

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PROBLÈME D'AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS : OPTIMISATION  
ROBUSTE ET INTÉGRATION DE LA DEMANDE DES PASSAGERS

DAVID LASALLE IALONGO  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
NOVEMBRE 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

PROBLÈME D’AFFECTATION DES TYPES D’AVION AUX VOLS : OPTIMISATION  
ROBUSTE ET INTÉGRATION DE LA DEMANDE DES PASSAGERS

présentée par : LASALLE IALONGO David

en vue de l’obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d’examen constitué de :

M. SOUMIS François, Ph. D., président

M. DESAULNIERS Guy, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. EL HALLAOUI Issmaïl, Ph. D., membre

M. BIERLAIRE Michel, Ph. D., membre

## REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord mon directeur de recherche M. Guy Desaulniers pour son aide et son soutien formidable tout au long de ce travail de recherche. Merci d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir encouragé à persévérer dans les moments les plus difficiles. Merci également pour le soutien financier pendant toutes ces années.

Je remercie également M. François Lessard pour son travail et son aide considérable au niveau informatique. Mes études de doctorat ont également bénéficié d'une bourse d'études du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), envers qui je souhaite exprimer ma gratitude.

Je remercie ma mère Denise et ma soeur Dorothée pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études. Enfin, merci à ma chère conjointe Joëlle, pour tout.

## RÉSUMÉ

Le problème d'affectation des types d'avion aux vols (*fleet assignment problem*, FAP) consiste à déterminer le type d'avion à utiliser pour chaque segment de vol d'un horaire donné de façon à maximiser les profits anticipés, c'est-à-dire les revenus estimés moins les coûts. Les frais d'exploitation dépendent de l'affectation des types d'avion et se calculent relativement bien, tandis que les revenus varient selon la demande des passagers et sont sensiblement plus difficiles à estimer. La plupart des modèles dans la littérature utilisent une estimation par segment de vol, ce qui néglige l'interdépendance des revenus entre les vols ainsi que le débordement et la récupération des passagers. Des modèles de flot de passagers (*passenger flow models*, PFMs) ont été développés pour améliorer la fonction objectif du FAP, mais ils ont tous divers défauts. La majorité implique un contrôle total de la compagnie aérienne sur ses passagers, sinon ils nécessitent des temps de calcul beaucoup plus importants. De plus, la demande des passagers est sujette à des variations d'une semaine à l'autre au courant d'une saison et d'une journée à l'autre dans une même semaine, ce qui rend sous-optimale toute solution au FAP qui serait répétée période après période sans changement.

Cette thèse cherche à accroître la prise en compte de la demande des passagers dans le FAP afin d'améliorer la qualité et la robustesse de la solution. Le premier volet propose un algorithme faisant appel à un modèle de flot de passagers durant la résolution du FAP afin d'améliorer l'estimation des revenus. Dumas (2008) introduit dans sa thèse un modèle de flot de passagers réaliste qui utilise la solution du FAP pour déterminer la répartition des passagers sur les segments de vol et ainsi fournir une meilleure estimation des revenus. Il développe une méthode de résolution itérative qui alterne entre le FAP et le PFM en utilisant cette nouvelle estimation pour mettre à jour les revenus dans la fonction objectif du FAP. Cette méthode donne de meilleurs résultats que la résolution d'un modèle standard, au prix de multiplier les temps de calcul par un facteur de 10 ou plus. L'algorithme que nous proposons utilise le PFM pour réévaluer périodiquement les revenus des segments de vol durant la résolution du FAP par un algorithme heuristique d'énumération implicite. Cette

méthode permet d'accélérer les temps de calcul par un facteur de 2 à 3 tout en préservant la qualité de la solution.

Le deuxième volet de ce travail de recherche consiste à intégrer la variabilité de la demande dans la modélisation et la résolution du FAP. Lorsque la journée des opérations approche et que la demande se précise, les compagnies aériennes tentent de faire des changements d'affectation pour rentabiliser au maximum leur flotte. Puisque l'affectation initiale n'a pas été faite en tenant compte de ces échanges futurs, il y a généralement peu d'opportunités de réaffectation. Pour remédier à ce problème, nous développons différents modèles d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande. Ces modèles diffèrent selon la complexité du problème de départ et des hypothèses établies. Ils permettent de planifier des opportunités d'échanges de types d'avion en fonction de plusieurs scénarios représentant la variation de la demande au cours d'une saison.

Nous développons deux méthodes de résolution que nous testons sur une des variantes du problème. La première méthode utilise la décomposition de Benders pour tenter d'accélérer la résolution, les sous-problèmes étant définis pour les scénarios de demande. Les résultats ne sont pas aussi bons qu'espérés ; la convergence de l'algorithme est assez lente et des erreurs numériques se glissent en cours de résolution lorsque les coupes d'optimalité, qui ont des coefficients beaucoup plus élevés que ceux de la matrice de contraintes, sont ajoutées au problème maître. Nous proposons quelques réflexions pour remédier à ces problèmes. La deuxième méthode est une approche directe par CPLEX. Plusieurs expérimentations sont faites sur des instances de tailles diverses avec différents ensembles de scénarios. Les résultats obtenus montrent que l'utilisation de multiples scénarios de demande permet d'améliorer la qualité de la solution de 1 à 3 % comparée au FAP standard et jusqu'à doubler le nombre de réaffectations de types d'avion effectuées en moyenne par rapport à l'utilisation d'un seul scénario représentant la demande moyenne par itinéraire.

## ABSTRACT

The fleet assignment problem (FAP) consists of determining the aircraft type to use on each flight leg of a given schedule in order to maximize the expected profits, which are the expected revenues minus the costs. The operating costs depend on the aircraft type assignment and can be computed relatively easily, while revenues vary with passenger demand and are significantly harder to estimate. Most models in the literature use an estimation per flight leg, that neglects the interdependency of revenues between flights as well as the spill and recapture of passengers. Passenger flow models (PFMs) have been developed to improve the FAP objective function, but they all have various flaws. The majority of them implies total control by the airline company over its passengers, otherwise they require much larger computational times. Furthermore, passenger demand is subject to variations from one week to the other during a season and from day to day in the same week, making sub-optimal any solution to the FAP that would be repeated period after period without change.

This thesis seeks to augment the consideration of passenger demand in the FAP in order to improve the quality and robustness of the solution. The first part proposes an algorithm that calls a PFM while solving the FAP to improve the estimated revenues. Dumas (2008) introduced in his thesis a realistic passenger flow model that uses the FAP solution to determine the distribution of passengers on flight legs and thus provides a better estimate of revenues. He developed an iterative solution method that alternates between the FAP and the PFM using this new estimate to update revenues in the FAP objective function. This method gives better results than the usual approach on the standard FAP model, at the cost of increasing computational times by a factor 10 or more. Our proposed algorithm uses the PFM to reevaluate periodically the flight leg revenues while solving the FAP within a heuristic branch-and-bound algorithm. This method speeds up computational times by a factor of 2 to 3 while preserving solution quality.

The second part of this research consists of integrating the demand variability in the modeling and solution process of the FAP. When the operation day is approaching and demand

becomes more accurate, airlines try to make fleet assignment changes to maximize their fleet utilization. Since the initial fleet assignment was not made taking into account these future exchanges, there is generally few reassignment opportunities. To address this problem, we develop different fleet assignment models with reassignment and demand scenarios. These models differ depending on the initial problem complexity and the assumptions made. They allow to plan aircraft type exchange opportunities based on several scenarios representing demand variation during a season.

We develop two solution methods that we test on one of the problem variants. The first method uses Benders decomposition to try to accelerate the solution process, sub-problems being defined for the demand scenarios. The results are not as good as hoped for; the convergence of the algorithm is quite slow and numerical errors are introduced during the solution process when optimality cuts, which have much higher coefficients than those of the constraint matrix, are added to the master problem. We offer some thoughts to remedy to these problems. The second method is a direct approach using CPLEX. Several tests are done using instances of various sizes with different sets of scenarios. The results show that using multiple scenarios improves solution quality by 1 to 3% relative to the standard FAP and up to double the number of aircraft type reassignments done on average compared to using a single scenario representing the average demand per itinerary.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iii
RÉSUMÉ . . . . .	iv
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	8
1.1 Affectation des types d'avion aux vols . . . . .	8
1.1.1 Affectation des types d'avion aux vols avec modification de l'horaire .	11
1.1.2 Affectation des types d'avion aux vols avec contraintes supplémentaires	14
1.1.3 Réaffectation des types d'avion aux vols lors du processus de réservation	17
1.1.4 Affectation des types d'avion aux vols en tenant compte des réaffecta- tions possibles . . . . .	19
1.2 Modèles de flot de passagers . . . . .	20
1.2.1 Modèle de flot de passagers avec optimisation système . . . . .	20
1.2.2 Modèle de flot de passagers avec optimisation utilisateur . . . . .	21
1.3 Critique de la littérature . . . . .	22
CHAPITRE 2 ORGANISATION DE LA THÈSE . . . . .	24
CHAPITRE 3 ARTICLE 1 : AIRLINE FLEET ASSIGNMENT WITH INTERNAL PASSENGER FLOW REEVALUATIONS . . . . .	26
3.1 Introduction . . . . .	27

3.2	The solution method of Dumas <i>et al.</i> (2009) . . . . .	31
3.2.1	Fleet assignment model . . . . .	32
3.2.2	Passenger flow model . . . . .	35
3.2.3	Fleet assignment with external PFM reevaluation . . . . .	38
3.3	Fleet assignment with internal PFM reevaluation . . . . .	39
3.3.1	Variable fixing strategy . . . . .	41
3.3.2	Revenue losses update . . . . .	41
3.3.3	Branch-and-bound algorithm and iterative process . . . . .	42
3.4	Computational results . . . . .	43
3.4.1	Instances . . . . .	43
3.4.2	Parameter values . . . . .	44
3.4.3	Comparative results for the 5,180-leg network . . . . .	45
3.4.4	Sensitivity analysis . . . . .	48
3.4.5	Comparative results for the 10,360-leg network . . . . .	50
3.5	Conclusion . . . . .	52

## CHAPITRE 4 AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC RÉAF- FECTATION ET SCÉNARIOS DE DEMANDE : MODÈLES ET MÉTHODES DE RÉSOLUTION . . . . .

4.1	Problématique . . . . .	56
4.2	Notations . . . . .	60
4.3	Modèles mathématiques . . . . .	64
4.3.1	FAP avec chaînes connues, sans coût sur les échanges . . . . .	64
4.3.2	FAP avec chaînes connues et coût sur les échanges . . . . .	66
4.3.2.1	Première formulation . . . . .	67
4.3.2.2	Deuxième formulation . . . . .	70
4.3.3	Modèle d'affectation des types d'avion avec chaînes libres . . . . .	72
4.4	Méthodes de résolution . . . . .	74
4.4.1	Approche directe par CPLEX . . . . .	75
4.4.2	Décomposition de Benders . . . . .	77

4.4.2.1	Principe . . . . .	78
4.4.2.2	Formulation mathématique . . . . .	82
4.4.2.3	Algorithme de résolution . . . . .	87
CHAPITRE 5 AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC RÉAF-		
FECTION ET SCÉNARIOS DE DEMANDE : EXPÉRIMENTATIONS ET RÉ-		
SULTATS . . . . .		91
5.1	Instances . . . . .	91
5.2	Génération de scénarios . . . . .	96
5.3	Décomposition de Benders . . . . .	99
5.3.1	Résultats préliminaires . . . . .	99
5.3.2	Pistes de solution . . . . .	101
5.4	Approche directe par CPLEX . . . . .	102
5.4.1	Série de tests sur l'instance n° 1 . . . . .	104
5.4.2	Résultats sur l'ensemble des instances . . . . .	106
CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION . . . . .		114
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	114
6.2	Limitations de la solution proposée et améliorations futures . . . . .	116
RÉFÉRENCES . . . . .		118

## LISTE DES TABLEAUX

Table 3.1	Parameter values for both internal and external methods . . . . .	45
Table 3.2	Detailed results of the internal and external methods . . . . .	47
Table 3.3	Statistics on the FAM solution process (5,180-leg network) . . . . .	48
Table 3.4	Sensitivity analysis on the parameter values for the internal method .	49
Table 3.5	Detailed results of the internal and external methods (10,360-leg network) . . . . .	52
Tableau 5.1	Nombre de vols au départ des principales villes de l'horaire . . . . .	94
Tableau 5.2	Nombre de vols et de chaînes pour chaque instance . . . . .	96
Tableau 5.3	Résultats des deux formulations après 80 minutes . . . . .	100
Tableau 5.4	Résultats détaillés pour l'instance n° 1 après 5 itérations . . . . .	105
Tableau 5.5	Résultats pour les 9 instances . . . . .	111

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Processus de planification dans une compagnie aérienne. . . . .	2
Figure 2	Interaction cyclique entre l'affectation des types d'avion aux vols et la distribution des passagers. . . . .	5
Figure 3.1	Example of a time-space network with three stations . . . . .	33
Figure 3.2	The method of Dumas <i>et al.</i> (2009): fleet assignment with external PFM reevaluation . . . . .	39
Figure 3.3	The proposed method: fleet assignment with internal PFM reevaluation	40
Figure 3.4	Average results of the internal and external methods (5,180-leg network) . . . . .	46
Figure 3.5	Average results of the internal and external methods (10,360-leg network) . . . . .	51
Figure 4.1	Échange de types d'avion entre deux boucles compatibles . . . . .	58
Figure 4.2	Exemple de réseau pour une station et un type d'avion donné avec deux banques . . . . .	61
Figure 4.3	Échange de types d'avion entre trois chaînes . . . . .	62
Figure 4.4	Algorithme de résolution pour l'approche directe par CPLEX . . . . .	76
Figure 4.5	Algorithme de résolution pour l'approche par décomposition de Benders	88
Figure 5.1	Évolution du profit espéré moyen pour un test typique . . . . .	103
Figure 5.2	Résultats moyens pour l'instance n° 1 . . . . .	104
Figure 5.3	Résultats moyens pour les 3 instances d'une journée (instances n° 1, n° 2 et n° 3) . . . . .	106
Figure 5.4	Résultats moyens pour les 3 instances de 2 jours (instances n° 4, n° 5, n° 6) . . . . .	107
Figure 5.5	Résultats moyens pour les 2 instances de 3 jours (instances n° 7, n° 8)	107
Figure 5.6	Résultats moyens pour les 8 premières instances . . . . .	109
Figure 5.7	Résultats moyens pour l'instance n° 9 . . . . .	110
Figure 5.8	Résultats supplémentaires pour l'instance n° 9 . . . . .	113

## INTRODUCTION

L'industrie aérienne évolue dans un contexte économique très difficile avec une forte concurrence. Depuis le début des années 2000, trois événements majeurs ont contribué à la placer dans un état si précaire : les attentats de septembre 2001, la flambée du prix du pétrole et la crise financière mondiale qui s'est étalée de 2007 à 2010. Après avoir accumulé une perte globale de 26,1 milliards en 2008 et 4,6 milliards en 2009 selon l'Association Internationale du Transport Aérien (IATA, 2014), l'industrie aérienne a renoué avec les profits depuis 2010. Ceux-ci devraient augmenter en 2014, mais la marge de profit par passager reste relativement faible à 5,65 \$. Dans un tel contexte, les compagnies aériennes se doivent d'être très compétitives et de tout faire pour maximiser leurs revenus et minimiser leurs coûts. Depuis des dizaines d'années, la recherche opérationnelle fournit aux compagnies aériennes différents outils d'aide à la décision afin d'optimiser la planification de leurs opérations. Ce processus de planification étant très complexe, il est typiquement subdivisé en cinq étapes qui sont résolues successivement (Klabjan, 2005). Nous donnons une brève description de chaque étape du processus (voir la figure 1).

### **Élaboration de l'horaire de vols**

La première étape de la planification (*Flight scheduling* en anglais) consiste à déterminer les marchés à exploiter et l'horaire des vols. En partant d'un horaire d'une saison précédente et en utilisant les études de marché ainsi que les informations disponibles sur la concurrence, la compagnie aérienne choisit les paires de villes à connecter par des vols directs, à quelle fréquence, à quelles heures de la journée et à quelles journées de la semaine. Cette étape doit tenir compte de la flotte d'avions disponibles afin que les problèmes suivants d'affectation des types d'avion aux vols et de construction d'itinéraires des avions soient réalisables.

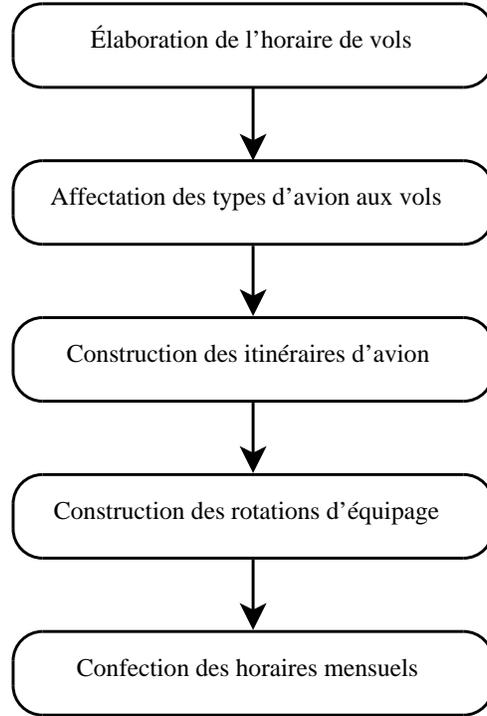


Figure 1: Processus de planification dans une compagnie aérienne.

### **Affectation des types d'avion aux vols**

Une fois l'horaire établi, le problème d'affecter les types d'avion aux vols (*Fleet assignment problem*, FAP) cherche à utiliser la flotte d'avions le plus efficacement possible. Chaque type d'avion ayant une capacité et des frais d'exploitation différents, cette étape vise à déterminer pour chaque segment de vol quel type d'avion est le plus approprié en cherchant à maximiser les profits anticipés, soit les revenus anticipés provenant des passagers moins les frais d'exploitation. L'affectation doit respecter des contraintes de conservation de flot à chaque station pour chaque flotte en tout temps afin de permettre d'obtenir un ensemble d'itinéraires couvrant tous les vols à l'étape suivante. Elle doit aussi satisfaire la contrainte de disponibilité des avions de chaque type.

## Construction des itinéraires d'avion

La troisième étape (*Aircraft routing*) établit un itinéraire pour chaque avion spécifique tout en respectant l'affectation de la phase précédente. Les itinéraires doivent également respecter différentes contraintes quant à l'entretien périodique des avions. En général, il s'agit d'un problème de faisabilité, mais l'objectif de déterminer les connexions les plus profitables ou les plus robustes peut être poursuivi.

## Construction des rotations d'équipage

Les deux dernières étapes traitent de l'horaire du personnel. La première partie construit des rotations d'équipage (*Crew pairing*) de façon à couvrir chaque vol. L'objectif est de minimiser les frais d'exploitation des équipages. Une rotation est une suite d'activités (segments de vol, attentes, repos ...) réalisées par un équipage qui débute et se termine au même aéroport, soit une des bases pour les membres d'équipage. Ces rotations sont soumises aux différentes règles des conventions collectives et aux normes de sécurité en transport aérien.

## Confection des horaires mensuels pour les membres d'équipage

La dernière étape de la planification consiste à établir les horaires de travail pour le personnel de bord (*Crew rostering*). Un horaire est une suite de rotations, congés, vacances, formations et autres activités pertinentes. Le problème est avant tout de trouver une solution réalisable couvrant l'ensemble des rotations et respectant les conventions collectives des employés. La compagnie aérienne cherche également à maximiser la satisfaction des préférences des employés ou à équilibrer la charge de travail entre ces derniers lors de cette étape.

En pratique, ces étapes ne sont pas indépendantes et leur résolution séquentielle entraîne une solution sous-optimale. Certaines recherches proposent de résoudre simultanément plus d'une phase du processus de planification. Par exemple, Barnhart *et al.* (1998) présentent un modèle fusionnant le problème d'affectation des flottes d'avions avec celui de la construction

des itinéraires. D'autres permettent des fenêtres de temps pour varier les heures de départ et d'arrivée des vols (voir par exemple Desaulniers *et al.* (1997) et Rexing *et al.* (2000)).

## **Problèmes à l'étude**

Ce travail de recherche vise à améliorer la prise en compte de la demande des passagers dans le problème d'affectation des types d'avion aux vols ainsi que la robustesse de la solution obtenue. Peu de recherches traitent de manière réaliste le comportement des passagers pour bien estimer les revenus lors de l'affectation des types d'avion aux vols. La plupart des modèles estiment les revenus par segment de vol. Ceci ne tient pas compte de l'interdépendance de ces derniers due aux itinéraires à plusieurs segments. Avec une estimation par segment de vol, les revenus d'un passager intéressé par un itinéraire de Montréal à Vancouver comprenant deux segments de vol, de Montréal à Toronto et de Toronto à Vancouver, seront séparés sur chaque vol. Les revenus de ce passager peuvent alors être comptabilisés sur un segment et ne pas l'être sur l'autre si l'avion est plein.

Pour remédier à ce problème, certaines recherches modélisent les revenus des passagers par itinéraire. Ceci est plus réaliste, mais l'intégration directe dans le modèle d'affectation des types d'avion aux vols implique généralement un contrôle total de la compagnie aérienne sur la distribution des passagers. Le modèle choisit le nombre de passagers pour chaque itinéraire, sans dépasser la demande, afin de respecter le nombre de sièges de chaque avion et maximiser les revenus. Ceci veut dire qu'un passager sur un itinéraire moins payant peut être refusé au profit d'un autre passager sur un autre itinéraire. En pratique, bien que les compagnies aériennes aient accès à des outils de gestion des revenus, elles ne peuvent pas contrôler les passagers de la sorte.

Au moment de la planification des opérations, la distribution des passagers n'est pas connue. La compagnie aérienne peut cependant évaluer quelle sera la demande en passagers pour chaque itinéraire de l'horaire proposé. Il est alors possible de résoudre un problème qui estimera la distribution des passagers sur chaque vol et, par le fait même, le nombre de billets vendus afin d'estimer les revenus. L'affectation des types d'avion aux vols peut alors être faite

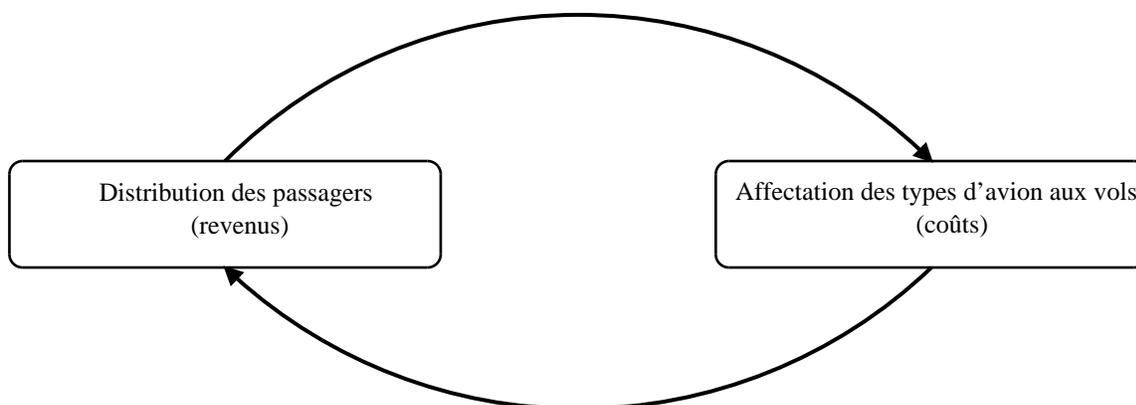


Figure 2: Interaction cyclique entre l'affectation des types d'avion aux vols et la distribution des passagers.

en ayant comme objectif de maximiser les profits en tenant compte de la distribution des passagers. Il y a cependant un problème : l'affectation des types d'avion modifie la distribution des passagers sur les vols. En effet, la compagnie aérienne peut décider pour des raisons de coût d'affecter un avion de 100 places sur un vol alors que la demande est estimée à 150 passagers. Il y aura donc un débordement des passagers en trop sur des vols équivalents, des vols d'autres compagnies aériennes, d'autres modes de transport que l'avion ou certains passagers décideront tout simplement de ne pas voyager. Ceci aura pour effet de modifier la distribution des passagers sur les vols ce qui à son tour influencera l'affectation des types d'avion aux vols. L'interaction est donc cyclique comme le montre la figure 2, chaque problème nécessitant la solution de l'autre pour être optimisé.

Une autre problématique de la demande des passagers liée au problème d'affectation des types d'avion aux vols provient de sa variabilité. Typiquement, le FAP est résolu sur un horizon d'une journée ou une semaine et la solution sera répétée pour une saison entière avec très peu de changements. Pour trouver cette solution, une estimation de la demande moyenne est utilisée. Cependant, au cours d'une saison la demande varie généralement d'une semaine à l'autre et d'une journée à l'autre dans une même semaine. Lorsque la journée des opérations approche et que la demande en passagers se précise, les compagnies aériennes peuvent faire des échanges de types d'avion manuellement pour maximiser leurs profits. Cependant, l'affectation initiale n'est pas faite en fonction de ces futurs échanges et des

différentes possibilités de la demande des passagers.

## **Contributions**

Les contributions de cette thèse sont divisées en trois volets. Le premier volet de la thèse porte sur l'amélioration d'un algorithme existant qui fait appel au modèle de flot de passagers pendant la résolution du FAP. Dumas (2008) développe dans sa thèse de doctorat un modèle de flot de passagers réaliste qui reçoit en entrée la solution du FAP. Il conçoit un algorithme de résolution qui itère entre les deux problèmes afin de converger vers une meilleure solution qui tient compte de la distribution des passagers. Le nombre d'itérations nécessaires et le temps de calcul sont cependant relativement élevés et rendent l'algorithme plus ou moins réaliste dans un contexte pratique. L'objectif de ce volet est de diminuer le temps de calcul en préservant la qualité de la solution.

Le deuxième volet de la thèse est le développement de modèles mathématiques pouvant tenir compte des variations journalières de la demande dans le FAP. Les compagnies aériennes ayant un réseau en étoile (hub-and-spoke) ont plusieurs vols qui forment des aller-retour, appelés boucles. Elles peuvent utiliser cette structure pour échanger deux avions sur des boucles compatibles (même aéroport de départ et d'arrivée, heures semblables) lorsque la demande pour une semaine spécifique le justifie, mais actuellement ceci n'est pas fait de façon systématique.

L'objectif de cette partie est d'obtenir une solution plus robuste au problème d'affectation des types d'avion aux vols en intégrant des scénarios de demande. La solution pourra ainsi mieux faire face à la variabilité de la demande et plus d'opportunités d'échanges d'avions seront possibles. Trois modèles différents seront présentés. Les deux premiers supposent que les boucles compatibles sont connues à l'avance, le deuxième permettant en plus de compter les échanges et de leur associer un coût. Le troisième modèle, le plus complexe, laisse libre à l'optimiseur la façon de regrouper les vols en boucles ou même en chaînes compatibles, une chaîne étant une suite de vols où l'aéroport d'arrivée n'est pas nécessairement le même que l'aéroport de départ.

Le troisième volet porte sur la résolution d'un des trois modèles de la partie précédente, soit celui où les boucles sont connues d'avance et les échanges sont comptabilisés avec un coût associé. Deux méthodes de résolution sont proposées. La première utilise la décomposition de Benders. Le problème maître trouve l'affectation initiale et chaque sous-problème, un par scénario de demande, effectue une réaffectation et renvoie l'information au problème maître sous la forme d'une coupe d'optimalité. Cette méthode a l'avantage de pouvoir supporter un grand nombre de scénarios, mais la convergence de la résolution entre le problème maître et les sous-problèmes peut nécessiter beaucoup d'itérations et les contraintes d'intégralité complexifient la résolution.

La deuxième méthode est une résolution directe par énumération implicite (branch-and-bound) en utilisant le solveur CPLEX. Cette méthode permet d'itérer avec le modèle de flot de passagers pour mettre à jour les revenus d'une façon semblable à ce qui est fait dans Dumas *et al.* (2009) et qui est décrite dans le premier volet. Bien que cette méthode ne puisse pas utiliser autant de scénarios pour obtenir un temps de calcul raisonnable, elle en a un nombre suffisant pour capturer les variations de la demande et, pour les jeux de données testés, un plus grand nombre de scénarios n'apporte pas de changement significatif à la solution obtenue.

Le reste de la thèse est divisé comme suit. Le prochain chapitre présente une revue de la littérature pour le problème d'affectation des types d'avion aux vols et pour les modèles de flot de passagers. Le chapitre 2 présente plus en détail le corps principal de la thèse et le lien entre les différentes parties. L'article *Airline fleet assignment with internal passenger flow reevaluations* est présenté au chapitre 3. Celui-ci présente un algorithme de résolution pour le FAP faisant appel au modèle de flot de passagers en cours de résolution. Différents modèles et méthodes de résolution pour résoudre un FAP intégrant des scénarios de demande et la possibilité de réaffectation sont décrits au chapitre 4. Le chapitre 5 présente la phase d'expérimentations et les résultats obtenus pour un modèle décrit au chapitre précédent. Nous terminons la thèse par une discussion générale et une conclusion au chapitre 6.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre propose une revue de littérature des travaux pertinents dans le domaine de l'optimisation dans le transport aérien. Nous nous concentrons sur les deux problèmes comportant un intérêt pour cette recherche soit l'affectation des types d'avion aux vols et les modèles de flot de passagers. Pour plus d'informations sur le sujet, les articles synthèses de Klabjan (2005) et Sherali *et al.* (2006) peuvent être consultés.

#### 1.1 Affectation des types d'avion aux vols

Le problème d'affectation des types d'avion aux vols est un sujet d'un grand intérêt tant au niveau académique que dans l'industrie aérienne depuis des dizaines d'années. Du point de vue académique, le problème est suffisamment simple pour être résolu sous certaines hypothèses, mais suffisamment complexe pour qu'aucune solution ne fasse l'unanimité et que plusieurs chercheurs y travaillent encore aujourd'hui. Gu *et al.* (1994) démontrent d'ailleurs que le problème est NP-difficile lorsque le nombre de flottes est plus grand que deux et que le saut d'intégrité grandit à mesure que le nombre de types d'avion augmente. Certains chercheurs tentent de mieux modéliser les revenus, d'autres d'améliorer la robustesse de la solution ou tenir compte d'autres étapes de la planification telles que l'élaboration de l'horaire de vols, la construction des itinéraires d'avion et les rotations d'équipage ou encore de mieux modéliser le comportement des passagers. Dans l'industrie, les progrès des dernières décennies auraient permis à certaines compagnies aériennes d'augmenter leur profit de plus de 100 millions de dollars par année (Abara, 1989; Subramanian *et al.*, 1994). Ces dernières ont donc un grand intérêt à ce que les recherches se poursuivent. Cette section passe en revue le développement du modèle de base pour le FAP et examine différentes extensions possibles.

Abara (1989) présente une des premières applications d'un modèle d'affectation des types d'avion basée sur son travail à American Airlines. Il développe un modèle linéaire en nombres entiers avec des contraintes de couverture de vols, de conservation de flot des avions et de disponibilité des avions de chaque type. Un réseau de connexions est utilisé, ce qui spécifie les connexions entre les segments de vol. Ceci a l'avantage de modéliser la route de chaque avion, mais l'inconvénient de contenir beaucoup de variables. L'auteur restreint le nombre de connexions possibles afin de contrôler la taille du problème. L'objectif principal est de maximiser les profits pour la compagnie aérienne où le revenu de chaque segment de vol est supposé indépendant.

Subramanian *et al.* (1994) décrivent l'implantation d'un modèle d'affectation des types d'avion aux vols chez Delta Air Lines. Leur modèle s'appuie sur un réseau espace-temps. Ce type de réseau contient moins d'arcs qu'un réseau de connexions, mais il est impossible de distinguer entre les avions d'une même flotte. En plus des contraintes obligatoires pour résoudre le problème (couverture des vols, conservation de flot, disponibilité des avions), les auteurs s'intéressent à d'autres aspects pour permettre l'implantation de la solution trouvée en pratique tels que l'ajout de contraintes de maintenance et des contraintes sur les périodes de repos des pilotes ainsi que sur le nombre d'heures de vol qu'ils peuvent travailler. Une méthode de points intérieurs est utilisée pour résoudre la relaxation linéaire du modèle puis les variables binaires égales à un sont fixées afin de réduire la taille du problème. Le problème restant est alors résolu par séparation et évaluation progressive.

Hane *et al.* (1995) présentent ce qui est maintenant considéré comme le modèle de base pour le problème journalier d'affectation des types d'avion. Ils décrivent le problème comme un modèle de flot de type multicommodité dans un réseau espace-temps où chaque type d'avion représente une commodité. Un sous-réseau est construit pour chaque type d'avion avec des lignes de temps à chaque station. Les lignes de temps sont circulaires et représentent une période de 24 heures. Chaque arrivée ou départ est représenté par un nœud, ceux-ci étant reliés par des arcs d'attente au sol. Chaque vol est représenté par un ensemble d'arcs, un pour chaque flotte pouvant être affectée à ce vol. Un arc de retour reliant le dernier événement de la journée au premier complète la ligne de temps et assure une solution réalisable de jour en

jour.

Leur réseau se traduit par un modèle linéaire en nombres entiers où l'objectif est de minimiser le coût global d'affectation des types d'avion aux vols. Ce coût comprend une portion fixe selon l'affectation choisie, une portion variable en fonction du nombre de passagers estimés, des coûts de débordement pour les passagers refusés sur un vol et des revenus provenant de la récupération de passagers provenant d'autres vols. Un débordement (*spill* en anglais) se produit lorsque le nombre de passagers désirant prendre un vol excède la capacité de l'avion. Lorsque les passagers refusés changent leur choix pour prendre un vol de la même compagnie aérienne, nous parlons de récupération (*recapture* en anglais). Les effets de débordement et de récupération sont calculés indépendamment pour chaque segment de vol plutôt que par itinéraire. Les contraintes sont les mêmes que celles proposées par Abara (1989) soit la couverture des vols, la conservation de flot et la disponibilité des avions.

Les auteurs proposent une méthode d'agrégation de nœuds afin de réduire la taille du réseau. Comme le réseau cherche uniquement à préserver le flot des avions et s'assurer que les connexions sont bien faites, il n'est pas nécessaire d'avoir un nœud pour chaque arrivée pourvu qu'il n'y ait aucun départ entre-temps. Le même principe peut s'appliquer pour les départs. Ainsi, chaque nœud couvre un intervalle de temps qui débute par une suite d'arrivées consécutives suivies de départs consécutifs. Le modèle est testé sur un horaire d'une journée pour une flotte moyen-courrier composé de 2500 vols desservant 150 villes et effectués par 11 types d'avion. Plusieurs méthodes de résolution sont étudiées dont les algorithmes primal et dual du simplexe et une méthode de points intérieurs. L'algorithme dual du simplexe avec le critère de sélection *steepest edge*, utilisé conjointement avec la perturbation des coûts, l'agrégation du modèle et la fixation de variables, s'avère le plus performant avec un saut d'intégrité maximal de 0,02 % et un temps de résolution moyen inférieur à une heure.

Bien que le modèle proposé soit résolu efficacement, trop de facteurs sont négligés pour qu'il soit implanté tel quel en pratique. Nous avons déjà fait état à la section précédente de recherches intégrant une certaine flexibilité à l'horaire des vols par l'ajout de fenêtres de temps. D'autres contraintes concernant l'entretien périodique des avions, la conception des

routes d'avion et l'horaire des équipages sont généralement ajoutées. Elles servent à s'assurer de la faisabilité de la solution aux étapes de planification subséquentes et d'empêcher de mauvaises solutions d'apparaître.

### 1.1.1 Affectation des types d'avion aux vols avec modification de l'horaire

Les décisions les plus importantes qu'une compagnie aérienne doit prendre concernent la conception de l'horaire de vols. La complexité et la taille des problèmes impliqués expliquent pourquoi peu de recherches ont été faites sur le sujet et que plusieurs compagnies aériennes développent encore leur horaire de vols manuellement avec peu d'optimisation. Une grande partie des recherches actuelles partent d'un horaire existant en ayant comme objectif de l'améliorer, ce qui permet d'avoir un modèle plus facile à optimiser. Ceci est tout de même réaliste puisque les marchés exploités et la flotte d'avions d'une compagnie aérienne ne varient pas beaucoup d'une année à l'autre.

Lohatepanont et Barnhart (2004) tentent de résoudre un problème intégrant l'élaboration de l'horaire de vols et l'affectation des types d'avion. En partant d'un horaire précédent, ils considèrent une liste de vols obligatoires et une liste de vols optionnels que le modèle décide de couvrir ou non. Ces vols ont un horaire fixe et doivent être fournis en entrée au modèle. Il y a donc une certaine subjectivité sur le choix des vols optionnels par l'opérateur. Les auteurs utilisent le modèle de répartition des passagers de Barnhart *et al.* (2002) pour tenir compte des effets de débordement et de récupération. La profitabilité d'un vol est étudiée en considérant sa demande en passagers et son taux de récupération. La demande en passagers est calculée par itinéraire sans les contraintes de capacité sur les vols (*unconstrained itinerary demand*) et des termes correctifs sont ajoutés pour évaluer l'influence de l'annulation d'un itinéraire sur un autre, c'est-à-dire lorsqu'au moins un segment de vol de l'itinéraire est annulé. Seuls les termes correctifs de premier ordre sont inclus dans le modèle, mais les auteurs admettent que jusqu'à  $n$  ordres de termes correctifs seraient nécessaires lorsque  $n$  vols optionnels sont supprimés pour avoir une meilleure estimation de la demande.

Une faille majeure de leur modèle concerne la répartition des passagers. Les auteurs sup-

posent un contrôle total de la compagnie aérienne, qui peut décider de refuser des passagers sur des itinéraires moins profitables pour garder des places pour les passagers sur des itinéraires plus rentables. Elle contrôle également le débordement d'un vol en offrant un seul itinéraire alternatif aux passagers refusés. En pratique, la forte compétition entre les différentes compagnies et le grand choix d'itinéraires pour la majorité des marchés empêchent une compagnie aérienne d'exercer un contrôle aussi important sur ses passagers sans voir sa part de marché grandement diminuée. Ceci sera vu plus en détail à la section sur les modèles de flot de passagers. Les auteurs résolvent leur modèle par un algorithme itératif en utilisant la génération de colonnes, un algorithme d'énumération implicite (*branch-and-bound* en anglais) et en ajustant les termes correctifs de demande à chaque itération.

Dans son mémoire de maîtrise, Ndikumagenge (2004) présente un modèle de réoptimisation d'un horaire de vols. Pour ce faire, il analyse la solution du FAP pour déceler des segments de vol non rentables et proposer des annulations ou des fusions de vols. Pour décider de la rentabilité d'un vol, l'auteur présente une mesure de bénéfice pondéré  $B_v^k$  qui estime le profit ou la perte par passager par heure de vol si un avion de type  $k$  effectue le vol  $v$ . À partir de cette mesure, une analyse globale permet d'identifier rapidement les vols non rentables pour la compagnie aérienne. Une analyse détaillée par paire de villes permet ensuite de proposer différents scénarios d'annulations ou de fusions de vols. Ndikumagenge présente un modèle de répartition des passagers et d'attraction des vols afin d'estimer la nouvelle demande en passagers à la suite d'une annulation ou une fusion de vols. Il réoptimise alors le FAP en utilisant une extension du modèle de Hane *et al.* (1995) qui permet d'annuler ou fusionner des vols.

Le modèle de flot de passagers utilisé pose comme hypothèse que le seul critère d'attraction d'un vol est son heure de départ et il ne tient pas compte de la concurrence. La demande globale pour un marché donné reste donc inchangée qu'il y ait des annulations ou fusions de vols ou non. De plus, si deux vols consécutifs sont fusionnés, seuls les vols précédents et suivants de la même paire de villes auront leur demande en passagers influencée. Ceci est une conséquence d'utiliser un modèle par segment de vol plutôt que par itinéraire. En pratique, l'annulation d'un segment de vol Montréal-Toronto peut influencer le marché Montréal-Vancouver en sup-

primant un itinéraire qui utilisait ce segment de vol. Ceci aura pour conséquence d'influencer la répartition des passagers sur plusieurs segments de vol des différents itinéraires du marché Montréal-Vancouver.

Afin de simplifier la complexité des calculs, plusieurs chercheurs utilisent différentes méthodes heuristiques pour résoudre leur modèle. Ces méthodes ont l'avantage d'être généralement plus simples, plus rapides et peuvent supporter un modèle plus complexe que les méthodes exactes. Elles sont cependant moins précises et ne garantissent pas l'optimalité de la solution trouvée. En 1980, Soumis *et al.* présentent un modèle où les variables de décisions sont l'horaire de vol, la fréquence des vols et l'affectation des types d'avion. Ils analysent l'interaction entre le comportement des passagers et l'affectation des types d'avion. Leur modèle trouve le flot de passagers le plus profitable pour la compagnie aérienne plutôt que de supposer le libre choix des passagers selon leur préférence. Leur modèle est résolu par une méthode heuristique basée sur l'algorithme de Frank-Wolfe (Frank et Wolfe, 1956).

Burke *et al.* (2009) étudient un modèle d'optimisation à objectifs multiples dont le but est d'améliorer la robustesse et la flexibilité de l'horaire de vols. Plus précisément, ils cherchent à maximiser le nombre possible d'échanges d'avions et minimiser la probabilité de retard des vols. Pour ce faire, les auteurs permettent une modification de l'heure de départ des vols et certains changements dans les rotations d'avion en gardant fixe l'affectation des types d'avion. L'heuristique utilisée est un algorithme de type génétique.

Ahuja *et al.* (2002) proposent un modèle intégrant l'affectation des types d'avion aux vols et la sélection des vols avec escales. Un vol avec escales (*through flight* en anglais) est composé de plusieurs segments de vol empruntés par le même avion. Les passagers sont généralement prêts à payer plus cher pour ces vols puisqu'ils n'ont pas à changer d'avion. Une heuristique de recherche à grand voisinage est développée pour améliorer progressivement une solution initiale non optimale.

Plusieurs recherches ont été faites sur l'affectation des types d'avion en permettant de varier l'heure de départ des vols à l'intérieur d'une fenêtre de temps. Ceci permet généralement une meilleure affectation des types d'avion sans trop influencer la demande en passagers.

Desaulniers *et al.* (1997) résolvent simultanément le problème journalier d'affectation des types d'avion et celui de la construction des itinéraires d'avion avec des fenêtres de temps pour chaque vol. Ces fenêtres de temps sont les mêmes pour tous les vols et la demande en passagers ne varie pas à l'intérieur des fenêtres de temps. Rexing *et al.* (2000) présentent un modèle semblable avec des fenêtres de temps discrétisées. Il en résulte que le modèle est une généralisation du modèle de base pour l'affectation des types d'avion de Hane *et al.* (1995), celui-ci pouvant être vu comme ayant des fenêtres de temps de longueur nulle, et que les vols peuvent avoir des fenêtres de temps de longueur variable.

D'autres recherches ont été faites sur le sujet, notamment par Bélanger *et al.* (2006a) qui font varier la demande en passagers lorsque le temps entre deux vols sur le même marché est trop court. Lan *et al.* (2006) tentent de minimiser les délais et perturbations ainsi que les connexions ratées par les passagers en construisant des itinéraires d'avion plus robustes et en modifiant l'heure de départ des vols. Ioachim *et al.* (1999) résolvent le problème hebdomadaire d'affectation des types d'avion aux vols, plutôt que sur un horizon quotidien. Des contraintes de synchronisation d'horaires sont intégrées pour assurer que les vols de même numéro partent à la même heure chaque jour. Mercier et Soumis (2007) résolvent simultanément la construction des itinéraires d'avion et la confection des horaires d'équipage en permettant une modification à l'heure de départ des vols. L'objectif est d'obtenir des routes d'avion ayant un horaire plus compatible avec celui de l'équipage pour permettre une diminution des coûts.

### **1.1.2 Affectation des types d'avion aux vols avec contraintes supplémentaires**

Clarke *et al.* (1996) présentent une extension du modèle de Hane *et al.* (1995) dans lequel certains aspects concernant la maintenance des avions et la conception des horaires d'équipage sont traités. Des opportunités de maintenance sont ajoutées sous forme de contraintes qui exigent qu'une fraction de la flotte passe la nuit dans une station de maintenance. Une autre méthode proposée ajoute des arcs de maintenance, semblable aux arcs de vols. Les auteurs cherchent également à améliorer l'horaire des pilotes en minimisant le nombre de

nuits solitaires, ces dernières ayant un coût élevé pour la compagnie aérienne. Ces nuits surviennent lorsqu'un équipage arrive le soir à une station qui n'est pas sa base et que l'avion avec lequel il est arrivé repart avant que l'équipage ait eu un repos suffisant (généralement onze heures). S'il n'y a aucune autre activité à cette station, l'équipage devra attendre au surlendemain pour repartir. Clarke *et al.* ajoutent des arcs de coût négatif de durée égale au repos minimal pour inciter les affectations évitant les nuits solitaires. Une autre méthode est d'ajouter un vol de mi-journée à cette station pour permettre à l'équipage de repartir avec ce vol. Il faudra tout de même deux équipages, mais le temps à l'extérieur de la base sera réduit.

Plusieurs facteurs tels que les conditions météorologiques, la congestion aérienne ou un bris mécanique peuvent entraîner des retards ou des annulations de vols. Ces perturbations dans l'horaire de vols peuvent avoir de graves conséquences si elles provoquent une réaction en chaîne, entraînant de nouvelles perturbations dans l'horaire. Dans son mémoire de maîtrise, Ait-Benali (2006) cherche à améliorer la robustesse de l'horaire de vols face aux conditions météorologiques. Elle propose un modèle pour résoudre le FAP en utilisant une structure en pétales de fleur dont le principe général est que des vols d'un pétale peuvent être annulés sans influencer le reste du réseau. Smith et Johnson (2006) proposent de limiter le nombre de flottes desservant une station pour augmenter la flexibilité de l'horaire et diminuer les frais d'exploitation. Rosenberger *et al.* (2004) présentent un modèle dans un réseau en étoile qui limite l'influence des perturbations en ayant des cycles de vols courts. Un cycle est une suite de segments de vol débutant et se terminant au même aéroport. Lorsqu'un vol est retardé ou annulé, tous les vols de son cycle sont généralement affectés, d'où l'intérêt de garder les cycles relativement courts. Le modèle suppose cependant une durée fixe pour un vol donné, peu importe le type d'avion y étant affecté.

Une autre approche pour améliorer la formulation du FAP est de s'intéresser à la fonction objectif du modèle. L'objectif général est de maximiser les profits anticipés qui sont influencés par plusieurs facteurs. La complexité de bien modéliser les revenus associés à chaque vol amène la majorité des chercheurs à simplifier cette partie de la fonction objectif. En effet, une bonne modélisation implique une estimation des revenus par itinéraire plutôt que par

segment de vol afin de bien tenir compte des effets de débordement et de récupération. Ceci nécessite un modèle de flot de passagers qui permet de déterminer en fonction des vols offerts et de la demande, comment les passagers vont se répartir parmi les itinéraires.

Barnhart *et al.* (2009) cherchent à améliorer la formulation présentée dans Barnhart *et al.* (2002). Ils proposent un modèle de sous-réseau pour l'affectation des types d'avion aux vols. Les vols sont répartis en sous-réseaux mutuellement exclusifs et les effets de débordement et de récupération sont supposés indépendants pour chaque sous-réseau. La formulation utilise des variables de décisions composites représentant l'affectation simultanée de types d'avion à des vols de plusieurs sous-réseaux. Un algorithme heuristique est proposé pour résoudre le modèle. Les tests effectués rapportent une augmentation potentielle des profits de 45 millions de dollars par année par rapport au modèle de base pour une compagnie aérienne majeure aux États-Unis.

Dumas *et al.* (2009) améliorent la formulation des revenus en intégrant l'information provenant du modèle de flot de passagers développé dans Dumas et Soumis (2008). Ce modèle calcule la répartition des passagers par itinéraire en tenant compte des effets de débordement et de récupération et ne contrôle pas les passagers à l'avantage de la compagnie aérienne. Puisque la demande en passagers influence le type d'avion choisi pour chaque vol, étant donné les capacités différentes de chaque type, et que l'affectation des types d'avion aux vols influence la répartition des passagers, étant donné les effets de débordement et de récupération, les auteurs proposent une méthode itérative pour pallier ce problème. L'algorithme présenté résout une première fois le problème d'affectation avec une estimation des revenus par segment de vol, puis utilise la solution pour résoudre le modèle de flot de passagers. Ce dernier donne alors une nouvelle estimation des revenus qui est utilisée pour répéter le processus. Une version locale du modèle de flot de passagers, limitée à un sous-réseau, est utilisée pour réduire le temps de calcul. Les tests montrent une augmentation des profits, exprimés en pourcentage des frais d'exploitation, par rapport au modèle de base allant de 0,3 à 0,9 %. Cependant, une dizaine d'itérations sont nécessaires pour arriver à cette amélioration ce qui multiplie le temps de calcul par un facteur de 10 ou plus.

### 1.1.3 Réaffectation des types d'avion aux vols lors du processus de réservation

La solution trouvée en résolvant le FAP est généralement répétée chaque jour ou chaque semaine au cours d'une saison avec très peu de modifications. Une réaffectation des types d'avion lorsque le processus de réservation des passagers est entamé peut causer des problèmes dans les étapes subséquentes de la planification des opérations, notamment la maintenance des avions et les horaires d'équipages. Par contre, les pilotes sont souvent qualifiés pour plusieurs types d'avion, soit ceux ayant la même configuration de cockpit qui forment une famille de types d'avion. Faire une réaffectation de types d'avion à l'intérieur d'une même famille engendre beaucoup moins d'inconvénients au niveau des équipages. En conséquence, les recherches actuelles sur le sujet se concentrent sur la réaffectation de types d'avion appartenant à la même famille.

Berge et Hopperstad (1993) sont les premiers à développer l'idée d'une révision systématique de l'affectation des types d'avion. Ils introduisent le concept de *Demand Driven Dispatch* (D<sup>3</sup>) qui consiste à changer dynamiquement l'affectation (dans une même famille d'avions) à différents moments planifiés avant la journée des opérations en utilisant les plus récentes prévisions et les réservations faites jusqu'à présent. La demande en passagers est donnée par segment de vol et classe tarifaire et elle suit une distribution normale. Il est supposé qu'il n'y a pas de récupération des passagers victimes de débordement. Leur recherche rapporte une amélioration des profits de 1 à 5 %. Talluri (1996) propose une amélioration en développant un algorithme qui garantit de trouver un échange sur une seule journée, s'il en existe un. Il est cependant limité à deux types d'avion seulement.

Jarrah *et al.* (2000) utilise un modèle de réaffectation pour modifier l'affectation des types d'avion progressivement. Leur objectif est de générer plusieurs solutions quasi-optimales contenant un certain nombre d'échanges. Des coupes sont ajoutées au problème chaque itération pour exclure la solution précédente et assurer que la prochaine contienne un sous-ensemble strict de celle-ci. Bish *et al.* (2004) étudient les bénéfices d'une approche appelée *Demand Driven Swapping* (DDS) qui échange les types d'avion sur des boucles compatibles,

c'est-à-dire des allers-retours avec le même aéroport d'origine et de destination et des heures de départ et d'arrivée semblables. Ils examinent deux stratégies différentes : une stratégie d'échanges limités, où les échanges sont faits une seule fois 4 à 6 semaines avant la journée des opérations, et la stratégie d'échanges multiples, où un échange peut être révisé plusieurs fois en utilisant la plus récente mise à jour des prévisions de la demande. Leur étude montre que la stratégie d'échanges limités est attrayante lorsque la différence moyenne entre la demande de boucles compatibles est grande et que la variance de la demande est faible, sinon la stratégie d'échanges multiples est préférable.

Sherali *et al.* (2005) proposent un modèle de réaffectation régi par la demande (*demand driven reflighting*, DDR) pour une unique famille d'avions. Ils considèrent une demande par itinéraire déterministe en incorporant la formulation du modèle de répartition des passagers comme dans Barnhart *et al.* (2002). Leur approche suppose un contrôle de la compagnie aérienne sur le comportement des passagers et qu'il n'y a pas de récupération des passagers débordés.

Jiang (2006) et Warburg *et al.* (2008) présentent un modèle pour modifier l'heure de départ des vols et réaffecter les types d'avion durant le processus de réservation pour mieux tenir compte de la variation de la demande en passagers. Le modèle de répartition des passagers utilisé est celui de Barnhart *et al.* (2002) en enlevant la récupération. Le modèle est un programme linéaire mixte résolu à l'aide de CPLEX avec une méthode de séparation et évaluation progressive. Warburg *et al.* (2008) montrent que la réaffectation de la flotte est majoritairement responsable de l'augmentation des profits et que plus la réoptimisation de l'horaire se fait proche du jour d'opération, plus les profits sont élevés. Jiang et Barnhart (2009) améliorent la formulation de Jiang (2006). Ils supposent une récupération parfaite des passagers entre des itinéraires d'un même marché (même origine et destination, heures de départ et nombre d'escales similaires) et aucune récupération entre des itinéraires de marchés différents. Ils rapportent une amélioration des profits de 2,28 % sur un horaire hebdomadaire comparé à un cas statique en utilisant les moyennes historiques pour prédire la demande future des passagers.

#### 1.1.4 Affectation des types d'avion aux vols en tenant compte des réaffectations possibles

Les recherches précédentes ont en commun d'effectuer une réaffectation des types d'avion à partir d'une affectation initiale provenant de la résolution d'un FAP standard. Cette étape est faite près de la journée des opérations alors qu'il est trop tard pour recommencer le processus de planification en résolvant le FAP à nouveau. Cependant, cette affectation initiale ne tient pas compte qu'il y aura d'éventuelles réaffectations ce qui rend le processus dans son ensemble sous-optimal. Des recherches se sont penchées sur ce problème en proposant des modèles pour le problème d'affectation des types d'avion aux vols qui tiennent compte des réaffectations possibles.

Sherali et Zhu (2008) développent davantage le travail de Sherali *et al.* (2005) en présentant une approche en deux étapes où la première étape effectue une affectation initiale au niveau des familles d'avions et la deuxième étape effectue l'affectation finale des types d'avion sur chaque segment de vol. Plusieurs scénarios sont utilisés pour refléter la nature stochastique de la demande. Un algorithme basé sur la méthode L-shaped est utilisé pour résoudre le modèle et ils rapportent une augmentation des profits entre 1,1 et 1,7 % comparativement à un modèle d'affectation déterministe.

Pilla *et al.* (2008) présentent un modèle similaire en deux étapes et utilisent une approche statistique pour estimer la fonction des profits espérés. Pilla *et al.* (2012) étendent cette recherche en développant un algorithme utilisant une méthode de plans coupants pour optimiser le modèle en deux étapes. Ils rapportent des temps de résolution plus rapides par rapport à la méthode L-shaped et des profits similaires.

Jiang et Barnhart (2013) développent un design d'horaire robuste pour un réseau en étoile sans banques avec l'objectif que la solution initiale facilitera les modifications aux heures de départ et la réaffectation des types d'avion effectuée par le modèle de réoptimisation de Jiang et Barnhart (2009). Le modèle cherche à maximiser le nombre d'itinéraires potentiels en fonction de leurs revenus respectifs en permettant une certaine flexibilité sur l'heure de départ des vols. Chaque segment de vol a 7 copies à 10 minutes d'intervalle allant de -30 à +30

minutes de décalage par rapport à l'heure de départ originale. Selon la copie de chaque vol choisie, certains itinéraires, qui n'étaient pas réalisables (temps de connexion trop court ou trop long), peuvent le devenir et ainsi contribuer à la fonction objectif. Les revenus de chaque itinéraire sont les mêmes pour chaque copie des segments de vol qu'il contient et chaque type d'avion et ce peu importe le sous-ensemble des itinéraires potentiels qui sont offerts. Le coût des avions est ignoré dans le modèle et tous les types d'avion sont supposés avoir des vitesses de croisière et des temps minimums de connexion semblables. Ils rapportent une augmentation des profits par rapport à leurs travaux précédents, l'horaire robuste performant mieux lorsque la variabilité de la demande augmente.

## 1.2 Modèles de flot de passagers

Il existe différents modèles de flot de passagers, mais très peu sont fidèles à la réalité. Les modèles de flot de passagers peuvent être classés en deux types d'optimisation : système ou utilisateur. Pour les modèles du premier type, le flot des passagers est influencé par la compagnie aérienne, tandis que les modèles au profit de l'utilisateur supposent le libre choix des passagers.

### 1.2.1 Modèle de flot de passagers avec optimisation système

Le modèle de répartition des passagers avec optimisation système a d'abord été développé par Kniker (1998). Ce modèle, appelé *Passenger Mix Model (PMM)*, cherche à maximiser la répartition des passagers au profit de la compagnie aérienne. Le modèle reçoit en entrée la capacité du type d'avion affecté sur chaque vol, la demande en passagers pour chaque itinéraire avec le revenu qui lui est associé et le taux de récupération  $b_p^r$ , c'est-à-dire le pourcentage de passagers débordés de l'itinéraire  $p$  que la compagnie aérienne réussit à rediriger vers l'itinéraire  $r$ . Les variables de décisions du modèle sont le nombre de passagers débordés d'un itinéraire vers un autre. L'objectif du modèle est alors de maximiser les revenus provenant des passagers avec comme contrainte de respecter la capacité des avions sur chaque

vol et de respecter la demande totale d'un itinéraire en ne transférant pas plus de passagers sur d'autres itinéraires que cette demande. L'avantage de ce modèle est qu'il peut être intégré directement à la formulation du FAP (voir Barnhart *et al.*, 2002; Lohatepanont et Barnhart, 2004) puisque toutes les décisions ont le même objectif d'améliorer les profits de la compagnie aérienne. Cette dernière peut répartir les passagers comme bon lui semble, en bloquant certains itinéraires moins rentables et en offrant un seul choix d'itinéraire alternatif aux passagers refusés sur leur premier choix de vol. Ceci est justifié par une gestion dynamique de l'offre (*revenue management* en anglais), mais en pratique la compagnie aérienne n'exerce pas un contrôle aussi grand sur les passagers. Ce type de modèle nous semble irréaliste, car il ne tient pas compte des préférences des passagers et aura tendance à surestimer les revenus.

### 1.2.2 Modèle de flot de passagers avec optimisation utilisateur

Les modèles optimisant au profit de l'utilisateur supposent le libre choix des passagers, ces derniers agissant dans leur propre intérêt. Dans sa thèse de doctorat, Soumis (1978) développe différents modèles de flot de passagers dont un est un modèle d'équilibre tenant compte du débordement et de la récupération (voir Soumis et Nagurney, 1993, pour plus de détails). Dumas (2008) reprend ce modèle, que nous appellerons *Passenger Flow Model (PFM)*, dans sa thèse de doctorat et l'améliore. Le modèle de flot de passagers reçoit en entrée : 1) l'horaire de vols avec l'affectation des types d'avion ; 2) la distribution de la demande en passagers pour chaque itinéraire sous forme de variable aléatoire ; 3) la distribution dans le temps des requêtes de réservation pour chaque itinéraire ; et 4) la proportion du débordement d'un itinéraire attiré par un itinéraire alternatif donné. Il en ressort une estimation de la répartition des passagers sur l'ensemble du réseau. Le PFM est décrit sous la forme d'un système d'équations non linéaires. Plusieurs variables sont impliquées comme la probabilité qu'un itinéraire ou un segment de vol soit plein et l'espérance du nombre de passagers acceptés sur un itinéraire ou un segment de vol. Le système d'équations est résolu par tranche de temps par une méthode de point fixe. À chaque tranche de temps, le processus part d'une solution initiale utilisant l'information de la tranche de temps précédente et la demande par itinéraire pour

cette tranche de temps. La valeur de chaque variable est ensuite mise à jour en utilisant le système d'équations jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt concernant la convergence soit atteint. La solution est trouvée en moins de 10 secondes pour un réseau de 30 000 itinéraires avec une erreur d'environ 0,1 % par rapport à une solution trouvée par simulation, qui prend trois jours de calcul. En plus de traiter des effets de débordement et de récupération, le modèle proposé respecte l'aspect stochastique de la demande et le caractère temporel du processus de réservation sans contrôler le choix des passagers, ce qui le rend plus fidèle à la réalité. Ce modèle sera celui utilisé lors de cette recherche.

### 1.3 Critique de la littérature

Les modèles proposés dans la littérature pour tenir compte de la demande par itinéraire et intégrer les effets de débordement et de récupération supposent généralement un grand contrôle de la compagnie aérienne sur la répartition des passagers. À notre connaissance, Dumas *et al.* (2009) sont les premiers à présenter une approche de résolution du FAP avec une optimisation utilisateur pour déterminer les revenus à l'aide d'un modèle de flot de passagers. Leur algorithme alternant entre la résolution du FAP et celle du modèle de flot de passagers permet d'améliorer les profits, mais il nécessite une dizaine d'itérations ce qui fait augmenter beaucoup les temps de calcul. Afin de résoudre un FAP de grande taille, la fixation de variables est fréquemment utilisée comme méthode heuristique pour résoudre les temps de calcul. À cet égard, le premier volet de la thèse présente un algorithme profitant de la fixation de variables pour réévaluer les revenus à l'aide du PFM lors de la résolution du FAP. Ceci permet de prendre des décisions basées sur une estimation plus récente des revenus et obtenir une solution de qualité équivalente plus rapidement en effectuant moins d'itérations.

Les recherches présentant des approches pour tenir compte de la variabilité de la demande et permettre des changements à l'affectation des types d'avion aux vols sont relativement peu nombreuses. Deux contextes sont à distinguer. Les approches permettant la réaffectation de types d'avion lors du processus de réservation sont intéressantes pour une compagnie aé-

rienne ne voulant pas modifier son processus de planification, mais cherchant tout de même à maximiser ses profits et ayant la possibilité de faire certaines modifications à l'affectation des types d'avion. Le problème dans ce contexte est que la flexibilité pour apporter des changements à l'affectation des types d'avion est généralement assez restreinte puisque l'affectation initiale n'a pas été faite en fonction de ces futures réaffectations. Les gains possibles sont donc relativement faibles.

Le deuxième contexte est de prévoir les réaffectations lors de la planification pour avoir une affectation initiale plus flexible permettant plus de changements de types d'avion afin d'avoir des gains plus importants. Les recherches dans ce contexte utilisent toutes une optimisation système pour estimer les revenus provenant des passagers. Les approches présentées par Sherali et Zhu (2008) et Pilla *et al.* (2012) sont très semblables et présentent les mêmes faiblesses. L'optimiseur peut décider du nombre de passagers exacts à accepter par itinéraire et par scénario pour optimiser les revenus, pourvu que la demande (par itinéraire et par scénario) ne soit pas dépassée et que la somme de tous les passagers acceptés sur les itinéraires empruntant un segment de vol ne dépasse pas la capacité du type d'avion affecté à ce dernier. Cette approche est, à notre avis, irréaliste et aura tendance à surestimer les revenus. L'approche présentée par Jiang et Barnhart (2013) se concentre sur la modification de l'heure de départ des vols pour permettre de nouveaux itinéraires qui étaient sinon irréalisables. Leur approche permet une modification de l'heure de départ de plus ou moins 30 minutes, ce qui semble beaucoup à notre avis dans le contexte actuel où les aéroports ont des plages horaires relativement serrées pour les portes d'embarquement et les heures de décollage et d'atterrissage. Leur approche n'utilise pas de scénarios pour modéliser la variabilité de la demande et utilise également une optimisation système pour optimiser les revenus.

Les deuxième et troisième volets de la thèse cherchent à combler ce manque dans la littérature en présentant différents modèles du FAP qui utilisent des scénarios de demande et tiennent compte des réaffectations éventuelles. Le PFM développé par Dumas et Soumis (2008) est utilisé pour estimer les revenus provenant des passagers afin de préserver leur libre choix ainsi que le caractère temporel du processus de réservation.

## CHAPITRE 2

### ORGANISATION DE LA THÈSE

Cette thèse a pour objectif d'améliorer la qualité et la robustesse de la solution du problème d'affectation des types d'avion aux vols en renforçant la considération de la demande des passagers. Nous avons identifié certains travaux portant sur ce sujet dans la revue de littérature au chapitre précédent et nous avons également soulevé certaines faiblesses des modèles existants par rapport à la demande des passagers. Plusieurs modèles présentent des hypothèses plus ou moins réalistes comme le contrôle de la répartition des passagers par la compagnie aérienne et la profitabilité de leurs solutions en pratique est discutable. D'autres sont plus fidèles à la réalité, mais leurs temps de calcul très élevés rendent leur application difficile. Nous proposons deux approches réalistes intégrant la prise en compte de la demande dans le FAP permettant d'obtenir des solutions utilisables en pratique et de meilleure qualité.

En premier lieu, nous présentons un algorithme permettant de réévaluer les revenus en cours de résolution du FAP à l'aide d'un modèle de flot de passagers. Ceci est une approche améliorée de celle développée par Dumas *et al.* (2009). Plutôt que d'uniquement alterner entre la résolution du FAP et du PFM, nous profitons de la fixation de variables pour mettre à jour les revenus des segments de vol se trouvant dans un voisinage de ceux ayant une variable fixée. Ceci permet de limiter les réévaluations de revenus aux vols étant impliqués dans les dernières décisions prises et ainsi limiter le temps de calcul du PFM. Cet algorithme permet de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir des solutions de qualité équivalente et de résoudre des instances de plus de 10 000 vols. Ceci est présenté au chapitre 3 dans l'article *Airline fleet assignment with internal passenger flow reevaluations*, publié dans la revue *EURO Journal on Transportation and Logistics*.

En deuxième lieu, nous définissons une extension au FAP que nous appelons le problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande. Nous

développons trois variantes de différents niveaux de complexité de ce problème. Sachant que les compagnies aériennes font des changements d'affectation à l'approche de la journée des opérations lorsque la demande observée diffère suffisamment de la demande prévue, l'objectif de cette partie est de trouver une solution permettant de planifier ces échanges de façon optimale afin de maximiser les profits espérés. La solution trouvée doit être assez flexible pour permettre des échanges de types d'avion selon la variation de la demande sans que le reste de l'horaire soit affecté. Ces variations sont représentées par des scénarios de demande et le FAP cherche à maximiser l'espérance des profits sur l'ensemble des scénarios plutôt que de se limiter à la demande moyenne. Nous développons deux méthodes de résolution : une approche directe par CPLEX et une utilisant la décomposition de Benders. Pour ces deux méthodes, le PFM est intégré dans l'algorithme de résolution de façon semblable à la méthode externe décrite au chapitre 3 afin de mettre à jour les revenus et améliorer la qualité de la solution. Le chapitre 4 décrit la définition du problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande ainsi que le développement des modèles et des méthodes de résolution. Le chapitre 5 présente la façon utilisée pour générer des ensembles de scénarios avec relativement peu d'informations ainsi que les expérimentations effectuées sur une des variantes du problème et les résultats obtenus.

Finalement, en guise de conclusion, la dernière partie dresse une synthèse des travaux présentés dans cette thèse et quelques remarques sur les limitations des méthodes proposées ainsi que les améliorations qui pourraient y être apportées.

## CHAPITRE 3

ARTICLE 1 : AIRLINE FLEET ASSIGNMENT WITH INTERNAL  
PASSENGER FLOW REEVALUATIONS<sup>1</sup>

DAVID LASALLE IALONGO

GUY DESAULNIERS

*GERAD and École Polytechnique de Montréal*

## ABSTRACT

The airline fleet assignment problem consists of assigning an aircraft type to each flight leg of a flight schedule in order to maximize the airline expected profit. Most existing fleet assignment models (FAMs) use an estimation of the revenues per flight leg that neglects the interdependency between the flight legs and poorly approximates the spill and recapture of the passengers. To overcome this difficulty, Dumas *et al.* (2009) have introduced an iterative solution method that solves at each iteration a FAM and a passenger flow model (PFM). A solution to the PFM provides the expected number of passengers on each leg, taking into account spill and recapture. These numbers are then used to better estimate the revenues per flight leg for the next iteration. Compared to solving a FAM once, this method yields better quality solutions but requires much larger computational times (by a factor 10 or more). In this paper, we aim at reducing these computational times while preserving solution quality. To do so, we propose to reevaluate periodically the flight leg revenues via the PFM while solving the FAM with a heuristic branch-and-bound algorithm. Computational results obtained for a large-scale real-life network and various demand levels show that the proposed method can reduce the average computational time by a factor of 2 to 3 to obtain solutions of similar quality.

---

1. LASALLE IALONGO, D. and DESAULNIERS, G. (2014). Airline fleet assignment with internal passenger flow reevaluations. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, **3**, 121–142.

**Keywords:** Airline operations planning, fleet assignment, passenger flow, estimated passenger revenues, heuristic branch-and-bound, variable fixing.

### 3.1 Introduction

Planning the operations of an airline is complex and usually divided into several steps (Klabjan, 2005): flight schedule design, fleet assignment, aircraft scheduling including maintenance checks, and crew scheduling. The fleet assignment problem aims at maximizing the productivity of a heterogeneous set of available aircraft. Given that each aircraft type has specific capacity, flying speed, and operating costs, this step determines for each flight leg of a (e.g., weekly) schedule which type of aircraft should operate it so as to maximize the total expected profit, that is, the difference between the expected passenger revenues and the operating costs. In certain cases, cargo revenues may also be considered for a passenger airline, but we assume here, for reasons of conciseness, that this is not the case. On the one hand, the operating costs (fuel costs, crew salaries, etc.) are, in general, well estimated and given by flight leg and aircraft type. On the other hand, the expected revenues depend on the passenger demand by pair of origin and destination, and the distribution of this demand over the itineraries offered by the airline. This distribution is determined by the itineraries desired by the passengers and the seating capacity of the aircraft assigned to each flight leg. The evaluation of this distribution is called the passenger flow evaluation. Observe that there is a cyclic interaction between the fleet assignment problem and passenger flow evaluation: the former problem requires revenues per leg to determine the capacity on each leg, while the latter requires a capacity on each leg to compute their revenues. This cyclic interaction has not been addressed directly in most works on the fleet assignment problem.

Hane *et al.* (1995) have introduced what is considered the basic fleet assignment model (FAM) for the daily fleet assignment problem, that is, when the same flight schedule replicates day after day. This model is a multi-commodity network flow model defined on a time-space network. The revenues are estimated by flight leg. The FAM is solved by a branch-and-bound heuristic that uses the dual simplex method with the steepest edge selection criterion, variable

fixing, and node aggregation in the network. Various extensions of this model integrating certain features of the other steps of the operations planning process have been proposed. Clarke *et al.* (1996) incorporate certain aspects of aircraft maintenance and crew scheduling in the FAM. Desaulniers *et al.* (1997) and Rexing *et al.* (2000) consider time windows on the flight departure times which allow to slightly change the flight schedule. Ahuja *et al.* (2002) integrate the selection of multi-leg flights.

In practice, the flight schedules may differ from day to day, especially between weekdays and weekends. Furthermore, demand on certain flights may fluctuate significantly over the days of the week, justifying different assignments. For these reasons, some studies have considered the weekly fleet assignment problem. Barnhart *et al.* (1998) use a flight string model to solve the aircraft fleet assignment and routing problems simultaneously. Ioachim *et al.* (1999) consider the weekly fleet assignment problem with time windows and schedule synchronization constraints, where the flights with the same flight number (operating on different days) must have the same departure time. As an extension to this work, Bélanger *et al.* (2006a) handle revenues depending on the flight departure times and spacing constraints between the departure times of consecutive flights servicing the same market. Bélanger *et al.* (2006b) add homogeneity constraints that favor as much as possible the assignment of the same aircraft type to the flights with the same flight number. Smith and Johnson (2006) impose station purity, which limits the number of fleet types serving each station, to improve the robustness of the fleet assignment.

All FAMs cited above and earlier ones use an estimation of the revenues per flight leg even though numerous passenger itineraries contain two legs or more. This simplification neglects the interdependency between the flight legs: for instance, a passenger that must travel on a two-leg itinerary may be accepted on the first leg (together with the partial revenue it generates) but rejected on the second. The simplification also approximates poorly the spill and recapture of the passengers. Spilling occurs when the number of passengers willing to take an itinerary exceeds the aircraft seating capacity of one of the leg in this itinerary. When the rejected passengers change their choice for another itinerary of the same airline, we talk about recapture. Clearly, there is a need to estimate the revenues by itinerary rather

than by flight leg. Farkas (1996) and Barnhart *et al.* (2002) have developed the itinerary-based FAM (IFAM) which incorporates these network effects by adding decision variables on the itineraries that the passengers will choose. This system-optimization approach assumes that the airline can control the behavior of the passengers. Barnhart *et al.* (2009) have enhanced the IFAM by considering subnetworks and employing composite decision variables that represent the simultaneous assignment of fleet types to one or more flight legs of different subnetworks. Jacobs *et al.* (2008) incorporate origin and destination (O&D) network effects into the FAM by adding constraints to model the O&D revenue management process. The revenue approximation comes from a network flow model that maximizes the expected revenue subject to the seating capacity of each flight. This model also assumes that the airline controls the passenger behavior. The problem is solved using Benders decomposition. The linear relaxation of the FAM (master problem) is solved first and its solution is used in the network flow model (subproblem) to determine a new revenue approximation to add to the FAM. This process is repeated until the profit estimation from both models are close enough. The FAM is then solved to integrality and the network flow model is solved one more time to estimate the final expected profit. Sherali *et al.* (2006) provide a survey of the revenue modeling approaches for the fleet assignment problem.

The problem of treating the itineraries chosen by the passengers as decision variables arises from the fact that there exists a conflict between the airline's objective (profit maximization) and those of the passengers (cost minimization, schedule preferences, minimum number of legs, etc.). The airline can use yield management tools to influence the passenger flow on its flights, but it cannot fully control the passengers. The fleet assignment problem should rather be viewed as a bilevel optimization problem incorporating the cyclic interaction mentioned above. At the first level, the airline assigns aircraft types to the flight legs which determines the operating costs. At the second level, the passengers choose their itineraries, allowing to compute the revenues.

To our knowledge, Dumas *et al.* (2009) were the first to propose a bilevel optimization approach that involves a user-optimization viewpoint to determine the revenues. Their iterative algorithm relies on a FAM with revenues per leg that are recomputed at each iteration using

the passenger flow model (PFM) developed by Dumas and Soumis (2008). The PFM preserves the stochastic aspect of the demand and the temporal nature of the booking process, without controlling the passenger choice. The FAM is solved through a branch-and-bound heuristic similar to that of Hane *et al.* (1995) and the PFM is tackled by a fixed point method. The algorithm starts by solving the FAM with the traditional estimated revenues per leg. Given the resulting fleet assignment and the associated seating capacity for each leg, it then solves the PFM to reevaluate the expected revenues by itinerary. These revenues are then split by leg to redefine the FAM objective function and the FAM is reoptimized to begin a new iteration. For their computational experiments, Dumas *et al.* (2009) performed ten iterations of this algorithm to generate solutions (for a weekly fleet assignment problem involving more than 5,000 flight legs) yielding additional profits varying between 0.3% and 0.9% of the total operating costs when compared to the profits obtained by solving the traditional FAM only once. The main drawback of this iterative solution process is the large increase in the computational times: on average, they are more than 10 times larger for the tests they realized on instances with around 5,000 flight legs. Their average computational time was about 2.5 hours, which may seem quite reasonable for a planning problem. Note, however, that there exist much larger instances, involving more than 10,000 daily flights and requiring much larger computational times. Furthermore, as stated above, more complex variants of the fleet assignment problem (with time windows, maintenance requirements, . . .) are now tackled using mathematical programming techniques that can be combined with the passenger flow evaluation process. Solving large-scale instances of these variants is highly time-consuming compared to the basic fleet assignment problem. Finally, when designing a flight schedule for a whole season, the corresponding fleet assignment problem is typically solved to check schedule feasibility and estimate expected profits. Given that schedule design is an iterative process that necessitates testing numerous scenarios (e.g., 100 scenarios over a one-month period), too large computational times for solving the fleet assignment problem with passenger flow evaluation limit the number of schedule scenarios that can be tested. For these reasons, we believe that the solution method of Dumas *et al.* (2009) has a limited applicability and should be improved.

In this paper, we revise the solution algorithm of Dumas *et al.* (2009) with the aim of reducing considerably the computational times while preserving solution quality. To do so, we propose to integrate the passenger flow evaluation within the branch-and-bound heuristic used to solve the FAM. The new algorithm consists of solving at each iteration a sequence of linear relaxations of the FAM before starting the branch-and-bound phase. After solving each linear relaxation in this sequence, variables are fixed, a restricted PFM is solved, and revenues are reevaluated. This integration allows a reduction of the number of iterations (and of the computational time) required to obtain solutions of quality comparable to that obtained by Dumas *et al.* (2009). The new algorithm is, thus, more suitable for solving very large-scale FAMs or fleet assignment problems involving complex features.

The paper is structured as follows. In Section 3.2, we summarize the solution algorithm of Dumas *et al.* (2009). In Section 3.3, we describe the proposed integrated algorithm. Computational results obtained on instances derived from a real-world dataset involving 5,180 legs and from a larger network involving more than 10,000 legs are reported in Section 3.4. Concluding remarks are presented in Section 3.5.

### 3.2 The solution method of Dumas *et al.* (2009)

The fleet assignment problem addressed in this paper, the same as in Dumas *et al.* (2009), integrates passenger flow evaluation to compute the passenger revenues and we refer to it as the fleet assignment problem with passenger flow evaluation. It can be stated as follows. Consider a flight network of an airline that spans a set  $S$  of stations (airports). Let  $L$  be the set of flight legs to operate over this network in a cyclic schedule spanning a time period (e.g., a day or a week). Here, cyclic means that the schedule repeats period after period and, thus, the computed solution must also be repeatable period after period. A leg in  $L$  is indexed by  $l$  or more explicitly by  $(o, d, t)$  to indicate that the leg is from origin station  $o$  to destination station  $d$  and departs at time  $t$ . To operate this schedule, aircraft of different types are available. Let  $F$  be the set of aircraft types and  $n_f$  the number of aircraft in fleet  $f \in F$ . Given the various characteristics (capacity, flying speed, autonomy, etc.) of the

aircraft types, only a subset  $F_l$  of types can be assigned to a given leg  $l \in L$ . When fleet  $f \in F_l$  is assigned to leg  $l$ , it incurs an operating cost of  $C_{fl}$ . The seats available in an aircraft are partitioned into fare classes for each leg. We denote by  $W$  the set of fare classes and by  $cap_{fl}^w$ ,  $w \in W$ ,  $l \in L$  and  $f \in F_l$ , the number of seats of class  $w$  on leg  $l$  if operated by an aircraft of type  $f$ . The potential passengers are interested to buy tickets for a set  $I$  of itineraries, where an itinerary is defined by a sequence of legs in  $L$  and a fare class in  $W$  for each leg. For each itinerary  $i \in I$ , we know its demand  $d_i$  (number of passengers requesting it) and the average ticket price  $p_i$  paid by a passenger. To approximate the number of passengers spilled and recaptured on each itinerary, let  $q_{ij}$  be the proportion of passengers on itinerary  $i \in I$  that, when rejected by a lack of capacity, are spilled onto itinerary  $j \in I$ . For a given  $i \in I$ , the sum  $\sum_{j \in I} q_{ij}$  may be less than 100% to model passengers that opt for another airline or another mode of transportation, that is, passengers that do not spill onto another itinerary in  $I$ . The fleet assignment problem with passenger flow evaluation consists of assigning an aircraft type  $f \in F_l$  to each leg  $l \in L$  such that the expected profits (expected revenues minus costs) are maximized, aircraft flow conservation by aircraft type is satisfied in the network at all times (that is, no deadhead flights can be added to balance the schedule), a minimum connection time is allowed between any pair of consecutive legs assigned to the same aircraft, and the number of available aircraft in each fleet is never exceeded. Computing properly the expected revenues involves determining the number of passengers that will buy a ticket on each itinerary  $i \in I$ , that is, evaluating the passenger flow in the network given the seating capacity of the aircraft assigned to each leg.

The ingredients of the solution algorithm proposed by Dumas *et al.* (2009) for solving the fleet assignment problem with passenger flow evaluation and the algorithm itself are discussed in the following paragraphs.

### 3.2.1 Fleet assignment model

The algorithm of Dumas *et al.* (2009) relies on a FAM that is an adaptation of the one introduced by Hane *et al.* (1995). The FAM of Hane *et al.* uses expected revenues per leg

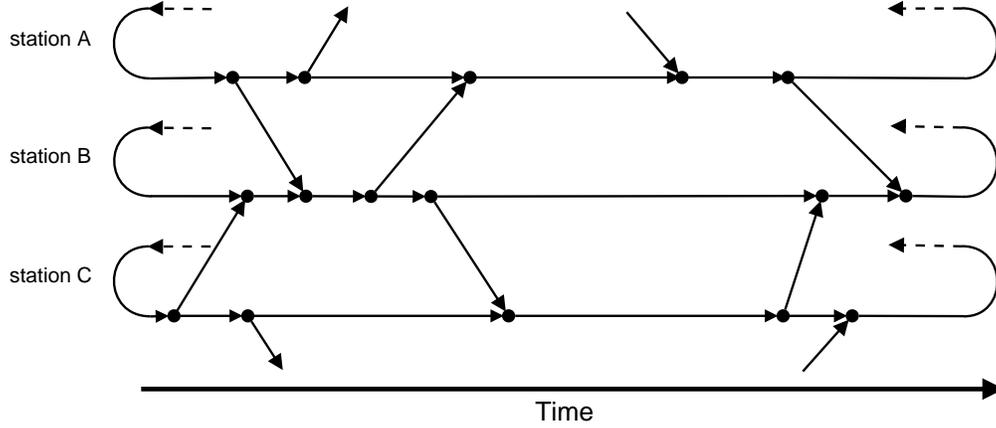


Figure 3.1: Example of a time-space network with three stations

that depend on the aircraft type assigned to each leg. These revenues are approximated from a PFM solution by distributing the expected revenues for each itinerary  $i \in I$  over the legs composing it and in proportion of their flight duration. Instead of considering expected revenues, Dumas *et al.* (2009) proposed to use expected revenue losses with respect to the maximum revenues that could be achieved by assigning a fictitious aircraft of infinite capacity. Let  $RL_{fl}$  be this expected revenue loss on leg  $l \in L$  if an aircraft of type  $f \in F$  is assigned to it. With these revenue losses, the objective function consists of minimizing the sum of the operational costs and the expected revenue losses. This is equivalent to maximizing the total profits.

The FAM is a multicommodity network flow model with side constraints that is defined over a time-space network. In this network (see Figure 3.1), there exists a cyclic timeline for each aircraft fleet  $f \in F$  and each station  $s \in S$ . A potential event corresponding to a departure or an arrival of an aircraft of type  $f$  at station  $s$  at time  $t$  is represented by a node  $\{f, s, t\}$  on the timeline associated with station  $s$  and fleet  $f$ . To ensure the respect of the minimum connection time between two consecutive legs, the arrival time  $t$  includes this minimum time. It is denoted  $\tau_{fodt}$  for a leg  $(o, d, t) \in L$  assigned to an aircraft of type  $f$ . On a timeline, the nodes are ordered in chronological order. The time associated with the node preceding the time of an event occurring at time  $t$  is denoted by  $t^-$ , while that of the next node by  $t^+$ . Assuming that a timeline contains  $n$  nodes numbered from 1 to  $n$ , we let  $t_n^+ = t_1$

and  $t_1^- = t_n$ . Let  $N$  be the set of nodes in this time-space network. As shown in Figure 3.1, the network contains two types of arcs. Flight (diagonal) arcs represent the flight legs, each one linking the departure node of the corresponding leg on the departure station timeline to its arrival node on the arrival station timeline. Ground (horizontal) arcs represent idle periods at stations and link consecutive event nodes on every station timeline (as well as the last event node to the first event node at a station).

To impose aircraft availability per fleet, the aircraft of each fleet used in the solution needs to be counted once at a specific time  $\bar{t}$ . Let  $[t_{sf}, t_{sf}^+]$ ,  $s \in S$  and  $f \in F$ , be the time interval that is delimited by two consecutive events on the timeline associated with station  $s$  and fleet  $f$ , and such that  $\bar{t} \in [t_{sf}, t_{sf}^+]$ . Furthermore, let  $O_f$  be the set of flight legs that can be operated by an aircraft of type  $f$  and whose operating time (including the subsequent minimum connection time) spans  $\bar{t}$ .

The proposed FAM involves two types of decision variables (one type for the flight arcs and the other for the ground arcs). For each leg  $l = (o, d, t) \in L$  and each fleet  $f \in F_l$ , there is a binary variable  $X_{fl}$  (or  $X_{fodt}$ ) that takes value 1 if fleet  $f$  is assigned to leg  $l$  and 0 otherwise. For each fleet  $f \in F$ , each station  $s \in S$  and each time interval  $[t, t^+]$  on the timeline associated with  $f$  and  $s$ , there is a nonnegative variable  $Y_{fstt^+}$  indicating the number of aircraft of type  $f$  on the ground at station  $s$  in this interval. With this notation, the FAM is as follows:

$$\min \quad \sum_{l \in L} \sum_{f \in F_l} X_{fl} (C_{fl} + RL_{fl}) \quad (3.1)$$

$$\text{subject to:} \quad \sum_{f \in F_l} X_{fl} = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.2)$$

$$\sum_{o \in S} \sum_{t': \tau_{fost'}=t} X_{fost'} + Y_{fst-t} - \sum_{d \in S} X_{fodt} - Y_{fstt^+} = 0, \quad \forall \{f, s, t\} \in N, \quad (3.3)$$

$$\sum_{l \in O_f} X_{fl} + \sum_{s \in S} Y_{fst_s f t_s^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (3.4)$$

$$X_{fl} \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in L, f \in F_l, \quad (3.5)$$

$$Y_{fstt^+} \geq 0, \quad \forall \{f, s, t\} \in N. \quad (3.6)$$

The objective function (3.1) aims at minimizing the sum of the operating costs and the expected revenue losses. Constraints (3.2) ensure the assignment of exactly one fleet to each flight leg in  $L$ . Constraints (3.3) enforce flow conservation in the network for each aircraft type. Aircraft availability by fleet is imposed through constraints (3.4). Binary and nonnegativity requirements (3.5)–(3.6) restrict the feasible domains of the variables. Note that constraints (3.3) and (3.5) imply the integrality of the  $Y_{fstt+}$  variables.

The FAM (3.1)–(3.6) can be solved by a branch-and-bound algorithm. To limit the computational times for large-scale instances, variable fixing is often applied at the beginning of the solution process. The details of this algorithm are provided in Section 3.3.

### 3.2.2 Passenger flow model

Dumas and Soumis (2008) developed a PFM that allows the evaluation of the expected revenues yielded by a FAM solution. It aims at determining the expected number of passengers on each itinerary  $i \in I$  taking into account the seating capacity offered by the FAM solution on each flight leg  $l \in L$  and for each fare class  $w \in W$ . The PFM requires the following inputs:

1. The flight schedule  $L$  and the aircraft type assigned to each flight leg  $l \in L$ ;
2. The seating capacity in each fare class  $w \in W$  on each leg  $l \in L$  (a pair  $(w, l)$  of fare class and leg is called an arc by Dumas and Soumis, 2008);
3. The distribution of the passenger demand for each itinerary  $i \in I$  which is seen as a random variable (following, e.g., a normal distribution);
4. The temporal distribution of the booking requests for each itinerary  $i \in I$ ;
5. The proportion  $q_{ij}$  of passengers spilled from a closed itinerary  $i \in I$  to another itinerary  $j \in I$ .

An arc is said to be closed when the number of passengers booked on this arc reaches its capacity and an itinerary is closed when at least one of its arcs is closed. Notice that, in the PFM of Dumas and Soumis (2008), the passengers' objectives (cost minimization,

schedule preferences, minimum number of legs, etc.) are not explicitly modeled. Instead, the distribution of the overall demand of a given market on all its possible itineraries is assumed to be known and is implicitly taken into account in the passenger demand distribution of each itinerary. The PFM is partitioned into disjoint time slices to preserve the temporal aspect of the booking process. In each time slice, it is composed of a system of nonlinear equations that involves several variables. There are variables indicating the expected number of booking requests in that time slice for each itinerary and for each arc, as well as variables providing the probability that an itinerary or an arc is closed during that time slice. The system contains two main sets of equations. The first set expresses, for each itinerary, the expected number of booking requests in the current time slice as a function of its demand, the temporal distribution of its booking requests, the total number of booking requests on the other itineraries, the probability that each itinerary is closed in that time slice, and the proportions of the spilled passengers. The second set of equations relate the probability that an itinerary is closed in the current time slice to the probability that one of its arcs is closed. The other equations allow the computation of various quantities used in the first two sets of equations (for more details, see Dumas and Soumis, 2008). The equation system is solved using a fixed point method (see, e.g., Burden and Faires, 2010, chapter 10) and its solution provides the passenger flow in the network at the end of the time slice.

The solution process of the whole PFM proceeds sequentially, solving the PFM restricted to the time slices in chronological order. In each time slice, the fixed point method starts from an initial solution. In this solution, the total number of booking requests for an itinerary is set to the itinerary demand for that time slice, whereas the probability that an itinerary or an arc is closed is set to its final value in the previous time slice (or to 0 if it is the first slice). The values of the variables are then updated one after the other using the system of equations until a stopping criterion is met. Computational experiments performed by Dumas and Soumis (2008) over different networks showed that 15 iterations is sufficient to provide an acceptable solution. The expected revenues yielded by the FAM solution are derived from the passenger flow at the end of the last time slice.

The PFM solution allows to compute the expected revenues per leg as a function of the aircraft type (seating capacity) assigned to each leg. This information is incomplete for the FAM that requires the expected revenues (or rather the expected revenue losses  $RL_{fl}$ ) for each leg  $l \in L$  and each aircraft type  $f \in F_l$  that can be assigned to it. To obtain all these revenue losses, one can solve a large number of PFM instances, namely, one for each valid combination of leg and aircraft type. This approach would, however, yield very large computational times. To speed up these computations, Dumas *et al.* (2009) introduced a local version of the PFM. On the tested instances, they observed that this version can achieve a speedup factor of 400 without losing too much solution accuracy.

The local version of the PFM is defined for a pair of leg  $l \in L$  and aircraft type  $f \in F$ . It is similar to the full PFM but restricted to a subnetwork denoted  $(A_l, I_l)$ . The set  $I_l$  contains all itineraries involving leg  $l$  as well as all itineraries that can recover passengers from these first itineraries. The set  $A_l$  is composed of all arcs used by at least one itinerary in  $I_l$ . Considering only the itineraries in  $I_l$  is not sufficient to determine the passenger flow on the arcs of  $A_l$ . Indeed, there are other itineraries that involve these arcs or whose demand can spill onto them. Consequently, to take these other itineraries into account, the full PFM is first solved (using the fleet assignment of the FAM solution) and, after each time slice, the following information are kept in memory: for each itinerary  $i \in I$ , the expected number of passengers accepted and rejected in the time slice and, for each arc, the probability that it is closed. When solving the local PFMs thereafter, these stored information are used to preassign passengers to their corresponding itineraries.

The PFM can be defined and solved even if the FAM solution is fractional. Indeed, the FAM solution provides seating capacity per fare class and flight leg. When a FAM solution assigns a convex combination of aircraft types to a leg, its seating capacity per fare class can be computed as the corresponding convex combination of the capacities of these aircraft types. We exploit this possibility in the method proposed for solving the fleet assignment problem with passenger flow evaluation.

### 3.2.3 Fleet assignment with external PFM reevaluation

The iterative procedure used by Dumas *et al.* (2009) for solving the FAM with an external reevaluation of the revenues by the PFM is summarized in Figure 3.2. More precisely, a first evaluation of the revenues per leg is performed to compute the initial vector of expected revenue losses  $RL^0$ . For a leg  $l \in L$  and an aircraft type  $f \in F_l$ , the component  $RL_{fl}^0$  of this vector is computed as the expectation of the demand that exceeds the capacity of an aircraft of type  $f$  multiplied by a weighted average of the ticket price paid by the passengers spilled from the itineraries containing leg  $l$ . The iterative procedure starts at iteration 0 that serves as the reference point to compare the results. At iteration  $k \geq 0$ , the following steps are performed:

- Using the vector  $RL^k$  in its objective function (3.1), the FAM (3.1)–(3.6) is solved by a commercial mixed integer programming solver (CPLEX in our case). The solution process can be stopped prematurely whenever a feasible solution is found and its value is close enough to the current lower bound on the optimal value, that is, if it respects a tolerance on the optimality gap. The computed fleet assignment solution is denoted  $X^k$ .
- The full PFM is executed for the solution  $X^k$  and the numbers of booking requests and of spilled passengers for each itinerary and each time slice are kept in memory. This step allows to compute the expected revenues of the current solution  $X^k$  and, therefore, the value of this solution.
- The stopping criterion is then checked. In Dumas *et al.* (2009), the iterative process stops whenever a maximum number of iterations is reached.
- When the process is not halted, it continues by reevaluating the revenue losses per leg according to the current fleet assignment solution  $X^k$ . To do so, the local PFM is first executed for each leg  $l \in L$  and each fleet  $f \in F_l$ . In this execution, the numbers of booking requests and of spilled passengers per time slice for each itinerary that is not part of the subnetwork of leg  $l$  (information stored in memory from the last solution of the full PFM) are fixed as constant. The revenue loss vector obtained from these computations is denoted  $\overline{RL}^{k+1}$ . Rather than using directly this vector to redefine the objective function of FAM, Dumas *et al.* (2009) use a convex combination of this vector and the previous one

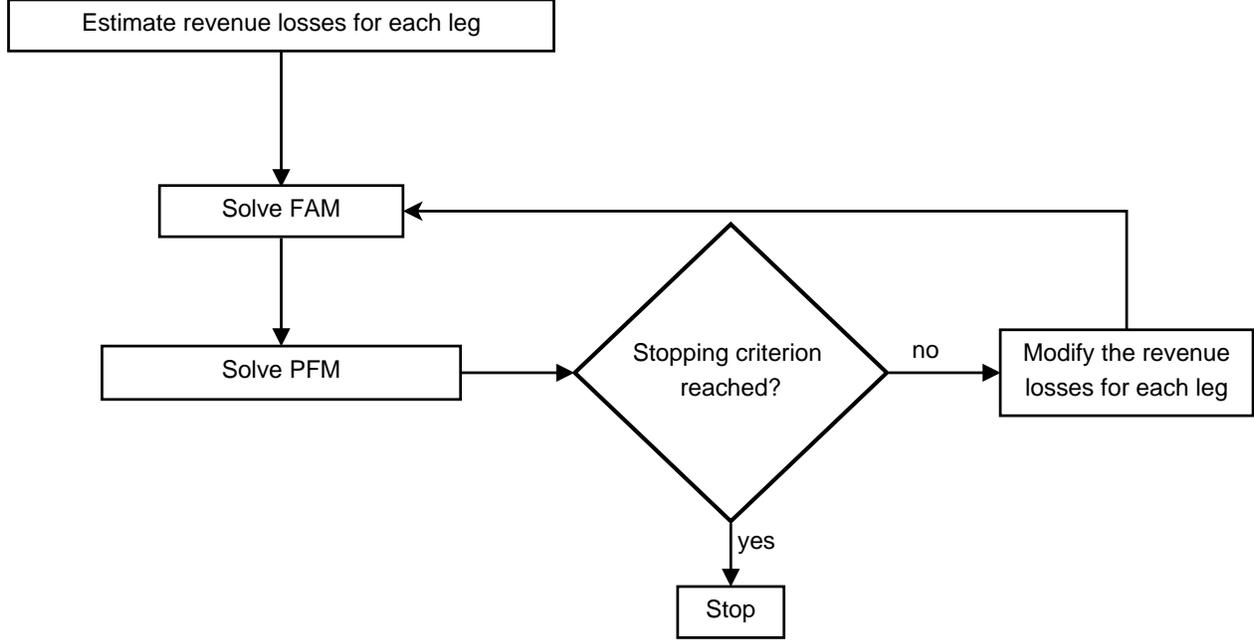


Figure 3.2: The method of Dumas *et al.* (2009): fleet assignment with external PFM reevaluation

$RL^k$ : the new vector is given by  $RL^{k+1} = \alpha \overline{RL}^{k+1} + (1 - \alpha)RL^k$ , where  $\alpha \in [0, 1]$  is a parameter. This smoothing strategy allows to avoid too large variations of the components of the revenue loss vector from one iteration to the next. Numerical experiments realized by Dumas *et al.* (2009) show that the value  $\alpha = 0.3$  provides fast convergence and good quality solutions.

Notice that the method of Dumas *et al.* (2009) does not guarantee a decrease of the FAM optimal (total revenue loss) value from one iteration to the next. Nevertheless, its smoothing strategy helps, in practice, generating a sequence of decreasing values until getting close to optimality.

### 3.3 Fleet assignment with internal PFM reevaluation

In this section, we present our proposed method for solving the fleet assignment problem with passenger flow evaluation and highlight how it differs from the method of Dumas *et al.* (2009). Our goal is to produce similar quality solutions as those obtained by Dumas *et al.*

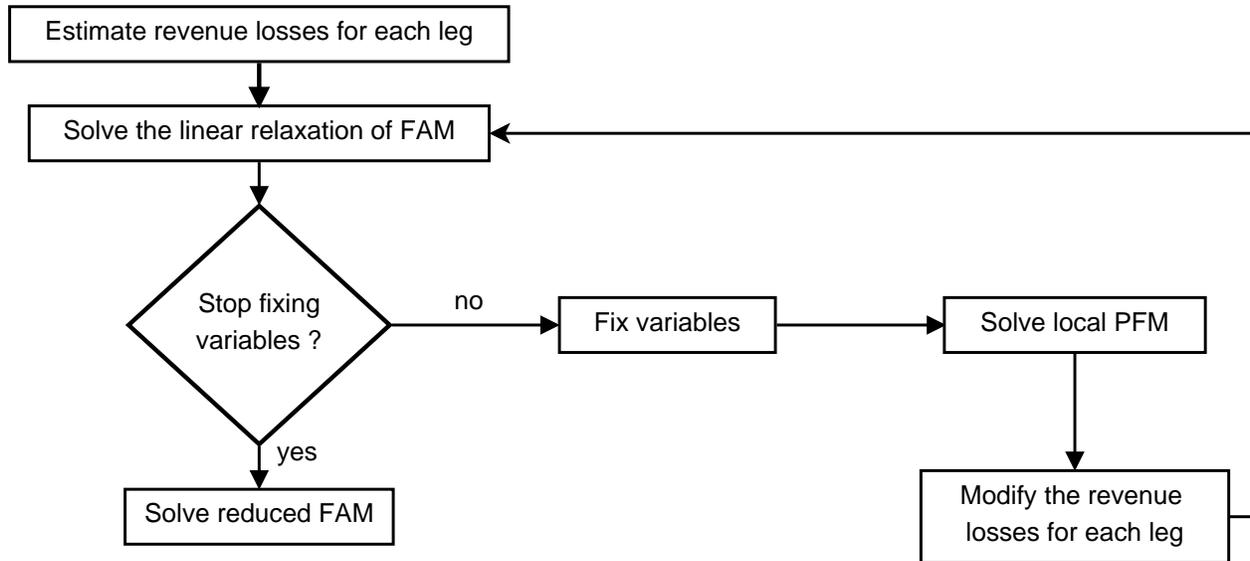


Figure 3.3: The proposed method: fleet assignment with internal PFM reevaluation

(2009) but in faster computational times and to produce better solutions if both methods are run for the same amount of time.

For solving large-scale FAMs, variable fixing is commonly used as a heuristic to reduce computational times (Hane *et al.*, 1995; Sherali *et al.*, 2010). The general idea of the proposed method is to fix variables and reevaluate revenues with the PFM simultaneously. In this way, the decisions made after each revenue reevaluation are based on updated revenues and should, therefore, yield a better solution than the solution obtained without any revenue reevaluation. Figure 3.3 summarizes this method with internal PFM reevaluation. Instead of solving directly the FAM (3.1)–(3.6) with integrality requirements like in the method of Dumas *et al.* (2009), we begin by solving only its linear relaxation. Then fleet assignment variables are fixed and the revenue losses per leg are reevaluated for the legs impacted by the imposed decisions. The modified linear relaxation is solved again. This process repeats until one of the three following conditions hold: a predefined number of iterations is reached, a predefined number of variables is fixed, or no more variables can be fixed. The reduced FAM resulting from this variable fixing process and the PFM reevaluations is then solved using a branch-and-bound algorithm. Below, we give details on the variable fixing strategy (Section 3.3.1), the revenue losses update (Section 3.3.2), and the branch-and-bound algorithm (Section 3.3.3).

### 3.3.1 Variable fixing strategy

In a typical solution of the linear relaxation of the FAM (3.1)–(3.6), there is a variable  $X_{fl}$  equal to 1 for around 80% of the legs  $l \in L$ , that is, the aircraft type is not fixed for around 20% of the legs. As in Sherali *et al.* (2010), one can decide to leave unfixed the variables equal to 1 to offer more leeway to the MIP solver. However, because these variables represent a large proportion of the positive-valued variables and most of them remain at 1 when only fractional-valued variables are fixed, we have chosen to fix some of them at each iteration in order to substantially reduce the size of the FAM. The number of variables to fix at each iteration is limited by a parameter denoted  $V_1$ . Furthermore, we also impose that at most a given percentage  $PV_1$  of the variables equal to 1 for a given aircraft type  $f \in F$  be fixed to 1 (this parameter was fixed to 75% for our tests). This limit per fleet ensures a relatively good distribution of the fixed variables among the different fleets. To change the solution from one iteration to the next, we also fix a certain number of fractional-valued variables  $X_{fl}$ . These variables are first sorted in decreasing order of their value, and then the first  $V_2$  of them are fixed to 1 as long as their value is greater than or equal to a predefined minimum threshold  $B_{inf}$ . No other variables are fixed, which means that no variables are fixed at 0. After fixing to 1 the chosen variables, the linear relaxation of the FAM is solved to obtain a new linear relaxation solution that may still contain fractional-valued variables. In this case, variable fixing is repeated. We allow  $V_{max}$  variables to be fixed overall. When this limit is reached, the reduced FAM is solved with integrality requirements. Notice that  $V_{max}$  should be large enough to obtain relatively fast computational times but not too large to ensure that variable fixing does not yield an infeasible reduced FAM. In Section 3.4.2, we discuss the values attributed to the parameters  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_{max}$ , and  $B_{inf}$  for our tests.

### 3.3.2 Revenue losses update

After solving the linear relaxation of FAM and fixing certain variables, the revenue losses per leg are reevaluated using the local version of the PFM. The method described in Section 3.2.2 is then used to update the vector  $RL$  in the objective function of the FAM.

Two observations allow to accelerate this process. Firstly, the revenue losses of the legs fixed to 1 do not have any impact on the optimization process. They are now fixed and considered as constant in the objective function. Hence, there is no need to reevaluate them until the end of the solution process, where the revenues for each leg will be computed once again with the full PFM to obtain the value of the final solution. Secondly, significant changes to the revenue losses do not occur for all legs after fixing certain variables. To limit the number of legs for which revenue losses need to be reevaluated, we consider only the legs that can be directly impacted by the fixed variables. For a leg  $l \in L$  for which a variable  $X_{fl}$  was fixed at this iteration, these legs are those in  $I_l$  (that is, the set of itineraries containing  $l$  and those that can recover passengers from these itineraries).

### 3.3.3 Branch-and-bound algorithm and iterative process

Once a sufficient number of variables are fixed, the reduced problem is solved by a commercial MIP solver, namely, CPLEX. The search tree is first explored using a depth-first search strategy until finding a first integer solution. If the value of this solution respects a tolerance on the optimality gap, then the solution process is terminated. Otherwise, the exploration of the search tree is pursued using a combination of depth-first search and best-first search strategies until reaching a predefined maximum number of nodes (set to 500 for our tests). More precisely, we set the tolerance backtracking parameter of CPLEX (CPX\_PARAM\_BTTOL) to 0.5. This allows to explore sufficiently each branch using a depth-first search as long as the branch remains promising and to switch to a more promising branch as soon as the current branch does not seem promising anymore.

When a feasible solution respecting the tolerance optimality gap is found, the full PFM derived from the fleet assignment solution is solved a final time to evaluate the expected revenues on all flight legs and the total expected profits of the solution. This final evaluation allows a fair comparison between the solutions produced by our method and those of Dumas *et al.* (2009).

To improve the fleet assignment solution, the method of Dumas *et al.* (2009) with external

PFM reevaluation performs multiple iterations in which the expected revenue losses per leg are reevaluated at each iteration. In the proposed method with internal PFM reevaluation, these revenue losses are reevaluated less than once for a large number of legs. Thus, we propose to also embed our method into an iterative process that will repeat several times the algorithm described in Figure 3.3, using as the starting point of each iteration, the fleet assignment solution computed in the previous iteration. As it will be shown by the computational results presented in the next section, this iterative process converges very rapidly and, therefore, allows to preserve the quality of the solutions produced by the Dumas *et al.* (2009) method while reducing the overall computational times.

### 3.4 Computational results

This section reports the results of various computational experiments that we conducted to assess the performance of the proposed method with internal PFM reevaluation against that of the method of Dumas *et al.* (2009) with external PFM reevaluation. In this section, we refer to these methods as the internal and the external method, respectively. Both methods were implemented in C++ and rely on the commercial MIP solver CPLEX, version 12.4. All tests were performed using a single core of an Intel Xeon X5670 processor clocked at 2.93GHz and 24Gb of RAM.

#### 3.4.1 Instances

For our computational experiments, we use a part of Air Canada's flight network in 2002. It contains 5,180 legs operated by 205 aircraft of 15 different types. The passengers were distributed among 23,948 itineraries and 3 fare classes. As this is the unique large-scale network for which we have all necessary information to solve the PFM, we applied the demand perturbations suggested by Dumas *et al.* (2009) to create two other sets of expected demand on each itinerary. These perturbations are obtained by multiplying the expected demand for each itinerary by a random number taken from a uniform distribution in the interval  $[0.55, 1.55]$ . The new demands are then scaled so that the overall modified demand be equal

to the total original demand. In 2002, demand was relatively low with an average load factor of around 74.8% for our network. In comparison, Air Canada had an average load factor of 82.7% in 2012 (Air Canada, 2012, p.2), which is closer to their usual one. Consequently, to create demands yielding higher load factors, we introduce a parameter that multiplies the expected demand for each itinerary. For each of the three demand structures, we use five different parameter values, resulting in a total of 15 instances.

To show that the proposed method can yield faster computational times than the method of Dumas *et al.* (2009) when solving large instances, we also created a larger network by duplicating each leg and each aircraft of the 5,180-leg network mentioned above. The departure time of each new leg was shifted forward by 73 minutes to avoid duplicated legs at the same time. Itineraries were also copied and new ones were created to take into account the new possibilities. Finally, we adjusted the proportion  $q_{ij}$  of passengers spilled from a closed itinerary  $i \in I$  to another itinerary  $j \in I$ , keeping the same overall recapture rate for a given itinerary. This new network contains 10,360 legs, 410 aircraft of 15 types, and 65,169 itineraries. From this network, we derived 9 instances with different demand structures as described above.

### 3.4.2 Parameter values

As mentioned in Section 3.3.1, the variable fixing strategy of the internal method relies on several parameters whose values need to be calibrated. To reduce the computational times, we integrate the same variable fixing strategy into the external method. However, as this method does not modify the revenue losses per leg during the FAM solution process, the best parameter setting may differ for each method. Consequently, we calibrated the parameter values independently for each method and also for each network. The selected values are given in Table 3.1. To assess the impact of the parameter values on the quality of the solutions produced by the internal method and its computational time, see Section 3.4.4 that reports the results of a sensitivity analysis on these parameters for the 5,180-leg network.

Table 3.1: Parameter values for both internal and external methods

Parameter	Description	5,180-leg network		10,360-leg network	
		Value for internal	Value for external	Value for internal	Value for external
$V_{max}$	Max. number of variables to fix overall	3,000	3,500	7,000	7,000
$V_1$	Max. number of variables equal to 1 fixed at once	350	300	600	500
$V_2$	Max. number of fractional-valued variables fixed at once	200	300	400	350
$B_{inf}$	Min. value threshold for fixing a variable	0.8	0.75	0.75	0.75

### 3.4.3 Comparative results for the 5,180-leg network

For each pair of demand structure and load factor ( $3 \times 5 = 15$  pairs overall) for the 5,180-leg network, we solved the problem instance using both internal and external solution methods. To measure the quality of a computed solution, we compare its expected profit with that of the solution produced by solving only once the fleet assignment problem without reevaluating the expected revenues per leg, that is, solution  $X^0$  of the external method. As Air Canada (like most airlines) was struggling for profitability in 2002, it would not be representative to provide profit improvement in relative value (profits were negative and close to 0). We rather report the profit improvement in percentage of the costs of the initial solution  $X^0$ .

For each method, Figure 3.4 illustrates the average of the profit improvement for the solutions computed throughout the solution process (each point corresponds to the best solution obtained up to a given iteration). In this figure, the horizontal axis indicates the average computational time at the end of each iteration. These two curves clearly show that the internal method converges more rapidly than the external method and to a higher improvement value. It thus requires fewer iterations to obtain solutions of similar quality, yielding shorter computational times.

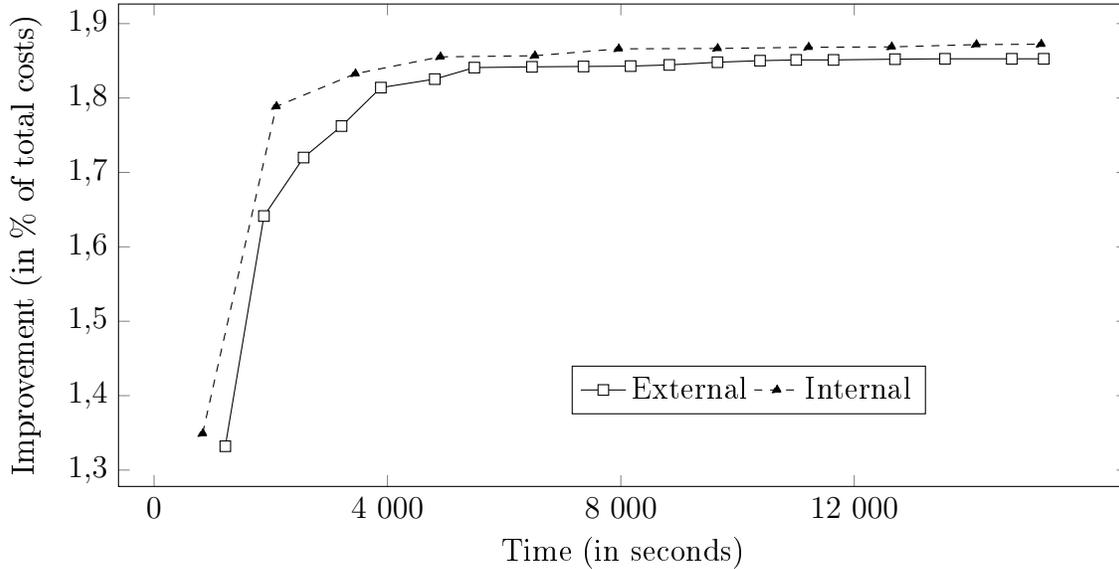


Figure 3.4: Average results of the internal and external methods (5,180-leg network)

In Table 3.2, we present the results (profit improvement in percentage of the total costs of the initial solution  $X^0$  and computational time in seconds) obtained for each instance after 17 iterations of the external method (no improvements were observed in the few next iterations) and those obtained after 4 and 11 iterations of the internal method. The last line of this table reports averages over all instances. After 4 iterations of the internal method, we obtain a solution that is slightly better on average than the best one of the external method, and this in just over a third of the time. After 17 iterations, the external method achieves an average profit improvement of 2,390,667\$ compared to 2,394,000\$ for the internal method with 4 iterations. While their average profit improvements are very close, the internal method requires 63.8% less time than the external method in this setting. For this network, the internal method reaches after 15,201 seconds an average profit improvement that is slightly larger than that of the external method. Note that, with both methods, the average improvement is substantial compared to the traditional approach for solving the fleet assignment problem without reevaluating the revenues per leg. We also observe that the improvement increases with the load factor, that is, when spill and recapture are very active. In this case, a first approximation of the expected revenues per leg is often not very good.

Even if both methods alternate between solving the FAM and the PFM, they do not spend

Table 3.2: Detailed results of the internal and external methods

Demand structure	Load multiplier	Average load factor (%)	External method		Internal method			
			17 iterations		4 iterations		11 iterations	
			Imp. (%)	Time (s)	Imp. (%)	Time (s)	Imp. (%)	Time (s)
I	1.05	76.5	1.26	9 550	1.23	3 315	1.26	10 687
	1.1	79.0	1.33	9 521	1.35	3 429	1.35	9 383
	1.15	81.1	1.58	10 488	1.53	3 847	1.58	11 306
	1.2	82.9	1.72	10 120	1.74	4 985	1.74	20 793
	1.25	84.5	1.89	20 318	1.93	5 092	1.93	17 005
II	1.05	77.6	1.64	9 102	1.62	3 986	1.62	10 659
	1.1	79.8	1.72	11 249	1.70	4 137	1.71	13 438
	1.15	81.6	1.89	11 036	1.85	4 557	1.91	15 560
	1.2	83.1	2.18	19 730	2.20	8 054	2.20	20 824
	1.25	84.4	2.51	22 144	2.51	7 017	2.54	17 752
III	1.05	77.5	1.53	10 112	1.51	4 095	1.55	12 070
	1.1	79.7	1.81	10 590	1.81	4 886	1.81	14 125
	1.15	81.5	2.02	14 203	2.04	5 473	2.04	15 024
	1.2	83.1	2.20	10 397	2.25	4 141	2.26	12 639
	1.25	84.3	2.50	24 770	2.54	6 558	2.57	26 745
Average			<b>1.853</b>	<b>13 555</b>	<b>1.855</b>	<b>4 905</b>	<b>1.872</b>	<b>15 201</b>

the same proportion of time on each problem component. The external method solves the full PFM only once per iteration and spends on average 88.1% of the total time on the FAM, devoting only 11.9% to the PFM. On the other hand, the internal method solves the full PFM once per iteration but also the local version of the PFM for a subset of the legs each time that variables are fixed, that is, about 6 to 8 times per iteration. A larger proportion of the total time is, therefore, necessary to solve the PFM, namely, about 33.7%.

To conclude this section, Table 3.3 reports some statistics on the solution process of the FAM within the tested methods. For each method, we give the time in seconds required to solve the linear relaxation, the total computational time per iteration in seconds (excluding PFM), the total number of branch-and-bound nodes explored and the total number of cuts generated by

Table 3.3: Statistics on the FAM solution process (5,180-leg network)

	External method	Internal method
Linear relaxation time per iteration (seconds)	95.1	96.2
Total time per iteration (seconds)	783	912
No. branch-and-bound nodes (reduced MIP)	22.0	23.8
No. of cuts (reduced MIP)	13.4	11.9
No. of PFM reevaluations	-	6.6

CPLEX while solving the reduced MIP, and, finally, the number of PFM reevaluations (only for the internal method). All these results correspond to averages per iteration and instance. From these results, we observe that the FAM solution process behaves very similarly in both methods except that the internal method performed an average of 6.6 PFM reevaluations while the external method did not use such reevaluations. In particular, note that the average number of branch-and-bound nodes per iteration is relatively low (22.0 and 23.8 for the internal and the external method, respectively). However, as reported in Dumas *et al.* (2009), there are very few branch-and-bound nodes explored in most iterations (10 or less) while some of them require a relatively large number. In the former cases, the first integer solution found is within the tolerance on the optimality gap while in the latter cases, it exceeds this tolerance.

#### 3.4.4 Sensitivity analysis

To evaluate the impact of the parameter values used in the internal method on the solution quality and the computational time, we performed a sensitivity analysis on these values considering 9 instances of the 5,180-leg network (those corresponding to load multipliers 1.05, 1.15, and 1.25). Starting from the values used for the external method ( $V_{max} = 3,500$ ,  $V_1 = 300$ ,  $V_2 = 300$ ,  $B_{inf} = 0.75$ ), we varied the value of a single parameter at a time and solved the instances with the internal method allowing 4 iterations. The average profit improvements and the computational times obtained are reported in Table 3.4. In this table, the first row provides the results for the reference values of the parameters. Then, each of

Table 3.4: Sensitivity analysis on the parameter values for the internal method

Parameters				Average improvement	Average time
$V_{max}$	$V_1$	$V_2$	$B_{inf}$	(% of costs)	(s)
3500	300	300	0.75	1.819	5 089
<b>2500</b>	300	300	0.75	1.815	6 312
<b>3000</b>	300	300	0.75	1.819	4 065
<b>4000</b>	300	300	0.75	1.817	5 551
3500	<b>250</b>	300	0.75	1.830	4 911
3500	<b>350</b>	300	0.75	1.833	4 905
3500	<b>400</b>	300	0.75	1.826	4 144
3500	300	<b>100</b>	0.75	1.836	6 031
3500	300	<b>200</b>	0.75	1.829	5 007
3500	300	<b>400</b>	0.75	1.803	3 992
3500	300	300	<b>0.7</b>	1.820	4 478
3500	300	300	<b>0.8</b>	1.824	4 495
3500	300	300	<b>0.85</b>	1.823	5 157
<b>3000</b>	<b>350</b>	<b>200</b>	<b>0.8</b>	<b>1.862</b>	<b>4 882</b>

the following four block of rows reports the results for different values (in bold) of a single parameter while the others stay at their reference value. When comparing the results in a block, the first row should also be considered. Finally, the last row gives the results for the best value of each parameter, that is, the results reported in the previous section.

Let us discuss the results for each parameter. Decreasing the maximum number of variables fixed overall,  $V_{max}$ , does not change much the solution quality. At each iteration, fixing fewer variables yields a larger reduced MIP and, thus, the solution process is less heuristic. On the other hand, the revenue losses are revised less frequently, loosing precision on the coefficients of the objective function. The average computational time seems to vary arbitrarily because fixing fewer variables reduces the time spent in the variable fixing phase (including the time for the PFM reevaluations) but increases the time required to solve the reduced MIP that contains more variables. One would expect that the latter time would increase much more rapidly than the former time, but the first solution found by the MIP solver often meets the optimality gap tolerance.

We remark that decreasing the value of  $V_2$ , the maximum number of fractional-valued variables fixed at once, the solution quality improves at the expense of longer computational times. Indeed, the solution quality improves because the average value of the variables fixed increases (the decisions are thus safer) and the PFM is reevaluated more often. The same behavior is not observed when decreasing the value of  $V_1$  because this parameter controls the variables equal to 1.

The minimum value threshold  $B_{inf}$  is closely related to parameter  $V_2$  because both limit the number of fractional-valued variables that can be fixed at once. We remark that setting  $B_{inf} = 0.8$  or  $0.85$  yields a slightly higher average solution quality. At the opposite, a lower value for  $B_{inf}$  increases the risk of imposing bad decisions and producing solutions of poor quality. We observe that the average computational time varies arbitrarily.

Finally, observe that the selected parameter values (last row in Table 3.4) yield the best average profit improvement over all parameter combinations and an average computational time that is more or less in the middle of the times obtained with the other configurations.

### 3.4.5 Comparative results for the 10,360-leg network

To assess if the computational time reductions yielded by the internal method and observed for the 5,180-leg network can be reproduced for larger instances, we created a network with 10,360 flight legs (as described in Section 3.4.2) and three demand structures for this network. For each demand structure, three different load multipliers (1.05, 1.15, 1.25) were applied to generate a total of 9 instances. These instances were then solved using the external and the internal method. Figure 3.5 presents graphically the average profit improvement in percentage of the costs of the initial solution obtained at each iteration by each method. As for the 5,180-leg instances, the internal method converges much more rapidly than the external method and requires fewer iterations to obtain solutions of similar quality. For this network, both methods reaches a similar profit improvement after 70,000 seconds (no further improvements occur in the next iterations).

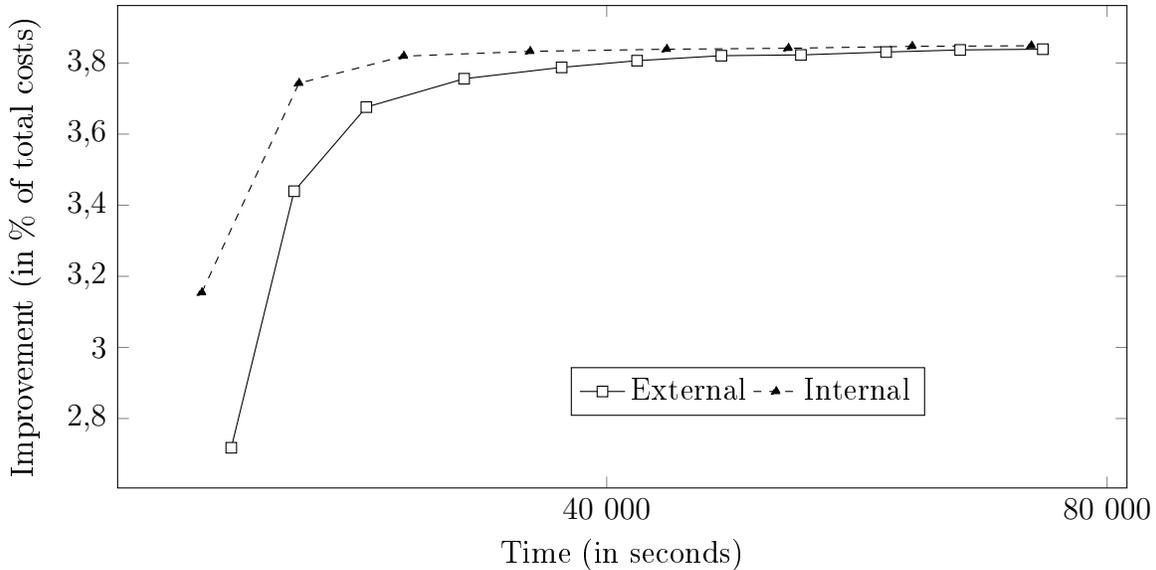


Figure 3.5: Average results of the internal and external methods (10,360-leg network)

Detailed results for all instances are reported in Table 3.5. On average, the internal method computes in 4 iterations a solution of similar quality to the best solution computed by the external method in 11 iterations, saving 54.7% of the computational time. These solutions correspond to an average profit improvement of around 7,900,000\$. Here again, we observe that the profit improvement and the computational time reduction (derived after 4 iterations of the internal method) increase with the average load factor.

Doubling the size of the network has a bigger impact on the computational time devoted to the PFM than on that devoted to the FAM. Indeed, the FAM time is partly controlled by the size of the reduced MIP which was kept relatively low for the large network. Consequently, the proportion of time devoted to the PFM increased in both methods. For the 10,360-leg network, the external method spent 16.5% of the total time solving the PFM while it required 11.9% for the 5,180-leg network. The increase is much sharper for the internal method that performed on average twice the number of PFM reevaluations in each iteration. As a result, solving the PFM in the internal method required 61.6% of the total time for the large network while it took only 33.7% for the 5,180-leg network.

The results of the experiments conducted on both networks show that the internal method

Table 3.5: Detailed results of the internal and external methods (10,360-leg network)

Demand structure	Load multiplier	Average load factor (%)	External method		Internal method			
			11 iterations		4 iterations		8 iterations	
			Imp. (%)	Time (s)	Imp. (%)	Time (s)	Imp. (%)	Time (s)
I	1.05	77.0	2.41	49 682	2.30	24 856	2.31	54 430
	1.15	81.1	3.22	54 346	3.17	30 692	3.21	65 821
	1.25	84.1	4.59	79 106	4.60	36 785	4.61	82 227
II	1.05	77.8	2.67	73 943	2.64	28 916	2.70	59 358
	1.15	81.4	4.01	76 199	4.08	44 451	4.08	82 344
	1.25	84.3	5.26	114 190	5.22	34 897	5.23	82 114
III	1.05	77.8	2.83	59 986	2.87	32 137	2.88	65 341
	1.15	81.3	4.03	76 284	4.05	35 816	4.05	94 751
	1.25	84.1	5.52	90 056	5.57	36 280	5.57	78 981
Average			<b>3.838</b>	<b>74 866</b>	<b>3.833</b>	<b>33 870</b>	<b>3.849</b>	<b>73 930</b>

can yield substantial average time reductions compared to the external method (63.8% and 54.7% for the networks with 5,180 and 10,360 legs, respectively). We believe that the internal method would also produce similar time savings for larger instances or for fleet assignment problems involving more complex features that would require larger computational times.

### 3.5 Conclusion

In this paper, we addressed the fleet assignment problem with passenger flow evaluation, an airline fleet assignment problem that computes revenues using a PFM. Recently, Dumas *et al.* (2009) developed an iterative solution method for this problem that solves alternately a FAM with expected revenues per flight leg and a PFM to revise the revenues per leg. It appears, however, to be too time-consuming for solving very large-scale instances or instances of problem variants involving additional features such as time windows or aircraft maintenance requirements. Our goal was, thus, to develop an alternative method that reevaluates the

revenues while solving the FAM in the hope of reducing substantially the computational times. Our method with internal revenue reevaluations has turned out to be efficient. It converges much more rapidly to solutions of the same quality as those produced by the method of Dumas *et al.* (2009), yielding much faster computational times (around 2 to 3 times faster).

## References

AIR CANADA (2012). Annual Report 2012. Consulted in may 2012, retrieved from [http://www.aircanada.com/en/about/investor/documents/2012\\_ar.pdf](http://www.aircanada.com/en/about/investor/documents/2012_ar.pdf)

AHUJA, R.K., GOODSTEIN, J., MUKHERJEE, A., ORLIN, J. B. and SHARMA, D. (2002). A very large-scale neighborhood search algorithm for the combined through-fleet-assignment model. *INFORMS Journal on Computing*, 19, 416–428.

BARNHART, C., BOLAND N. L., CLARKE, L. W., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L. and SHENOI, R. G. (1998). Flight string models for aircraft fleet assignment and routing. *Transportation Science*, 32, 208–220.

BARNHART, C., FARAHAT, A. and LOHATEPANONT, M. (2009). Airline fleet assignment with enhanced revenue. *Operations Research*, 57, 231–244.

BARNHART, C., KNIKER, T. and LOHATEPANONT, M. (2002). Itinerary-based airline fleet assignment. *Transportation Science*, 36, 199–217.

BÉLANGER, N., DESAULNIERS, G., SOUMIS, F. and DESROSIERS, J. (2006a). Periodic airline fleet assignment with time windows, spacing constraints, and time dependent revenues. *European Journal of Operational Research*, 175, 1754–1766.

BÉLANGER, N., DESAULNIERS, G. , SOUMIS, F., DESROSIERS, J. and LAVIGNE, J. (2006b). Weekly airline fleet assignment with homogeneity. *Transportation Research Part B: Methodological*, 40, 306–318.

BURDEN, R.L. and FAIRES, J.D. (2010). *Numerical analysis*. Brooks/Cole Cengage Learning, Boston, MA, 9th edition.

CLARKE, L., HANE, C., JOHNSON, E. and NEMHAUSER, G. (1996). Maintenance and crew considerations in fleet assignment. *Transportation Science*, 30, 249–260.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M. M. and SOUMIS, F. (1997). Daily aircraft routing and scheduling. *Management Science*, 43, 841–855.

DUMAS, J., AITHNARD, F. and SOUMIS, F. (2009). Improving the objective function of the fleet assignment problem. *Transportation Research Part B*, 43, 466–475.

DUMAS, J. and SOUMIS, F. (2008). Passenger flow model for airline networks. *Transportation Science*, 42, 197–207.

FARKAS, A. (1996). *The influence of network effects and yield management on airline fleet assignment decisions*. Doctoral thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA.

HANE, C. A., BARNHART, C., JOHNSON, E.L., MARSTEN, R.E., NEMHAUSER, G.L. and SIGISMONDI, G. (1995). The fleet assignment problem: Solving a large-scale integer program. *Mathematical Programming*, 70, 211–232.

IOACHIM, I., DESROSIERS, J., SOUMIS, F. and BÉLANGER, N. (1999). Fleet assignment and routing with schedule synchronization constraints. *European Journal of Operational Research*, 119, 75–90.

JACOBS, T. L., SMITH, B. C. and JOHNSON, E. L. (2008). Incorporating network flow effects into the airline fleet assignment process. *Transportation Science*, 42, 514–529.

KLABJAN, D. 2005. Large-scale models in the airline industry. G. Desaulniers, J. Desrosiers, M.M. Solomon, eds. *Column generation*. New York: Springer. 163–195.

REXING, B., BARNHART, C., KNIKER, T., JARRAH, A. and KRISHNAMURTHY, N. (2000). Airline fleet assignment with time windows. *Transportation Science*, 34, 1–20.

SHERALI, H. D., BAE, K.-H. and HAOUARI, M. (2010). Integrated airline schedule design and fleet assignment: polyhedral analysis and Benders decomposition approach. *INFORMS*

*Journal on Computing*, 22, 500–513.

SHERALI, H. D., BISH, E. K. and ZHU, X. (2006). Airline fleet assignment concepts, models, and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 172, 1–30.

SMITH, B. C. and JOHNSON, E. L. (2006). Robust airline fleet assignment: Imposing station purity using station decomposition. *Transportation Science*, 40, 497–516.

## CHAPITRE 4

### AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC RÉAFFECTATION ET SCÉNARIOS DE DEMANDE : MODÈLES ET MÉTHODES DE RÉOLUTION

#### 4.1 Problématique

L'horaire de vol d'une compagnie aérienne est établi par saison. Les saisons ne concordent pas nécessairement aux saisons régulières, mais elles vont plutôt dépendre de la situation géographique de la compagnie aérienne et de son marché. Par exemple, Air Canada a deux saisons principales : une de la fin du printemps jusqu'au début de l'automne avec une augmentation de l'offre de vols vers l'Europe et une l'hiver avec plus de vols vers les destinations soleil. Deux saisons plus courtes font le lien entre les saisons principales. Une compagnie aérienne définira ses saisons de façon à ce que celles-ci regroupent des semaines consécutives ayant une demande prévue assez semblable. De ce fait, l'horaire de vol lors d'une saison est très régulier d'une semaine à l'autre. Il l'est également d'une journée à l'autre dans une même semaine, l'heure de départ d'un vol étant généralement synchronisée chaque jour où celui-ci est offert.

Étant donné cette régularité dans l'horaire, la façon classique de résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols (FAP) est de le résoudre pour une journée ou une semaine typique de la saison en fonction de la demande moyenne prévue pour chaque itinéraire. L'affectation des types d'avion aux vols ainsi obtenue est alors reproduite pour toutes les semaines de la saison ou tous les jours de la semaine. Pourtant, la demande varie d'une semaine à l'autre dans une même saison et d'une journée à l'autre dans une même semaine. Des modifications dans l'affectation sont parfois faites de façon manuelle, mais une modification systématique avant un vol n'est pas une pratique habituelle. Une réaffectation des types d'avion peut entraîner des problèmes dans les étapes suivantes du processus de planification

des opérations aériennes, notamment la maintenance des avions et l'horaire des pilotes. Ces derniers sont généralement qualifiés pour piloter une seule famille d'avions ayant la même configuration de cockpit. Les recherches actuelles en réaffectation de types d'avion limitent donc cette réaffectation à un type d'avion de même famille (Berge et Hopperstad, 1993; Bish *et al.*, 2004; Jiang et Barnhart, 2009).

Les compagnies aériennes ayant un réseau en étoile (hub-and-spoke) ont une quantité importante de vols étant des allers-retours. Un réseau en étoile présente la caractéristique que la plupart des segments de vol relie un ou plusieurs aéroports principaux, appelé hub. Un passager partant d'un aéroport secondaire, appelé spoke, aura typiquement un premier vol vers un hub puis un second vol vers sa destination finale. Plusieurs routes d'avion dans un tel réseau font donc des allers-retours à partir d'un hub. De manière générale, une route d'avion peut être décomposée comme une suite de vols commençant à une station  $s_1$  et terminant à une station  $s_2$ . Le plus souvent  $s_1 = s_2$  et cette suite de vols forme alors une boucle. Nous généralisons le concept d'une boucle à celui d'une chaîne, c'est-à-dire à toute suite de vols effectués par le même avion, même si  $s_1 \neq s_2$ . Cette structure du réseau aérien peut être exploitée pour permettre une réaffectation des types d'avion entre des chaînes compatibles (départ du même aéroport, arrivée au même aéroport, à des heures rapprochées dans les deux cas) en minimisant les perturbations sur l'horaire du personnel, les équipages étant maintenus dans les mêmes avions, mais sur des chaînes différentes. Cette réoptimisation est faite après que les horaires des équipages aient été établis, puisqu'avant le FAP complet peut être réexécuté (avec certaines contraintes pour assurer la maintenance des avions) sans trop de perturbations. Bish *et al.* (2004) mentionnent que l'affectation est, en général, révisée 4 à 6 semaines avant la journée des opérations.

La figure 4.1 donne un exemple d'échange entre deux boucles compatibles à partir d'un hub, qui est le type d'échange le plus fréquent. Dans cet exemple, les arcs représentent des vols. Il y a donc deux chaînes, que nous appellerons  $A$  et  $B$ , partant du hub à des heures semblables (9h00 et 9h05) et revenant à des heures semblables (12h20 et 12h15). Afin de simplifier l'exemple, nous supposons ici que les heures de départ et d'arrivée ne dépendent pas du type d'avion affecté. En fonction de la demande moyenne prévue, la chaîne  $A$  se voit affecter le

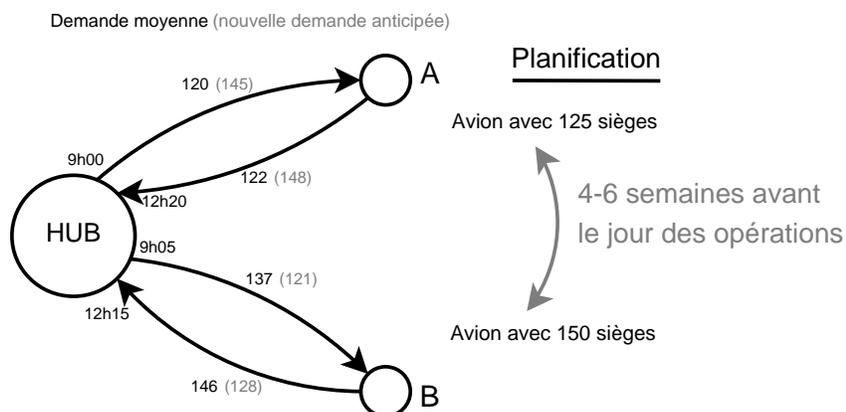


Figure 4.1: Échange de types d'avion entre deux boucles compatibles

type d'avion plus petit lors de la planification. Pour une semaine spécifique de la saison, il se peut que la demande anticipée pour la chaîne  $A$  augmente et que celle de la chaîne  $B$  diminue, rendant ainsi profitable un échange des types d'avion. Dans cet exemple, nous remarquons que la nouvelle demande anticipée du vol de retour de la chaîne  $B$  est de 128, ce qui est supérieur aux 125 sièges du type d'avion qui lui sera affecté après échange. Cela signifie que des passagers seront refusés et potentiellement récupérés sur un autre itinéraire, ce qui est calculé à l'aide du modèle de flot de passagers (PFM). Généralement, des contraintes seront ajoutées lors de la réaffectation pour interdire un échange qui placerait sur un vol un type d'avion ayant moins de sièges que le nombre de billets déjà vendus pour ce vol.

Ce type d'échange se fait déjà par les compagnies aériennes, mais l'affectation des types d'avion aux vols lors de la planification n'est pas faite en fonction de ces échanges éventuels. Lors de la résolution du FAP, nous utilisons une demande moyenne par itinéraire, ce qui revient à se limiter à un seul scénario de demande. Nous proposons d'optimiser l'affectation initiale en fonction de plusieurs scénarios de demande, ce qui permet d'obtenir une solution initiale au FAP qui pourra mieux s'adapter à d'éventuelles variations journalières de la demande et ainsi maximiser le potentiel des échanges de types d'avion. Par exemple, deux chaînes compatibles prises individuellement peuvent se voir affecter un avion de 100 places chacune. Cependant, avec plusieurs scénarios de demande et en regardant les chaînes dans leur ensemble, un avion de 100 places et un de 125 places pourraient être affectés aux deux chaînes. Selon la réalisation de la demande, un échange des types d'avion pourra alors être

fait pour toujours optimiser l'utilisation des deux avions. Une réoptimisation de l'affectation des types d'avion aux vols quelques semaines avant la journée des opérations peut être faite pour chaque semaine ou chaque journée en tenant compte de l'affectation initiale, des billets vendus jusqu'à présent et des informations les plus récentes en terme de prévision de la demande.

Le problème est que ces chaînes ne sont pas toujours connues à l'avance. Même lorsqu'une compagnie aérienne a plusieurs allers-retours pouvant former des chaînes, ce n'est pas nécessairement avantageux d'affecter le même avion à l'aller et au retour. Il est donc possible de déterminer comment regrouper les vols en chaînes à l'avance (soit à partir d'une résolution initiale ou en fonction de l'horaire de l'année précédente) ou de laisser les vols libres. Dans le premier cas, il y a deux variantes du problème envisageables selon que nous voulions mettre un coût sur les échanges de types d'avion ou non. Mettre un coût sur les échanges nécessite un modèle plus complexe avec plus de variables, mais il sera plus réaliste. En pratique, une compagnie aérienne ne voudra pas faire trop de changements de types d'avion dans une même journée et elle voudra une amélioration minimale de ces profits. Un changement de type d'avion ne vaut pas la peine s'il rapporte uniquement 100\$. Dans le cas où les vols sont libres, les chaînes ne sont pas connues à l'avance. Il est alors possible d'énumérer toutes les chaînes potentielles et laisser l'optimiseur choisir comment les vols seront regroupés pour savoir quelles chaînes seront formées. Afin de limiter la complexité du modèle, il est malgré tout préférable de restreindre l'ensemble de chaînes potentielles, notamment en limitant le nombre de vols ou la durée totale d'une chaîne. Ceci mène donc à trois variantes différentes du problème que nous décrivons plus en détail à la section 4.3.

Plutôt que de simplement maximiser le profit moyen (un seul scénario de demande), tous les modèles proposés pour résoudre le FAP cherchent à optimiser l'espérance du profit sur un ensemble de scénarios de demande. Tous les modèles n'utilisent pas les mêmes variables concernant l'affectation d'un type d'avion à un vol, mais ils ont tous les mêmes contraintes standards de couverture des vols, de conservation de flot et de disponibilité des avions. De nouvelles variables concernant la réaffectation des types d'avion dans chacun des scénarios de demande sont ajoutées avec des contraintes correspondantes assurant la couverture de

chaque vol. Des contraintes sont ajoutées pour s’assurer que les échanges se font entre chaînes compatibles uniquement, ce qui assure aussi que le flot est conservé. Pour chaque scénario de demande, le coût de l’affectation finale est calculé et le PFM de Dumas et Soumis (2008) défini au chapitre précédent est utilisé pour connaître la distribution des passagers et estimer les revenus. La fonction objectif est alors une somme pondérée des profits de chaque scénario selon la probabilité d’occurrence de chacun d’entre eux, plus potentiellement une pénalité sur les échanges de types d’avion.

La section suivante définit les concepts et notations nécessaires à la compréhension des différents modèles. Les modèles mathématiques sont détaillés à la section 4.3. Nous expliquons ensuite à la section 4.4 deux méthodes de résolution pouvant s’appliquer à tous les modèles : une résolution directe par CPLEX et une décomposition de Benders où chaque sous-problème correspond à un scénario et renvoie au problème maître des coupes d’optimalité.

## 4.2 Notations

Nous allons d’abord définir les termes utilisés dans nos modèles. À chaque station, des arrivées et des départs ont lieu dans un intervalle de temps spécifique, appelé *banque*. Une banque est composée d’une suite d’arrivées consécutives suivie d’une suite de départs consécutifs pour augmenter les opportunités de connexions. Le temps minimum de connexion est ajouté à l’heure d’arrivée pour assurer qu’un vol arrivant dans une banque donnée est toujours admissible à repartir sur un autre vol de cette même banque. La notion de banque est généralement utilisée à un hub, mais nous prenons une définition de banque plus générale qui s’applique à chaque station, qu’elle soit un hub ou non. Nous définissons une banque  $k_{s,f}^{a,d}$  comme l’intervalle de temps  $[a, d]$  durant lequel des vols arrivent puis repartent de la station  $s$  avec le type d’avion  $f$ . Les intervalles sont définis automatiquement en fonction de l’horaire. Une banque se termine lorsqu’un départ est suivi d’une arrivée, celle-ci faisant partie de la banque suivante. Puisque la durée de vol et le temps minimum de connexion varient généralement d’un type d’avion à l’autre et que tous les types d’avion ne sont pas admissibles sur les mêmes vols, les banques sont spécifiques pour chaque type d’avion. La figure 4.2 montre

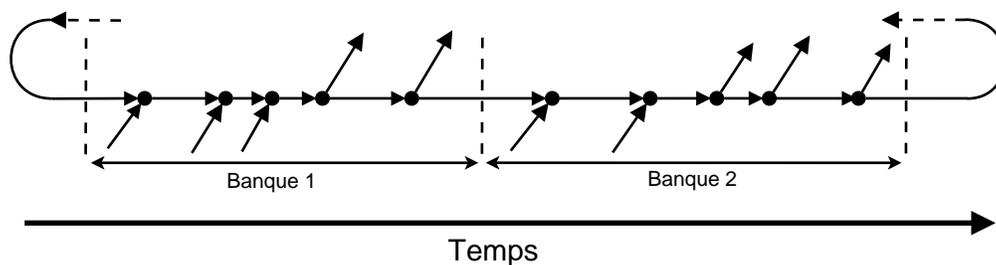


Figure 4.2: Exemple de réseau pour une station et un type d'avion donné avec deux banques

un exemple pour une station et un type d'avion donné.

Une boucle, telle que définie précédemment, est une suite de deux segments de vol auxquels est affecté le même avion où la station de départ du premier vol est la même que la station d'arrivée du second. Évidemment, tous les vols dans un réseau ne font pas partie d'une boucle. Même dans un réseau en étoile, certains vols sont des singletons qui ne peuvent pas être reliés à un autre vol. La compagnie aérienne peut aussi décider de ne pas affecter le même avion à l'aller et au retour si la demande en passagers est suffisamment différente. Afin d'englober tous les types de vols sous une même notation, nous généralisons le concept de boucle à celui d'une chaîne. Une *chaîne* est simplement une suite de segments de vol (possiblement seulement un) exploités par le même avion. Deux chaînes  $h_1$  et  $h_2$  sont dites être des *chaînes compatibles* par rapport à un type d'avion donné si elles ont les mêmes banques de départ et d'arrivée pour ce type d'avion. Comme les banques sont spécifiques pour chaque type d'avion, deux chaînes peuvent être compatibles pour un type d'avion  $f_1$ , mais incompatibles pour un type d'avion  $f_2$ . Pour qu'un échange soit possible entre ces deux chaînes, elles doivent être compatibles pour au moins deux types d'avion.

Les échanges de types d'avion peuvent être plus complexes et impliquer plus de deux chaînes. La figure 4.3 donne un exemple d'échange impliquant trois chaînes  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  et trois avions de types différents  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , chaque avion devant être affecté à une chaîne différente. Ici, un arc représente une chaîne et chacune d'elle peut se voir affecter deux types d'avion seulement. Par exemple, les types d'avion  $f_1$  et  $f_3$  peuvent être affectés à la chaîne  $h_1$ , qui est compatible avec  $h_2$  pour le type  $f_1$  et avec  $h_3$  pour le type  $f_3$ . Nous remarquons qu'aucune paire de chaînes n'est compatible pour deux types d'avion différents, mais il existe tout de

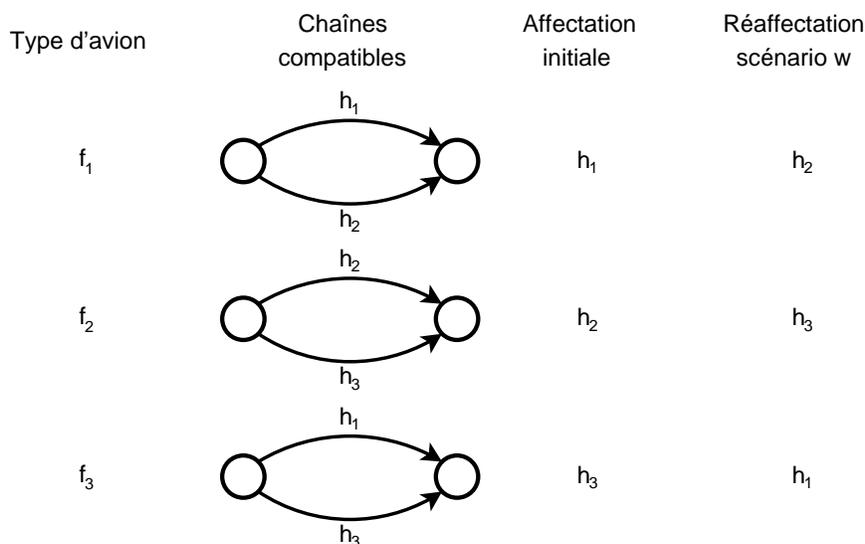


Figure 4.3: Échange de types d'avion entre trois chaînes

même une réaffectation différente de l'affectation initiale. Pour un type d'avion donné et pour chaque ensemble de chaînes compatibles, la seule contrainte est que le nombre d'avions affecté doit rester le même entre l'affectation initiale et la réaffectation pour chaque scénario de demande.

La notation étant sensiblement la même pour chaque modèle, nous décrivons ici les ensembles et paramètres utilisés. Lorsqu'un modèle utilise une notation distincte, celle-ci sera précisée à la section décrivant le modèle en question. Les ensembles utilisés sont :

$S$  : ensemble des stations du réseau, indexé par  $s$

$F$  : ensemble des types d'avion, indexé par  $f$

$K_{sf}$  : ensemble des banques de la station  $s$  pour le type d'avion  $f$ , indexé par  $k$

$\Omega$  : ensemble des scénarios de demande, indexé par  $w$

$H$  : ensemble des chaînes, indexé par  $h$

$F_h$  : ensemble des types d'avion admissibles pour la chaîne  $h$

$E_f$  : ensemble des ensembles de chaînes compatibles pour le type d'avion  $f$ , indexé par  $e$

$E_2$  : ensemble des ensembles de chaînes compatibles de cardinalité 2 ou plus

$H_2$  : ensemble des chaînes faisant partie d'un ensemble  $e$  de cardinalité 2 ou plus pour au moins deux types d'avion différents

$O_f$  : ensemble des chaînes admettant un avion de type  $f$  durant l'heure de comptage

Pour chaque type d'avion  $f$ , nous regroupons dans un ensemble  $e$  les chaînes ayant la même banque de départ et d'arrivée pour ce type d'avion. Pour chaque chaîne  $h$  et chaque type d'avion admissible  $f$ , il existe un unique ensemble  $e \in E_f$  tel que  $h \in e$ . Une chaîne qui n'est compatible avec aucune autre chaîne pour un type d'avion donné est dans son propre ensemble  $e$  de cardinalité 1. Un ensemble  $e$  d'une cardinalité plus grande ou égale à 2 ( $e \in E_2$ ) aura le potentiel d'échanger les types d'avion des chaînes  $h \in e$  lors de la réaffectation. Une chaîne  $h$  étant dans un ensemble  $e \in E_2$  pour au moins deux types d'avion a le potentiel d'être impliquée dans un échange de types d'avion, alors  $h \in H_2$ . Cette notation, bien qu'un peu lourde, permet de réduire la taille des différents modèles en évitant de définir inutilement les variables et contraintes reliées à la réaffectation d'un nouveau type d'avion sur un segment de vol si ce dernier ne peut pas être impliqué dans un échange. Nous utilisons la notation  $k^-$  et  $k^+$  pour identifier la banque qui précède et celle qui suit la banque  $k$  à la même station pour le même type d'avion. La création des scénarios de demande sera vue en détail à la section 5.2.

Les paramètres utilisés sont :

$n_f$  : nombre d'avions disponibles de type  $f$

$n^e$  : nombre de chaînes dans l'ensemble de chaînes compatibles  $e$

$o_e$  : banque d'origine pour l'ensemble de chaînes compatibles  $e$

$d_e$  : banque de destination pour l'ensemble de chaînes compatibles  $e$

$p^w$  : probabilité d'occurrence du scénario  $w$

$C_{fh}$  : coût de l'affectation d'un avion de type  $f$  à la chaîne  $h$

$RL_{fh}^w$  : perte de revenus d'un avion de type  $f$  à la chaîne  $h$  pour le scénario  $w$  par rapport à une flotte fictive de capacité infinie

La perte de revenus  $RL_{fh}^w$  est la même que celle utilisée dans le chapitre précédent, mais elle dépend de la distribution des passagers pour chaque scénario de demande. Les variables

de décision n'étant pas les mêmes d'un modèle à l'autre, elles seront décrites en détail pour chaque modèle à la section suivante.

### 4.3 Modèles mathématiques

Nous présentons maintenant chaque modèle en détail. Tous les modèles ont en commun de vouloir minimiser l'espérance des coûts et des pertes de revenus (ce qui est équivalent à maximiser les profits) sur l'ensemble des scénarios de demande en fonction de leur probabilité d'occurrence. L'affectation initiale est obtenue en considérant l'ensemble des scénarios. Une affectation finale est trouvée pour chaque scénario et celle-ci diffère de l'affectation initiale uniquement par des échanges de types d'avion entre chaînes compatibles. Chaque modèle reprend les groupes de contraintes d'un modèle d'affectation des types d'avion standard (voir Hane *et al.*, 1995) : l'affectation d'exactly un type d'avion à chaque vol, la conservation du flot des avions dans le réseau et le respect du nombre d'avions disponibles pour chaque flotte.

#### 4.3.1 FAP avec chaînes connues, sans coût sur les échanges

La première variante du problème ne met aucun coût sur les échanges. Elle suppose également que les ensembles de chaînes compatibles  $e$  sont les mêmes pour tous les types d'avion, c'est-à-dire que deux chaînes qui sont compatibles pour un type d'avion donné seront compatibles pour tous les types d'avion. Ceci sera le cas pour une compagnie aérienne dont toute la flotte a la même vitesse de croisière, des temps minimums de connexion semblables et que tous les types d'avion sont admissibles sur tous les vols (Jiang et Barnhart, 2013, font une telle hypothèse). Ceci est une hypothèse assez forte, mais elle a l'avantage de réduire considérablement la complexité du problème. Pour le modèle de cette variante du problème, nous remplaçons donc les ensembles  $E_f$  par  $E$  qui est l'ensemble des ensembles de chaînes compatibles, chaque chaîne  $h$  appartenant à un et un seul ensemble  $e \in E$ .

L'affectation initiale n'intervenant pas dans la fonction objectif, il n'est pas nécessaire de

connaître l'affectation précise sur chaque chaîne. En effet, utiliser de telles variables entraînerait de la symétrie, c'est-à-dire qu'il existerait plusieurs solutions différentes avec exactement la même valeur pour la fonction objectif. Seulement la somme à travers toutes les chaînes d'un ensemble de chaînes compatibles nous intéresse vraiment. Si le nombre de chaînes dans l'ensemble de chaînes compatibles  $e$  est  $n^e = 3$ , il faut s'assurer de placer 3 avions, mais l'affectation précise n'est pas importante à ce stade. Nous utilisons donc les variables  $N_{fe}$  pour l'affectation initiale, où  $N_{fe}$  est égale au nombre d'avions de type  $f$  affecté à l'ensemble des chaînes compatibles  $e$ . L'affectation précise à chaque chaîne se fait lors de la réaffectation pour chaque scénario avec les variables  $Z_{fh}^w$ , où  $Z_{fh}^w$  est égale à 1 si le type d'avion  $f$  est affecté à la chaîne  $h$ , 0 sinon, après réaffectation, dans le scénario  $w$ . La variable  $Y_{fkk^+}$  donne le nombre d'avion de type  $f$  au sol entre les banques  $k$  et  $k^+$  pour  $k \in K_{sf}$ .

Afin de respecter le nombre d'avions disponibles par flotte, ceux-ci doivent être comptés à un moment spécifique  $\bar{t}$ . Ce temps doit être choisi de sorte que pour chaque ensemble  $e$ , toutes les chaînes  $h \in e$  sont soit au sol, soit en vol. Pour chaque station  $s$  et chaque flotte  $f$ , soit la banque  $k_{sf}$  qui inclut l'heure de comptage  $\bar{t}$ . De plus, nous utilisons les ensembles  $O_{fe}$  qui regroupent les ensembles  $e$  (plutôt que les ensembles  $O_f$  qui regroupent les chaînes) admettant un avion de type  $f$  couvrant l'heure de comptage ou dont la banque d'origine  $o_e$  ou la banque de destination  $d_e$  inclut l'heure de comptage.

Le modèle mathématique proposé est :

$$\min_{w \in \Omega} \sum p^w \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w (C_{fh} + RL_{fh}^w) \right] \quad (4.1)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F} N_{fe} = n^e, \quad \forall e \in E, \quad (4.2)$$

$$\sum_{\substack{e \in E: \\ d_e = k}} N_{fe} + Y_{fk-k} - \sum_{\substack{e \in E: \\ o_e = k}} N_{fe} - Y_{fkk^+} = 0, \quad \forall k \in K_{sf}, \quad s \in S, \quad f \in F, \quad (4.3)$$

$$\sum_{e \in O_{fe}} N_{fe} + \sum_{s \in S} Y_{fk_{sf}k_{sf}^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (4.4)$$

$$\sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in H, w \in \Omega, \quad (4.5)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w - N_{fe} = 0, \quad \forall e \in E, f \in F, w \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$N_{fe} \geq 0, \quad \forall f \in F, e \in E, \quad (4.7)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F, h \in H, w \in \Omega, \quad (4.8)$$

$$Y_{fkk^+} \geq 0, \quad \forall k \in K_{sf}, s \in S, f \in F. \quad (4.9)$$

La fonction objectif (4.1) minimise les coûts et les pertes de revenus pour tous les scénarios en fonction de leur probabilité d'occurrence. Les trois premiers groupes de contraintes représentent les contraintes pour un FAP standard. Les contraintes (4.2) assurent que chaque ensemble de chaînes se voit affecter le bon nombre d'avions dans l'affectation initiale. Les contraintes (4.3) garantissent la conservation de flot dans le réseau. La disponibilité des avions est respectée à l'aide des contraintes (4.4). Les deux groupes de contraintes suivants gèrent la réaffectation des types d'avion. Les contraintes (4.5) assurent que chaque chaîne est effectuée par exactement un type d'avion admissible lors de la réaffectation pour chaque scénario. Les contraintes (4.6) garantissent que les réaffectations de types d'avion pour chaque scénario et chaque ensemble de chaînes compatibles  $e$  conservent le même nombre d'avions de chaque type que dans l'affectation initiale. Finalement, les contraintes binaires et de non-négativité (4.7)–(4.9) restreignent le domaine de faisabilité des variables.

### 4.3.2 FAP avec chaînes connues et coût sur les échanges

Cette deuxième variante du problème met une pénalité dans la fonction objectif sur chaque échange. Elle est plus complexe que la précédente en permettant des durées de vol et des temps de connexion au sol différents selon le type d'avion et en limitant l'admissibilité des types d'avion sur chaque vol. L'affectation initiale doit donc être spécifique pour chaque chaîne pour être certain d'affecter un type d'avion admissible et pour savoir s'il y a un changement ou non lors de la réaffectation. Nous utilisons donc les variables  $X_{fh}$ , où  $X_{fh}$  est égale à 1 si le type d'avion  $f$  est affecté à la chaîne  $h$ , 0 sinon, dans l'affectation initiale. Nous

développons deux modèles différents qui sont équivalents du point de vue mathématique. Le premier place la totalité des coûts et des pertes de revenus sur les variables de réaffectation par scénario  $Z_{fh}^w$ . Ceci donne une formulation plus simple avec moins de contraintes qui est plus facile à résoudre directement à l'aide d'un solveur comme CPLEX. Le deuxième modèle utilise plus de variables et de contraintes, mais il est plus facilement décomposable en problème maître et sous-problèmes afin de pouvoir utiliser la décomposition de Benders, ce qui peut être nécessaire lorsque la taille du problème ou le nombre de scénarios augmentent. Ceci sera vu plus en détail à la section 4.4 sur les méthodes de résolution.

#### 4.3.2.1 Première formulation

Nous présentons le modèle mathématique général auquel s'ajouteront d'autres contraintes pour le calcul de la pénalité sur les échanges. Le modèle mathématique donne :

$$\min \quad \sum_{w \in \Omega} p^w \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w (C_{fh} + RL_{fh}^w) + \text{Coût des échanges} \right] \quad (4.10)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} X_{fh} = 1, \quad \forall h \in H, \quad (4.11)$$

$$\sum_{\substack{e \in E_f: h \in e \\ d_e = k}} X_{fh} + Y_{fk-k} - \sum_{\substack{e \in E_f: h \in e \\ o_e = k}} X_{fh} - Y_{fk+k} = 0, \quad \forall k \in K_{sf}, s \in S, f \in F, \quad (4.12)$$

$$\sum_{h \in O_f} X_{fh} + \sum_{s \in S} Y_{fk_s f k_s^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (4.13)$$

$$\sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in H, w \in \Omega, \quad (4.14)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w - \sum_{h \in e} X_{fh} = 0, \quad \forall e \in E_f, f \in F, w \in \Omega, \quad (4.15)$$

$$X_{fh} \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H, \quad (4.16)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H, w \in \Omega, \quad (4.17)$$

$$Y_{fk+k} \geq 0, \quad \forall k \in K_{sf}, s \in S, f \in F. \quad (4.18)$$

Les contraintes (4.11) assurent d'affecter exactement un type d'avion à chaque chaîne et les contraintes (4.15) garantissent que les échanges de types d'avion dans chaque scénario se font entre chaînes compatibles seulement. Les autres contraintes ont toutes la même fonction que dans le modèle précédent, excepté que l'affectation initiale se fait sur les variables  $X_{fh}$ .

### Pénalité sur les échanges

L'imposition d'une pénalité assure qu'une réaffectation est faite seulement lorsque le gain est suffisant et permet de tenir compte d'autres coûts comme le salaire de l'équipage. En effet, chaque membre d'équipage sera payé le maximum entre le salaire de sa route initiale prévue et celui de sa nouvelle route après réaffectation. L'ajout d'une pénalité dans le modèle mathématique ajoute un certain nombre de contraintes. Nous présentons deux versions pour la pénalité : une étant constante pour tous les échanges et une étant spécifique pour chaque chaîne  $h$ , chaque affectation de flotte initiale  $f_1$  et chaque réaffectation de flotte  $f_2$ . Comme expliqué à la section 4.2, la pénalité est calculée uniquement lorsqu'il y a effectivement un échange possible pour la chaîne  $h$ , soit lorsque  $h \in H_2$ .

### Coût des échanges constant

La première façon de modéliser le coût sur les échanges est d'affecter une pénalité constante  $p_{ex}$  à chaque changement de flotte entre l'affectation initiale et la réaffectation pour chaque chaîne. Ceci réduit le nombre de contraintes puisqu'il n'est pas nécessaire de distinguer les échanges entre eux. La variable binaire  $\delta_h^w$  est égale à 1 si le type d'avion a changé sur la chaîne  $h$  entre l'affectation initiale et le recours dans le scénario  $w$ , 0 sinon. Avec ces paramètres, le coût des échanges dans la fonction objectif sera :

$$\text{Coût des échanges} = p_{ex} \sum_{h \in H_2} \delta_h^w, \quad (4.19)$$

et les contraintes à ajouter au modèle mathématique pour gérer cette pénalité sont :

$$Z_{fh}^w - X_{fh} + \delta_h^w \geq 0, \quad \forall f \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.20)$$

$$\delta_h^w \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H_2, w \in \Omega. \quad (4.21)$$

Les contraintes (4.20) forcent les variables  $\delta_h^w$  à être égale à 1 lorsque  $X_{fh} = 1$  et  $Z_{fh}^w = 0$  et la minimisation du coût des échanges dans la fonction objectif aura pour effet que  $\delta_h^w = 0$  dans toute autre situation.

### Coût spécifique pour chaque échange

La deuxième façon de modéliser le coût sur les échanges est d'avoir une pénalité spécifique pour chaque échange possible. Cette pénalité  $p_{f_1 f_2 h}$  dépend de la chaîne  $h$ , de l'affectation initiale  $f_1$  et de l'affectation finale  $f_2$  ( $\neq f_1$ ). Chaque changement étant unique, il faut remplacer la variable  $\delta_h^w$  par les variables  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  pour chaque paire de flottes  $f_1$  et  $f_2$  possible pour la chaîne  $h$ . La variable  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  est égale à 1 si le type d'avion sur la chaîne  $h$  passe de la flotte  $f_1$  à l'affectation initiale à la flotte  $f_2$  lors de la réaffectation dans le scénario  $w$ , 0 sinon. Ce modèle est plus complexe que le premier, mais il a le bénéfice d'être plus précis et peut s'avérer nécessaire s'il y a une grande variabilité dans le coût des échanges pour la compagnie aérienne. Le coût des échanges dans la fonction objectif sera :

$$\text{Coût des échanges} = \sum_{h \in H_2} \sum_{\substack{f_1 \in F_h \\ f_1 \neq f_2}} \sum_{f_2 \in F_h} p_{f_1 f_2 h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w, \quad (4.22)$$

et les contraintes à ajouter au modèle mathématique pour gérer cette pénalité sont :

$$X_{f_1 h} + Z_{f_2 h}^w - \Delta_{f_1 f_2 h}^w \leq 1, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, f_1 \neq f_2, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.23)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, f_1 \neq f_2, h \in H_2, w \in \Omega. \quad (4.24)$$

De la même façon que pour une pénalité constante, la minimisation des coûts dans la fonction objectif cherche à avoir  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w = 0$  dès que possible et la contrainte (4.23) associée à  $f_1, f_2$ ,

$h$  et  $w$  force la variable  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  à être égale à 1 seulement si l'affectation de la chaîne  $h$  passe du type d'avion  $f_1$  lors de l'affectation initiale ( $X_{f_1 h} = 1$ ) au type d'avion  $f_2$  lors du recours dans le scénario  $w$  ( $Z_{f_2 h}^w = 1$ ).

### 4.3.2.2 Deuxième formulation

Ce modèle place une partie des coûts et des pertes de revenus sur l'affectation initiale donnée par les variables  $X$ . Les pertes de revenus provenant du PFM étant calculées par scénario de demande, une moyenne sur tous les scénarios est faite, en fonction de leur probabilité d'occurrence. Les variables  $\Delta$  définies précédemment sont utilisées pour calculer la variation des coûts et revenus par scénario à la suite de la réaffectation ainsi que la pénalité sur chaque échange. Nous présentons le modèle mathématique complet sans décomposition et détaillons les différences avec le premier modèle par la suite :

$$\min \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} X_{fh} (C_{fh} + \sum_{w \in \Omega} p^w RL_{fh}^w) + \sum_{w \in \Omega} p^w \sum_{h \in H_2} \left[ \sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w [(C_{f_2 h} - C_{f_1 h}) + (RL_{f_2 h}^w - RL_{f_1 h}^w)] + \sum_{\substack{f_1 \in F_h \\ f_2 \in F_h \\ f_1 \neq f_2}} p_{f_1 f_2 h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w \right] \right] \quad (4.25)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} X_{fh} = 1, \quad \forall h \in H, \quad (4.26)$$

$$\sum_{\substack{e \in E_f: \\ d_e = k}} \sum_{h \in e} X_{fh} + Y_{fk-k} - \sum_{\substack{e \in E_f: \\ o_e = k}} \sum_{h \in e} X_{fh} - Y_{fk k^+} = 0, \quad \forall k \in K_{sf}, s \in S, f \in F, \quad (4.27)$$

$$\sum_{h \in O_f} X_{fh} + \sum_{s \in S} Y_{fk_s f k_s^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (4.28)$$

$$\sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.29)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w - \sum_{h \in e} X_{fh} = 0, \quad \forall e \in E_2, f \in F, w \in \Omega, \quad (4.30)$$

$$X_{f_1 h} + Z_{f_2 h}^w - \Delta_{f_1 f_2 h}^w \leq 1, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.31)$$

$$\sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w = 1, \quad \forall h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.32)$$

$$X_{fh} \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H, \quad (4.33)$$

$$Y_{fkk^+} \geq 0, \quad \forall k \in K_{sf}, s \in S, f \in F, \quad (4.34)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.35)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega. \quad (4.36)$$

Comme expliqué au début de cette section, l'objectif de ce modèle est de pouvoir utiliser la décomposition de Benders de façon plus efficace comparé au premier. Dans celui-ci, les variables  $Z$  n'apparaissent plus dans la fonction objectif. Elles sont uniquement impliquées dans les contraintes (4.29)–(4.31) qui gèrent la réaffectation et la pénalité de chaque échange.

Les variables binaires  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  sont ici définies pour tout type d'avion admissible  $f_1$  et  $f_2$ . Lorsque  $f_2 = f_1$ , cela signifie qu'il n'y a pas eu d'échange. La portion de la fonction objectif avec la variable  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  sera alors égale à 0 (aucune variation). Ceci est nécessaire, car la variation des coûts et des pertes de revenus en modifiant l'affectation peut être négative. La minimisation de la fonction objectif ne fixera donc pas forcément  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w = 0$ . Les contraintes (4.31) assurent que  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w = 1$  si  $X_{f_1 h} = 1$  et  $Z_{f_2 h}^w = 1$  et les contraintes (4.32) assurent qu'une et une seule variable  $\Delta$  sera égale à 1 pour une chaîne  $h \in H_2$  et un scénario  $w \in \Omega$  donné.

Les contraintes (4.26)–(4.28) sont les mêmes que dans la première formulation et gèrent respectivement l'affectation initiale sur chaque chaîne, la conservation du flot dans le réseau et le respect de la disponibilité des avions. Les contraintes (4.29) et (4.30) sont très semblables aux contraintes (4.14) et (4.15) de la première formulation, mais elles sont ici définies uniquement pour les chaînes  $h \in H_2$  et les ensembles  $e \in E_2$  respectivement. Ceci est possible, car les coûts et les pertes de revenus sont mis sur l'affectation initiale. Les chaînes ne pouvant pas être impliquées dans un échange peuvent être ignorées lors de la réaffectation dans chaque scénario, ce qui n'était pas possible dans le premier modèle. Les contraintes (4.29)–(4.32) sont donc définies uniquement pour les chaînes ayant un échange de types d'avion possible, tout comme les variables  $Z$  et  $\Delta$ . La section 4.4.2 présente en détail comment la décomposition de Benders est utilisée pour résoudre ce modèle.

### 4.3.3 Modèle d'affectation des types d'avion avec chaînes libres

La troisième variante du problème ne suppose pas que les chaînes sont connues à l'avance comme dans les deux variantes précédentes, la notation est donc sensiblement différente. L'affectation initiale est identique au FAP standard. Elle se fait sur l'ensemble des vols  $L$ , indexé par  $l$  ou  $\{odt\}$ , représentant un vol de l'origine  $o$  vers la destination  $d$  au temps  $t$ . L'ensemble des nœuds du réseau est représenté par  $N$ . Nous utilisons les variables  $X$ , où  $X_{fl}$  est égale à 1 si la flotte  $f$  est affectée au vol  $l$ , 0 sinon, dans l'affectation initiale. L'ensemble des types d'avion admissibles pour un vol  $l$  est donné par  $F_l$ . Le nombre d'avions de type  $f$  au sol à la station  $o$  durant l'intervalle  $[t, t^+]$  est représenté par la variable  $Y_{fott^+}$ . Le comptage des avions se fait de la même façon que dans le FAP standard (voir section 3.2.1).  $O_f$  représente l'ensemble des vols  $l$  traversant l'heure de comptage et  $[t_{sf}, t_{sf}^+]$  est l'intervalle de temps à la station  $s$  pour le type d'avion  $f$  qui inclut l'heure de comptage.

Simultanément avec l'affectation initiale, le modèle doit être en mesure de choisir quelles chaînes seront activées, ces dernières pouvant différer d'un scénario à l'autre. Plutôt que de connaître l'ensemble des chaînes  $H$  comme dans les modèles précédents,  $H$  représente l'ensemble des chaînes potentielles (qui inclut également chaque vol comme étant une chaîne d'un seul vol). Il est possible d'énumérer toutes les chaînes potentielles ou de limiter leur nombre à inclure dans  $H$  en fonction de différents critères : le nombre de vols par chaîne, le temps de connexion entre chaque vol ou la durée totale d'une chaîne par exemple. En incluant toutes les chaînes d'un seul vol, une solution réalisable du FAP standard sera aussi réalisable pour ce modèle. Chaque vol  $l$  peut faire partie de plusieurs chaînes potentielles. L'ensemble des chaînes potentielles incluant le vol  $l$  est identifié par  $H_l$ . Les chaînes potentielles sont regroupées en ensembles de chaînes compatibles  $e \in E$  comme dans les modèles précédents.

Des contraintes sont ajoutées au modèle pour savoir quelles chaînes potentielles sont actives lors de la réaffectation pour chaque scénario. Une chaîne peut être active seulement si tous les vols de cette chaîne ont le même type d'avion lors de l'affectation initiale. De plus, pour chaque vol une et une seule chaîne incluant ce vol peut être active par scénario. Nous définissons

les variables binaires  $V$ , où  $V_{fh}^w$  est égale à 1 si la chaîne  $h$  est active pour le scénario  $w$  et est effectuée par le type d'avion  $f$  dans l'affectation initiale, 0 sinon. Les variables  $V_{fh}^w$  font donc le lien entre l'affectation initiale sur les vols avec les variables  $X_{fl}$  et la réaffectation faite sur les chaînes pour chaque scénario  $w$  avec les variables  $Z_{fh}^w$  définies dans les modèles précédents. Le modèle mathématique s'écrit alors :

$$\min \quad \sum_{w \in \Omega} p^w \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w (C_{fh} + RL_{fh}^w) + \text{Coût des échanges} \right] \quad (4.37)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_l} X_{fl} = 1, \quad \forall l \in L, \quad (4.38)$$

$$\sum_{o \in S} \sum_{t': \tau_{fost'}=t} X_{fost'} + Y_{fst-t} - \sum_{d \in S} X_{fsdt} - Y_{fstt+} = 0, \quad \forall \{f, s, t\} \in N, \quad (4.39)$$

$$\sum_{l \in O_f} X_{fl} + \sum_{s \in S} Y_{fst_s f t_s^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (4.40)$$

$$X_{fl} - V_{fh}^w \geq 0, \quad \forall w \in \Omega, h \in H_l, f \in F_l, l \in L, \quad (4.41)$$

$$\sum_{h \in H_l} \sum_{f \in F_l} V_{fh}^w = 1, \quad \forall l \in L, w \in \Omega, \quad (4.42)$$

$$\sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w - \sum_{f \in F_h} V_{fh}^w = 0, \quad \forall h \in H, w \in \Omega, \quad (4.43)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w - \sum_{h \in e} V_{fh}^w = 0, \quad \forall e \in E, f \in F, w \in \Omega, \quad (4.44)$$

$$X_{fl} \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_l, l \in L, \quad (4.45)$$

$$V_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H, w \in \Omega, \quad (4.46)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H, w \in \Omega, \quad (4.47)$$

$$Y_{fstt+} \geq 0, \quad \forall \{f, s, t\} \in N. \quad (4.48)$$

La fonction objectif est la même que celle du modèle (4.10)–(4.18) présenté à la section précédente (4.3.2.1). Les contraintes (4.38)–(4.40) qui gèrent l'affectation initiale sont les mêmes que celles du FAP standard présenté à la section 3.2.1. Les contraintes (4.41) assurent que la variable  $V_{fh}^w$  peut être égale à 1 (ce qui représente l'activation de la chaîne  $h$  avec le type d'avion  $f$  dans le scénario  $w$ ) uniquement si tous les vols  $l$  faisant partie de cette

chaîne ont la flotte  $f$  comme affectation initiale. Les contraintes (4.42) imposent qu'une et une seule chaîne  $h$  comprenant le vol  $l$  puisse être active par scénario. Les chaînes d'un même ensemble de chaînes compatibles  $e \in E$  ne sont pas nécessairement toutes actives dans un même scénario de demande. Des contraintes doivent être ajoutées afin d'assurer qu'une chaîne active  $h$  dans un scénario  $w$  (peu importe le type d'avion  $f$ ) se voit affecter un type d'avion lors de la réaffectation, qu'il y ait un échange ou non. Ceci est imposé par les contraintes (4.43). Les contraintes (4.44) s'assurent que les échanges de types d'avion se font entre chaînes compatibles seulement. Finalement, les contraintes binaires et de non-négativité (4.45)–(4.48) restreignent le domaine de faisabilité des variables.

Ce modèle permet également d'ajouter une pénalité sur les échanges de types d'avion selon les deux méthodes décrites plus haut. Le coût à ajouter à la fonction objectif sera le même qu'aux équations (4.19) et (4.22) selon que la pénalité est constante ou spécifique pour chaque échange respectivement. Pour les contraintes à ajouter au modèle, il suffit de remplacer la variable  $X_{fh}$  par les variables  $V_{fh}^w$ . Pour une pénalité constante, les contraintes à ajouter sont donc :

$$Z_{fh}^w - V_{fh}^w + \delta_h^w \geq 0, \quad \forall f \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.49)$$

$$\delta_h^w \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H_2, w \in \Omega \quad (4.50)$$

et, pour une pénalité spécifique pour chaque échange, nous obtenons :

$$V_{f_1h}^w + Z_{f_2h}^w - \Delta_{f_1f_2h}^w \leq 1, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, f_1 \neq f_2, h \in H_2, w \in \Omega, \quad (4.51)$$

$$\Delta_{f_1f_2h}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2, w \in \Omega. \quad (4.52)$$

#### 4.4 Méthodes de résolution

Nous présentons maintenant deux méthodes de résolution pouvant être utilisées pour résoudre chacun des modèles : une approche directe par CPLEX et une approche utilisant la décomposition de Benders. Les deux méthodes sont appliquées à la deuxième variante du

problème présentée à la section 4.3.2. L'approche directe par CPLEX est appliquée sur le premier modèle de cette variante (section 4.3.2.1) tandis que la méthode de résolution utilisant la décomposition de Benders est appliquée sur le deuxième (section 4.3.2.2).

#### 4.4.1 Approche directe par CPLEX

La première méthode de résolution consiste à résoudre le modèle (4.10)–(4.18) dans son ensemble directement par CPLEX. Un algorithme semblable à celui utilisé pour résoudre le FAP avec réévaluation externe des revenus à la section 3.2.3 est appliqué. L'algorithme est résumé à la figure 4.4. Tout d'abord, les segments de vol doivent être regroupés en chaînes. Ceci peut être fait à partir d'une résolution initiale ou de l'horaire de l'année précédente. Cette étape peut varier sensiblement d'une compagnie aérienne à l'autre selon l'ensemble des vols de leur horaire. Nous présentons à la section 5.1 le découpage de chaînes utilisé pour nos tests. Ensuite, les pertes de revenus sont initialisées pour chaque scénario de demande et pour chaque chaîne à l'aide du PFM. Cette initialisation est la même que celle utilisée dans le chapitre précédent. Les pertes de revenus des segments de vol formant une chaîne sont calculées par le PFM et additionnées pour donner les pertes de revenus de la chaîne.

L'algorithme itère ensuite entre la résolution du FAP avec réaffectation et scénarios de demande et la résolution du PFM pour chaque scénario afin de mettre à jour les pertes de revenus par chaîne. Une fois le critère d'arrêt atteint (généralement un certain nombre d'itérations), le processus est arrêté. Puisque l'objectif est d'obtenir une solution suffisamment flexible pour répondre aux différentes variations possibles de la demande, nous évaluons les solutions obtenues après chaque itération sur un ensemble de scénarios de demande différents que ceux utilisés lors de la résolution. Ceci nous permet d'observer l'amélioration des profits espérés d'une itération à l'autre et de comparer les profits selon le nombre de scénarios de demande utilisés.

L'évaluation d'une solution  $\bar{X}$  sur un scénario de demande  $w$  spécifique se fait en trois étapes. Premièrement, les pertes de revenus  $RL_{fh}^w$  par type d'avion  $f$  et par chaîne  $h$  pour ce scénario sont calculées par le PFM en utilisant la capacité des types d'avion de la solution  $\bar{X}$ . Ensuite,

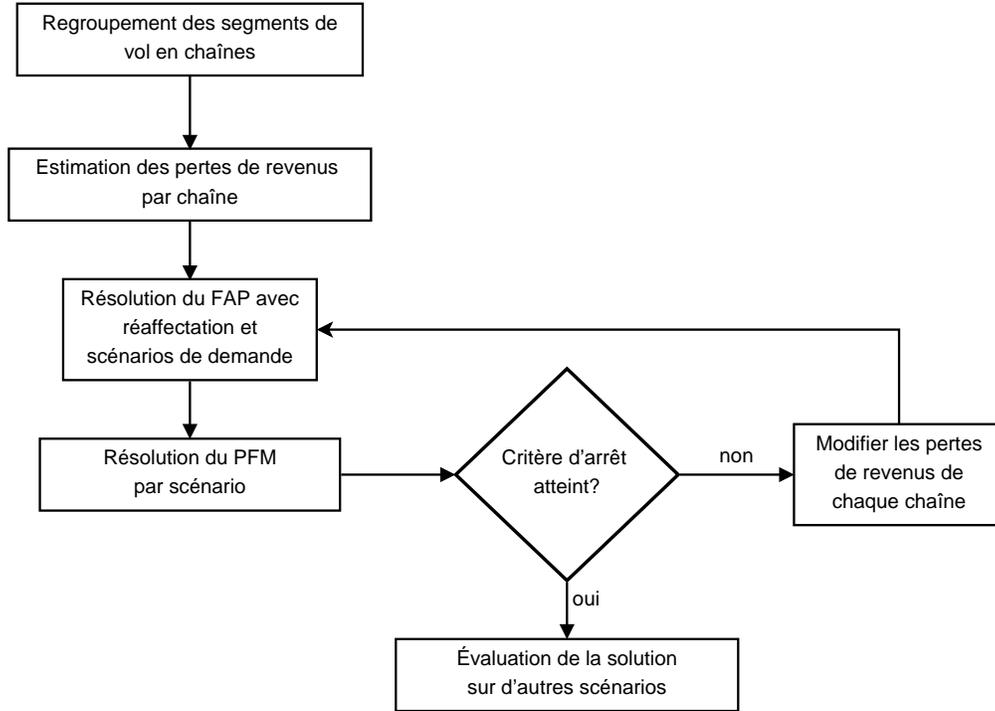


Figure 4.4: Algorithme de résolution pour l'approche directe par CPLEX

un problème d'échanges de types d'avion pour ce scénario est résolu. Le modèle mathématique donne :

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w (C_{fh} + RL_{fh}^w) + p_{ex} \sum_{h \in H_2} \delta_h^w \quad (4.53)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in H, \quad (4.54)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w = \sum_{h \in e} \bar{X}_{fh}, \quad \forall e \in E_f, f \in F, \quad (4.55)$$

$$Z_{fh}^w + \delta_h^w \geq \bar{X}_{fh}, \quad \forall f \in F_h, h \in H_2, \quad (4.56)$$

$$\delta_h^w \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H_2, \quad (4.57)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H. \quad (4.58)$$

La résolution du modèle (4.53)–(4.58) permet d'obtenir la solution spécifique pour ce scénario après les échanges de types d'avion entre chaînes compatibles. Le modèle est obtenu en

limitant à un scénario le modèle complet (section 4.3.2.1) et en remplaçant les variables  $X$  et  $Y$  par la solution  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ . Les contraintes impliquant uniquement les variables  $X$  et  $Y$  sont ainsi enlevées. Les contraintes (4.54) assurent l'affectation d'exactly un type d'avion par chaîne. Les contraintes (4.55) garantissent que pour chaque ensemble de chaînes compatibles le nombre d'avion de chaque type dans la solution initiale  $\bar{X}$  est respecté lors des échanges de types d'avion. La pénalité sur les échanges est gérée par les contraintes (4.56). Nous utilisons ici un coût constant  $p_{ex}$  par échange avec le coût dans la fonction objectif donné à l'équation (4.19). Les contraintes (4.56)–(4.57) sont équivalentes aux contraintes (4.20)–(4.21), avec la variable  $X_{fh}$  remplacée par la valeur  $\bar{X}_{fh}$  obtenue de la solution du problème maître. Un coût spécifique par échange  $p_{f_1f_2h}$  pourrait aussi être utilisé en remplaçant le coût des échanges dans la fonction objectif par le coût donné à l'équation (4.22) et les contraintes (4.56)–(4.57) par les contraintes (4.23)–(4.24). Finalement, le PFM est réexécuté avec la solution de ce modèle pour obtenir l'évaluation des revenus pour ce scénario de demande. Cette évaluation est faite pour un grand nombre de scénarios pour obtenir une moyenne des profits espérés et ainsi bien évaluer la flexibilité de la solution face à une variation de la demande.

#### 4.4.2 Décomposition de Benders

La décomposition de Benders (1962) est une méthode souvent utilisée pour résoudre des problèmes complexes comme des problèmes stochastiques ou en programmation mixte en nombres entiers, où certaines variables prennent une valeur entière tandis que d'autres peuvent être réelles. Le principe général de la décomposition de Benders est d'exploiter la structure d'un modèle pour le résoudre en le séparant en un problème maître et un sous-problème. L'algorithme itère entre la résolution du problème maître, qui attribue une valeur provisoire aux variables qu'il contient, et le sous-problème, qui est obtenu en fixant les variables du problème maître à leur valeur provisoire. À chaque itération, le sous-problème transmet de l'information au problème maître sous forme de coupes de faisabilité et d'optimalité, réduisant l'espace de solution jusqu'à ce qu'il y ait convergence vers une solution optimale.

Dans le cas de notre problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et

scénarios de demande, l'utilisation de scénarios donne une structure spécifique au modèle qui se prête bien à la décomposition de Benders en ayant plusieurs sous-problèmes, soit un par scénario. Le problème maître regroupe les variables associées à l'affectation initiale et sa résolution permet d'obtenir une solution provisoire. Chaque sous-problème regroupe les variables spécifiques à la réaffectation d'un scénario. Il utilise la solution provisoire du problème maître afin de trouver les réaffectations à effectuer pour ce scénario ainsi que la variation des coûts et des revenus par rapport à l'affectation initiale. Cette information est transmise sous forme de coupes d'optimalité au problème maître et le processus itératif recommence.

Nous présentons d'abord le principe de la décomposition de Benders sur un modèle général ayant la même structure que le modèle présenté à la section 4.3.2.2. La formulation mathématique de la décomposition de Benders appliquée sur ce modèle est ensuite présentée et nous terminons en expliquant la stratégie de résolution avec cette technique.

#### 4.4.2.1 Principe

Nous présentons la décomposition de Benders sur un problème stochastique général à deux étapes, qui est appelé problème stochastique avec recours. La première étape correspond à une décision initiale, celle-ci prenant une décision sur le futur sans disposer de toute l'information. Cette incertitude est représentée comme un événement aléatoire  $w$  parmi un ensemble d'événements possibles  $\Omega$ . La deuxième étape est le recours qui dépend de l'événement  $w$ . Soit  $x$  le vecteur des variables pour la décision initiale et  $c$  son vecteur de coûts associés. Le recours à la suite de l'événement  $w \in \Omega$  est représenté par le vecteur de variables  $y^w$  et son vecteur de coûts associés est  $f^w$ . Nous supposons que l'ensemble d'événements  $\Omega$  est fini ( $w = 1, \dots, W$ ) avec une probabilité d'occurrence  $p^w$  pour un événement  $w$  donné. Le modèle peut alors s'écrire sous la forme :

$$(P) \quad \min \quad c^T x + \sum_{w \in \Omega} p^w [(f^w)^T y^w] \quad (4.59)$$

$$\text{sujet à:} \quad Ax = b, \quad (4.60)$$

$$B^w x + Dy^w = d^w, \quad \forall w \in \Omega, \quad (4.61)$$

$$x \geq 0, \quad y^w \geq 0, \quad \forall w \in \Omega, \quad (4.62)$$

où  $c \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $f^w \in \mathbb{R}_+^{n_2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $d^w \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $B$  et  $D$  sont des matrices de taille  $m_1 \times n_1$  et  $m_2 \times n_2$  respectivement. Les contraintes (4.60) sont reliées à la décision initiale, tandis que les contraintes (4.61) sont reliées au recours. Nous remarquons que la matrice  $D$  ne dépend pas de l'événement  $w$ . La matrice des contraintes a donc une structure duale bloc-angulaire qui peut être exploitée :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ B^1 & D & & \\ B^2 & 0 & D & \\ \vdots & & & \ddots \\ B^W & & & D \end{pmatrix}$$

Cette structure permet de décomposer le problème ( $P$ ) en un problème maître ( $PM$ ) et différents sous-problèmes ( $SP^w$ ), un pour chaque événement  $w$ . Le problème maître donne :

$$(PM) \quad \min \quad c^T x + \sum_{w \in \Omega} p^w \theta^w \quad (4.63)$$

$$\text{sujet à:} \quad Ax = b, \quad (4.64)$$

$$x \geq 0, \quad \theta^w \in \mathbb{R}, \quad \forall w \in \Omega. \quad (4.65)$$

Les variables  $\theta^w$  représentent le coût du recours  $w$  qui provient du sous-problème ( $SP^w$ ). Comme celui-ci n'est pas connu initialement, les variables  $\theta^w$  sont fixées à zéro (en supposant que la fonction objectif de tous les sous-problèmes est non-négative, sinon il faut fixer  $\theta^w$  à une borne inférieure). Une fois le problème maître résolu, la solution optimale  $\bar{x}$  obtenue est

utilisée pour résoudre chaque sous-problème. Le sous-problème  $(SP^w)$  s'écrit alors :

$$(SP^w) \quad \min \quad (f^w)^T y^w \quad (4.66)$$

$$\text{sujet à:} \quad Dy^w = d^w - B^w \bar{x}, \quad (4.67)$$

$$y^w \geq 0. \quad (4.68)$$

La résolution du sous-problème permet d'obtenir des coupes d'optimalité si le sous-problème est réalisable et des coupes de faisabilité dans le cas contraire. Celles-ci sont ajoutées au problème maître afin de restreindre la variable  $\theta^w$ . Pour notre problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande, les sous-problèmes sont toujours réalisables, car ceux-ci gèrent la réaffectation pour un scénario de demande et l'affectation initiale peut toujours être conservée. Nous expliquons donc uniquement le calcul des coupes d'optimalité. L'application de la décomposition de Benders sur notre modèle est expliquée en détail à la section suivante.

Pour calculer une coupe d'optimalité, nous considérons d'abord le dual du problème  $(SP^w)$  qui s'écrit comme suit :

$$(SPD^w) \quad \max \quad (\pi^w)^T (d^w - B^w \bar{x}) \quad (4.69)$$

$$\text{sujet à:} \quad (\pi^w)^T D \leq f^w, \quad (4.70)$$

$$\pi^w \geq 0. \quad (4.71)$$

Ici,  $\pi^w$  est le vecteur des variables duales associées aux contraintes (4.67) du sous-problème  $(SP^w)$ . Le théorème de la dualité faible assure que  $(f^w)^T y^w \geq (\pi^w)^T (d^w - B^w \bar{x})$ . De plus, puisque la faisabilité du problème dual ne dépend pas de  $\bar{x}$ , nous obtenons donc  $(f^w)^T y^w \geq (\pi^w)^T (d^w - B^w x)$ . Ceci entraîne la contrainte suivante à ajouter au problème maître à la suite de la résolution du dual du sous-problème :

$$\theta^w \geq (\pi^w)^T (d^w - B^w x). \quad (4.72)$$

La contrainte (4.72) est une coupe d'optimalité et elle est ajoutée au problème (4.63)–(4.65)

uniquement si la solution courante  $(\bar{x}, \bar{\theta})$  la viole, c'est-à-dire, si

$$\bar{\theta}^w < (\pi^w)^T (d^w - B^w \bar{x}). \quad (4.73)$$

De plus, l'inégalité (4.73) sert de critère d'arrêt de l'algorithme. Si elle n'est pas satisfaite pour au moins un événement  $w$ , alors il n'y a plus de coupe d'optimalité à ajouter, l'algorithme se termine et la solution trouvée est optimale.

### Itération du processus et critère d'arrêt

L'objectif de la décomposition de Benders est de résoudre le problème  $(P)$  en alternant entre la résolution du problème maître  $(PM)$  et celle des sous-problèmes  $(SP^w)$  jusqu'à ce qu'il y ait convergence vers la solution optimale. En pratique, nous calculons des bornes inférieure et supérieure sur la solution optimale à chaque itération et nous arrêtons le processus lorsque le gap est suffisamment petit. Le problème  $(PM)$  ignorant les variables  $y$  et les contraintes (4.61) du problème  $(P)$ , il aura toujours une solution inférieure à la solution optimale. Étant donné qu'à chaque itération nous ajoutons une ou plusieurs contraintes qui ont pour effet de restreindre l'espace de solution du problème maître, cette borne inférieure sera améliorée. À l'itération  $v$ , soit la solution du problème maître  $(\bar{x}_v, \bar{\theta}_v)$ , la borne inférieure sera alors

$$LB = c^T \bar{x}_v + \sum_{w \in \Omega} p^w \bar{\theta}_v^w. \quad (4.74)$$

Une borne supérieure sur la fonction objectif du problème  $(P)$  peut être calculée à chaque itération. Il suffit de calculer la fonction objectif du problème  $(P)$  (équation 4.59) à l'aide des valeurs des solutions du problème maître et des sous-problèmes. À l'itération  $v$ , soit  $\bar{x}_v$  la solution du problème maître et  $\bar{y}_v^w$  les solutions pour les sous-problèmes. La borne supérieure à cette itération sera alors :

$$UB_v = c^T \bar{x}_v + \sum_{w \in \Omega} p^w [(f^w)^T \bar{y}_v^w]. \quad (4.75)$$

Cette borne supérieure n'est pas garantie de diminuer d'une itération à l'autre. Nous mettons donc à jour la borne supérieure à chaque itération en conservant uniquement la meilleure valeur :

$$UB = \min_{j=1,\dots,v} UB_j \quad (4.76)$$

Nous avons donc une borne inférieure non décroissante et une borne supérieure non croissante ce qui délimite progressivement plus étroitement la valeur de la fonction objectif du problème ( $P$ ). L'algorithme de la décomposition de Benders peut être stoppé lorsque la différence relative entre les bornes supérieure et inférieure est en dessous d'un certain seuil  $\epsilon$  fixé, soit lorsque nous avons (en supposant  $LB > 0$ ) :

$$(UB - LB)/LB \leq \epsilon \quad (4.77)$$

#### 4.4.2.2 Formulation mathématique

Nous présentons la décomposition de Benders appliquée au modèle (4.25)–(4.36) présenté à la section 4.3.2.2. Le problème maître gère l'affectation initiale avec la conservation du flot et le respect du nombre d'avions. Les sous-problèmes, un par scénario, traitent la réaffectation de la flotte et la pénalité sur les échanges.

#### Problème maître

Le problème maître correspond au FAP standard auquel on ajoute des coupes d'optimalité. La fonction objectif correspond à la fonction objectif standard du FAP calculée avec l'affectation initiale (variables  $X$ ). La perte de revenu est la somme pondérée des pertes de revenus des scénarios. À ceci s'ajoute une somme pondérée de la variation des profits de chaque scénario (par rapport aux profits de l'affectation initiale), représentés par  $\theta^w$ , en fonction de leur probabilité d'occurrence. Les variables  $\theta^w$  représentent la valeur de la fonction objectif du sous-problème associé à chaque scénario  $w$  et elles apparaissent également dans les coupes

d'optimalité.

$$(PM) \quad \min \quad \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} X_{fh} (C_{fh} + \sum_{w \in \Omega} p^w RL_{fh}^w) + \sum_{w \in \Omega} p^w \theta^w \right] \quad (4.78)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} X_{fh} = 1, \quad \forall h \in H, \quad (4.79)$$

$$\sum_{\substack{e \in E: \\ d_e = k_s}} \sum_{h \in e} X_{fh} + Y_{fk_s^- k_s} - \sum_{\substack{e \in E: \\ o_e = k_s}} \sum_{h \in e} X_{fh} - Y_{fk_s k_s^+} = 0, \quad \forall k_s \in K_s, \quad s \in S, \quad f \in F, \quad (4.80)$$

$$\sum_{h \in O_{fh}} X_{fh} + \sum_{s \in S} Y_{fk_s o k_s^+} \leq n_f, \quad \forall f \in F, \quad (4.81)$$

$$\text{Coupes d'optimalité,} \quad (4.82)$$

$$X_{fh} \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, \quad h \in H, \quad (4.83)$$

$$Y_{fk_s k_s^+} \geq 0, \quad \forall k_s \in K_s, \quad s \in S, \quad f \in F, \quad (4.84)$$

$$\theta^w \in \mathbb{R}, \quad \forall w \in \Omega. \quad (4.85)$$

Les contraintes (4.79)–(4.81) et (4.83)–(4.84) sont identiques aux contraintes (4.26)–(4.28) et (4.33)–(4.34). Les coupes d'optimalité (4.82) seront formulées ci-dessous.

### Sous-problèmes par scénario

Les sous-problèmes se limitent aux ensembles de chaînes compatibles de cardinalité plus grande ou égale à 2, c'est-à-dire les ensembles où un échange est possible. Le sous-problème associé à un scénario  $w$  est le suivant :

$$(SP^w) \quad \min \quad \sum_{h \in H_2} \left[ \sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w [(C_{f_1 h} - C_{f_2 h}) + (RL_{f_1 h}^w - RL_{f_2 h}^w)] \right. \\ \left. + p_{ex} \sum_{\substack{f_1 \in F_h \\ f_1 \neq f_2}} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w \right] \quad (4.86)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in H_2, \quad (4.87)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w = \sum_{h \in e} \bar{X}_{fh}, \quad \forall e \in E_2, f \in F, \quad (4.88)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \leq \bar{X}_{f_2 h}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2, \quad (4.89)$$

$$Z_{f_1 h}^w - \Delta_{f_1 f_2 h}^w \geq 0, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2, \quad (4.90)$$

$$\sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w = 1, \quad \forall h \in H_2, \quad (4.91)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in H_2, \quad (4.92)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in H_2. \quad (4.93)$$

où  $\bar{X}_{fh}$  est la solution du problème maître,  $\forall f \in F_h, h \in H$ .

Nous rappelons que la variable  $\Delta_{f_1 f_2 h}^w$  est égale à 1 si  $Z_{f_1 h}^w = 1$  et  $\bar{X}_{f_2 h} = 1$ , 0 sinon. Ces variables permettent de calculer la différence des coûts et des revenus entre la solution initiale  $\bar{X}$  et la solution après réaffectation pour chaque scénario  $Z^w$ .

Soit  $\pi_h^w$ ,  $\alpha_{ef}^w$ ,  $\beta_{f_1 f_2 h}^w$  et  $\gamma_h^w$  les variables duales associées aux contraintes (4.87), (4.88), (4.89) et (4.91) respectivement. La coupe d'optimalité à ajouter au problème maître après avoir résolu la relaxation linéaire du sous-problème associé au scénario  $w$  est :

$$\theta^w \geq \sum_{h \in H_2} \pi_h^w + \sum_{e \in E_2} \sum_{f \in F} \alpha_{ef}^w \left( \sum_{h \in e} X_{fh} \right) + \sum_{h \in H_2} \sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \beta_{f_1 f_2 h}^w X_{f_2 h} + \sum_{h \in H_2} \gamma_h^w. \quad (4.94)$$

La coupe est ajoutée seulement si la solution courante du problème maître l'enfreint, tel que décrit par l'inégalité (4.73). Dans cette coupe, les  $X_{fh}$  sont bien des variables. Les valeurs des variables duales sont obtenues en utilisant la méthode du simplexe dual lors de la résolution de chaque sous-problème. Afin d'obtenir ces valeurs, il est nécessaire de résoudre la relaxation linéaire du sous-problème. Nous détaillons à la section suivante l'algorithme utilisé pour obtenir une solution entière. Le sous-problème est toujours réalisable puisque la solution du problème maître peut être conservée, ce qui représente qu'aucun échange de chaînes n'est fait. Il n'y a donc jamais lieu d'ajouter des coupes de faisabilité au problème maître.

### Sous-problèmes par scénario et par ensemble de chaînes compatibles

Nous remarquons que les décisions prises lors de la réaffectation sont indépendantes d'un ensemble de chaînes compatibles à l'autre. Il est donc possible de définir les sous-problèmes pour chaque scénario  $w \in \Omega$  et pour chaque ensemble de chaînes compatibles  $e \in E_2$ . Ceci revient à résoudre le sous-problème (4.86)–(4.93) séparément pour chaque ensemble de chaînes compatibles en remplaçant  $h \in H_2$  par  $h \in e$  et en définissant les contraintes (4.88) uniquement pour l'ensemble de chaînes compatibles  $e$  qui est considéré. Le sous-problème associé au scénario  $w \in \Omega$  et à l'ensemble de chaînes compatibles  $e \in E_2$  est le suivant :

$$(SP_e^w) \quad \min \sum_{h \in e} \left[ \sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w [(C_{f_1 h} - C_{f_2 h}) + (RL_{f_1 h}^w - RL_{f_2 h}^w)] \right. \\ \left. + p_{ex} \sum_{\substack{f_1 \in F_h \\ f_1 \neq f_2}} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w \right] \quad (4.95)$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w = 1, \quad \forall h \in e, \quad (4.96)$$

$$\sum_{h \in e} Z_{fh}^w = \sum_{h \in e} \bar{X}_{fh}, \quad \forall f \in F, \quad (4.97)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \leq \bar{X}_{f_2 h}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in e, \quad (4.98)$$

$$Z_{f_1 h}^w - \Delta_{f_1 f_2 h}^w \geq 0, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in e, \quad (4.99)$$

$$\sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \Delta_{f_1 f_2 h}^w = 1, \quad \forall h \in e, \quad (4.100)$$

$$Z_{fh}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F_h, h \in e, \quad (4.101)$$

$$\Delta_{f_1 f_2 h}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall f_1, f_2 \in F_h, h \in e. \quad (4.102)$$

Dans cette situation, la fonction objectif de  $(SP_e^w)$  peut être représenté par  $\theta_e^w$ . La variable  $\theta^w$  sera remplacée dans la fonction objectif du problème maître (4.78)–(4.85) à l'aide de la relation suivante :  $\theta^w = \sum_{e \in E_2} \theta_e^w$ . Soit  $\pi_h^w$ ,  $\alpha_{ef}^w$ ,  $\beta_{f_1 f_2 h}^w$  et  $\gamma_h^w$  les variables duales associées aux contraintes (4.96), (4.97), (4.98) et (4.100) respectivement. La coupe d'optimalité, à ajouter au problème maître si sa solution courante l'enfreint, associé au sous-problème  $(SP_e^w)$

est :

$$\theta_e^w \geq \sum_{h \in e} \pi_h^w + \sum_{f \in F} \alpha_{ef}^w \left( \sum_{h \in e} X_{fh} \right) + \sum_{h \in e} \sum_{f_1 \in F_h} \sum_{f_2 \in F_h} \beta_{f_1 f_2 h}^w X_{f_2 h} + \sum_{h \in e} \gamma_h^w. \quad (4.103)$$

### Avantages par rapport à la première formulation

Bien que les deux modèles présentés à la section 4.3.2 soient équivalents, il y a certains avantages à appliquer la décomposition de Benders sur le deuxième modèle (4.25)–(4.36), plutôt que sur la première formulation (4.10)–(4.18). Cette dernière mettant tous les coûts et les pertes de revenus sur les variables  $Z$ , sa décomposition en problème maître et sous-problèmes ne serait pas idéale. La fonction objectif du problème maître serait simplement :

$$\min_{w \in \Omega} \sum_{w \in \Omega} p^w \theta^w, \quad (4.104)$$

tandis que celle du sous-problème pour le scénario  $w$  serait :

$$\min_{w \in \Omega} \sum_{w \in \Omega} p^w \left[ \sum_{h \in H} \sum_{f \in F_h} Z_{fh}^w (C_{fh} + RL_{fh}^w) + p_{ex} \sum_{h \in H_2} \delta_h^w \right]. \quad (4.105)$$

Ceci présente deux faiblesses. La première est qu'il y a plusieurs affectations à des chaînes qu'il n'y a pas lieu de recalculer pour chaque scénario. En pratique, il existe plusieurs chaînes qui ne sont compatibles avec aucune autre chaîne. Elles n'ont pas de réaffectation possible pour chaque scénario et leur coût devrait être dans le problème maître ce qui n'est pas le cas. La décomposition de Benders appliquée à la deuxième formulation permet de limiter les sous-problèmes aux chaînes ayant une possibilité de réaffectation ( $h \in H_2$ ).

Deuxièmement, les variables  $\theta^w$  dans le problème maître prendront initialement des valeurs significativement plus élevées. En effet, elles considèrent les coûts et les pertes de revenus totales pour chaque chaîne. Le deuxième modèle considère plutôt la variation des coûts et des pertes de revenus entre l'affectation initiale et la réaffectation, et ce uniquement pour les chaînes  $h \in H_2$ . Ceci aura pour effet que les coupes d'optimalité, qui seraient ajoutées

au problème maître en appliquant la décomposition de Benders au premier modèle, auraient des coefficients beaucoup plus élevés pour chaque variable. Ceci est problématique, car les coefficients des variables pour le reste des contraintes se limitent exclusivement à -1, 0 ou 1. Ajouter des contraintes avec des coefficients très élevés peut causer des erreurs numériques lors de la résolution par ordinateur. Nous pouvons également nous attendre à moins d'itérations de la méthode de Benders appliquée à la deuxième formulation. En effet, les premières solutions du problème maître seront dans la bonne région de l'espace des solutions et les coupes s'appliqueront aussi dans la région près de la solution optimale. Ce sont d'ailleurs ces problèmes qui ont motivé le développement de ce deuxième modèle.

#### 4.4.2.3 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution utilisant la décomposition de Benders est résumé à la figure 4.5. De la même manière que pour l'approche directe par CPLEX (voir figure 4.4), le PFM est intégré afin de mettre à jour les pertes de revenus. La même initialisation pour regrouper les segments de vol en chaînes et initialiser les pertes de revenus est faite. Le FAP avec réaffectation et scénarios de demande est ensuite résolu en utilisant la décomposition de Benders. Ces étapes sont regroupées dans l'encadré sur la figure et remplacent l'unique étape *Résolution du FAP avec réaffectation et scénarios de demande* de l'approche directe par CPLEX.

De manière plus spécifique, la résolution se fait en trois phases. L'algorithme est semblable à celui utilisé par Cordeau *et al.* (2001). La première phase relaxe les contraintes d'intégrité pour le problème maître et les sous-problèmes. La résolution itère entre les deux et les coupes d'optimalité sont ajoutées au problème maître. Lorsque le critère d'arrêt est atteint, nous passons à la deuxième phase où le problème maître est résolu en nombres entiers à chaque itération. Le critère d'arrêt utilisé est le même que celui expliqué précédemment, avec la borne inférieure calculée de la même façon qu'à l'équation (4.74) et la borne supérieure à l'équation (4.76). Nous imposons une tolérance sur la différence relative entre ces deux bornes. En pratique, celle-ci diminue lentement et un grand nombre d'itérations sont nécessaires pour que le gap soit suffisamment petit. Nous limitons donc également le nombre d'itérations pour

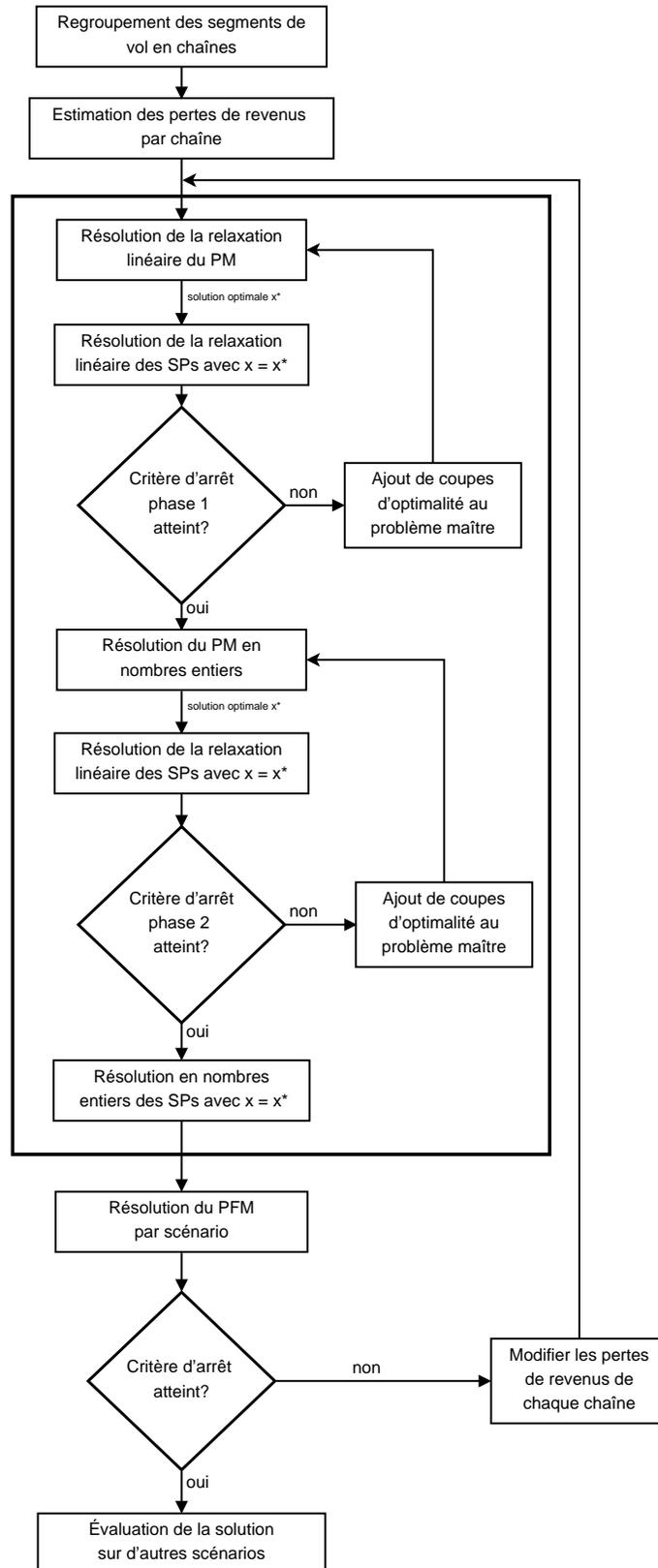


Figure 4.5: Algorithme de résolution pour l'approche par décomposition de Benders

limiter le temps de calcul. La deuxième phase réintègre les contraintes d'intégrité pour le problème maître et l'algorithme continue d'itérer entre la résolution du problème maître et la relaxation linéaire des sous-problèmes. Des coupes d'optimalité sont ajoutées au problème maître et un critère d'arrêt semblable est utilisé pour stopper le processus, le nombre d'itérations maximal pouvant être différent que pour la première phase. Finalement, la troisième phase réintègre les contraintes d'intégrité sur les sous-problèmes afin d'obtenir une solution entière en les résolvant une dernière fois en nombres entiers, la valeur des variables du problème maître étant gardée fixe.

Une fois qu'une solution est obtenue pour le FAP avec réaffectation et scénarios de demande, le PFM est résolu pour chaque scénario, les pertes de revenus sont mises à jour et le processus recommence. Le même critère que pour l'approche directe par CPLEX est utilisé pour arrêter ce processus, soit un nombre d'itérations. Finalement, la solution de chaque itération est évaluée sur un ensemble de scénarios de demande différents.

L'algorithme utilisé présente deux aspects heuristiques. Premièrement, les sous-problèmes sont résolus en nombres entiers uniquement à la toute fin. Il est nécessaire de résoudre la relaxation linéaire des sous-problèmes afin de pouvoir générer les coupes d'optimalité à ajouter au problème maître, mais ceci rend le processus sous-optimal. Le deuxième aspect heuristique est le critère d'arrêt utilisé par l'algorithme pour stopper l'exécution des deux phases. Plus la tolérance utilisée est petite et le nombre d'itérations élevé plus l'aspect heuristique sera minimisé.

Différentes techniques d'accélération pourraient être implémentées pour accélérer la convergence de l'algorithme et ainsi réduire le nombre d'itérations nécessaires. Magnanti et Wong (1981) proposent d'ajouter des coupes Pareto-optimales. En repartant de la définition générale d'une coupe optimale donnée à l'équation (4.72), une coupe  $\theta^w \geq (\pi_1^w)^T(d^w - B^w x)$  domine une autre coupe  $\theta^w \geq (\pi_2^w)^T(d^w - B^w x)$  si  $(\pi_1^w)^T(d^w - B^w x) \geq (\pi_2^w)^T(d^w - B^w x)$  pour tout  $x \in X$  avec une inégalité stricte pour au moins un point de  $X$ , avec  $X$  étant l'ensemble solution du problème maître (4.63)–(4.65) initial (lorsque  $\theta^w = 0$  pour tout  $w \in \Omega$ ). Une coupe Pareto-optimale n'est dominée par aucune autre coupe. Rei *et al.* (2009) utilisent

le branchement local pour améliorer les bornes inférieure et supérieure et ainsi accélérer le processus de résolution. À chaque itération de la décomposition de Benders, le branchement local peut être utilisé pour résoudre une série de sous-problèmes pour trouver d'autres solutions réalisables. La borne supérieure est améliorée si une des solutions trouvées à un coût plus petit que la borne supérieure actuelle et chaque solution réalisable permet de générer une coupe d'optimalité ce qui a pour effet d'améliorer la borne inférieure. Saharidis *et al.* (2010) présentent une nouvelle stratégie qu'ils appellent (*covering cut bundle generation*). Ils observent que la plupart du temps les coupes ajoutées au problème maître sont des coupes de faible densité, c'est-à-dire qu'elles impliquent peu de variables de décision. Ces coupes ne restreignent pas significativement l'espace de solution du problème maître. L'algorithme qu'ils proposent permet de générer plusieurs coupes de faible densité plutôt qu'une seule, l'objectif étant que la majorité des variables de décisions soient impliquées dans au moins une coupe. L'espace de solution est alors plus restreint et l'algorithme devrait ainsi converger plus rapidement.

## CHAPITRE 5

### AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC RÉAFFECTATION ET SCÉNARIOS DE DEMANDE : EXPÉRIMENTATIONS ET RÉSULTATS

Ce chapitre présente les expérimentations et les résultats obtenus à partir des modèles et des méthodes de résolution décrits au chapitre précédent. Le modèle utilisé pour les expérimentations est celui développé à la section 4.3.2. Nous décrivons d'abord à la section 5.1 les instances sur lesquelles les tests ont été effectués et l'algorithme développé pour regrouper les segments de vol en chaînes. La section 5.2 explique comment les scénarios de demande ont été générés. Les expérimentations et les résultats obtenus en appliquant la décomposition de Benders pour résoudre les deux variantes du modèle de la section 4.3.2 sont présentés à la section 5.3. Les expérimentations et les résultats obtenus avec l'approche directe par CPLEX sur la variante (4.10)–(4.18) sont présentés à la section 5.4.

#### 5.1 Instances

Nous utilisons pour nos expérimentations le même réseau que celui décrit à la section 3.4.1 qui provient d'une partie du réseau d'Air Canada en 2002. Il contient 5 180 segments de vol répartis sur 7 jours et 205 avions de 15 types différents. Les passagers sont répartis parmi 23 948 itinéraires pour chacune des 3 classes tarifaires. Nous définissons un arc comme étant un segment de vol associé à une classe tarifaire. Un itinéraire est donc composé d'un ensemble d'arcs. Afin de pouvoir comparer l'utilité de notre modèle d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande sur des horaires de tailles diverses, nous avons sélectionné des sous-ensembles de ce réseau pour former plusieurs instances plus petites.

Pour former une instance, les journées consécutives la formant sont d'abord sélectionnées,

puis les segments de vol, les itinéraires de passagers et les avions sont traités dans l'ordre. Initialement, les segments de vol ayant leur heure de départ au courant d'une des journées choisies font partie de l'instance. Il est cependant possible que ce sous-ensemble de vols n'admette pas une solution réalisable pour l'affectation des types d'avion. La conservation du flot des avions et les contraintes de cyclicité de la solution (c'est-à-dire que la solution doit être répétable période après période) peuvent en effet être difficiles à respecter. Nous résolvons donc un FAP standard sur ce sous-ensemble où les contraintes de couverture de vols ont été relaxées en plaçant une forte pénalité pour chaque vol non couvert. Il est par la suite possible de retirer les segments de vol problématique de l'instance, soit ceux non couverts par la solution trouvée. Une fois les vols choisis, les itinéraires de passagers sont traités. Les itinéraires conservés sont ceux dont tous les arcs font partie de l'instance. Leur demande est ajustée afin de préserver la demande totale de chaque arc le plus possible. De manière plus spécifique, soit  $d_i$  la demande originale pour l'itinéraire  $i \in I$ , où  $I$  est l'ensemble de tous les itinéraires. La demande totale originale pour l'arc  $a$  est alors :  $D_a = \sum_{i \in a} d_i$ . Or, tous les itinéraires ne font pas partie de l'instance. Soit  $\tilde{I} \subseteq I$ , l'ensemble des itinéraires de l'instance considérée. La demande non ajustée de l'arc  $a$  pour cette instance est alors :

$$D'_a = \sum_{\substack{i \in a: \\ i \in \tilde{I}}} d_i. \quad (5.1)$$

Nous fixons la demande ajustée de l'itinéraire  $i$  pour l'instance considérée comme étant

$$\tilde{d}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{a: i \in a} \frac{D_a}{D'_a}, \quad (5.2)$$

où  $n_i$  est le nombre d'arcs dans l'itinéraire  $i$ . Les taux de récupération entre itinéraires sont également ajustés. Lorsqu'un arc est rempli à capacité, il est considéré comme fermé. Les itinéraires contenant cet arc sont alors fermés et la demande restante est en partie débordée sur d'autres itinéraires, en partie perdue. Soit  $q_{ij}$  la proportion des passagers de l'itinéraire  $i \in I$  qui sont récupérés par l'itinéraire  $j \in I$  lorsqu'il y a un tel débordement. Nous ajustons ces taux de récupération pour répartir équitablement la proportion des passagers qui auraient été récupérés par des itinéraires qui ne font pas partie de l'instance. Le taux de récupération

ajusté pour les itinéraires  $i, j \in \tilde{I}$  donne :

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{q_{ij}}{1 - \sum_{k \in \tilde{I}} q_{ik}} \quad (5.3)$$

Finalement, le nombre d'avions de chaque type et leur coût fixe d'utilisation sont ajustés. Même pour une instance d'une seule journée, le nombre total d'avions ne varie pas beaucoup par rapport à l'horaire complet car la majorité des avions sont utilisés chaque jour, mais un ajustement est tout de même nécessaire. Ceci est fait manuellement en réduisant le nombre d'avions de façon graduelle et en gardant une marge de manoeuvre minimale. Le coût fixe pour l'utilisation de chaque avion est ajusté en fonction du nombre de jours dans l'instance. Par exemple, une instance d'une journée aura des coûts fixes sept fois plus petits que l'horaire complet qui est sur sept jours.

Cette procédure est appliquée sur l'horaire complet pour obtenir 8 instances différentes : 3 instances d'une journée (lundi, jeudi et dimanche) ayant entre 678 et 759 vols, 3 instances de deux jours (lundi-mardi, jeudi-vendredi et samedi-dimanche) ayant entre 1 391 et 1 518 vols et 2 instances de trois jours (lundi à mercredi et vendredi à dimanche) ayant respectivement 2 257 et 2 151 vols. Le nombre d'avions est de 194 pour chaque instance. L'horaire complet sans modifications sur 7 jours avec 5 180 vols et 205 avions est aussi utilisé comme une instance pour les tests. En plus de ces 9 instances, nous utilisons les deux autres structures de demande décrites à la section 3.4.1 ainsi qu'un paramètre multipliant la demande espérée de chaque itinéraire afin de tester différents taux d'occupation.

Pour chacune des 9 instances, les segments de vol doivent être regroupés en chaînes. La façon de faire ce regroupement va considérablement dépendre de l'horaire de vol et de la compagnie aérienne. L'horaire doit être analysé pour observer où les opportunités d'échanges se situent. Un mauvais regroupement limitera l'affectation des types d'avion et pourrait mener à une solution pire que celle obtenue en résolvant un FAP standard. L'horaire que nous utilisons provient d'Air Canada qui a trois bases au pays, soit à Toronto, à Vancouver et à Montréal. En ajoutant Calgary et Ottawa, ces cinq villes sont responsables d'environ 60 % du trafic aérien de notre horaire. Le tableau 5.1 donne le nombre de vols en partance de chaque ville,

Tableau 5.1: Nombre de vols au départ des principales villes de l'horaire

Ville	Nombre de vols en partance
Toronto	1 538
Vancouver	526
Montréal	417
Calgary	331
Ottawa	271

le nombre d'arrivées étant exactement le même. À lui seul, l'aéroport de Toronto est donc impliqué dans 3 076 vols sur 5 180, soit presque 60 %, et il y a environ 20 vols par jour en moyenne avec Montréal dans chaque direction, 15 avec Vancouver. Cependant, lorsque nous regardons l'affectation qu'Air Canada a utilisée en 2002 pour cet horaire, ces vols ne forment pas toujours des allers-retours, c'est-à-dire que des vols consécutifs entre deux villes n'ont pas toujours la même affectation. Ceci est normal quand la demande en passagers est différente d'un vol à l'autre et que les avions peuvent être affectés de façon plus profitable sur d'autres vols.

L'algorithme développé pour regrouper les vols en chaînes tient compte de ces conditions spécifiques. Pour chaque instance, un FAP standard est d'abord résolu pour obtenir une affectation des types d'avion aux vols et une méthode heuristique est utilisée pour obtenir les itinéraires des avions. Nous divisons chaque route d'avion en plusieurs chaînes. Nous limitons les chaînes à une suite d'au plus  $n$  vols débutant et terminant au même aéroport et nous fixons un ordre de priorité pour les cinq aéroports principaux de l'horaire. L'aéroport de Toronto étant impliqué dans le plus de vols, il a la priorité 1 et il n'y a aucune restriction sur les chaînes qui y partent. Vancouver et Montréal ont la priorité 2, c'est-à-dire que les chaînes partant de ces aéroports ont comme seule restriction de ne pas passer par Toronto. Finalement, Calgary et Ottawa ont la priorité 3. Les chaînes au départ de ces aéroports ne peuvent pas passer par les villes de priorité 1 et 2. Toutes les autres villes n'ayant pas assez de vols pour qu'il y ait des échanges possibles, aucune chaîne partant d'elles n'est créée et elles ont la priorité 4. Pour chaque route d'avion  $r$ , nous avons la liste des vols effectués dans l'ordre par cet avion. En partant du premier vol, nous tentons de former une chaîne respectant

---

 Algorithm 5.1: Déterminer l'ensemble des chaînes H
 

---

```

pour chaque route  $r$  faire
  tant que  $r$  est non vide faire
    ChaîneAjoutée = FAUX
     $i = 2$ 
    tant que  $i < n$  ET  $i < \text{longueur}(r)$  faire
      si  $r[i].\text{priorité} < r[1].\text{priorité}$  alors
        break
      fin si
      si  $r[i].\text{destination} = r[1].\text{origine}$  alors
        Ajouter à H la chaîne composée des  $i^{\text{er}}$  vols de  $r$ 
        Enlever de  $r$  les  $i^{\text{er}}$  vols
        ChaîneAjoutée = VRAI
        break
      fin si
       $i \leftarrow i + 1$ 
    fin tant que
  si ChaîneAjoutée = FAUX alors
    Ajouter à H la chaîne  $r[1]$ 
    Enlever de  $r$  le  $1^{\text{er}}$  vol
  fin si
fin tant que
fin pour
  
```

---

les critères mentionnés ci-dessus. Si cela est possible, la chaîne est créée et les vols la formant sont enlevés de la liste, sinon une chaîne est créée uniquement avec le premier vol et celui-ci est enlevé de la liste. Le processus recommence jusqu'à ce que tous les vols de la route fassent partie d'une chaîne. L'algorithme 5.1 présente le pseudo-code de ce processus.

Il est possible de créer des chaînes de différentes longueurs, mais plus elles contiennent de vols, plus les chances qu'il existe une autre chaîne compatible avec elle sont faibles. Nous avons testé différentes valeurs pour le paramètre  $n$  fixant le nombre maximal de vols par chaînes. La valeur de  $n = 2$  donne le meilleur regroupement en ensembles de chaînes compatibles. Ceci revient donc à se limiter à des chaînes simples d'un seul vol et des chaînes étant des allers-retours. Pour l'horaire complet de 5 180 vols, nous obtenons 3 516 chaînes dont 394 font partie d'un ensemble de chaînes compatibles de cardinalité 2 ou plus pour au moins deux types d'avion (c'est-à-dire dans l'ensemble  $H_2$  défini à la section 4.2). Le tableau 5.2

Tableau 5.2: Nombre de vols et de chaînes pour chaque instance

Instance n <sup>o</sup>	Nombre de jours	Nombre de vols	Nombre de chaînes $h$ $h \in H$	Nombre de chaînes $h$ $h \in H_2$
1	1	678	525	68
2	1	756	577	56
3	1	759	572	67
4	2	1 391	1 018	106
5	2	1 508	1 073	132
6	2	1 518	1 088	119
7	3	2 151	1 515	186
8	3	2 257	1 575	175
9	7	5 180	3 516	394

donne ces statistiques pour chacune des 9 instances. Excepté pour la première instance (qui représente l'horaire d'une seule journée de fin de semaine, le dimanche), le pourcentage de vols faisant partie d'une chaîne  $h \in H_2$  est relativement stable, entre 14,8 % et 17,7 %.

## 5.2 Génération de scénarios

L'ajout de scénarios dans le problème d'affectation des types d'avion aux vols a pour objectif d'améliorer la robustesse de la solution. Les modèles décrits au chapitre précédent peuvent tous être utilisés avec un seul scénario qui représente alors la demande moyenne estimée pour chaque itinéraire et des échanges entre chaînes compatibles seraient possibles malgré tout. Cependant, ceci limiterait le nombre d'opportunités d'échanges, car l'interdépendance des chaînes compatibles serait ignorée. D'un autre côté, l'utilisation de trop de scénarios de demande avec des variations extrêmes donnerait une solution certainement très flexible, mais celle-ci aurait des profits moyens plus faibles et ses opportunités d'échanges seraient rarement utilisées en pratique. Les scénarios doivent être représentatifs de la variabilité de la demande pour la compagnie aérienne, le marché et la saison concernés. Afin de tester l'efficacité de l'utilisation de scénarios multiples, nous allons générer des ensembles de scénarios de différentes tailles (5, 10, 15 et 20) que nous allons pouvoir comparer avec l'utilisation d'un seul scénario. Comme décrit à la section 4.4.1, les solutions obtenues seront alors testées sur un autre ensemble de 100 scénarios pour bien évaluer leur robustesse.

Une façon de générer des scénarios de demande serait d'utiliser les données de l'année précédente, chaque semaine ou chaque journée correspondant à un scénario. Ceci nécessiterait d'avoir la réalisation de la demande pour chaque itinéraire au courant de la saison. Nous avons malheureusement uniquement accès à la demande moyenne pour chaque itinéraire. Dans cette situation, la génération des scénarios dépendra beaucoup des hypothèses faites sur la variabilité de la demande. Nous supposons que la demande totale sur l'ensemble du réseau au courant d'une saison ne subit pas d'importantes variations, mais que ceci est possible pour un itinéraire particulier. Plus spécifiquement, nous limitons à  $\pm 15\%$  la variation de la demande totale pour un scénario et à  $\pm 50\%$  la variation de la demande pour un itinéraire. Pour chaque ensemble de scénarios générés, nous nous assurons que la demande totale des scénarios sera distribuée uniformément dans l'intervalle  $[85\%, 115\%]$  de la demande totale originale et que la moyenne des demandes d'un itinéraire à travers les scénarios correspondra à la demande originale de cet itinéraire. Nous expliquons ce que cela signifie en détaillant les étapes de la génération d'un ensemble de scénarios.

Soit  $d_i$  la demande originale de l'itinéraire  $i$ ,  $D = \sum_{i \in I} d_i$  la demande totale originale et  $w \in \{1, \dots, W\}$  un ensemble de scénarios à générer. Pour chaque scénario  $w$ , nous fixons à  $P^w$  la variation de la demande totale de ce scénario par rapport à la demande totale originale, ces variations étant distribuées uniformément à  $\pm 15\%$ . Par exemple, pour un ensemble de 5 scénarios, nous avons :

$$(P^1; P^2; P^3; P^4; P^5) = (0,88; 0,94; 1,00; 1,06; 1,12). \quad (5.4)$$

La formule spécifique pour chaque scénario est :

$$P^w = 0,85 + \frac{0,3w - 0,15}{W}. \quad (5.5)$$

Ceci est fait pour chaque ensemble de scénarios, sauf pour l'ensemble de 100 scénarios servant à l'évaluation des solutions. La variation de la demande totale de ces derniers est distribuée aléatoirement. Nous avons donc pour cet ensemble de scénarios,  $P^w = U(0,85; 1,15)$ .

Nous générons ensuite la demande initiale pour l'itinéraire  $i$  dans le scénario  $w$  comme

étant :

$$d_{i,0}^w = U(0,5; 1,5)d_i P^w. \quad (5.6)$$

Nous ajustons ces demandes afin d'assurer que la moyenne à travers l'ensemble des scénarios sera égale à la demande moyenne originale de l'itinéraire. Nous avons donc :

$$\tilde{d}_{i,1}^w = d_{i,0}^w \frac{W}{\sum_{w=1}^W d_{i,0}^w}. \quad (5.7)$$

À ce point, la demande totale  $D^w$  d'un scénario  $w$  ne sera pas égale à  $P^w D$  comme nous le désirons. Nous pouvons ajuster les demandes pour que ce soit le cas, mais ceci modifiera la moyenne des demandes des itinéraires à travers l'ensemble des scénarios. Nous itérons donc 100 fois entre l'ajustement de la demande d'un itinéraire donné à travers les scénarios et l'ajustement de la demande de tous les itinéraires d'un scénario donné. À l'itération  $j$ , l'ajustement assurant que la moyenne de la demande d'un itinéraire  $i$  à travers l'ensemble des scénarios sera égale à  $d_i$  donne :

$$\tilde{d}_{i,j}^w = d_{i,j-1}^w \frac{W d_i}{\sum_{w=1}^W d_{i,j-1}^w}. \quad (5.8)$$

Ceci est suivi de l'ajustement assurant que la demande totale du scénario  $w$  sera égale à  $P^w D$  :

$$d_{i,j}^w = \tilde{d}_{i,j}^w \frac{P^w D}{\sum_{i \in I} \tilde{d}_{i,j}^w}. \quad (5.9)$$

Nous fixons la demande de l'itinéraire  $i$  pour le scénario  $w$  comme étant  $d_i^w = d_{i,100}^w$ . Après 100 itérations, les critères que nous avons posés sur les demandes sont respectés, c'est-à-dire que nous avons :

$$D^w = \sum_{i \in I} d_i^w = P^w D, \quad \forall w \in \{1, \dots, W\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W d_i^w = d_i, \quad \forall i \in I.$$

Cette procédure est utilisée avec le programme Matlab pour générer des ensembles de 5, 10,

15 et 20 scénarios qui serviront aux tests et un ensemble de 100 scénarios pour l'évaluation des solutions.

### 5.3 Décomposition de Benders

Nous appliquons la méthode de résolution utilisant la décomposition de Benders présentée à la section 4.4.2 aux deux modèles de la section 4.3.2. La première formulation (4.10)–(4.18) plaçant la totalité des coûts et pertes de revenus sur les variables  $Z$  qui se retrouvent dans les sous-problèmes, nous nous attendons à ce que sa résolution soit plus lente que celle de la deuxième formulation (4.25)–(4.36). Nous nous intéressons au temps de calcul nécessaire pour atteindre le même niveau de convergence en utilisant une comparaison en absolu et en relatif. Pour évaluer le niveau de convergence à une itération donnée, nous calculons le gap entre la valeur de la variable  $\theta^w$ , associée au sous-problème  $w$  dans le problème maître, et la valeur optimale du sous-problème  $SP^w$ . Lorsqu'il y a convergence complète, ces valeurs sont égales pour chaque sous-problème. Nous présentons d'abord les résultats préliminaires obtenus, puis nous discutons des problèmes rencontrés et des pistes de solution à explorer pour les résoudre.

#### 5.3.1 Résultats préliminaires

Afin de comparer l'efficacité de l'application de la décomposition de Benders aux deux modèles, nous nous concentrons d'abord sur la première phase de l'algorithme de résolution (voir figure 4.5) qui consiste à résoudre le problème maître et les sous-problèmes en relaxant les contraintes d'intégrité. L'instance n° 1 et un ensemble de 5 scénarios sont utilisés pour nos tests. Le tableau 5.3 présente les résultats obtenus pour les deux formulations après 80 minutes de temps de calcul. Malgré que les deux modèles souffrent d'un problème de convergence, la deuxième formulation est sensiblement meilleure. La fonction objectif des sous-problèmes  $SP^w$  pour la première formulation prend des valeurs beaucoup plus grandes, de l'ordre de  $10^7$ , comparativement à celle des sous-problèmes de la deuxième formulation, qui est de l'ordre de  $10^5$ . Cette différence fait que le gap moyen par scénario en relatif est plus

Tableau 5.3: Résultats des deux formulations après 80 minutes

	Première formulation	Deuxième formulation
Algorithme utilisé pour résoudre le PM	Barrière	Simplexe dual
Nombre d'itérations	212	1150
Gap moyen par scénario (en relatif)	2,84 %	4,31 %
Gap moyen par scénario (en absolu)	465 560	22 090
Temps de calcul : 1 <sup>re</sup> itération	0,5 sec.	0,5 sec.
Temps de calcul : 200 <sup>e</sup> itération	53,1 sec.	2,0 sec.

petit pour la première formulation, mais il est environ 20 fois plus grand en absolu, ce qui rend beaucoup plus lente sa convergence, car l'impact par rapport à la valeur globale du problème maître est plus important. Effectivement, le gap total des 5 scénarios pour le premier modèle représente 14,2 % de la valeur du problème maître comparativement à 0,4 % pour le deuxième. De plus, la deuxième formulation est considérablement plus rapide en terme du temps de calcul par itération. Ceci s'explique principalement par le fait que la résolution du problème maître est plus rapide. En effet, celui-ci subit nettement moins de changements d'une itération à l'autre dans le deuxième modèle, car les chaînes n'ayant pas de changement de types d'avion possible ne sont pas considérées dans les sous-problèmes. Ceci rend l'utilisation de la méthode du simplexe duale beaucoup plus rapide pour réoptimiser le problème maître à chaque itération. Même si le problème maître est augmenté de coupes d'optimalité à chaque itération, le temps de calcul n'augmente pas beaucoup passant de 0,5 seconde à la première itération à 2 secondes à l'itération 200. Le problème maître du premier modèle change suffisamment à chaque itération que son temps de calcul augmente significativement, rendant l'utilisation de l'algorithme barrière préférable pour ce modèle. Bien que plus rapide, la deuxième formulation souffre tout de même d'un problème de convergence. L'instance n° 1 contient uniquement 678 vols et sa résolution ne devrait pas être aussi longue.

Nous avons ensuite analysé le comportement des deux modèles lors de la deuxième phase de l'algorithme de résolution, lorsque les contraintes d'intégrité sont réintégrées au problème maître. Leur comportement est relativement semblable et ce qui suit s'applique aux deux. Les nombreuses coupes d'optimalité ajoutées durant la première phase en plus des contraintes

d'intégrité rendent la résolution du problème maître très longue. Nous avons en fait observé que les temps de calcul deviennent plus longs que la résolution d'une itération par l'approche directe par CPLEX pour la même instance. De l'instabilité numérique semble également se produire puisque, pour certains tests, nous avons observé deux comportements anormaux : la répétition d'une même solution d'une itération à l'autre et la valeur d'un sous-problème  $SP^w$  étant inférieure à la variable  $\theta^w$  le représentant dans le problème maître. Comme expliqué à la section 4.4.2.2, ceci est probablement dû au fait que les coupes d'optimalité ajoutées au problème maître ont des coefficients significativement plus élevés que ceux de la matrice de contrainte. Ces coefficients peuvent être de l'ordre de  $10^7$  pour la première formulation et  $10^5$  pour la deuxième. Même si le deuxième modèle a des coefficients plus petits, ces valeurs restent grandes par rapport à la matrice de contrainte dont les coefficients sont -1, 0 ou 1. Ceci rend l'inversion des bases plus compliquée et peut expliquer les difficultés numériques rencontrées. L'activation d'un paramètre indiquant à CPLEX de mettre l'accent sur la précision numérique (CPX\_PARAM\_NUMERICAL EMPHASIS) semble avoir éliminé ces comportements, au prix d'une augmentation des temps de calcul.

### 5.3.2 Pistes de solution

L'algorithme de résolution utilisant la décomposition de Benders ne s'est pas avéré efficace pour résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande. Nous avons rencontré quelques difficultés et il existe différentes pistes de solution qui pourraient être explorées pour les surmonter. Tout d'abord, une meilleure gestion des coupes d'optimalité pourrait être faite afin de conserver majoritairement celles qui sont actives dans le problème maître. Nous avons tenté d'ajouter un processus de vérification qui élimine les coupes d'optimalité qui n'ont pas été actives depuis un certain nombre d'itérations. Nous avons observé qu'en pratique très peu de coupes étaient éliminées, même avec un faible seuil pour le nombre d'itérations. Un meilleur processus devrait être développé pour réduire le nombre de coupes d'optimalité dans le problème maître. Il est possible que la recherche de coupes Pareto-optimales (Magnanti et Wong, 1981) soit utile pour notre problème. Ces coupes accélèrent généralement la convergence de la décomposition de Benders et

elles permettraient probablement de réduire le nombre total de coupes et le nombre d'itérations.

Dans nos expérimentations, nous avons utilisé une instance relativement petite avec un faible nombre de scénarios. Les sous-problèmes étaient donc relativement petits et leur résolution très rapide. Pour un problème de plus grande taille avec plusieurs scénarios, il pourrait devenir avantageux de paralléliser la résolution des sous-problèmes. Malgré ces pistes de solution, il est fort probable que les temps de calcul restent relativement élevés. Pour des problèmes de grande taille où le pourcentage de vols pouvant être impliqués dans un échange serait élevé (ce qui augmenterait la taille des sous-problèmes), la décomposition de Benders pourrait devenir avantageuse par rapport à l'approche directe par CPLEX.

#### 5.4 Approche directe par CPLEX

Nous présentons maintenant les expérimentations et les résultats obtenus en résolvant le modèle (4.10)–(4.18), présenté à la section 4.3.2.1, à l'aide de l'approche directe par CPLEX, présentée à la figure 4.4. Nous effectuons une série de tests avec chacune des 8 premières instances décrites au tableau 5.2. Pour chaque série de tests, nous utilisons 3 structures de demande et 3 coefficients d'occupation différents. Ces coefficients servent à représenter des taux d'occupation faible, moyen et élevé. Les valeurs choisies (1,25, 1,325, 1,45) donnent un taux d'occupation moyen respectif sur les 8 instances de 77,1 %, 81,2 % et 84,3 %. Pour chaque paire de structure de demande et de coefficient d'occupation, nous effectuons 6 tests : un test représentant le FAP standard sans chaînes ni scénarios et 5 tests du modèle avec réaffectation et scénarios de demande. Ces 5 tests ont respectivement 1, 5, 10, 15 et 20 scénarios. Le FAP standard est résolu avec le même modèle (4.10)–(4.18) avec comme seules différences que les chaînes sont toutes de longueur un (c'est-à-dire que chaque segment de vol est une chaîne) et l'unique scénario utilisé représente la demande moyenne pour chaque itinéraire. L'objectif est de démontrer une amélioration de la solution par rapport au FAP standard ainsi que de déterminer le nombre de scénarios appropriés pour maximiser cette amélioration.

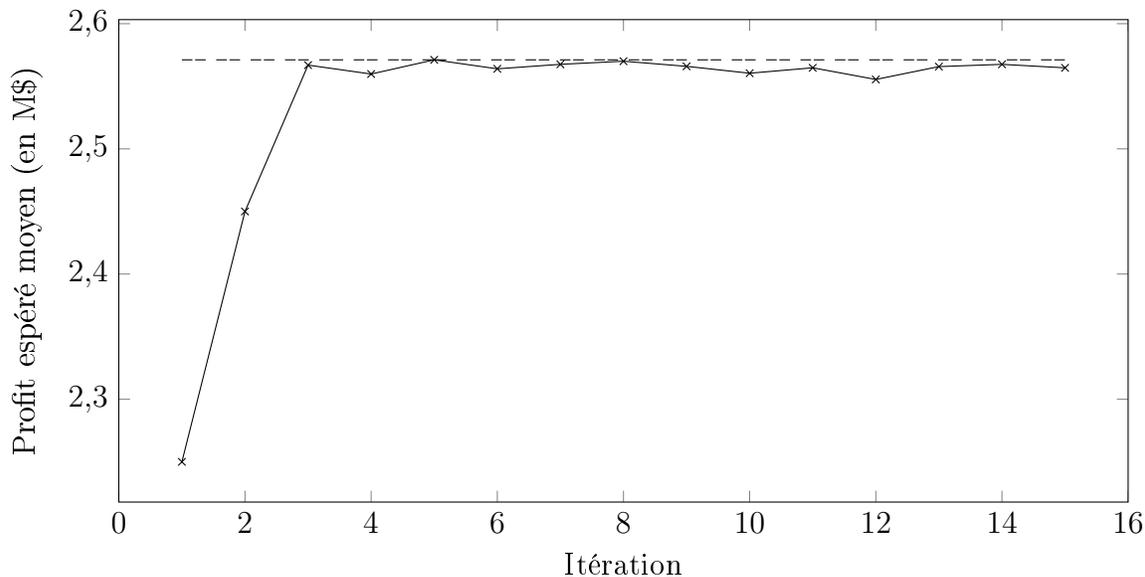


Figure 5.1: Évolution du profit espéré moyen pour un test typique

Nous rappelons que le processus de résolution est itératif. Il alterne entre la résolution du FAP et celle du PFM afin de mettre à jour les pertes de revenus dans la fonction objectif. La solution de chaque itération est évaluée sur l'ensemble de 100 scénarios de demande décrit à la section précédente. Cette évaluation nous donne le profit espéré de la solution testée pour chacun des 100 scénarios et une moyenne est faite pour obtenir le profit espéré moyen. Ceci permet d'observer l'amélioration de la qualité de la solution d'une itération à l'autre et de déterminer le nombre d'itérations nécessaires. La figure 5.1 montre l'évolution du profit espéré moyen pour un test sur l'instance n° 1 sur 15 itérations. La ligne pointillée indique la valeur maximale atteinte, celle-ci étant obtenue à la cinquième itération. Nous observons que les premières itérations donnent une bonne amélioration du profit moyen, mais qu'il y a un plafonnement par la suite. Dès la troisième itération, la variation du profit espéré moyen est minimale. Cette évolution du profit espéré moyen est typique pour cette méthode de résolution. Nous fixons donc à 5 le nombre d'itérations effectuées pour l'ensemble de nos tests. Étant donné que la première itération donne toujours un profit espéré moyen relativement faible par rapport aux itérations suivantes, nous omettons de l'afficher à l'avenir dans nos graphiques afin d'éviter de compresser l'échelle inutilement.

### 5.4.1 Série de tests sur l'instance n° 1

Nous présentons en détail les résultats obtenus pour l'instance n° 1. Cette instance d'une journée est la plus petite et la résolution directe par CPLEX est relativement rapide. La plupart des itérations sont complétées très rapidement avec un temps moyen de 19 secondes, mais certaines nécessitent tout de même un très grand nombre de nœuds de branchement avant que la solution entière soit à l'intérieur de la tolérance fixée. La figure 5.2 présente une moyenne des 9 tests (3 structures de demande  $\times$  3 coefficients d'occupation) de la variation du profit espéré moyen en fonction du nombre d'itérations. À chaque itération, la meilleure solution obtenue jusqu'à présent est conservée.

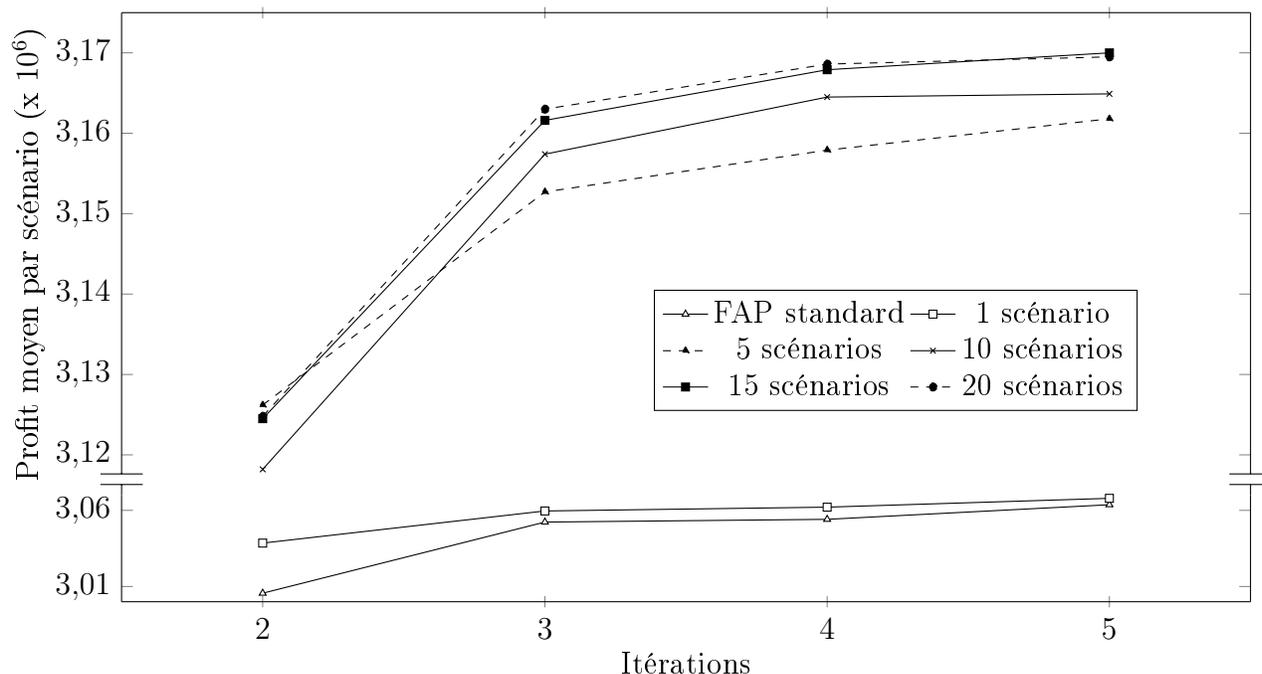


Figure 5.2: Résultats moyens pour l'instance n° 1

Nous remarquons que les résultats obtenus avec le FAP standard et le FAP avec réaffectation avec un seul scénario de demande sont significativement moins bons que ceux obtenus pour les tests avec de multiples scénarios. Après 5 itérations, l'amélioration du profit espéré moyen par rapport au FAP standard se situe entre 3,20 % et 3,47 % pour les tests ayant entre 5 et 20 scénarios de demande. Nous pouvons voir que d'augmenter le nombre de scénarios de

Tableau 5.4: Résultats détaillés pour l'instance n° 1 après 5 itérations

Structure de demande	Coefficient d'occupation	Profit espéré moyen (en M\$)					
		FAP standard 1 scénario	FAP avec réaffectation et scénarios				
			1 sc.	5 sc.	10 sc.	15 sc.	20 sc.
I	1,20	1,944	1,976	2,044	2,032	2,041	2,039
	1,325	2,951	2,970	3,054	3,060	3,063	3,069
	1,45	3,792	3,792	3,943	3,945	3,944	3,957
II	1,20	2,110	2,190	2,249	2,254	2,256	2,256
	1,325	3,144	3,112	3,188	3,227	3,238	3,236
	1,45	3,995	3,978	4,085	4,090	4,082	4,089
III	1,20	2,258	2,268	2,357	2,363	2,361	2,367
	1,325	3,284	3,252	3,350	3,342	3,360	3,326
	1,45	4,096	4,074	4,187	4,172	4,186	4,186
Moyenne		<b>3,064</b>	<b>3,068</b>	<b>3,162</b>	<b>3,165</b>	<b>3,170</b>	<b>3,169</b>

demande de 5 à 10 puis à 15 permet d'améliorer la qualité de la solution. Cependant, les courbes pour 15 et 20 scénarios sont relativement proches et il ne semble pas avantageux d'utiliser plus de 15 scénarios, pour cette instance.

Les résultats détaillés après 5 itérations sont présentés au tableau 5.4. Pour chaque test, l'amélioration du profit espéré moyen lorsque de multiples scénarios sont utilisés est notable. Cependant, le profit n'augmente pas toujours à mesure que le nombre de scénarios augmente. Ceci est normal compte tenu de la nature heuristique du processus de résolution et de l'aspect aléatoire des scénarios. Nous nous intéressons également à savoir si le nombre d'échanges réalisés en moyenne lors de l'évaluation sur les 100 scénarios de demande a tendance à augmenter lorsque le nombre de scénarios utilisés lors de la résolution augmente. Lorsqu'un seul scénario est utilisé, le nombre moyen d'échanges de types d'avion entre des chaînes compatibles est de 9,55 pour chacun des 100 scénarios. Chaque échange impliquant 2 chaînes et chaque chaîne contenant 2 segments de vol, il y a donc en moyenne 38,2 vols impliqués dans un échange. Ceci représente 5,6 % des 678 vols que compte l'instance n° 1 qui voient leur affectation modifiée, ce qui n'est pas négligeable. Ce pourcentage de vols augmente à 6,54 % lorsque 5 scénarios sont utilisés, 6,37 % avec 10 scénarios, 6,76 % avec 15 scénarios et 6,66 % avec 20 scénarios. L'utilisation de multiples scénarios permet donc d'augmenter la proportion

de vols impliqués dans un échange de 13 à 20 % par rapport à un seul scénario. Le nombre d'échanges ne continue cependant pas à augmenter avec le nombre de scénarios.

#### 5.4.2 Résultats sur l'ensemble des instances

Cette section présente les résultats obtenus sur les 8 instances. Celles-ci sont regroupées par taille, en fonction du nombre de jours les formant. Les résultats moyens pour les trois instances d'une journée sont présentés à la figure 5.3, ceux sur les trois instances de deux jours à la figure 5.4 et ceux sur les deux instances de trois jours à la figure 5.5. Chaque courbe représente une moyenne de 27 tests (3 instances  $\times$  3 structures de demande  $\times$  3 coefficients d'occupation) pour les instances d'une et deux journées et 18 tests pour celles de trois jours.

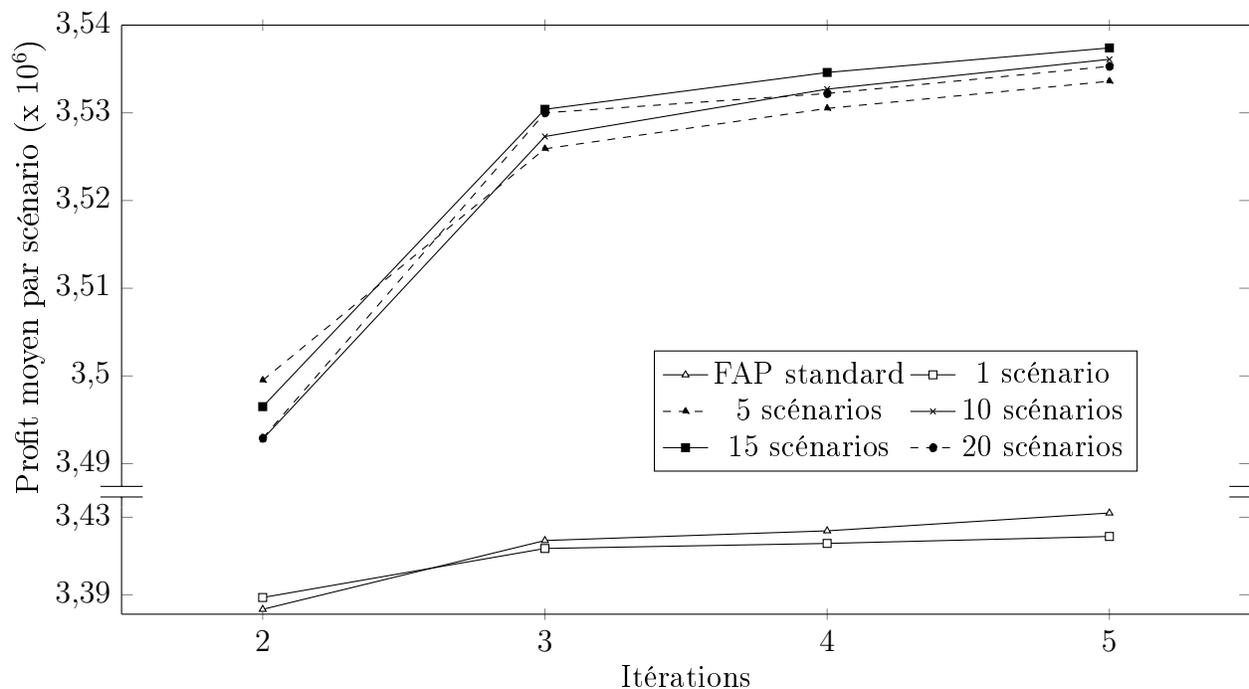


Figure 5.3: Résultats moyens pour les 3 instances d'une journée (instances n° 1, n° 2 et n° 3)

Ces résultats confirment l'analyse de la section précédente. L'utilisation de multiples scénarios de demande est nettement avantageuse. Après 5 itérations pour les instances d'un jour, l'amélioration moyenne par rapport au FAP standard se situe entre 2,95 % et 3,06 % pour

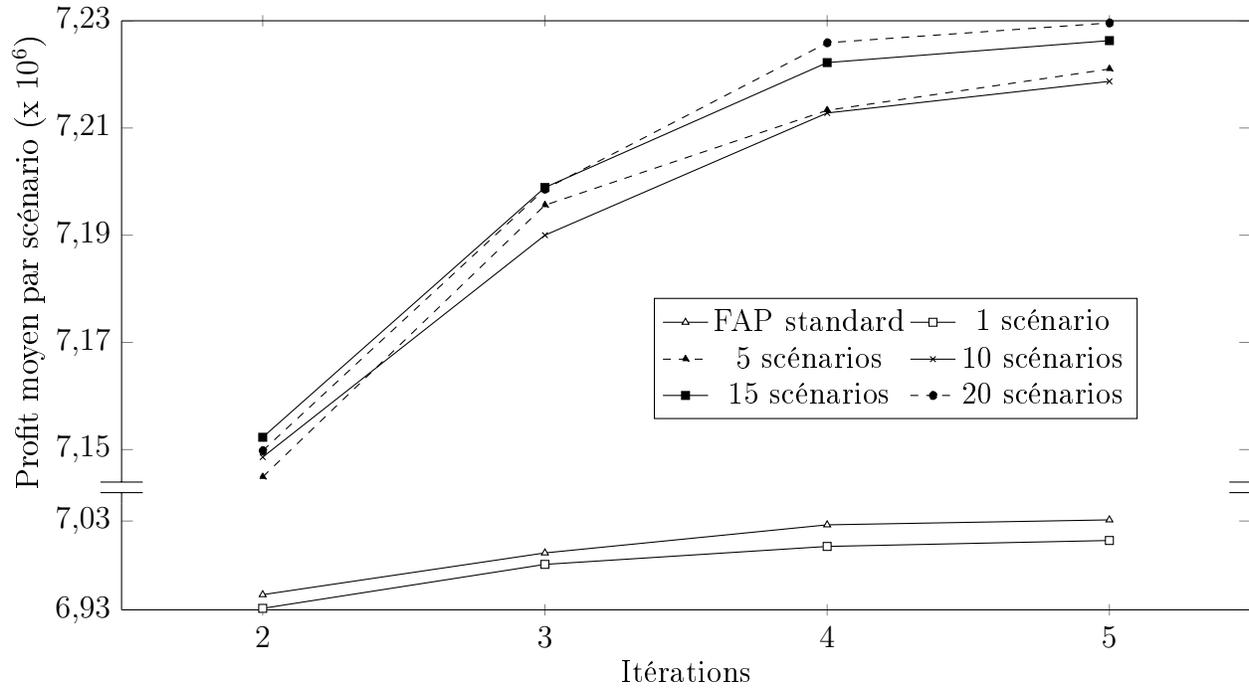


Figure 5.4: Résultats moyens pour les 3 instances de 2 jours (instances n° 4, n° 5, n° 6)

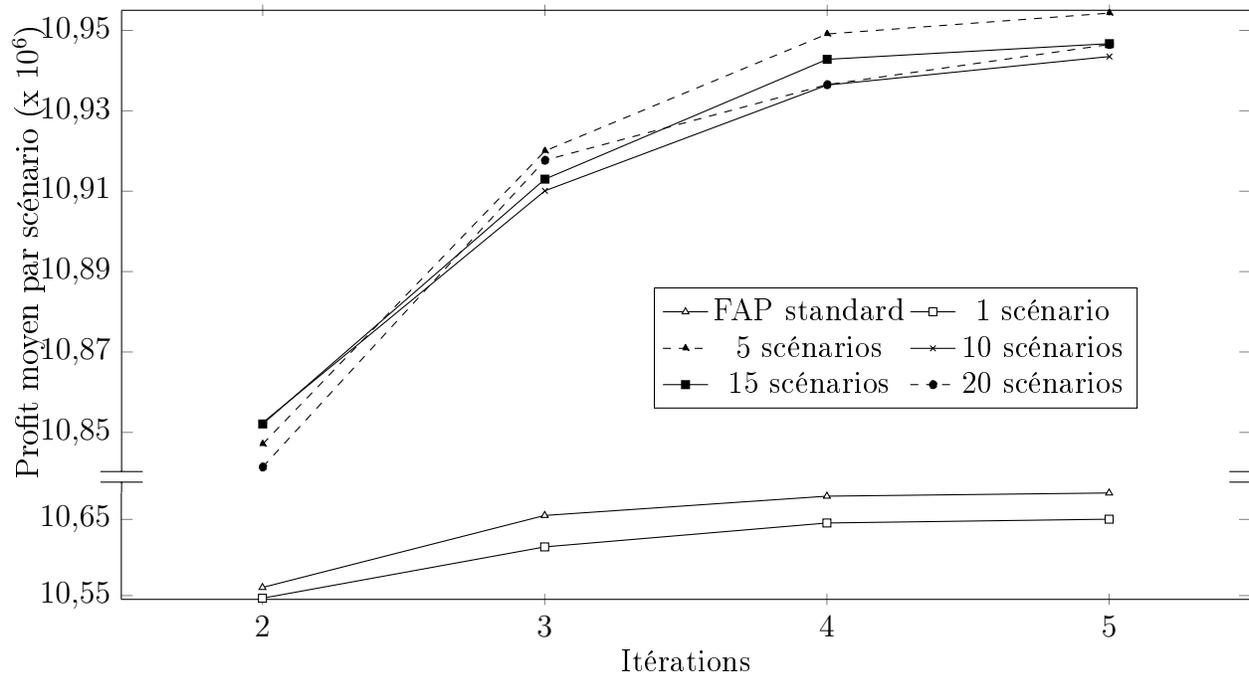


Figure 5.5: Résultats moyens pour les 2 instances de 3 jours (instances n° 7, n° 8)

les tests avec de multiples scénarios tandis que l'utilisation d'un seul scénario produit une légère détérioration. Les instances de deux jours présentent des résultats semblables avec une amélioration du profit espéré moyen entre 2,70 % et 2,82 %. Pour celles de trois jours, l'amélioration se situe entre 2,42 % et 2,52 %. Ces améliorations représentent une augmentation des profits se situant entre 31 et 38 millions de dollars annuellement. Ces résultats sont optimistes, car la comparaison avec le FAP standard suppose que les compagnies aériennes ne font pas d'échanges de types d'avion actuellement. Toutefois, les résultats obtenus avec le FAP avec réaffectation et un seul scénario de demande ne sont pas très bons, ce qui montre que de planifier les échanges de types d'avion n'est pas suffisant. Un certain nombre de scénarios sont nécessaires pour obtenir une bonne solution. Nous pouvons donc nous attendre à ce que tenter de faire des réaffectations manuellement à partir de la solution du FAP standard ne change pas significativement son profit espéré moyen.

Nous observons également que l'augmentation du nombre de scénarios ne permet pas toujours d'améliorer la solution. L'ensemble de 15 scénarios présente les meilleurs résultats pour les instances d'un jour, tandis que l'ensemble de 20 scénarios est meilleur sur les instances de 2 jours. Pour les instances de trois jours, l'ensemble de 5 scénarios ressort sensiblement, produisant une meilleure amélioration des profits que les autres ensembles ayant tous un plus grand nombre de scénarios.

Ces résultats, bien qu'un peu inconsistants, ne sont pas totalement inattendus. Malgré que la génération des scénarios contienne des ajustements pour éviter de trop grands écarts, elle reste aléatoire. Il est possible qu'un ensemble plus petit de scénarios soit plus représentatif de l'ensemble de 100 scénarios utilisés pour l'évaluation des profits. Si le modèle était appliqué dans un contexte pratique, il serait préférable d'utiliser des scénarios réels, que ceux-ci soient générés de manière plus précise en fonction de la demande réalisée des années précédentes et d'informations plus détaillées sur la demande en passagers pour la saison.

Le lien entre le nombre de scénarios utilisés et l'amélioration des profits ressort davantage lorsque tous les tests sur les 8 premières instances sont regroupés. Comme le montre la figure 5.6, après 5 itérations, l'ensemble de 20 scénarios présente la meilleure amélioration, qui

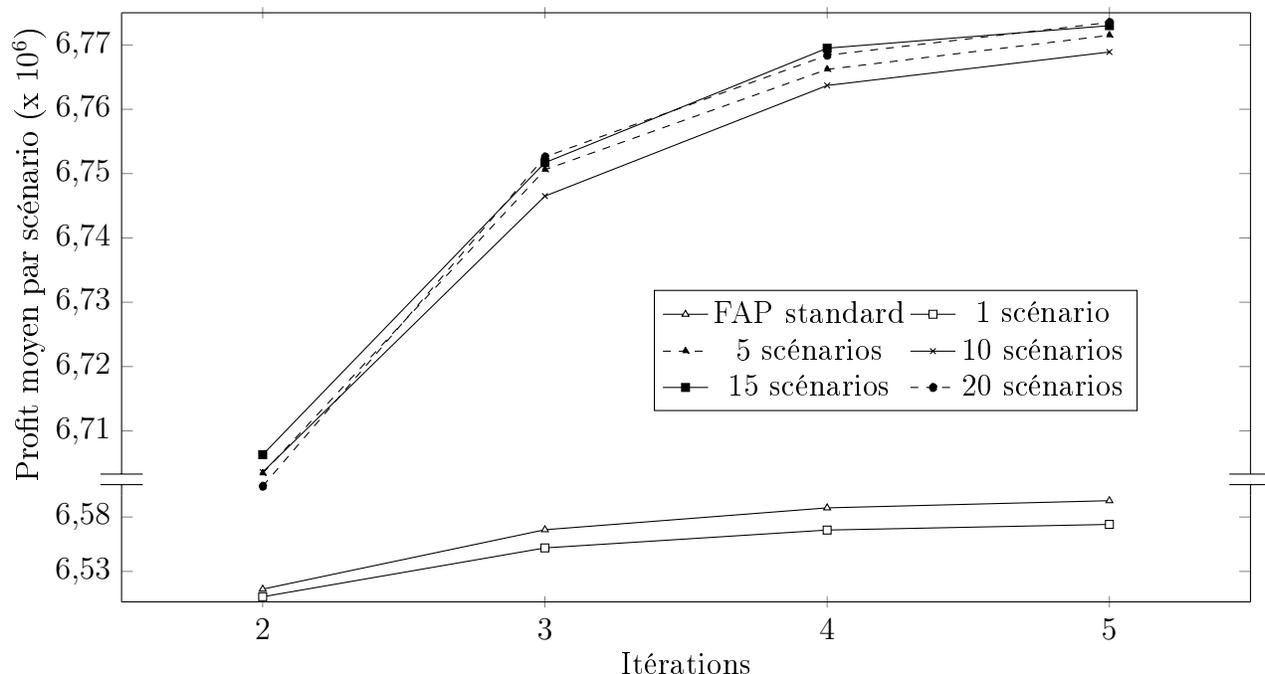


Figure 5.6: Résultats moyens pour les 8 premières instances

est légèrement supérieure à celle de l'ensemble de 15 scénarios. Seul l'ensemble de 5 scénarios sort à nouveau des résultats attendus en ayant une amélioration moyenne supérieure à l'ensemble de 10 scénarios.

Étant donné ces résultats, nous avons décidé d'effectuer des tests sur l'instance n° 9, composée de 5 180 vols sur 7 jours, uniquement avec l'ensemble de 20 scénarios, que nous comparons à l'utilisation d'un unique scénario et au FAP standard. Les résultats précédents montrent que l'utilisation de 20 scénarios est préférable en moyenne, bien que la différence du profit espéré moyen pour les ensembles de multiples scénarios soit faible. Il devient superflu de continuer à tester tous les ensembles de scénarios, surtout considérant les temps de calcul qui deviennent très longs avec un horaire de cette taille. La figure 5.7 présente les résultats obtenus. Chaque courbe est une moyenne de 9 tests avec les mêmes 3 structures de demande et les 3 coefficients d'occupation différents. Bien que l'ensemble de 20 scénarios permette d'obtenir une meilleure solution qu'avec le FAP standard, l'amélioration du profit espéré moyen n'est pas aussi bonne que pour les instances plus petites. Après 5 itérations, l'amélioration moyenne est de 0,77 %, ce qui représente une augmentation des profits de 10,5 millions de dollars annuellement.

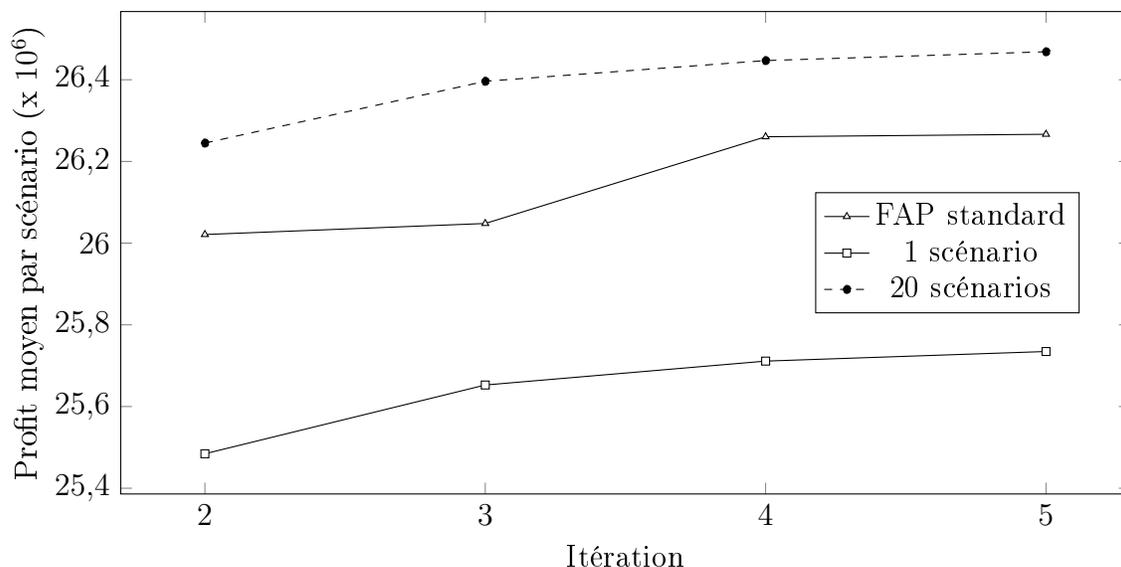


Figure 5.7: Résultats moyens pour l'instance n° 9

Alors que sur l'ensemble des 8 instances plus petites, l'utilisation d'un seul scénario produit des résultats légèrement inférieurs au FAP standard, soit -0,33 %, sur l'horaire complet, les résultats obtenus sont significativement moins bons. Le profit moyen par scénario diminue de 2,02 % en moyenne par rapport au FAP standard. La progression du profit moyen, lorsque le nombre de scénarios passe d'un seul à 20, reste cependant semblable par rapport aux instances plus petites. Il est possible qu'un plus grand nombre de scénarios soit nécessaire à mesure que la taille des instances augmente pour être représentatif et obtenir le même niveau d'amélioration. Il y avait déjà une certaine diminution de la qualité des solutions entre les instances d'une, deux et trois journées et de l'incohérence dans les tests sur les instances de trois jours, l'ensemble de 5 scénarios produisant les meilleurs résultats.

Le tableau 5.5 présente les temps de calcul moyens pour effectuer 5 itérations et le pourcentage moyen du nombre de vols impliqués dans un échange en fonction de la taille des instances et du nombre de scénarios utilisés. Le temps de calcul ne tient pas compte de l'évaluation des solutions de chaque itération sur les 100 scénarios de demande. Cette évaluation a surtout une valeur académique pour voir la progression de l'algorithme et elle ne serait pas faite en pratique. Pour un ensemble de scénarios fixé, les temps de résolution augmentent de façon importante avec la taille des instances, ce qui est normal pour un tel problème. Cette

Tableau 5.5: Résultats pour les 9 instances

Nombre de scénarios		Ensemble d'instances			
		1 jour (1, 2, 3)	2 jours (4, 5, 6)	3 jours (7, 8)	7 jours (9)
FAP	Temps (sec.)	282	3 613	15 199	44 983
standard	% des vols ayant un échange	0,25	0,15	0,13	0,04
1	Temps (sec.)	113	818	2 599	20 988
	% des vols ayant un échange	5,11	3,64	4,12	2,83
5	Temps (sec.)	179	1 108	2 462	-
	% des vols ayant un échange	5,70	3,74	4,07	
10	Temps (sec.)	351	1 416	4 075	-
	% des vols ayant un échange	5,45	3,83	3,89	
15	Temps (sec.)	538	1 975	5 176	-
	% des vols ayant un échange	6,05	3,66	4,49	
20	Temps (sec.)	631	2 369	5 638	24 738
	% des vols ayant un échange	6,34	3,69	4,66	4,61

augmentation est encore plus importante pour le FAP standard. Même si les instances sont les mêmes, leur taille est plus grande pour le FAP standard, car les vols ne sont pas regroupés en chaînes. Pour un ensemble d'instances donné, une augmentation des temps de calcul se produit également plus le nombre de scénarios utilisés est grand, mais celle-ci semble être moins importante à mesure que la taille des instances augmente. Pour les instances d'un jour, les temps de calcul sont 5 fois plus grands avec 20 scénarios comparés à ceux avec un seul. Ce ratio diminue à 2,9 pour les instances de deux jours, 2,2 pour celles de trois jours et finalement 1,2 pour l'horaire complet de 7 jours.

Le pourcentage moyen du nombre de vols impliqués dans un échange augmente généralement en fonction du nombre de scénarios, mais ce n'est pas systématique. Notons que cette valeur n'est pas égale à zéro pour le FAP standard. Même si toutes les chaînes sont composées d'un seul vol, il existe certaines compatibilités pour des échanges, ce qui explique que la valeur soit légèrement positive. Ce qui est plus surprenant, c'est qu'une plus petite proportion de vols sont impliqués dans un échange à mesure que la taille des instances augmente. Les instances

de 2 jours ne respectent pas tout à fait cette tendance en ayant des valeurs plus faibles que les instances de 3 jours, mais la diminution est apparente avec les autres instances. Pourtant, les instances avaient toutes sensiblement le même nombre de vols faisant partie d'une chaîne  $h \in H_2$  (c'est-à-dire ayant un échange possible) comme le montrait le tableau 5.2. À nouveau, un plus grand nombre de scénarios semble nécessaire à mesure que la taille des instances augmente. Il est donc possible que 20 scénarios ne soient pas suffisants pour bien représenter la variabilité de la demande des passagers sur une semaine complète et que l'utilisation d'un ensemble de scénarios de plus grande taille soit souhaitable.

Un ensemble de 30 scénarios a été créé en utilisant la même procédure présentée à la section 5.2 pour vérifier cette hypothèse. En analysant les instances plus en détail, nous observons également qu'il existe plusieurs chaînes de deux vols n'ayant aucun échange possible. En effet, les chaînes sont déterminées à l'aide de l'algorithme 5.1 sans tenir compte de l'horaire dans son ensemble ni des banques à chaque station pour chaque type d'avion. Le pourcentage de vols impliqués dans de telles chaînes augmente avec la taille des instances, passant de 12,5 % pour l'instance n° 1 de 678 vols à 24,5 % pour l'instance n° 9 de 5 180 vols. Ces chaînes restreignent l'espace de solution inutilement et pourrait être une des causes de la diminution de la qualité des solutions à mesure que la taille des instances augmente. À cet effet, nous rajoutons une vérification à la suite de la formation des chaînes pour nous assurer qu'il n'y ait que deux types de chaînes : celles d'un seul vol, avec ou sans possibilité d'échanges, et celles formant un aller-retour, faisant partie obligatoirement de l'ensemble  $H_2$ , c'est-à-dire ayant une possibilité d'échanges. Les chaînes de deux vols sans possibilité d'échanges sont scindées pour former deux chaînes d'un seul vol chacune.

Afin de mesurer indépendamment l'impact de l'augmentation du nombre de scénarios et des modifications faites à l'ensemble de chaînes, nous testons d'abord l'ensemble de 30 scénarios en utilisant la méthode originale pour déterminer les chaînes sur l'instance n° 9, puis des tests avec le nouvel ensemble de chaînes sont faits pour les ensembles d'un et de 20 scénarios. Les résultats de ces expérimentations sont présentés à la figure 5.8. Nous observons que d'augmenter le nombre de scénarios, sans modifier la façon de déterminer les chaînes, n'améliore pas significativement la qualité de la solution. Après 5 itérations, l'amélioration par rapport

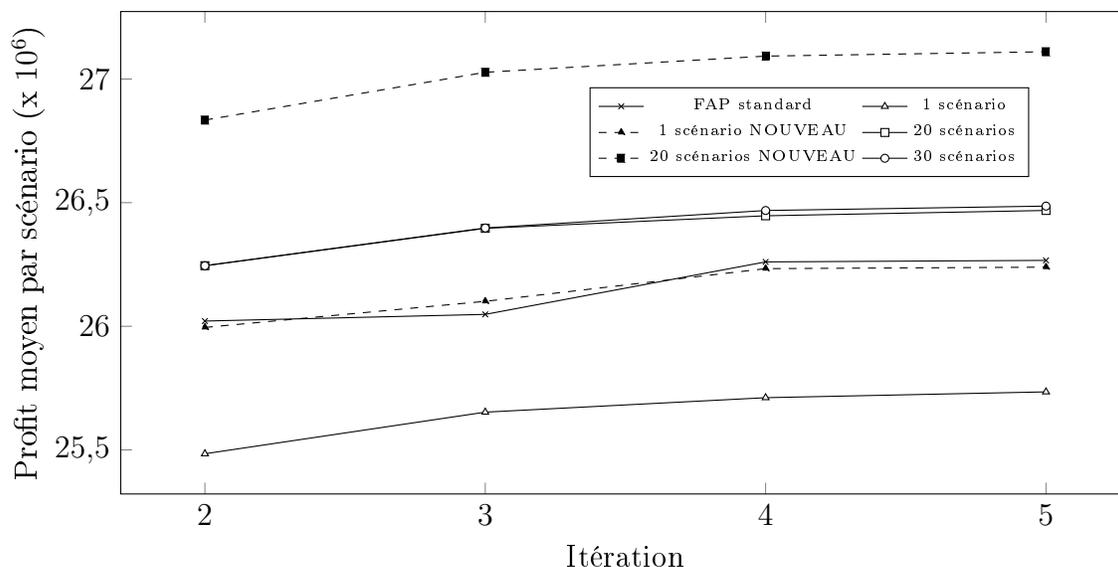


Figure 5.8: Résultats supplémentaires pour l'instance n°9

au FAP standard est de 0,84 % avec 30 scénarios de demande comparativement à 0,77 % pour l'ensemble de 20 scénarios. Cependant, la modification de l'ensemble des chaînes pour enlever celles de plus d'un vol sans possibilité d'échanges a un impact considérable. Les résultats sont comparables à ceux obtenus sur les instances plus petites. Les nouveaux tests avec un seul scénario permettent d'obtenir une diminution du profit moyen de 0,10 % par rapport au FAP standard après 5 itérations, par rapport à 2,02 % précédemment. L'amélioration moyenne sur l'ensemble de 20 scénarios passe, quant à elle, de 0,77 à 3,21 %. Ces résultats sont en fait meilleurs que ceux obtenus sur les instances plus petites.

Bien entendu, cette nouvelle méthode pour déterminer les chaînes pourrait également être appliquée sur ces instances. Nous l'avons testée sur les instances de 2 jours avec l'ensemble de 20 scénarios. L'amélioration du profit espéré moyen par rapport au FAP standard passe de 2,82 % à 3,75 % dans ce cas. Il y a donc également une amélioration, mais moins importante que pour l'instance sur 7 jours. Cette modification de l'algorithme pour déterminer les chaînes permet de combler partiellement l'écart entre les résultats obtenus avec les instances de différentes tailles, sans toutefois le résorber complètement.

## CHAPITRE 6

### DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION

La planification des opérations pour une compagnie aérienne est une tâche très ardue. Celle-ci est généralement divisée en plusieurs étapes et la plupart des modèles mathématiques utilisés pour résoudre chacune d'entre elles font des hypothèses simplificatrices pour diminuer la complexité des problèmes à résoudre. Certaines de ces hypothèses concernent la demande des passagers ; en tenir compte de manière réaliste n'est pas facile. L'objectif des passagers, qui cherchent généralement l'itinéraire correspondant le mieux à une combinaison de facteurs comme le prix, l'horaire et le nombre de connexions, n'est pas le même que celui de la compagnie aérienne, qui veut simplement maximiser son profit. Exprimer la demande des passagers par segment de vol, supposer un contrôle total de la compagnie aérienne sur leur distribution ou négliger la variabilité de la demande sont toutes des hypothèses qui s'éloignent de la réalité que font les modèles mathématiques actuels. Cette thèse a cherché à améliorer la prise en compte de la demande des passagers dans le problème d'affectation des types d'avion aux vols. Ce chapitre résume d'abord les contributions de ce travail de recherche. Ceci est suivi d'une discussion sur les limitations des méthodes proposées et des améliorations possibles qui pourraient être explorées comme travaux futurs.

#### 6.1 Synthèse des travaux

Dans cette thèse, nous avons d'abord proposé un algorithme amélioré qui permet de mettre à jour l'information sur les revenus dans la fonction objectif du FAP en cours de résolution à l'aide d'un modèle de flot de passagers. L'utilisation d'un PFM extérieur au FAP permet de préserver le libre choix des passagers et de mieux modéliser leur distribution. L'algorithme est basé sur celui de Dumas *et al.* (2009) qui itère plusieurs fois entre la résolution du FAP et du PFM pour mettre à jour les revenus et améliorer graduellement la solution. Nous tirons

profit de la fixation de variables, une méthode heuristique fréquemment utilisée pour les réseaux de grande taille, pour revoir durant la résolution du FAP les revenus de certains vols susceptibles d'avoir été affectés par les décisions prises lors de la fixation de variables. Ceci permet de prendre des décisions basées sur une information plus précise et de diminuer le nombre d'itérations nécessaires entre la résolution du FAP et celle du PFM au complet. Notre algorithme a permis de résoudre des instances de grande taille, dont une composée de plus de 10 000 vols et 65 000 itinéraires, de 2 à 3 fois plus rapidement que la méthode de Dumas *et al.* (2009) tout en préservant la qualité de la solution.

Nous avons ensuite cherché à tenir compte de la variabilité de la demande pour améliorer la robustesse de la solution du FAP, afin que des changements à l'affectation des types d'avion puissent être planifiés en fonction de la demande qui se réalise. Pour ce faire, nous avons intégré des scénarios de demande qui modélisent les variations se produisant au courant d'une saison. Nous avons défini le concept de chaînes, un regroupement de segments de vol, et comment les échanges peuvent être planifiés entre chaînes compatibles. L'objectif est alors de maximiser l'espérance du profit sur l'ensemble des scénarios de demande et de trouver une solution initiale robuste permettant des échanges entre chaînes compatibles selon la variation de la demande. Nous avons défini trois variantes du problème d'affectation des types d'avion aux vols avec réaffectation et scénarios de demande pour lesquelles nous avons développé différents modèles. Nous nous sommes concentrés sur une des variantes du problème, supposant la connaissance préalable des chaînes et permettant d'imposer une pénalité sur les échanges. Deux modèles ont été développés : un favorisant une approche de résolution directe par CPLEX et un plus adapté pour utiliser la décomposition de Benders. Le premier contient moins de variables et de contraintes, tandis que la deuxième formulation permet une meilleure séparation entre problème maître et sous-problèmes et évite de réoptimiser l'affectation des chaînes n'ayant pas d'échange possible. Les deux méthodes de résolution intègrent l'utilisation du PFM pour mettre à jour l'information sur les revenus. Une méthode pour évaluer les solutions obtenues sur un ensemble de scénarios différents a été développée pour pouvoir les comparer à celles obtenues par le FAP standard de manière objective.

Les résultats obtenus à l'aide de la méthode utilisant la décomposition de Benders n'ont pas

atteint les attentes. Les temps de calcul sont assez élevés et, bien que le deuxième modèle performe mieux que le premier, les deux formulations sont très lentes à converger. L'approche directe par CPLEX s'est avérée plus concluante. Nos tests sur plusieurs instances avec différents ensembles de scénarios ont permis de montrer l'utilité de planifier les réaffectations de types d'avion en utilisant de multiples scénarios de demande. Sur des instances d'une à trois journées variant entre 678 et 2 257 vols, l'utilisation de 20 scénarios de demande a permis d'améliorer le profit espéré moyen entre 2,4 % et 3,1 % par rapport au FAP standard. Les résultats sur l'horaire hebdomadaire complet n'ont pas été aussi bons, mais l'utilisation de multiples scénarios a tout de même été profitable avec une amélioration du profit espéré moyen de 0,77 %.

## 6.2 Limitations de la solution proposée et améliorations futures

L'algorithme présenté au chapitre 3 itère entre la relaxation linéaire du FAP, la fixation de variables et le PFM pour revoir les revenus et accélérer le processus de résolution. Cette méthode heuristique peut cependant mener à des solutions sous-optimales. Il serait intéressant d'intégrer une mise à jour des revenus par le PFM au courant de la résolution du FAP sans fixer de variables. L'algorithme présenté pourrait être utilisé directement en enlevant la fixation de variables, mais une évaluation différente de la solution devrait être faite pour trouver quels vols devraient voir leurs revenus réévalués. Des variantes plus complexes du problème d'affectation des types d'avion aux vols intégrant des fenêtres de temps ou des contraintes de maintenance pourraient aussi être étudiées.

Les modèles et méthodes de résolution présentés au chapitre 4 et 5 devraient également être raffinés. Premièrement, l'algorithme 5.1 utilisé pour déterminer les chaînes à partir d'une solution existante n'est pas optimal. Une première amélioration de l'algorithme est faite à la fin de la section 5.4.2 pour éliminer les chaînes de plus d'un vol n'ayant aucun échange possible. Cependant, l'utilisation des itinéraires d'avion n'est pas idéale, car deux segments de vol ayant le même type d'avion et qui pourraient être regroupés en une chaîne n'ont pas nécessairement le même appareil affecté. Le modèle avec chaînes libres présenté à la section 4.3.3

mériterait d'être étudié davantage. Il permet de planifier des opportunités d'échanges plus complexes tout en laissant libres les segments de vol qui n'en ont pas. Le modèle proposé est assez complexe et une énumération de toutes les chaînes possibles le rendrait probablement impossible à résoudre en un temps raisonnable. Une approche utilisant la génération de colonnes pourrait être étudiée pour limiter la taille du problème.

La méthode de résolution utilisant la décomposition de Benders n'a pas permis d'accélérer les temps de calcul comme prévu. Elle pourrait tout de même avoir une utilité pour des instances de grande taille qui ne peuvent pas être résolues directement. Une meilleure gestion des coupes d'optimalité et la recherche de coupes Pareto-optimales devraient être faites pour accélérer la convergence.

En terminant, la qualité des solutions obtenues avec les différents modèles pour résoudre le FAP avec réaffectation et scénarios de demande dépend beaucoup de l'exactitude à laquelle les scénarios sont représentatifs de la réalité. Des données plus détaillées sur le comportement des passagers, leurs préférences et leurs habitudes, en plus de l'historique des billets vendus devraient être utilisées pour développer des scénarios plus réalistes. La prise en compte de la demande des passagers dans la planification des opérations sera toujours limitée par la qualité et l'exactitude des données auxquelles nous avons accès. Déterminer les prévisions de la demande et le comportement des passagers revient à prédire l'avenir et il reste encore beaucoup de travail à faire pour améliorer nos connaissances dans ce domaine.

## RÉFÉRENCES

- ABARA, J. (1989). Applying integer linear programming to the fleet assignment problem. *Interfaces*, 19, 20–28.
- AHUJA, R. K., GOODSTEIN, J., MUKHERJEE, A., ORLIN, J. B. et SHARMA, D. (2002). A very large-scale neighborhood search algorithm for the combined through-fleet-assignment model. *INFORMS Journal on Computing*, 19, 416–428.
- AIR CANADA (2012). Annual report 2012. Rapport technique, Air Canada. Consulté en mai 2012, tiré de [http://www.aircanada.com/en/about/investor/documents/2012\\_ar.pdf](http://www.aircanada.com/en/about/investor/documents/2012_ar.pdf).
- AIT-BENALI, S. (2006). *Solution robuste pour le problème hebdomadaire d'affectation des types d'avions aux vols*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada.
- BARNHART, C., BOLAND, N. L., CLARKE, L. W., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L. et SHENOI, R. G. (1998). Flight string models for aircraft fleet assignment and routing. *Transportation Science*, 32, 208–220.
- BARNHART, C., FARAHAT, A. et LOHATEPANONT, M. (2009). Airline fleet assignment with enhanced revenue modeling. *Operations Research*, 57, 231–244.
- BARNHART, C., KNIKER, T. S. et LOHATEPANONT, M. (2002). Itinerary-based airline fleet assignment. *Transportation Science*, 36, 199–217.
- BENDERS, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 4, 238–252.
- BERGE, M. et HOPPERSTAD, C. (1993). Demand driven dispatch : A method for dynamic aircraft capacity assignment, models and algorithms. *Operations Research*, 41, 153–168.
- BISH, E. K., SUWANDECHOCHAI, R. et BISH, D. R. (2004). Strategies for managing the flexible capacity in the airline industry. *Naval Research Logistics*, 51, 654–685.
- BÉLANGER, N., DESAULNIERS, G., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (2006a). Periodic airline fleet assignment with time windows, spacing constraints, and time dependent revenues. *European Journal of Operational Research*, 175, 1754–1766.

- BÉLANGER, N., DESAULNIERS, G., SOUMIS, F., DESROSIERS, J. et LAVIGNE, J. (2006b). Weekly airline fleet assignment with homogeneity. *Transportation Research Part B*, 40, 306–318.
- BURDEN, R. L. et FAIRES, J. D. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Cengage Learning, Boston, MA, 9th édition.
- BURKE, E. K., CAUSMAECKER, P. D., MAERE, G. D., MULDER, J., PAELINCK, M. et BERGHE, G. V. (2009). A multi-objective approach for robust airline scheduling. *Computers & Operations Research*, 37, 822–832.
- CLARKE, L. W., HANE, C. A., JOHNSON, E. L. et NEMHAUSER, G. L. (1996). Maintenance and crew considerations in fleet assignment. *Transportation Science*, 30, 249–260.
- CORDEAU, J.-F., STOJKOVIC, G., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (2001). Benders decomposition for simultaneous aircraft routing and crew scheduling. *Transportation Science*, 35, 375–388.
- DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M. M. et SOUMIS, F. (1997). Daily aircraft routing and scheduling. *Management Science*, 43, 841–854.
- DUMAS, J. (2008). *Un modèle de flot de passagers et son intégration au problème d'affectation de flotte en transport aérien*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada.
- DUMAS, J., AITHNARD, F. et SOUMIS, F. (2009). Improving the objective function of the fleet assignment problem. *Transportation Research Part B*, 43, 466–475.
- DUMAS, J. et SOUMIS, F. (2008). Passenger flow model for airline networks. *Transportation Science*, 42, 197–207.
- FARKAS, A. (1996). *The influence of network effects and yield management on airline fleet assignment decisions*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, États-Unis.
- FRANK, M. et WOLFE, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 95–110.
- GU, Z., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L. et YINHUA, W. (1994). Some properties of the fleet assignment problem. *Operations Research Letters*, 15, 59–71.

- HANE, C., BARNHART, C., JOHNSON, E., MARSTEN, R., NEMHAUSER, G. et SIGISMONDI, G. (1995). The fleet assignment problem : Solving a large-scale integer program. *Mathematical Programming*, 70, 211–232.
- IATA (2014). Financial forecast march 2014. Rapport technique, International Air Transportation Association. Consulté en mars 2014, tiré de <http://www.iata.org/publications/economics/Pages/ffarchives.aspx>.
- IOACHIM, I., DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et BÉLANGER, N. (1999). Fleet assignment and routing with schedule synchronization constraints. *European Journal of Operational Research*, 119, 75–90.
- JACOBS, T. L., SMITH, B. C. et JOHNSON, E. L. (2008). Incorporating network flow effects into the airline fleet assignment process. *Transportation Science*, 42, 514–529.
- JARRAH, A. I., GOODSTEIN, J. et NARASIMHAN, R. (2000). An efficient airline re-fleeting model for the incremental modification of planned fleet assignments. *Transportation Science*, 34, 349–363.
- JIANG, H. (2006). *Dynamic airline scheduling and robust airline schedule de-peaking*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, États-Unis.
- JIANG, H. et BARNHART, C. (2009). Dynamic airline scheduling. *Transportation Science*, 43, 336–354.
- JIANG, H. et BARNHART, C. (2013). Robust airline schedule design in a dynamic scheduling environment. *Computers & Operations Research*, 40, 831–840.
- KLABJAN, D. (2005). Large-scale models in the airline industry. G. Desaulniers, J. Desrosiers et M. Solomon, éditeurs, *Column Generation*, New York : Springer. 163–195.
- KNIKER, T. (1998). *Itinerary-based airline fleet assignment*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, États-Unis.
- LAN, S., CLARKE, J.-P. et BARNHART, C. (2006). Planning for robust airline operations : Optimizing aircraft routings and flight departure times to minimize passenger disruptions. *Transportation Science*, 40, 15–28.

- LOHATEPANONT, M. et BARNHART, C. (2004). Airline schedule planning : Integrated models and algorithms for schedule design and fleet assignment. *Transportation Science*, 38, 19–32.
- MAGNANTI, T. L. et WONG, R. T. (1981). Accelerating Benders decomposition : Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29, 464–484.
- MERCIER, A. et SOUMIS, F. (2007). An integrated aircraft routing, crew scheduling and flight retiming model. *Computers & Operations Research*, 34, 2251–2265.
- NDIKUMAGENGE, F. (2004). *Évaluation et ré-optimisation d'un horaire de vols*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada.
- PILLA, V. L., ROSENBERGER, J. M., CHEN, V., ENGSUWAN, N. et SIDDAPPA, S. (2012). A multivariate adaptive regression splines cutting plane approach for solving a two-stage stochastic programming fleet assignment model. *European Journal of Operational Research*, 216, 162 – 171.
- PILLA, V. L., ROSENBERGER, J. M., CHEN, V. C. P. et SMITH, B. (2008). A statistical computer experiments approach to airline fleet assignment. *IIE Transactions*, 40, 524–537.
- REI, W., CORDEAU, J.-F., GENDREAU, M. et SORIANO, P. (2009). Accelerating Benders decomposition by local branching. *INFORMS Journal on Computing*, 21, 333–345.
- REXING, B., BARNHART, C., KNIKER, T., JARRAH, A. et KRISHNAMURTHY, N. (2000). Airline fleet assignment with time windows. *Transportation Science*, 34, 1–20.
- ROSENBERGER, J. M., JOHNSON, E. L. et NEMHAUSER, G. L. (2004). A robust fleet-assignment model with hub isolation and short cycles. *Transportation Science*, 38, 357–368.
- SAHARIDIS, G. K. D., MINOUX, M. et IERAPETRITOU, M. G. (2010). Accelerating Benders method using covering cut bundle generation. *International Transactions in Operational Research*, 17, 221–237.
- SHERALI, H. D., BAE, K.-H. et HAOUARI, M. (2010). Integrated airline schedule design and fleet assignment : Polyhedral analysis and Benders' decomposition approach. *INFORMS Journal on Computing*, 22, 500–513.

- SHERALI, H. D., BISH, E. K. et ZHU, X. (2005). Polyhedral analysis and algorithms for a demand-driven reeighting model for aircraft assignment. *Transportation Science*, 39, 349–366.
- SHERALI, H. D., BISH, E. K. et ZHU, X. (2006). Airline fleet assignment concepts, models, and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 172, 1–30.
- SHERALI, H. D. et ZHU, X. (2008). Two-stage fleet assignment model considering stochastic passenger demands. *Operations Research*, 56, 383–399.
- SMITH, B. C. et JOHNSON, E. L. (2006). Robust airline fleet assignment : Imposing station purity using station decomposition. *Transportation Science*, 40, 497–516.
- SOUMIS, F. (1978). *Planification d'une flotte d'avions*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Québec, Canada.
- SOUMIS, F., FERLAND, J. A. et ROUSSEAU, J.-M. (1980). A model for large-scale aircraft routing and scheduling problems. *Transportation Research Part B*, 14, 191–201.
- SOUMIS, F. et NAGURNEY, A. (1993). A stochastic, multiclass airline network equilibrium model. *Operations Research*, 41, 721–730.
- SUBRAMANIAN, R., SCHEFF, R.P., J., QUILLINAN, J., WIPER, D. et MARSTEN, R. (1994). Coldstart : fleet assignment at delta air lines. *Interfaces*, 24, 104–120.
- TALLURI, K. T. (1996). Swapping applications in a daily airline fleet assignment. *Transportation Science*, 30, 237–248.
- WARBURG, V., HANSEN, T. G., LARSEN, A., NORMAN, H. et ANDERSSON, E. (2008). Dynamic airline scheduling : An analysis of the potentials of reeighting and retiming. *Journal of Air Transport Management*, 14, 163–167.