle préfère légèrement le chocolat et 1 chance sur 3 qu'elle le préfère largement. Ce cadre de jeu à information incomplète joué par des joueurs bayésiens — c'est-à-dire des joueurs qui ont une croyance probabiliste sur l'information incomplète qu'ils ont de l'univers — est ce que l'on appelle depuis un jeu **bayésien**.

Bien que le concept d'équilibre de Nash se généralise naturellement aux jeux bayésiens, l'étude analytique et numérique de ces jeux à information incomplète est considérée ardue. En général, il est illusoire d'espérer calculer des solutions analytiques. En effet, la simple question de l'implémentation des stratégies bayésiennes est peu évidente. C'est particulièrement le cas quand l'ensemble des actions que les joueurs peuvent entreprendre est de grande taille, ou infini. Ces difficultés ont représenté un obstacle majeur au développement de l'étude des jeux bayésiens. Une contribution majeure de cette thèse consiste en un contournement de cet obstacle.

La clé de ce contournement réside dans l'introduction du concept de **fonction de retour**. Formellement, la fonction de retour associe l'action d'une personne à la distribution probabiliste du résultat induite par cette action. De façon plus informelle, il s'agit d'un objet que chacun d'entre nous estime et utilise à longueur de journée, lorsque l'on cherche à répondre à la question : « si je fais cela, que peut-il arriver, et avec quelle probabilité ? » En fait, dans de nombreux cas, il est possible de remplacer la terminologie « fonction de retour » par « intuition éclairée » (ou « *educated guess* »), ce qui peut parfois aider à la compréhension du concept.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, les fonctions de retour représentent un parfait substitut aux stratégies dans l'étude des jeux. Au lieu de s'attarder sur les interactions stratégiques des joueurs, on peut, de façon quasi-équivalente, s'intéresser à la manière dont les fonctions de retour s'influencent mutuellement. En d'autres termes, la correspondance de meilleure réponse dans l'espace des stratégies, si chère aux modèles classiques de théorie des jeux, est naturellement associée à une correspondance similaire dans l'espace des fonctions de retour. En particulier, tout équilibre de Nash des stratégies peut être traduit en un équilibre de Nash des fonctions de retour.

Si stratégies et fonctions de retour ne sont finalement que deux faces d'une même pièce, ces deux objets mathématiques ont toutefois des propriétés bien différentes. Contrairement aux stratégies, les fonctions de retour ont l'avantage de parfaitement se prêter à l'apprentissage d'un jeu. Après tout, lorsque l'on reçoit une main de tarot, il n'est pas évident d'induire les stratégies des autres pour en déduire une stratégie optimale. En revanche, ce qui paraît plus naturel, c'est d'utiliser l'expérience des parties précédentes, et de retenir ce qui a bien marché ou non pour en déduire une bonne stratégie. Cette approche repose essentiellement sur la fonction de retour, qui induit des expériences passées la manière dont les actions affectent les résultats du jeu. Dans ce cadre, la fonction de retour, contrairement aux stratégies, se prête naturellement à des méthodes de statistiques et d'optimisation pour être bien implantée.

Pour justifier la pertinence et l'importance des fonctions de retour, nous présenterons dans cette thèse à la fois des résultats théoriques fondamentaux, des tests numériques de calcul d'équilibre de Nash et une preuve de convergence des algorithmes de calcul fondée sur des considérations topologiques. De plus, nous montrerons que trois grands développements récents de la théorie des jeux (l'*ironing* de Myerson [1981], les jeux à champs moyens de Huang et al. [2006] et Lasry and Lions [2007] et la généralisation du *fictitious play* de Rabinovich et al. [2013]) peuvent en fait naturellement se réinterpréter en termes de fonctions de retour. Au vu de leur omniprésence implicite dans la littérature, les fonctions de retour semblent être amenées à jouer un rôle important dans la théorie des jeux modernes.

## 1.2 Honnêteté et conception de mécanisme

Si aujourd'hui la fonction de retour me semble être une avancée avant tout conceptuelle, ma recherche a longtemps utilisé cet objet plutôt en tant qu'outil de calcul pour la conception de mécanisme<sup>1</sup>. Cette sous-discipline de la théorie des jeux a récemment été récompensée par l'attribution d'un prix Nobel d'économie à ses fondateurs Leonid Hurwicz, Erick Maskin et Roger Myerson en 2007. Elle adresse l'importante question suivante. Comment inclure les préférences d'individus rationnels<sup>2</sup> dans une prise de décision collective ?

Comme nous l'avons vu avec l'exemple du partage de gâteau entre Charlotte, Valentine et Gustave, la difficulté vient du fait que les individus rationnels n'ont, en général, pas intérêt à révéler leurs préférences de manière honnête. Remarquons que ce phénomène est une conséquence du **mécanisme** d'allocations, c'est-à-dire de la manière dont les préférences révélées sont utilisées pour choisir une décision collective. Un mécanisme est alors dit **honnête** si les participants au mécanisme, appelés joueurs, ont intérêt à révéler leurs préférences de

---

1. Le titre original de mon premier article est *The Return Function : A New Tool for Mechanism Designers*. Il comprenait les deux premiers articles de la thèse en un.

2. Un individu est rationnel s'il optimise ses décisions en fonction de ses objectifs.

manière honnête. Or, malheureusement, en général, les mécanismes ne sont pas honnêtes.

Pour comprendre cela, prenons le point de vue d'un agent prenant part à un mécanisme. Il sait que l'information qui lui est demandée de révéler (ses préférences) ne sera pas utilisée dans le but de satisfaire au mieux sa seule personne, puisque la décision collective concernera l'ensemble des joueurs. Au vu de ce constat, il semble improbable que sa stratégie optimale soit l'honnêteté. C'est là tout le problème de la conception de mécanisme. Parce que l'on cherche une solution pour le groupe, et non pour chacun des individus, il semble impossible de déterminer un mécanisme honnête.

Arrêtons nous un moment pour remettre en question l'attention portée aux mécanismes honnêtes. Après tout, à quoi bon s'assurer de l'honnêteté des mécanismes ? N'est-il pas imaginable que, malgré des révélations malhonnêtes, la décision collective soit finalement satisfaisante ? On peut avancer quatre raisons pour lesquelles il est important de s'assurer de l'honnêteté des mécanismes.

1. Un mécanisme honnête est avant tout un mécanisme qui ne défavorise pas les individus honnêtes. D'un point de vue éthique, un tel mécanisme est bien entendu préférable. De plus, on peut défendre l'idée selon laquelle une société dont les individus sont habitués à l'honnêteté est aussi plus agréable, et donc, plus souhaitable.
2. Les équilibres de Nash d'un jeu sont en général multiples. Dans de nombreux cas, ceci limite sévèrement notre capacité à prédire l'état d'équilibre dans lequel un jeu va tomber<sup>3</sup>. C'est ce que l'on appelle le problème de la sélection des équilibres. Cependant, dans un jeu où il est demandé aux joueurs de révéler leurs préférences, on peut naturellement considérer qu'il y a une nette asymétrie entre l'honnêteté et les autres stratégies. Ainsi, si l'honnêteté est un équilibre de Nash, il est alors un équilibre plus « naturel », ce qui résout le problème de sélection des équilibres.
3. Si un mécanisme ne connaît pas les préférences des parties prenantes, il est cependant naturel de penser qu'il en possède un *a priori*, que l'on peut modéliser par une croyance bayésienne. Mais alors, surtout si cet *a priori* est bon, il peut être souhaitable de l'utiliser pour concevoir le mécanisme même. Si maintenant l'on utilise des mécanismes honnêtes, les informations révélées par les parties prenantes seront plus fiables, et pourront être utilisées pour affiner l'*a priori* pour des utilisations futures du mécanisme. En d'autres termes, la condition d'incitatifs à l'honnêteté est gage de bon apprentissage des préférences des agents, et donc de bonne estimation de notre croyance bayésienne.

---

3. En fait, il n'est même pas garanti que l'on tombe dans un équilibre de Nash, ce qui pose notamment la question de leurs stabilités.

4. Enfin, l'une des plus belles inventions de la théorie de la conception de mécanismes est le principe de révélation (Gibbard [1973], Holmstrom [1977], Dasgupta et al. [1979], Myerson [1979]). Il s'agit d'une méthode systématique pour construire des règles de décisions collectives pour lesquelles les individus ont intérêt à révéler leurs préférences de manière honnête, à partir de n'importe quelle autre règle de décision et d'un équilibre pour cette règle de décision. En d'autres termes, s'il existe un mécanisme qui donne des résultats satisfaisants avec des individus rationnels (et non honnêtes), alors il existe un mécanisme honnête qui fait tout aussi bien avec les mêmes individus rationnels<sup>4</sup>.

En particulier, le principe de révélation est régulièrement utilisé pour justifier la restriction de la théorie de la conception de mécanismes à l'étude des mécanismes honnêtes. Pourtant, il nous dit plus que cela. En effet, si l'on peut calculer un équilibre de Nash (ce que la fonction de retour permet de faire) alors on peut appliquer le principe de révélation pour construire toute une classe de mécanismes pour lesquels les individus ont intérêt à être honnête. Il ne nous reste alors plus qu'à choisir au sein de cette classe un mécanisme optimal. Cette idée est au cœur de mon deuxième article de recherche qui montre l'efficacité de cette approche dans un problème de partage de gâteau.

### 1.3 Normalisation des utilités et mesure de l'équité

Pour déterminer quels sont les mécanismes optimaux, encore faut-il savoir ce que l'on entend par optimal. Plus précisément, quel est notre objectif, lorsque l'on conçoit notre mécanisme de construction d'horaires ? Dans notre cas, si la satisfaction moyenne des employés est une préoccupation majeure, il peut aussi être souhaitable de garantir une certaine équité entre les employés. Mais l'équité, qu'est-ce ?

Pour Rawls [1999], l'équité est fortement liée à l'idée de la comparaison des biens d'un individu à l'autre. Cette idée philosophique avait déjà été explorée d'un point de vue mathématique par Steinhaus [1948], qui imagea le problème de l'équité dans une société par un partage de gâteau entre  $n$  prétendants. Imaginez ce gâteau hétérogène : certains morceaux ont davantage de chocolats, d'autres ont un morceau de fraise, et d'autres encore ont un glaçage à l'érable. Ajoutez à cela le fait que les prétendants au gâteau ont différentes préférences.

---

4. On peut contraster ces arguments avec deux faiblesses des mécanismes honnêtes.

- (a) Décrire des préférences est un sujet de recherche en tant que tel, surtout dans des cas complexes comme l'affectation des horaires. Il peut alors être souhaitable de se réduire à des mécanismes dont les espaces d'actions sont plus restreints et plus simples.
- (b) Pour appliquer le principe de révélation, il est nécessaire de déterminer un (ou le plus souhaitable des) équilibre de Nash d'un jeu bayésien. Il s'agit d'un problème difficile, ce qui rend l'utilisation du principe de révélation difficile en pratique.

Certains veulent du chocolat, et d'autres ne jurent que par l'érable. Lorsque l'on considère une découpe du gâteau et une affectation des parts aux différents prétendants, comment déterminer si le partage aura été équitable ?

Dans la littérature du partage de gâteau, deux réponses très pertinentes sont mises en avant pour répondre à cette question. D'un côté, un partage est dit **proportionnel** si chacun des  $n$  prétendants reçoit une part qui représente selon lui au moins  $1/n$  du gâteau. Une réinterprétation intéressante de cette définition revient à dire que chacun des prétendants aime sa part au moins autant que la moyenne des parts des autres. D'un autre côté, un partage est dit **sans-jalousie** si chaque prétendant préfère sa part à n'importe quelle autre part. Il n'est pas surprenant de voir que la pertinence de ces deux définitions est liée au fait qu'elle se fonde sur la comparaison des biens entre les individus.

Toutefois, ces deux définitions ont le défaut de ne pas être quantifiable. Un partage est proportionnel ou non, et il n'est pas clair comment on pourrait quantifier à quel point il est proportionnel. Or, dans l'optique d'une maximisation de l'équité, il nous serait préférable d'en avoir une description quantifiable. Cette problématique nous a conduit à introduire plusieurs nouvelles définitions quantifiables de l'équité, qui se fondent toutes sur la comparaison des biens entre individus. Ces définitions reposent sur ladite **normalisation sociale** des satisfactions, qui consiste à comparer le bien d'un individu à la distribution statistique des biens des autres, à travers le jugement de l'individu par sa fonction d'utilité. En s'appuyant sur cette normalisation, nous définissons une mesure d'équité dite sociale.

Pour être plus réaliste, nous avons aussi proposé d'affiner la normalisation sociale en incluant une structure de réseau social qui décrit les interactions et/ou les ressemblances entre individus. Après tout, en pratique, les individus prêtent plus d'attention aux biens des individus de leur entourage qu'aux biens des individus avec qui ils n'ont aucun contact. De même, un ingénieur aura tendance à se comparer aux autres ingénieurs plutôt qu'à des médecins. Ceci nous a alors conduit à des concepts d'équité locale. La quantification de l'équité forme le troisième axe de cette thèse.

#### 1.4 Multi-attribut et quarts personnalisés

Le dernier chapitre de cette thèse applique la modélisation mathématique de l'équité à la construction de quarts de travail personnalisés. La construction de quarts est au cœur du monde de la recherche opérationnelle, dont Dantzig [1954] est un pionnier, et il s'agit du gagne-pain de la compagnie KRONOS partenaire de ce projet de recherche.

Malgré les limitations théoriques à un calcul systématiquement exact et rapide qui ont été révélées par Karp [1972], le problème de la planification optimale a connu d'impressionnantes



avancées au cours du dernier demi-siècle, depuis les premiers modèles de programmation linéaire de Kantorovich [1940] et Dantzig [1951]. D'un côté, de nouvelles méthodes de calcul ont été introduites. Parmi les plus importantes, on peut citer l'algorithme par séparation et évaluation (*branch-and-cut*), les méthodes de plans coupants (*cutting planes*) et la génération de colonne. Dans de nombreux modèles, notamment en planification, ces méthodes se sont révélées terriblement efficaces, divisant les temps de calculs par plusieurs ordres de grandeur. Toutefois, lorsque le problème devient trop combinatoire, c'est-à-dire quand les solutions sont en trop grand nombre et possèdent trop peu de structure, elles ne permettent pas de résolution exacte. Dans ces cas, il nous faut alors se contenter de méthodes approchées, appelées *heuristiques*.

D'un autre côté, dans le cas plus spécifique de la construction d'horaires pour les employés d'une entreprise, de nouvelles formulations mathématiques du problème ont été introduites par Moondra [1976], et ensuite améliorées par Bechtold and Jacobs [1990] et Aykin [1996], notamment pour une meilleure description des pauses des employées. Ces modélisations ont non seulement le bon goût de capturer l'essence du problème de la planification, mais elles ont aussi l'avantage d'être parfaitement adaptées aux méthodes de calculs élaborées en optimisation. D'un point de vue mathématique, elles cherchent à minimiser les coûts de l'entreprise en couvrant au mieux la demande en employés en tout temps.

Un sujet souvent laissé de côté par les chercheurs en planification d'horaires est celui des préférences des employés. Il y a bien sûr une raison à cela. En ajoutant ces préférences, le problème de la planification se complexifie énormément. Mais avec la croissance des puissances de calcul, le moment semble venu de s'y attaquer. Cette thèse propose ainsi un nouvel algorithme qui, tout en s'assurant que les coûts pour l'entreprise ne soient pas trop élevés, maximise les satisfactions des employés. Mais, au delà de l'algorithme, de nombreux problèmes se posent. Plusieurs ont déjà été soulevés dans cette introduction, mais il en reste un : la description des préférences des employés.

Pour ce faire, nous avons choisi la méthode MACBETH introduite par Bana e Costa and Vansnick [1994]. Pour déterminer quantitativement une préférence, cette méthode s'appuie uniquement sur des questions qualitatives telles que : « à quel point préférez-vous commencer la journée à 8 heures plutôt qu'à 10 heures ? » En bout de ligne, on obtient une description des préférences sous forme de fonctions d'utilité linéaires multi-attributs. Cela veut dire que la satisfaction globale d'un individu est décomposée en une somme pondérée  $\sum w_k u_k$  de satisfactions partielles  $u_k$  pour les différents critère  $k$ . Les critères  $k$  sont par exemple les congés de la semaine, l'heure de début des horaires de travail ou le nombre d'heures travaillées.

La structure particulière des satisfactions que nous considérons nous a amenés à construire une normalisation spécifique, qui se fonde sur la fonction d'utilité standard  $\psi$ . Cette normali-

sation consiste à remarquer que l'importance qu'un individu attache à un attribut est corrélée avec la satisfaction qu'il va en avoir. Or, si  $w_k$  est le poids de l'individu pour un attribut  $k$ , et si  $\psi_k(w_k)$  est une bonne approximation de la satisfaction qu'il va avoir pour cet attribut, sa satisfaction globale s'écrira alors  $\sum_k w_k \psi_k(w_k)$ . Ceci nous conduit à normaliser les poids de sorte que cette expression soit constante (et non la somme des poids  $\sum_k w_k$ ).

Cette normalisation des poids, ajoutée à la normalisation sociale des satisfactions pour les critères (voir Section 1.3), définit notre normalisation des fonctions d'utilité linéaires multi-attribut. C'est cette normalisation que nous appliquons aux préférences des employés, avant d'intégrer celles-ci dans un algorithme d'optimisation de leurs satisfactions. D'une part, l'utilisation de cette normalisation se justifie par des considérations conceptuelles. D'autre part, les résultats que nous présentons dans cette thèse montrent une nette amélioration de l'optimisation suite à cette normalisation. Ils constituent l'aboutissement du quatrième axe de cette thèse.

## 1.5 Structure de la thèse

La suite de cette thèse est décomposée en trois parties. Dans le chapitre 2, nous ferons une revue de littérature critique et détaillée. Puis, nous incluons dans les chapitres 3 à 6 les quatre articles formant le cœur de cette thèse. Le chapitre 3 introduit la fonction de retour, les algorithmes associées et les preuves théoriques de convergence. Le chapitre 4 applique le principe de révélation à des mécanismes paramétrés pour une optimisation heuristique du partage de gâteau. Le chapitre 5 définit de nouvelles normalisations des fonctions d'utilité Von Neumann - Morgenstern et en déduit des nouvelles mesures d'équité. Le chapitre 6 introduit de nouvelles normalisations des fonctions d'utilité multi-attributs et les applique numériquement à des instances de construction d'horaires personnalisés. Les chapitres 7 et 8 récapitulent et concluent ensuite la thèse.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous allons faire une revue critique et étendue de la littérature reliée au travail de recherche de cette thèse. Ce chapitre est divisé en quatre parties qui correspondent aux différents axes de recherche. Nous irons plus loin dans cette revue de littérature que ce qui a été fait dans les articles de recherche, en brassant notamment très large.

#### 2.1 Théorie des jeux non-coopérative

La théorie des jeux est partie des idées fondatrices de von Neumann [1928], qui ont plus tard été reprises, récapitulées et consolidées dans l'œuvre séminale de von Neumann and Morgenstern [1944]. Au cœur de la théorie, on trouve le concept de stratégies. Prenons l'exemple du *chifoumi* pour illustrer. Dans ce jeu, deux joueurs s'opposent. Ils doivent choisir entre pierre, feuille et ciseau. La pierre bat le ciseau, le ciseau bat la feuille et la feuille bat la pierre. L'issue du jeu est donc directement déterminé par les **actions** de chaque joueur. Un tel jeu n'a pas vraiment d'action « gagnante ». En effet, peu importe quelle action le joueur 1 choisit, le joueur 2 peut le faire perdre. Si le joueur 1 joue pierre, le joueur 2 peut jouer feuille pour gagner.

La situation change si l'on se concentre non pas sur les actions mais sur les choix randomisés d'actions, que von Neumann appela **stratégies** (ou que l'on appelle parfois *stratégies mixtes*). En particulier, on peut constater qu'il existe une stratégie « non-perdante », qui consiste à jouer chaque action avec probabilité  $1/3$ . Dès lors, le joueur 2 ne peut plus s'assurer de gagner, même en moyenne. Le théorème minimax de von Neumann [1928] prouve que dans tout jeu à deux joueurs, si la somme des gains des deux joueurs est nulle (en d'autres termes, s'ils jouent l'un contre l'autre), alors chacun possède une stratégie qui lui assure un gain égal à la perte minimale que l'autre peut s'assurer.

Plus tard, Nash [1950a, 1951] va plus loin, en s'intéressant au cas plus général d'un jeu à  $n$  joueurs, et où la somme des gains n'est plus nécessairement nulle. En s'appuyant sur les stratégies de von Neumann, Nash introduit le concept aujourd'hui connu sous le nom d'**équilibre de Nash**. Appelons *profil* de stratégies le  $n$ -tuple des stratégies des joueurs. Un équilibre de Nash est un profil de stratégie tel que, pour tout joueur, la stratégie qui lui est assignée est une meilleure réponse aux stratégies assignées aux autres. En d'autres termes, si tous les joueurs jouent l'équilibre de Nash, aucun n'a intérêt à en dévier unilatéralement.

Un point fort de ce concept découle du théorème d'existence prouvé par Nash [1951]. Ce théorème affirme que, dans ton jeu à  $n$  joueurs, si les ensembles d'actions des joueurs sont tous finis, alors le jeu admet au moins un équilibre de Nash.

### 2.1.1 Jeu bayésien

Le cadre défini par Nash [1950a, 1951] est un cadre où l'information est complète. Tous les joueurs savent précisément ce que les autres veulent. Or, en pratique, il arrive souvent que des situations d'interaction stratégiques incluent des problématiques d'incomplétude de l'information. Cette remarque est à la base des articles séminaux de Harsanyi [1967, 1968a,b], qui définissent la théorie des jeux dit bayésiens. Myerson [2004] est un très bon résumé de ces articles. Dans le formalisme des jeux bayésiens, chaque joueur possède une information privée, appelée **type**, que seul lui connaît et qu'il n'a pas forcément intérêt à révéler. L'information incomplète de chaque joueur concernant les types des autres joueurs est alors complétée par une croyance bayésienne. Formellement, cette croyance est une distribution de probabilité sur l'ensemble des types des autres joueurs.

Pour étudier ses jeux bayésiens, Harsanyi dû adapter les stratégies de von Neumann. Dès lors, une stratégie pour un joueur donné est un processus de décision qui tient compte du type de ce joueur pour déterminer un choix randomisé d'actions. Formellement, une stratégie est donc une fonction qui à un type associe une distribution de probabilité sur l'espace d'actions. On peut imaginer cette idée avec l'exemple du tarot. Le type d'un joueur est alors l'ensemble des cartes qu'il a en main, et sa stratégie dicte sa réaction à ce type.

Dans ce cadre, il est possible de définir le concept de meilleure réponse à un profil de stratégies des autres joueurs. Pour un joueur donné et des profils de stratégies des autres joueurs, sa meilleure réponse est celle qui maximise l'espérance de ses gains. Il en découle ensuite naturellement le concept d'équilibre de Bayes-Nash. À savoir, un tel équilibre est un profil de stratégies tel que, pour chaque joueur, sa meilleure réponse au profil de stratégies des autres est la stratégie qui lui assignée par le profil.

Lorsque les ensembles de types et d'actions sont finis, Harsanyi a prouvé que tout jeu bayésien pouvait se réduire à un jeu à information complète, où les actions sont remplacées par des stratégies déterministes. Comme le nombre de ces stratégies déterministes est alors fini, l'équilibre de Bayes-Nash coïncide avec l'équilibre de Nash du jeu à information complète associé, ce qui prouve au passage que l'équilibre de Bayes-Nash existe.

Nous soulevons toutefois une difficulté rarement relevée concernant les jeux bayésiens. Contrairement au cas à information complète, même lors d'un jeu répété, il ne semble pas possible pour un joueur donné d'induire les stratégies des autres simplement en observant les actions suivies par ceux-ci. En effet, les stratégies ici dépendent des types. Or, il arrive

que ces types restent des informations privées à l'issue du jeu. C'est le cas par exemple au poker, où de nombreuses mains se finissent sans qu'aucun joueur ne révèle son jeu. Dès lors, le concept de meilleure réponse aux stratégies des autres ne semble plus adéquat, ce qui remet en question la pertinence de la notion d'équilibre de Bayes-Nash.

Heureusement, notre fonction de retour apportera une réponse à cette remise en question, en confortant le statut de l'équilibre de Bayes-Nash, à la lumière d'un nouvel angle de vue sur la théorie des jeux.

### 2.1.2 Théorie algorithmique des jeux

Une autre remise en question de la pertinence de la notion d'équilibre de (Bayes-)Nash vient de la théorie algorithmique des jeux. Cette théorie est née lorsque Nisan and Ronen [1999] attira l'attention de la communauté informatique sur l'importance des jeux dans l'algorithmique distribuée. Depuis, la théorie algorithmique des jeux est devenue un domaine de recherche très actif. Le livre de Nisan [2007] recueille ainsi de nombreuses avancées récentes, et Roughgarden [2010] est une très bonne introduction au sujet.

Une question centrale de la théorie algorithmique des jeux est l'existence d'algorithmes capables de calculer les équilibres de Nash en un temps raisonnable. Il s'avère que dans le cas le simple où il y a deux joueurs et où le jeu est à information complète, le problème du calcul d'un équilibre de Nash est PPAD-complet. Les problèmes PPAD n'étant pas des problèmes de décisions, il est technique faux de dire qu'ils sont inclus dans NP<sup>1</sup>. Mais, de façon grossière, il a été prouvé que tout problème PPAD est plus simple qu'un problème difficile de la classe NP. Toutefois, Gilboa and Zemel [1989] ont prouvé que de nombreux problèmes de théorie des jeux sont eux NP-complet, comme, par exemple, déterminer si un jeu a plusieurs équilibres de Nash ou déterminer s'il existe un équilibre de Nash qui satisfait une propriété non triviale<sup>2</sup>. Pour cette raison entre autres, beaucoup de chercheurs ont tendance à penser que la classe PPAD contient strictement la classe P, ce qui impliquerait qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial de calcul des équilibres de Nash. Or, comme le souligne Kamal Jain en parlant d'un équilibre de Nash, « si un ordinateur ne peut pas le trouver, le marché ne peut pas non plus. »

Il y a toutefois plusieurs limites à ce raisonnement fondé sur la théorie de la complexité. D'une part, la qualité de ne pas être P signifierait simplement qu'il n'existe pas d'algorithme

---

1. La classe NP est l'ensemble des problèmes qui pose la question de l'existence de solutions, sachant que le test de savoir si un candidat explicite est une solution se fait en temps polynomial. A contrario, P est l'ensemble des problèmes de décision résolubles en temps polynomial (et donc, raisonnable). La question «  $P = NP?$  » est l'un des 7 problèmes du Millenium. On admet communément que l'on a  $P \neq NP$ , ce qui signifie que beaucoup de problèmes algorithmiques ne sont pas résolubles en temps raisonnable.

2. Par exemple, déterminer s'il existe un équilibre de Nash où le joueur 1 a une utilité supérieure à 0 est NP-complet.

qui, étant donné n'importe quel jeu fini, peut toujours calculer un équilibre de Nash en temps polynomial. Ceci n'exclut pas la possibilité de calculer les équilibres d'une classe importante de jeux, ou encore, de calculer bon nombres d'équilibres approchés en un temps raisonnable.

D'autre part, les résultats mentionnés ci-dessus sont valables pour des jeux où le nombre d'action croît, mais pas le nombre de joueurs — ils sont d'ailleurs en général prouvé pour  $n = 2$  joueurs. Toutefois, lorsque l'on cherche à faire croître le nombre de joueurs, on tombe sur des problèmes de représentativité des jeux. En effet, si l'on considère des ensembles d'actions  $A$  pour tous les joueurs, et un nombre  $n$  de joueurs, le nombre de données requises pour définir un jeu à information complète est de l'ordre  $n|A|^n$ . La taille des entrées de l'algorithme de calcul des équilibres de Nash croît donc de manière exponentielle en le nombre de joueurs, ce qui signifie que le jeu n'est même pas représentable dans un espace mémoire raisonnable. Ceci explique que la théorie algorithmique des jeux s'est d'abord attardé sur des modèles avec un petit nombre de joueurs.

Pour adresser des cas avec plus de joueurs, Kearns et al. [2001] proposent un modèle de jeux sur un graphe, où l'utilité d'un joueur n'est influencée que par son action et celles de ses voisins dans le graphe. Ainsi, si chaque joueur n'a que  $d$  voisins environ, la description de sa fonction d'utilité peut se réduire à environ  $|A|^d$  données, et le jeu complet à  $n|A|^d$ , ce qui est désormais une fonction linéaire de  $n$ . Une autre approche pour réduire la quantité d'information en entrée nécessaire pour décrire un jeu est de considérer que, pour tout joueur, les autres joueurs sont symétriques (ou du moins les effets des actions des autres joueurs sur l'utilité d'un joueur donné auquel cas on parle de jeux anonymes). C'est le cas des jeux de *congestion* ou des systèmes de votes.

On peut réinterpréter ces deux approches comme suit. Dans les deux cas, chaque joueur n'est concerné que par une issue du jeu, et non par le profil des actions de tous les autres joueurs. Dans le premier cas, l'issue du jeu pour un joueur donné correspond au profil des actions de ses voisins. Dans le second cas, il s'agit des fréquences auxquelles les différentes actions sont jouées (par exemple, dans un vote, les nombres de voix pour les différentes alternatives). L'introduction d'un espace d'issues plus restreint que l'ensemble des profils d'actions est une étape essentielle du raisonnement de notre premier axe de recherche, de laquelle émerge ensuite naturellement le concept de fonction de retour.

La question de savoir si, pour ces classes de jeux dits succincts, le calcul des équilibre de Nash peut se faire en temps polynomial en le nombre de joueurs, est encore une question ouverte. Des résultats remarquables ont été découverts par Papadimitriou and Roughgarden

[2008], qui fournissent des algorithmes polynomiaux pour calculer les équilibres corrélés<sup>3 4</sup>. Ces équilibres corrélés forment un ensemble plus large que l'ensemble des équilibres de Nash, et, en particulier, on ne sait pas comment déduire un équilibre de Nash d'un équilibre corrélé, mais il s'agit déjà d'un pas important dans la compréhension des jeux sous la lumière de la théorie de la complexité algorithmique.

### 2.1.3 Jeu à champs moyens

Suite aux travaux séminaux de Huang et al. [2006] et Lasry and Lions [2007], la théorie des jeux à champs moyens a connu un succès resplendissant avec de nombreuses avancées et applications (voir par exemple Achdou and Capuzzo-Dolcetta [2010], Guéant et al. [2011], Bauso et al. [2012]). Pour comprendre ce succès, il nous faut signaler que la résolution des jeux différentiels était jusque là essentiellement limitée aux cas simples à deux joueurs. À l'inverse, le paradigme des jeux à champs moyens est de s'attarder sur des jeux différentiels dont le nombre de joueurs est si grand qu'il est raisonnable de le modéliser par un nombre infini (et continu) de joueurs. Dès lors, on ne décrira plus les joueurs individuellement ; on les décrira à l'aide de distributions probabilistes et de champs de vecteurs. Cette approche est inspirée de la physique statistique qui applique ces idées à la modélisation de flux de particules.

Comme dans les jeux de congestion ou les votes, on peut remarquer que les jeux à champs moyens considèrent que, pour tout joueur, il y a une symétrie entre les autres joueurs. Ceci a attiré l'attention des chercheurs sur la description de la trajectoire de la masse par une distribution de probabilité  $m$  qui oublie les étiquettes des joueurs. Ainsi,  $m(x, t)$  décrit simplement la fraction des joueurs se trouvant dans (ou autour de) l'état  $x$  à l'instant  $t$ .

Maintenant, en supposant que l'utilité d'un joueur donné dépende de son contrôle  $u$  et de la trajectoire  $m$  de la masse, et si l'on admet connue la trajectoire  $m$  de la masse, les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman permettent de déterminer des conditions nécessaires de l'optimalité d'un contrôle  $u$  pour le joueur donné. Dans des cas simples (comme le cas linéaire-quadratique), ces conditions sont aussi suffisantes. Ceci nous permet de déterminer de façon unique le contrôle optimal  $u$  de tout joueur, étant donné la trajectoire  $m$  de la masse. En supposant de plus que les joueurs sont symétriques, ce contrôle optimal peut être décrit par un champs de vecteur qui, à tout état  $x$  et tout instant  $t$ , donne la direction optimale de

---

3. Un équilibre corrélé est une distribution de probabilité sur les profils de stratégies tel que, pour chaque tirage selon cette loi et pour tout joueur, la stratégie que le profil tiré lui assigne est sa meilleure stratégie sachant que c'est celle qui lui a été assignée.

4. Pour certaines classes de jeux succincts, Papadimitriou and Roughgarden [2008] détermine même un algorithme polynomial de calcul des « meilleurs » équilibres corrélés. Ce qui est intéressant, c'est que, en général, ces meilleurs équilibres corrélés sont meilleurs que tout équilibre de Nash.

mouvement  $u(x, t)$ .

Toutefois, le problème que ce raisonnement pose est que l'on ne connaît pas la trajectoire  $m$  de la masse a priori. Pis, cette trajectoire  $m$  de la masse est en fait a posteriori une conséquence des contrôles optimaux  $u$  des joueurs. Ce lien entre contrôles des joueurs et trajectoire de la masse (auquel on peut ajouter des perturbations browniennes) est décrit par les équations de Fokker-Planck (aussi appelées équations de Kolmogorov vers l'avant). Ces équations déduisent la trajectoire  $m$  de la masse induite par les contrôles  $u$  des joueurs.

Si on récapitule, les équations de Fokker-Planck déduisent la trajectoire  $m$  de la masse induite par les contrôles  $u$  des joueurs, tandis que les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman induisent les contrôles optimaux  $u$  des joueurs au vu de la trajectoire  $m$  de la masse. Cette correspondance entre  $u$  et  $m$  est au cœur des équations des jeux à champs moyens. Dans cette thèse, nous montrerons qu'elle est une instance de la relation entre les stratégies  $s$  et les fonctions de retours  $\varphi$ , et que les jeux à champs moyens sont donc un cas particulier de nos modèles.

## 2.2 Conception de mécanisme

Dans le cadre de notre construction de quarts, permettre aux employés d'annoncer leurs préférences conduit à l'introduction d'un jeu bayésien. En effet, pour les employés, leurs préférences sont des types, et le choix des préférences (honnêtes ou non) qu'ils révèlent sont leurs actions. En particulier, l'honnêteté n'est que l'une des nombreuses stratégies possibles, et il semble improbable que ce soit une stratégie optimale. Tout dépend en fait de l'usage que l'on fait des préférences révélées. Voilà qui nous amène au problème de conception de mécanisme.

La conception de mécanisme consiste en la mise en place d'un jeu dont on souhaite obtenir certaines garanties. L'exemple le plus commun de mécanisme est celui de l'enchère. Étant donné un vendeur possédant un bien, et plusieurs acheteurs ayant différentes estimations de la valeur de ce bien, comment construire un procédé permettant de choisir un acheteur et un prix de vente? Ce contexte peut être analysé comme étant un jeu dans lequel l'un des agents est un joueur particulier, puisque c'est à lui de concevoir le jeu que joueront les autres joueurs. Le problème de conception de mécanismes est un problème largement abordé dans la littérature, suite aux travaux séminaux de Gibbard [1973], Dasgupta et al. [1979] et Myerson [1981] entre autres.



### 2.2.1 Honnêteté

Le concept d'honnêteté est un concept fondamental en conception de mécanisme. On peut faire la remarque suivante. Si l'on connaissait les préférences de tous les joueurs, on pourrait (en principe) prendre la meilleure décision possible. Malheureusement, ces préférences nous sont en général inconnues. Aussi, une idée de mécanisme correspondrait à demander aux joueurs de les révéler. Mais alors, on court le risque de travailler avec des préférences qui ne nous ont pas été révélées de manière honnête. Pour s'assurer de la fiabilité des données révélées par les employés, le mieux reste encore de s'assurer que l'honnêteté est leur meilleure stratégie.

La notion d'optimalité de la stratégie honnête d'un mécanisme ou d'un jeu est ici encore ambiguë. Dans la littérature, on distingue trois définitions de l'honnêteté d'un jeu :

- Un jeu sera dit fortement honnête (*Dominant Strategy Incentive-Compatibility, DSIC*) si, quelques soient les stratégies des autres, tout joueur a intérêt à être honnête.
- Un jeu sera dit à équilibre honnête (*Bayesian Nash Incentive-Compatibility, BIC*) si l'état honnête du jeu est un équilibre de Bayes-Nash . De manière équivalente, cela revient à dire que, sachant que les autres joueurs jouent honnêtement, tout joueur a intérêt à être honnête.
- Un jeu sera dit faiblement honnête (*strategy-proofness*, par Brams and Taylor [1995]) si l'honnêteté n'est pas dominée. En d'autres termes, si un joueur dévie de sa stratégie honnête, il existe un ensemble de stratégies des autres joueurs qui conduira notre joueur à regretter de ne pas avoir été honnête.

Bien entendu, tout mécanisme fortement honnête est à équilibre honnête, et tout mécanisme à équilibre honnête est faiblement honnête.

### 2.2.2 Principe de révélation

Le problème de comment construire un mécanisme à équilibre honnête a été en parti résolu par le principe de révélation (Gibbard [1973], Dasgupta et al. [1979], Holmstrom [1977], Myerson [1979]). Selon celui-ci, à tout équilibre de Bayes-Nash d'un mécanisme donné correspond un mécanisme à équilibre honnête, dont les paiements à l'état honnête sont égaux à ceux de l'équilibre de Bayes-Nash du mécanisme initial.

En effet, considérons un mécanisme initial et un de ses équilibres de Bayes-Nash. Cet équilibre correspond à une stratégie pour chaque joueur. La stratégie de chaque joueur est un choix d'action étant donné son type. Il s'agit donc d'une fonction qui à un type associe une action. Le mécanisme dit de **révélation** peut être construit par la composition fonctionnelle du mécanisme initial par l'équilibre de Bayes-Nash. En d'autres termes, pour un profil de

préférences révélées des joueurs, on applique les stratégies de l'équilibre de Bayes-Nash à ces préférences révélées. Il obtient alors des préférences prétraitées par l'équilibre de Bayes-Nash. Ce sont ces préférences prétraitées qui sont utilisées comme entrées du mécanisme initial, duquel on déduit un résultat. Le processus dans son intégralité qui aux préférences révélées associe le résultat final est le mécanisme de révélation.

De façon cruciale, par construction, le mécanisme de révélation joué par des joueurs honnêtes ressort le même résultat que celui qui est donné par le mécanisme initial lorsque les joueurs jouent l'équilibre de Bayes-Nash. En particulier, les gains des joueurs sont alors identiques. Mais, de plus, on peut montrer que le mécanisme de révélation est à équilibre honnête. En effet, si un joueur dévie de l'honnêteté dans le mécanisme de révélation, sa préférence prétraitée ne sera pas celle de l'équilibre de Bayes-Nash du mécanisme initial. Par conséquent, l'issue qui lui sera consacrée sera, par définition de l'équilibre de Bayes-Nash, moins bien que si la préférence prétraitée était celle de l'équilibre de Bayes-Nash, comme cela aurait été le cas si le joueur avait été honnête en premier lieu.

On peut illustrer le principe de révélation avec un exemple d'enchères. Une enchère très répandue est celle de l'enchère à l'anglaise, où le vendeur annonce un prix initial. Les acheteurs peuvent alors annoncer un prix strictement supérieur au dernier prix annoncé. Le dernier acheteur à annoncer un prix devient l'acheteur du bien et l'achète au prix ainsi annoncé. L'équilibre de Bayes-Nash associé à ce jeu conduit l'acheteur ayant la plus grande estimation de la valeur du bien à l'acheter au prix du second acheteur (plus  $\epsilon > 0$ ). L'application du principe de révélation à cette enchère conduit à l'enchère au prix du second acheteur, décrit par Vickrey [1961], et appliquée aujourd'hui dans de nombreux domaines. Cette enchère conduit au même résultat que l'enchère à l'anglaise, mais a l'avantage de se jouer de manière simple et rapide, et d'être à équilibre honnête<sup>5</sup>.

### 2.2.3 Enchères

La théorie des enchères représente un succès majeur dans la théorie de la conception des mécanismes, avec notamment l'incontournable mécanisme Vickrey [1961] - Clarke [1971] - Groves [1973] (VCG). Son principe consiste à sélectionner une décision globale qui maximise le surplus collectif. Le paiement monétaire d'un joueur donné est ensuite fixé par le coût que sa présence impute au surplus collectif des autres joueurs.

Par exemple, dans le cas d'une enchère d'un seul bien, le surplus est maximisé lorsque ce bien est attribué à l'acheteur A qui en attribue la plus grande valeur. De plus, parce qu'il est là, aucun autre acheteur n'a pu profiter du bien. Or, s'il n'avait pas été là, c'est l'acheteur B attribuant la seconde plus grande valeur au bien qui l'aurait eu. Le surplus collectif des

---

5. En fait, il est même fortement honnête.

joueurs autres que A serait alors passé de zéro à la valuation du bien par l'acheteur B. Le coût que la présence de A impute au surplus collectif des autres joueurs est donc égal à la valuation du bien par l'acheteur B. C'est ce coût qui définit le paiement du joueur A. Ainsi, au final, le bien ira au joueur A au prix de la valuation du bien par l'acheteur B. L'enchère VCG coïncide alors avec l'enchère au prix du second acheteur décrit par Vickrey [1961].

Outre l'aspect naturel selon lequel chacun doit payer le coût que sa présence impute aux autres, l'enchère VCG peut se vanter des belles propriétés qu'elle possède. Ainsi, par construction, elle a l'avantage de maximiser le surplus collectif. Mais de plus, et c'est moins évident mais tout aussi important, le mécanisme VCG a l'avantage majeur d'être fortement honnête. Autrement dit, pour tout joueur, l'honnêteté est une stratégie dominante.

Si la maximisation du surplus collectif peut paraître intéressante dans certains cas — par exemple, quand l'organisateur de l'enchère est l'État d'un pays — elle n'est en général pas l'objectif du vendeur. En effet, dans la plupart des cas, un vendeur cherchera davantage à maximiser le profit qu'il tirera de l'enchère. Un résultat surprenant et fondamental prouvé par Myerson [1981] affirme que, dans le cas d'un bien unique à vendre, tout mécanisme maximisant le surplus collectif est équivalent en termes de revenus pour le vendeur pour des acheteurs rationnels. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de l'équivalence des revenus. Il dit que le profit d'un vendeur est le même, qu'il utilise un mécanisme VCG, une enchère au prix du premier acheteur (dit à l'anglaise) ou encore une enchère où chacun paie ce qu'il mise, pourvu que les acheteurs jouent l'équilibre de Bayes-Nash.

L'on pourrait alors croire que toutes ces enchères sont donc optimales pour un vendeur. Il n'en est rien. L'article séminal de Myerson [1981] met à jour une astuce remarquable et étonnante. Il prouve que, dans le cas d'un bien unique à vendre, l'enchère qui maximise l'espérance de gains du vendeur nécessite de ne pas nécessairement vendre le bien à celui qui le value le plus. Plus précisément, en fonction de sa croyance bayésienne sur les acheteurs et des valuations révélées, le vendeur se doit de calculer les « valuations virtuelles » des acheteurs. L'enchère de Myerson [1981] consiste alors à vendre le bien au vendeur annonçant la plus grande valuation virtuelle au prix correspondant à la seconde plus grande valuation virtuelle<sup>6</sup>. Cette enchère a la qualité surprenante d'être à équilibre honnête, et même, d'être l'enchère à équilibre honnête garantissant la plus grande espérance de gains pour le vendeur. C'est en partie pour cette découverte que Myerson se verra décerné le prix Nobel en 2007.

L'optimalité de l'enchère de Myerson [1981] se fonde toutefois sur l'hypothèse de monotonie des valuations virtuelles en fonction des valuations. Cette hypothèse dépend de la nature de la croyance bayésienne du vendeur. Il arrive donc qu'elle soit violée. Pour adres-

---

6. Il y a une condition de plus : si la plus grande valuation virtuelle est négative, alors le vendeur doit ne pas vendre son bien.

ser ce cas, des techniques dites d'*ironing* peuvent être utilisées. Ces techniques consistent à délimiter des intervalles tels que, en dehors de ces intervalles, les valuations virtuelles sont des fonctions croissantes. Si une valuation révélée tombe dans un des intervalles que l'on a identifié, l'*ironing* consiste à tirer aléatoirement une autre valuation dans ce même intervalle conformément à la croyance bayésienne du vendeur. C'est cette autre valuation qui est ensuite utilisée par le vendeur comme si elle était la valuation révélée. Ce faisant, le vendeur peut alors s'assurer de la monotonie des valuations virtuelles et d'obtenir un mécanisme à équilibre honnête (voir Parkes [2009], Hartline and Lucier [2010]). Le mécanisme de Myerson [1981] a ensuite été généralisée au cas à plusieurs biens par Hartline et al. [2011] et Bei and Huang [2011]. Une revue plus complète de la théorie des enchères est faite par Hartline [2013].

Il est intéressant de noter que l'idée de l'*ironing* correspond à faire des modifications du mécanisme qui n'affectent pas n'importe comment les « formes réduites » du jeu bayésien qu'elles induisent. Ces formes réduites correspondent en fait ni plus ni moins aux fonctions de retour associées aux stratégies honnêtes, que nous introduirons dans le premier axe de cette thèse. En particulier, l'*ironing* est une façon de modifier les valeurs de fonctions de retour uniquement pour des actions qui empêchaient les fonctions de retour honnêtes d'être un équilibre de Bayes-Nash.

La belle théorie des enchères s'appuie toutefois fortement sur une hypothèse forte, à savoir, l'aversion au risque des acheteurs et vendeurs. Cette hypothèse est appelée quasi-linéarité, et correspond formellement à l'écriture des fonctions d'utilité sous la forme  $u(x, t) = v(x) + t$  où  $x$  représente les affectations des biens et  $t$  le transfert monétaire. S'il n'y a pas de transfert monétaire (comme dans le cas de la construction de quarts) ou si les joueurs ne sont pas neutres au risque (ce qui est souvent le cas en pratique), la plupart des résultats de cette théorie s'écroulent.

#### 2.2.4 Choix social

Un autre domaine où la théorie de la conception des mécanismes a fourni des résultats merveilleux est celui de la théorie du choix social. Cette théorie consiste en la sélection (ou élection) d'une **alternative** (ou option, candidat) parmi un ensemble souvent fini, en fonction des préférences des individus. Toutefois, dans un premier temps, la théorie du choix social a été minée de théorèmes d'impossibilité qui s'appliquent dès lors qu'il y a au moins 3 alternatives<sup>7</sup>. L'un des plus célèbres est celui d'Arrow [1951]. Ce théorème affirme qu'il n'est pas possible d'agrèger des préférences individuelles en une préférence de groupe tout en satisfaisant les trois propriétés naturelles suivantes :

**Unanimité** : Si tout le monde préfère X à Y, alors le groupe préfère X à Y.

---

7. Le cas à 2 alternatives est résolu par le référendum, qui est notamment fortement honnête.

**Indépendance des alternatives non-pertinentes :** Si le groupe préférerait X à Y, et si les individus changent leurs préférences sans toutefois inverser leurs ordonnancements de X par rapport à Y, alors le groupe préfère encore X à Y.

**Pas de dictateur :** La préférence du groupe n'est pas celle d'un individu.

Si, de prime abord, le théorème d'impossibilité d'Arrow [1951] semble une limite théorique au choix social, on peut toutefois remarquer qu'il ne s'applique qu'à l'ordonnement de toutes les alternatives par le groupe. Or, en démocratie notamment, la plupart du temps, il faut et il suffit de choisir une alternative (celle que le groupe « préfère »). Malheureusement, là encore, un théorème d'impossibilité vient ruiner nos espoirs. Il s'agit du théorème de Gibbard [1973] - Satterthwaite [1975], qui affirme qu'il n'existe aucun scrutin (déterministe) satisfaisant les trois propriétés naturelles suivantes :

**Alternatives éligibles :** Toute alternative peut être élue par le scrutin.

**Fort Honnêteté :** Tout individu a toujours intérêt à révéler ses préférences de manière honnête.

**Pas de dictateur :** L'alternative élue n'est pas déterminée par les préférences d'un individu.

Il y a toutefois une astucieuse solution pour rendre ces trois propriétés compatibles. En effet, le théorème de Gibbard-Satterthwaite ne s'applique qu'aux scrutins déterministes. Pourtant, en pratique, il arrive parfois que des groupes de personnes tirent au hasard le choix collectif lorsque les préférences individuelles sont trop conflictuelles. Ceci amena Gibbard [1978] à caractériser les scrutins honnêtes randomisés. Il s'agit de mixtes<sup>8</sup> entre

- des référendums entre deux des alternatives.
- la dictature d'un individu (possiblement choisi aléatoirement).

En particulier, le seul scrutin honnête randomisé unanime<sup>9</sup> est la **dictature aléatoire**, pour laquelle l'alternative élue est celle d'un bulletin de vote choisi aléatoirement.

Tout cela est bien décevant. Il y a toutefois quelques résultats positifs en théorie du choix social. Ceux-ci sont obtenus en réduisant l'espace des préférences des individus en fonction de la structure observée du vote. En particulier, lorsque les alternatives sont placées sur un axe gauche-droite (comme c'est souvent le cas en politique) et lorsque les préférences sont en accord avec cet axe, on peut utiliser cette structure pour définir des scrutins honnêtes et déterministes, qui élisent l'alternative médiane<sup>10</sup>. Ce résultat est connu sous le nom de

---

8. Par mixtes, on entend que le scrutin est défini comme un tirage au sort aléatoire entre les différents scrutins définis ci-dessous

9. Un scrutin est unanime si, lorsque tout le monde préfère X, le scrutin élit X.

10. Ce cas n'est toutefois pas résolu lorsque l'on ne permet pas d'utiliser la structure gauche-droite pour définir le système de vote, ce qui pourtant le cas en pratique. En particulier, malgré l'axe gauche-droite (avec

théorème de l'électeur médian, et possède plusieurs variantes (voir Black [1958], Roberts [1977], Rothstein [1990, 1991], Gans and Smart [1996]).

Pour une description plus détaillée de la théorie du choix social, nous référons le lecteur à Myerson [1996].

## 2.3 Équité

Le concept d'équité entre agents est par ailleurs une difficulté à laquelle de nombreux mathématiciens se sont déjà confrontés. Dans cette section, nous présentons les principales définitions et quelques résultats.

En particulier, le problème du partage juste d'un ensemble de biens entre différents agents a été métaphoriquement par le problème de partage d'un gâteau (*cake-cutting problem*) par Steinhaus [1948]. Dans le cas où ce gâteau est le fruit d'une coalition, et s'il est homogène, le problème de partage juste se réduit à un problème de jeu coopératif. De façon approximative, les solutions proposées (valeur de Shapley [1953] ou le cœur de von Neumann and Morgenstern [1944] et Gillies [1959]) attribue une portion d'autant plus grande à un joueur que sa contribution à la coalition est grande.

Cependant, ce gâteau peut ne pas avoir été le fruit d'une coalition. De plus, il peut avoir différentes propriétés réparties de façon hétérogènes, par exemple une zone avec des fruits, une autre avec plus de chocolat, alors que le glaçage est relativement bien réparti. Ainsi, chaque agent attribue une valeur différente à chacune des parts du gâteau, certains préférant peut-être le chocolat aux fruits. Le problème de partage équitable consiste à distribuer à chacun une part juste du gâteau. Cette « justesse » peut être définie de plusieurs manières.

### 2.3.1 Partage proportionnel

Le partage proportionnel consiste à dire que chacun des  $n$  agents reçoit une part du gâteau, et que la valeur qu'il attribue à cette part est supérieure à  $1/n$  fois la valeur qu'il attribue au gâteau entier.

Dans le cas où il n'y a que deux agents, la méthode « je coupe tu chois » (*divide and choose*) proposée par Brams and Taylor [1996] permet de résoudre le problème. Elle consiste en deux étapes. Dans un premier temps, le premier agent divise le gâteau en deux, puis le second choisit l'une des deux parts ainsi obtenues. Si le second agent est rationnel, il est évidemment assuré d'obtenir au moins la moitié de la valeur attribuée au gâteau entier. Si le premier agent divise le gâteau en deux parts qui selon lui, sont égales, il s'assure lui aussi

---

des préférences dites *single-peaked*), Penn et al. [2011] ont prouvé que le seul système de vote déterministe fortement honnête restait la dictature.

d'obtenir au moins la moitié de la valeur du gâteau entier. S'il est rationnel, il peut même utiliser son *a priori* sur les préférences de l'autre pour obtenir plus de la moitié du gâteau, en anticipant ce que le second agent choisira.

Des méthodes pour un plus grand nombre d'agents ont été développées. Le protocole proportionnel de Banach-Knaster aussi appelé méthode du « dernier découpeur » (*the last diminisher method*) énoncé par Steinhaus [1948] est l'un des plus connus. Il consiste en autant d'étapes qu'il y a de joueurs. A chaque étape, l'un des joueurs non encore servis découpe une part qu'il considère être une proportion juste. Chacun des autres joueurs non encore servis peut alors décider de réduire cette part, s'il considère qu'elle n'est pas une proportion juste. Le dernier joueur à avoir réduit la part la récupère, et on passe à l'étape suivante avec le reste du gâteau.

On peut aussi citer la procédure du « couteau qui se déplace » (*moving knife procedure*) apparaissant dans Brams and Taylor [1996] qui se fonde sur un principe similaire pour un gâteau en longueur. Ce couteau part de l'extrémité gauche et se meut lentement vers la droite. Tout joueur peut dire « stop » à tout moment, auquel cas il récupère la part à gauche du couteau. Le jeu reprend ensuite avec le reste du gâteau et des joueurs<sup>11</sup>. Il y a aussi l'algorithme de découpes successives (*successive pairs algorithm*) apparaissant dans Robertson and Webb [1998], qui en revanche est plus long, et induit un découpage en petits morceaux.

Tous ces mécanismes ont le mérite d'être faiblement honnêtes, c'est-à-dire qu'ils sont conçus pour des joueurs qui ne veulent pas regretter une prise de risque. Si les joueurs jouent honnêtement (ou plutôt, de manière averse au risque), on obtient alors des partages proportionnels. Cependant, ces mécanismes ne sont pas à équilibre honnête. Pis, ils sont davantage conçus pour un petit nombre de joueurs, car le temps requis pour mener à bout ces procédures et l'effort requis de la part des joueurs les rendent inapplicables à grande échelle. De plus, ils ne sont pas généralisables à un problème tel que la construction de quarts.

### 2.3.2 Partage sans jalousie

Un concept plus exigeant que le partage proportionnel est le partage sans jalousie (*envy-free division*) introduit par Foley [1967] et Varian [1974], et largement étudié par Brams and Taylor [1995]. Un partage est sans jalousie si aucun agent ne souhaite échanger sa part avec celle d'un autre.

Dans le cas où il n'y a que deux agents, ce concept est équivalent au partage proportionnel.

---

11. Cette méthode est une généralisation de l'enchère à la hollandaise (le nom vient de son utilisation par la bourse aux fleurs de Pays-Bas). Dans cette enchère, où le vendeur annonce un prix élevé puis le décroît jusqu'à ce qu'il trouve acheteur.

Cependant, lorsque le nombre d'agents est supérieur à trois, il devient plus restrictif. En effet, tout partage sans jalousie est un partage proportionnel, mais l'inverse n'est pas vrai.

Une solution à trois joueurs a été apportée par le protocole Selfridge-Conway sans jalousie (*Selfridge-Conway Envy-Free Protocol*), qui apparaît dans Robertson and Webb [1998] où les auteurs en rendant hommage aux mathématiciens Selfridge et Conway qui semblent l'avoir découvert des décennies plus tôt de manière indépendante. Mais cette technique est très complexe et conduit à un découpage du gâteau en petits morceaux.

Lorsqu'il y a plus de trois agents, le problème est difficile et nécessite une résolution approchée, notamment quand tous les biens sont indivisibles (Lipton et al. [2004]). La possibilité de compensation financière permet une résolution plus aisée, comme pour Tadenuma and Thomson [1993].

### 2.3.3 Partage équitable

Le concept de partage équitable (*equitable division*) consiste à dire que chacun des agents attribue à sa part une valeur identique aux valeurs que les autres agents attribuent à leurs parts respectives. Cependant, la difficulté d'un tel concept est qu'elle fait intervenir une comparaison des évaluations des agents.

Une procédure à deux joueurs a été proposée par Robertson and Webb [1998], mais celle-ci suppose que les deux agents jouent de façon honnête. De plus, cette procédure ne sera en général pas Pareto-optimale. En effet, elle permet à chaque agent d'obtenir la moitié du gâteau selon leurs propres estimations. Or, si leurs estimations sont différentes, il existe un partage pour lequel chacun des agents possède, selon lui, plus de la moitié du gâteau. Ceci est d'ailleurs vrai, quelque soit le nombre de joueurs, comme l'ont montré Dubins and Spanier [1961].

Dans le cas où le nombre d'agents est supérieur à deux, Simmons and Su [2003] propose dans le même ordre d'idée, une procédure permettant de découper un gâteau en deux parts, qui, selon chacun des agents, sont de même valeur. D'autres méthodes peuvent permettre un partage quasi-équitable, en supposant une découpe du gâteau en beaucoup de petites portions comme proposé par Robertson and Webb [1998]. Cependant, ces méthodes ne sont pas adaptées à des agents rationnels.

### 2.3.4 Deux autres méthodes

Afin de partager un gâteau, on peut imaginer simplement demander à chacun d'énoncer ses préférences et de comparer celles-ci afin de déterminer le partage optimal du gâteau. Dans le cas où les biens à se partager sont en fait des objets discrets, deux méthodes fondées sur



ce principe ont été développées.

La méthode des marqueurs est analogue au protocole du dernier découpeur, sauf que le découpage de chacun se fait *a priori*, à l'aide de marqueurs. L'ensemble des objets doit d'abord être ordonné de gauche à droite. Puis, chaque joueur utilise des marqueurs pour délimiter la liste d'objets à partager en autant de sections qu'il y a de joueurs. Les joueurs doivent chercher à rendre les sections aussi justes que possibles. Ensuite, on parcourt la liste des biens de gauche à droite. À chaque marqueur rencontré, on attribue au joueur à qui ce marqueur appartient tous les biens situés à gauche de ce marqueur. On retire ensuite les biens alloués et les marqueurs du joueur servi, et on continue à parcourir la liste des biens.

Enfin, il y a la méthode des enchères scellées (*method of sealed bids*). Elle nécessite toutefois que chaque joueur possède suffisamment d'argent pour payer des différences de prix. Chaque joueur annonce ainsi à travers une lettre les valeurs financières qu'il attribue aux biens, et met la lettre sous enveloppe. En particulier, chaque joueur possède une valuation de l'ensemble de tous les biens, et s'attend à avoir un  $n$ -ième de cette valuation totale, que l'on appelle la valuation proportionnelle (et qui varie donc d'un joueur à l'autre). Quand chacun a terminé sa lettre, on ouvre les enveloppes. Chaque bien est alors attribué au joueur qui en a la plus grande valuation. Ce joueur paie alors la différence entre la valeur qu'il attribue au bien et sa valuation proportionnelle (qui peut être négative), et met cet argent dans un pot (ou retire de l'argent du pot si la différence est négative). À la fin, quand tous les biens sont distribués et tous les paiements sont effectués, il reste un excédent (possiblement nul) dans le pot. Les joueurs se partagent alors cet excédent de manière exacte.

Ces deux mécanismes sont faiblement honnêtes. Cependant, si les joueurs se connaissent, ils peuvent élaborer des stratégies leur permettant de s'assurer un meilleur résultat. Par ailleurs, chacun obtiendra une part proportionnelle. On peut par ailleurs remarquer que l'enchère scellée a d'importantes similarités avec l'enchère VCG dont nous avons déjà parlé, avec la différence notable que l'enchère scellée est à profit nul pour l'organisateur de l'enchère (*budget-balanced*).

### 2.3.5 Partage juste fortement honnête

Le problème de partage juste avec un mécanisme honnête est un problème difficile qui a récemment connu quelques avancées. De façon indépendante, Chen et al. [2013] et Mossel and Tamuz [2010] ont réussi à obtenir des algorithmes fortement honnêtes, c'est-à-dire tels que les joueurs ont toujours intérêt à être honnêtes, quelques soient les stratégies des autres, pour le partage proportionnel pour la découpe de gâteau. Cependant, Chen et al. [2013] ont dû se contenter de la résolution dans le cas où les préférences des joueurs sont uniformes par morceaux (égales à une constante ou bien à zéro), ou dans le cas où l'honnêteté du

mécanisme correspond à une honnêteté vis-à-vis de l'espérance de leur part allouée. En effet, ils introduisent un côté aléatoire à l'algorithme.

Cette technique d'ajout d'aléatoire apparaît également dans Mossel and Tamuz [2010]. Ceux-ci déterminent un algorithme fortement honnête, et strictement proportionnel en espérance, lorsqu'au moins deux joueurs ont des satisfactions différentes. Cet aspect aléatoire est indispensable, puisqu'ils prouvent également qu'il n'existe pas de mécanisme déterministe honnête strictement proportionnel.

### 2.3.6 Solution de Nash

Une autre approche pour diviser des biens a été introduite par Nash [1950b], pour ce que l'on appelle désormais le problème de négociation de Nash (*Nash bargaining*). Nash formalise ce problème pour deux joueurs, dont les utilités initiales appelées statu quo sont  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$ . Ces joueurs doivent prendre une décision  $x$ . Nash propose de choisir la décision  $x$  qui maximise le produit  $(u_1(x) - \bar{u}_1)(u_2(x) - \bar{u}_2)$ . Cette décision est celle que l'on appelle solution de Nash. Elle jouit de nombreuses propriétés. En fait, il s'agit de l'unique solution satisfaisant les propriétés suivantes :

**Invariance aux transformations affines positives :** Les fonctions d'utilité de von Neumann and Morgenstern [1944] sont définies à une transformation affine positive près, et toute solution au problème de Nash ne doit donc pas dépendre de la transformation affine positive que l'on choisit.

**Pareto-optimalité :** Il n'est pas possible de donner plus à un joueur sans retirer à un autre.

**Indépendance aux alternatives non-pertinentes :** Si on ajoute des solutions possibles qui ne sont pas préférables à la solution de Nash, alors la solution de Nash reste inchangée.

**Symétrie :** L'étiquette des joueurs n'a pas d'importance.

La solution de Nash a été généralisée par Kelly et al. [1998] au cas à  $n$  joueurs et sans état initial. Ainsi, une solution  $x$  est dite proportionnelle (à ne pas confondre avec le partage proportionnel du partage de gâteau) si, pour toute autre solution  $y$ , on a

$$\sum_i \frac{u_i(x) - u_i(y)}{u_i(x) - \bar{u}_i} \geq 0, \quad (2.1)$$

où les variables  $\bar{u}_i$  représentent le statu quo du partage. Dans le cas où l'ensemble des utilités  $(u_1(y), \dots, u_n(y))$  pour les solutions réalisables  $y$  est convexe, les solutions proportionnelles sont celles qui maximisent le produit  $\prod_i (u_i(x) - \bar{u}_i)$  des utilités. Toutefois, comme dans le

cas de la solution de Nash, il faut noter que les solutions proportionnelles dépendent fortement du statu quo, et il n'est pas clair comment donner un sens à ce statu quo dans une construction de quarts. De plus, il n'est pas clair qu'il s'agisse d'une solution « équitable ».

### 2.3.7 Équité max-min

Une autre approche pour garantir l'équité d'un partage repose sur l'attention portée aux démunis, qui conduit à l'équité dite max-min. De manière grossière, il s'agit de maximiser les satisfactions minimales. De façon plus formelle, appelons  $\text{order} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'opérateur qui ordonne dans le sens croissant les entrées d'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors, par exemple,  $\text{order}(5, 1, 2, 4) = (1, 2, 4, 5)$ . Si les nombres  $(u_1(x), \dots, u_n(x))$  représentent les utilités des différents joueurs, alors  $\text{order}(u_1(x), \dots, u_n(x))$  représentent alors un vecteur des utilités dont les premières coordonnées réfèrent aux moins heureux, et les dernières aux plus heureux. En particulier,  $\text{order}_1(u_1(x), \dots, u_n(x))$  est la plus petite utilité. C'est cette valeur que l'équité max-min maximise.

On peut aller plus loin. Une fois l'utilité du moins heureux maximisée, on peut s'attarder au deuxième moins heureux. Puis au troisième, et ainsi de suite, jusqu'au plus heureux. Cette démarche peut être résumée par le fait que l'équité max-min choisit la solution  $x$  qui maximise l'ordre lexicographique de  $\text{order}(u_1(x), \dots, u_n(x))$ . Cette approche généralise la solution par Kalai and Smorodinsky [1975], et est longuement discutée dans Young [1995] et Sen and Foster [1997]. Pour plus de détails sur les équités proportionnelles et max-min, nous vous référons à Bertsimas et al. [2011].

L'équité max-min souffre toutefois d'une forte dépendance en la normalisation des fonctions d'utilité. Or, comme nous le verrons de façon plus détaillée dans le troisième article de cette thèse, les normalisations fréquemment utilisées, qui consiste à normaliser ces utilités à l'aide de deux points de référence, sont peu justifiables. Pis, comme dans l'exemple du gâteau avec trois cerises que l'on introduira plus tard, ces normalisations peuvent conduire à des conclusions contradictoires avec l'intuition que l'on se fait de l'équité. La normalisation dite sociale que nous introduirons dans le chapitre 5 sera un complément utile au concept d'équité max-min.

## 2.4 Recherche opérationnelle et planification

De façon générale, le problème de conception d'horaires pose le problème de l'affectation d'horaires  $j \in \Omega$  à chaque employé  $m \in M$ , où l'ensemble  $M$  est fixé. On se conformera à la modélisation faite par Dantzig [1954], en considérant que  $j$  définit à la fois les heures de début et de fin de travail, mais aussi l'heure des pauses.

Cependant, parce que des activités peuvent être pré-assignées, ou parce que les disponibilités des employés sont personnalisées dans leurs contrats, l'ensemble des horaires admissibles diffère d'un employé à l'autre. Par conséquent, l'ensemble  $\Omega$  dépend de l'employé considéré. Pour l'employé  $m \in M$ , on l'écrira donc  $\Omega_m$ . Il s'agit donc, d'assigner un horaire  $j \in \Omega_m$  à chaque employé  $m \in M$  de façon à satisfaire les besoins de l'entreprise et les vœux des employés.

Confrontée à des problèmes de complexité, la recherche sur la construction d'horaires, notamment dans le secteur aérien, a connu une grande avancée avec l'avènement des techniques de génération de colonnes, à l'image de Desaulniers et al. [1997] dont l'application pour les rotations des employés d'Air France a prouvé l'efficacité de l'approche.

Le principe de la génération de colonne est de décomposer le problème global  $PG$  en un problème maître  $PM$  et en sous-problèmes  $SP$ . Le  $PM$  est un programme d'optimisation semblable au  $PG$ , dans lequel l'ensemble réalisable est toutefois restreint à l'enveloppe convexe des solutions générées par les sous-problèmes  $SP$ . Les  $SP$  utilisent les variables duales de la relaxation linéaire du  $PM$ , afin de générer des solutions (dites colonnes) dont le coût réduit est minimum. Si ce coût réduit minimum est négatif, les colonnes qui leur correspondent sont alors de meilleures qualités. Elles sont donc ajoutées à l'ensemble des solutions prometteuses utilisées pour construire l'ensemble des solutions admissibles du  $PM$ . Si le coût réduit minimum est non négatif, alors la solution optimale de la relaxation linéaire du  $PM$  est la solution optimale de la relaxation linéaire du  $PG$ .

#### 2.4.1 Horaires personnalisés dans le secteur aérien

Cette technique appliquée à un problème de construction d'horaires sans préférence conduit à un  $PM$  associé à un unique  $SP$ , ce qui induit une très bonne vitesse de résolution. Ainsi, Gamache et al. [1999] s'est attaqué au *rostering* avec ces techniques, et a pu résoudre des problèmes de grande taille solubles en temps raisonnables.

Si on cherche à construire des horaires personnalisés en maximisant également la somme des satisfactions des employés vis-à-vis de leurs horaires, on a à résoudre un  $PM$ , auquel est associé un  $SP$  par employé, ce qui fait donc  $|M|$  sous-problèmes  $SP$ . On peut alors penser que le temps de résolution sera lui aussi multiplié par le nombre d'employés. Cependant, Gamache et al. [1999] ont montré que la résolution était plus rapide en revenant au  $PM$  dès qu'une dizaine de  $SP$  ont été résolus. Ils ont constaté empiriquement que passé un certain point, le nombre de  $SP$  n'influait presque plus le temps de résolution. Le problème reste ainsi assez simple à résoudre, même pour un grand nombre d'employés.

Dans un contexte d'équité stricte en revanche, où l'on cherche à homogénéiser la qualité des horaires, un problème de non-linéarité apparaît, quand on cherche à minimiser la variance

de la qualité des horaires. La difficulté due à la non-linéarité apparaît à deux reprises, lors de la résolution du  $PM$ , et lors de celle du  $SP$ .

Pour commencer, le  $PM$  correspond maintenant à un problème non-linéaire. Cependant, il est quadratique semi-défini positif. Il est donc résoluble directement par CPLEX, mais ne l'est malheureusement pas sur XPRESS, le logiciel utilisé par la société KRONOS. Dans son modèle, Boubaker [2006] s'est contenté de considérer la moyenne des satisfactions constante lors de la résolution du  $PM$ , ce qui lui a permis de linéariser le  $PM$ .

Par ailleurs, la non-linéarité rend le  $SP$  très complexe à résoudre. On pourrait utiliser des fonctions de prolongations comme Irnich and Desaulniers [2005] mais leur non-décroissance empêche l'application des algorithmes habituellement utilisés pour la résolution des ( $SP$ ). Afin de palier cette difficulté, dans le contexte d'équité sans personnalisation des horaires, Boubaker [2006] a approché la courbe de la variance par une fonction en escalier. Concrètement, il introduit une série de sous-problèmes correspondant aux différents paliers de l'approximation de la variance. En intégrant également un algorithme TABOU offrant une bonne solution initiale, une agrégation dynamique des contraintes et des heuristiques face aux contraintes d'intégrité, le problème, un peu plus complexe, reste résoluble en temps raisonnable.

De nombreuses recherches se sont plutôt intéressées au *preferential bidding* favorisant les employés selon leur ancienneté. L'idée naturelle serait d'introduire des pondérations d'autant plus grandes que l'employé a de l'ancienneté. Cependant, quand le nombre d'employé est important, et qu'il faut choisir une pondération différenciant de la même façon les employés seniors entre eux, et les nouveaux employés entre eux, la pondération doit avoir une progression géométrique. On obtient alors une fonction objectif avec un très grand nombre de chiffres significatifs.

Mais alors, d'une part, on se retrouve confronté à un problème de temps de calcul pour améliorer les horaires des employés récemment arrivés dans l'entreprise. En effet, afin de prendre en compte une optimisation des horaires de chacun des employés, l'optimisation de la fonction objectif doit se faire avec une grande précision. Or le temps de calcul de l'algorithme du simplexe croît très vite avec le nombre de chiffres significatifs que l'on demande.

D'autre part, le codage informatique des nombres réels ne permet pas forcément de rendre compte de ces variations, surtout quand le nombre d'employés est élevé. En effet, un nombre codé en 32 bits a 24 bits de description des décimales, ce qui fait une précision à  $2^{-24} = (2^{10})^{-2.4} \approx (10^3)^{-2.4} \approx 10^{-7}$ . Cela suffit si on cherche une précision à 6 chiffres sur la satisfaction d'un unique employé. Cependant, si on considère la somme pondérée de satisfactions de plusieurs employés, même s'il n'y a que peu d'employés, on se rend compte qu'il ne sera pas possible d'obtenir suffisamment de précision sur la satisfaction de chacun

des employés avec un codage en 32 bits. Et même un codage à 64 bits ne permettrait pas de considérer plus de deux employés, et il semble qu'il y ait peu à y gagner.

Par conséquent, dans ce contexte, on préférera résoudre employé par employé, en s'assurant qu'il restera toujours des horaires compatibles pour les autres employés. Cette méthode de construction d'horaires par séniorité stricte est alors difficile et longue à résoudre, puisqu'elle nécessite la résolution d'autant de problèmes globaux qu'il y a d'employés. Elle a été décrite par Gamache et al. [1998], et revient à résoudre un problème global (*PG*) par employé, ce qui ne permet pas de trouver une solution rapidement pour un grand nombre d'employés.

### 2.4.2 Construction de quarts

Les documents cités jusque là s'intéressent au secteur aérien où la construction d'horaire de travail est intimement liée à la non-interruptibilité des tâches de travail. Pour les problèmes avec tâches interruptibles (dites activités), la difficulté de l'agencement de tâches est alors remplacée par celle de la taille de l'espace des solutions réalisables. Ainsi, pour un souci de complexité, on sépare souvent la phase de construction de quarts fixant les horaires de début de travail, de fin de travail et de pauses, et la phase d'affectation d'activités à ces quarts.

Le fait que les tâches soient interruptibles pourrait suggérer la résolution du problème sous une forme continue du temps. Cependant, ceci est difficile, et peut conduire à des problèmes NP-complet, comme pour Barthodli [1981]. C'est pourquoi, comme la plupart des articles sur ce sujet, nous discrétiserons le temps en périodes de même longueur, comme l'a fait Dantzig [1954].

Cependant, sa méthode ramenait le problème de construction de quarts à un problème de recouvrement. Elle explicitait tous les quarts admissibles à l'aide de variables de décisions entières. Or le problème de recouvrement dans sa version globale est NP-complet, et son utilisation ici pose des problèmes de complexités algorithmiques. En particulier, considérer des quarts avec une grande flexibilité augmente nettement la taille du problème, et fait exploser le temps de résolution. De nombreuses techniques ont ensuite développés afin d'affiner le modèle, que ce soient des méthodes de résolution exactes ou des heuristiques (*e.g.* Morris and Showalter [1983]; Bechtold and Showalter [1987]). La génération de colonne fait partie de ces techniques d'accélération des algorithmes, comme par exemple dans Rekik [2006].

De nombreux chercheurs se sont alors tournés vers des représentations implicites des horaires admissibles. L'avantage de cette modélisation est la réduction de la taille du modèle. Dans une version simple, où les pauses ne sont pas prises en compte, et où il s'agit donc uniquement de fixer l'heure de début du travail et la durée de travail, Moondra [1976] a montré la force de cette méthode. Ce modèle a ensuite été adapté par Bechtold and Jacobs

[1990] pour y incorporer des pauses déjeuner choisies dans un ensemble  $K$  de pauses possibles, à travers des contraintes dites *forward and backward*.

Plus tard, Bechtold and Jacobs [1996] montreront l'équivalence de la formulation en nombres entiers de leur modèle et de celui de Dantzig [1954], sous certaines hypothèses. Enfin, Aykin [1996] incorpore des horaires avec plusieurs pauses, ce qui augmente la taille de  $K$  et la complexité de sa définition. Il utilise plusieurs familles de variables pour chacune de ces pauses, avant de prouver dans Aykin [2000] que son approche est plus efficace pour une certaine famille de problèmes que celle de Bechtold and Jacobs [1990]. Cependant, Bechtold and Jacobs [1990] reste plus efficace pour d'autres problèmes, comme il l'a été montré par Rekik [2006].

Toutefois, il ne semble pas possible de résoudre le problème de construction d'horaires personnalisés avec des contraintes *forward and backward*. En effet, dans ce modèle, il n'y a pas d'association immédiate entre les heures de début et de fin de travail, et les pauses. Par conséquent, il n'est pas possible d'identifier quels quarts sont considérés, et encore moins possible de les associer à un employé. Ceci rend l'estimation des satisfactions des employés impossible.

Quant à la formulation écrite par Aykin [1996], il faut noter qu'elle conduirait à un très grand nombre de variables. Il y aurait alors une variable binaire par combinaison d'heure de début, de durée de travail, d'heures de pauses et d'employé. Le nombre de variable est donc le produit du nombre d'heures de début et de fin de travail par le nombre de pauses possibles, et par le nombre d'employés. De plus, si un horaire de début et fin de travail est associé à plusieurs employés et plusieurs pauses différentes, il est impossible de discerner la combinaison qui sera choisie de manière directe, ce qui rend le calcul direct de la satisfaction des employés impossible.

La création des quarts de travail est un domaine auquel Rekik [2006] s'est attelée, avec une hypothèse de haute flexibilité dans le secteur de travail étudié, d'où découle une complexité du choix des horaires de travail. Elle a notamment réussi à démontrer l'équivalence des relaxations continues des modèles de Dantzig [1954], Bechtold and Jacobs [1990] et Aykin [1996], en utilisant des techniques de décomposition de Benders. De plus, elle a abordé le problème de construction simultanée de cycles et de quarts, ainsi que la construction de quarts avec plusieurs pauses et une grande flexibilité sur le choix de ces pauses. Cette dernière méthode introduit une série de contraintes *forward and backward* et complexifie la modélisation.

### 2.4.3 Affectation des activités

Étant donné les quarts, Lequy [2010] a trouvé des techniques permettant de résoudre les problèmes d'affectation de tâches et d'activités, en minimisant les coûts engendrés par une

mauvaise affectation. Il considère la modélisation de Dantzig [1954] et utilise la génération de colonne. Il propose aussi une reformulation du problème en un *modèle par blocs*, qui lui permet de réduire significativement le nombre de contraintes et de variables.

La méthode qu'il a développée dans le cas où ne sont considérées que des activités interruptibles a permis la résolution approchée du problème d'affectation d'activités sur un horizon de 7 jours, avec 50 quarts à traiter par jour et 5 types d'activités. Cependant, dès qu'il fallait passer à 7 activités, les heuristiques développées ne donnaient plus satisfaction. Il a alors opté pour l'intégration d'une technique d'horizon fuyant.

La notion d'horizon fuyant repose sur l'idée selon laquelle le choix des affectations à l'instant présent n'affecte pas l'optimalité de la solution passé un certain horizon. Cette technique consiste à résoudre le problème sur un horizon restreint, disons sur 3 jours, de fixer les résultats trouvés pour le premier jour, et de résoudre à nouveau pour les jours 2 à 4. En continuant ainsi jusqu'à la résolution du problème pour les jours 5 à 7, on obtient une bonne approximation de la solution optimale.

Lorsque l'on prend aussi en compte les tâches non-interruptibles, on introduit de nouvelles contraintes au problème. Ces contraintes compliquent grandement le problème, en particulier les sous-problèmes. En envisageant différentes stratégies de gestion de ces contraintes additionnelles correspondant à divers niveaux de flexibilité sur les affectations réalisables, il montre que permettre une réaffectation des tâches entre employés sans ajustement temporel est un bon compromis entre temps de calculs et optimalité du résultat.

Lequy [2010] s'est aussi intéressé aux cas où on rajoute des contraintes de préséances ou de tâches en équipes. Cette difficulté accroît encore la difficulté du problème et le temps de calcul pour obtenir de bonnes solutions.

## 2.5 Analyse multicritère

L'analyse multicritère est un domaine de recherche en vogue (voir Zopounidis and Doumpos [2002] et Siskos and Spyridakos [1999]). Considérons ainsi un ensemble de données, appelées alternatives, possédant chacune des caractéristiques décrites selon des critères. Le problème de classification consiste à regrouper les alternatives similaires selon les différents critères. Le problème de tri est semblable, à la différence qu'est considérée une relation d'ordre entre les différentes classes ainsi constituées.

En terme de tri, une notion importante est celle des équilibres Pareto-optimaux. Ainsi, une alternative est dite Pareto-optimale s'il n'existe pas d'alternatives qui lui soient préférées selon tous les critères. Ce terme est très utilisé dans l'analyse multicritère, mais également en théorie des jeux. En terme de jeux, cette notion signifie qu'il n'est pas possible de satisfaire



plus tous les joueurs en même temps.

Deux méthodes sortent du lot. Ainsi, l'utilisation de relations d'ordre a été largement développée (avec notamment Roy [1985], Vincke [1992]). Cette relation d'ordre détermine si l'une des alternatives est préférée à l'autre ou si elle ne l'est pas (ce qui ne garantit pas que l'autre lui est préférée, *i.e.* la relation n'est pas réflexive). En utilisant ces relations d'ordre, on peut ainsi déterminer des groupes ordonnés tels que deux éléments de deux groupes ont de bonne chance d'être reliés par la même relation d'ordre qui lie les groupes.

Par ailleurs, de nombreux mathématiciens utilisent la notion de fonction d'utilité pour l'analyse multicritère. De façon générale, il s'agit de décrire une fonction qui aux différentes valeurs des critères associe un réel positif, d'autant plus grand que l'alternative décrite par ces critères est intéressante. Dans un cadre simplifié, cette fonction est souvent modélisée par la somme pondérée de termes correspondant aux utilités vis-à-vis des différents critères. C'est cette modélisation que nous réutiliserons par la suite.

Déterminer les fonctions d'utilité multi-attribut dans la pratique est un problème difficile. De nombreuses techniques ont été proposées et sont utilisées, notamment dans le monde industriel. Parmi les principales méthodes, on trouve ELECTRE, PROMETHEE et MACBETH.

La modélisation des comportements des consommateurs est un problème largement abordé en marketing. Les outils de l'analyse conjointe présentent une alternative aux méthodes MACBETH. Dans ces modèles, on considère que les préférences des consommateurs dépendent de caractéristiques des produits, appelés attributs. La valeur d'un objet est une fonction des niveaux de ces attributs, c'est-à-dire des valeurs que prennent ces attributs. Green and Srinivasan [1978] sont parmi les premiers à considérer l'analyse conjointe. Il est ainsi demandé aux consommateurs d'ordonner une liste de choix ayant des niveaux d'attributs différents. Il s'agit ensuite de déterminer les pondérations des attributs étant donné l'ordonnement des choix.

## CHAPITRE 3

ARTICLE 1 : THE RETURN FUNCTION : A NEW COMPUTABLE  
PERSPECTIVE ON BAYESIAN-NASH EQUILIBRIA

---

**The Return Function : A New Computable  
Perspective on Bayesian-Nash Equilibria**

---

LÊ NGUYÊN HOANG

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

FRANÇOIS SOUMIS

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

GEORGES ZACCOUR

*GERAD, HEC Montréal*

Soumis à *SIAM Journal on Control and Optimization (SICON)*.

**Abstract.** In this paper, we suggest a new approach called the *return function* to deal with the determination of Bayesian-Nash equilibria in games of incomplete information. Whereas in the traditional approach players reply to each others' strategies, here each player replies to his own return function. In short, given a player's choice of action and the other players' strategies, the return function of that given player is the probability distribution of the outcome. Interestingly, we show that the dynamics of best-reply strategies, which are hard to compute in practice, are mapped to an observable and easy-to-compute dynamics of return functions. We propose a new algorithm for computing Bayesian-Nash equilibria, and illustrate its implementation on a cake-cutting problem. Finally, we prove the convergence of the dynamics of return functions to the Bayesian-Nash equilibrium under fairly general topological assumptions.

**Key words :** Mechanism Design ; Return Function ; Bayesian-Nash Equilibrium ; Cake-Cutting Problem.

### 3.1 Introduction

Mechanism (or market) design has proven to be a successful approach for efficiently determining the value of a product or a service when there is no natural price that can be posted or negotiated for that product, as is the case for, e.g., a painting by Picasso, energy prices in a deregulated electricity market, or the exploitation rights for a hydrocarbon-rich basin. These examples, and many others, share the following features : (i) There is a finite number of strategic agents (players, bidders or claimers) interested in acquiring the object (product, service or resource). (ii) Each agent has a *private* value for the object under consideration, and does not know how much the other agents value the same object. For instance, the cost of producing a kilowatt is not the same for all electricity companies in a given market, and each company knows its own cost but only has incomplete knowledge of its competitors' costs. Similarly, a Picasso painting does not have the same value for all art collectors. (iii) The rules of the game are not given in advance, but are designed by an agent, called a mechanism designer, principal or regulator, who has an interest in the outcome. For instance, a public commission may auction off television airwaves to wireless carriers to create faster and more reliable networks, or to maximize its own revenues. A parent may ask children at a party their flavour preference to fairly allocate a heterogeneous birthday cake.

During the last two decades or so, important developments in market design have taken place for three main reasons : "(i) The creation by government agencies, private firms or industrial associations of a number of markets to privatize public assets, restructure dere-

gulated industries, or enhance inter-firm relations ; (ii) a renewed focus on strategic analysis and game theory that together with the emergence of experimental economics contributed to the establishment of market design as a serious research field in economics ; (iii) and, most importantly, the explosive development of electronic business, e-business tools that can embed the most complex market rules and facilitate their deployment.” (Bourbeau et al. [2005]). The recent operations-research literature includes work on assignment problems : see, e.g., Su and Zenios [2006] for the kidney-transplant trade-off; Abdulkadirolu and Sönmez [2003] or Pathak [2011] for school choice ; in supply chains, see, e.g., Jain and Raghavan [2009], Chen and Cheng [2012], Mes et al. [2011]; and in revenue management, see, e.g., Vulcano et al. [2002], Manelli and Vincent [2007], Devenur and Hayes [2009].

One approach to market design is Bayesian mechanism design, where the information about the types of agents is incomplete, but all agents and the principal have some beliefs about others’ types. A belief is a probability distribution on the agents’ types. This setting corresponds to a game with incomplete information, also known as a Bayesian game (see Harsanyi [1967, 1968a,b]), whose solution is called a Bayesian-Nash (BN) equilibrium. Finding BN equilibria is a very difficult task as it involves solving for agents’ best-response strategies and for the best inference from what is possibly a strategic lie. However, due to the revelation principle<sup>1</sup> (Gibbard [1973], Holmstrom [1977], Myerson [1979], Dasgupta et al. [1979]), one can only confine one’s attention to equilibria in which agents truthfully report their types.

In this article, we propose a new approach, which we call the return function, to compute BN equilibria in mechanism design. In a nutshell, given a player’s choice of action, the other players’ strategies and the mechanism chosen by the market designer, the return function of that given player, is the probability distribution of the outcome. Given this return function, the expected utility of a player’s outcome is then defined as a function of this return function and of the player’s type. Our formulation is fairly general and accounts for outcomes that cannot be defined deterministically. In short, our approach for computing Bayesian-Nash equilibria is based on determining the return function that is a best-reply to itself, instead of looking for a strategy profile that is a best reply to itself. Interestingly, this simplification in the formulation comes at no cost in terms of the strategic aspect of the game, and lends itself to an efficient algorithm for computing BN equilibria. To illustrate, we provide such an algorithm, and we describe the results of instances from the cake-cutting problem.

Our approach shares some similarities with the one followed in mean-field games (Huang et al. [2006], Lasry and Lions [2007], Achdou and Capuzzo-Dolcetta [2010]). These games involve a large number of players, where each one reacts to the mass of other players over

---

1. The revelation principle states : “For any Bayesian-Nash equilibrium there corresponds a Bayesian game with the same equilibrium outcome but in which players truthfully report type.”

time, with each player's trajectory being written as a function of only the distribution of the trajectory of the mass. In the particular case of linear-quadratic models with Brownian motions, each player's best trajectory is further simplified to only depend on the average and variance of the distribution of the trajectory for the mass. Importantly, mean-field games then rely on assuming a certain trajectory of the mass, computing individual best-replies to this trajectory, and deriving the trajectory of the mass from these best-replies. In other words, in mean-field games, we proceed by updating the trajectory of the mass, rather than each player's strategy. There is also a link with Rabinovich et al. [2013], where the fictitious-play algorithm is extended to compute pure-strategy Bayesian equilibria for games with continuous sets of types. Later, we show that the updating approaches used in mean-field games and in Rabinovich et al. [2013] can be interpreted as special cases of updating of our return function.

The rest of the paper is organized as follows : In Section 2, we introduce the model and the return function. Section 3 is devoted to the computation of Bayesian-Nash equilibria with the return function. In Section 4, we provide an illustration in the context of a cake-cutting problem. Section 5 discusses theoretical convergence of the return function, and Section 6 concludes.

### 3.2 Model and Equilibrium

Let  $N = \{1, \dots, n\}$  be the set of players and  $A$  the set of actions of player  $j \in N$ . Denote by  $a_j$  an action of  $j$ , by  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  the vector of all players' actions, and by  $a_{-j} = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in A^{n-1}$  the vector of the actions of all players other than  $j$ . Similar notations will be used throughout the paper for vectors of objects that refer to all players or to  $n - 1$  players.

The action profile  $a \in A^n$  induces an outcome  $x$  from the set of outcomes  $X$ . This mapping is called a mechanism  $\mathcal{M}$ , that is,  $\mathcal{M}(a) = x \in X$ . To illustrate,  $x$  could be, e.g., the workers' schedule for a given week depending on their requests, the shares of a cake allocated to the different claimers according to their stated preferences, or the quantity of energy to be supplied the next day by the bidding electricity companies.

In practice, this outcome may not be deterministically specified, because of some inherent random events. For instance, the next day's electricity demand depends on temperature, which cannot be predicted with certainty. To reflect this, we let mechanism  $\mathcal{M}$  be a function in  $\Delta(X)$ , where  $\Delta(X)$  is the set of probability distribution on the set of outcomes  $X$ . If the mechanism is deterministic, then  $\mathcal{M}(a)$  would have a Dirac distribution.

Each player  $j \in N$  is defined by his type  $\theta_j$ . For each player  $j$ , a utility function matches

his type and the outcome with a real number, as follows :

$$u_j(\theta_j, x) \geq u_j(\theta_j, x') \quad \text{for } x \succeq x',$$

where the symbol  $\succeq$  means preferred to. Let  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta^n$ , where  $\Theta$  is the set of types, assumed to be the same for all players. As we are dealing with mechanisms  $\mathcal{M}(a) \in \Delta(X)$ , we extend the domain of the definition of  $u_j(\theta_j, \cdot)$  to the set  $\Delta(X)$  of probabilities on outcomes by considering that, for all  $\theta_j \in \Theta$  and all  $\tilde{x} \in \Delta(X)$ ,

$$u_j(\theta_j, \tilde{x}) = \mathbb{E}_{x \sim \tilde{x}}[u_j(\theta_j, x)],$$

where  $x \sim \tilde{x}$  means that the random variable  $x$  follows the probability  $\tilde{x}$ .

We assume that each player knows his type and has incomplete knowledge of the other players' types. Denote by  $\tilde{\theta} \in \Delta(\Theta^n)$  the probability distribution on types of all players, and by  $\tilde{\theta}_{-j} \in \Delta(\Theta^{-j})$  the probability distribution on all players' types but  $j$ 's. These probabilities are called beliefs.

**Remark 1.** *For clarity of exposition, we are assuming here that the set of actions, the set of types and the beliefs are the same for all players. Admittedly, this is not the most general formulation, but in principle, there is no conceptual difficulty in extending the analysis to the case where the players have different action sets. In particular, the assumption that the set of types is the same for all players can easily be relaxed by defining a set  $\Theta_j$  for each  $j \in N$ . As we will be considering beliefs, this would then be equivalent to saying that each player has a set of types  $\Theta = \bigcup_{j \in N} \Theta_j$  with a nil distribution over  $\Theta - \Theta_j$ .*

**Remark 2.** *Classical modeling of Bayesian games fix  $X = A^n$  and  $\mathcal{M} = id_{|A^n}$ , i.e., the mechanism is simply the identity of  $A^n$ . Utilities  $u_j(\theta_j, a_1, \dots, a_n)$  are then functions of the type and the profile of actions. However, for many problems such as the cake-cutting problem, it is more natural to consider a set of outcomes, which is really what players are interested in, i.e., the actual parts of the cake that are allocated, rather than the announced preferences of the other players.*

Denote by  $\sigma_j$  a strategy of player  $j$ , that is, a mapping that associates an action  $a_j$  to a type, i.e.,  $\sigma_j(\theta_j) = a_j$ . Denote by  $\Sigma = (\Delta(A))^\Theta$  the set of strategies of this player, where  $\Delta(A)$  denotes the space of probability distributions on  $A$ . As for the set of actions, we assume, without any loss of generality, that the set of strategies is the same for all players. Let  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma^n$ .

The relationships among all the variables defined so far are shown in Figure 3.1.

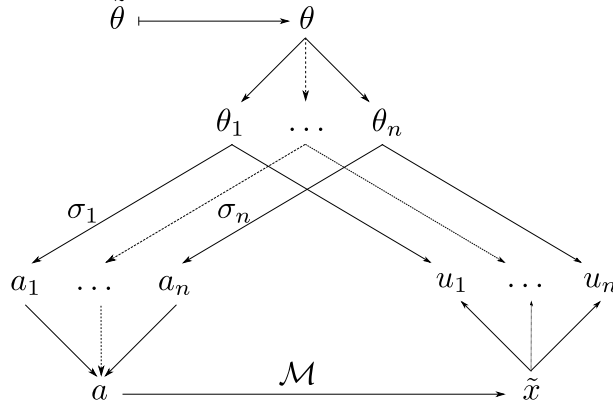


Figure 3.1 Variables

We end this section by recalling the definitions of best-reply (BR) strategies and Bayesian-Nash (BN) equilibria.

**Definition 1.** *The set of best-reply strategies  $\sigma_j^{BR}$  for player  $j$  to strategy profile  $\sigma_{-j}$  is given by*

$$BR_{\Sigma,j}(\sigma_{-j}) = \arg \max_{\sigma_j^{BR} \in \Sigma} \mathbb{E}_{\theta_j \sim \tilde{\theta}_j} [u_j(\theta_j, \mathcal{M}(\sigma_j^{BR}(\theta_j), \sigma_{-j}(\theta_{-j})))] . \quad (3.1)$$

The set  $BR_{\Sigma}(\sigma)$  of vectors  $\sigma^{BR}$  of best-reply strategy profiles for all players is given by

$$BR_{\Sigma}(\sigma) = \left\{ \sigma^{BR} \in \Sigma^n \mid \forall j \in N, \sigma_j^{BR} \in BR_{\Sigma,j}(\sigma_{-j}) \right\} . \quad (3.2)$$

The notation  $BR_{\Sigma}$  is used to denote that this is an operator that takes elements from  $\Sigma$  and outputs a subset of  $\Sigma$ . This remark will be useful when we get to the return-function best-replies.

**Definition 2.** *The set  $BN_{\Sigma}$  of Bayesian-Nash equilibria is the set of strategy profiles that are best replies against themselves, i.e.,*

$$BN_{\Sigma} = \left\{ \sigma^{BN} \in \Sigma^n \mid \sigma^{BN} \in BR_{\Sigma}(\sigma^{BN}) \right\} . \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Return Function

For a strategy profile  $\sigma_{-j} \in \Sigma^{-j}$ , we associate to player  $j$  the return function  $\varphi_j^{\sigma}(\cdot)$ . This function maps an action  $a_j$  of player  $j$  to the induced probability of outcome. More precisely,  $\varphi_j^{\sigma}(a_j)$  is the average of the probabilities of outcomes when player  $j$  plays action  $a_j$  and other players use strategies  $\sigma_{-j}$ , and when other player types follow the belief  $\tilde{\theta}_{-j}$ , i.e.,

$$\varphi_j^{\sigma}(a_j) = \mathbb{E}_{\theta_{-j} \sim \tilde{\theta}_{-j}} [\mathcal{M}(a_j, \sigma_{-j}(\theta_{-j}))] . \quad (3.4)$$

Intuitively, the return function  $\varphi_j^\sigma(\cdot)$  answers the following question asked by player  $j$  : *If I do that, what could happen and with what probability ?* Answering this question then enables the player to choose the best-reply action to his return function. This means, as we shall see, that the function contains all the information required to define the concept of a best-reply, and thus of Bayesian-Nash equilibria.

Note that the return function is itself defined by the other players' strategies, as well as by the belief  $\tilde{\theta}$  and the mechanism  $\mathcal{M}$ . However, since the belief  $\tilde{\theta}$  and the mechanism  $\mathcal{M}$  are fixed once and for all (i.e., no updating is required), we simplify the notation by not expliciting the dependencies of the return function on these objects.

As each return function  $\varphi_j^\sigma = \varphi_j^\sigma(\cdot)$  is a function that to an action  $a_j$  associates a probability  $\tilde{x} \in \Delta(X)$  on outcomes, it is an object of the space  $\Phi = \Delta(X)^A$ . In fact, we can extend our concept of return functions to any function  $\varphi \in \Phi$  that maps actions to probabilities on outcomes, even when  $\varphi$  is not obtained from a strategy profile  $\sigma$ . This will be of interest to us later, as we will be focusing on the natural topology of the space  $\Phi$  of return functions to prove the convergence of our algorithms for the computation of Bayesian-Nash equilibria.

The fact that some return functions are deduced from a strategy profile can then be reinterpreted by the mapping  $\phi : \Sigma^n \rightarrow \Phi^n$ , which maps strategy profiles to return-function profiles for all players. This mapping is defined by

$$\phi : \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mapsto \varphi^\sigma = (\varphi_1^\sigma(\cdot), \dots, \varphi_n^\sigma(\cdot)). \quad (3.5)$$

Before proceeding further, we would like to highlight three important features of the return functions : First, they avoid some of the inherent complexities related to the actions profile and to the mechanism. More precisely, given the knowledge of  $\sigma$ , it is in practice very hard to compute best-reply strategies, especially if the number of players is large, the beliefs are not simple distributions or if the mechanism is non-analytical<sup>2</sup>. We stress that even in such complex (and relevant in practice) cases, the return functions can still perform the task of computing best-reply strategies<sup>3</sup> Second, if the actions and outcomes are public information, then the return functions become observable objects<sup>4</sup>. Consequently, it is easy for a player

---

2. To illustrate, this is the typical setting of a shift scheduling problem, where, even when one knows all other agents' revealed types, it is not clear how to predict what schedules one can get, and thus, in particular, it is seemingly impossible to derive one's best-reply strategy.

3. This is particularly the case when the space of actions is smaller than the set of types. Recall that we have  $\Sigma = \Delta(A)^\Theta$  and  $\Phi = \Delta(X)^A$ . The sizes of these spaces are mainly determined by the sizes of the exponents. In the example of this paper, the two exponents  $\Theta$  and  $A$  are actually equal, hence we do not have an actual size reduction by using return functions (and yet, the return functions still turn out to be essential!). However, in the setting given by Rabinovich et al. [2013], this reduction is drastic, as  $\Theta$  is continuously infinite, but  $A$  is finite.

4. More precisely, in a repeated games, every player can observe both his action and the outcome (or, at least, his allocation). These data are sufficient to feed a return function estimation.



to iteratively approximate his own return function. Put differently, our approach does not require to estimate other players' strategies, which is a hard task as types often remain private information, even after the end of the game. Third, from Figure 3.2, we clearly see that there is a correspondence (mapping  $\phi$ ) between the best-reply strategies and the best-reply return functions. The same can be noted for the Bayesian-Nash equilibrium (see Theorem 1 below for a more precise statement). This means that all the classical descriptions of Bayesian games using strategy profiles can be translated in terms of return functions<sup>5</sup>. Let us now construct this translation.

Given a return function profile  $\varphi$ , the set of best-reply strategies for player  $j$  is given by

$$BR_{\Phi \rightarrow \Sigma, j}(\varphi) = \arg \max_{\sigma_j \in \Sigma} \mathbb{E}_{\theta_j \sim \tilde{\theta}_j} [u_j(\theta_j, \varphi_j(\sigma_j(\theta_j)))]. \quad (3.6)$$

From this, similarly to what has been done earlier, we define the set of best-reply strategy profiles  $BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)$ . The notation  $BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}$  highlights the fact that it is a correspondence from  $\Phi$  to  $\Sigma$  as depicted in Figure 3.2. Observe that this definition is consistent with previous ones for best-reply strategy profiles, because we have  $BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma)) = BR_{\Sigma}(\sigma)$ .

We can now reformulate the Bayesian game by focusing on return functions only, that is, by defining the set of best-reply return-function profiles to a return-function profile as follows :

$$BR_{\Phi}(\varphi) = \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)) = \{\phi(\sigma) \in \Phi^n \mid \sigma \in BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)\}. \quad (3.7)$$

A return-function profile  $\varphi^{BN} \in BN_{\Phi}$  is then a Bayesian-Nash equilibrium if  $\varphi^{BN} \in BR_{\Phi}(\varphi^{BN})$ . Since  $BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma)) = BR_{\Sigma}(\sigma)$ , our construction leads to  $\phi$  being a sort of morphism that preserves best-replies, in the sense that

$$\sigma^{BR} \in BR_{\Sigma}(\sigma) \Rightarrow \phi(\sigma^{BR}) \in BR_{\Phi}(\phi(\sigma)). \quad (3.8)$$

This property is represented graphically by the commutativity of the diagram of Figure 3.2, where double arrows represent correspondences, i.e., matching onto the power set of the output set.

In particular, this property implies the preservation of Bayesian-Nash equilibrium.

**Theorem 1.** *A return-function profile  $\varphi^{BN}$  is a Bayesian-Nash equilibrium if and only if there exists a Bayesian-Nash strategy profile  $\sigma^{BN} \in BN_{\Sigma}$  such that  $\varphi^{BN} = \phi(\sigma^{BN})$ . In other words,  $BN_{\Phi} = \phi(BN_{\Sigma})$ .*

*Démonstration.* Let  $\varphi \in BN_{\Phi}$ . Then,  $\varphi \in BR_{\Phi}(\varphi)$ , which means that  $\varphi \in \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi))$ .

---

5. This has interesting consequence. For instance, we can derive from Theorem 1 that the uniqueness of strategy Bayesian-Nash equilibrium implies that of return function Bayesian-Nash equilibrium.

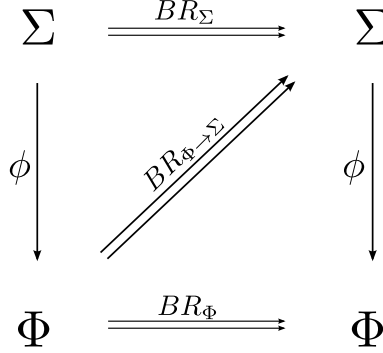


Figure 3.2 Diagram depicting the best-reply correspondences

Thus, there exists  $\sigma \in BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)$  such that  $\varphi = \phi(\sigma)$ . But  $BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi) = BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma))$ , thus  $\sigma \in BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma)) = BR_\Sigma(\sigma)$ . Therefore,  $\sigma \in BN_\Sigma$ , which means that  $\varphi \in \phi(BN_\Sigma)$ , and proves the first inclusion  $BN_\Phi \subseteq \phi(BN_\Sigma)$ .

Reciprocally, assume  $\varphi \in \phi(BN_\Sigma)$ . Then,  $\varphi = \phi(\sigma)$ , where  $\sigma \in BN_\Sigma$ . Thus,  $\sigma \in BR_\Sigma(\sigma)$ , which means that  $\sigma \in BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma)) = BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)$ . Thus,  $\phi(\sigma) = \varphi \in \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi)) = BR_\Phi(\varphi)$ . This proves the second inclusion  $BN_\Phi \supseteq \phi(BN_\Sigma)$ , and concludes the proof.  $\square$

What is more, a sequence  $\{\sigma^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , where  $\sigma^{i+1} \in BR_\Sigma(\sigma^i)$ , is associated to the sequence  $\varphi^i = \phi(\sigma^i) = \varphi_{\sigma^i}$ , which then satisfies  $\varphi^{i+1} \in BR_\Phi(\varphi^i)$ . This sequence defines a best-reply dynamics for return functions, which will be studied in the last section of this paper. It is this dynamics that is a generalization of mean-field games and of the approach used by Rabinovich et al. [2013].

**Remark 3.** *An example of the use of return functions that has been widely studied recently are mean-field games. In particular, in linear-quadratic mean-field games, the utility function of a player only depends on the average actions of the other players. The method used to solve these games can be seen as using the return function  $\varphi_j(a_j) = (a_j, m)$ , where  $m$  is the average trajectory of the other players and  $a_j$  is the trajectory of player  $j$ . What is then done is to compute the average trajectory of best-reply trajectories to the trajectory  $m$ . In other words, what is computed is precisely the best-reply return function. In such a case, the large-number-of-players hypothesis and the simplicity of the mechanism make the return function very simple. The difficulty of mean-field games lies rather in the complexity of the action space.*

**Remark 4.** *In Rabinovich et al. [2013], the authors compute Bayesian-Nash equilibria when the set of actions is finite and the game is symmetric. Their approach consists in computing the probability distribution of each action played. This corresponds to defining  $X = A^n$ ,  $\mathcal{M} = id_{|A^n}$  and  $\varphi(a) = (a, h_\sigma(\cdot))$ , where  $h_\sigma(\cdot)$  maps each action  $a'$  to the probability  $h_\sigma(a')$  that a*

player will choose this action. Later on, the authors retain the case where the utility functions are affine in the type  $\theta \in [0, 1]$ . In such a setting, the outcome, that is, the relevant information for the players, is reduced to the slope  $s$  and the intercept  $\iota$  of the utility function. Thus, their approach corresponds to using the return function  $\varphi : a \mapsto (s, \iota) \in \mathbb{R}^2$ . Since the set of actions is finite, the return function is equivalently represented by the vector  $L = (s_a, \iota_a)_{a \in A} \in (\mathbb{R}^2)^A$ . Next, the authors provide an algorithm to compute  $\epsilon$ -equilibria of a large class of auction problems.

Further, if  $\phi$  is continuous, then the convergence of the return-function sequence is implied by the convergence of the strategy-profile sequence.

**Theorem 2.** *If the mapping  $\phi$  is continuous and if the sequence  $\sigma^i$  converges to a Bayesian-Nash equilibrium  $\sigma^{BN}$ , then the sequence  $\varphi^i = \phi(\sigma^i)$  also converges to a Bayesian-Nash equilibrium.*

*Démonstration.* Since  $\phi$  is continuous,  $\varphi^i = \phi(\sigma^i)$  converges towards  $\phi(\sigma^{BN})$ . Since  $\sigma^{BN} \in BN_\Sigma$ , we have  $\phi(\sigma^{BN}) \in \phi(BN_\Sigma) = BN_\Phi$ , which proves the theorem.  $\square$

In the last section of this paper, we will show that for natural topologies on the two spaces (strategies and return functions), and given assumptions on the mechanism  $\mathcal{M}$ , the function  $\phi$  is continuous.

**Remark 5.** *In some Bayesian games, the types of the players are interdependent, and therefore the type of player could be an argument of the return function. For simplicity, we will not explicit such a dependence here, but there is a priori no conceptual difficulty to include such a relation in this model. Clearly, this would complicate the estimation of the return function, but, depending on the structure of the problem, its interpolation might still not be very difficult.*

**Remark 6.** *When all players  $j$  have the same beliefs  $\theta_{-j}$  about the other players' types, it is natural to assume that  $\varphi_j(\cdot) = \varphi(\cdot), \forall j \in N$ . This would occur in, e.g., games with a large number of players, where excluding a player will not fundamentally affect the probabilistic representation of the game for the other players. Clearly, in such a case, the mechanism must be symmetric. We will provide an illustrative example with symmetric players.*

### 3.3 Computation of Equilibria with the Return Function

The objective of this section is to show how the Bayesian-Nash equilibrium can be computed using the return function. To do this, we will iteratively compute the return function using a learning process. Our approach is similar to the idea of fictitious play, however with

an important difference. Indeed, whereas in fictitious play, we determine a player's best reply to the other players' mixed strategies, here, we compute the best action for each player, given his evaluation of how his actions affected the outcome in the previous iteration.

### 3.3.1 Computing the Return Function

To compute Bayesian-Nash equilibria, we propose to compute a sequence  $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$  of return function profiles, following the idea of having  $\varphi^{i+1} \in \Phi^{BR}(\varphi^i)$ . Instead of directly considering the players' strategies, our approach consists, at each iteration, in choosing a type profile  $\theta$  according to the belief  $\tilde{\theta}$ , and then maximizing  $u_j(\theta_j, \varphi_j^i(a_j))$  with respect to  $a_j$ . Algorithm 1 develops this idea, and in particular, the learning aspect involved in the computations :

---

**while** the convergence criterion is not verified **do**  
 (1) Generate a type profile  $\theta^i$  according to belief  $\tilde{\theta}$ .  
 (2) Compute the actions  $a_j^i$  maximizing the utility of the approximated return function  $u_j^i(\theta_j, \varphi_j^i(a_j^i))$ .  
 (3) Given actions  $a^i$ , compute an outcome  $x^i$ , according to probability  $\mathcal{M}(a^i)$ .  
 (4) Update the return functions  $\varphi_j^{i+1}$  given the actions  $a_j^i$  and the outcome  $x^i$ .  
 (5) Increment  $i$ .  
**end while**

Algorithm 1 Optimization of the parameterized mechanism

---

6

**Remark 7.** *In the second step, the maximizer may not be unique. As we shall see later in Section 5.3, such cases are in fact rare, and when they occur, we will retain the first maximizer found by the algorithm.*

If the convergence is met, then the resulting Bayesian-Nash equilibrium is the best-reply strategy to the computed return function.<sup>7</sup> The first and third steps of this algorithm are only as difficult as the problem's inputs, that is, the belief  $\tilde{\theta}$  and the mechanism  $\mathcal{M}$ . In some problems, the mechanism may require solving a large optimization problem, which may be quite difficult in itself. That being said, it is the second step that is most demanding in most applications, as it involves  $n$  non-linear optimization problems with a potentially large action space. To get around some of these difficulties, we will use some local optimization tools (e.g., a gradient-based method), interpolation and perturbation schemes. Finally, the fourth step represents the learning process used by a player to update his return function.

---

7. It is worth mentioning that this algorithm can easily be parallelized, to speed up the learning process.

### 3.3.2 Implementation

Let us first note that the estimation implementation procedure for the return function is simple and could be highly improved by using sophisticated optimization methods, but this is not a main concern in this paper. Technically speaking, the return function  $\varphi_j$  for player  $j \in N$  has been computed by a mapping container with keys  $a_j^i \in A$ . Each key  $a_j^i$  is associated to a set of observations  $(a_j^i, x^i) \in A \times X$  for player  $j$  at iteration  $i$ . In addition, each observation is associated to a reliability  $R^i$ . The more recent the observation is, the greater the reliability.

By never excluding past observations, 1 does not really produce the sequence whose convergence will be studied in Section 4, as  $\varphi^{i+1}$  is to be considered an average of  $\varphi^i$  and  $BR_\Phi(\varphi^i)$ . However, by choosing  $R^i = i$ , the relative weight of new observations increases, without being so overwhelming as to impose a huge variance due to the randomness of each measure. For these reasons, we should expect a similar convergence to the one we proved for the best-reply dynamics. This intuition is backed up by the following theorem.

**Theorem 3.** *Let  $U^i$  be a sequence of independent random variables on a bounded interval  $[0, U]$ ,  $V^i$  the sequence of weighted averages of the first  $i$  terms given by*

$$V^i = \left( \sum_{k=1}^i R^k U^k \right) / \left( \sum_{k=1}^i R^k \right). \quad (3.9)$$

*If  $R^i = i$  and the sequence  $\mathbb{E}[U^i]$  converges, then, almost surely,  $\lim V^i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U^i]$ .*

*Démonstration.* The proof is given in Appendix. It is a variant of Kolmogorov's strong law.  $\square$

Now, the return function  $\varphi_j$  is essentially used to compute the utility function  $u_j(\theta_j, \varphi_j(a_j))$ . Since no observations for action  $a_j$  may be available, and, even if they were, we might not have enough of them to have a reliable measure of the return function, we therefore propose to interpolate the return function to compute  $u_j(\theta_j, \varphi_j(a_j))$ . This interpolation relies on an assumption of continuity of the return function  $\varphi_j$  in  $a_j$ . This is a realistic hypothesis, as the probability on types obtained through  $\theta_{-j} \sim \tilde{\theta}_{-j}$  will smooth the return function through averaging. Denote by  $d_A(a_j, a_j^i)$  a distance between the actions  $a_j$  and  $a_j^i$ , and by  $w(d_A(a_j, a_j^i), R^i)$  a weight assigned to this distance, which is decreasing in  $d_A(a_j, a_j^i)$ .<sup>8</sup>

The interpolation we are using here is a mix of Radius-Based Function and nearest point

---

8. To illustrate, in Section 4, we will take  $w(d(a, a^i), R^i) = R^i / (1 + d(a, a^i))^2$ .

interpolation. Let

$$B_A^i(a_j, \alpha) = \{a_j^k \in A \mid k \leq i \text{ and } d_A(a_j, a_j^k) \leq \alpha\},$$

be the ball of center  $a_j$  and radius  $\alpha$ , where  $\alpha$  is an arbitrary positive number. Given  $\theta_j \in \Theta$ , the interpolated utility of player  $j$  when he chooses action  $a_j$  is estimated by

$$\hat{u}_j(\theta_j, \varphi_j^i(a_j)) = \frac{\sum_{a_j^k \in B_A^i(a_j, \alpha)} w(d_A(a_j, a_j^k), R^k) u_j(\theta_j, \varphi_j^i(a_j^k))}{\sum_{a_j^k \in B_A^i(a_j, \alpha)} w(d_A(a_j, a_j^k), R^k)}. \quad (3.10)$$

**Remark 8.** *To avoid being stuck at a non-optimal solution, we perturb the action profile obtained at the last iteration, and use it to update the return function. This will be done by simply adding a random number drawn from a given interval to each element of the last action vector. As observations pile up, this interval is narrowed.*

### 3.4 Illustrative Example : A Cake-Cutting Problem

To illustrate the theory developed above, we provide an example of a cake-cutting problem, which is of great use in operations research, as it allows the modelling of an assignment problem that includes the preferences of the agents involved. For instance, some shift-scheduling and matching problems exactly fit the cake-cutting problem (CCP) formalism. This problem can be stated as follows : given a cake and a set of players having additive utility functions over the subsets of the cake, the problem is how to allocate the cake to optimize a certain objective, while satisfying some constraints, such as fairness. This class of problem has been the subject of numerous papers ; see, e.g., Brams and Taylor [1995], Brams and Taylor [1996], Robertson and Webb [1998], and recent papers, e.g., Mossel and Tamuz [2010] and Chen et al. [2010].

#### 3.4.1 The Model

To simplify the computation, while still being able to illustrate our approach, we suppose that the cake initially contains a set  $K$  of homogenous portions. An outcome is a matrix

$$x = \{x_{jk}\} \in [0, 1]^{N \times K},$$

where  $x_{jk}$  is the portion  $k \in K$  allocated to player  $j \in N$ . Note that the set  $X$  of admissible outcomes (allocations) is given by

$$X = \{x \in [0, 1]^{N \times K} \mid \forall k \in K, \sum_{j \in N} x_{jk} \leq 1\}.$$

Denote by  $\theta_{jk} \geq 0$  the utility of player  $j \in N$  for portion  $k \in K$ . Thus, the type of player  $j$  is the vector  $\theta_j$ , and his utility function over any subset  $x_j$  of the cake is  $u_j(\theta_j, x_j) = \sum_{k \in K} \theta_{jk} x_{jk}$ . We normalize the utility function of each player for the whole cake to one. Therefore, if  $1_K = \{1\}_{k \in K}$  is the allocation of the cake, then  $u_j(\theta_j, 1_K) = \sum_{k \in K} \theta_{jk} = 1$ . As a result, the set  $\Theta$  of types is the polytope  $\Theta = \{\theta_j \in \mathbb{R}_+^K \mid \sum_{k \in K} \theta_{jk} = 1\}$ .

One approach to allocating the cake would be to solve the following linear optimization problem :

$$\begin{aligned} & \max_x u \\ & \text{subject to : } \sum_{k \in K} a_{jk} x_{jk} = u, \quad \forall j \in N, \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{3.11}$$

We will refer to this approach as mechanism  $\mathcal{M}$ , that is, the mechanism that associates an outcome  $x$  to a vector  $a$  of actions. We define an admissible action for player  $j$  to be one that satisfies the constraints  $a_{jk} \geq 0, k \in K$  and  $\sum_{k \in K} a_{jk} = 1$ . The normalization of the admissibility constraints on the types and actions implies that the set of actions and types are the same, i.e,  $A = \Theta$ . Note that if the above optimization problem has multiple solutions, then we will simply choose one of them randomly.

An example of a belief  $\tilde{\theta}$  is obtained through the following process : for each player  $j \in N$ , we randomly generate a vector in  $[0, 1]^K$  according to the uniform distribution. Then, we normalize this vector by dividing each component by the sum of all components, hence obtaining a vector  $\theta_j \in \Theta$ . Note that this mechanism  $\mathcal{M}$  is symmetric, and the beliefs follow identical probability distributions due to our way of generating the vector  $\theta_j, j \in N$ . A consequence of these symmetries is that the return function  $\varphi_j$  is independent of  $j$ , and therefore, we have  $\varphi_j = \varphi$  for all  $j \in N$ .

### 3.4.2 A Simple Two-Player Example

In principle, the above problem can be solved for any number of players and any set  $K$ . However, for the sake of graphical representation and analytical calculation, we first

focus on the simplest possible setting of two players, and  $|K| = 2$ . Let  $a_1 = (a_{11}, a_{12})$  and  $a_2 = (a_{21}, a_{22})$ . In this context, problem 3.11 becomes

$$\max u \tag{3.12}$$

$$\text{subject to : } u = a_{11}x_{11} + (1 - a_{11})x_{12}, \tag{3.13}$$

$$u = a_{21}(1 - x_{11}) + (1 - a_{21})(1 - x_{12}), \tag{3.14}$$

$$x_{11}, x_{12} \geq 0, \tag{3.15}$$

where  $x_{jk}$  represents the portion  $k = 1, 2$  allocated to player  $j = 1, 2$ . The description of the type  $\theta_j$  and the action  $a_j$  of each player  $j$  can now be reduced to one real variable each in  $[0, 1]$  that is,  $\theta_{j1}$  and  $a_{j1}$ . As a result, a strategy  $\sigma_j$  is a mapping from  $[0, 1]$  into  $[0, 1]$ .

To simplify the theoretical analysis, we assume that the beliefs  $\tilde{\theta}$  about types are obtained by drawing uniformly and randomly  $\theta_{j1}$  in  $[0, 1]$ , hence obtaining  $\theta_{j2} = 1 - \theta_{j1}$ . Also, we are re-scaling values of  $\theta$  and  $a$  by multiplying them all by 100. The equations (3.13, 3.14) then imply the equalities

$$(a_{11} + a_{21})x_{11} = a_{21} + (100 - a_{21})(1 - x_{12}) - (100 - a_{11})x_{12}, \text{ and} \tag{3.16}$$

$$(200 - a_{11} - a_{21})x_{12} = (100 - a_{21}) + a_{21}(1 - x_{11}) - a_{11}x_{11} \tag{3.17}$$

Using Algorithm 1, we compute a Bayesian-Nash equilibrium. We have proceeded to 500 iterations. In the 10 first iterations, players played truthfully, so that we could compute the truthful return function. Afterwards, at each iteration, players' types were drawn randomly, and their actions were computed by choosing the best-replies to the return function, given their types. Actions were then used to compute the outcome, which was then used to feed the return function.

Figure 3.3 represents the equilibrium strategies  $\sigma^{BN}$ . More precisely, it stands for the best-reply strategy to the return function obtained after 500 iterations. In Figure 3, 200 dots have been obtained by randomly drawing a player's type, and computing the best-reply action to the return function obtained after 500 iterations. The x-axis is the player's weight for a portion, while the y-axis is his announced weight for the portion. Different portions  $k \in K$  of the cake are depicted by different colors of dots. The dotted diagonal line corresponds to the truthful strategy  $\sigma_1^{truth}$ . As we can see in this figure, the equilibrium strategy  $\sigma_j^{BN}$  consists of overvaluing the portion he desires less, and undervaluing the portion he prefers. Let  $\varphi^{BN} = \phi(\sigma^{BN})$ .

The plain line in the figure represents a linear regression of the equilibrium strategy.



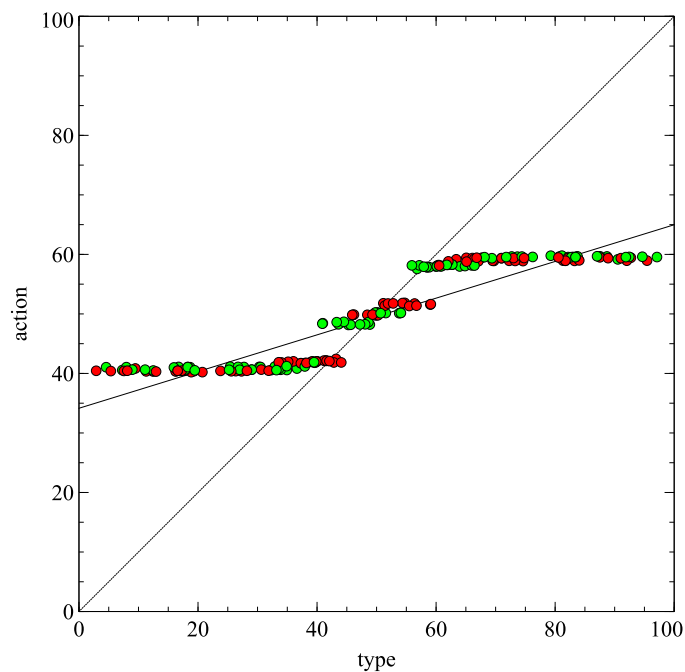


Figure 3.3 Bayesian-Nash Equilibrium with 2 Players and 2 Attributes

It is given by  $\sigma_j^{BN}(\theta_j) = 35 + 0.3\theta_j$ . Interestingly, this gives us a measure to analyze the convergence of the algorithm. Figure 3.4 displays the evolution of the linear regression slopes for every 10 iterations, as well as the corresponding average sum of squares.

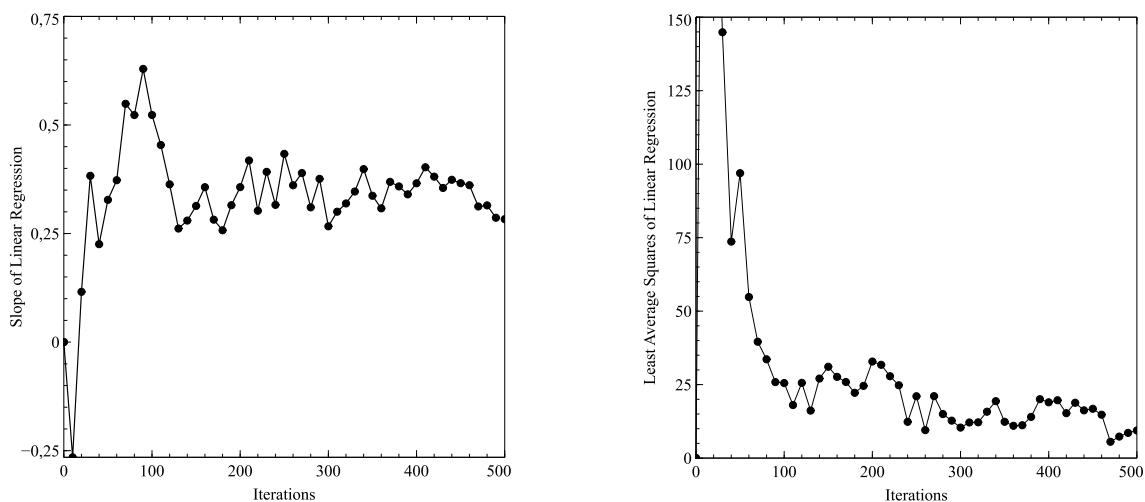


Figure 3.4 Slopes of Linear Regressions of Best-Replies to Return Function as Iterations Increase

It is important to notice that these figures show some convergence of the algorithm. While the slopes stabilize at about 0.3, the average sum of squares decreases to close to 0. However,

it is to be expected that this average sum will actually never reach zero. After all, it is clear from Figure 3.3 that the Bayesian-Nash equilibrium does not involve affine strategies<sup>9</sup>.

### 3.4.3 Analytical Analysis

In this simple example of two players and two attributes, using equations ( 3.16, 3.17), the mechanism can be drawn as in Figure 3.5. The main diagonal of the square corresponds to the two players having identical utility functions, in which case there are numerous solutions, all yielding utilities of 50 for both players. The other diagonal is another discontinuity of the mechanism, which appears when the first player's preference for the first portion equals the second player's preference for the second portion. The two diagonals define four areas. In each area, the mechanism is defined analytically as a function of the players' actions, as represented in Figure 3.5. This will enable us to verify the validity of our numerical determination of the Bayesian-Nash equilibrium; first, by analytically computing the best-reply strategy to the interpolated Bayesian-Nash strategy, and next, by showing that this analytical best-reply strategy is close to the interpolated Bayesian-Nash strategy.

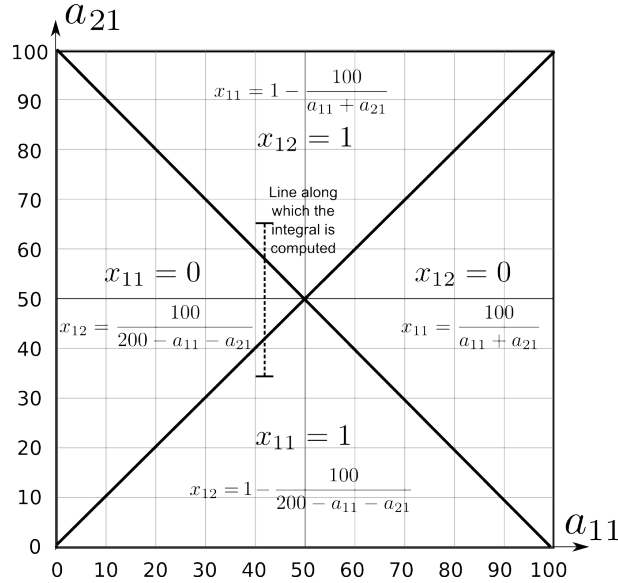


Figure 3.5 Mechanism of the Cake-Cutting Problem with 2 Attributes and 2 Players

A linear approximation of the strategy in Figure 3.3 consists of choosing the action  $a_{11}$  such that

$$a_{11} = \sigma^{BN}(\theta_{11}) = a_{min}^* + (100 - 2a_{min}^*)\theta_{11}.$$

9. In a simpler setting where the set of actions is finite, [Rabinovich et al., 2013] provide a more detailed and rigorous study of the convergence of fictitious play based on return functions.

The numerical value of  $a_{min}^*$  is approximately 35.

Now, supposing that player 2 chooses to play the computed Bayesian-Nash equilibrium strategy, we can evaluate the return function for player 1, and write his payoff if he chooses action  $a_{11}$  and has a type  $\theta_1$  :

$$u_1(\theta_1, \varphi^{BN}(a_1)) = \int_{\theta_2} u_1(\theta_{11}, \mathcal{M}(a_1, \sigma^{BN}(\theta_2))) d\tilde{\theta}_2, \quad (3.18)$$

$$= \int_{a_2=a_{min}^*}^{100-a_{min}^*} \frac{u_1(\theta_{11}, \mathcal{M}(a_1, a_2))}{100 - 2a_{min}^*} da_2. \quad (3.19)$$

If  $a_{11} \leq 50$ , we can separate the integral into the cases where  $a_{21} \leq a_{11}$ ,  $a_{11} \leq a_{21} \leq 100 - a_{11}$  and  $a_{21} \geq 100 - a_{11}$ . The three resulting terms are

$$\frac{1}{100 - 2a_{min}^*} \left[ \int_{a_{min}^*}^{\theta_{11}} \left[ \theta_{11} + (100 - \theta_{11}) \left(1 - \frac{100}{200 - a_{11} - a_{21}}\right) \right] da_{21} \right], \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{100 - 2a_{min}^*} \left[ \int_{a_{11}}^{100-a_{11}} (100 - \theta_{11}) \frac{100}{200 - a_{11} - a_{21}} da_{21} \right], \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{100 - 2a_{min}^*} \left[ \int_{100-a_{11}}^{100-a_{min}^*} \left[ \theta_{11} \left(1 - \frac{100}{a_{11} + a_{21}}\right) + (100 - \theta_{11}) \right] da_{21} \right]. \quad (3.22)$$

Calculating these integrals yields

$$(100 - 2a_{min}^*)u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1)) = 2(a_{11} - a_{min}^*) + \ln \frac{4(100 - a_{11})^2}{200 - a_{11} - a_{min}^*} + \theta_{11} \ln \frac{200 - a_{11} - a_{min}^*}{4(100 - a_{11})^2(100 + a_{11} - a_{min}^*)}. \quad (3.23)$$

Therefore, the level curves, for which  $u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1))$  is constant, are described by the following equation :

$$\theta_{11} = \frac{k - 2a_{11} - \ln \frac{4(100-a_{11})^2}{200-a_{11}-a_{min}^*}}{\ln \frac{200-a_{11}-a_{min}^*}{4(100-a_{11})^2(100+a_{11}-a_{min}^*)}}, \quad \text{for } a_{11} \leq 1/2, \quad (3.24)$$

with  $k = (100 - 2a_{min}^*)u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1)) + 2a_{min}^*$ . Therefore, we get  $u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1)) = \frac{k - 2a_{min}^*}{100 - 2a_{min}^*}$ . The level curves for expected utility  $u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1))$ , as functions of  $\theta_{11}$  and  $a_{11}$ , at the Bayesian-Nash equilibrium are shown in Figure 3.6, where an approximated best-reply affine

strategy is drawn in red.

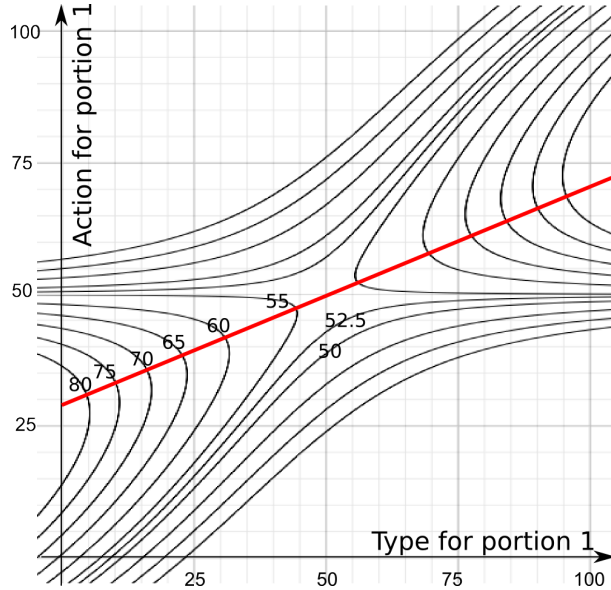


Figure 3.6 Level Curves of a Player's Expected Utilities at a Bayesian-Nash Equilibrium

The best-reply action of player 1 is the action that maximizes the expected value of  $u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1))$ , given a value of  $\theta_{11}$ . Therefore, if  $\theta_{11} = 20$  for instance, the largest value he can obtain for  $u_1(\theta_{11}, \varphi^{BN}(a_1))$  is 75, which is reached by choosing action  $a_{11} = 35$ . As we can easily see, the best-reply strategy does not coincide with the computed Bayesian-Nash equilibrium, but is very close to it. This shows that the use of the return-function method has been efficient for computing the Bayesian-Nash equilibrium.

### 3.4.4 The Non-Linear Component

An interesting observation can be made regarding a pattern in the Bayesian-Nash equilibrium strategies. Indeed, a closer look at the best-reply curves in Figure 3.3 reveals that they are S-shaped (like an  $\arctan(\cdot)$  function). Computing the best-reply strategy to the interpolated strategy in Figure 3.3, we again get this S-shaped curve as shown in Figure 3.7.

### 3.4.5 A More General Example

Now, we consider a more general case with 20 players and 3 attributes. As before, we use Algorithm 1 to derive a Bayesian-Nash return function after 100 iterations. Figure 3.8 displays the computed best-reply to this return function, and thus represents the Bayesian-Nash equilibrium strategy. Once again, we have plotted the announced weights as a function

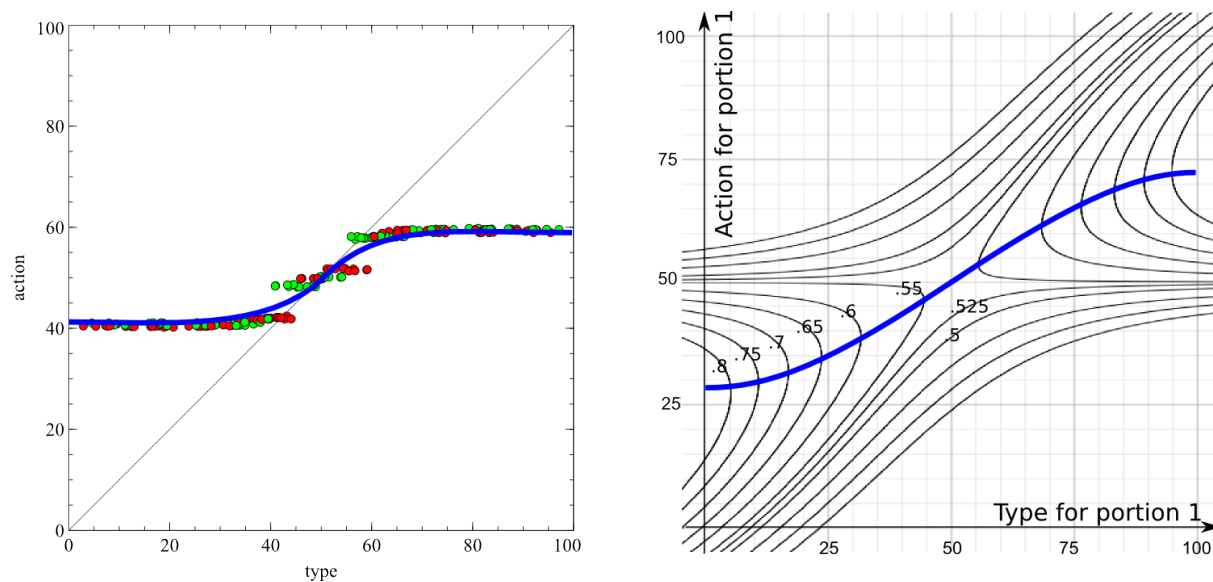


Figure 3.7 S-Shape of Computed Bayesian-Nash Equilibrium and the Best-Reply Strategy to a Linear Regression of the Computed Bayesian-Nash Equilibrium

of the type weights. However, this time, because the sets of types and of actions are 2-dimensional (they are the simplex of the 3-dimensional space), the figure only displays a projection of the full strategy at Bayesian-Nash equilibria. This explains the fuzziness of the cloud of dots.

Again, the Bayesian-Nash equilibrium shows an overbid for portions of the cake that the players do not want, while the portions they do want are underbid. This shift between underbidding and overbidding occurs at  $100/3$ , which corresponds to the player liking the portion just as much as the average of other players. In this more complex setting, analytical calculations are too complicated. Indeed, both the belief and the mechanism are hard to write algebraically, and consequently, it is extremely difficult to algebraically compute this Bayesian-Nash equilibrium.

Similarly to what we did in the 2-player 2-attribute case, we computed the slope of the linear regression of Figure 3.8, as well as the average of the squares in Figure 3.9.

We finish by commenting on the complexity of our algorithm. First, the algorithm's complexity time does not increase much with the number of players. Indeed, although the time it takes to perform one iteration of the loop of Algorithm 1 increases (only linearly) in the number of players, we generate many more observations at each iteration, which speeds up the approximation of the return function. Therefore, we expect to need fewer iterations in total to reach a Bayesian-Nash equilibrium. On the other hand, the complexity time increases more rapidly with the number of attributes. This is due to the the algorithm's second step,

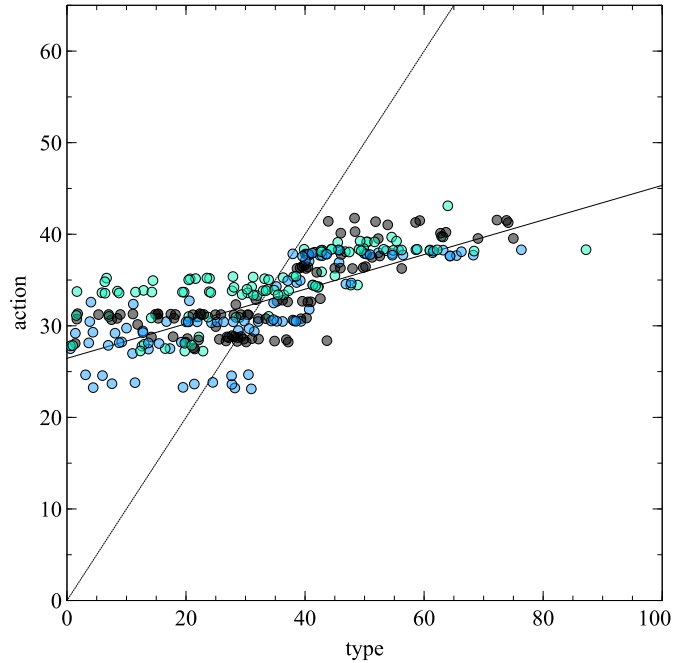


Figure 3.8 Bayesian-Nash Equilibrium with 20 Players and 3 Attributes

which involves an optimization over the set of actions. Obviously, the higher-dimensional is this set, the more time it takes to solve this optimization problem. Again, we mention that advanced methods for nonlinear optimization could be used to speed up the computation at this step.

### 3.5 Theoretical Convergence

In this last section, we provide a theoretical proof of the iterative algorithm's convergence to a Bayesian-Nash equilibrium. In particular, we show that, despite the cumulative error due to the approximations made at each successive iteration of the return function, we can guarantee its convergence to a Bayesian-Nash equilibrium.

We start with some necessary preliminaries of topology, define the metric topology in which the convergence is defined, and conclude with a convergence theorem. The next proposition introduces a metric topology on the set of outcome probabilities, which is the output set of the return function.

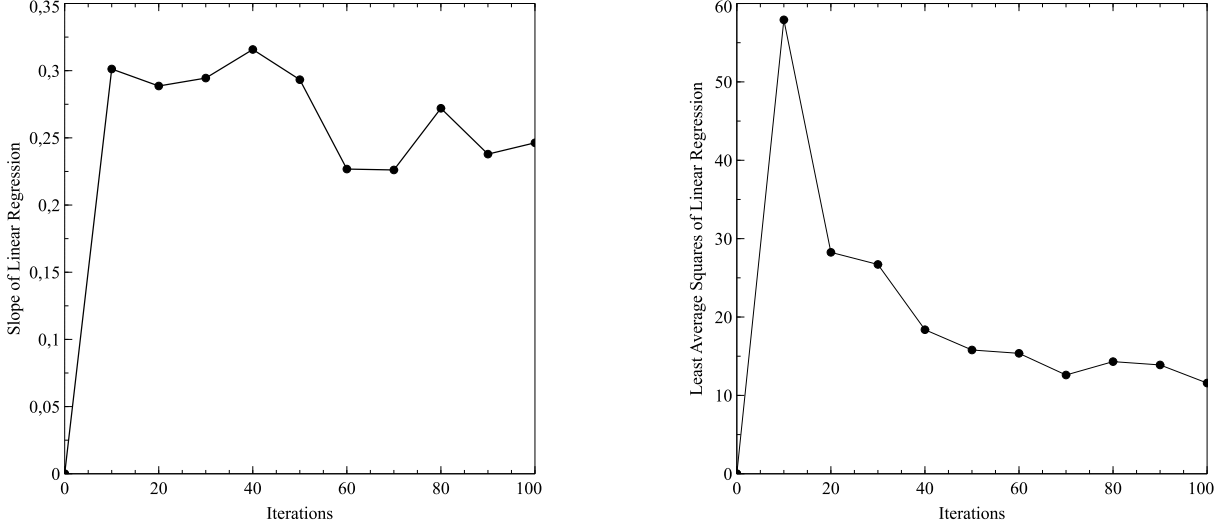


Figure 3.9 Slopes and Least Average Squares of Linear Regressions for 20 Players and 3 Attributes

**Proposition 1.** *The following distance  $d_{\Delta(X)}$  is a pseudometric<sup>10</sup> on  $\Delta(X)$  :*

$$d_{\Delta(X)}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = \sup_{j \in N, \theta_j \in \Theta_j} |u(\theta_j, \tilde{x}^1) - u(\theta_j, \tilde{x}^2)|. \quad (3.25)$$

*Démonstration.* The function  $d_{\Delta(X)}$  is obviously non-negative and symmetric, and it clearly satisfies the triangle inequality.  $\square$

The natural topology on return-function profiles is given by the following metric :

**Proposition 2.** *The following distance  $d_{\Phi}$  is a pseudometric on  $\Phi$  :*

$$d_{\Phi}(\varphi^1, \varphi^2) = \sup_{j \in N, a_j \in A} d_{\Delta(X)}(\varphi^1(a_j), \varphi^2(a_j)). \quad (3.26)$$

*Démonstration.* The function  $d_{\Phi}$  is obviously non-negative and symmetric, and it clearly satisfies the triangle inequality.  $\square$

From now on,  $\Phi$  will refer to the space occurring after the metric identification corresponding to  $d_{\Phi}$  is done. In particular,  $(\Phi, d_{\Phi})$  is a metric space.

---

<sup>10</sup>. We use the term pseudometric to highlight the fact that the distance could be equal to zero, without necessarily involving the same object.

### 3.5.1 Continuity of $\phi$

When we introduced the return function, we pointed out that the convergence of a sequence of best-replying strategy profiles could induce the convergence of the associated sequence of return-function profiles, provided that the mapping  $\phi$  is continuous. In this section, we characterize the conditions under which this mapping is indeed continuous.

To talk about continuity of  $\phi$ , we first need some topology on the set of strategy profiles. An important remark to be made first is that many strategy profiles yield the same outcomes. More precisely, if two strategy profiles lead to different actions for a set of types of probability zero, then they will be virtually identical. A usual way of formalizing this idea is by using quotient spaces, i.e., given a set of strategies, we group virtually identical strategies into a set. By doing this for all strategies, we divide the set of strategies into subsets, each containing virtually identical strategies. The quotient space is defined as the set of all these subsets. This construction is characterized by the following theorem.

**Theorem 4.** *Let us denote  $\sigma^1 \sim \sigma^2$  if  $\sigma^1(\theta)$  differs from  $\sigma^2(\theta)$  on a set of nil probability according to  $\tilde{\theta}$ . Then,  $\sim$  is a well-defined equivalence relation on  $\Sigma$ , and it defines the quotient space  $\Sigma_{\sim} = \Sigma / \sim$ . Moreover, the spaces  $BR_{\Sigma}(\sigma) / \sim$  are well-defined in  $\Sigma_{\sim}$  for all  $\sigma \in \Sigma$  and do not depend on the representative  $\sigma$  of its equivalence class.*

*Démonstration.* This is an immediate consequence of defining best-replies as the maximization of an expectation. Thus, nil probability spaces have no influence on a strategy's optimality.  $\square$

This theorem indicates that, to study best-reply dynamics and Bayesian-Nash equilibria, the right topology of strategy profiles should be defined on  $\Sigma_{\sim}$ .

Now, to go further, let us assume that there is some metric  $d_{\Delta(A)}$  on  $\Delta(A)$ . There is no canonical way of choosing such a metric on the space of probability distribution  $\Delta(A)$  (see, e.g., Gibbs and Su [2002] for a list of such metrics). For this reason, we will remain vague regarding the choice of the metric and simply ask that the following property be satisfied :

**Hypothesis 1.** *For any parameterized probabilities on actions  $\tilde{a}^1(t)$  and  $\tilde{a}^2(t)$ , where the parameter  $t$  follows some probability distribution  $\tilde{t}$ , the metric  $d_{\Delta(A)}$  satisfies*

$$d_{\Delta(A)}\left(\mathbb{E}_{t \sim \tilde{t}}[\tilde{a}^1(t)], \mathbb{E}_{t \sim \tilde{t}}[\tilde{a}^2(t)]\right) \leq \mathbb{E}_{t \sim \tilde{t}}\left[d_{\Delta(A)}(\tilde{a}^1(t), \tilde{a}^2(t))\right]. \quad (3.27)$$

This property is a sort of convexity property. It states that the distance between two means of probabilities on actions is smaller than the average distance between these two actions.



**Remark 9.** If  $A$  is finite, then the space  $\Delta(A)$  of probability distributions on  $A$  can be embedded into  $\mathbb{R}^A$ . Now, for any norm  $\|\cdot\|$  on  $\mathbb{R}^A$ , we have

$$\|\mathbb{E}[\tilde{a}^1(t)] - \mathbb{E}[\tilde{a}^2(t)]\| = \|\mathbb{E}[\tilde{a}^1(t) - \tilde{a}^2(t)]\| \leq \mathbb{E}[\|\tilde{a}^1(t) - \tilde{a}^2(t)\|]. \quad (3.28)$$

This proves that, if  $A$  is finite, all norms on  $\mathbb{R}^A$  define metrics on  $\Delta(A)$  that satisfy Hypothesis 1.

We can now define a metric on  $\Delta(A^n)$  using, for instance,

$$d_{\Delta(A^n)}(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2) = \sup_{j \in N} d_{\Delta(A)}(\tilde{a}_j^1, \tilde{a}_j^2). \quad (3.29)$$

Based on this (or on a similar metric that would rather involve an expectation), we can define the following metric on  $\Sigma_{\sim}$ .

**Proposition 3.** The distance  $d_{\Sigma}$  is a pseudometric on  $\Sigma_{\sim}$  by

$$d_{\Sigma}(\sigma^1, \sigma^2) = \sup_{j \in N} \mathbb{E}_{\theta_j \sim \tilde{\theta}_j} \left[ d_{\Delta(A)}(\sigma_j^1(\theta_j), \sigma_j^2(\theta_j)) \right].$$

*Démonstration.* The function  $d_{\Sigma}$  is obviously non-negative and symmetric, and it clearly satisfies the triangle inequality.  $\square$

This construction leads us to a framework to define the continuity of  $\phi$ , and a sufficient condition to prove it. To do so, we need the following lemma.

**Lemma 1.** For any strategies  $\sigma^1, \sigma^2$ , the following relation holds :

$$\sup_{j \in N} d_{\Delta(A^n)}\left((a_j, \sigma_{-j}^1(\tilde{\theta}_{-j})), (a_j, \sigma_{-j}^2(\tilde{\theta}_{-j}))\right) \leq d_{\Sigma}(\sigma^1, \sigma^2). \quad (3.30)$$

*Démonstration.* First note that, for any player  $j$ , we have

$$d_{\Delta(A^n)}\left((a_j, \sigma_{-j}^1(\tilde{\theta}_{-j})), (a_j, \sigma_{-j}^2(\tilde{\theta}_{-j}))\right) = \sup_{i \neq j} d_{\Delta(A)}(\sigma_i^1(\tilde{\theta}_i), \sigma_i^2(\tilde{\theta}_i)). \quad (3.31)$$

Thus, by taking the supremum over all players  $j$ , we have

$$\sup_{j \in N} d_{\Delta(A^n)}\left((a_j, \sigma_{-j}^1(\tilde{\theta}_{-j})), (a_j, \sigma_{-j}^2(\tilde{\theta}_{-j}))\right) = \sup_{j \in N} d_{\Delta(A)}(\sigma_j^1(\tilde{\theta}_j), \sigma_j^2(\tilde{\theta}_j)). \quad (3.32)$$

Now, using Hypothesis 1 on the metric  $d_{\Delta(A)}$ , given that  $\sigma_j^1(\tilde{\theta}_j) = \mathbb{E}_{\theta_j \sim \tilde{\theta}_j}[\sigma_j^1(\theta_j)]$ , we have, for all  $j$ ,

$$d_{\Delta(A)}(\sigma_j^1(\tilde{\theta}_j), \sigma_j^2(\tilde{\theta}_j)) \leq \mathbb{E}_{\theta_j \sim \tilde{\theta}_j} \left[ d_{\Delta(A)}(\sigma_j^1(\theta_j), \sigma_j^2(\theta_j)) \right]. \quad (3.33)$$

By taking the supremum over  $j$  in both sides, we obtain the exact formula in the lemma.  $\square$

**Theorem 5.** *If the mechanism  $\mathcal{M}$  is uniformly continuous from  $(\Delta(A^n), d_{\Delta(A^n)})$  to  $(\Delta(X), d_{\Delta(X)})$ , then so is the mapping  $\phi$  from  $(\Sigma_{\sim}, d_{\Sigma})$  to  $(\Phi, d_{\Phi})$ .*

*Démonstration.* Let  $\epsilon > 0$ . Since  $\mathcal{M}$  is uniformly continuous, then there exists  $\delta > 0$  such that, for any probabilities  $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2$  on actions, we have

$$d_{\Delta(A)}(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\Delta(X)}(\mathcal{M}(\tilde{a}^1), \mathcal{M}(\tilde{a}^2)) \leq \epsilon. \quad (3.34)$$

Note that we have

$$d_{\Delta(X)}\left(\left(\phi_j(\sigma^1)\right)(a_j), \left(\phi_j(\sigma^2)\right)(a_j)\right) = d_{\Delta(X)}\left(\mathcal{M}(a_j, \sigma_{-j}^1(\tilde{\theta}_{-j})), \mathcal{M}(a_j, \sigma_{-j}^2(\tilde{\theta}_{-j}))\right) \quad (3.35)$$

Now, using Lemma 1 and equation (3.34), if  $d_{\Sigma}(\sigma^1, \sigma^2) \leq \delta$ , then the right-hand side of equation (3.35) can be upper-bounded by  $\epsilon$ . By taking the supremum over all players  $j$  and all actions  $a_j \in A$ , we obtain the inequality

$$d_{\Phi}(\phi(\sigma^1), \phi(\sigma^2)) \leq \epsilon. \quad (3.36)$$

This proves the uniform continuity of  $\phi$ .  $\square$

The continuity of  $\phi$  then implies that any convergence of a sequence  $(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}$  of strategy profiles implies the convergence of the sequence  $(\phi(\sigma^i))_{i \in \mathbb{N}}$  of return function profiles. In other words,  $\phi$  does not only preserve best-replies and Bayesian-Nash equilibria, it also preserves the topology of these spaces.

### 3.5.2 Best-Reply Dynamics

Let us now turn our attention to the best-reply dynamics. To start with, we assume that there exists some subspace  $U$  of  $\Phi$  such that, for any  $\varphi \in U$ , the best-reply return function is uniquely defined and that  $BR_{\Phi}(\varphi) \subset U$ . With a slight abuse of language, this unique best-reply return function<sup>11</sup> is simply denoted by  $BR_{\Phi}(\varphi)$ . We will discuss the case of best-reply return functions that are not uniquely defined in section 5.3.

In our present setting, we thus have a mapping  $BR_{\Phi} : U \rightarrow U$  that defines the best-reply dynamics by  $(BR_{\Phi}^i(\varphi))_{i \in \mathbb{N}}$ , where  $BR_{\Phi}^i$  is the composition of  $i$  best-replies  $BR_{\Phi}$ , i.e.,  $BR_{\Phi}^i(\varphi) = \underbrace{BR_{\Phi}(BR_{\Phi}(\dots BR_{\Phi}(\varphi)\dots))}_{i \text{ times}}$ .

---

11. To improve the chances of uniqueness,  $\Phi$  is identified to the space separated by the pseudometric  $d_{\Phi}$ , i.e. the space  $\Phi / \sim$  where  $\varphi^1 \sim \varphi^2$  if  $d_{\Phi}(\varphi^1, \varphi^2) = 0$ .

**Remark 10.** *The Bayesian-Nash return functions in  $U$  are the fixed points of  $BR$ .*

**Theorem 6.** *Let  $(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a sequence of uniquely defined best-reply strategy profiles that converges to a Bayesian-Nash equilibrium  $\sigma^{BN} \in BN_\Sigma$ , and  $\varphi^i = \phi(\sigma^i)$ . Assume  $\phi$  continuous. Then,  $BR(\varphi^i)$  is always uniquely well-defined, we have  $\varphi^i = BR_\Phi^i(\varphi^0)$  and the sequence  $(BR_\Phi^i(\varphi^0))_{i \in \mathbb{N}}$  converges towards a Bayesian-Nash return function.*

*Démonstration.* First,  $BR_\Phi(\varphi^i) = \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma^i))) = \phi(BR_\Sigma(\sigma^i))$ . Since  $BR_\Sigma(\sigma^i)$  is uniquely well-defined by assumption, so is  $\phi(BR_\Sigma(\sigma^i)) = BR_\Phi(\varphi^i)$ .

Now, let us show by induction that  $\varphi^i = BR_\Phi^i(\varphi^0)$ . This equality holds trivially for  $i = 0$ . Assume it holds for  $i$ . We have  $\varphi^{i+1} = \phi(\sigma^{i+1}) \in \phi(BR_\Sigma(\sigma^i)) = \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\phi(\sigma^i))) = \phi(BR_{\Phi \rightarrow \Sigma}(\varphi^i)) = BR_\Phi(\varphi^i)$ , which we know to be a singleton. Thus,  $\varphi^{i+1} = BR_\Phi(\varphi^i) = BR_\Phi(BR_\Phi^i(\varphi^0)) = BR_\Phi^{i+1}(\varphi^0)$ . This concludes the proof by induction.

Finally, the last part of the theorem is an immediate consequence of Theorem 2.  $\square$

This theorem shows that the return function is just as good as strategy profiles to describe best-reply strategies, Bayesian-Nash equilibria and iterations of best-reply strategies towards equilibria. From now on, we will only be working on return functions. Thus, we denote  $BR = BR_\Phi$  and  $BN = BN_\Phi$ .

In Theorem 6, we assumed that the return function was computed exactly at each iteration. This is in fact not true as at each iteration an error is made. However, by sampling more and more at each iteration, we can guarantee that this error goes to 0. For the convergence to still hold under sampling errors, we need to introduce additional topological properties on the best-reply dynamics.

**Hypothesis 2.** *The best-reply function  $BR$  is a uniformly continuous function from  $U \subseteq \Phi$  into itself.*

This hypothesis will be useful when we consider reciprocal images of convergence spaces.

**Hypothesis 3.** *All sequences  $(BR^i(\varphi))_{i \in \mathbb{N}} \in U^\mathbb{N}$  converge uniformly, i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, K_\epsilon = \inf \left\{ K \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in U, \exists \varphi^\infty \in BN \cap U, \forall i \geq K, BR^i(\varphi) \in B(\varphi^\infty, \epsilon) \right\} < \infty. \quad (3.37)$$

Let us define  $BN_\epsilon$  by

$$BN_\epsilon = \left( \bigcup_{\varphi^{BN} \in BN \cap U} B(\varphi^{BN}, \epsilon) \right) \cap U. \quad (3.38)$$

Then, Hypothesis 3 can be reinterpreted as  $U = BR^{-K_\epsilon}(BN_\epsilon)$  for any  $\rho > 0$ , where  $BR^{-i}(V)$  denotes the reciprocal image of  $V$  by the mapping  $BR^i$ .

**Hypothesis 4.** *Bayesian-Nash return functions of  $U$  are locally contracting points of  $BR$ , i.e.,*

$$\exists \nu, \rho > 0, \forall \varphi^{BN} \in BN, \forall \varphi \in B(\varphi^{BN}, \rho), d_{\Phi}(BR(\varphi), \varphi^{BN}) \leq (1 - \nu)d_{\Phi}(\varphi, \varphi^{BN}). \quad (3.39)$$

This hypothesis is necessary to ensure that once the approximated sequence gets close to the Bayesian-Nash Equilibrium, it will remain close and actually converge.

**Proposition 4.** *Assume Hypotheses 3-4 hold true. Then, the sequence  $(BR^i(\varphi))_{i \in \mathbb{N}}$  converges towards  $\varphi^{BN} \in BN$  if and only if  $\varphi \in BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho))$ .*

*Démonstration.* If  $\varphi \in BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho))$ , then  $BR^{K\rho}(\varphi) \in B(\varphi^{BN}, \rho)$ . The contracting hypothesis allows us to conclude the convergence of  $BR^i(\varphi)$  towards  $\varphi^{BN}$ . Reciprocally, assume that  $BR^i(\varphi)$  converges to  $\varphi^{BN}$ . Since  $BR^{K\rho}(\varphi)$  is necessarily in a contracting area, it will necessarily converge. For the limit to be  $\varphi^{BN}$ , it needs to be the contracting area of  $\varphi^{BN}$ . Thus,  $BR^{K\rho}(\varphi) \in B(\varphi^{BN}, \rho)$ . This proves the inverse inclusion, and concludes the proof.  $\square$

**Corollary 1.** *Assume Hypotheses 3-4 hold true. If  $BR$  is continuous from  $U$  into itself, then the limit of sequences  $BR^i(\varphi)$  depends only on the connected component of  $\varphi$  in  $U$ .*

*Démonstration.* The set of points that converge to an equilibrium  $\varphi^{BN}$  is the set  $BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho))$ . Now, all points of  $BR^{-K\rho}(\bar{B}(\varphi^{BN}, \rho))$  also lead to a convergence to  $\varphi^{BN}$ , which implies that

$$BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho)) = BR^{-K\rho}(\bar{B}(\varphi^{BN}, \rho)). \quad (3.40)$$

Since the left-hand term is an open set, while the other is a closed set, this means that the set of all points converging to  $\varphi^{BN}$  is both open and closed in  $U$ . Now, from Hypothesis 3, we know that  $U$  is the union of all  $BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho))$ . This proves that each connected component of  $U$  belongs to one of the  $BR^{-K\rho}(B(\varphi^{BN}, \rho))$ , for  $\varphi^{BN} \in BN$ , and proves the corollary.  $\square$

This means that every connected component of  $U$  is matched with a Bayesian-Nash Equilibrium.

### 3.5.3 Discussion of Hypotheses

In this section, we briefly discuss the hypothesis needed to guarantee the theoretical convergence of the return functions towards a Bayesian-Nash equilibrium. Let us first give an intuition on why a non-unique best reply is rare. Suppose that  $\varphi$  had two best-replies,  $\varphi^1 \neq \varphi^2$ ; then these would be images by  $\phi$  of two best-replies  $\sigma^1 \neq \sigma^2$ . Consequently, this

means that there is a set of types of strictly positive probability for which  $u_j(\theta_j, \varphi(\sigma_j^1(\theta_j))) = u_j(\theta_j, \varphi(\sigma_j^2(\theta_j)))$ . In other words, a return function profile  $\varphi$  that has two best-reply strategies must be a zero of the mappings

$$\varphi \mapsto u_j(\theta_j, \varphi(\sigma_j^1(\theta_j))) - u_j(\theta_j, \varphi(\sigma_j^2(\theta_j))), \quad (3.41)$$

for a set of  $\theta_j$  of positive probability. Now, this mapping is continuous, and from our construction of the topology of  $\varphi$ , we expect that a slight change of  $\varphi$  will yield a non-zero value for this function. If this were the case, then the set of  $\varphi$  that has both  $\sigma^1$  and  $\sigma^2$  as best-replies would be some strict closed submanifold of the space of return functions. We acknowledge the fact that it is hard to rigorously state these intuitions, partly because, in general, these spaces are of infinite dimensions. Still, we may expect the set of return functions exhibiting multiple best-replies to be a union of such strict closed submanifolds. Consequently, we can expect its complement to be a dense open set of  $\Phi$ .

Now, observe that if  $U$  is a compact set, then a sufficient condition for Hypothesis 2 to be satisfied is for  $BR$  to be continuous. Hypothesis 3 holds if the union of  $BR^{-k}(B(\varphi^\infty, \epsilon))$  covers  $U$  for some integer  $k$ . Of course the actual satisfaction of this hypothesis depends on the choice of the set  $U$ . Here, there is a trade-off : the larger the set  $U$ , the easier it is to achieve the convergence (see Theorem 7 below), but the harder it is to satisfy Hypothesis 3. In any event, choosing a very large  $k$  should help to ensure the coverage of  $U$ .

Considering  $U$  to be the set of all return functions whose best-replies are uniquely defined is not sufficient to guarantee a continuous function  $BR$  to be uniformly continuous. However,  $BR$  may still be uniformly continuous, as we expect  $BR$  to be naturally extended by continuity on each closure of each connected component of  $U$ . Each closure could then be compact, which would prove  $BR$  to be uniformly continuous. Now if this closure leads to discontinuities on  $BR$ , it would be still possible to cut the edges of the connected components to define a compact set  $U$ , which would be a strict subset of the set of return functions whose best-replies are uniquely defined. This is illustrated in Figure 3.10 where curved lines represent the submanifolds mentioned above, and where the shaded area corresponds to the chosen  $U$ .

Finally, Hypothesis 4 is only slightly stronger than the asymptotic stability, which is almost necessary for any convergence. In particular, in the context of the next section, where the approximation errors are interpreted as the addition of small perturbations to the trajectory of sequences  $BR^i(\varphi)$ , this strong stability will be essential to guarantee any convergence.

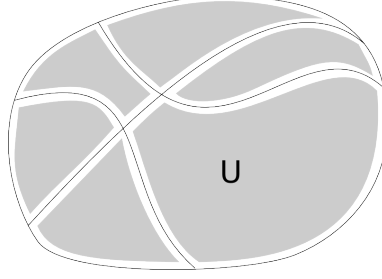


Figure 3.10 Choice of the set  $U$ , represented as the shaded area

### 3.5.4 Approached Best-Reply Dynamics

In this section, we deal with the convergence of the algorithm, where the approximation  $\varphi^{i+1} \approx BR(\varphi^i)$  is used. To have convergence, we assume that the distance between  $\varphi^{i+1}$  and  $BR(\varphi^i)$  is a decreasing function of  $i$  that goes to 0. We suppose that this can be achieved by more sub-iterations at iteration  $i$  to better approximate  $\varphi^{i+1}$ .

**Hypothesis 5.** *The sequence  $(\varphi^i)$  satisfies  $d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) \rightarrow 0$ .*

**Theorem 7.** *Assume Hypotheses 4-5 are satisfied. Consider the values  $\nu, \rho > 0$  defined by Hypothesis 4. If for a sufficiently large  $i$ ,  $\varphi^i \in BN_{\rho}$ , then the sequence  $(\varphi^i)$  converges towards a Bayesian-Nash Equilibrium.*

*Démonstration.* Under the assumptions, there exists  $K \in \mathbb{N}$  such that  $\varphi^K \in BN_{\rho}$  and  $d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) \leq \nu\rho/2$  for all  $i \geq K + 1$ . Let  $\varphi^{BN}$  be the equilibrium corresponding to  $\varphi^K$ . We have the following inequalities :

$$\forall i \geq K, d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, \varphi^{BN}) \leq d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) + d_{\Phi}(BR(\varphi^i), \varphi^{BN}) \quad (3.42)$$

$$\leq d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) + (1 - \nu)d_{\Phi}(\varphi^i, \varphi^{BN}) \quad (3.43)$$

$$\leq \nu\rho/2 + (1 - \nu)d_{\Phi}(\varphi^i, \varphi^{BN}). \quad (3.44)$$

We used an induction argument to justify that  $\varphi^i$  belonged to  $BN_{\rho}$ . Another induction argument implies that  $d_{\Phi}(\varphi^i, \varphi^{BN}) \leq \rho$ , which leads to

$$d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, \varphi^{BN}) \leq (1 - \nu/2)d_{\Phi}(\varphi^i, \varphi^{BN}), \quad (3.45)$$

and completes the convergence proof. □

Finally, we state this section's main theoretical result.

**Theorem 8.** *Assume Hypotheses 2, 3, 4 and 5 are satisfied. If for a sufficiently large  $i$ ,  $\varphi^i \in U$ , then the sequence  $(\varphi^i)$  converges to a Bayesian-Nash Equilibrium.*

*Démonstration.* See Appendix. □

Intuitively, we have contracting neighborhoods of Nash equilibria, whose inverse images by the best-reply dynamics take over nearly all the space of the return functions. The trouble though comes from errors. While the image of a neighborhood contracts it, errors dilate it. So, we need to make sure we can guarantee falling strictly enough in the interior of the neighborhood through contractions. This is where the uniform continuity of  $BR$  is required.

### 3.6 Conclusion

In this paper, we introduced the return function as a new approach to study Bayesian games and to compute Bayesian-Nash equilibria. The main novelty consists in studying best-reply dynamics in the space of return functions instead of doing it in the space of strategies. We theoretically showed the near equivalence of analyses in the different spaces. Then, we provided an algorithm that exploits this equivalence by using approximations of best-reply return functions, with samplings and interpolations. This algorithm turned out to be extremely efficient at computing Bayesian-Nash equilibria in settings that are hardly analytically accessible. In the simple 2-player case of cake-cutting, where some analytical remarks could be made, we showed how accurate numerical computations are, as they revealed patterns in the Bayesian-Nash equilibria that could hardly have been anticipated otherwise. In the much more complex setting of 20 players, we achieved successful computations with our methods. Finally, we put these experimental results on solid mathematical foundations in our last section, as we proved convergence despite inherent cumulative computational errors due to samplings and interpolations. We believe this work to be a breakthrough in computational approaches to Bayesian games, opening up new research orientations in further understanding Bayesian-Nash equilibria, with improvements in computational performance and with applications to diverse fields like Bayesian mechanism design.

### 3.7 Proof of Theorem 3

First, let us prove that the Cesaro series of the sequence  $U^i$  converges.

**Lemma 2.** *Given the hypothesis of Theorem 3, almost surely, we have*

$$\frac{1}{i} \sum_{k=1}^i U^k \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U^k]. \quad (3.46)$$

*Démonstration.* Since  $U^i \in [0, U]$ , we have  $\text{Var}(U^i) \leq U^2$ . Thus, the variances are finite and

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(U^i)}{i^2} \leq U^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty. \quad (3.47)$$

Thus, the lemma is guaranteed by Kolmogorov's strong law.  $\square$

Next, we need the following lemma.

**Lemma 3.** *Assume that  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow 0$  and  $b_n$  is an monotonic sequence of positive real numbers. Also assume that  $nb_n = O(c_n)$ , where  $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , and that  $\lim c_n = \infty$ . Then,  $\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \rightarrow 0$ .*

*Démonstration.* Let  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Without loss of generality, we can assume that  $b_0 = 0$ . Also, since  $nb_n = O(c_n)$ , we can define  $K > 0$  such that  $nb_n \leq Kc_n$ . Let  $\epsilon > 0$ , and  $N$  such that for all  $n \geq N$ , we have  $|A_n| \leq n\epsilon$ . Using Abel's transform, we have

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n a_k b_k = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \frac{A_n b_n}{c_n} + \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k). \quad (3.48)$$

Thus, we can deduce that, for  $n \geq N$ ,

$$\left| \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \frac{nb_n}{c_n} \epsilon + \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^N |A_k| |b_{k+1} - b_k| + \frac{\epsilon}{c_n} \left| \sum_{k=N}^{n-1} k (b_{k+1} - b_k) \right|. \quad (3.49)$$

By noting  $R_N = \sum_{k=1}^N |A_k| |b_{k+1} - b_k|$  which does not depend on  $n$ , and by using another Abel's transform, we have

$$\left| \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \frac{nb_n}{c_n} \epsilon + \frac{R_N}{c_n} + \frac{\epsilon}{c_n} \left| (n-1)b_n - \sum_{k=N}^{n-1} b_k \right| \leq \frac{2nb_n + R_N + c_n}{c_n} \epsilon \leq (2K+2)\epsilon, \quad (3.50)$$

for  $n$  high enough such that  $R_N/c_n \leq 1$ . This proves that  $\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \rightarrow 0$ .  $\square$

Finally, we get to the proof of Theorem 3.

*Démonstration.* We apply the previous lemma for  $a_i = U^i - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U^k]$  and  $b_i = R^i = i$ . The sequence  $b_i = i$  is clearly monotonic and positive. Plus,  $c_i = i(i-1)/2 \sim i^2/2$ . Thus,



$ib_i = i^2 = O(i^2) = O(c_i)$ , and, clearly,  $\lim c_i = \infty$ . Given that Lemma 2 guarantees that  $(\sum a_i)/i \rightarrow 0$ , then, almost surely, we have

$$\frac{1}{c_i} \sum_{k=1}^i b_i a_i = \frac{\sum_{k=1}^i R^i U^i}{\sum_{k=1}^i R^i} - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U^k] \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

In other words, the weighted average sequence  $V^i$  converges almost surely towards  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U^k]$ .  $\square$

### 3.8 Proof of Theorem 8

In order to control deviations of sequences, let us introduce the narrowing concept.

**Definition 3.** *The  $\alpha$ -narrowing  $N_\alpha(U)$  of a subset  $U$  of a metric set  $X$  is defined as follows*

$$N_\alpha(U) = \{x \in X, B(x, \alpha) \subseteq U\}. \quad (3.52)$$

Since all open sets contain balls, for all open sets  $U$ , there always is  $\mu > 0$  such that the  $\mu$ -narrowing of  $U$  is a non-empty. Any non-empty narrowing therefore contains balls, which means that it is a neighbourhood of some of its points.

**Definition 4.** *A set  $V$  is a strict narrowing of  $U$  if it is included in an  $\alpha$ -narrowing of  $U$ , and we denote this by  $V \sqsubset U$ , i.e.,*

$$V \sqsubset U \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, V \subseteq N_\alpha(U). \quad (3.53)$$

**Proposition 5.** *Assume  $V \subseteq U$ . Then, we have the following equality :*

$$\inf_{v \in V, x \notin U} d(v, x) = \sup\{\alpha \geq 0, V \subseteq N_\alpha(U)\}. \quad (3.54)$$

*Démonstration.* Let  $\alpha > 0$  such that  $V \subseteq N_\alpha(U)$ . Then, for any  $x_V \in V$ ,  $B(x_V, \alpha) \subseteq U$ . If  $x \notin U$ , then  $x \notin B(x_V, \alpha)$ , which proves that  $d(x_V, x) > \alpha$ . This shows that the first term is greater than the second.

Now, let  $\beta = \inf_{x \in V, x \notin U} d(x_V, x) > 0$ . Let  $0 < \alpha < \beta$ . If  $x_V \in V$ , any point  $x$  such that  $d(x_V, x) \leq \alpha$  cannot be outside of  $U$ . Thus,  $x \in U$ , which shows that  $B(x_V, \alpha) \subseteq U$ . As a result  $V \subseteq N_\alpha(U)$ . By having  $\alpha$  tending towards  $\beta$ , this shows that the second term is at least  $\beta$ . This proves the other inequality, and concludes the proof.  $\square$

**Lemma 4.** *If  $\alpha > \beta > 0$ , then  $N_\alpha(U)$  is included in  $N_\beta(U)$ .*

*Démonstration.* Let  $x \in N_\alpha(U)$ , then  $B(x, \alpha) \subseteq U$ . But since  $\alpha > \beta > 0$ ,  $B(x, \beta) \subseteq B(x, \alpha) \subseteq U$ . This proves that  $x \in N_\beta(U)$ , and concludes the proof.  $\square$

**Corollary 2.**  *$N_\alpha(U)$  is a strict narrowing of  $U$ .*

*Démonstration.* It suffices to take  $\beta = \alpha/2$  and to apply the previous lemma.  $\square$

**Lemma 5.** *Let  $\alpha, \beta > 0$ , and  $x \in X$ . Then  $B(x, \beta) \subseteq N_\alpha(B(x, \alpha + \beta))$ .*

*Démonstration.* Let  $y \in B(x, \beta)$ , and  $z \in B(y, \alpha)$ . We have

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \beta + \alpha, \quad (3.55)$$

thus  $z \in B(x, \alpha + \beta)$ , which proves that  $B(y, \alpha) \subseteq B(x, \alpha + \beta)$ . Incidentally,  $B(x, \beta) \subseteq N_\alpha(B(x, \alpha + \beta))$ .  $\square$

**Lemma 6.** *For any  $\alpha, \beta > 0$ , we have  $N_{\alpha+\beta}(U) \subseteq N_\alpha(N_\beta(U))$ .*

*Démonstration.* Let  $x \in N_{\alpha+\beta}(U)$ . Then  $B(x, \alpha + \beta) \subseteq U$ . But since

$$B(x, \alpha + \beta) \supseteq \bigcup_{y \in B(x, \alpha)} B(y, \beta), \quad (3.56)$$

we know that for all  $y \in B(x, \alpha)$ ,  $y \in N_\beta(U)$ . This shows that  $x \in N_\alpha(N_\beta(U))$ , and concludes the proof.  $\square$

**Corollary 3.** *If  $V$  is a strict narrowing of  $U$ , then there exists an  $\alpha$ -narrowing of  $U$  for which  $V$  is still a strict narrowing, i.e.,*

$$V \sqsubset U \Rightarrow \exists \alpha > 0, V \sqsubset N_\alpha(U). \quad (3.57)$$

*Démonstration.* Let  $\beta > 0$  such that  $V \subseteq N_\beta(U)$ , and let  $\alpha = \beta/2$ . Then,

$$V \subseteq N_\beta(U) = N_{\alpha+\alpha}(U) \subseteq N_\alpha(N_\alpha(U)), \quad (3.58)$$

which proves that  $V$  is a strict narrowing of  $N_\alpha(U)$ .  $\square$

**Theorem 9.** *Let  $f$  be a uniformly continuous function from  $X$  into itself. If  $V$  is a strict narrowing of  $U$ , then there exists an  $\alpha$ -narrowing of  $U$  such that the reciprocal image of  $V$  is a strict narrowing of the reciprocal image of  $N_\alpha(U)$ , i.e.,*

$$f \text{ uniformly continuous and } V \sqsubset U \Rightarrow \exists \alpha > 0, f^{-1}(V) \sqsubset f^{-1}(N_\alpha(U)). \quad (3.59)$$

*Démonstration.* Let  $\alpha$  such that  $V \sqsubset N_\alpha(U)$ , which exists because of Corollary 3. Let  $\epsilon = d(V, N_\alpha(U)^c)$ . We know that  $\epsilon > 0$  because of Proposition 5. Now, since  $f$  is uniformly continuous, there exists  $\delta > 0$  such that whenever  $d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$ , we have  $d(x, y) \geq \delta$ . If we take  $x \in f^{-1}(V)$  and  $y \in f^{-1}(N_\alpha(U))$ , this implies that  $d(f^{-1}(V), f^{-1}(N_\alpha(U))^c) \geq \delta > 0$ . Proposition 5 enables us to conclude that  $f^{-1}(V) \sqsubset f^{-1}(N_\alpha(U))$ .  $\square$

If  $U$  is a subset, then we denote  $f_\mu^{-1}(U) = f^{-1}(N_\mu(U))$ . If  $\mu \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  is a vector of positive numbers, then we define  $f_\mu^{-n}(U) = f_{\mu_n}^{-1}(f_{\mu_{n-1}}^{-1}(f_{\mu_{n-2}}^{-1}(\dots f_{\mu_1}^{-1}(U))))$ .

**Corollary 4.** *Assume that  $U$  has a non-empty narrowing and that  $f$  is uniformly continuous. Then,*

$$\forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists \mu \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}, f^{-i}(N_\epsilon(U)) \subseteq f_{\mu_1, \dots, \mu_i}^{-i}(U). \quad (3.60)$$

*Démonstration.* It suffices to apply Theorem 9 to construct the sequence of  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ .  $\square$

Finally, we can prove Theorem 8.

*Démonstration.* Consider  $\nu, \rho > 0$  which corresponds to Hypothesis 4. Let  $\epsilon = \rho/2$ . According to lemma 5, we have  $BN_\epsilon \subseteq N_\epsilon(BN_\rho)$ . Now, because of Hypothesis 2 of uniform continuity, we can apply Corollary 4 for  $n = K_\epsilon$ , which provides the existence of  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq K_\epsilon} \in (\mathbb{R}_+^*)^{K_\epsilon}$  such that

$$\forall i \in \{1, \dots, K_\epsilon\}, BR^{-i}(N_\epsilon(BN_\rho)) \subseteq BR_{\mu_1, \dots, \mu_i}^{-i}(BN_\rho). \quad (3.61)$$

Thus,

$$BR_\mu^{-K_\epsilon}(BN_\rho) \supseteq BR^{-K_\epsilon}(N_\epsilon(BN_\rho)) \supseteq BR^{-K_\epsilon}(BN_\epsilon) = U, \quad (3.62)$$

according to Hypothesis 3. Now, let  $\alpha = \inf\{\mu_i, 1 \leq i \leq K_\epsilon\} \cup \{\nu\rho/2\}$ . We know that  $\alpha > 0$ , because all  $\mu_i$  are positive, and because there is a finite number of them. Hypothesis 5 now implies that there is a rank  $K_0$  such that, for all  $i \geq K_0$ , we have  $d_\varphi(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) \leq \alpha$ . Now, if  $(\varphi^i)$  comes an infinite number of times inside  $U$ , then there is  $K_1 \geq K_0$  such that  $\varphi^{K_0} \in U$ .

Now, let us show by induction over  $i$  that  $\varphi^{K_1+i} \in BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_\epsilon-i}}^{-K_\epsilon+i}(BN_\rho)$  for  $0 \leq i \leq K_\epsilon$ . We know that  $\varphi^{K_1+0} = \varphi^{K_1} \in U = BR_\mu^{-K_\epsilon+0}(BN_\rho)$ . Let us now assume that the induction is true for  $i$ . Then, using the definition of  $BR_\mu^{-n}$ ,

$$\varphi^{K_1+i} \in BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_\epsilon-i}}^{-K_\epsilon+i} = BR^{-1}(N_{\mu_{K_\epsilon-i}}(BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_\epsilon-i-1}}^{-K_\epsilon+i+1}(BN_\rho))). \quad (3.63)$$

This means that  $BR(\varphi^{K_1+i}) \in N_{\mu_{K_\epsilon-i}}(BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_\epsilon-i-1}}^{-K_\epsilon+i+1}(BN_\rho))$ , and implies that all points within a distance less than or equal to  $\mu_{K_\epsilon-i}$  are included in  $BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_\epsilon-i-1}}^{-K_\epsilon+i+1}(BN_\rho)$ . Since

$d_{\Phi}(BR(\varphi^{K_1+i}), \varphi^{K_1+i+1}) \leq \alpha \leq \mu_{K_{\epsilon}-i}$ , we deduce that

$$\varphi^{K_1+i+1} \in BR_{\mu_1, \dots, \mu_{K_{\epsilon}-i-1}}^{-K_{\epsilon}+i+1}(BN_{\rho}), \quad (3.64)$$

which proves the induction proof. Eventually,  $\varphi^{K_1+K_{\epsilon}} \in BN_{\rho}$ .

Since,  $K_1$  was chosen such that  $d_{\Phi}(\varphi^{i+1}, BR(\varphi^i)) \leq \alpha \leq \nu\rho/2$  for all  $i \geq K_1$ , we can then apply Theorem 7, which proves that the sequence  $\varphi^i$  converges towards a Bayesian-Nash Equilibrium.  $\square$

### 3.9 Compléments à l'article

Le choix de la croyance  $\tilde{\theta}$  peut porter à confusion, puisque nous avons utilisé deux croyances différentes dans le cas à 2 portions et dans le cas à 3 portions. Pour cette raison, nous avons refait les simulations de la section 3.4.5 dans le cas où  $\tilde{\theta}$  est une distribution uniforme sur le simplexe de  $\mathbb{R}^K$ , même lorsque  $|K| > 2$ . Cette distribution peut être simulée en tirant  $|K|$  variables  $x_1, \dots, x_{|K|}$  distribuées selon une loi exponentielle, et en divisant ensuite chaque coordonnée par les sommes des coordonnées. Comme attendu, ceci n'affecte que peu les résultats qualitatifs. Voici les graphes qui remplacent alors les Figures 3.8 et 3.9 dans le cas d'une croyance uniforme.

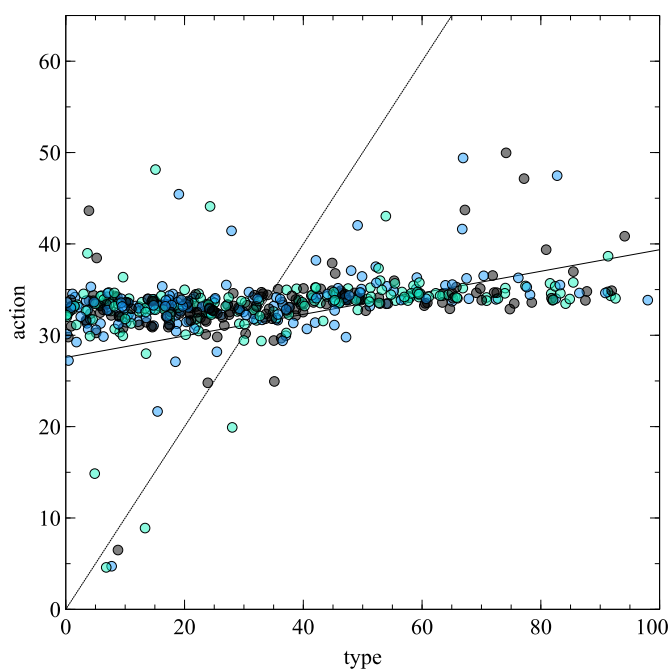


Figure 3.11 Bayesian-Nash Equilibrium with 20 Players and 3 Attributes when  $\tilde{\theta}$  is uniform

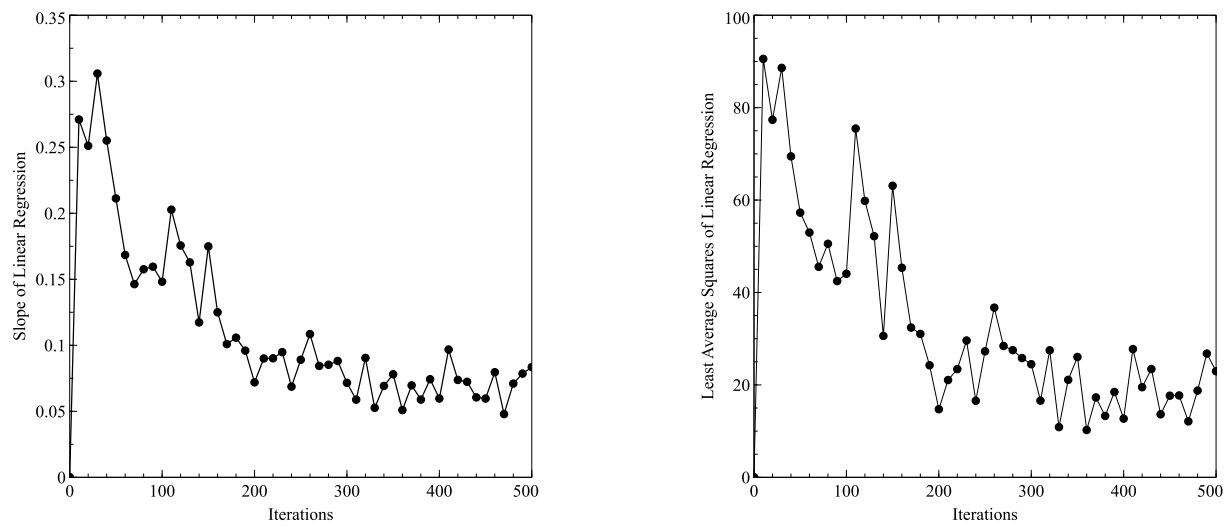


Figure 3.12 Slopes and Least Average Squares of Linear Regressions for 20 Players and 3 Attributes when  $\tilde{\theta}$  is uniform

## CHAPITRE 4

ARTICLE 2 : A HEURISTIC OPTIMIZATION OF BAYESIAN  
INCENTIVE-COMPATIBLE CAKE-CUTTING

---

**A Heuristic Optimization of Bayesian  
Incentive-Compatible Cake-Cutting**

---

LÊ NGUYÊN HOANG

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

FRANÇOIS SOUMIS

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

GEORGES ZACCOUR

*GERAD, HEC Montréal*Soumis à *Optimization Letters*.

**Abstract.** Cake-cutting is a popular metaphor for problems where a principal agent has to fairly allocate resources. Such problems cover various areas of operations research and management science, like, for instance, shift scheduling with employees' preferences. Recent work focuses on optimizing social efficiency while guaranteeing fairness Cohler et al. [2011], Caragiannis et al. [2011], Bei et al. [2012], but ignore incentive-compatibility constraints. Conversely, Mossel and Tamuz [2010], Chen et al. [2013] focused fairness and incentive-compatibility without aiming at social efficiency. In this paper, we present a new approach to optimize both a compromise of fairness and social efficiency, while also guaranteeing Bayesian incentive-compatibility. This approach relies on the revelation principle Gibbard [1973], Myerson [1979] and the computation of Bayesian-Nash equilibria proposed by Hoang et al. [2014]. This computation consists in tracking a best-reply dynamics of return function, which are mappings of action to probability distribution on outcomes, instead of the more classical but harder-to-compute best-reply dynamics of strategies. In essence, it consists in exploring a parameterized class of revelation mechanisms, which we know by construction to be Bayesian incentive-compatible. We highlight the efficiency of this approach through numerical results on instances of respectively 2, 5 and 20 agents.

## 4.1 Introduction

In this paper, we propose a mechanism to divide a resource among a set of agents who have heterogeneous preferences and may not want to reveal their preferences truthfully. We suppose that the mechanism is designed by a principal agent (or mechanism designer), whose aim is to achieve a specified objective, e.g., maximizing a weighted sum of collective efficiency and fairness indicators. Our contribution belongs to the vast literature dealing with the cake-cutting problem, which is considered a dynamic and challenging field of investigation in operations research and management science (see, e.g., Brams and Taylor [1996], Robertson and Webb [1998], Mossel and Tamuz [2010], Chen et al. [2013]).

The cake-cutting problem, which was first introduced in Steinhaus [1948], consists in devising a method to fairly allocate a cake to a set of agents. Many procedures to do so have been proposed over time to do so, including the well known *last diminisher method* Steinhaus [1948], the *divide-and-choose* approach, the *moving knife procedure* Brams and Taylor [1996], and the *successive pairs algorithm* Robertson and Webb [1998]. These mechanisms share the property of being weakly incentive-compatible, that is, an untruthful claimer may regret his untruthfulness at some point. However, if one requires a stronger concept of incentive-



compatibility<sup>1</sup>, e.g., dominant strategy incentive-compatibility (DSIC), meaning that agents always have incentives to be truthful, then the problem may end up having no conceptually satisfying solution. To illustrate, Mossel and Tamuz [2010] proved that there exists no deterministic DSIC super-fair division to the cake-cutting problem. We recall that a super-fair division yields the exact (or proportional) division solution when all players have the same preferences, and does strictly better than exact division otherwise. Recently, Chen et al. [2013] added the assumption that players have piecewise constant valuation functions, and provided a proportionally fair and envy-free deterministic DSIC mechanism. A randomized DSIC super-fair division is discussed in Mossel and Tamuz [2010] and Chen et al. [2013].

In the above-cited studies, little attention has been given to maximizing social efficiency, which could be a legitimate objective in some situations. In Cohler et al. [2011], the authors provided a tractable, nearly optimal envy-free mechanism when the agents truthfully report their valuations of the cake. They also gave optimal envy-free mechanisms for certain specific structures of the agents' preferences. Note that the difficulty in determining a socially efficient solution is due to the assumptions that (i) the cake is divisible into an infinite number of portions, and (ii) the agents' utility functions are complex mathematical objects involving probability measures. Here, we assume that the cake is made of homogeneous portions, with the agents having constant valuations over each of these portions. In particular, this will enable us to write the set of admissible allocations as a polytope.

Our approach has its roots in mechanism-design theory, where one retains Bayesian incentive-compatibility (BIC) instead of DSIC. Intuitively, the idea is to design a mechanism in such a way that truthfulness is part of a Bayesian-Nash equilibrium, meaning that each agent finds it optimal to reveal his true preferences when all others are doing the same. This is the revelation principle introduced in Myerson's seminal paper Gibbard [1973], Myerson [1979, 1981] in the context of auctions. To compute Bayesian-Nash equilibria, we implement the algorithm proposed in Hoang et al. [2014], which uses the concept of return functions. A return function is a mapping of an agent's action to the induced probability distribution on his outcomes. The authors showed that any strategy profile in a Bayesian game generates a return-function profile that captures all the information required to describe the best-reply dynamics. Consequently, any best-reply dynamics of strategies is naturally mapped to a best-reply dynamics of return functions. It is significant that return functions and best-replies to return functions are much easier to compute than strategies and best-replies to strategies. This advantage is particularly valuable when the beliefs or the Bayesian game cannot be described analytically, as will be the case in our cake-cutting problem. In a second step, we

---

1. It is well-known that there is no loss of generality when focusing on incentive-compatible mechanisms only. This is an aftermath of the revelation principle, which asserts that any mechanism at an equilibrium is equivalent to an incentive-compatible mechanism.

apply the revelation principle to obtain a BIC mechanism. Finally, we compute the value of the mechanism designer's objective function. This is done iteratively, where at each iteration, the principal draws types of players according to beliefs. Our approach is next illustrated on a series of problems involving 2, 5 and 20 players, respectively.

The rest of the paper is organized as follows : In Section 2, we provide the theoretical foundations to our approach by describing a general setting of mechanism design and by introducing the return function. In Section 3, we present algorithms for computing Bayesian-Nash equilibria, implementing the revelation principle and optimizing the mechanism designer's objective. In Section 4, we provide an illustrative example of a cake-cutting problem and report the computational results. Finally, we briefly conclude in Section 5.

## 4.2 General Model

Denote by  $N = \{1, \dots, n\}$  the set of players participating in the cake-sharing problem. The mechanism designer (or principal) in charge of dividing the cake seeks an allocation that optimizes a given criterium specified below. Denote by  $x_i$  the share of player  $i$ , with  $x_i \in X_i$ , and by  $\theta_i$  the type of player  $i$ , with  $\theta_i \in \Theta_i$ . Player  $i$ 's preferences are described by a utility function that depends only these data, namely,  $u_i(\theta_i, x_i) \in \mathbb{R}$ . We assume that the principal and all players but  $i$  have the same incomplete information about player  $i$ 's type  $\theta_i$ . This incomplete information is described by a probability distribution, called belief,  $\tilde{\theta}_i \in \Delta(\Theta_i)$  on player  $i$ 's type. We suppose that the beliefs about the players' types are independent.

### 4.2.1 Direct Mechanisms

The principal would ideally choose (possibly stochastically) an allocation  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  with the knowledge of the type profile  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta$ . Such a choice is known as a direct mechanism.

**Definition 5.** *A direct mechanism  $\mathcal{D}$  is a mapping of type profiles  $\theta \in \Theta$  into probability distributions on outcomes  $\mathcal{D}(\theta) \in \Delta(X)$ , i.e.,  $\mathcal{D} : \Theta \rightarrow \Delta(X)$ . We denote by  $\mathbb{D}$  the set of direct mechanisms.*

The principal's payoff is defined by the function  $\mathcal{P} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , and her optimization (or mechanism design) problem consists in maximizing  $\mathcal{P}$  over a set of incentive-compatible direct mechanisms. The objective function may depend on the belief  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n)$ . For instance, the objective function could combine social efficiency and fairness as follows :

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathbb{E}_{\theta \sim \tilde{\theta}} \left[ \mathbb{E}_{x \sim \mathcal{D}(\theta)} \left[ \sum_{i \in N} u_i(\theta_i, x_i) - \lambda \text{Var} \{u_i(\theta_i, x_i)\}_{i \in N} \right] \right], \quad (4.1)$$

where  $Var$  is some measure of the variations among players' utilities, and  $\lambda$  is a nonnegative scaling parameter.

The concept of incentive compatibility requires us to highlight the fact that a mechanism-design problem is a Bayesian game. Indeed, when players learn about the direct mechanism that the principal wants to implement, they may choose to reveal their preferences untruthfully. We distinguish revealed preferences from intrinsic preferences  $\theta \in \Theta$  by calling them actions. An action profile is denoted by  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Theta$ .

A (mixed) strategy  $s_i$  for player  $i$  is a mapping from the set  $\Theta_i$  into  $\Delta(\Theta_i)$ , i.e.,  $s_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(\Theta_i)$ . Denoting by  $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$  a strategy profile where  $S = \prod_{i \in N} S_i$  and  $S_i$  is the set of mixed strategies of player  $i$ , we can define the utility of that player in its classical form, that is, in terms of strategies as follows :

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \mathbb{E}_{\tilde{\theta}} \left[ \mathbb{E}_{x_i \sim \mathcal{D}_i(s(\theta))} [u_i(\theta_i, x_i)] \right], \quad (4.2)$$

where  $s_{-i}$  is the strategy profile of all players but  $i$ . The truthful strategy  $s_i^{truth}$  of player  $i$  is then an identity  $s_i(\theta_i) = \theta_i$  for all  $\theta_i \in \Theta_i$ , where we have identified  $\theta_i$  with the Dirac distribution  $\delta_{\theta_i} \in \Delta(\Theta_i)$ .

Equation 4.2 underlines how the direct mechanism  $\mathcal{D}$  defines a Bayesian game. A Bayesian-Nash equilibrium of that game is then a strategy profile  $s^{BN}$  such that every  $s_i^{BN}$  is a best reply to  $s_{-i}^{BN}$ . This leads us to the definition of Bayesian incentive-compatibility.

**Definition 6.** *A direct mechanism  $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$  is Bayesian incentive-compatible (BIC) if truthfulness is a Bayesian-Nash equilibrium. We denote by  $\mathbb{D}_{BIC}$  the set of BIC mechanisms.*

The Bayesian-mechanism-design problem can then be stated as follows :

$$\mathcal{P}_{BIC}^* = \sup_{\mathcal{D}_{BIC} \in \mathbb{D}_{BIC}} \mathcal{P}(\mathcal{D}_{BIC}). \quad (4.3)$$

We will use the term BIC-optimal value for the optimal value  $\mathcal{P}_{BIC}^*$  of the Bayesian-mechanism-design problem. This value could be compared to the ideal value that the mechanism designer could achieve if she had complete information about players' types. This ideal value is given by

$$\mathcal{P}_{ideal}^* = \sup_{\mathcal{D} \in \mathbb{D}} \mathcal{P}(\mathcal{D}). \quad (4.4)$$

Note that the BIC requirement can be regarded as adding an infinite number of incentive-compatibility constraints of the form

$$\forall s_i \in S_i, \quad u_i(s_i^{truth}, s_{-i}^{truth}) \geq u_i(s_i, s_{-i}^{truth}). \quad (4.5)$$

The ideal value computation is then obtained by relaxing the Bayesian-mechanism-design problem, and therefore  $\mathcal{P}_{ideal}^*$  yields an upper bound to the BIC-optimal value  $\mathcal{P}_{BIC}^*$ . Clearly,  $\mathcal{P}_{ideal}^*$  is in general easier to compute than  $\mathcal{P}_{BIC}^*$ .

#### 4.2.2 Revelation Principle

The focus on direct mechanisms instead of say, more sophisticated ones in terms of complex sets of actions, is reminiscent of the revelation principle. Given a mechanism  $\mathcal{D}$  and a Bayesian-Nash equilibrium strategy profile  $s^{BN}$ , we can construct the revelation mechanism  $\mathcal{D}_{Rev} : \Theta \rightarrow \Delta(X)$  defined by

$$\mathcal{D}_{Rev}(\theta) = \mathcal{D}(s^{BN}(\theta)). \quad (4.6)$$

In other words,  $\mathcal{D}_{Rev}$  is merely the function composition  $\mathcal{D} \circ s^{BN}$ . Note that the revelation mechanism does not require the initial mechanism to be direct, but we do not make the general case explicit, for the sake of expository clarity. What is important is that we have the following theorem.

**Theorem 10.** *The set of revelation mechanisms coincides with  $\mathbb{D}_{BIC}$ .*

*Sketch of proof.* Consider a BIC mechanism  $\mathcal{D}_{BIC}$ . Since truthfulness is a Bayesian-Nash equilibrium of  $\mathcal{D}_{BIC}$ , the mechanism  $\mathcal{D}_{Rev} = \mathcal{D}_{BIC} \circ s^{truth}$  is a revelation mechanism. Yet, it equals  $\mathcal{D}_{BIC}$ . Thus, any BIC mechanism is a revelation mechanism.

Reciprocally, assume  $\mathcal{D}_{Rev}$  is the revelation mechanism of some direct mechanism  $\mathcal{D}$  with some Bayesian-Nash equilibrium  $s^{BN}$ . Then, for any player  $i$ , playing  $s_i$  against  $s_{-i}^{truth}$  in  $\mathcal{D}_{Rev}$  is equivalent to playing  $s_i^{BN} \circ s_i$  against  $s_{-i}^{BN}$  in  $\mathcal{D}$ . As by definition  $s_i^{BN}$  is a best reply to  $s_{-i}^{BN}$  in  $\mathcal{D}$ , then  $s_i = s_i^{truth}$  is a best reply to  $s_{-i}^{truth}$  in  $\mathcal{D}_{Rev}$ . This shows that  $\mathcal{D}_{Rev}$  is BIC and completes the proof.  $\square$

The most important message of this theorem is that any mechanism boils down to a (BIC) direct mechanism. This is why the mechanism-design literature has by large focused on direct mechanisms. However, as discussed further, our new approach to Bayesian mechanism design makes greater use of the revelation principle. Indeed, it consists in exploring a parameterized set of direct mechanisms  $\mathcal{D}^t$  for some parameter  $t$ . For each value of  $t$ , we compute Bayesian-Nash equilibria  $s^t$  of the game induced by  $\mathcal{D}^t$ , and we apply the revelation principle to obtain  $\mathcal{D}_{Rev}^t = \mathcal{D}^t \circ s^t$ . We then search for an optimum among revelation mechanisms  $\mathcal{D}_{Rev}^t$  for  $t \in T$ , which we know by construction to be BIC.

### 4.2.3 Return Function

A major step in applying the approach outlined above is the computation of a Bayesian-Nash equilibrium  $s^{BN}$  of a direct mechanism  $\mathcal{D}$ . Clearly, there may be no analytical way to do so for complex mechanisms. We propose to use the method introduced by Hoang et al. [2014], where the key feature is the introduction of the return function.

**Definition 7.** A return function  $\varphi_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(X_i)$  for a player  $i$  is a mapping of his action  $a_i$  with the induced probability distribution  $\varphi_i(a_i) \in \Delta(X_i)$  on his allocation. We denote by  $\Phi_i$  the set of return functions of player  $i$  and  $\Phi$  the set of return-function profiles.

Crucially, a strategy profile  $s$  determines a return-function profile, which is defined by

$$\varphi_i(a_i) := \mathbb{E}_{\theta_{-i} \sim \tilde{\theta}_{-i}} \left[ \mathcal{D}(a_i, s_{-i}(\theta_{-i})) \right]. \quad (4.7)$$

Intuitively, the return function  $\varphi_i$  for player  $i$  maps player  $i$ 's action to the probability distribution on the outcome when other players use strategy  $s_{-i}$  and when the outcome is determined by the mechanism  $\mathcal{D}$ , by averaging out all scenarios  $\theta_{-i} \sim \tilde{\theta}_{-i}$ .

In Hoang et al. [2014], the authors proved that strategy profiles could be substituted by return-function profiles in order to study best-reply dynamics and Bayesian-Nash equilibria. This means that we have a best-reply correspondence of return-function profiles, which is a simple translation of the best-reply correspondence of strategy profiles. Similarly, Bayesian-Nash strategy profiles are naturally mapped into Bayesian-Nash return-function profiles. Interestingly, the computations of (approximated) return-function profiles are more natural and relevant than the computations of (approximated) strategy profiles for the following reasons. First, unlike strategy profiles in repeated games, return function profiles are observable objects because one can infer approximated return functions by looking at how actions have affected outcomes. Second, it is more relevant to a player to interpolate return functions to estimate outcomes for unobserved actions than to interpolate others' strategies. Third, computationally, it is easier for a player to determine his best action if given his return function than if given knowledge of the other players' strategies. Indeed, even if player  $i$  knows  $s_{-i}$ , he still needs to know the beliefs  $\tilde{\theta}_{-i}$  and the mechanism  $\mathcal{D}$  in order to compute his best reply.

Based on these remarks, Hoang et al. [2014] designed an algorithm for computing Bayesian-Nash equilibria, where the core idea is to track a sort of fictitious play dynamics in the space of return-function profiles to search for a fixed point. This fixed point corresponds to a Bayesian-Nash return-function profile, which in turn, correspond to a Bayesian-Nash strategy profile.

### 4.3 Algorithms

In this section, we first recall the algorithm in Hoang et al. [2014], and then introduce two new algorithms for, respectively, implementing the revelation mechanism and computing the principal's objective value.

#### 4.3.1 Fictitious Play

The algorithm in Hoang et al. [2014] for computing Bayesian-Nash equilibria follows a fictitious-play-dynamics learning approach for the return function. As iterations pile up, players are best-replying to the *estimated* return function, and accumulating knowledge about the best-reply return function.

---

Data : belief  $\tilde{\theta}$ , mechanism  $\mathcal{D}$ .  
**while** the convergence criterion is not verified **do**  
 (1) increment  $iter$ .  
 (2) draw a type  $\theta \sim \tilde{\theta}$ .  
 (3) compute actions  $a_i$  which maximizes  $u_i(\theta_i, \varphi_i(a_i))$ ;  
 (4) draw an outcome  $x \sim \mathcal{D}(a)$ .  
 (5) update the return-function profile  $\varphi$  with  $iter$ ,  $a$  and  $x$ .  
**end while**

Algorithm 2 Fictitious play

---

Note that points (2) and (4) are straightforward uses of the inputs of the algorithm. This means that they are as complicated as the belief and mechanism are. In some applications, e.g., shift scheduling with employees' preferences, these points, especially point (4), may already be quite hard on their own.

However, for our purpose here, the difficult points are rather points (3) and (5), as they require an implementation of the return function. Let us start with point (5), which corresponds to an updating procedure. Given that each return function is built by experience, we propose a simple update, which consists in adding the 3-tuples  $(iter, a_i, x_i)$  to the list of observations made so far by player  $i$ . Mathematically, this list can be represented by a finite set  $List(\varphi_i) \subset \mathbb{N} \times \Theta_i \times X_i$ .

In our example of Section 4, because both the belief and the mechanism are symmetric (which means that the players' labels are irrelevant), we have  $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_0$  and  $X_i = X_j = X_0$  for all  $i, j \in N$ . Plus, since we will search for a symmetric Bayesian-Nash equilibria, we consider a single return function for all players, whose list of observations is then a finite set  $List(\varphi) \subset \mathbb{N} \times \Theta_0 \times X_0$ . Now, given a list  $List(\varphi_i)$  of observations, we still need to compute a

value for  $u_i(\theta_i, \varphi_i(a_i))$  for any  $\theta_i \in \Theta_i$  and  $a_i \in \Theta_i$ . To do so, we propose the following simple radius-based function interpolation :<sup>2</sup>

$$u_i(\theta_i, \varphi_i(a_i)) = \frac{\sum_{(iter, \hat{a}_i, \hat{x}_i) \in List(\varphi_i)} w_i(a_i, \hat{a}_i, iter) u_i(\theta_i, \hat{x}_i)}{\sum_{(iter, \hat{a}_i, \hat{x}_i) \in List(\varphi_i)} w_i(a_i, \hat{a}_i, iter)}, \quad (4.8)$$

where  $w : \Theta_i \times \Theta_i \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  is some weighting of observations. Typically, the function  $w(a_i, \hat{a}_i, iter)$  should be decreasing in the distance between  $a_i$  and  $\hat{a}_i$ , and it could be slowly increasing in  $iter$ .<sup>3</sup> We refer to Hoang et al. [2014] for further discussions on this weighting.

Now, even with a good interpolation, point (3) of Algorithm 2 remains difficult, as it involves an optimization problem. In our example, we will solve it using a basic TABU search.

### 4.3.2 Revelation Mechanisms

The computation of the revelation mechanism is a straightforward application of the revelation principle, with the slight technicality that the Bayesian-Nash equilibrium strategy profile is only known implicitly through the Bayesian-Nash return-function profile. This yields Algorithm 3.

---

Data : mechanism  $\mathcal{D}$ , (Bayesian-Nash) return-function profile  $\varphi$ , type profile  $\theta$ .  
 compute actions  $a_i$  which maximize  $u_i(\theta_i, \varphi_i(a_i))$  ;  
 draw an outcome  $x \sim \mathcal{D}(a)$ .  
 return  $x$

---

Algorithm 3 Computation of the Revelation Mechanism

---

Note that, once again, we need to compute best-replying actions, which is a time-consuming procedure.

### 4.3.3 Principal's Objective Value

In our example, we will study a principal's objective function of the form

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathbb{E}_{\theta \sim \hat{\theta}} \left[ \mathbb{E}_{x \sim \mathcal{D}(\theta)} [p(\theta, x)] \right], \quad (4.9)$$

---

2. Arguably, there may be better ways to estimate  $u_i(\theta_i, \varphi_i(a_i))$ , especially if we take into account the structure of the Bayesian game. However, in this paper, the focus is not on the performance of our computation of Bayesian-Nash equilibria.

3. To illustrate, we will use  $w(a_i, \hat{a}_i, iter) = iter / (1 + d_{\Theta_i}(a_i, \hat{a}_i))^2$  in our illustrative example, where  $d_{\Theta_i}$  is some metric on  $\Theta_i$ .

where  $p : \Theta \times X \rightarrow \mathbb{R}$  is some objective function for specific values of the type profile  $\theta$  and the outcome  $x$ . This specific structure of the principal's objective function enables us to compute it in a rather straightforward way (see Algorithm 4).

---

```

Data : belief  $\tilde{\theta}$ , (BIC) mechanism  $\mathcal{D}$ , function  $p$ .
while the confidence interval is too wide do
  draw a type profile  $\theta \sim \tilde{\theta}$ .
  draw an outcome  $x \sim \mathcal{D}(\theta)$ .
   $sumOfValues \leftarrow sumOfValues + p(\theta, x)$ .
  increment  $iter$ .
end while return  $sumOfValues/iter$ .

```

Algorithm 4 Computation of the Principal's Objective Value

---

Classical statistical tools can then enable us to compute a confidence interval.

#### 4.4 Application to Cake-Cutting Problem

We illustrate the theory and the algorithms we have developed with a cake-cutting problem. Essentially, one is looking for an allocation of some (possibly heterogenous) cake to different agents having heterogenous and secret preferences.

##### 4.4.1 Model

We consider a simplified setting where the cake is made of  $K$  homogeneous portions, which we call attributes. An allocation  $x_i \in X_0$  to player  $i$  is then a vector  $(x_{i1}, \dots, x_{iK}) \in [0, 1]^K$ , where each entry  $x_{ik}$  stands for the ratio of attribute  $k$  that is given to player  $i$ . Naturally, the set of outcomes is then given by

$$X = \left\{ x \in [0, 1]^{n \times K} \mid \forall k, \sum_{i \in N} x_{ik} \leq 1 \right\}. \quad (4.10)$$

As in most cake-cutting settings, we assume that the utility function of player  $i, i \in N$ , is additive, that is,

$$u_i(\theta_i, x_i) = \sum_{k=1}^K \theta_{ik} x_{ik}, \quad (4.11)$$

where  $\theta_{ik}$  is the utility of that player for the whole portion  $k$ . Also, as it is classically done, we normalize types  $\theta_i$  so that the utility of the whole cake equals 1. Consequently, we have  $\Theta_0 = \{\theta_0 \in [0, 1]^K \mid \sum_{k=1}^K \theta_{0k} = 1\}$ .



The belief  $\tilde{\theta}_i$  of any player  $i$  consists in uniformly randomly drawing each entry of a vector in  $[0, 1]^K$ , and next, normalizing the vector by dividing it by the sum of all entries. We make an exception for the 2-player case, where  $\tilde{\theta}_{i1}$  is drawn uniformly randomly in  $[0, 1]$  and where  $\tilde{\theta}_{i2}$  is the complement. Finally, for a type profile  $\theta$  associated to an outcome  $x$ , we define the principal's objective function as follows :

$$p(\theta, x) = n\bar{u}(\theta, x) - \lambda \sum_{i \in N} |u_i(\theta_i, x_i) - \bar{u}(\theta, x)|, \quad (4.12)$$

where :  $p(\theta, x)$  is the expectation for  $\theta \sim \tilde{\theta}$  and  $x \sim \mathcal{D}(\theta)$ ;  $\bar{u}(\theta, x) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} u_i(\theta_i, x_i)$  is the average utility, and hence,  $n\bar{u}(\theta, x)$  is the collective total utility; and parameter  $\lambda \geq 0$  is the weight of fairness in the objective function.

Due to the symmetry among players and the concavity of the principal's objective function, we state without a proof the following intuitive result.

**Theorem 11.** *For any  $\epsilon > 0$ , there exists a symmetric deterministic BIC mechanism  $\mathcal{D}_{BIC}$ , whose principal's value  $\mathcal{P}(\mathcal{D}_{BIC})$ , is at less than  $\epsilon$  from the BIC-optimal value, i.e.,*

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_{BIC}) > \mathcal{P}_{BIC}^* - \epsilon.$$

Another interesting observation is that a mechanism allocating  $x_{ik} = 1/n$  to each player,  $k = 1, \dots, K$ , has a principal's objective value of 1, which can be shown to be the optimal mechanism, when the players are not involved (i.e., do not express their preferences).

#### 4.4.2 Ideal Mechanism

Let us consider the direct mechanism  $\mathcal{D}^{ideal}$ , which inputs a type profile  $\theta \in \Theta$  and outputs a solution to the following linear program :

$$\begin{aligned} & \underset{x, u}{\text{Maximize}} && u \\ & \text{subject to :} && \sum_{k=1}^K \theta_{ik} x_{ik} = u, && \forall i \in N, \\ & && x \in X. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Note that this mechanism ensures the equality of all players' utilities, meaning that the second term in the right-hand side of equation 4.12 is zero. If this second term is more significant than the first one, then we have the following theorem.

**Theorem 12.** *For  $\lambda \geq 1$ ,  $\mathcal{D}^{ideal}$  is an ideal mechanism.*

*Sketch of proof.* The proof consists in observing that

$$\mathcal{D}^{ideal}(\theta) \in \arg \max_{x \in X} p(x, \theta), \quad (4.14)$$

for all  $\theta \in \Theta$ . Then, by taking the expectation for  $\theta \sim \tilde{\theta}$ , we show that  $\mathcal{D}^{ideal}$  maximizes the principal's objective function  $\mathcal{P}$ .  $\square$

In the sequel, we fix  $\lambda = 1.2$ , that is, we give a higher weight to fairness. The ideal mechanism  $\mathcal{D}^{ideal}$  enables us to compute the ideal values for different values of  $n$  and  $K$ . These are presented in Table 4.4.2.

Table 4.1 Ideal values.

$n \setminus  K $	2	3
2	1.22	1.26
5	1.28	1.41
20	1.32	1.48

In Hoang et al. [2014], it was shown numerically (and in some instances, analytically) that the ideal mechanism is not BIC.

Now, we can apply our algorithms to compute the revelation mechanism of the ideal mechanism. The Bayesian-Nash equilibria for the following computations have been obtained with 250 iterations of Algorithm 2 when  $n = 2$ , 100 for  $n = 5$  and 25 for  $n = 20$ . Also in Hoang et al. [2014], it was experimentally shown that these numbers are sufficient to stabilize the sequence of best-reply return functions. Plus, we proceeded to 2,000 iterations of Algorithm 4 to compute the objective value with a 90% confidence interval of  $\pm .01$ . Results are displayed in Table 4.4.2.

Table 4.2 Values of the revelation of the ideal mechanism.

$n \setminus  K $	2	3
2	0.75	0.88
5	0.82	0.92
20	0.92	1.02

Disturbingly, in many cases, the results show that the revelation of the ideal mechanism is worse than the exact division. This means that, if the principal chooses to implement the ideal mechanism, then, eventually, agents will be revealing preferences in such a way that the

division is much less optimal than it would be if we had just chosen an exact division in the first place.

#### 4.4.3 Parameterized Mechanisms

Let us now apply our approach to Bayesian mechanism design to determine an efficient and fair BIC mechanism. Interestingly, computations by Hoang et al. [2014] show that the Bayesian-Nash equilibrium strategy of the ideal mechanism consists in overbidding undesirable attributes while underbidding desirable ones. To overrule this possibility, here, we force the mechanism to satisfy the following equality :

$$\forall i \in N, \forall k, l, \frac{x_{ik}}{x_{il}} = \left( \frac{a_{ik}}{a_{il}} \right)^p, \quad (4.15)$$

where  $p$  is some nonnegative number and  $a_i$  is the action of player  $i$ . This means that a player can have much more of attribute  $k$  than of attribute  $l$  only if he says he really prefers  $k$  to  $l$ . However, adding all equalities 4.15 to linear program 4.13 may lead to an infeasible program. Therefore, we instead add penalties for violating equalities 4.15, which take the form

$$\gamma_i = \max_{k,l} |x_{ik}a_{il}^p - x_{il}a_{ik}^p|. \quad (4.16)$$

Also, we add penalty  $\delta_i = |u_i - u|$  to each player, where  $u$  is the average utility. Denoting by  $w_\delta$  the weight of penalties  $\delta_i$  and by  $w_\gamma$  that of penalties  $\gamma_i$ , we get the following linear program :

$$\begin{aligned} & \underset{x,u,\delta,\gamma}{\text{Maximize}} && nu - w_\delta \sum_{i \in N} \delta_i - w_\gamma \sum_{i \in N} \gamma_i, \\ & \text{subject to :} && u_i = \sum_{k=1}^K a_{ik}x_{ik}, && \forall i \in N, \\ & && nu = \sum_{i \in N} u_i, && (4.17) \\ & && \delta_i = |u_i - u|, && \forall i \in N, \\ & && \gamma_i \geq x_{ik}a_{il}^p - x_{il}a_{ik}^p, && \forall i \in N, \forall k, l \in K, \\ & && x \in X. \end{aligned}$$

The parameterized mechanism  $\mathcal{D}^t$  for  $t = (p, w_\delta, w_\gamma)$  is defined as the mechanism having as its input an action profile  $a$ , and as its output a solution to linear program 4.17.

#### 4.4.4 Computational Results

To compute Bayesian-Nash equilibria  $s^t$  of parameterized mechanisms  $\mathcal{D}^t$ , we have used the same number of iterations as for the ideal mechanism, namely, 250 iterations of Algorithm

2 for  $n = 2$ , 100 for  $n = 5$  and 25 for  $n = 20$ . Once the equilibria  $s^t$  were computed, we performed 2,000 iterations of Algorithm 4 with revelation mechanisms  $\mathcal{D}_{Rev}^t = \mathcal{D}^t \circ s^t$ . We obtained a 90% confidence interval of  $\pm 0.01$ . Note that there is another error due to the approximation of the Bayesian-Nash equilibrium, which is much harder to estimate<sup>4</sup>.

Results are presented in the following Tables 4.4.4 to 4.4.4.

Table 4.3 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 2$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.07	1.04	1.01	1.04	<b>1.08</b>	<b>1.09</b>	1.06	<b>1.08</b>	<b>1.08</b>
$p = 0.5$	<b>1.08</b>	1.05	<b>1.08</b>	1.05	<b>1.08</b>	<b>1.09</b>	1.05	<b>1.08</b>	<b>1.08</b>
$p = 0.7$	<b>1.08</b>	<b>1.10</b>	1.07	1.03	1.07	1.07	1.04	1.04	1.05

Table 4.4 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 2$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.03	1.03	1.05	1.07	1.06	1.06	<b>1.09</b>	<b>1.08</b>	<b>1.09</b>
$p = 0.5$	1.07	<b>1.08</b>	1.06	<b>1.09</b>	<b>1.10</b>	<b>1.09</b>	1.07	<b>1.08</b>	<b>1.08</b>
$p = 0.7$	<b>1.09</b>	<b>1.09</b>	<b>1.09</b>	<b>1.08</b>	<b>1.09</b>	1.07	1.06	1.06	1.07

Table 4.5 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 5$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.02	1.01	1.03	1.05	1.05	1.04	1.07	<b>1.09</b>	<b>1.09</b>
$p = 0.5$	1.06	1.06	<b>1.09</b>	<b>1.10</b>	1.06	<b>1.09</b>	1.04	1.06	1.05
$p = 0.7$	<b>1.11</b>	1.06	1.08	1.07	1.08	1.07	1.06	1.06	1.05

Interestingly, there seems to be some pattern emerging in the tables : the best values for the parameters  $t = (p, w_\delta, w_\gamma)$  seem to show up along the main diagonale. This signals an intricate implicit relationship between the parameters of our mechanisms. Indeed, increasing the value of  $p$  is in fact more or less equivalent to increasing the importance of equalizing the players' allocations. Somehow, this implies that if we increase  $p$ , we no longer need high

4. To evaluate it, we have repeated the computation of the value of the revelation of the parameterized mechanism for  $n = 5, |K| = 3, p = 0.5, w_\delta = 2$  and  $w_\gamma = 10$ . The results show a standard deviation of this computation of 0.01. This value is corroborated by the regularity of values of the tables, where variations between neighbor cells hardly exceed 0.03. However, our considerations here do not consider the bias due to the Bayesian-Nash equilibrium estimation.

Table 4.6 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 5$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.03	1.05	1.05	1.09	1.11	1.08	<b>1.12</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>
$p = 0.5$	<b>1.12</b>	<b>1.12</b>	1.11	<b>1.13</b>	<b>1.14</b>	<b>1.14</b>	1.09	1.10	1.09
$p = 0.7$	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	1.11	1.11	1.11	1.08	1.09

Table 4.7 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 20$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.02	0.99	1.01	1.03	1.06	1.05	<b>1.08</b>	1.06	<b>1.08</b>
$p = 0.5$	1.03	1.04	1.06	1.06	<b>1.07</b>	<b>1.09</b>	1.06	1.06	1.06
$p = 0.7$	<b>1.07</b>	<b>1.08</b>	<b>1.09</b>	1.06	<b>1.07</b>	<b>1.07</b>	<b>1.07</b>	1.06	1.05

Table 4.8 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 20$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	<b>1.13</b>	<b>1.14</b>	1.10	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	<b>1.15</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>
$p = 0.5$	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	<b>1.13</b>	1.10	1.08	1.10
$p = 0.7$	1.12	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	1.12	1.12	1.12	1.08	1.10	1.10

values of  $w_\delta$  and  $w_\gamma$  to ensure the fairness of the division<sup>5</sup>. The opposite also holds : if we decrease  $p$ , then it becomes important to increase the unfairness penalty, which can be done by increasing  $w_\delta$  and  $w_\gamma$ .

In Table 4.4.4, we report the best BIC values found for revelations of parameterized mechanisms. These results show that there is a gain of at least 10% compared to the exact division. What is even more interesting, this gain increases with the number of players and the number of attributes. This is not a big surprise as the greater diversity of preferences that comes with larger numbers of players and attributes offers more opportunities for improvement with respect to an exact division.

---

5. What we mean here is that the effect of an increase of  $p$  in the objective function of the heuristic mechanism is similar to the effect of an increase of the weights  $w_\delta$  and  $w_\gamma$ . As a result, the mechanisms  $\mathcal{D}^t$  and  $\mathcal{D}^{t'}$  with  $t = (p + \epsilon, w_\delta, w_\gamma)$  and  $t' = (p, w_\delta + \epsilon, w_\gamma)$  are similar. This is why, we argue, their principal's objective values for the revelation of these mechanisms are close.

Table 4.9 Best values of revelations of parameterized mechanisms.

$n \setminus  K $	2	3
2	1.10	1.10
5	1.11	1.14
20	1.09	1.15

#### 4.5 Concluding Remarks

In this paper, we have introduced a new approach to Bayesian mechanism design. The cornerstone of this approach is the computation of Bayesian-Nash equilibria with a fictitious play on return-function profiles, as presented by Hoang et al. [2014]. Indeed, using this computation, we can explore a space of BIC mechanisms, by tracking revelation mechanisms of a parameterized set of mechanisms. The application of this method to cake-cutting has yielded interesting results. We have shown that intuitively good mechanisms like the ideal mechanism turn out to be in fact quite bad when players play a Bayesian-Nash equilibrium. What is more, we have also constructed revelation mechanisms which represent significant improvements from more direct approaches. Crucially, the generality of our approaches mean that they can easily be extended to more practical cases of mechanism design.

## 4.6 Compléments à l'article

Comme nous l'avons fait remarqué dans le complément au premier article, on peut reconsidérer le même problème avec, cette fois, une croyance  $\tilde{\theta}$  qui est une distribution uniforme sur le simplexe de  $\mathbb{R}^K$ . Les résultats sont alors encore plus flatteurs.

Table 4.10 Ideal values for uniform belief.

$n \setminus  K $	2	3
2	1.27	1.35
5	1.35	1.56
20	1.42	1.69

Table 4.11 Values of the revelation of the ideal mechanism for uniform belief.

$n \setminus  K $	2	3
2	0.60	0.97
5	0.68	0.84
20	0.91	0.90

Table 4.12 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 2$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.06	1.00	1.07	<b>1.12</b>	1.10	1.09	<b>1.12</b>	<b>1.11</b>	<b>1.13</b>
$p = 0.5$	<b>1.12</b>	<b>1.12</b>	<b>1.12</b>	<b>1.13</b>	<b>1.12</b>	<b>1.12</b>	1.10	1.07	1.10
$p = 0.7$	<b>1.11</b>	1.09	<b>1.13</b>	<b>1.12</b>	1.07	1.06	1.06	<b>1.11</b>	1.08

Table 4.13 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 2$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.11	1.09	1.03	1.10	1.12	1.11	<b>1.17</b>	<b>1.16</b>	<b>1.16</b>
$p = 0.5$	1.05	1.13	1.10	<b>1.15</b>	1.14	<b>1.15</b>	<b>1.15</b>	1.14	1.14
$p = 0.7$	1.14	1.13	1.13	1.13	1.14	1.11	1.13	1.13	1.11

Comme on pouvait s'y attendre, les valeurs optimales du mécanisme idéal et des révélations des mécanismes paramétrés sont maintenant de meilleures qualités. Ceci vient du fait

Table 4.14 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 5$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.06	1.01	1.06	1.08	1.08	1.08	<b>1.16</b>	<b>1.16</b>	<b>1.16</b>
$p = 0.5$	1.10	1.09	1.11	<b>1.15</b>	<b>1.15</b>	1.14	1.10	1.10	1.09
$p = 0.7$	1.12	<b>1.15</b>	1.12	1.13	1.11	1.09	1.11	1.10	1.13

Table 4.15 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 5$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.08	1.05	1.07	1.17	1.15	1.15	<b>1.22</b>	<b>1.21</b>	<b>1.23</b>
$p = 0.5$	1.17	1.14	1.16	<b>1.22</b>	1.20	<b>1.21</b>	1.17	1.17	1.19
$p = 0.7$	1.20	1.20	<b>1.23</b>	<b>1.21</b>	1.20	<b>1.21</b>	1.15	1.16	1.15

Table 4.16 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 20$  and  $|K| = 2$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.05	1.06	1.07	1.06	1.06	1.11	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	<b>1.14</b>
$p = 0.5$	1.09	1.11	1.08	1.09	<b>1.15</b>	<b>1.15</b>	1.09	1.08	1.11
$p = 0.7$	<b>1.15</b>	<b>1.14</b>	<b>1.13</b>	1.10	1.11	<b>1.14</b>	1.10	1.12	1.10

Table 4.17 Values of the revelations of parameterized mechanisms for  $n = 20$  and  $|K| = 3$ .

$w = \dots$	(1, 1)	(1, 10)	(1, 100)	(2, 1)	(2, 10)	(2, 100)	(5, 1)	(2, 10)	(5, 100)
$p = 0.3$	1.22	<b>1.25</b>	<b>1.24</b>	1.19	1.20	1.18	1.20	<b>1.25</b>	<b>1.26</b>
$p = 0.5$	<b>1.25</b>	<b>1.24</b>	1.19	1.21	<b>1.24</b>	<b>1.24</b>	1.17	1.19	1.21
$p = 0.7$	<b>1.26</b>	1.21	<b>1.25</b>	<b>1.25</b>	1.23	<b>1.25</b>	1.18	1.17	1.19

Table 4.18 Best values of revelations of parameterized mechanisms.

$n \setminus  K $	2	3
2	1.13	1.17
5	1.16	1.23
20	1.15	1.26

que la distribution considérée dans l'article est plus concentrée à l'intérieur du simplexe. Les préférences tirées par la distribution uniforme sont donc plus extrêmes, ce qui permet d'avoir



des allocations plus optimales. En particulier, les valeurs idéales mettent clairement ce phénomène en valeur. Il n'est alors pas si surprenant que l'on obtienne aussi de meilleures valeurs pour les mécanismes paramétrés révélés.

Le cas des valeurs de la révélation du mécanisme idéal est plus surprenant. Ici, au lieu d'améliorer les valeurs, la distribution uniforme a tendance à les aggraver. Par ailleurs, on peut remarquer que les valeurs de la fonction objectif ne croissent pas tout à fait avec le nombre de joueurs. En particulier, lorsqu'il y a 2 parts, le mécanisme paramétré révélé optimal fait mieux pour 5 joueurs que pour 20. Ce phénomène est corroboré par les valeurs des différents mécanismes paramétrés des Tableaux 4.6 et 4.6. Je ne connais pas d'explication convaincante de ces phénomènes.

## CHAPITRE 5

ARTICLE 3 : MEASURING UNFAIRNESS FEELING IN ALLOCATION  
PROBLEMS

---

**Measuring Unfairness Feeling in Allocation  
Problems**

---

LÊ NGUYÊN HOANG

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

FRANÇOIS SOUMIS

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

GEORGES ZACCOUR

*GERAD, HEC Montréal*

Soumis à *Omega, The International Journal of Management Science.*

**Abstract.** In this paper, we introduce a new measure of social fairness based on unfairness feelings of the players involved in an allocation problem, e.g., cake-cutting problem or shift scheduling. We only require that each player be described by a von Neumann — Morgenstern utility function. Next, we propose a social normalization of each player’s utility function, based on how each player sees the other players’ shares through her own utility function. Further, we extend this normalization idea to a setting where the players are represented by a weighted oriented graph, where the weights assess the relatedness of (or similarities between) the agents. Among other results, we establish some links between our measures of fairness and those classically used in the cake-cutting-problem literature.

**Key words :** Fairness ; Social Normalization ; Utility ; Allocation Problem ; Social Network.

## 5.1 Introduction

The problem of the fair division of a cake, a metaphor used to designate a common resource, has been the topic of a large body of literature in the last six decades or so ; see, e.g., Steinhaus [1948], Brams and Taylor [1995], Brams and Taylor [1996], Robertson and Webb [1998]. Typically in this literature, two assumptions have been made on the individual utility functions of the stakeholders in the cake, namely : (i) they are additive ; and (ii) the utility of the whole cake is (normalized to) one for all players. These assumptions have been instrumental in designing cake-cutting algorithms and deriving some properties. Further, solving such problems requires us to specify from the outset what is meant by a *fair* division. Here, the literature has proposed a series of definitions of fairness, e.g., exact, proportional, envy-free and equitable fairness, each having its pros and cons.<sup>1</sup>

In this paper, we introduce a new measure of fairness without requiring that the utility functions be additive or that the whole-cake value be normalized to one for all players. The original motivation for developing this measure was a research contract to provide a methodology for shift-scheduling problems where a manager wishes to implement the (technically feasible) schedule that minimizes a certain unfairness criterion. The starting assumption is that the manager can obtain the employees’ preferences regarding a small<sup>2</sup> set of acceptable schedules.<sup>3</sup> In such a context, the additivity assumption naturally does not hold anymore,

---

1. Of course, many other measures of fairness and equity exist and are based on different premises. For an interesting discussion in the context of resource allocation, the interested reader may refer to Bertsimas et al. [2011].

2. Pragmatically, it does not make sense to ask the employees to rate all feasible schedules.

3. By acceptable, we mean a technically feasible schedule that does not involve a too high additional cost

that is, the utility of the sum of two shifts is clearly not equal to the sum of their utilities, and the whole-cake-normalization assumption is meaningless. The idea that the utility function is not necessarily additive, but rather super- or sub-additive, is by no means akin to shift scheduling but is a standard assumption in economics. The implications of abandoning the additivity assumption are important. In particular, Mirchandani [2013] showed that most existing fair-division procedures are incompatible with nonadditive utility functions.

In this paper, we only require that each player have a von Neumann — Morgenstern (vNM) utility function. To be able to compare players' payoffs and adequately assess the fairness of any division of the cake, we propose a normalization of the individual utility functions. As we will see, this normalization is centered on the idea that each player compares her allocation to other players' allocations through the lens of her own utility function. For this reason, we call it a social normalization. Next, using socially normalized utility functions, we introduce the concept of the *unfairness feeling*. A division will then be called socially fair if all players have no unfairness feeling. We will relate our social fairness to classical cake-cutting-literature definitions. In problems with a large number of agents, or when the agents are heterogenous in some way, it may become intuitively appealing to suppose that each stakeholder in the cake is only sensitive to how “similarly” or “closely” players are treated. To handle such a case, we extend our definition of fairness to a setting where the players are located on a weighted oriented graph. This formulation captures the idea of a social network where individuals are only interested in the fate of those in their circles.

The rest of the paper is organized as follows : Section 2 provides some background and preliminaries. Sections 3 and 4 introduce our normalization of utilities and concepts of fairness, respectively. Section 5 deals with local fairness, and Section 6 briefly concludes.

## 5.2 Background and Preliminaries

We start by recalling some of the most commonly used definitions of fairness in the cake-cutting-problem literature, to which we will link our fairness criterion :

**Exact Fairness :** A division is exact if all players' allocations are identical, i.e., exchanging shares will not affect any player's outcome<sup>4</sup>.

**Proportional Fairness (PF) :** A division is proportionally fair if every player prefers

---

with respect to the least-cost one. Put differently, management is willing to forgo some revenues in order to please the employees.

4. It is noteworthy that this definition differs from the one given by Wikipedia, where, with the cake-cutting literature normalization, exactness requires everyone to have utility  $1/n$ . In our paper, exact division should rather be called “all-identical” division. A more relevant generalization of exact division would consist in saying that everyone likes his share just as much as the average of others' (or more rigorously, just as much as the lottery of drawing uniformly randomly one of others' allocations).

her allocation to an allocation from an exact division<sup>5</sup>. Another interpretation is that players prefer their allocation to the average of what they would get if allocations were given away uniformly randomly. See, e.g., Procaccia [2009], Mossel and Tamuz [2010], Bei et al. [2012].

**Envy-Freeness (EF)** : A division is envy-free if every player prefers her allocation to any other player’s allocation. See the early contributions in, e.g., Foley [1967], Varian [1974], Varian [1976], Arnsperger [1994], and the more recent ones focusing on cake-cutting procedures in, e.g., Stromquist [2007], Cohler et al. [2011], Chen et al. [2013].

**Equitable Fairness** : A division is equitable if all players have the same utility for their respective shares.

To illustrate some of the drawbacks in these definitions, we consider a few anecdotal examples. When the cake is made of indivisible pieces, e.g., where a car and a summer cottage to be fairly shared following a divorce, an exact division is obviously not implementable. Even when it is, exactness can be very restrictive and lead to some counter-intuitive results. For instance, if a cake that contains chocolate on a half and nuts on the other half is to be shared between a person allergic to nuts and another who hates chocolate, then imposing an exact division would be peculiar and obviously not Pareto-optimal (assuming that this feature is of interest). Proportional fairness and envy-free fairness are much less demanding than exactness, but may also be infeasible when the goods are indivisible. Equitable fairness may be questionable on some grounds. To see this, consider a sugar cake with three cherries on top, to be divided among four individuals, three of whom have no interest at all in the cake but love cherries, while the fourth person only wants the sugar cake. One division is to give to the first three players one cherry, and the cake to the fourth person. This solution is intuitively fair, and it is fair according to the definitions of PF and EF, but it is not equitable. This highlights that equitable fairness may fail to achieve a fair solution according to common sense. In these examples, the focus was on a “physical” division of the cake rather than on dividing the corresponding total value of the cake. For this, we must define a utility function for each player that has certain properties. This is where the assumptions mentioned in the introduction come into play, namely, the additivity and normalization to one of the whole cake. We now introduce the notation and formally discuss these issues.

In a cake-cutting problem, a finite set of players  $N = \{1, \dots, n\}$  and a cake **CAKE** are given. A division, or allocation, of the cake is a vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , where  $x_i \subset \text{CAKE}$  is the share of player  $i$ , and  $\cup_{i \in N} x_i = \text{CAKE}$ . Each player  $i$  has a utility function  $u_i$  that associates a real number to any  $x_i$ . Player  $i$  prefers share  $x_i$  to  $x'_i$ , if, and only if,  $u_i(x_i) \geq$

---

5. In terms of lotteries, a PF division is one where everyone prefers his allocation to uniformly randomly picking one of the others’.

$u_i(x'_i)$ . The utility function is additive; that is, for any disjoint subsets  $x_k$  and  $x_l$ , we have

$$u_i(x_k \cup x_l) = u_i(x_k) + u_i(x_l). \quad (5.1)$$

In particular, this implies that the utility of an empty allocation is equal to zero, i.e.,  $u_i(\emptyset) = 0$ , and by the normalization of the whole-cake value, we have  $u_i(\text{CAKE}) = 1, \forall i \in N$ . With this notation, we can rephrase the above definitions of fairness as follows :

**Exact Division :** A division is exact if for any player  $i \in N$ ,  $u_i(x_j) = 1/n, \forall j \in N$ .

**Proportional Fairness :** A division is proportionally fair (PF) if any player gets at least  $1/n$ , i.e.,  $u_i(x_i) \geq 1/n, \forall i \in N$ .

**Envy-Freeness :** A division is envy-free (EF) if any player  $i$  prefers her allocation to any other player's allocation, i.e.,  $u_i(x_i) \geq u_i(x_j), \forall j \in N$ .

**Equitable :** A division is equitable if all players obtain the same utility, i.e.,  $u_i(x_i) = u_j(x_j), \forall i, j \in N$ .

Suppose now that a given set of feasible divisions of the cake are proposed to the agents and they are asked to rate them according to their utility functions. For any allocation  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , the resulting evaluation can be represented by the following utility matrix :

$$U = \begin{pmatrix} u_1(x_1) & \dots & \dots & \dots & u_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & u_i(x_i) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ u_n(x_1) & \dots & \dots & \dots & u_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & \dots & \dots & U_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & U_{ii} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & \dots & \dots & \dots & U_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

where  $(u_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  (or  $U_{ij}$ ) gives the utility of player  $i$  for player  $j$ 's share. An interesting feature of the utility matrix is that it shows at a glance what would happen if two players decided to trade shares. Further, the normalization condition  $u_i(\text{CAKE}) = 1$ , for all  $i \in N$  implies that  $U$  is a row stochastic matrix, i.e., all entries are nonnegative and entries in any row add up to 1.

We note that this utility matrix contains most (if not all) of the relevant information needed to judge the fairness of an allocation, and it will play a central role in the rest of the paper. To illustrate, consider the following sugar-cake example where the total resource to be allocated can be written as  $\text{CAKE} = \text{cherry}_1 \cup \text{cherry}_2 \cup \text{cherry}_3 \cup \text{sugar\_cake}$ , with  $u_i(\text{CAKE}) = 1$  for all  $i \in N$ . As the first three players have no utility for the `sugar_cake` and the fourth player, no utility for a cherry, it seems reasonable to recommend the allocation  $x_i = \text{cherry}_i$ ;

for  $1 \leq i \leq 3$  and  $x_4 = \text{sugar\_cake}$ . The corresponding utility matrix is then the following :

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Now, we can easily check for the satisfaction of the different criteria (definitions) of fairness. In an exact division, all entries must be equal to  $1/n$ . For a division to be PF, the diagonal, which represents the players' utilities for their own allocation, must only contain numbers greater than or equal to  $1/n$ . Meanwhile, envy-free fairness holds when each diagonal term is the largest in its row. Finally, a division is equitable when all diagonal terms are the same. Inspecting the above utility matrix, we conclude that the considered allocation is PF and EF, but not exact or equitable.

### 5.2.1 Generalization to Non-Additive Utility Functions

From now on, we relax the additivity assumption of the utility function in (5.1) to only require that each player has a von Neumann — Morgenstern (vNM) utility function.<sup>6</sup> Further, we set aside the condition  $u_i(\text{CAKE}) = 1$ , for all  $i \in N$  and consequently, the utility matrix  $U$  can contain any numbers. We recall the following well-known theorem stating that a vNM utility function is defined up to a positive affine transformation :

**Theorem 13** (von Neumann and Morgenstern [1944]). *If  $u_i$  is the vNM utility function of player  $i$ , then, for any  $d_i > 0$  and any  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $d_i u_i + b_i$  is also the utility function of player  $i$ .*

The above theorem implies that a utility matrix is also defined up to an affine positive transformation of its rows. This means that, for any positive diagonal matrix  $D$  and any

---

6. It is well known that the existence of a vNM utility function is equivalent to the players' preferences being complete, transitive, continuous and independent. A preference of player  $i$  is an order  $\succeq$  on  $\Delta(X)$ . It is

**Complete** : if, for all  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ , we have  $\tilde{x}_i \succ \tilde{y}_i$ ,  $\tilde{y}_i \succ \tilde{x}_i$  or  $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i$  (both lotteries are equally preferred).

**Transitive** : if, whenever  $\tilde{x}_i \succeq \tilde{y}_i$  and  $\tilde{y}_i \succeq \tilde{z}_i$ , then  $\tilde{x}_i \succeq \tilde{z}_i$ .

**Continuous** : if, whenever  $\tilde{x}_i \succeq \tilde{y}_i \succeq \tilde{z}_i$ , there exists  $p \in [0, 1]$  such that  $p\tilde{x}_i + (1-p)\tilde{z}_i = \tilde{y}_i$ .

**Independent** : if,  $\tilde{x}_i \succ \tilde{y}_i$ , then for any  $p \in [0, 1]$  and  $\tilde{z}_i$ , we have  $p\tilde{x}_i + (1-p)\tilde{z}_i \succ p\tilde{y}_i + (1-p)\tilde{z}_i$ .

matrix  $B$  with identical columns,  $U$  and  $DU + B$  are equivalent, that is,

$$U \text{ is equivalent to } \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & d_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_1 & \cdots & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_i & \cdots & b_i & \cdots & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_n & \cdots & b_n & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

where all entries  $d_i$  are strictly positive. Without the additivity assumption, the definitions of exact and PF fairness are changed as follows :

**Exact Division :** A division  $x = (x_1, \dots, x_n)$  is exact if for all  $i \in N$ ,  $u_i(x_j) = u_i(x_l)$ , for  $j, l = 1, \dots, n$ .

**Proportional Fairness :** A division is PF if any player  $i$  gets at least the average of the others, i.e.,

$$u_i(x_i) \geq u_i(\tilde{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j \in N} u_i(x_j), \quad (5.4)$$

where  $\tilde{x}$  is the uniform distribution on the allocations  $x_1, \dots, x_n$ .

The definitions of envy-freeness and equitable fairness remain as before. In terms of the utility matrix, we note that exact division, PF and EF are characterized by the following inequalities :

$$\begin{aligned} \text{Exact division :} \quad & U_{ii} - U_{ij} \geq 0 \quad \text{and} \quad U_{ij} - U_{ii} \geq 0 \\ \text{Proportional fairness :} \quad & U_{ii} - U_i^T \mathbf{1}_n / n \geq 0, \\ \text{Envy-free fairness :} \quad & U_{ii} - U_{ij} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

for all players  $i, j \in N$ . To be consistent, we expect any concept of fairness to yield the same conclusion for  $U$  and  $DU + B$ . This is shown in the following proposition.

**Proposition 6.** *A utility matrix  $U$  is exact (respectively, PF and EF) if and only if  $DU + B$  is.*

*Démonstration.* Each inequality defining exactness, PF and EF is of the form  $U_i C \geq 0$ , where  $C$  is a column. For instance, for the  $j^{\text{th}}$  constraint of EF, by fixing  $C_i = 1$  and  $C_j = -1$  and  $C_k = 0$  if  $k \notin \{i, j\}$ , the constraint  $U_i C \geq 0$  corresponds to  $U_{ii} - U_{ij} \geq 0$ . Crucially,



for all definitions above, entries of  $C$  add up to 0, i.e.,  $\mathbf{1}_n^T C = 0$ . Now, consider positive affine transformations of  $U$ 's  $i$ -th row written as  $U_i \mapsto d_i U_i + b_i \mathbf{1}_n^T$ . The fairness inequality becomes  $(d_i U_i + b_i \mathbf{1}_n^T) C = d_i (U_i C) + b_i (\mathbf{1}_n^T C) = d_i (U_i C)$ , since  $\mathbf{1}_n^T C = 0$ . As  $d_i > 0$ , we have  $(d_i U_i + b_i \mathbf{1}_n^T) C \geq 0$  if and only if  $U_i C \geq 0$ . In other words, inequalities that define fairness criteria hold for  $U$  if and only if they hold for any positive affine transformation of  $U$ .  $\square$

Let us provide a visual standpoint of the definitions of fairness. Exact division corresponds to symmetric allocations. Since each column represents the utility of an allocation as regarded by different players, exact division holds true when all columns of  $U$  are the same. Equivalently, this means that all the elements in any row are equal, that is,  $u_i(x_j) = u_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ . The positive affine transformation defined by  $\tilde{u}_i(x_j) = u_i(x_j) - u_i$  yields  $\tilde{u}_i(x_j) = 0$  for all  $j \in N$ . By doing so for all columns, we see that a utility matrix  $U$  is exact if, and only if, its columns are affine positive transformations of the zero matrix. For instance, the utility matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

represents an exact division. Indeed, by choosing  $D = I_3$ , where  $I_3$  is the identity matrix, and  $(b_1, b_2, b_3) = (-1, 2, -4)$ , we obtain  $DU + B = 0$ .

Proportional fairness means that the diagonal element  $U_{ii}$  of a utility matrix  $U$  is greater or equal to the average of the other row entries, that is,  $U_{ii} \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} U_{ij}$ . Finally,  $U$  is envy-free if, and only if, each diagonal element is the greatest of its row. To illustrate, consider the utility matrix

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Since the columns of  $U$  do not match, the division is not exact. It is not EF either, as the diagonal elements are not all the greatest of their rows. Indeed, the second player prefers the third player's allocation, as  $u_2(x_2) = U_{22} < U_{23} = u_2(x_3)$ . However, the allocation is proportionally fair because each diagonal element is greater than or equal to the average of its row.

To wrap up, we have rephrased the most commonly used fairness definitions for a cake-cutting problem in the case where the utility functions are not additive and the whole cake value is not normalized to one. Further, we characterized these definitions in terms of the utility matrix.

### 5.3 Social Normalization

To compare players' assessments for different allocations, we need to normalize their utility functions. Let  $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{-i}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Denote by  $\mu_i(u_i, x_{-i})$  the average valuation that player  $i$  has for other players' shares, and by  $\sigma_i(u_i, x_{-i})$  the corresponding standard deviation, that is,

$$\mu_i(u_i, x_{-i}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} u_i(x_j) \quad \text{and} \quad \sigma_i^2(u_i, x_{-i}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i}))^2.$$

In terms of the utility matrix  $U$ ,  $\mu_i(u_i, x_{-i})$  is the average of all the entries in row  $i$  except the diagonal element, and  $\sigma_i(u_i, x_{-i})$  is the standard deviation. These terms have a social flavor, as they correspond to player  $i$ 's judgment of others' allocations. They lead us to define the social normalization of utility functions.

**Proposition 7.** *Suppose that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . The utility function*

$$\bar{u}_i(\cdot) = \frac{u_i(\cdot) - \mu_i(u_i, x_{-i})}{\sigma_i(u_i, x_{-i})}, \quad (5.8)$$

*is socially normalized<sup>7</sup>, that is,*

$$\mu_i(\bar{u}_i, x_{-i}) = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_i(\bar{u}_i, x_{-i}) = 1.$$

*Démonstration.* Straightforward computations lead to the results. Indeed,

$$\begin{aligned} \mu_i(\bar{u}_i, x_{-i}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \bar{u}_i(x_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \frac{u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i})}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} \\ &= \frac{1}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} \left( \left( \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} u_i(x_j) \right) - \left( \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \mu_i(u_i, x_{-i}) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} (\mu_i(u_i, x_{-i}) - \mu_i(u_i, x_{-i})) = 0, \end{aligned}$$

---

7. We could have included  $i$ 's allocation in the computation of this normalized utility function. We have chosen to exclude it because we found the discussion of Section 5.4.2 interesting. In any case, including  $i$ 's allocation wouldn't have affected the core ideas of this paper.

and, similarly,

$$\begin{aligned}\sigma_i(\bar{u}_i, x_{-i}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (\bar{u}_i(x_j) - \mu_i(\bar{u}_i, x_{-i}))^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \left( \frac{u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i})}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} - 0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i}))^2 \right) = \frac{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2}{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2} = 1.\end{aligned}$$

Therefore,  $\bar{u}_i$  is socially normalized.  $\square$

Player  $i$ 's socially normalized utility function is independent of other players' assessments of the division  $x$  and has no measurement unit. It gives how many standard deviations above (or below) average a player considers her allocation to be compared to what the others have. This is illustrated in Figure 5.3 for the case where the number of players is large enough that each player's utility for the other players' allocations can be described by a probability density function.

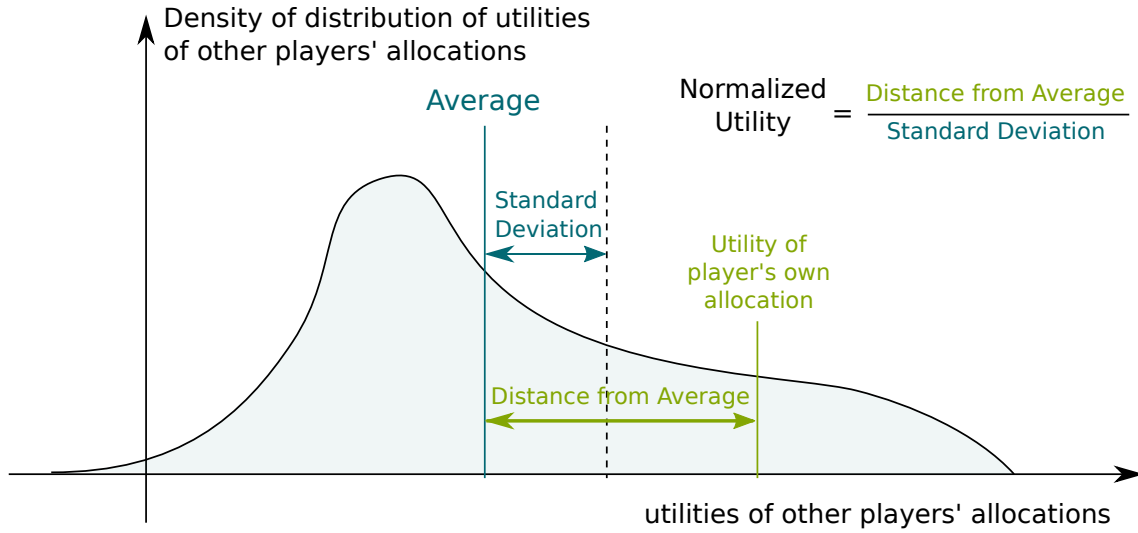


Figure 5.1 Socially normalized utility is a comparison of one's utility with a benchmark given by utilities of trades

The following proposition shows that normalizing a utility function or any admissible affine transformation of that function yields the same result :

**Proposition 8.** *Suppose that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . For any  $d_i > 0$  and any  $b_i \in \mathbb{R}$ , the social normalizations of  $u_i$  and  $d_i u_i + b_i$  coincide.*

*Démonstration.* We first note that  $\mu_i(d_i u_i + b_i, x) = d_i \mu_i(u_i, x) + b_i$  and  $\sigma_i(d_i u_i + b_i, x) =$

$d_i \sigma_i(u_i, x)$ . Then, applying (5.8) to  $d_i u_i + b_i$  gives

$$\frac{(d_i u_i + b_i)(\cdot) - \mu_i(d_i u_i + b_i, x)}{\sigma_i(d_i u_i + b_i, x)} = \frac{d_i u_i(\cdot) + b_i(x_i) - (d_i \mu_i(u_i, x) + b_i)}{d_i \sigma_i(u_i, x)} = \frac{u_i(\cdot) - \mu_i(u_i, x)}{\sigma_i(u_i, x)}, \quad (5.9)$$

which shows that the social normalizations of  $d_i u_i + b_i$  and  $u_i$  coincide.  $\square$

From now on, we denote by  $\bar{U}$  the socially normalized utility matrix, with  $\bar{U}_{ij} = \bar{u}_j(x_i)$  for all  $i, j \in N$ . Next, we show that checking proportional fairness is a very straightforward test when working with socially normalized utility matrices.

**Proposition 9.** *Suppose that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . A utility matrix  $U$  is PF if and only if  $\bar{U}_{ii} \geq 0$  for all  $i \in N$ .*

*Démonstration.* By construction, for any socially normalized utility matrix, the average of all off-diagonal elements in a row is 0. Recalling that PF requires that each diagonal element be greater than or equal to the average of all off-diagonal elements, we see that PF is equivalent to the criterion  $\bar{U}_{ii} \geq 0$  in the Proposition.  $\square$

The above propositions are stated under the condition that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ ; otherwise, the socially normalized utility function (5.8) does not exist. Further, observe that in any two-player cake-cutting problem, our social normalization is useless as the standard deviations are computed for a scalar, and are therefore equal to zero. An illustrative case where  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  is not satisfied for all  $i \in N$  is in our sugar-cake example for  $x_i = \text{cherry}$ , for  $1 \leq i \leq 3$  and  $x_4 = \text{sugar\_cake}$ . Indeed, player 4 always gets a cherry when trading with others. Consequently,  $\sigma_4(u_4, x) = 0$  and this means that this player has no socially normalized utility function. We will deal later on with this “degenerate” case of  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) = 0$ .

We will henceforth omit the arguments of  $\mu_i$  and  $\sigma_i$  when no ambiguity may arise.

**Remark 11.** *In any 3-player cake-cutting problem, all off-diagonal entries of  $\bar{U}$  are  $\pm 1/2$ . To illustrate, consider the following utility matrix :*

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

*It is easy to check that  $\mu_1 = 1/2$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 3/2$  and  $\sigma_3 = 3$ , and*

consequently, the socially normalized utility matrix is given by

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

## 5.4 Social Fairness

In this section, we introduce our new measure of fairness. To do so, let us start by stating, very informally, three intuitive principles regarding the complaints that could be formulated by the agents against a proposed allocation : (i) if no player complains about a division of the cake, then this division is considered fair ; (ii) no player will complain if she gets more than what *she thinks* she should get, based on what others have been given ; and (iii) a complaint put forward by any player has to be assessed in relative terms, i.e., with respect to other players' complaints or to a certain standard. Based on these simple ideas, we introduce a measure of the *unfairness feeling* of a player.

**Definition 8.** Assume that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . Player  $i$ 's unfairness feeling is defined by

$$\mathcal{F}_i = (h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h})^+, \quad (5.12)$$

where  $h(\cdot)$  is a nonnegative and convex decreasing function, and  $\bar{h}$  is the complaint-potential reference given by

$$\bar{h} = \min \left( h(0), \frac{1}{n} \sum_{i \in N} h(\bar{u}_i(x_i)) \right). \quad (5.13)$$

**Definition 9.** Assume that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . A division  $x = (x_1, \dots, x_n)$  feels fair for player  $i$  if  $\mathcal{F}_i = 0$ . When all players feel that the division is fair, we say that the division is socially fair (SF).

A few comments are in order regarding the ingredients in the above definitions. Our measure of the unfairness feeling is based, as it should be, on the comparable players' socially normalized utilities. However, to take into account the fact that differences in *positive* socially normalized utilities are less of a problem than differences in *negative* ones, we rescale the socially normalized utilities when measuring complaints by the mapping  $h$ , to which we refer as the *complaint potential*. The assumptions made on  $h(\cdot)$  ensure that negative variations of negative socially normalized utilities will result in a much greater complaint-potential increase than negative variations of positive socially normalized utilities. Now, as pointed out before, a complaint by a player has to be judged with respect to a norm or a reference point. This

is the role played by  $\bar{h}$ , which is defined as the minimum between the average of complaint potentials and the complaint potential evaluated at  $\bar{u}_i(x_i) = 0$ . The idea behind requiring  $\bar{h}$  to be at most  $h(0)$  is that the players will necessarily complain if their socially normalized utility is less than 0, that is, if the allocation is not PF. Given this, we say that player  $i$  feels unfairness if her complaint potential  $h(\bar{u}_i(x_i))$  is greater than the complaint potential reference  $\bar{h}$ . We measure this feeling of unfairness as the difference between these two values if it is positive. In other words, player  $i$ 's feeling of unfairness is  $(h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h})^+$ , where  $t^+ = \max(0, t)$  is the positive part of  $t$ .

The terminology ‘‘social fairness’’ is justified by social comparisons at different levels. First, the computation of unfairness feelings requires the social normalization of utility functions, which, for each player, we recall, is dependent on others’ allocations. Second, this unfairness feeling is computed by comparing one’s complaint potential  $h(\bar{u}_i(x_i))$  to the average  $\bar{h}$  of others’ complaint potentials. Finally, social fairness requires that the division feel fair to all players.

An important difference between social fairness and the other mentioned before is that social fairness assumes that the players are not only sensitive to the average (as for PF) or the best of the others’ allocations (as for EF), but they are also concerned by the degree of dispersion in the shares through  $\bar{u}_i(x_i)$ .

**Remark 12.** *In the rest of the paper, we adopt the following functional for  $h(\cdot)$  :*

$$\text{Complaint potential function : } h(t) = \exp(-t),$$

*which clearly satisfies the above properties and has the merit of being simple.*

Now, suppose that the agents are shown a number of proposals for dividing the cake and are asked to evaluate them using the utility matrices. If one of them happens to be SF, then we are done. If not, that is, if there is at least one  $\mathcal{F}_i > 0$  for each proposed allocation  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , then it becomes relevant to compare these non-SF allocations. We suggest doing so based on the degree of social fairness.

**Definition 10.** *The degree of social fairness of an allocation  $x = (x_1, \dots, x_n)$  is measured by the average of the unfairness feelings, that is,*

$$\mathcal{G}_{SF}(u, x) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \left( h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h} \right)^+. \quad (5.14)$$

The lower-bound value of  $\mathcal{G}_{SF}(u, x)$  is 0, a case that occurs if and only if  $\mathcal{F}_i = 0$  for all  $i \in N$ , that is, the allocation is SF. To illustrate, let us reconsider the three-player example

described by the utility matrix (5.10) and socially normalized utility matrix (5.11). First, we have

$$\frac{1}{3} \sum_{i \in N} h(\bar{u}_i(x_i)) = (e^{-3/2} + e^{-1} + e^{-1/2}) / 3 = 0.39918,$$

and

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \min \left( h(0), \frac{1}{n} \sum_{i \in N} h(\bar{u}_i(x_i)) \right) \\ &= \min(1, 0.39918) = 0.39918. \end{aligned}$$

Second, we compute  $\mathcal{F}_i, i \in N$  to get

$$\mathcal{F}_1 = (e^{-3/2} - 0.39918)^+ = 0, \quad \mathcal{F}_2 = (e^{-1} - 0.39918)^+ = 0, \quad \mathcal{F}_3 = (e^{-1/2} - 0.39918)^+ = 0.20735.$$

This shows that players 1 and 2 do not have any unfairness feeling, whereas player 3 feels the division to be unfair. As  $\mathcal{F}_3 > 0$ , it becomes relevant to compute the degree of social fairness of this allocation, which is given by

$$\mathcal{G}_{SF}(u, x) = \frac{1}{3} (0 + 0 + 0.20735) = 0.069117.$$

How to interpret the above value? As our measure of the degree of social fairness is not upper bounded, there is no answer in absolute terms to this question. However, in relative terms, an answer can be given by comparing the above value to the corresponding values of other feasible allocations, and then selecting the one that minimizes  $\mathcal{G}_{SF}(u, \cdot)$ .

#### 5.4.1 Links to Other Fairness Definitions

In the rest of this section, we establish some relationships between our fairness criterion and those commonly used in the cake-cutting-problem literature. The following theorem provides an upper bound to the degree of social fairness for allocations that are proportionally fair or envy-free. Its proof uses Lemma 7, which is given in Appendix 5.7.

**Theorem 14.** *Assume  $\sigma_i > 0$  for all players  $i$ . If a division  $x$  is PF or EF, then  $\mathcal{G}_{SF}(u, x) \leq 1/4$ .*

*Démonstration.* Assume the division is proportionally fair. Then, for any player  $i$ , we have  $\bar{u}_i(x_i) \geq 0$ . Hence,  $0 \leq h_i \leq 1$ , where  $h_i = \exp(-\bar{u}_i(x_i))$ . In particular, the average of these

values is at most one. Hence,  $\bar{h}$  is the average of  $h_i$  for  $i \in N$ . Then,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{SF}(u, x) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (h_i - \bar{h})^+ = \frac{1}{n} \sum_{h_i \geq \bar{h}} (h_i - \bar{h}). \quad (5.15)$$

Let us now introduce

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n} \sum_{\bar{h} > h_i} (\bar{h} - h_i). \quad (5.16)$$

Then, we have  $\mathcal{G} - \mathcal{H} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} h_i - \bar{h} = 0$ . Thus,  $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ . Moreover, using Lemma 7, we have

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} (\mathcal{G} + \mathcal{H}) = \frac{1}{2n} \sum_{i \in N} |h_i - \bar{h}| \leq 1/4. \quad (5.17)$$

This proves the Proposition for PF. The fact that any envy-free division is PF completes the proof.  $\square$

As  $\mathcal{G}_{SF}(u, x)$  is nonnegative by construction, the above theorem ensures that the degree of social fairness of any PF or EF lies in the bounded interval  $[0, 1/4]$ . Back to our above example where we had  $\mathcal{G}_{SF}(u, x) = 0.069117$ , we now know that this division  $x$  does much better than the worst PF (or EF) division that would have resulted in a  $\mathcal{G}_{SF}(u, x)$  of  $1/4$ . The following example gives an envy-free division that scores badly in terms of our degree of social fairness, that is, its  $\mathcal{G}_{SF}(u, x)$  is close to  $1/4$  :

**Example 1.** Consider the utility matrix given by

$$U = \begin{pmatrix} M & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 1 \\ 1 & \ddots & M & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

This matrix has been constructed as follows :

- Diagonal terms : For  $i \leq n/2$ , set  $U_{ii} = M > 1$ , and for  $i > n/2$ , set  $U_{ii} = 1$ .
- Off-diagonal terms :
  - For  $1 \leq i < n$ , set  $U_{i+1,i} = 0$ .
  - Set  $U_{1n} = 0$ .



— All other entries are  $U_{ij} = 1$ .

As the diagonal elements are the greatest of their rows, the division represented by  $U$  is EF. Excluding the diagonal, each row has  $n - 2$  cells with 1 as an entry, and one cell with 0 as an entry. Consequently, for any player  $i$ , we have

$$\mu_i = \frac{n - 2}{n - 1} = 1 - \frac{1}{n - 1} \quad \text{and} \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{n - 1} \left( \frac{(n - 2)^2}{(n - 1)^2} + (n - 2) \frac{1}{(n - 1)^2} \right) = \frac{n - 2}{(n - 1)^2}. \tag{5.19}$$

The socially normalized utilities are given by

$$\bar{u}_i(x_i) = \begin{cases} \left( M - \frac{n - 2}{n - 1} \right) \frac{n - 1}{\sqrt{n - 2}}, & \text{if } i \leq n/2, \\ \frac{1}{\sqrt{n - 2}}, & \text{if } i > n/2. \end{cases} \tag{5.20}$$

For  $n$  large enough, we have  $h(\bar{u}_i(x_i)) = e^{-(M - \frac{n-2}{n-1}) \frac{n-1}{\sqrt{n-2}}} \leq e^{-M}$  if  $i \leq n/2$ , and  $h(\bar{u}_i(x_i)) = e^{-1/\sqrt{n-2}}$ , for  $i > n/2$ . When  $M$  and  $n$  are very large, then half of the complaint potentials are nearly 0, and the other half are nearly 1. Hence, the degree of SF is nearly 1/4.

In the next proposition, we have a reciprocal result for PF.

**Proposition 10.** Assume  $\sigma_i > 0$  for all players  $i$ ; then, social fairness implies proportional fairness.

*Démonstration.* By definition, we have  $\bar{h} \leq h(0)$ . If  $\mathcal{G}_{SF}(u, x) = 0$ , then  $h(\bar{u}_i(x_i)) = \bar{h} \leq h(0)$  for all  $i \in N$ . Yet,  $h$  is decreasing. Thus,  $\bar{u}_i(x_i) = \bar{U}_{ii} \geq 0$  for all players  $i$ . Proposition 9 enables the conclusion. □

Figure 5.4.1 recapitulates the relationships between the fairness criteria.

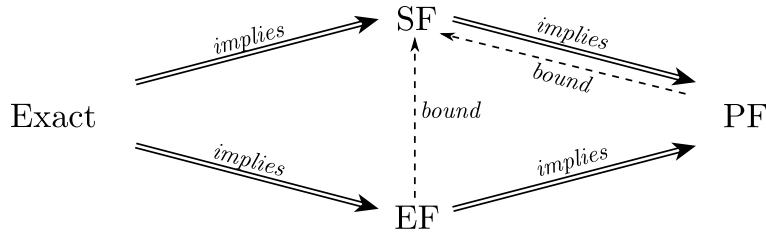


Figure 5.2 Exactness, EF, SF and PF and their interrelations. The dotted arrow “bound” from fairness criterion  $A$  to SF means that  $A$  implies a bound of 1/4 on the degree of SF.

### 5.4.2 Non-Existence of Socially Normalized Utilities

The results above are stated under the assumption that  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) > 0$  for all  $i \in N$ . Now, we deal with the case where  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) = 0$  for at least one player, which occurs when  $u_i(x_j) = \mu_i(u_i, x_{-i})$  for  $j \neq i$ . Denote by  $\tilde{N} \subseteq N$  the subset of players who have a socially normalized utility function, and by  $N \setminus \tilde{N}$  the subset of players for whom  $\sigma_i(u_i, x_{-i}) = 0$ . For any player  $i \in N \setminus \tilde{N}$ , three possibilities can occur when she compares her allocation to the average of the other players' allocations, namely :

1.  $u_i(x_i) > \mu_i(u_i, x_{-i})$ , i.e., player  $i$  prefers her allocation to the average of the other players' allocations. Denote by  $N^+$  the subset of players for whom this inequality holds. For these players, we set their socially normalized utility  $\bar{u}_i(x_i)$  equal to  $+\infty$ . Consequently, the lower bound of complaint potential is given by  $h(\bar{u}_i(x_i)) = e^{-\infty} = 0$ .
2.  $u_i(x_i) = \mu_i(u_i, x_{-i})$ , i.e., player  $i$  is indifferent between her allocation and the average of the other players' allocations. Denote by  $N^0$  the subset of players for whom this equality holds. For these players, we set their socially normalized utility equal to 0.
3.  $u_i(x_i) < \mu_i(u_i, x_{-i})$ , i.e., player  $i$  prefers the average of the other players' allocations to her allocation. Let  $N^-$  be the set of players for whom this equality holds. For these players, we set their socially normalized utility equal to  $-\infty$ .

Consequently, we have the following partition of the set of players :

$$N = \tilde{N} \cup N^+ \cup N^0 \cup N^-. \quad (5.21)$$

Obviously, players in  $N^-$  will complain about their shares, and any reasonable fairness criterion must declare a division unfair whenever  $N^-$  is non-empty. To illustrate the construction of a socially normalized utility matrix when  $\sigma_i(u_i, x_{-i})$  is equal to zero for at least one player, we reconsider the example of the sugar cake with three cherries. Recall that the utility matrix is given by

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Clearly, for player 4, we have  $\sigma_4(u_4, x_{-4}) = 0$ , and  $u_4(x_4) > \mu_4(u_4, x_{-4})$ . As this player is in  $N^+$ , we set  $\bar{U}_{44} = +\infty$ , and compute the rest using

$$\mu_i(u_i, x_{-i}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} u_i(x_j) \quad \text{and} \quad \sigma_i^2(u_i, x_{-i}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i}))^2,$$

to obtain the following socially normalized utility matrix :

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & +\infty \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Using the above modifications for players in the set  $N \setminus \tilde{N}$ , we introduce the following generalization of the degree of social fairness.

**Definition 11.** *The degree of social fairness is defined by*<sup>8</sup>

$$\mathcal{G}_{SF}(u, x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } N^- \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } N^0 = N, \\ \frac{1}{|\tilde{N} \cup N^+|} \sum_{i \in \tilde{N} \cup N^+} (h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h})^+ & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.23)$$

where

$$\bar{h} = \frac{1}{|\tilde{N} \cup N^+|} \sum_{i \in \tilde{N} \cup N^+} h(\bar{u}_i(x_i))$$

In the sugar-cake example, we have  $\bar{h} = (3e^{-\sqrt{2}/2} + 0)/4 \approx 0.3$ , and consequently, we obtain the following SF degree for the allocation  $x = (\text{cherry}_1, \text{cherry}_2, \text{cherry}_3, \text{sugar\_cake})$  :

$$\mathcal{G}_{SF}(u, x) = \frac{1}{4} \left( 3(e^{-\sqrt{2}/2} - \bar{h}) + 0 \right) = \frac{3}{16} e^{-\sqrt{2}/2} \approx 0.092. \quad (5.24)$$

The following proposition is a straightforward characterization of socially fair divisions of a cake :

**Proposition 11.** *A division is socially fair if and only if one of the two following conditions is satisfied :*

1.  $N = N^+ \cup N^0$  (or, equivalently,  $\tilde{N} = N^- = \emptyset$ ).
2.  $N^+ = N^- = \emptyset$  and  $\bar{u}_i(x_i) = \bar{u}_j(x_j) \geq 0$  for all  $i, j \in \tilde{N}$ .

---

8. It is debatable whether players of  $N^0$  should be excluded from the bottom computation. We have chosen to do so, because we argue that if one were indifferent to an allocation (and hence would have a row with all-equal numbers), he would have no reason to complain. However, one could also argue that a player in  $N^0$  is at the average, and thus, feels underprivileged with respect to players in  $\tilde{N}$  and  $N^+$ .

*Démonstration.* First, note that if  $N = N^+ \cup N^0$ , then  $\exp(-\bar{u}_i(x_i)) = 0$  for all  $i \in \tilde{N} \cup N^+$  since  $\tilde{N} = \emptyset$ . Thus, their variance is zero, which proves that the division is SF. Second, let  $(u, x)$  be an SF division such that  $\tilde{N}$  is non-empty. Obviously, we need to have  $N^- = \emptyset$ . Now, let  $i \in \tilde{N}$ , then  $\exp(-\bar{u}_i(x_i)) > 0$ . For the variance to be zero, we thus cannot have  $\exp(-\bar{u}_j(x_j)) = 0$ , which means that  $N^+$  is empty. What is more, the values  $\exp(-\bar{u}_i(x_i))$  must all have the same values for  $i \in \tilde{N}$ , which corresponds to the equalities  $\bar{u}_i(x_i) = \bar{u}_j(x_j)$  for all  $i, j \in \tilde{N}$ . Finally, we must have  $h(\bar{u}_i(x_i)) = \bar{h}$ , which requires  $\bar{u}_i(x_i) \geq 0$ .  $\square$

We end this section by making the following observations regarding exact divisions : (i) their socially normalized utility matrices are zero matrices, i.e.,  $\bar{U} = 0$ ; and (ii) they are socially fair (this is a consequence of the second item in the above proposition).

## 5.5 Local Fairness

In this section, we assume that each player is more sensitive to the shares given to “similar” or “close” players, than by the shares obtained by the other players. To illustrate, a full professor is probably more concerned by how much of the total research budget the head of the department is allocating to another full professor than by the share reserved to a starting assistant professor. To handle such a case, we represent the interactions (or connectedness) between the players by a weighted directed graph, and redefine fairness in local terms.

Consider a weighted directed graph where  $w_{ij}$  is the weight on arc  $(i, j)$ , that is, the link between players  $i$  and  $j$ . The larger the value of  $w_{ij}$ , the more player  $i$  cares about player  $j$ 's share, and  $w_{ij} = 0$  means that what player  $j$  is getting is of no concern to player  $i$ . We suppose that for each player  $i$  there exists at least a player  $j$  with  $w_{ij} > 0$ , such that  $\sum_{j \in N} w_{ij} \neq 0$ . Note that  $w_{ij}$  is not necessarily equal to  $w_{ji}$ . We set  $w_{ii} = 0$  for any player  $i$ , and consequently, the matrix of weights  $W$  contains nonnegative numbers with a zero diagonal. We will refer to  $W$  as the social network matrix. Clearly, if  $w_{ij} = 1$  for all  $i \neq j$  and  $w_{ii} = 0$  for all  $i$ , then we recover the case studied in the previous section.

As before, we will normalize the utilities, with the difference here being that we take into account the links, or their absence, between the players. Denote by  $\mu_i(u_i, x, w_i)$  the weighted average utility for player  $i$  given by

$$\mu_i(u_i, x, w_i) = \left( \sum_{j \in N} w_{ij} u_i(x_j) \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right). \quad (5.25)$$

Observe that the above quantity only involves terms of the  $i$ -th rows of the utility matrix  $U$  and of the social network matrix  $W$ . Unlike previously, there is no need to write  $x_{-i}$  because

$w_{ii} = 0$ . The weighted standard deviation for player  $i$  is defined by

$$\sigma_i^2(u_i, x, w_i) = \left( \sum_{j \in N} w_{ij} (u_i(x_j) - \mu_i)^2 \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right). \quad (5.26)$$

**Proposition 12.** *Suppose that  $\sigma_i(u_i, x, w_i) > 0$  for all  $i \in N$ . The utility function*

$$\bar{u}_i(\cdot) = \frac{u_i(\cdot) - \mu_i(u_i, x, w_i)}{\sigma_i(u_i, x, w_i)}, \quad (5.27)$$

is locally socially normalized, that is,

$$\mu_i(\bar{u}_i, x, w_i) = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_i(\bar{u}_i, x, w_i) = 1.$$

*Démonstration.* Straightforward computation gives

$$\begin{aligned} \mu_i(\bar{u}_i, x, w_i) &= \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \bar{u}_i(x_j) \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) = \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \frac{u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i})}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} \left( \left( \sum_{j \in N} w_{ij} u_i(x_j) \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) - \mu_i(u_i, x_{-i}) \right) = 0, \end{aligned}$$

and, similarly,

$$\begin{aligned} \sigma_i(\bar{u}_i, x_{-i}) &= \left( \sum_{j \in N} w_{ij} (\bar{u}_i(x_j) - \mu_i(\bar{u}_i, x_{-i}))^2 \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) \\ &= \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \left( \frac{u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i})}{\sigma_i(u_i, x_{-i})} - 0 \right)^2 \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2} \left( \sum_{j \in N} w_{ij} (u_i(x_j) - \mu_i(u_i, x_{-i}))^2 \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) = \frac{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2}{\sigma_i(u_i, x_{-i})^2} = 1. \end{aligned}$$

Therefore,  $\bar{u}_i$  is locally socially normalized. □

In the rest of the section, we assume that  $\sigma_i(u_i, x, w_i) > 0$  for all  $i \in N$  (the case  $\sigma_i(u_i, x, w_i) = 0$  can be dealt with following the same approach as in the previous section). Next, we straightforwardly extend the measures of player  $i$ 's complaint-potential reference  $\bar{h}_i$

and unfairness feeling  $\mathcal{F}_i$  as follows :

$$\begin{aligned}\bar{h}_i &= \min \left( 1, \left( \sum_{j \in N} w_{ij} h(\bar{u}_j(x_j)) \right) / \left( \sum_{j \in N} w_{ij} \right) \right), \\ \mathcal{F}_i &= (h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h}_i)^+.\end{aligned}$$

Note that now, player  $i$ 's complaint-potential reference is specific to her, which is consistent with the idea that each player is only concerned by the outcomes for people to whom she is connected. A definition of the degree of local social fairness follows.

**Definition 12.** *The degree of local social fairness (LSF) is given by*

$$\mathcal{G}_{LSF}(u, x, w) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (h(\bar{u}_i(x_i)) - \bar{h}_i)^+. \quad (5.28)$$

A division is locally socially fair (LSF) if  $\mathcal{G}_{LSF}(u, x, w) = 0$ .

Now, we can adapt the definitions of fairness used in the cake-cutting-problem literature to our “local” or social network setting.

**Definition 13.** *A division is*

1. *locally exact if  $u_i(x_i) = u_i(x_j)$  whenever  $j$  is a neighbor of  $i$ , that is,  $w_{ij} > 0$ ;*
2. *locally proportionally fair (LPF) if  $u_i(x_i) \geq \mu_i$  for all  $i$  who have at least one neighbor;*
3. *locally envy-free (LEF) if  $u_i(x_i) \geq u_i(x_j)$  whenever  $j$  is a neighbor of  $i$ .*

The following theorem characterizes the relationships between these definitions.

**Theorem 15.** *We have the following implications :*

1.  $EF \Rightarrow LEF \Rightarrow LPF \Rightarrow \mathcal{G}_{LSF} \leq 1/4$ .
2.  $LSF \Rightarrow LPF$ .
3.  $exact \Rightarrow locally\ exact \Rightarrow LEF, LPF\ and\ LSF$ .

*Démonstration.* The implications  $EF \Rightarrow LEF \Rightarrow LPF$  are immediate. The bound on  $LSF$  is then derived similarly to what we did in Theorem 14. Similarly, the second implication is based on the same grounds as Proposition 10. Now, the third implications ( $exact \Rightarrow locally\ exact \Rightarrow LEF$  and  $LPF$ ) are trivial. But then, all local social normalizations are undefined, which, following Section 5.4.2, implies  $LSF$ .  $\square$

We recapitulate all connections between the fairness concepts in Figure 5.3.

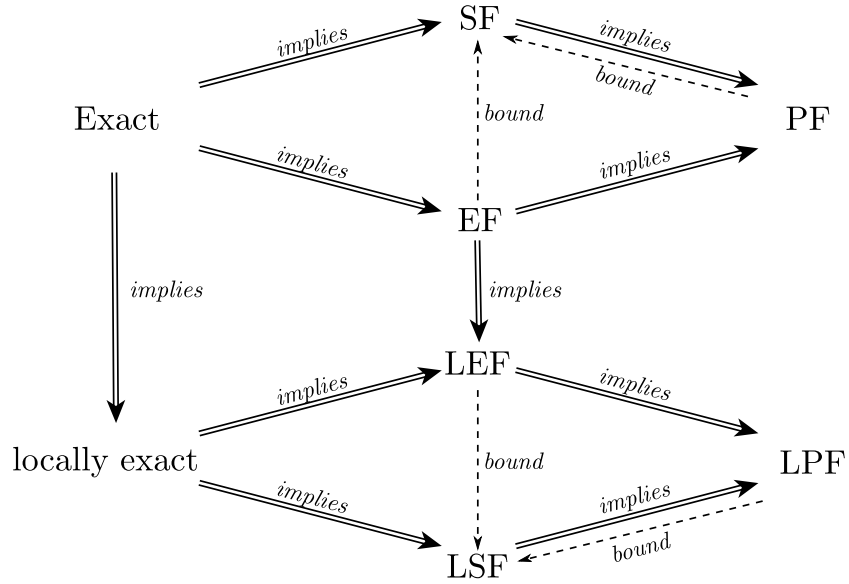


Figure 5.3 Relations between the different fairness definitions

**Remark 13.** *An important observation is that proportional fairness does not imply local proportional fairness. To illustrate this counterintuitive result, consider the following utility and social-network (weights) matrices :*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & -5 \\ 1 & 0 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

*It is easy to check that the division is PF but not LPF. This result has an interesting interpretation in behavioral terms. It shows that a division, while being globally fair in the usual PF sense, fails to satisfy some players who only care about how other, specific players are treated.*

Let us finish by illustrating LSF in the sugar-cake example. Recall that in this example, players 1, 2 and 3 had the same preferences, while player 4's preferences were the opposite of the three other players'. A formal way to see this is to compute correlations between any two players' rows in the utility matrix. Given this, it makes sense to assume that players 1, 2 and 3 are socially connected, but not 4. In other words, we have the following social network

matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

The fourth player has no player to compare herself too and thus cannot feel that the division is unfair. Meanwhile, the division is locally exact for players 1, 2 and 3; hence, they feel that the division is fair too. Overall, the division is thus LSF.

## 5.6 Conclusion

In this paper, we proposed an alternative approach to existing ways of measuring fairness. The first step was to introduce a new way of normalizing the players' utility functions. Our social normalization for each player consists of using other players' allocations as a benchmark to which the player will compare her own allocation. Importantly, she does so through her own lens, that is, her utility function. The socially normalized utility function of a player is the affine positive transformation of her utility function, such that the average utility for others' allocations equals 0, and the standard deviation is 1. Thereby, the player's socially normalized utility counts the number of standard deviations above the average that she thinks her allocation is, compared to the distribution of others' allocations. We argue that such a normalization gives a relevant meaning to utility values, hence making two different utility functions comparable. Then, roughly, a division will be socially fair if all players have equal socially normalized utilities.

Now, in many large-scale optimization problems, a principal agent is in charge of solving the allocation problem. Yet, there may be no feasible fair solution. For instance, in shift scheduling, one employee will have to close the shop on Saturday evening, even if no employee wants to. Besides, even if there are fair solutions, the NP-hardness of many allocation problems indicates that computing these fair solutions may not be feasible in a reasonable amount of time. Moreover, concerns other than fairness may enter in play, e.g., social efficiency. These aspects then require a comparison of unfair allocations. We have proposed to do so by measuring players' unfairness feelings. These unfairness feelings are computed in two steps. First, for a given player, we compute her complaint potential as a decreasing and convex function of her socially normalized utility. We then argue that a player will actually feel unfairness only if her complaint potential exceeds that of others. If it does, then her unfairness feeling is defined as the difference between her complaint potential and the average of the others'. The degree of social fairness of an allocation is then given by the average



unfairness feeling.

While this approach to measuring fairness is reasonable in many cases, it may not be implementable when the number of players is very large. To illustrate, Air Canada’s crew-scheduling problem involves 11,000 pilots. It is then more realistic to consider that in such cases, players do not actually compare their allocations to all others, including for information-access reasons. Most likely, players instead feed their complaint potential by focusing on the allocations of “socially close” or “similar” players. By introducing a social network and by adapting concepts to this setting where interactions between players are limited, we have introduced local fairness concepts that appear to be much more suitable for and relevant to describing fairness in large-scale contexts. In particular, the correlation of players’ preferences can be used as an indicator of how much they will be using one another’s allocation to derive their complaint potentials. In an upcoming research project, we intend to apply these concepts to a concrete instance of shift scheduling, where a manager aims to establish a economically competitive, socially efficient and socially fair shift-allocation for her employees.

## 5.7 Appendix

**Lemma 7** (for Theorem 14). *Let  $h_1, \dots, h_n \in [0, 1]$ , and denote  $\bar{h}$  their average. Then,*

$$\sum_{i \in N} |h_i - \bar{h}| \leq n/2. \quad (5.31)$$

*Démonstration.* Let  $N_+$  (respectively,  $N_0$  and  $N_-$ ) the subsets of  $N$  such that  $h_i > \bar{h}$  (respectively,  $h_i = \bar{h}$  and  $h_i < \bar{h}$ ). Denote  $f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i \in N} |h_i - \bar{h}|$ . If  $h_i \geq \bar{h}$ , then the right partial derivative of  $f$  with respect to  $h_i$  equals

$$\frac{\partial f}{\partial h_i^+} = 1 - \frac{|N_+| - |N_0| - |N_-|}{n} > 0. \quad (5.32)$$

Similarly, if  $h_i \leq \bar{h}$ , then the left partial derivative with respect to  $h_i$  is going to be negative. This means that the first-order condition cannot hold for  $h_i \in ]0, 1[$ . Thus, the maximum of  $f$  is necessarily reached for  $(h_1, \dots, h_n) \in \{0, 1\}^n$ . But then,  $\bar{h} = |N_+|/n$ . Therefore,

$$f(h_1, \dots, h_n) = |N_+| \left(1 - \frac{|N_+|}{n}\right) + |N_-| \frac{|N_+|}{n} = \frac{2|N_+|(n - |N_+|)}{n}, \quad (5.33)$$

whose maximum is reached for  $|N_+| = n/2$ , in which case the right term equals  $n/2$ . This gives us the upper bound of the Lemma.  $\square$

## CHAPITRE 6

ARTICLE 4 : NORMALIZATIONS OF EMPLOYEE PREFERENCES IN  
PERSONNEL SCHEDULING

---

**Normalizations of Employee Preferences in  
Personnel Scheduling**<sup>1 2</sup>

---

LÊ NGUYÊN HOANG

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

GUY DESAULNIERS

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

MAHSA ELAHIPANAH

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

FRANÇOIS SOUMIS

*GERAD, École Polytechnique de Montréal*

Soumis à *European Journal of Operations Research*.

- 
1. This paper was funded by a university-industry collaboration between NSERC and Kronos.
  2. We thank François Lessard for his implementation of the shift-scheduling algorithms of this paper.

**Abstract.** Including employee preferences in a shift-scheduling scheme raises the question of how to aggregate employee satisfactions in a sensible manner. To do so, we first need to model the employees’ preferences, which can be done using so-called utility functions and a multi-attribute approach like MACBETH. Even then, though, we still need to make sure that it is sensible to compare or to add two different utility functions that concern different attributes. To do so, an appropriate normalization of utility functions is required. In this paper, we first discuss a naive extreme value normalization (EVN), which has utility values ranging all along two predetermined values, e.g. between 0 and 5. Then, we propose an alternative normalization, called AMACSN, which relies on a description of the “typical outcomes” produced by a shift-scheduling scheme. We then give both the conceptual grounds and the computational results to argue that AMACSN is more relevant and more meaningful than EVN to address the comparison or addition of different utility functions. As a bonus, we observe that AMACSN induces greater fairness.

**Keywords :** Normalization ; Preferences ; Utility ; Multi-Attribute ; Scheduling ;

## 6.1 Introduction

Since Dantzig [1954], shift scheduling has become a widely studied problem of operations research. It consists of creating and allocating shifts to employees to best cover a demand for employees at all times, and it can be stated as a set-covering problem. While set-covering problems have been shown to be NP-complete by Karp [1972], efficient exact or heuristic approaches based on column generation (Appelgren [1969], Desrochers and Soumis [1989], Barnhart and Shenoi [1998], Desaulniers et al. [2005]) have yielded very good solutions. The efficiency of these approaches lies in the smallness of integrality gaps.

As computer power has increased, shift-scheduling models have become more realistic by including more constraints. For instance, at first, breaks in shifts were not taken into account (see Moondra [1976]) ; this was then rectified by Bechtold and Jacobs [1990] with the inclusion of lunch breaks. Later, Aykin [1996] proposed a model with several possible breaks. Rekik et al. [2010] generalized the model to include fractionable breaks. We pursue this effort to make shift-scheduling models more realistic, by including employee preferences.

One difficulty posed by such a goal is that shifts must be personalized. Personalized scheduling is not new though. Indeed, many models of *rostering* require knowledge of employees’ planned activities like holidays, training periods or medical appointments. This, in turn, requires shift scheduling to treat employees asymmetrically, as was done for air crew scheduling (Gontier [1985]) or nurse scheduling (Bard and Purnomo [2005]). Using heuristic column

generation and today’s computer power, good solutions can still be found in a reasonable amount of time.

While this paper does provide a new approach to optimize the satisfaction of employees’ preferences, the main contribution of this paper lies rather in the way we include these preferences. For one thing, it is notable that the mere step of mathematically modeling one’s preferences is a difficult task. Indeed, it has been the core of active fields of research including conjoint analysis (Green and Srinivasan [1978], Orme [2005]) and multicriteria analysis (Siskos and Spyridakos [1999], Zopounidis and Doumpos [2002]). One approach from the latter category that we have found particularly relevant for our purposes is known as the MACBETH method, introduced by Bana e Costa and Vansnick [1994]. In this setting, an employee describes a linear multi-attribute utility function by giving qualitative answers to comparison questions only. An example of such question is “*How much do you prefer starting a work shift at 8am compared to at 10am?*”

Thus, MACBETH models any employee’s preferences as a weighted sum of so-called partial utility functions. Each partial utility function corresponds to an attribute (e.g. the time of day worked, the total number of hours worked in the week or the day off in the week). More precisely, for any employee  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  and any attribute  $k \in K$ , the MACBETH method yields a partial utility function  $u_{ik}$ , which maps levels  $l_{ik}$  of this attribute (e.g. early morning, 40 hours or Sunday) to a real number. This real number  $u_{ik}(l_{ik})$  takes on greater values for more preferred levels  $l_{ik}$ . Also, there is a weight  $w_{ik}$  associated with attribute  $k$ , so that the linear multi-attribute utility function of employee  $i$  can be written

$$u_i = \sum_{k \in K} w_{ik} u_{ik}(l_{ik}). \quad (6.1)$$

The MACBETH software allows employee  $i$  to determine the partial utility functions  $u_{ik}(\cdot)$  and the weights  $w_{ik}$  that best match his preferences. We will describe this setting more formally in Section 2, as well as a shift-scheduling program we use to optimize employees’ utilities.

It is important to notice, though, that the MACBETH method does not yield any normalization of the employees’ linear multi-attribute utility functions. In other words, while it offers a sense of each utility function  $u_i$  individually and up to a positive affine transformation, it does not offer the possibility to compare the utility functions  $u_i$  and  $u_j$  of two different employees  $i$  and  $j$ . However, since we will be seeking to maximize the sum of all utilities, it is essential for these utility functions to be on the same scale.

A naive approach to doing this is what we call the extreme value normalization (EVN). In this setting, we make sure that the minimal value of a partial utility function is 0, and that its

maximum value is 5. The choice of the value 5 is arbitrary, but results would be identical for any other choice. Importantly, partial utilities are normalized with regard to their extreme values. This normalization is used, for instance, to compute the Human Development Index (HDI). Then, we require the sum of weights to add up to 100. While this naive normalization is widely used and already yields relevant shift allocations, we will show its flaws, both conceptually, through the so-called *busy Christmas paradox* and numerically, with our more advanced normalization called AMACSN.

AMACSN consists of two steps. First, we need to find a meaningful normalization of the partial utility functions  $u_{ik}$  to make all their values comparable with one another. To do so, we introduce a new normalization we call the correlated social normalization (CSN), which represents a major contribution of this paper. In essence, for each employee  $i \in N$  and each attribute  $k \in K$ , this normalization consists of comparing the partial utility  $u_{ik}(l_{ik})$  of the employee for the level of his schedule to his partial utilities  $u_{ik}(l_{jk})$  for the other employees' levels  $l_{jk}$ , especially if employees  $i$  and  $j$  have the same preferences.

Next, note that the normalization of each partial utility function  $u_{ik}$  implies a rescaling of the corresponding weight  $w_{ik}$  to keep the multi-attribute utility function consistent. Indeed, if the partial utility  $u_{ik}$  is stretched by the normalization by a factor of 2, then the corresponding weight  $w_{ik}$  should be divided by 2. However, we still may need to normalize the whole vector of weights  $(w_{ik})_{k \in K}$ , so that two different employees' multi-attribute utilities are comparable. We formalize this aspect by introducing a multiplier  $\alpha_i$  of the vector of weights for each employee  $i$ . Determining the multipliers  $\alpha_i$  is the second step of our normalization procedure. In Section 4, we will present a normalization of these multipliers based on the so-called standard utility functions. At last, we obtain AMACSN.

This paper is divided into 6 sections. In Section 2, we present MACBETH, the description of preferences as linear multi-attribute utility functions and the shift-scheduling formulation as an integer program. Next, Section 3 introduces EVN, and then AMACSN, our main contribution. Section 4 then presents results of the shift-scheduling program, using EVN and AMACSN. These results confirm the greater relevancy of AMACSN. Finally, conclusions are drawn in Section 5.

## 6.2 Preferences and Scheduling Program

In this paper, we consider a shift-scheduling and job-assignment problem over one week. The main goal of this paper is to design an algorithm that also personalizes employees' shifts according to their preferences. To proceed to personalized shift scheduling with preferences, we first need to define a protocol that enables the employees to describe their preferences.

Then, we need to include these preferences in the shift-scheduling optimization program. This requires us to provide a quantification of the employees' preferences.

In Subsection 6.2.1, we briefly discuss the modeling of the preferences according to linear multi-attribute utility functions that shall be used in the shift scheduling program. By using MACBETH, each employee determines his corresponding linear multi-attribute utility function, hence defining weights  $w_{ik}$  and partial utilities  $u_{ik}$ .

Then, in Subsections 6.2.2 and 6.2.3, we present the shift-scheduling optimization program, which is an integer linear program. We first present the program without preferences, which will enable us to derive the minimal shift-scheduling cost. Then, we present the program with preferences, that maximizes the sum of utilities, while guaranteeing a bound on costs defined by the minimal shift-scheduling cost. We also briefly discuss algorithms used to solve heuristically these scheduling programs.

### 6.2.1 Linear Multi-Attribute Utility Functions

Defining a procedure to help people quantitatively describe their preferences is a difficult problem that represents an active field of research. This is particularly true when faced with a large number of complex possible alternatives, as is the case for preferences about work schedules. A common simplification consists of characterizing *attributes* (also known as criteria), which preferences really depend on. In this paper, we consider four attributes, namely *Hours Per Week* (HPW), *Job Activity* (Job), *Shift-Type* (ShT) and *Day-On* (Day). We denote  $K = \{HPW, Job, Day, ShT\}$  the set of attributes.

For a given schedule  $s$ , each attribute  $k$  takes a value called *level*  $l_k(s)$ . Depending on attributes, levels can have different forms. They can be vectors, scalars or subsets. To illustrate, the *Day-On* attribute is the subset of the days in the week that are working days. So, for instance, if a schedule  $s$  gives Wednesday and Sunday off, the *Day-On* attribute has level  $l_{Day}(s) = \{Monday, Tuesday, Thursday, Friday, Saturday\}$ . For the purpose of analyzing employees' preferences, a shift  $s$  can be regarded as a vector

$$(l_k(s))_{k \in K} = (l_{HPW}(s), l_{Job}(s), l_{Day}(s), l_{ShT}(s)). \quad (6.2)$$

For the sake of exposition and for confidentiality reasons, we do not explicit all levels.

To proceed, we assume that an employee's preferences about schedules can be fully described by a linear multi-attribute utility function. This means that we assume that the employee  $i$ 's utility function  $u_i : s_i \mapsto u_i(s_i) \in \mathbb{R}$  can be decomposed into a weighted sum of partial utility functions  $u_{ik} : l_{ik} \mapsto u_{ik}(l_{ik}) \in \mathbb{R}$ , for attributes  $k \in K$ . Denoting  $w_{ik}$  the weight of attribute  $k$  in employee  $i$ 's utility function, then, for any schedule  $s_i$  given to employee  $i$ , we

have

$$u_i(s_i) = \sum_{k \in K} w_{ik} u_{ik}(l_k(s_i)). \quad (6.3)$$

The description of partial utility functions  $u_{ik}(\cdot)$  depends on the structure of the levels of attribute  $k \in K$ . Once again, for confidentiality reasons, we will not give more details regarding this modeling. Note, though, that the details about the partial utility functions that are skipped are not useful for the sequel of this paper.

Importantly, this decomposition is not unique. Indeed, following ?, if we only regard an employee's viewpoint, then only the ordering of shifts matters. Therefore, utility functions should actually be defined up to a positive affine transformation. This means that  $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\alpha u_i + \delta$  represent the same utility functions for any  $\alpha > 0$ , since such a transformation leaves the ordering of preferences unchanged<sup>3</sup>. In other words, for a given utility function, there are two degrees of freedom that need to be fixed by normalization.

Similarly, for each partial utility function  $u_{ik}(\cdot)$ , we have two degrees of freedom, as we can replace  $u_{ik}(\cdot)$  by  $\beta_{ik} u_{ik}(\cdot) + \gamma_{ik}$  for any  $\beta_{ik} > 0$ . Note that if we do multiply a partial utility function  $u_{ik}(\cdot)$  by a multiplier  $\beta_{ik} > 0$ , then we need to divide  $w_{ik}$  by  $\beta_{ik}$  simultaneously to maintain the consistency of the multi-attribute utility function  $u_i(\cdot)$ . Otherwise, our modified multi-attribute utility function might describe a different ordering of shift allocations, and hence describe different preferences. To stick with simple notations though, we will not explicit these normalizable parameters of linear multi-attribute utility functions.

Before getting to the normalization considerations, we first need to determine a procedure that can help employees arrive at a decomposition of their preferences. There are two main areas of research that aim at such a procedure. The first is conjoint analysis (see Green and Srinivasan [1978], Louviere [1988], Green et al. [2001], Netzer et al. [2008]), which consists of analyzing trade-off situations one may be faced with. For instance, one may be asked to rank a small set of alternatives. From these observations, a regression model characterizes the trends to induce a global ordering of all the alternatives.

However, more straightforward approaches have come from multicriteria analysis. Some of the most popular methods from this field are ELECTRE (Benayoun et al. [1966], Maystre et al. [1994], Greco et al. [2011]), PROMETHEE (Brans et al. [1986], Brans and Mareschal [2002]) and MACBETH. This last one is used in this paper. There are two main steps involved in using MACBETH to describe linear multi-attribute utility functions. First, employee  $i$ 's partial utility functions  $u_{ik}(\cdot)$  is defined, and then his weights  $w_{ik}$  are determined.

Roughly, an employee's partial utility function is constructed by having the employee

---

3. More precisely, for any two shifts  $s_1$  and  $s_2$ ,  $u_i(s_1) \geq u_i(s_2)$  if and only if  $\alpha u_i(s_1) + \delta \geq \alpha u_i(s_2) + \delta$ . Plus, the same property must hold for probability distributions over shifts.

comparing *reference levels*. This is done by filling in a half matrix in MACBETH. Then, depending on the considered attribute, MACBETH infers a whole partial utility function  $u_{ik}(\cdot)$ .

**Remark 14.** *The partial utility functions of MACBETH are only normalized such that the maximum utility of an attribute always equals 100. However, there is no normalization of the minimum utility. It can equal 0 or be as small as -600. This is not good for our optimization, as partial utility functions will not all be at the same scale.*

Now, for each attribute  $k \in K$ , MACBETH determines a default level  $l_k^{default}$  and a most preferred level  $l_k^{preferred}$ . Then, for any two attributes  $k_1, k_2 \in K$ , employees are asked to compare levels  $(l_{k_1}^{default}, l_{k_2}^{preferred})$  and  $(l_{k_1}^{preferred}, l_{k_2}^{default})$ . By achieving all pairwise comparisons between any two attributes, employees fill in a half matrix in MACBETH, which is then automatically used to compute all weights  $w_{ik} \geq 0$  (with at least one non-zero).

### 6.2.2 Shift Scheduling without Preferences

The shift-scheduling problem we face has a one-week horizon. This week is divided into a set  $T = \{1, \dots, |T|\}$  of periods. At each period  $t \in T$  and for each job activity  $a \in A$ , we suppose that there is a known demand  $d_{at}$ . Each undercovering (respectively, overcovering) of demand has a cost  $\underline{c}_a$  (respectively,  $\bar{c}_a$ ) per period  $t \in T$  of time. We denote by  $U_{at}$  and  $O_{at}$  the number of undercoverings and overcoverings of demand for job activity  $a$  at period  $t$ . For each employee  $i \in N$ , we denote by  $\Omega_i$  the set of his admissible one-week schedules. We define  $\delta_{ats}$  the binary parameter that equals 1 if and only if schedule  $s \in \Omega_i$  requires employee  $i$  to work job activity  $a \in A$  at period  $t$ . Finally, we denote by  $x_{is}$  the binary variable that equals 1 when employee  $i \in N$  works schedule  $s \in \Omega_i$ .

The following Shift Scheduling (SS) integer linear program determines the minimal shift-scheduling cost :



$$C_0 = \underset{x,U,O,C}{\text{Minimize}} \quad C \quad (6.4)$$

$$\text{subject to :} \quad \sum_{s \in \Omega_i} x_{is} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (6.5)$$

$$U_{at} + \sum_{\substack{i \in N \\ s \in \Omega_i}} \delta_{ats} x_{is} = d_{at} + O_{at}, \quad \forall a \in A, \forall t \in T, \quad (6.6)$$

$$C = \underline{c}_a U_{at} + \sum_{\substack{a \in A \\ t \in T}} \bar{c}_a O_{at} \quad (6.7)$$

$$U_{at} \geq 0, O_{at} \geq 0, \quad \forall a \in A, \forall t \in T. \quad (6.8)$$

$$x_{is} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \forall s \in \Omega_i. \quad (6.9)$$

Equations (6.5) assert that each employee must be given one and only one shift. Equations (6.6) compute the number of undercoverings and overcoverings in each period and for each job. Equations (6.7) derive costs from undercoverings and overcoverings. Relations (6.8) ensure that the numbers of undercoverings and overcoverings are computed as non-negative values. Finally, relations (6.9) are the integrality requirement on the schedule variables.

We shall use this minimal cost  $C_0$  to design our shift-scheduling program with preferences.

### 6.2.3 Shift Scheduling with Preferences

In order to balance shift-scheduling cost with fairness in a reasonable way, we require the personalized shift scheduling to cost no more than  $(1 + \alpha)C_0$  for  $\alpha > 0$ . In our case, we will choose  $\alpha = 2\%$ .

Moreover, we assume that each employee has determined and revealed his linear multi-attribute utility function for shifts. This means that we are given as inputs the partial utility functions  $u_{ik} : l_k \mapsto u_{ik}(l_k) \in \mathbb{R}$  for any employee  $i \in N$  and attribute  $k \in K$ , as well as weights  $w_{ik} \in \mathbb{R}_+$ . As discussed earlier, these should be normalized before running the shift-scheduling program. Different normalizations will be discussed in Section 6.3.

Now, in an attempt to maximize the employees' satisfactions, we define the Shift Scheduling with Preferences (SSP) optimization program :

$$\text{Maximize}_{x,U,O,C} \sum_{i \in N} \sum_{s \in \Omega_i} \sum_{k \in K} w_{ik} u_{ik}(l_k(s)) x_{is} \quad (6.10)$$

$$\text{subject to : } C \leq (1 + \alpha)C_0, \quad (6.11)$$

Constraints (6.5) – (6.9).

It is noteworthy that SSP does not include any fairness objective. We have found that solving SSP is already quite time-consuming. Yet, a fairness term in the objective function, which, for instance, would minimize some sort of standard deviation, can be expected to yield a much greater integrality gap. For this reason, we expect the addition of such a term to greatly increase the computation time. For this reason, we limit ourselves to simply maximizing the sum of the employees' satisfactions. However, as we shall see, a right normalization of utility functions will naturally guarantee a satisfying amount of fairness.

To solve the SSP program, we propose a heuristic based on column generation (see Appelgren [1969], Desrochers and Soumis [1989], Barnhart and Shenoi [1998], Desaulniers et al. [2005]). We first solve the linear relaxation of the SS program for a set  $\Omega_i$  that initially contains only a few of the admissible shifts for employees  $i \in N$ . Then, given dual variables of the SS program, and using a subproblem, we generate other relevant columns  $s \in \Omega_i$ . This subproblem is solved using a professional software, which we will not dwell on for confidentiality reasons. This is also the reason we do not provide more information about sets  $\Omega_i$  of schedules. But it is noteworthy that this professional software is used in over 10,000 companies, and each company uses it for different independent groups of employees, e.g. for different stores, factories and departments.

Importantly, columns generated by the subproblem enlarge the set of generated shifts. Once this set is large enough, we use the solver Xpress-MP to solve the SS program with the integrality constraints, hence deriving the minimal shift scheduling cost  $C_0$ . Finally, we solve the SSP program with the same set of columns generated in SS, still using the solver Xpress-MP.

One might fear that this set of columns is too restricted. However, as we said, the SSP program is already very time-consuming as is. Moreover, we could argue that our sets  $\Omega_i$  generated by SS are already large enough to find the shifts the employees ask for. More specifically, in our instances, the SS program generates about 100,000 columns. Yet, for each attribute, a rough estimate shows that at least one out of 10 levels is precisely what an employee has asked for. Hence, since there are 4 attributes, there are at least one in  $10^4$  shifts that completely satisfy an employee. Therefore, it is very likely that, for any given employee,

many of the shifts we generated match that employee's preferences.

Note that, because the solution value found for the SS program is only used as a parameter in constraint (6.11), it is not that important to get an accurate value for  $C_0$ . On the other hand, the SS program is so much easier to solve than the SSP program that it is not where most of the computation time is lost. Thus, requiring greater accuracy in the computation of  $C_0$  will not deeply affect the computation time overall. Once again, the SS program is mainly essential to generate relevant columns.

### 6.3 Multi-Attribute Normalizations

In this section, we introduce two normalizations of linear multi-attribute utility functions. We first quickly present the naive EVN. Then, we will define AMACSN, which is the main contribution of this paper.

#### 6.3.1 Extreme Value Normalization

As announced in the introduction, we define a naive normalization for linear multi-attribute utility functions. The EVN shares similarities with many common measure indices, like, for instance, HDI.

**Definition 14.** *A linear multi-attribute utility function is EVN if the extreme partial utilities equal 0 and 5 and such that the sum of weights equal 100. We denote by  $u_{ik}^{EVN}$  and  $w_{ik}^{EVN}$  the EVN partial utilities and weights.*

Let us verify that this normalization is well-defined. To do so, we must assume that partial utilities are non-degenerate. This means that a partial utility  $u_{ik}$  has two different values for some two levels  $l_{ik}^1$  and  $l_{ik}^2$ .

**Proposition 13.** *If partial utilities are bounded and non-degenerate, then the EVN exists and is unique.*

*Démonstration.* Let  $u_{ik}^{min}$  and  $u_{ik}^{max}$  be defined by

$$u_{ik}^{min} = \min_{l_{ik}} u_{ik}(l_{ik}) \quad \text{and} \quad u_{ik}^{max} = \max_{l_{ik}} u_{ik}(l_{ik}). \quad (6.12)$$

By assumption, we have  $-\infty < u_{ik}^{min} < u_{ik}^{max} < \infty$ . Given that only positive affine transformations are allowed, the EVN partial utility is then necessarily

$$u_{ik}^{EVN} = 5 \times \frac{u_{ik} - u_{ik}^{min}}{u_{ik}^{max} - u_{ik}^{min}}. \quad (6.13)$$

For the ordering of shifts induced by  $u$  to remain the same, we need to rescale weights, by

$$\hat{w}_{ik} = w_{ik}(u_{ik}^{max} - u_{ik}^{min}). \quad (6.14)$$

It is then straightforward to see that  $\sum w_{ik}u_{ik}$  and  $\sum \hat{w}_{ik}u_{ik}^{EVN}$  represent the same utility functions. Finally, we have to set  $w_{ik}^{EVN} = 100 \times \hat{w}_{ik} / \sum_{k' \in K} \hat{w}_{ik'}$ , in order to guarantee that the sum of the weights amounts to 100. This proves existence and uniqueness.  $\square$

While we do not state this fact formally, it is also straightforward to see that no matter which normalization of the linear multi-attribute utility function we start with, applying EVN always yields the same EVN linear multi-attribute utility function.

Also, we will call EVN-SSP the SSP program whose objective function is written with EVN linear multi-attribute utility functions.

### 6.3.2 Affinely Multi-Attribute Correlated Social Normalization

In this subsection, we propose a more meaningful alternative to EVN, which extends ideas by ? to the setting of linear multi-attribute utility functions. But before getting to this alternative, let us criticize EVN conceptually through an example.

#### The Busy Christmas Paradox

Consider only one attribute, namely, *Day-On*. Assume that Tuesday is Christmas, and that nearly everyone wants it off. Now, consider employees 1 and 2 who both really care about the day of the week they get off. However, while employee 1 really wants to have Christmas off, employee 2 does not celebrate Christmas, and actually wants Friday off.

Let us compare the two employees' partial utilities for the day-on attribute. Employee 2 basically knows he will be given Friday off, as he's almost surely the only one who asked for it. Thus, he will certainly have the maximal utility of 5 out of 5. Similarly, if employee 1 does get Christmas off, he would have the maximal utility of 5 out of 5 too. However, because it is much less likely for him to obtain what he wants, employee 1 will definitely feel much happier about having Christmas off than employee 2 does about having Friday off.

There is another way of seeing this. By giving employee 2 Friday off, the cost for the other employees and the company is basically zero, if not negative. However, giving Christmas off to employee 1 means sacrificing an opportunity that many other employees would gladly take. In other words, it induces a non-negligible cost to other employees. For this reason, employee 1 has to feel happier about his day off than employee 2 does about his.

Conversely, if employee 2 were not given Friday off, he would be so surprised that he would actually feel greatly disappointed. Meanwhile, if employee 1 were not given Christmas off, then he would know he probably is one of many other employees who did not get Christmas off. Therefore, employee 1 would not feel as badly about not having Christmas off as employee 2 would about not having Friday off.

What this discussion shows is that the EVN we have been using to normalize partial utilities is not appropriate to compare the different partial utilities of different employees. Rather, a normalization of utility functions should be defined depending on some context that the shift allocation defines. This leads us to one of the main contributions of this paper, which extends the SN introduced by ?.

### Correlated Social Normalization

Like SN, correlated social normalization (CSN) consists of normalizing an employee's utility with regard to utilities he would have, were he given other employees' shifts. To do so, it is necessary to consider some typical output of SSP. This output will form a benchmark that employees can compare their schedules to. Thus, throughout this subsection, we need to consider a given solution  $\hat{s}$  that assigns a schedule  $\hat{s}_i$  to each employee  $i$ . Also, for simplicity, we denote  $\hat{l}_{ik} = l_k(\hat{s}_i)$ .

We shall detail SN in Section 6.4. Roughly, SN has every employee comparing his schedule to others'. In addition to this, CSN takes into account the fact that employees tend to especially compare themselves with other employees who have similar utility functions. For instance, if you have asked for Christmas off, then it is much more relevant to compare your shift with the shifts of other employees who also asked for Christmas off than with the shifts of those who asked for Friday off.

To formally define CSN, let the utility matrix  $\hat{U}^k$  be defined by  $\hat{U}_{ij}^k = u_{ik}(\hat{l}_{jk})$ . This matrix contains all the information about how each employee feels about the levels of attribute  $k$  in his and the others' allocated schedules. Now, the similarity between two partial utility functions  $u_{ik}$  and  $u_{jk}$  can be characterized by the correlation  $r_{ijk}$  between employees  $i$  and  $j$ 's partial utilities  $u_{ik}(\hat{l}_{mk})$  and  $u_{jk}(\hat{l}_{mk})$  for different levels  $\hat{l}_{mk}$  of all third employees  $m \in N$ . Formally, this correlation is given by

$$r_{ijk} = \frac{Cov(\hat{U}_i^k, \hat{U}_j^k)}{\sqrt{Var(\hat{U}_i^k)Var(\hat{U}_j^k)}} = \frac{\sum_{m \in N} (u_{ik}(\hat{l}_{mk}) - \mu_{ik})(u_{jk}(\hat{l}_{mk}) - \mu_{jk})}{n\sigma_{ik}\sigma_{jk}}, \quad (6.15)$$

where  $\mu_{ik}$  and  $\sigma_{ik}$  (respectively,  $\mu_{jk}$  and  $\sigma_{jk}$ ) are the averages and standard deviations of

$u_{ik}(\hat{l}_{mk})$  (respectively,  $u_{jk}(\hat{l}_{mk})$ ) for  $m \in N$ , i.e.,

$$\mu_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{m \in N} u_{ik}(\hat{l}_{mk}) \quad \text{and} \quad \sigma_{ik}^2 = \frac{1}{n} \sum_{m \in N} (u_{ik}(\hat{l}_{mk}) - \mu_{ik})^2. \quad (6.16)$$

Now, the greater  $r_{ijk}$  is, the more relevant that is. For this reason, and to have non-negative numbers only, we define the transformed correlation  $R_{ijk} = 1 + r_{ijk} \in [0, 2]$ . The relevant benchmark to normalize an employee's partial utility is then given by the values  $u_{ik}(\hat{l}_{jk})$  for  $j \in N$  with weights  $R_{ijk}$ . These values define the CSN averages  $\mu_{ik}^{CSN}$  and standard deviations  $\sigma_{ik}^{CSN}$  by

$$\mu_{ik}^{CSN} = \frac{\sum_{j \in N} R_{ijk} u_{ik}(\hat{l}_{jk})}{\sum_{j \in N} R_{ijk}} \quad \text{and} \quad (\sigma_{ik}^{CSN})^2 = \frac{\sum_{j \in N} R_{ijk} (u_{ik}(\hat{l}_{jk}) - \mu_{ik}^{CSN})^2}{\sum_{j \in N} R_{ijk}}. \quad (6.17)$$

Finally, we obtain the CSN partial utility

$$u_{ik}^{CSN}(\cdot) = \frac{u_{ik}(\cdot) - \mu_{ik}^{CSN}}{\sigma_{ik}^{CSN}}. \quad (6.18)$$

If we do that, though, because we need to keep track of the fact that the global multi-attribute utility function should yield the same orderings of allocations after normalization, we need to compensate for the rescaling of partial utilities  $u_{ik}$ . Since they have been divided by  $\sigma_{ik}^{CSN}$ , it suffices to multiply the weights  $w_{ik}$  by  $\sigma_{ik}^{CSN}$ , yielding  $w_{ik}^{CSN} = \sigma_{ik}^{CSN} w_{ik}$ . These transformations lead us to rewrite the linear multi-attribute utility function of employee  $i$  as

$$u_i = \sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} u_{ik}^{CSN}. \quad (6.19)$$

In the introduction, we pointed out that this utility function is defined up to a positive affine transformation. However, with no additive constant, our normalization of partial utilities guarantees that, for an employee whose levels are all averages, the linear multi-attribute utility function is 0. Therefore, it makes sense to set the additive constant to 0. Conversely though, let us highlight the degree of freedom corresponding to the positive multiplier  $\alpha_i$ , by writing the linear multi-attribute utility function as :

$$u_i = \alpha_i \sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} u_{ik}^{CSN}. \quad (6.20)$$

To determine appropriate multipliers  $\alpha_i$ , we turn to the concept of standard utility functions.

## Standard Utility Functions

To determine a normalization of multipliers  $\alpha_i$ , we propose to describe how employees' weights affect their partial utilities. Intuitively, the greater an employee's weight for an attribute, the greater his partial utility for that attribute should be. We formalize this intuition with the concept of the standard utility function. A standard utility function  $\psi_k$  for attribute  $k \in K$  is an increasing function that maps an employee  $i$ 's weight  $\alpha_i w_{ik}^{CSN}$  to the partial utility  $\psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN})$  he should expect to have for attribute  $k$ . In other words, we should have  $\psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN}) \approx u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik})$  for any employee  $i \in N$  and attribute  $k \in K$ .

Note that, importantly, the standard utility functions  $\psi_k$  do not depend on employees. Rather, standard utility functions are rough descriptions of the properties of the shift-allocation schemes, which employees will be sensible to. As we shall see later, such rough descriptions will give us a natural way to determine the multipliers  $\alpha_i$ , hence making multi-attribute utility functions comparable. But first, we discuss how to compute good standard utility functions.

For tractability reasons, we propose to only consider positive affine standard utility functions. More explicitly, we only consider standard utility functions for an attribute  $k$  that are functions  $\psi_k(\alpha_i w_{ik}) = \gamma_k + \beta_k \alpha_i w_{ik}$  with  $\beta_k \geq 0$ . Thus, a standard utility function  $\psi_k$  for attribute  $k \in K$  is fully determined by a pair  $(\beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Aggregating all standard utility functions for all attributes then yields an element  $\psi$ , which is represented by vector  $(\beta_k, \gamma_k)_{k \in K} \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})^K$ .

Now, standard utility functions need to describe how weights affect partial utilities. Then, the affine standard utility function  $\psi_k$  that best describes these inputs is then the linear regression of the form

$$\forall i \in N, \quad u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik}) = \psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN}) + \epsilon_i = \gamma_k + \beta_k \alpha_i w_{ik}^{CSN} + \epsilon_i, \quad (6.21)$$

such that the sum of squares  $\sum \epsilon_i^2$  is minimized. This boils down to equalities

$$\beta_k = \frac{\text{Cov}(\alpha_i w_{ik}^{CSN}, u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik}))_{i \in N}}{\text{Var}(\alpha_i w_{ik}^{CSN})_{i \in N}} \quad \text{and} \quad \gamma_k = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \left( u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik}) - \beta_k \alpha_i w_{ik}^{CSN} \right). \quad (6.22)$$

These equations define the best-fit standard utility function  $\psi_k$  to multipliers  $\alpha$ . In other words, our linear regression yields a function  $\text{Regress}_k$ , where  $\text{Regress}_k(\alpha)$  is the best-fit standard utility function  $\psi_k$  to multipliers  $\alpha$ . By combining  $\text{Regress}_k$  functions for all attributes  $k$ , we obtain the regression function  $\text{Regress}$ , which maps multipliers to the best-fit affine standard utility function  $\psi$ .

## Multiplier Normalization

Now, recall that standard utility functions  $\psi = (\psi_k)_{k \in K}$  for all attributes yield a good description of the relation between weights and partial utilities, that is,  $u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik}) \approx \psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN})$ . Moreover, recall that since we have defined  $\hat{l}_{ik} = l_k(\hat{s}_i)$ , we have  $u_i(\hat{s}_i) = \sum_{k \in K} \alpha_i w_{ik}^{CSN} u_{ik}^{CSN}(\hat{l}_{ik})$ . Then, employee  $i$ 's linear multi-attribute utility function for his shift  $s_i$  can be approximated by

$$u_i(s_i) \approx \sum_{k \in K} \alpha_i w_{ik}^{CSN} \psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN}). \quad (6.23)$$

The last quantity represents a rough estimate of what employee  $i$ 's multi-attribute utility is, given his weights and the rough description of the shift allocation mechanism. Yet, for multi-attribute utilities to be comparable between any two employees, this estimate should be the same for all employees, say  $U = 100$ . This gives us a natural way to normalize multipliers  $\alpha_i$ , by requiring that they satisfy the following equation :

$$\sum_{k \in K} \alpha_i w_{ik}^{CSN} \psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN}) = U. \quad (6.24)$$

Now, it is important to note that the normalization of multipliers  $\alpha$  we propose here require knowledge of the standard utility functions  $\psi$ . This means that we have a function **Multipliers** :  $\psi \mapsto \alpha = \mathbf{Multipliers}(\psi)$ . Let us point out that assuming that standard utilities are affine enables an algebraic computation of **Multipliers**.

**Proposition 14.** *Let a standard utility function  $\psi$ , with  $\beta > 0$ . Then, we have the following equality :*

$$\forall i \in N, \quad \mathbf{Multipliers}_i(\psi) = \frac{-\sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} \gamma_k + \sqrt{\left(\sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} \gamma_k\right)^2 + 4U \sum_{k \in K} (w_{ik}^{CSN})^2 \beta_k}}{2 \sum_{k \in K} (w_{ik}^{CSN})^2 \beta_k} \quad (6.25)$$

*Démonstration.* We have the following computation :

$$\sum_{k \in K} \alpha_i w_{ik}^{CSN} \psi_k(\alpha_i w_{ik}^{CSN}) = \sum_{k \in K} \alpha_i w_{ik}^{CSN} (\gamma_k + \alpha_i w_{ik}^{CSN} \beta_k) = \alpha_i^2 \sum_{k \in K} (w_{ik}^{CSN})^2 \beta_k + \alpha_i \sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} \gamma_k. \quad (6.26)$$

Now, if  $\alpha_i = \mathbf{Multipliers}_i(\psi)$ , then the left term above must equal  $U$ , hence,

$$\alpha_i^2 \sum_{k \in K} (w_{ik}^{CSN})^2 \beta_k + \alpha_i \sum_{k \in K} w_{ik}^{CSN} \gamma_k = U, \quad (6.27)$$

which is a second-degree equation in  $\alpha_i$ , with a single positive solution. This solution is given



by the formula of the proposition. □

## Consistency

For our description of the shift-allocation mechanism by standard utility functions to be consistent, we need to find multipliers  $\alpha^*$  and standard utility functions  $\psi^*$  that correspond to one another. This leads us to the following definition.

**Definition 15.** *A multiplier  $\alpha^*$  and a standard utility function  $\psi$  are consistent if they satisfy*

$$\text{Regress}(\alpha^*) = \psi^* \quad \text{and} \quad \text{Multipliers}(\psi^*) = \alpha^*. \quad (6.28)$$

We propose to solve these equations by iterations. Namely, at stage  $t \in \mathbb{N}$ , we assume we are given  $\alpha^t$  and  $\psi^t$ . We then compute  $\psi^{t+1} = \text{Regress}(\alpha^t)$  and  $\alpha^{t+1} = \text{Multipliers}(\psi^t)$ . Equivalently, this boils down to searching for a fixed point  $\psi^* = \text{Regress}(\text{Multipliers}(\psi^*))$  by computing the sequence  $\psi^{t+1} = \text{Regress}(\text{Multipliers}(\psi^t))$ .

To test the convergence of this sequence, we have computed the slopes  $\beta_k^t$  of  $\psi_k^t$  at each iteration  $t$ , and for all attributes  $k \in K$ . Results are displayed in Figure 6.1. We clearly see a fast convergence after merely 10 iterations. This pattern appears in other computations we have made.

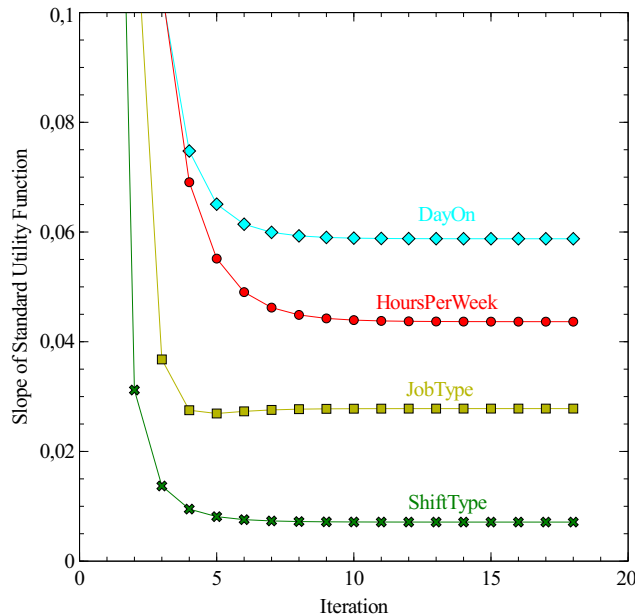


Figure 6.1 Convergence of slopes as we iterate operators Regress and Multipliers.

We can finally combine everything we have discussed to determine the normalization we have been searching for.

**Definition 16.** *Multi-attribute utility functions  $u_i^*$  for  $i \in N$  are affinely multi-attribute correlated and socially normalized (AMACSN) if there exist consistent multipliers  $\alpha^*$  such that*

$$\forall i \in N, \quad u_i^*(s_i) = \sum_{k \in K} \alpha_i^* w_{ik}^{CSN} u_{ik}^{CSN}(l_k(s_i)). \quad (6.29)$$

Similarly to EVN, we will call AMACSN-SSP the SSP program whose linear multi-attribute utility functions are normalized by AMACSN.

### Typical Outcome

Recall that AMACSN depends on the “typical outcome”  $\hat{s}$  we consider. To compute AMACSN, we thus need a solution of SSP. Ideally, this solution should be a solution of AMACSN-SSP. Evidently, we cannot do so, since AMACSN-SSP requires AMACSN to be computed in the first place. A good approach to determine AMACSN would consist of computing some first AMACSN<sub>1</sub> based on a solution to, say, EVN-SSP. Then, we would use the solution of AMACSN<sub>1</sub>-SSP to compute the more appropriate AMACSN<sub>2</sub>, and so on. We would have a sequel of normalizations AMACSN<sub>t</sub>, for all  $t \geq 1$ . Hopefully, the sequence would yield some limit AMACSN<sub>∞</sub>. We could then expect to have AMACSN<sub>∞</sub> being consistent with solutions of AMACSN<sub>∞</sub>-SSP.

However, for simplicity and because of computational times, we will merely consider the results of two instances of the EVN-SSP program to define “typical outcomes”  $\hat{s}$  to compute AMACSN. The solutions of EVN-SSP that we use to define this typical outcome will be analyzed in details in the next section. Interestingly, the fact that we have actually not used the most appropriate “typical outcome” will underline the robustness of AMACSN.

More explicitly, we will use the results of the solutions of EVN-SSP to compute the transformed correlations  $R_{ijk}$ , the averages  $\mu_{ik}^{CSN}$ , standard deviations  $\sigma_{ik}^{CSN}$ , as well as consistent multipliers  $\alpha^*$  and consistent standard utility functions  $\psi^*$ . These values determine the CSN of partial utility functions and the weight normalization for linear multi-attribute utility functions. The consistent standard utility functions are depicted in Figure 6.2, which also depicts the relation between AMACSN weights and CSN partial utilities for the different attributes.

## 6.4 Results

The SS program is solved with a tolerance on the optimality gap of 3%. We allowed an optimality gap of 5% for the computation of the SSP program. It is not necessary to be much more accurate, as the uncertainty on employees’ preferences can be regarded as being at least 5%, because of assumptions like the linearity of multi-attribute utility functions, or

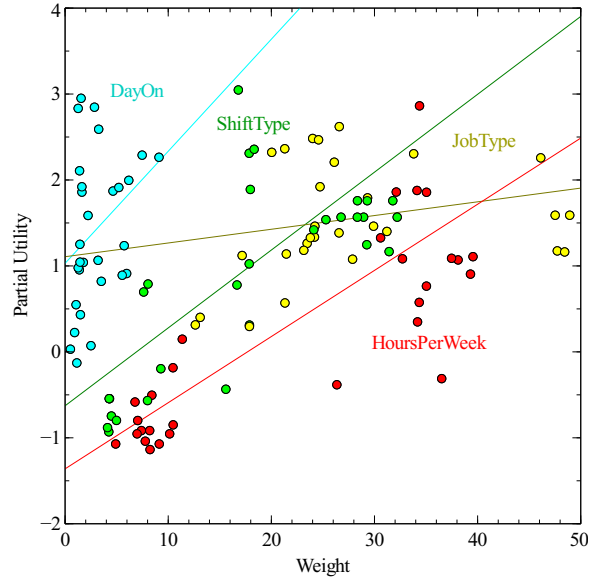


Figure 6.2 Consistent standard utility functions computed with the cumulative allocations given by EVN-SSP in two instances, which will be analyzed in the next Section. These standard utility functions are the ones we use to compute the AMACSN utility functions.

because inaccuracy emerged in the reporting of preferences. In addition, we need to keep in mind that employees may have had incentives to lie about their preferences, and thus there are additional uncertainties due to untruthful preference revelations. The column-generation heuristic was launched on instances with 29 employees and 6 job activities, over a 1-week horizon with periods of 15 minutes (hence  $|T| = 4 \times 24 \times 7 = 672$ ). The instances we consider are real-life instances, except for the preferences that were generated by hand.

We want to compare solutions of EVN-SSP to solutions of AMACSN-SSP. However, it is not clear that it is on the EVN scale that the quality of results should be judged. Naturally, it would not be convincing either if we judged results on the AMACSN scale. To be more fair in the comparison, we will use the SN scale defined by ?.

#### 6.4.1 Social Normalization

A more relevant way to judge the quality of the optimization is to study how employees compare one another's shift. Intuitively, if the optimizer has done a good job, each employee should get a better shift than any of the others' shifts. A natural way to model this idea is by involving the SN introduced by ?. The idea lies in considering other employees' shifts as a benchmark for an employee to judge the quality of his shift. Let us consider a solution  $\hat{s}$  obtained by some SSP. For employee  $i$ , we define the average utility  $\mu_i$  for others' shifts and

the standard deviation  $\sigma_i$  by

$$\mu_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i' \neq i} u_i(\hat{s}_{i'}), \quad (6.30)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i' \neq i} (u_i(\hat{s}_{i'}) - \mu_i)^2. \quad (6.31)$$

We stress the fact that this SN of an employee  $i$ 's utility function is made with respect to  $i$ 's utility function and to other employees' shifts. In particular, it does not depend on other employees' utility functions.

The SN utility function of employee  $i$  is the positive affine transformation with an average utility for others' shifts of 0 and a standard deviation of 1. More formally, given a non-normalized utility function  $u_i$ , with corresponding average  $\mu_i$  and standard deviation  $\sigma_i$ , the SN utility function  $u_i^{SN}$  is given by

$$u_i^{SN}(\cdot) = \frac{u_i(\cdot) - \mu_i}{\sigma_i}. \quad (6.32)$$

In particular, an employee's SN utility for his shift equals  $u_i^{SN}(\hat{s}_i) = (u_i(\hat{s}_i) - \mu_i)/\sigma_i$ . This SN utility counts how many standard deviations above average an employee's utility is. In particular, we expect it to be positive for all employees, which means that every employee's utility is above average.

Similarly, we may also use the CSN scale to judge the qualities of two solutions by EVN-SSP and AMACSN-SSP, where CSN is applied to the linear multi-attribute utility function — not to the partial utility functions as is done in AMACSN.

#### 6.4.2 EVN-SSP

To test the performance of the optimization algorithms alone, let us quickly analyze results of EVN-SSP judged by EVN scales. Figure 6.3 plots the EVN utilities for the schedules of the 29 employees computed by EVN-SSP for two instances. As often in this paper, we merely present results for these two instances, although we have verified that their features are also revealed in the 10 instances we ran. Interestingly, all utilities range between 250 and 500. This latter bound equals the theoretical maximum utility of an employee.

Another way to unveil the quality of the optimization is to look at how the weights  $w_{ik}$  of employees  $i$  for attributes  $k$  affect the corresponding partial utilities  $u_{ik}$ . Intuitively, the greater the weight  $w_{ik}$ , the more the optimizer should gain by yielding large values of  $u_{ik}$ . Thus,  $u_{ik}$  should look like an increasing function of  $w_{ik}$ . This is what is displayed in Figure 6.4.

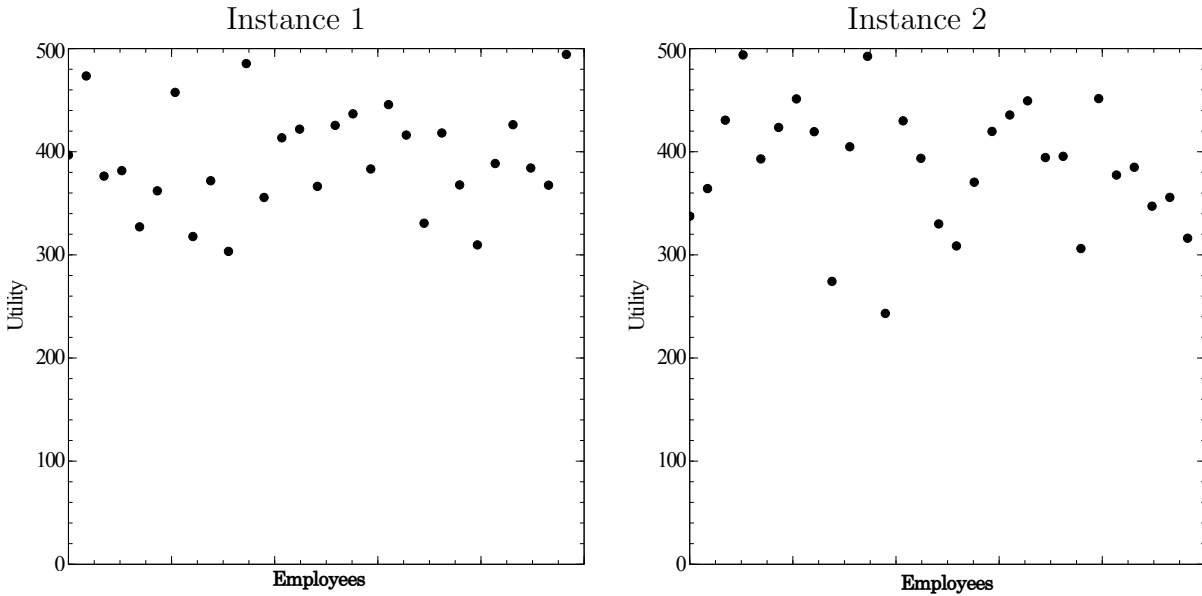


Figure 6.3 EVN utility values from the solutions of EVN-SSP.

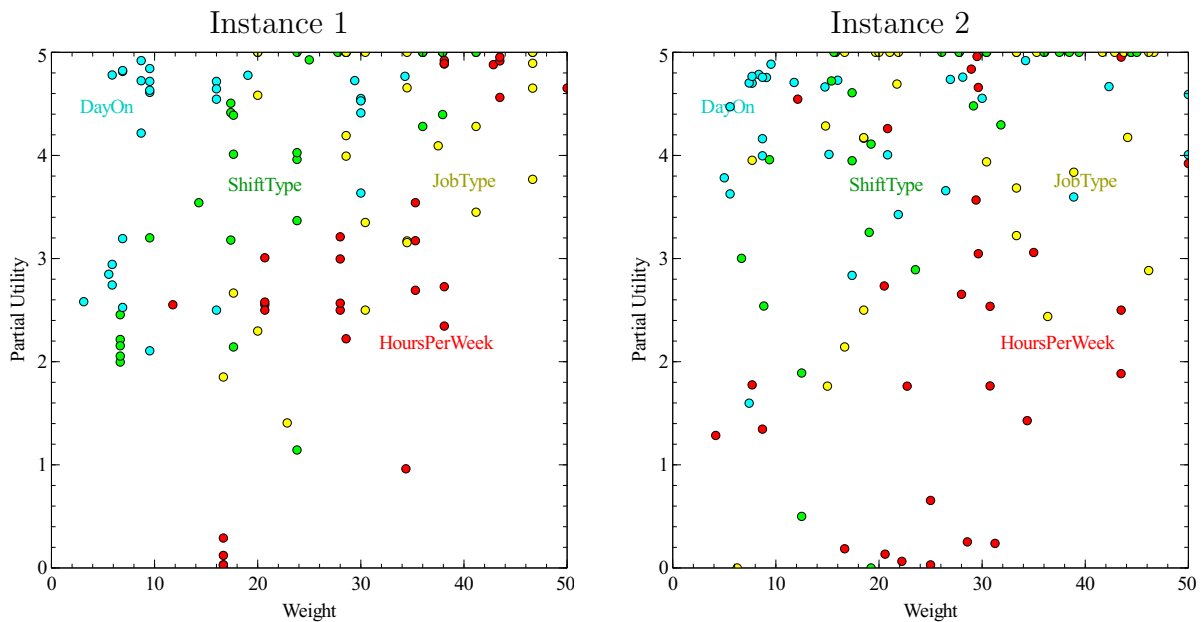


Figure 6.4 EVN partial utility values as functions of weights.

Let us now analyze EVN-SSP through the lens of SN and CSN. Figure 6.5 displays the SN utilities of all employees for the two instances. Overall, these results show that our algorithm has succeeded in optimizing its objective value in a fairly convincing way. No employee is under 0, which means that no one will feel disadvantage with respect to the average schedule

of others.

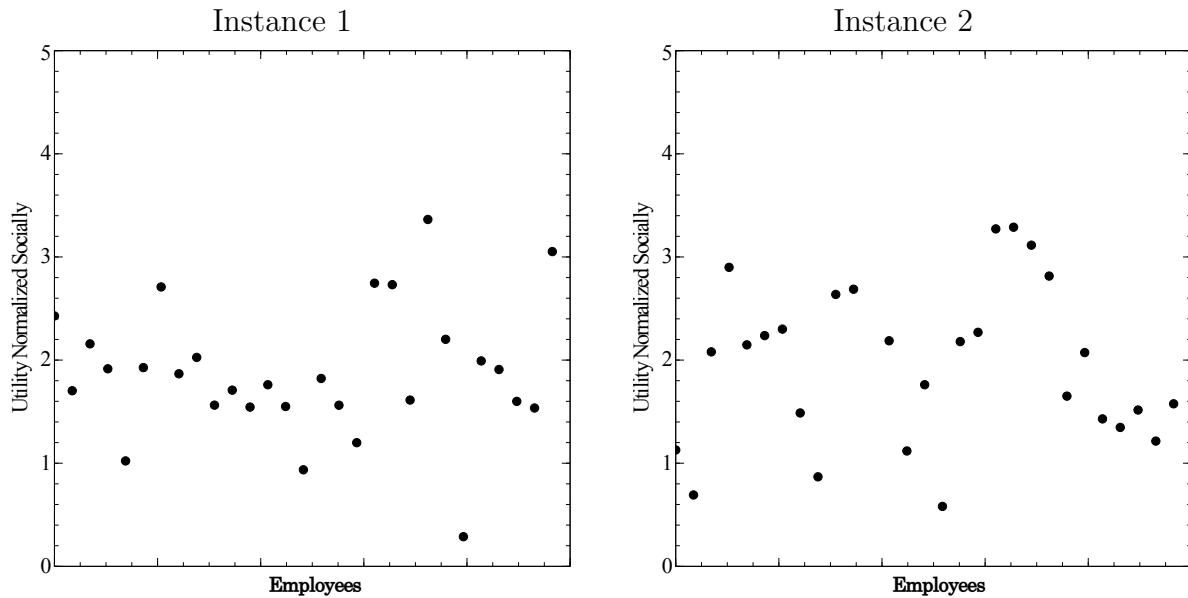


Figure 6.5 Employees' SN utilities for shifts given by EVN-SSP.

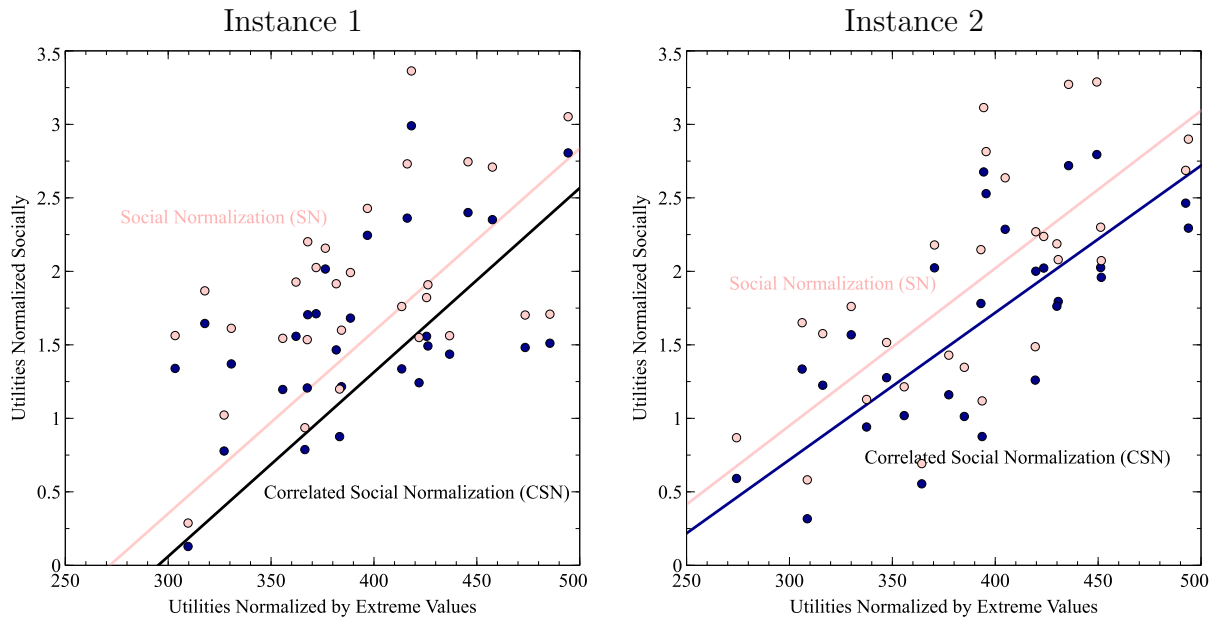


Figure 6.6 Relation between SN, CSN and EVN.

To have an idea of whether the EVN we have been using makes sense, we may compare it directly with SN and CSN. This is what is depicted in Figure 6.6, where the  $x$ -axis stands

for the employees' utilities obtained by EVN, while the  $y$ -axis represents their SN utilities. What we see is that, although there is a positive correlation between EVN and, respectively, SN and CSN, the correlation is not entirely convincing. In fact, the correlation of EVN and SN is only 0.67, while that of EVN and CSN is 0.68. This indicates that our normalization by extreme values has some weaknesses.

Before analyzing solutions of AMACSN-SSP, let us end this section by studying the solutions of EVN-SSP through the lens of AMACSN. Computations of the consistent multipliers and standard utility functions yield Figure 6.7, where CSN partial utilities  $u_{ik}^{CSN}$  are depicted as functions of normalized weights  $\alpha_i w_{ik}^{CSN}$ . Interestingly, our normalization enhances the fact that on a normalized scale, the inputs actually correspond to employees claiming they give little importance to the Day-On attribute compared to the Job-Type one. Also, there is clearly a lot of noise in the way that normalized weights affect CSN partial utilities.

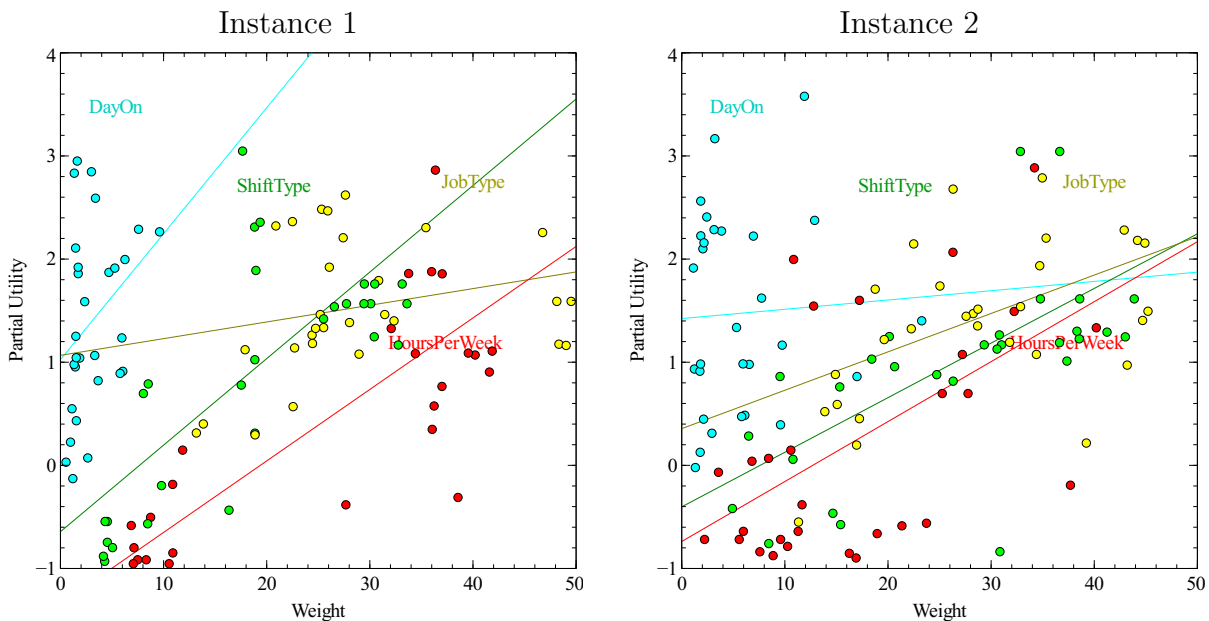


Figure 6.7 CSN partial utilities as a function of weights. Lines represent linear regressions that make up the best-fit affine standard utility functions.

### 6.4.3 AMACSN-SSP

Our results for AMACSN-SSP are reported in Figures 6.8 and 6.9, which describe properties of the outcomes obtained.

Figure 6.8 displays the relation between AMACSN weights and CSN partial utilities. Interestingly, with the notable exception of the *Day-On* attribute of the second instance, the standard utilities all have fairly the same slope. This is evidence of a better balance between

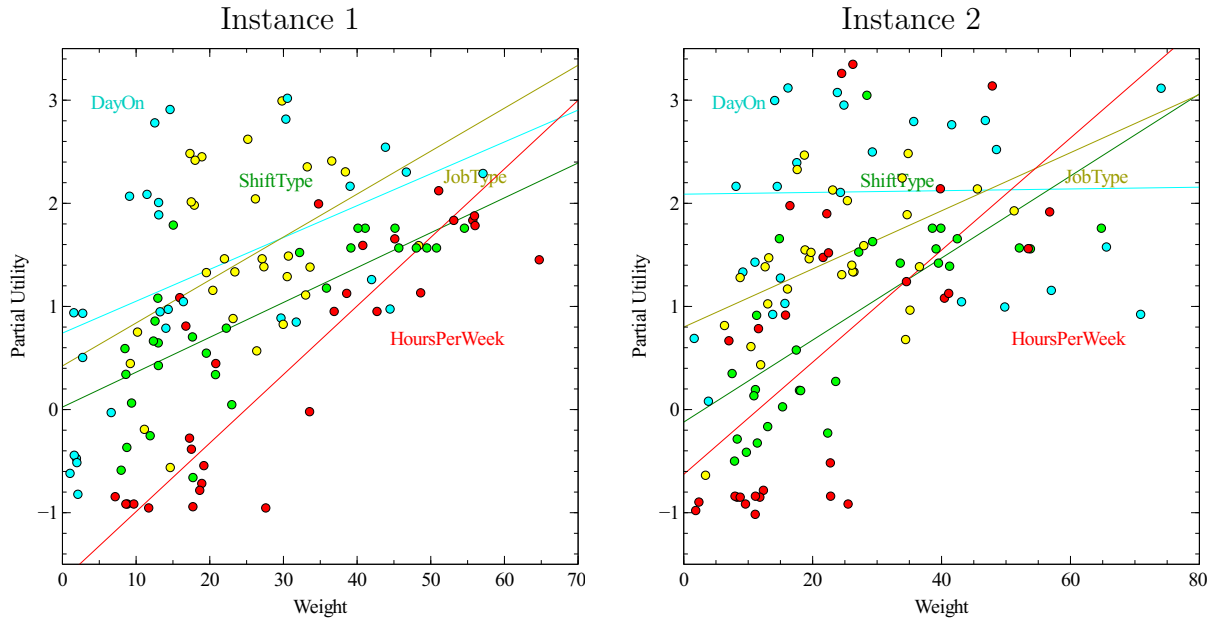


Figure 6.8 Partial utilities with AMACSN

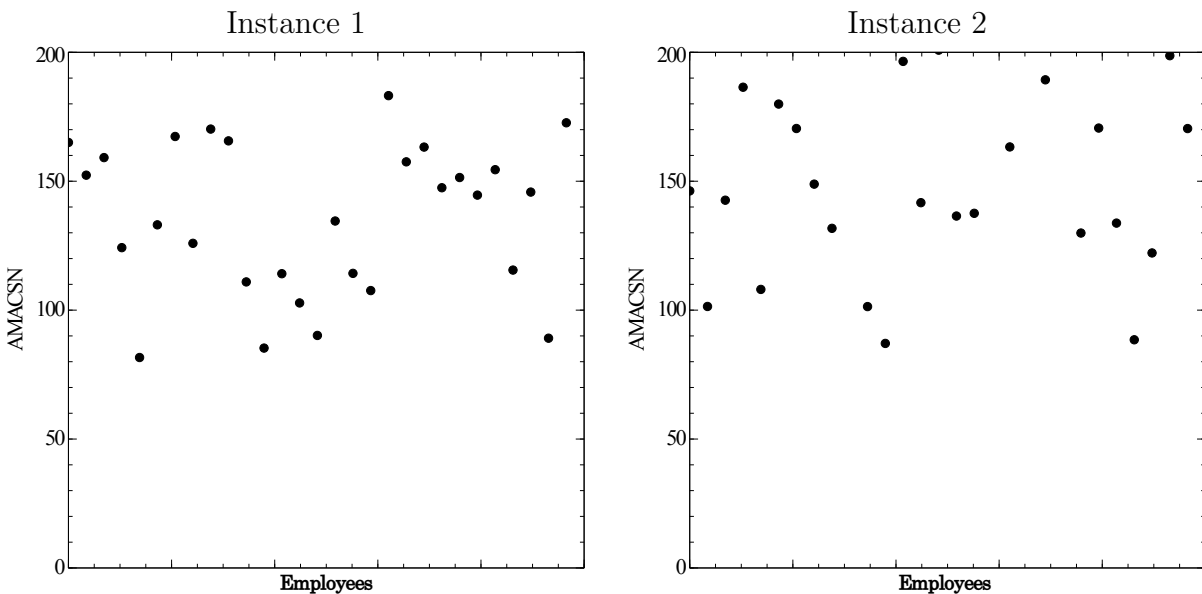


Figure 6.9 Utilities with AMACSN

the normalizations of the different attributes. Figure 6.9 displays the AMACSN utilities of the solution of AMACSN-SSP. Arguably, the figure is fairly similar to Figure 1, even though the scale of the  $y$ -axis is different.

The normalization of utility functions, which are inputs of the shift-scheduling program,



cannot foresee the outcomes of the shift-scheduling program. It is thus questionable whether this AMACSN fits the actual outcome it aims to describe. To see if this is the case, we may compare AMACSN to SN and CSN defined for the outcomes of the shift scheduling. This yields Figure 6.10.

The correlation between AMACSN and SN is 0.86, and that between AMACSN and CSN is 0.84. This is significantly better than the correlations between EVN and the social normalizations SN and CSN. These facts are evidence of the relevancy of AMACSN.

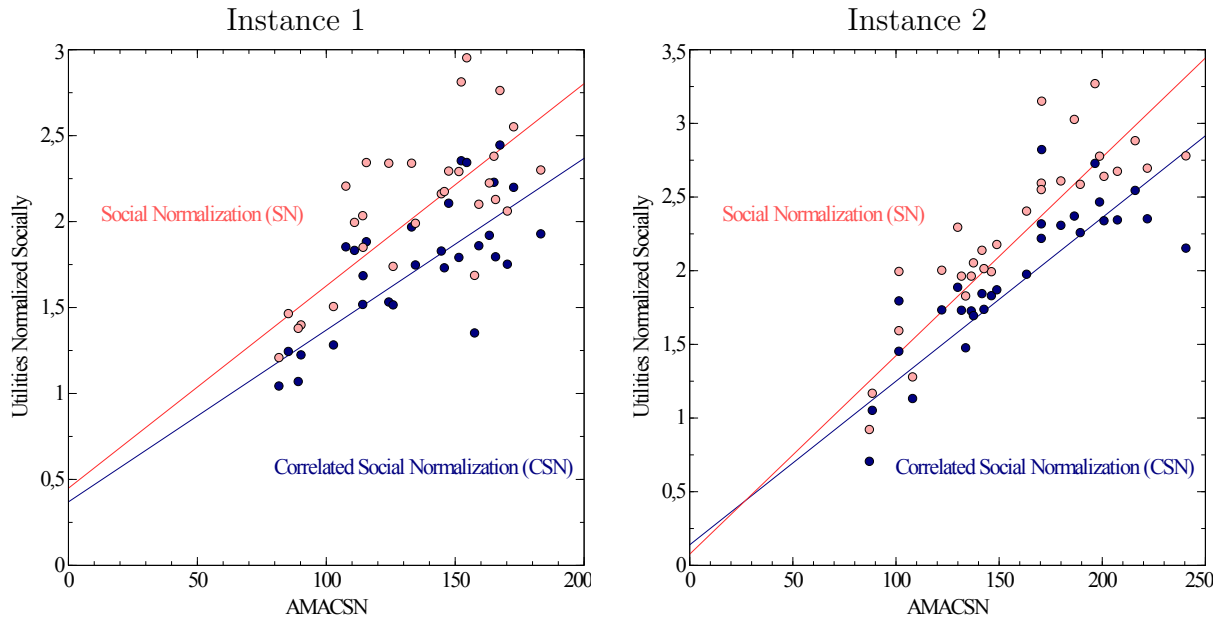


Figure 6.10 AMACSN compared to CSN and SN

We can also notice that linear regressions nearly pass through the origin, which means that the utility of 0 has nearly the same meaning for all three normalizations. Interestingly, these graphs show that AMACSN has globally the same meaning as other normalizations overall, while it yields a deeper description of utilities by enabling comparisons of partial utilities.

#### 6.4.4 EVN-SSP versus AMACSN-SSP

To actually judge the quality of AMACSN-SSP, we can compute SN and CSN utilities for this setting and compare the results to those of Figure 6.5. This is what we have done in Figure 6.11.

On this figure, we have added pale red and dark blue horizontal lines. They represent the average SN utilities for the solutions of, respectively, AMACSN-SSP and EVN-SSP. The

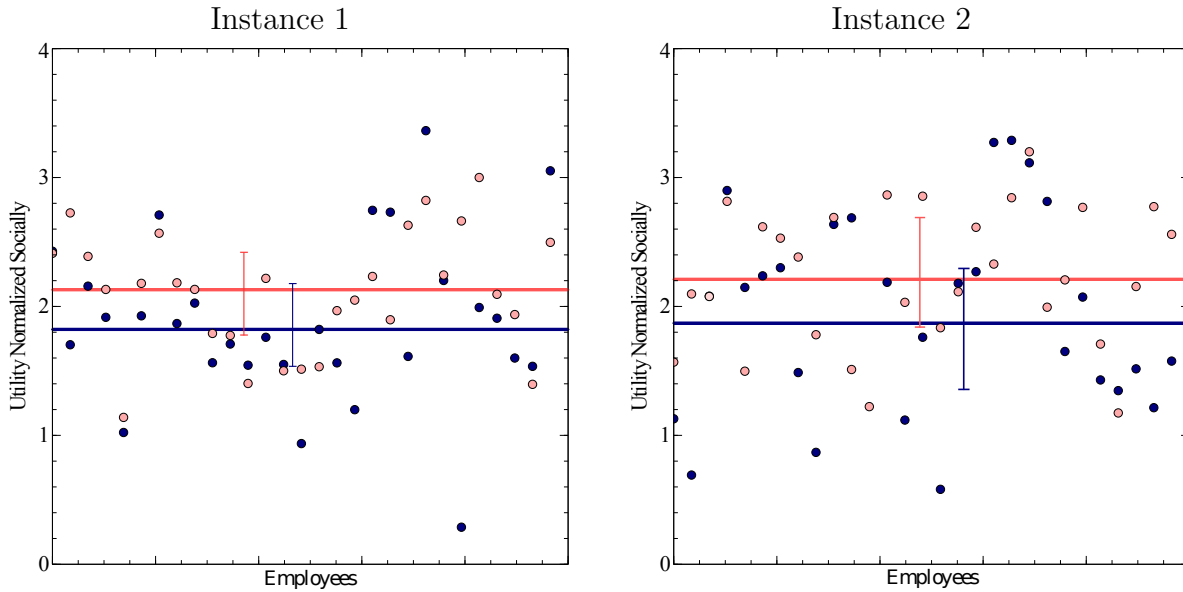


Figure 6.11 SN utilities of the AMACSN-SSP (pale red) compared to SN utilities of EVN-SSP (dark blue).

figures display a significant improvement of the SN utilities with AMACSN. The figure also depicts the standard deviations of the SN utilities in the two different settings.

Table 6.1 Averages and standard deviations of SN utilities for AMACSN shift scheduling and EVN shift scheduling.

		AMACSN	EVN
Instance 1	Average of SN utilities	2.104	1.877
	Standard deviation of SN utilities	0.461	0.645
Instance 2	Average of SN utilities	2.235	1.871
	Standard deviation of SN utilities	0.541	0.860

Table 6.2 Averages and standard deviations of CSN utilities for AMACSN shift scheduling and EVN shift scheduling.

		AMACSN	EVN
Instance 1	Average of CSN utilities	1.788	1.582
	Standard deviation of CSN utilities	0.412	0.618
Instance 2	Average of CSN utilities	1.933	1.579
	Standard deviation of CSN utilities	0.471	0.794

To make our analysis clearer, we have compared the averages and standard deviations

of SN and CSN utilities for the two settings. Table 6.1 displays the results for SN utilities, while Table 6.2 corresponds to CSN utilities. The tables show a clear improvement by using AMACSN compared to EVN.

Regarding the average SN and CSN utilities, these improvements, depending on instances and SN/CSN, range from 12% to 22%. Note that this is much more than the optimality gap. This plainly justifies our focus on normalizations rather than on optimization algorithms.

Moreover, it is interesting to note that we also have a significant decrease of the standard deviations. This shows that, as a bonus, our normalization also guaranteed a significant increase in fairness. In particular, this hints at the fact that there is little need for concern for fairness in personalized shift scheduling, at least, when hardly any constraint differs between any two employees apart from their preferences. As long as we maximize the sum of employees' (well-normalized) utilities, both social efficiency and (a good amount of) fairness follow.

## 6.5 Conclusion

In this paper, we have provided a model to perform optimized shift scheduling with employees' preferences. By including a linear multi-attribute setting and involving the state-of-the-art MACBETH method, we have proposed a relevant procedure to include employees' preferences. More importantly, we have characterized a new normalization of employees' linear multi-attribute utility functions, which, crucially, yields a meaningful way to compare any two utility functions, any two partial utility functions and any two weights. Amazingly, using this normalization has induced a significant improvement in the outcomes of the shift-scheduling program. Not only have we ensured a more socially efficient outcome, we have also shown that our approach guarantees even more fairness between employees.

## CHAPITRE 7

### DISCUSSIONS GÉNÉRALES

Les éléments de cette thèse fournissent une base pour un développement plus approfondi de la construction de quarts avec préférences des employés en particulier, et les problèmes d'affectation en général. Faute de temps, nous ne sommes pas allés jusqu'au point d'appliquer la théorie de la conception des mécanismes bayésiens à cette construction de quarts. Il faut dire que de nombreuses difficultés algorithmiques jalonnent cette tâche très difficile. Toutefois, nous avons su faire avancer la compréhension plus globale des problèmes d'affectations à des individus, en fournissant de nombreux résultats très généraux. De façon grossière, l'on peut découper cette avancée en deux phases.

Dans un premier temps, dans les deux premiers articles de cette thèse, nous avons introduit une nouvelle façon algorithmique d'attaquer le problème des incitatifs dans un contexte bayésien. Rappelons qu'un algorithme d'affectation pour des agents, aussi appelée mécanisme, définit un jeu bayésien dans lequel l'honnêteté n'est a priori pas une stratégie optimale. En d'autres termes, pour la plupart des mécanismes, la stratégie honnête n'est pas un équilibre de Bayes-Nash. Or, si les agents ne rapportent pas leurs préférences de façon honnête, tout mécanisme qui utilise ces préférences se fondera sur des données faussées, ce qui nous empêche d'en garantir l'optimalité. Cette remarque est ce qui rend le problème de conception des mécanismes difficile.

Les deux premiers articles de cette thèse fournissent une démarche algorithmique pour construire des mécanismes intéressants qui satisfassent la condition de compatibilité avec les incitatifs bayésiens. Cette démarche repose essentiellement sur le principe de révélation, bien connu de la littérature. Ce principe garantit la construction d'un mécanisme compatible avec les incitatifs bayésiens dès lors qu'on lui fournit un mécanisme quelconque et un équilibre de Bayes-Nash de ce mécanisme quelconque. Si choisir un mécanisme quelconque n'est pas une chose trop difficile, il se pose toutefois le problème du calcul d'un des ses équilibres de Bayes-Nash. Le premier axe de recherche de cette thèse s'adresse à cette problématique.

Deux obstacles majeurs au calcul de ces équilibres dans un jeu bayésien viennent : (i) de la difficulté à représenter algorithmiquement une stratégie, en particulier — et c'est notre cas — lorsque les espaces d'actions et/ou de types des joueurs sont infini (ou simplement très larges); (ii) de la difficulté à calculer la correspondance de meilleure réponse, notamment — et c'est notre cas — lorsque le lien entre le profil des actions et les utilités des joueurs n'est pas direct. La contribution majeure du premier article de cette thèse est de reformuler

le problème des jeux bayésiens non pas dans l'espace des stratégies, mais dans celui des fonctions de retour. Ces fonctions de retour décrivent la manière dont l'action individuelle affecte l'allocation individuelle. De façon surprenante, cette information, qui semble bien réductrice, est suffisante pour parfaitement décrire la correspondance de meilleure réponse et les concepts d'équilibre. Mieux encore, les fonctions de retour se prêtent bien mieux au calcul approché, ce qui permet d'écrire des algorithmes de calculs approchés des fonctions de retour aux équilibres de Bayes-Nash.

En utilisant ces algorithmes, notre deuxième article explore des espaces de mécanismes révélés pour construire de façon heuristique des bons mécanismes compatibles avec les incitatifs bayésiens. Dans un exemple académique de partage de gâteau, nous montrons que cette approche fournit des mécanismes efficaces, qui améliorent nettement les performances de mécanismes obtenus de façon plus naïve. Malheureusement, les outils que nous avons fournis pour cet exemple jouet doivent être améliorés significativement pour être appliqués dans des problèmes plus complexes comme la construction d'horaires. Pour illustrer, l'espace des actions dans nos problèmes de partage de gâteau était de dimension 2 ou 3, tandis que celui dans la construction d'horaires du quatrième article est de dimension 20. Les approximations que nous faisons deviennent alors trop grossières pour fournir des résultats pertinents. Toutefois, il semble qu'un travail plus approfondi sur l'approximation des fonctions de retour, par exemple par des techniques venues des modèles de *surrogates*, pourrait résoudre des problèmes aussi complexes que la construction d'horaires avec incitatifs bayésiens. Faute de temps, et pour éviter de trop se disperser, dans la suite de cette thèse, nous avons laissé de côté la condition de compatibilité aux incitatifs bayésiens.

Nos troisièmes et quatrièmes articles ont davantage souligné l'importance de bien construire nos fonctions objectifs dans des problèmes d'affectations avec préférences. En particulier, la difficulté dans l'écriture de ces fonctions objectifs vient de l'interaction de différentes fonctions d'utilité des parties prenantes des problèmes d'affectation. En effet, il est bien connu que toute fonction d'utilité n'est définie qu'à une transformation affine positive près. Par conséquent, il n'est pas clair que la somme de deux fonctions d'utilité différentes ait un sens. En particulier, les approches usuelles consistant à maximiser la somme des fonctions d'utilité semblent discutables d'un point de vue conceptuel. En particulier, les exemples du partage du gâteau au sucre avec trois cerises et du Noël animé montrent qu'une approche naïve consistant à normaliser ces fonctions d'utilité selon deux valeurs extrêmes conduit à des concepts qui ne correspondent pas à l'intuition usuelle du concept d'équité.

Dans le troisième article, nous proposons une nouvelle normalisation des fonctions d'utilité, dite sociale. Cette normalisation requiert que, pour un joueur donné, son utilité moyenne pour les allocations des autres soit nulle, tandis que l'écart-type de son utilité pour les al-

locations des autres soit égale à 1. Ce faisant, son utilité normalisée socialement pour son allocation compte combien d'écart-types au-dessus de la moyenne le joueur donné considère que son allocation est par rapport aux allocations des autres. En considérant de plus qu'un individu sera beaucoup plus à même de se plaindre si son utilité normalisée socialement est faible, et en comparant ces potentiels à se plaindre entre les individus, nous avons construit une mesure du sentiment d'injustice pour chaque individu. La moyenne de ces sentiments d'injustice définit alors le niveau d'injustice sociale d'un partage. C'est ce niveau que nous proposons de minimiser pour un mécanisme d'affectation.

Une autre contribution majeure de cet article consiste à se rendre compte que l'utilité normalisée d'un joueur est limitée à l'information qu'il peut avoir, notamment concernant les allocations des autres. Après tout, il est difficile d'être jaloux d'un autre, si l'on n'a aucune idée de ce que l'autre a. De même, on peut être plus attentif aux allocations d'une personne en particulier, par exemple car cette personne nous est semblable, et que l'on considère naturellement qu'elle n'a aucune raison d'être privilégiée par rapport à nous. Ceci nous a amené alors à considérer que l'équité est un concept local. En particulier, en partant d'un réseau social qui décrit la manière dont les individus se comparent les uns aux autres, nous avons fourni une mesure du sentiment d'injustice dit locale, car, pour un individu donné, elle n'est influencée que par le voisinage de cet individu. Nous arguons que cette démarche conceptuelle est essentielle pour donner à l'équité formelle un sens plus proche de celui auquel on est sensible intuitivement.

Enfin, le quatrième article utilise bon nombre de concepts du troisième article, mais les spécifie pour le contexte spécifique des fonctions d'utilité multi-attribut. Dans des cadres complexes comme celui de la construction d'horaire, il est impensable de demander aux employés une description détaillée de leurs préférences pour tout quart possible, car le nombre de ces quarts est gigantesque. Il nous faut alors exploiter les structures de ces quarts pour construire des fonctions d'utilité approchées, ce que l'approche multicritère (ou multi-attribut) permet de faire. Selon cette approche, toute fonction d'utilité est somme pondérée de fonctions d'utilité dites partielles. Ces utilités partielles correspondent à des caractéristiques particulières des quarts, comme, par exemple, le nombre d'heures travaillées, les heures de début ou les congés de la semaine.

Dans ce cadre spécifique, il est naturel de penser que les individus vont se focaliser sur les utilités partielles, ce qui nous amène à décrire l'équité en terme de ces utilités partielles. Dans un premier temps, nous introduisons une variante de la normalisation sociale, appelée normalisation sociale corrélée, pour rendre ces utilités partielles comparables d'un individu à l'autre. Ensuite, nous considérons que chaque individu s'attend à une certaine utilité partielle qui dépend de l'importance qu'il a déclaré attacher au critère correspondant à cette utilité

partielle. Nous avons décrit cette attente par la fonction d'utilité standard, qui nous a, par ailleurs, amené à une nouvelle normalisation des poids des fonctions d'utilité. Au lieu de contraindre la somme des poids à être égale à 1, ce qui ne semble pas justifiable conceptuellement, nous proposons de contraindre l'utilité globale que les individus espèrent obtenir à évaluer 1.

Le quatrième article fournit aussi des résultats de simulations numériques, en comparant, à la lumière du troisième article, la normalisation usuelle et les nouvelles normalisations des fonctions d'utilité linéaires multi-attribut que le quatrième article introduit. Ces résultats montrent une grande cohérence entre les approches des troisièmes et quatrièmes articles, et prouvent une amélioration suite à l'usage des nouvelles normalisations.

## CHAPITRE 8

### CONCLUSION

Nous concluons cette thèse en récapitulant brièvement les principaux résultats. Nous discuterons aussi de récents développements qui n'entrent pas dans le cadre de cette thèse. Enfin, nous évoquerons de nouveaux axes de recherche ouverts par cette thèse.

#### 8.1 Synthèse des travaux de thèse

Dans cette thèse, nous avons adressé le problème de construction de quarts avec les préférences des employés sous quatre angles différents.

##### 8.1.1 Fonction de retour

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux stratégies non-honnêtes que les employés peuvent être amenés à suivre. Ceci nous a amené à une jolie et puissante nouvelle perspective sur la théorie des jeux. Au lieu de nous concentrer sur les stratégies des employés comme cela est fait classiquement, nous avons révélé la pertinence d'un nouvel objet mathématique que nous avons appelé la fonction de retour.

Cette fonction de retour a la capacité de parfaitement remplacer les stratégies dans la description des jeux, notamment parce que la correspondance de meilleure réponse dans l'espace des stratégies est naturellement associée à une correspondance de meilleure réponse dans l'espace des fonctions de retour. Il est tout aussi important que les équilibres de Nash des stratégies correspondent aussi naturellement aux équilibres de Nash des fonctions de retour.

Si les fonctions de retour sont toutes aussi adéquates pour décrire théoriquement les jeux, elles ont aussi et surtout l'avantage de bien mieux se prêter aux calculs informatiques. En particulier, elles sont naturellement adaptées à la dynamique du *fictitious play*, et à des jeux où l'effet des actions des joueurs sur les utilités des autres est indirect. D'un point de vue conceptuel, les fonctions de retour permettent aussi de justifier le concept d'équilibre de Bayes-Nash, dont la difficulté vient de la non-observabilité des stratégies des autres. Au contraire, les fonctions de retour sont des objets construits à partir d'informations qui sont accessibles aux joueurs.

Dans le premier axe de recherche, nous avons aussi fourni des résultats numériques pour démontrer l'utilité des fonctions de retour d'un point de vue plus pratique. Ces résultats



décrivent les équilibres de Bayes-Nash d'un partage de gâteau, qui auraient été très difficile à obtenir sans passer par l'étude et l'implémentation des fonctions de retour.

Enfin, nous avons également procédé à une preuve théorique de la convergence d'une dynamique de meilleures réponses dans l'espace des fonctions de retour, malgré des erreurs cumulatives dans leurs approximations algorithmiques. Cette preuve exploite la structure topologique naturelle que l'on peut fournir à l'espace des fonctions de retour.

### 8.1.2 Optimisation heuristique des mécanismes

La fonction de retour est un nouvel outil formidable pour calculer les équilibres de Bayes-Nash qui nous étaient inaccessibles jusque là. Armés de ce nouvel objet, nous pouvons désormais pousser plus loin les frontières de la théorie de la conception de mécanismes. En particulier, nous pouvons désormais exploiter la pleine puissance du principe de révélation. Ce principe assure que, pour peu que l'on puisse calculer un équilibre de Bayes-Nash, on peut systématiquement construire un mécanisme à équilibre honnête à partir de n'importe quel mécanisme.

Ceci nous a conduit à un algorithme d'optimisation heuristique de mécanismes. Cet algorithme consiste à parcourir un espace de mécanismes paramétrés, à calculer leurs équilibres de Bayes-Nash et à appliquer le principe de révélations. C'est ainsi que l'on parcourt un espace de mécanismes paramétrés à équilibres honnêtes. On propose alors d'optimiser les paramètres.

Dans le second axe de recherche, nous avons appliqué ces idées à un problème de partage de gâteau. Nous avons d'abord montré que la rationalité des agents conduit à une nette sous-optimalité du partage de gâteau pour le mécanisme idéal conçu pour des agents honnêtes. En effet, pour ce mécanisme idéal, les stratégies des agents à l'équilibre de Bayes-Nash les conduisent à biaiser le jeu à tel point que les agents sans préférences marquées y perdent beaucoup comparé aux autres.

Pour rectifier le tir, nous avons pointé le fait que, lorsqu'ils jouent le mécanisme idéal, les agents ont intérêt à annoncer des préférences moins marquées que leurs vrais préférences le sont. Par exemple, si un agent adore le chocolat et déteste la vanille, il a intérêt à dire qu'il préfère seulement légèrement le chocolat à la vanille. Pour battre l'agent à son propre jeu, nous avons proposé de modifier le mécanisme idéal et de donner à l'agent un ratio chocolat sur vanille comparable à sa préférence relative du chocolat par rapport à la vanille.

En utilisant cette remarque, nous avons construit des mécanismes de bien meilleure qualité, tout en étant à équilibre honnête. Les résultats incluent des améliorations de l'ordre de 10 à 15 %.

### 8.1.3 Nouvelles définitions de l'équité

En troisième lieu, nous nous sommes intéressés à la problématique de l'équité. En nous inspirant des définitions fournies dans le cadre du partage de gâteau, nous avons introduits de nouvelles normalisations des fonctions d'utilité des joueurs, qui reposent sur des principes philosophiques plus convaincants.

De manière traditionnelle, les fonctions d'utilité sont souvent normalisées par valeurs extrêmes. Par exemple, dans le partage du gâteau, il est classique de considérer que l'utilité de ne pas avoir de gâteau (qui est alors minimale) est 0, tandis que l'utilité d'avoir tout le gâteau (qui est alors maximale) est 1. Toutefois, il n'est pas clair qu'une telle normalisation repose sur des fondations raisonnables.

A contrario, dans le troisième axe de recherche, nous avons introduit une nouvelle normalisation qui repose sur la comparaison du bien de chacun avec les biens des autres. Plus précisément, chaque joueur perçoit les biens des autres à travers sa fonction d'utilité, ce qui nous fournit une distribution des utilités de ce joueur pour les biens des autres. C'est à cette distribution que le joueur compare son utilité pour son bien. L'utilité normalisée socialement compte à combien d'écart-types au-dessus de la moyenne se trouve l'utilité (non-normalisée) du joueur. Cette définition généralise bien les concepts d'équité sans-jalousie et d'équité proportionnelle, qui compare uniquement l'utilité (non-normalisée) du joueur au maximum et à la moyenne de la distribution.

Nous avons ensuite poussé nos idées de normalisation plus loin, en incluant un réseau social qui dicte les interactions entre les individus. En effet, nous faisons la remarque que les individus ont tendance à se comparer avec ceux avec qui ils interagissent. Ceci nous amène aux concepts d'équité locale, selon lesquels les individus ne se comparent qu'à ceux à qui ils sont liés dans le réseau social. En particulier, la normalisation sociale locale diffère de la normalisation sociale, en considérant la distribution des utilités d'un individu pour les biens des autres pondérée par les liens sociaux entre l'individu et les autres.

Ces utilités normalisées nous ont ensuite amené à définir des mesures d'injustice sociale. Pour ce faire, pour chaque individu, on définit son potentiel à se plaindre comme une fonction décroissante et convexe de son utilité normalisée. Puis on compare ce potentiel, au potentiel moyen à se plaindre des individus de son voisinage. La partie positive de la différence entre ces deux termes définit ensuite le sentiment d'injustice de l'individu, et la moyenne de ces sentiments d'injustice définit notre mesure d'injustice sociale. C'est celle-ci que nous proposons de minimiser.

### 8.1.4 Construction de quarts avec préférences

Enfin, dans un quatrième et dernier temps, nous nous sommes intéressés au problème de la construction de quarts avec les préférences des employés sur un horizon d'une semaine. D'un point de vue algorithmique, nous avons proposé une méthode en deux étapes. La première a deux fonctionnalités. D'abord, elle calcule le coût minimal du problème de construction d'horaires. Ensuite, elle génère de nombreuses colonnes prometteuses pour la seconde phase. La seconde phase maximise alors le surplus collectif en combinant les colonnes générées et en respectant la contrainte selon laquelle le coût des quarts avec préférences ne doit pas excéder d'un faible pourcentage le coût minimal sans préférences.

Par ailleurs, nous avons introduit un dispositif fondé sur le logiciel MACBETH pour décrire les préférences des employés. Ce dispositif repose sur une décomposition multi-attributs des fonctions d'utilité. Nous avons ainsi proposé une telle décomposition avec pour attributs le nombre d'heures travaillées, les jours de congé, l'activité de travail et les périodes de journée travaillées.

La principale avancée proposée par ce dernier axe de recherche concerne la normalisation des fonctions d'utilité multi-attributs. Celle-ci exploite la normalisation sociale corrélée des fonctions d'utilité partielles associées aux attributs. Cette normalisation est un cas particulier de normalisation sociale locale, où le réseau social est construit à partir des corrélations entre les préférences des différents individus.

Par ailleurs, la normalisation multi-attribut inclut une normalisation des poids qui, de façon inhabituelle, ne correspond pas à les sommer à une constante. La normalisation des poids que nous avons proposée repose sur les fonctions dites d'utilité standard  $\psi_k$ . Celles-ci sont des descriptions de la relation entre les poids et les utilités partielles. La « bonne » normalisation consiste alors à sommer les utilités partielles pondérées et attendues  $w_k \psi_k(w_k)$  à une constante.

Nous avons montré la pertinence de notre approche à la fois avec l'exemple conceptuel du *busy Christmas*, et avec des résultats numériques convaincants. En plus d'une meilleure optimisation du surplus collectif, nous avons montré que, en bonus, la maximisation des utilités normalisées conduisaient à une meilleure équité entre les employés.

## 8.2 Développements en cours

Avant même que cette thèse soit achevée, nous avons réalisé de nombreuses avancées qui sortent du cadre de la thèse. Nous présentons ici brièvement le contenu de ces avancées.

### 8.2.1 Convergence des fonctions de retour

Dans le premier axe de recherche de cette thèse, nous avons fourni une preuve de convergence de la dynamique de meilleure réponse des fonctions de retour. Cette preuve requiert toutefois l'hypothèse selon laquelle il est possible d'approximer les fonctions de retour aussi bien que l'on veut.

Toutefois, il n'est pas évident que tel est le cas. Après tout, une fonction de retour est une fonction qui retourne une distribution probabiliste sur l'ensemble des résultats. Or, si l'ensemble des résultats est infini (par exemple  $\mathbb{R}$ ), il n'est pas évident qu'un apprentissage de la fonction de retour par échantillonnage puisse fournir une bonne approximation.

Nous avons trouvé des résultats théoriques positifs à cette condition, en généralisant la loi forte des grands nombres, et en étudiant la topologie de l'ensemble des actions.

### 8.2.2 Analyse théorique du partage de gâteau optimal

Le mécanisme optimal de partage de gâteau est très probablement non analytique, ce qui rend toute discussion sur ses propriétés difficile. Toutefois une étude des symétries et de la topologie des mécanismes permet d'en apprendre à ce sujet. En particulier, nous avons prouvé que, lorsque des symétries entre les agents ou entre les parts d'un gâteau existent, ces symétries sont présentes aussi dans un mécanisme optimal.

D'autre part, des considérations topologiques nous ont conduit à la preuve que sous des hypothèses simples, les mécanismes à équilibre honnête optimaux sont strictement moins bons que les mécanismes idéaux joués par des joueurs honnêtes. En d'autres termes, en général, la rationalité égoïste des joueurs a un coût strictement positif.

### 8.2.3 Stratégies dans la construction de quarts avec préférences

Dans le quatrième axe de recherche de la thèse, pour des raisons de simplicité, nous avons supposé les employés honnêtes. Toutefois, surtout au vu des premiers axes de la thèse, il semble important de se demander ce qui se passerait si ceux-ci n'étaient pas honnêtes.

Ceci nous a amené à développer une expérience dont l'objectif était de confirmer l'intuition selon laquelle, en général, l'honnêteté n'est pas un équilibre de Bayes-Nash. Pour ce faire, nous avons réuni 20 participants. Au début de l'expérience, nous avons assigné une préférence « réelle » à chaque participant. Puis, chaque jour durant deux semaines, nous avons demandé aux participants de révéler des préférences annoncées. Ce sont ces préférences annoncées qui furent utilisées dans l'algorithme de construction de quarts chaque soir, attribuant ainsi un quart à chaque participant. Chaque participant reçut alors un score, qui dépend de ses préférences réelles et du quart qui lui est assigné. L'objectif de chaque participant est alors

de maximiser ce score. Au 20 participants humains, nous avons ajouté 9 participants virtuels qui se contentaient de révéler leurs préférences honnêtement.

Les résultats de l'expérience montrent qu'après un dur apprentissage, les participants ont su déterminer des stratégies non-honnêtes qui leur ont garanti de meilleurs scores que s'ils avaient été honnêtes. En particulier, les 9 participants virtuels ont vu leurs scores diminuer au cours des dernières itérations.

### 8.3 Futures recherches

Enfin, nous concluons cette thèse sur des questions ouvertes ou en tout début de développement, qui représentent des sujets de futures recherches prometteurs.

#### 8.3.1 Approximations algorithmiques des fonctions de retour

L'objectif initial de la fonction de retour était le calcul des équilibres de Bayes-Nash dans le problème de construction de quarts avec préférences. Cette étape est, rappelons-le, incontournable dans la conception d'un mécanisme à équilibre honnête par le principe de révélation.

Malheureusement, ce cadre plus réel nous a posé des problèmes de calculs importants que nous n'avons pas su résoudre dans cette thèse. Le problème est dû à la grande dimension de l'espace des actions dans ce problème (environ 20). Les techniques de décomposition par attributs pour accélérer la vitesse des calculs n'ont pas été concluantes, car elles ont conduit à des approximations trop importantes. De même, les techniques d'interpolation que nous avons utilisées ont semblé trop limitées pour permettre des résultats intéressants.

Un calcul plus précis des fonctions de retour est nécessaire pour mettre à jour la pleine puissance de ces objets. Un tel calcul pourrait peut-être se faire par des méthodes plus évoluées d'optimisation de boîtes noires.

#### 8.3.2 Théorie des catégories appliquée aux jeux

Dans un jeu (bayésien), la relation entre stratégies et fonctions de retour est si fidèle qu'il semble approprié de la décrire par le langage de la théorie des catégories. En fait, il semble que ce lien ne soit pas restreint aux fonctions de retour, et que d'autres objets intéressants de la théorie des jeux puissent être reliés la même manière. C'est le cas, par exemple, des contrôles des joueurs et de la trajectoire de la masse en théorie des jeux à champs moyens.

L'usage du puissant formalisme de la théorie des catégories pourrait permettre une compréhension plus générale des moyens de décrire efficacement les jeux.

### 8.3.3 Jeux évolutionnaires bayésiens

La théorie des jeux évolutionnaires est un sous-domaine de la théorie des jeux qui s'intéresse aux questions de stabilité et de sélection des équilibres de Nash. Ces aspects semblent incontournables pour comprendre la pertinence des prédictions de la théorie des jeux. Dans le cas général, il semble que la plupart des équilibres de Nash mixtes en information complète ne sont pas stables.

L'intuition apportée par la fonction de retour suggère que les équilibres de Bayes-Nash sont eux, en général, stables. Toutefois, il n'est pas clair comment cette stabilité peut être formalisée dans le cadre des jeux bayésiens. La fonction de retour pourrait être un outil adéquat pour adresser cette question.

## RÉFÉRENCES

- A. Abdulkadirolu and T. Sönmez. School choice : A mechanism design approach. *American Economic Review*, 93 :729–747, 2003.
- Y. Achdou and I. Capuzzo-Dolcetta. Mean field games : Numerical methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(3) :1136–1162, 2010.
- L. H. Appelgren. A column generation algorithm for a ship scheduling problem. *Transportation Science*, 3(1) :53–68, 1969.
- C. Arnsperger. Envy-freeness and distributive justice. *Journal of Economic Surveys*, 8(2) :155–186, 1994.
- K. Arrow. Individual values and social choice. *Nueva York : Wiley*, 24, 1951.
- T. Aykin. Optimal shift scheduling with multiple break windows. *Management Science*, 42 :591–602, 1996.
- T. Aykin. A comparative evaluation of modeling approaches to the labor shift scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 125 :327–338, 2000.
- C. A. Bana e Costa and J.-C. Vansnick. MACBETH : An interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International Transactions in Operational Research*, 1(4) :489–500, 1994.
- J. F. Bard and H. W. Purnomo. Preference scheduling for nurses using column generation. *European Journal of Operational Research*, 164(2) :510–534, 2005.
- C. Barnhart and R.-G. Sheno. An approximate model and solution approach for the long-haul crew pairing problem. *Transportation Science*, 32(3) :221–231, 1998.
- J. J. Barthodli. A guaranteed-accuracy round-off algorithm for cyclic scheduling and set covering. *Operations Research*, 29 :501–510, 1981.
- D. Bauso, H. Tembine, T. Basar, et al. Robust mean field games with application to production of an exhaustible resource. In *Proceedings of 7th IFAC Symposium on Robust Control Design, Aalborg, Denmark*, pages 454–459, 2012.
- S. E. Bechtold and L. W. Jacobs. Implicit modeling of flexible break assignments in optimal shift scheduling. *Management Science*, 36 :1339–1351, 1990.
- S. E. Bechtold and L. W. Jacobs. The equivalence of general set-covering and implicit integer programming formulations for shift scheduling. *Naval Research Logistics*, 43 :233–249, 1996.
- S. E. Bechtold and M. J. Showalter. A methodology for labor scheduling in a service delivery system. *Decision Science*, 18 :89–107, 1987.

- X. Bei and Z. Huang. Bayesian incentive compatibility via fractional assignments. In *Proceedings of the Twenty-Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 720–733. SIAM, 2011.
- X. Bei, N. Chen, X. Hua, B. Tao, and E. Yang. Optimal proportional cake cutting with connected pieces. In *AAAI*, 2012.
- R. Benayoun, B. Roy, and B. Sussman. ELECTRE : Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples. *Note de travail*, 49, 1966.
- D. Bertsimas, V. F. Farias, and N. Trichakis. The price of fairness. *Operations Research*, 59(1) :17–31, 2011.
- D. Black. *The Theory of Committees and Elections*. Cambridge, England, Cambridge University Press, 1958.
- K. Boubaker. Recherche tabou et agrégation dynamique de contraintes pour la construction d’horaires mensuels d’Équipages aériens dans un contexte d’Équité. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, December 2006.
- T. G. Bourbeau, Benoît Crainic, M. Gendreau, and J. Robert. Design for optimized multi-lateral multi-commodity markets. *European Journal of Operational Research*, 163 :503–529, 2005.
- J. B. Brams and A. D. Taylor. An envy-free cake division protocol. *The American Mathematical Monthly*, 102 :9–12, 1995.
- J. B. Brams and A. D. Taylor. *Fair Division : From Cake-Cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, 1996.
- J.-P. Brans and B. Mareschal. *Prométhée-Gaia : une méthodologie d’aide à la décision en présence de critères multiples*. Éditions de l’Université de Bruxelles, 2002.
- J.-P. Brans, P. Vincke, and B. Mareschal. How to select and how to rank projects : The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*, 24(2) :228–238, 1986.
- I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos, and M. Kyropoulou. On the efficiency of equilibria in generalized second price auctions. In *Proceedings of the 12th ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 81–90. ACM, 2011.
- J.-M. Chen and H.-L. Cheng. Effect of the price-dependent revenue-sharing mechanism in a decentralized supply chain. *Central European Journal of Operations Research*, 20 :299–317, 2012.
- Y. Chen, J. K. Lai, D. C. Parkes, and A. D. Procaccia. Truth, justice, and cake cutting. *Proceedings of the 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence (to appear)*, 2010.



- Y. Chen, J. K. Lai, D. C. Parkes, and A. D. Procaccia. Truth, justice, and cake cutting. *Games and Economic Behavior*, 77(1) :284–297, 2013.
- E. H. Clarke. Multipart pricing of public goods. *Public Choice*, 11(1) :17–33, 1971.
- Y. J. Cohler, J. K. Lai, D. C. Parkes, and A. D. Procaccia. Optimal envy-free cake cutting. In *AAAI*, 2011.
- G. B. Dantzig. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, in activity analysis of production and allocation. 1951.
- G. B. Dantzig. A comment on edie’s traffic delays at toll booths. *Operations Research*, 2 : 339–341, 1954.
- P. Dasgupta, P. Hammond, and E. Maskin. The implementation of social choice rules : Some results on incentive compatibility. *Review of Economic Studies*, 46 :185–216, 1979.
- G. Desaulniers, J. Desrosiers, Y. Dumas, S. Marc, B. Rioux, M.-M. Solomon, and F. Soumis. Crew pairing at air france. *European Journal of Operational Research*, 97 :245–259, 1997.
- G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M. M. Solomon. *Column Generation*, volume 5. Springer, 2005.
- M. Desrochers and F. Soumis. A column generation approach to the urban transit crew scheduling problem. *Transportation Science*, 23(1) :1–13, 1989.
- N. R. Devenur and T. P. Hayes. The adwords problem : Online keyword matching with budgeted bidders under random permutations. In *Proceedings of the 19th ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 71–78, 2009.
- L. E. Dubins and E. H. Spanier. How to vut a cake fairly. *American Mathematical Monthly*, 84(5) :1–17, 1961.
- D. Foley. Resource allocation and the public sector. *Yale Economics Essays*, 7 :45–98, 1967.
- M. Gamache, F. Soumis, D. Villeneuve, J. Desrosiers, and E. Gelinas. The preferential bidding system at air canada. *Transportation Science*, 32(3) :246–255, 1998.
- M. Gamache, F. Soumis, G. Marquis, and J. Desrosiers. A column generation approach for large scale aircrew rostering problems. *Operations Research*, 47(2) :247–262, 1999.
- J. S. Gans and M. Smart. Majority voting with single-crossing preferences. *Journal of Public Economics*, 59(2) :219–237, 1996.
- A. Gibbard. Manipulation of voting schemes : a general result. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 41 :587–601, 1973.
- A. Gibbard. Straightforwardness of game forms with lotteries as outcomes. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 595–614, 1978.

- A. L. Gibbs and F. E. Su. On choosing and bounding probability metrics. *International Statistical Review*, 70(3) :419–435, 2002.
- I. Gilboa and E. Zemel. Nash and correlated equilibria : Some complexity considerations. *Games and Economic Behavior*, 1(1) :80–93, 1989.
- D. B. Gillies. Solutions to general non-zero-sum games. *Contributions to the Theory of Games*, 4(40), 1959.
- T. Gontier. Longhaul cabin crew assignment. *AGIFORS Symposium Proceedings*, 25 :49–66, 1985.
- S. Greco, M. Kadziński, V. Mousseau, and R. Słowiński. ELECTRE GKMS : Robust ordinal regression for outranking methods. *European Journal of Operational Research*, 214(1) :118–135, 2011.
- P. E. Green and V. Srinivasan. Conjoint analysis in consumer research : Issues and outlook. *Journal of Consumer Research*, 5 :102–123, 1978.
- P. E. Green, A. M. Krieger, and Y. Wind. Thirty years of conjoint analysis : Reflections and prospects. *Interfaces*, 31(3 supplement) :S56–S73, 2001.
- T. Groves. Incentives in teams. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 617–631, 1973.
- O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions. Mean field games and applications. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*, pages 205–266. Springer, 2011.
- J. C. Harsanyi. Games with incomplete information played by Bayesian players part I. the basic model. *Management Science*, 14(3) :159–183, 1967.
- J. C. Harsanyi. Games with incomplete information played by Bayesian players part II. Bayesian equilibrium points. *Management Science*, 14(5) :320–334, 1968a.
- J. C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, part III. the basic probability distribution of the game. *Management Science*, 14(7) :486–502, 1968b.
- J. D. Hartline. Mechanism design and approximation. *Book draft. October*, 2013.
- J. D. Hartline and B. Lucier. Bayesian algorithmic mechanism design. In *Proceedings of the 42nd ACM symposium on Theory of Computing*, pages 301–310. ACM, 2010.
- J. D. Hartline, R. Kleinberg, and A. Malekian. Bayesian incentive compatibility via matchings. In *Proceedings of the Twenty-Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 734–747. SIAM, 2011.
- L. N. Hoang, F. Soumis, and G. Zaccour. The return function : A new computable perspective on bayesian-nash equilibria. Technical Report 07, GERAD, February 2014.

- B. Holmstrom. *On Incentives and Control in Organizations*. PhD thesis, Stanford University, 1977.
- M. Huang, R. P. Malhamé, and P. E. Caines. Large population stochastic dynamic games : Closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. *Communications in Information & Systems*, 6(3) :221–252, 2006.
- S. Irnich and G. Desaulniers. Shortest path problems with resource constraints. In G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M. Solomon, editors, *Column Generation*, pages 33–65. Springer US, 2005.
- S. Jain and S. Raghavan. A queuing approach for inventory planning with batch ordering in multi-echelon supply chains. *Central European Journal of Operations Research*, 17 :95–110, 2009.
- E. Kalai and M. Smorodinsky. Other solutions to nash’s bargaining problem. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 513–518, 1975.
- L. V. Kantorovich. A new method of solving some classes of extremal problems. In *Doklady Akad Sci USSR*, volume 28, pages 211–214, 1940.
- R. M. Karp. *Reducibility among Combinatorial Problems*. Springer US, 1972.
- M. Kearns, M. L. Littman, and S. Singh. Graphical models for game theory. In *Proceedings of the Seventeenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 253–260. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001.
- F. P. Kelly, A. K. Maulloo, and D. K. Tan. Rate control for communication networks : shadow prices, proportional fairness and stability. *Journal of the Operational Research society*, pages 237–252, 1998.
- J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1) : 229–260, 2007.
- Q. Lequy. *Affectation d’activités et de tâches à des quarts de travail fixés*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2010.
- R. J. Lipton, E. Markakis, M. E., and A. Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. In *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC-2004)*, pages 125–131. ACM Press, 2004.
- J. J. Louviere. Conjoint analysis modelling of stated preferences : a review of theory, methods, recent developments and external validity. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 93–119, 1988.
- A. M. Manelli and D. R. Vincent. Multidimensional mechanism design : Revenue maximization and the multiple-good monopoly. *Central European Journal of Operations Research*, 137 :153–185, 2007.

- L. Y. Maystre, J. Pictet, J. Simos, and B. Roy. *Méthodes multicritères ELECTRE : description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale*, volume 8. PUR presses polytechniques, 1994.
- M. Mes, M. van der Heijdenet, and P. Shurr. Interaction between intelligent agent strategies for real-time transportation planning. *Central European Journal of Operations Research*, 2011.
- R. S. Mirchandani. Superadditivity and subadditivity in fair division. *Journal of Mathematics Research*, 5(3) :78, 2013.
- S. L. Moondra. An L.P. model for workforce scheduling in banks. *Journal of Bank Research*, 6 :299–301, 1976.
- J. G. Morris and M. J. Showalter. Simple approaches to shift, days-off and tour scheduling problems. *Management Science*, 29 :942–950, 1983.
- E. Mossel and O. Tamuz. Truthful fair division. In *3rd International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 288–299, 2010.
- R. B. Myerson. Incentive-compatibility and the bargaining problem. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 47 :61–73, 1979.
- R. B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6 :58–73, 1981.
- R. B. Myerson. *Fundamentals of Social Choice Theory*. Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, 1996. URL <http://home.uchicago.edu/rmyerson/research/schch1.pdf>.
- R. B. Myerson. Comments on games with incomplete information played by bayesian players, i–iii harsanyi's games with incomplete information. *Management Science*, 50 (12\_supplement) :1818–1824, 2004.
- J. Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, volume 36(1), pages 48–49, 1950a.
- J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 155–162, 1950b.
- J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, pages 286–295, 1951.
- O. Netzer, O. Toubia, E. T. Bradlow, E. Dahan, T. Evgeniou, F. M. Feinberg, E. M. Feit, S. K. Hui, J. Johnson, J. C. Liechty, et al. Beyond conjoint analysis : Advances in preference measurement. *Marketing Letters*, 19(3-4) :337–354, 2008.
- N. Nisan. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.

- N. Nisan and A. Ronen. Algorithmic mechanism design. In *Proceedings of the Thirty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 129–140. ACM, 1999.
- B. K. Orme. *Getting started with Conjoint Analysis : Strategies for Product Design and Pricing Research*. Research Publishers, LLC, 2005.
- C. H. Papadimitriou and T. Roughgarden. Computing correlated equilibria in multi-player games. *Journal of the ACM (JACM)*, 55(3) :14, 2008.
- D. C. Parkes. When analysis fails : Heuristic mechanism design via self-correcting procedures. In *SOFSEM 2009 : Theory and Practice of Computer Science*, pages 62–66. Springer, 2009.
- P. A. Pathak. The mechanism design approach to student assignment. *Annual Review of Economics*, 3 :513–536, 2011.
- E. M. Penn, J. W. Patty, and S. Gailmard. Manipulation and single-peakedness : A general result. *American Journal of Political Science*, 55(2) :436–449, 2011.
- A. D. Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor’s cake. In *IJCAI*, pages 239–244, 2009.
- Z. Rabinovich, V. Naroditskiy, E. H. Gerding, and N. R. Jennings. Computing pure Bayesian-Nash equilibria in games with finite actions and continuous types. *Artificial Intelligence*, 195(0) :106 – 139, 2013. ISSN 0004-3702. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.artint.2012.09.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370212001191>.
- J. Rawls. *A Theory of Justice*. Harvard university press, 1999.
- M. Rekik. *Construction d’horaires de travail dans des environnements hautement flexibles*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, January 2006.
- M. Rekik, J.-F. Cordeau, and F. Soumis. Implicit shift scheduling with multiple breaks and work stretch duration restrictions. *Journal of Scheduling*, 13(1) :49–75, 2010.
- K. W. Roberts. Voting over income tax schedules. *Journal of Public Economics*, 8(3) : 329–340, 1977.
- J. Robertson and W. Webb. *Cake-Cutting Algorithms : Be Fair If You Can*. AK Peters Ltd, 1998.
- P. Rothstein. Order restricted preferences and majority rule. *Social Choice and Welfare*, 7 (4) :331–342, 1990.
- P. Rothstein. Representative voter theorems. *Public Choice*, 72(2-3) :193–212, 1991.
- T. Roughgarden. Algorithmic game theory. *Communications of the ACM*, 53(7) :78–86, 2010.

- B. Roy. Méthodologie multicritère d'aide à la décision. *Economica, Paris*, 1985.
- M. A. Satterthwaite. Strategy-proofness and arrow's conditions : Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2) :187–217, 1975.
- A. K. Sen and J. E. Foster. *On Economic Inequality*. Oxford University Press, 1997.
- L. S. Shapley. A value for  $n$ -person games. *Contribution to the Theory of Games*, 2 :303–317, 1953.
- F. W. Simmons and F. E. Su. Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker. *Mathematical Social Sciences*, 45 :15–25, 2003.
- Y. Siskos and A. Spyridakos. Intelligent multicriteria decision support : Overview and perspectives. *European Journal of Operational Research*, 113 :236–246, 1999.
- H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica : Journal of Econometric Society*, 16 :101–104, 1948.
- W. Stromquist. Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. In *Fair Division*, 2007.
- X. Su and S. Zenios. Recipient choice can address the efficiency-equity trade-off in kidney transplantation : A mechanism design model. *Management Science*, 52 :1647–1660, 2006.
- K. Tadenuma and W. Thomson. The fair allocation of indivisible good when monetary compensations are possible. *Mathematical Social Sciences*, 25(2) :117–132, 1993.
- H. Varian. Equity, envy and efficiency. *Journal of Economic Theory*, 9 :63–91, 1974.
- H. R. Varian. Two problems in the theory of fairness. *Journal of Public Economics*, 5(3) :249–260, 1976.
- W. Vickrey. Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16 :8–37, 1961.
- P. Vincke. *Multicriteria Decision-Aid*. PhD thesis, Wiley, New York, 1992.
- J. von Neumann. Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen. *Fundamenta Mathematicae*, 11(1) :230–238, 1928.
- J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, volume 60. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.
- G. Vulcano, G. van Ryzin, and C. Maglaras. Optimal dynamic auctions for revenue management. *Management Science*, 48 :1388–1407, 2002.
- H. P. Young. *Equity : In Theory and Practice*. Princeton University Press, 1995.
- C. Zopounidis and M. Doumpos. Multicriteria classification and sorting methods : A literature review. *European Journal of Operational Research*, 138 :229–246, 2002.