

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONCEPTION ET OPTIMISATION D'UN SYSTÈME DE COLLECTE D'ÉNERGIE
ÉOLIENNE

ASMA MDIMAGH
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
NOVEMBRE 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONCEPTION ET OPTIMISATION D'UN SYSTÈME DE COLLECTE D'ÉNERGIE
ÉOLIENNE

présentée par : MDIMAGH Asma

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

Mme LAHRICHI Nadia, Ph.D., présidente

M. HERTZ Alain, Doct. ès Sc., membre et directeur de recherche

Mme MARCOTTE Odile, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. SOUMIS François, Ph.D., membre

Mme COSTA Marie-Christine, Doct., membre

REMERCIEMENTS

Au terme de cette thèse, je tiens à remercier les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la concrétisation de ce travail de thèse.

Mes sincères remerciements vont, tout d'abord, à mes directeurs de recherche monsieur Alain Hertz et madame Odile Marcotte de m'avoir fait confiance pour la réalisation de ce projet. Ils m'ont conseillée brillamment, soutenue financièrement et réconfortée moralement toutes les fois que j'en avais besoin. Leurs connaissances et leurs compétences ont su me guider tout au long de ce projet. Je leur suis particulièrement reconnaissante pour m'avoir transmis leur intérêt pour la recherche à travers la passion qu'ils en ont.

Mes remerciements s'adressent également aux messieurs Michel Carreau et François Welt de Hatch pour l'accueil et la disponibilité dont ils ont fait preuve pour discuter certains des aspects techniques du sujet.

Mes vifs remerciements vont également à la présidente du jury, madame Nadia Lahrichi et aux membres du jury, madame Marie-Christine Costa et monsieur François Soumis pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail de recherche en acceptant de l'examiner. Je profite de l'occasion pour leur adresser mes sincères respects.

J'adresse encore mes remerciements à tous les étudiants et tout le personnel du GERAD qui contribuent par leur bonne humeur à créer un cadre de travail agréable. Par la même occasion, je n'oublie pas de remercier Serge Bisailon pour son aide précieuse quand j'avais des problèmes avec CPLEX.

Je remercie aussi toute ma famille en Tunisie et mes amis que j'ai eu la chance d'avoir à mes côtés, qui m'ont soutenue tout au long de ces années de travail. Je ne les cite pas ici, ils se reconnaîtront d'eux-mêmes.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à mes parents, leur amour et leur sagesse m'ont permis de devenir la personne que je suis, à mon mari pour sa patience et son amour et mes frères pour tous les moments de joie et de rigolade. Ils ont toujours cru en moi et j'espère être toujours à leur hauteur. La thèse a parfois été un moment difficile pour mes proches, en particulier pour mon adorable fils Youcef. J'avoue ne pas lui avoir consacré le temps qu'il mérite.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'étude du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne. Celui-ci consiste à installer les capacités sur les liens d'un réseau électrique potentiel pour acheminer au moindre coût l'énergie produite par des éoliennes vers une sous-station de transformation. L'augmentation du nombre d'éoliennes installées dans un parc éolien nécessite la conception des réseaux étendus sur plusieurs kilomètres de lignes électriques et donc des investissements importants. Face à un tel enjeu financier, l'utilisation d'outils d'optimisation de conception de réseaux s'avère capitale.

Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne fait partie d'une grande classe de problèmes de conception de réseaux. Mise à part sa complexité héritée de cette classe, ce dernier est sujet à une contrainte technique importante à savoir la *non-bifurcation* de l'énergie. En effet, les concepteurs de réseau exigent que l'énergie produite par un groupe d'éoliennes et qui est combinée sur un lien donné reste combinée jusqu'à ce qu'elle atteigne la sous-station. Dans cette thèse, nous nous sommes concentrés sur deux variantes de ce problème. La première variante consiste à installer des câbles souterrains et des lignes de transmission sur les liens potentiels du réseau électrique tels qu'un seul choix de capacité est disponible. La deuxième variante qui est plus compliquée que la première consiste non seulement à déterminer les liens qui sont utilisés pour acheminer l'énergie vers la sous-station, mais également à choisir la capacité de chaque lien utilisé, ce choix devant être fait parmi un ensemble de possibilités fixé par les concepteurs. Tous ces choix doivent être faits en prenant en considération les pertes engendrées par le transfert de l'énergie dans ce réseau. Dans les deux variantes, nous supposons que l'emplacement des éoliennes est prédéfini et qu'il est possible d'installer plusieurs liens parallèles entre deux sommets du réseau. Face à la complexité de ce problème, nous proposons des approches exactes pour la résolution des deux variantes. Plus précisément, nous commençons d'abord par développer les formulations mathématiques appropriées. Nous nous orientons ensuite vers les techniques basées sur la théorie polyédrale qui, de nos jours, sont qualifiées comme très efficaces pour la résolution de problèmes complexes en optimisation combinatoire. Nous déterminons en particulier des inégalités valides et proposons des techniques pour la génération de plans coupants. Toutes les méthodes proposées sont testées sur des exemplaires concrets fournis par notre partenaire industriel.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to study the wind farm collection network design problem which consists of choosing a subset of edges of a potential electrical network and assigning the right capacity to each link so that the energy produced by the wind turbines can be sent to a specific sub-station at minimum cost. Designing such an electrical network incurs a significant cost when building a wind farm. Therefore, it will be useful to develop efficient tools to find an optimal design in reasonable computation time.

The wind farm collection network design problem belongs to a large class of network design problems which is known to be NP -hard. In designing a collection network, one must take an important engineering constraint into account. The energy flowing through a link is *unsplittable*, i.e., once the energy units produced by wind turbines and bundled on a given link these units have to remain bundled until they reach the substation. In this thesis, we will focus on two versions of this problem. The first one consists of selecting edges to install underground cables and transmission lines such that there is only one capacity for each type of link (cable or transmission line). In the second version of the problem we are allowed to install different types of capacities on the edges of the electrical network. Furthermore, power losses due to energy dissipation are accounted for when calculating the objective function. We assume that the locations of the turbines are already known for the two versions of the problem and several parallel links may be installed between two endpoints. We propose models and algorithms for the two versions of the problem. Then we discuss several ways to strengthen our models by means of valid inequalities. We also develop procedures for generating cutting planes. Computational tests performed on instances provided by our industrial partner confirm the efficiency of the proposed methods.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES FIGURES	ix
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU PROBLÈME DE CONCEPTION D'UN RÉ- SEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE ÉOLIENNE	5
2.1 Production énergétique	5
2.2 Réseau de collecte d'énergie éolienne	6
2.3 Non-bifurcation d'énergie	7
2.4 Choix de la capacité d'un lien	9
2.5 Un cas particulier du problème	10
CHAPITRE 3 REVUE DE LITTÉRATURE	11
3.1 Flot bifurqué, non bifurqué et confluent	11
3.2 Le problème de conception de réseaux	13
3.2.1 Le problème de conception de réseaux avec bifurcation de flot	14
3.2.2 Le problème de conception de réseaux avec non-bifurcation de flot	17
3.3 Le problème de l'arbre de Steiner	19
3.4 L'énergie éolienne	22
CHAPITRE 4 OPTIMISATION D'UN RÉSEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE AVEC UN SEUL TYPE DE CAPACITÉ	24
4.1 Modélisation en terme de graphe	24
4.2 Modélisation mathématique	27
4.2.1 Variables de décision	28

4.2.2	Fonction-objectif	28
4.2.3	Contraintes	28
4.3	Renforcement du modèle mathématique	33
4.4	Génération de plans coupants	36
4.4.1	Approche polyédrale	36
4.4.2	Inégalités valides	37
4.4.3	Algorithme de séparation	39
4.5	Formulation mathématique basée sur la répartition des éoliennes sous forme de groupes	43
4.5.1	Variables de décision	44
4.5.2	Fonction-objectif	44
4.5.3	Contraintes	44
4.6	Relation entre le problème de conception d'un réseau de collecte et le problème de l'arbre de Steiner	50
4.7	Expériences	52
CHAPITRE 5 OPTIMISATION D'UN RÉSEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE AVEC PLUSIEURS TYPES DE CAPACITÉS ET PERTES D'ÉNERGIE		62
5.1	Les pertes d'énergie	62
5.2	Modèle mathématique	63
5.3	Linéarisation du modèle quadratique	68
5.4	Génération de plans coupants	71
5.5	Expériences	76
CHAPITRE 6 CONCLUSION		83
RÉFÉRENCES		86

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Description des exemplaires	53
Tableau 4.2	Tailles des exemplaires	53
Tableau 4.3	Résultats	57
Tableau 4.4	Comparaison des sauts d'intégrité	57
Tableau 4.5	Nombre de plans coupants	57
Tableau 4.6	Résultats avec le modèle initial et les contraintes (4.16), (4.17), (4.22), et (4.23)	57
Tableau 4.7	Comparaison entre les résultats du modèle permettant les liens de sens opposés et ceux du modèle les interdisant	60
Tableau 4.8	Résultats de deux modèles avec (4.16), (4.17), (4.22) et (4.23)	61
Tableau 5.1	Description des exemplaires	78
Tableau 5.2	Comparaison de la taille des exemplaires	78
Tableau 5.3	Résultats	78
Tableau 5.4	Comparaison des sauts d'intégrité	78
Tableau 5.5	Résultats avec le modèle linéaire par morceaux et les inégalités valides .	79

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Un exemple d'un parc éolien	7
Figure 2.2	Un réseau de collecte	9
Figure 3.1	Un exemple de flot non confluent	12
Figure 3.2	Un exemple de flot 2-furqué	12
Figure 3.3	Un exemple de flot non bifurqué	13
Figure 4.1	Le graphe sous-jacent à un réseau de collecte dans un parc éolien . . .	26
Figure 4.2	Une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte	27
Figure 4.3	Séparation d'un ensemble d'éoliennes T' de la sous-station	41
Figure 4.4	La solution optimale de la relaxation linéaire d'un exemplaire de 40 éoliennes	42
Figure 4.5	Une solution du problème d'un réseau de collecte et son arborescence de Steiner correspondant	51
Figure 4.6	Comparaison de la taille de deux formulations mathématiques	59
Figure 4.7	Un exemple d'une solution optimale utilisant des arcs parallèles dans les deux sens	59
Figure 5.1	Une solution réalisable du problème avec plusieurs types de capacités .	65
Figure 5.2	Approximation par une série de points de rupture entiers	68
Figure 5.3	La représentation de l'écart entre la borne inférieure et la meilleure solution obtenue dans le temps de résolution	80

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les investissements dans l'énergie éolienne croissent de façon importante dans plusieurs pays du monde tels que les États-Unis, le Canada, la Chine, la France ou le Danemark. En particulier, avec son énorme masse terrestre et ses côtes étendues, le Canada se lance dans l'exploitation à grande échelle de l'énergie éolienne, notamment en favorisant l'aménagement de parcs éoliens partout sur son territoire. Regroupées dans un parc éolien, les éoliennes peuvent fournir assez d'énergie pour approvisionner des milliers de résidences. Actuellement, plus d'un million de foyers canadiens sont alimentés en électricité grâce à l'énergie éolienne. Selon la CanWEA (l'Association canadienne de l'énergie éolienne), le Canada pourrait combler jusqu'à 20% de ses besoins en matière d'électricité grâce à l'énergie éolienne, c'est-à-dire alimenter 17 millions de familles, d'ici 2025. Cela représente une excellente opportunité, pour les entreprises canadiennes, de développer et commercialiser de nouvelles technologies, de fabriquer des produits et d'offrir des services qui favorisent l'expansion de la filière éolienne.

Un parc éolien consiste en une série d'éoliennes qui occupent un territoire idéal pour la production énergétique et qui sont reliées à une sous-station de transformation à travers un réseau électrique constitué de plusieurs kilomètres de câbles souterrains et de lignes aériennes. La mise en place d'un réseau électrique pour collecter l'énergie éolienne et l'acheminer vers une sous-station de transformation entraîne des coûts importants lors de la construction d'un parc éolien. La conception d'un système de collecte d'énergie éolienne est une tâche essentielle mais complexe pour l'exploitation d'un parc éolien. De plus, il est crucial au moment de la conception du réseau de tenir compte de diverses contraintes de nature technique et économique telles que la nécessité de se procurer des permis de passage pour l'infrastructure existante de transport énergétique et la prise en considération de la nature topographique des terrains pour éviter certains obstacles naturels et artificiels. Pour les parcs de quelques éoliennes, les experts parviennent souvent à trouver une bonne configuration à la main ou par une simple énumération des toutes les configurations possibles. Cependant, ces approches ne sont plus efficaces avec la tendance récente de construire de grands parcs éoliens. Face à ce nouveau défi, il est plus judicieux de faire appel à d'autres techniques plus rationnelles telles que les techniques d'optimisation combinatoire, qui se sont révélées particulièrement performantes pour la modélisation et la résolution d'une multitude de problèmes concrets de conception de réseaux.

Le problème industriel que nous abordons dans cette thèse s'inscrit dans ce contexte et consiste à concevoir un réseau électrique de coût minimum pour collecter l'énergie dans un parc éolien. Ce problème a été proposé par une compagnie canadienne œuvrant dans le domaine de l'énergie éolienne ; elle veut un outil d'aide à la décision rapide et efficace qui lui permettra de se tailler une place sur le marché très concurrentiel de l'énergie éolienne. Plus précisément, étant donné l'emplacement d'éoliennes et de la sous-station, il s'agit de minimiser les coûts d'installation de câbles et de lignes de transmission du réseau électrique en respectant des contraintes de capacité et de non-bifurcation d'énergie. La *non-bifurcation* d'énergie est une condition importante dans notre problème, puisque l'énergie produite par des éoliennes regroupée à un niveau quelconque du réseau électrique doit rester regroupée jusqu'à ce qu'elle atteigne la sous-station. Lorsque de plus, le choix de la capacité du lien à installer fait partie des décisions à prendre, il s'agit alors de minimiser non seulement les coûts d'installation du réseau électrique mais aussi les pertes dues à la dissipation d'énergie.

D'un point de vue plus formel, étant donné un graphe G pondéré non orienté, le problème de conception de réseaux consiste à sélectionner un sous-ensemble d'arêtes pour connecter un sous-ensemble de sommets de sorte qu'une fonction de coût est optimisée sous certaines contraintes spécifiques. Les problèmes de conception de réseaux sont généralement modélisés comme des programmes mixtes en nombres entiers. Théoriquement, ces modèles permettent, en utilisant un algorithme de séparation et évaluation progressive, de trouver des solutions optimales pour des applications académiques ou même industrielles. Toutefois, ces algorithmes de résolution exacte, étant de complexité exponentielle, ne sont pas efficaces pour les instances de grande taille. Ceci a incité les chercheurs à se concentrer soit sur des méthodes approchées telles que les heuristiques, soit sur des techniques pour améliorer ces méthodes exactes telles que les techniques polyédrales. En particulier, les techniques polyédrales ont été utilisées avec succès pour obtenir des solutions optimales ou proches de l'optimum pour les problèmes d'optimisation combinatoire en un temps raisonnable. Ces méthodes consistent en fait à exploiter les structures spécifiques du problème en question dans le but de décrire les facettes de l'enveloppe convexe de ses solutions par un système d'inégalités valides (plans coupants). Une telle caractérisation est généralement difficile à identifier. Cependant, une description partielle du polyèdre combinée avec un algorithme de Branch-and-Bound pourrait suffire pour résoudre le problème à l'optimum. En effet, l'ajout de ces inégalités valides permet éventuellement d'améliorer les bornes obtenues à partir des relaxations linéaires. Toutefois, la tâche consistant à identifier des inégalités valides pour un problème donné est complexe aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique.

Contributions de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer un outil d'aide à la décision pour l'optimisation du système de collecte d'énergie éolienne. Cet outil sera d'une grande utilité pour le partenaire industriel, lui permettant d'obtenir la meilleure configuration pour concevoir le système de collecte d'énergie éolienne en un temps raisonnable. Deux versions sont étudiées dans cette thèse. Dans la première version, la capacité d'un câble ou d'une ligne de transmission est prédéfinie (un seul choix de capacité). Il s'agit simplement de minimiser les coûts d'installation de câbles et de lignes de transmission en respectant les contraintes de capacité et de non-bifurcation d'énergie. La deuxième version qui est plus compliquée, consiste non seulement à déterminer les liens qui sont utilisés pour acheminer l'énergie vers la sous-station, mais également à choisir la capacité de chaque lien utilisé, ce choix devant être fait parmi un ensemble de possibilités fixé par les concepteurs. Chaque type de câble ou de ligne peut dissiper l'énergie, et donc, il y a une quantité d'énergie qui est perdue. Ces pertes sont proportionnelles au carré de l'énergie qui circule dans le réseau. La fonction-objectif minimise non seulement les coûts d'installation du réseau, mais aussi les coûts des pertes d'énergie encourues en respectant les contraintes de capacités installées et la contrainte de non-bifurcation d'énergie. À notre connaissance, ce problème avec ses particularités n'a jamais fait l'objet d'études scientifiques. Toutefois, nous passons en revue les principaux travaux traitant de problèmes de conception de réseaux, ainsi que les quelques travaux qui ont étudié des problèmes d'énergie éolienne proches du nôtre. Par ailleurs, notre première contribution consiste à modéliser les deux versions du problème de la conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne et d'élaborer des méthodes exactes pour leurs résolutions. Nous soulignons que la formulation mathématique de la deuxième version est quadratique. Afin de remédier à cette nature non linéaire, nous avons transformé le modèle quadratique en un modèle linéaire par morceaux. La deuxième contribution réside dans l'utilisation des techniques de la théorie polyédrale pour améliorer les formulations proposées. Ainsi, nous avons proposé des familles d'inégalités valides et les techniques nécessaires pour la génération de plans coupants. Les plans coupants sont introduits à la racine de l'arbre de branchement. Un algorithme de séparation et évaluation progressive est ensuite utilisé pour la résolution de chaque variante du problème. Les résultats obtenus témoignent des efforts effectués pour la résolution du problème. Nous notons que les travaux effectués pour la résolution de la première variante du problème ont donné lieu à un article publié dans *INFOR*.

Le document est organisé comme suit. Dans le deuxième chapitre, nous donnons une

description détaillée de notre problème. Le troisième chapitre présente une revue de littérature sur les travaux qui traitent les problèmes de conception de réseaux et qui sont essentiellement en rapport avec notre problème industriel. Dans le quatrième chapitre, nous présentons tout d'abord une modélisation du problème comme un programme mixte en nombres entiers. Nous étudions ensuite la relaxation linéaire du modèle mathématique dans le but de générer des inégalités valides susceptibles de renforcer ce modèle. Nous consacrons le cinquième chapitre à la résolution du problème de collecte d'énergie incluant le choix des capacités des câbles souterrains et des lignes aériennes du réseau électrique. La thèse se termine par une conclusion sur les travaux effectués dans cette thèse ainsi que sur les perspectives de recherche dans le même contexte.

CHAPITRE 2

PRÉSENTATION DU PROBLÈME DE CONCEPTION D'UN RÉSEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE ÉOLIENNE

De nos jours, la production de l'électricité à partir de l'énergie éolienne connaît un essor important. En effet, les coûts de production de l'énergie éolienne baissent tous les ans, permettant à cette filière de concurrencer les sources d'énergie classiques. Une grande partie des coûts est attribuée à la construction des parcs éoliens. La réalisation d'un projet éolien est un processus complexe et long composé de plusieurs phases, impliquant plusieurs branches d'expertise et utilisant différentes technologies. L'objectif de ce chapitre est de présenter au lecteur les données de base permettant de concevoir le système de collecte d'énergie éolienne.

2.1 Production énergétique

Une éolienne est une machine permettant de convertir l'énergie cinétique du vent en électricité. Les éoliennes peuvent être exploitées individuellement, mais elles sont souvent regroupées sur un même territoire pour former des parcs éoliens. La quantité d'énergie produite dépend principalement du sens et de la force du vent. Par conséquent, le choix d'un territoire ayant un fort potentiel éolien est un élément clé pour la rentabilité d'un projet éolien. À cette fin, les experts effectuent des études techniques au moyen des outils scientifiques pour évaluer le potentiel éolien d'un site donné. Par ailleurs, un site propice à l'installation des éoliennes est généralement situé dans une vaste étendue de faible rugosité et dégagée pour éviter les variations de la vitesse du vent causées par la topographie et les obstacles du terrain. De plus, en raison de leurs tailles gigantesques, il est indispensable de positionner les éoliennes de manière à maintenir un écart suffisant entre elles afin de minimiser les effets de sillage et ainsi maximiser la production énergétique. En effet, la vitesse du vent est obligatoirement perturbée après le passage à travers une éolienne, ce qui affecte énormément la production des éoliennes voisines. Après avoir recueilli les diverses données nécessaires pour la construction d'un parc éolien, les experts décident de la puissance totale à installer. Dans un parc, les éoliennes installées sont généralement de même type pour uniformiser la production d'énergie. Désormais, nous supposons que l'emplacement des éoliennes est prédéfini. D'ailleurs de nombreux travaux ont traité le problème de la localisation d'éoliennes ; nous référons le lecteur à ces travaux (Veeramachaneni *et al.* (2012), Emami et Noghreh (2010), Fagerfjäll (2010), McWilliam *et al.* (2012), Wan *et al.* (2012), etc.) pour plus de détails. Nous considérons aussi

que toutes les éoliennes ont la même puissance et que chaque éolienne produit une seule unité d'énergie.

2.2 Réseau de collecte d'énergie éolienne

L'énergie produite par les éoliennes doit être collectée par une sous-station de transformation au moyen des fils électriques pour alimenter un réseau de distribution d'électricité desservant des résidences et des commerces qui sont plus éloignés. La figure 2.1 fournit une illustration schématique des principaux éléments qu'on retrouve dans un parc éolien. Une planification adéquate de ce réseau de collecte répandu généralement sur une grande zone doit nécessairement s'appuyer sur une bonne compréhension des principes de fonctionnement des différentes composantes. Le réseau de collecte d'énergie est composé de trois éléments essentiels :

- les câbles souterrains, qui permettent de connecter les éoliennes entre elles ou une éolienne au réseau aérien,
- les lignes de transmission du réseau aérien qui suivent généralement les routes existantes et relient deux points géographiques (les intersections de segments de rues), et
- les commutateurs qui servent à relier les extrémités des câbles souterrains au réseau aérien.

Pour des raisons techniques, les lignes de transmission du réseau aérien ne peuvent être installées que sur le réseau routier public après l'octroi d'un permis municipal (appelé aussi droit de passage). Nous admettons que les liens potentiels du réseau routier où les lignes de transmission seront installées sont donnés et leurs coûts d'installation sont connus. D'un autre côté, des tranchées sont généralement creusées le long de chemins d'accès (des voies préalablement aménagées pour le transport des composantes d'éoliennes vers leurs emplacements) pour l'installation des câbles souterrains. En raison de l'espacement relativement important entre les éoliennes, ces câbles peuvent mesurer plusieurs kilomètres. Puisque les ingénieurs ont effectué des études préliminaires, les liens potentiels du réseau sont donnés sous forme d'un graphe qu'on peut utiliser pour concevoir le réseau de collecte d'énergie. Les sommets de ce graphe correspondent aux positions des éoliennes, de la sous-station et des points de connexion des liens potentiels du réseau électrique. Chaque type de lien (câble souterrain ou ligne de transmission) a une capacité limitée. Ainsi pour collecter la totalité de l'énergie produite par les éoliennes, il est possible d'installer plusieurs liens parallèles entre deux extrémités. Par exemple, il peut y avoir plusieurs câbles entre deux éoliennes et sur chaque câble, l'énergie peut circuler dans l'un ou l'autre sens. Plusieurs câbles souterrains connec-

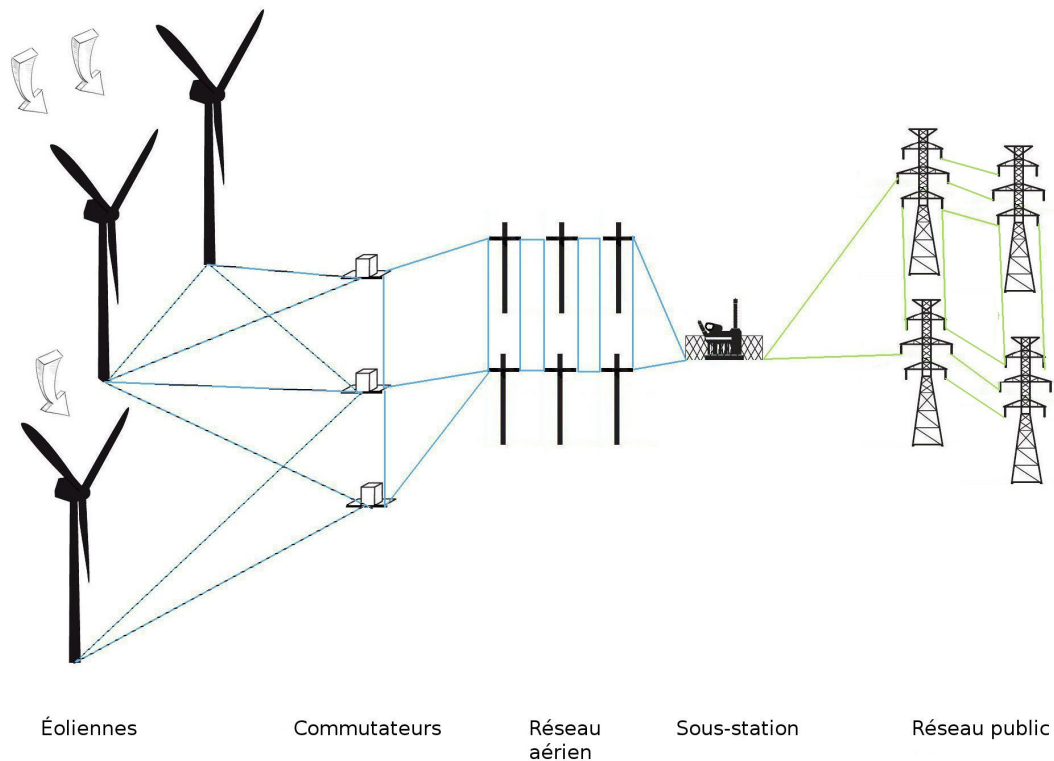


Figure 2.1: Un exemple d'un parc éolien

tant les éoliennes peuvent être combinés au moyen d'un commutateur dans une seule ligne de transmission de capacité supérieure à celle d'un câble. Le coût d'installation de chaque lien entre deux extrémités est connu et dépend de sa longueur et de sa capacité. Ce coût inclut le coût du commutateur lorsque un câble souterrain est relié à une ligne de transmission. D'une manière générale, s'il y a des liens parallèles entre deux extrémités, le coût d'installation du premier lien est supérieur à celui du deuxième, le coût du deuxième est supérieur à celui du troisième et ainsi de suite.

2.3 Non-bifurcation d'énergie

Après une description générale des différentes composantes du système de collecte d'énergie éolienne, nous allons décrire une contrainte technique importante. L'énergie transmise dans un lien peut être combinée avec celle d'autres liens mais ne peut pas être divisée (bifurquée) sur plusieurs liens. Autrement dit, si une quantité d'énergie Q circule d'un point u vers un point v à travers un lien, alors il doit y avoir un point w tel que cette quantité Q est

écoulée de v vers w à travers un seul lien. Évidemment, l'énergie transmise de v vers w peut être plus grande que Q puisque v peut recevoir de l'énergie d'autres points et en particulier d'un point u' différent de u . De ce fait, une solution sans des liens parallèles peut ressembler à une anti-arborescence avec la sous-station comme anti-racine.

Définition 2.3.1 *Une anti-arborescence dans un graphe orienté est un sous-graphe partiel comportant un sommet particulier r appelé anti-racine tel que pour tout sommet v du graphe, il existe un chemin orienté et un seul de v vers r .*

En revanche, il y a des solutions qui ne ressemblent pas à des anti-arborescences, en particulier celles qui contiennent des liens parallèles ou une structure constituée des arcs (u_1, v) , (u_2, v) , (v, w_1) et (v, w_2) (dans ce cas une solution contient un cycle incluant v et la sous-station). Il convient de noter que d'autres notions de « non-bifurcation » de flot apparaissent dans la littérature. Dans plusieurs cas, la condition de non-bifurcation peut être respectée en forçant les variables de flot à prendre des valeurs entières. Cependant ceci n'est pas suffisant pour notre problème. La condition de la non-bifurcation de flot dans notre problème est plus restrictive puisque les concepteurs de réseaux exigent que les unités de flot regroupées sur un lien donné restent regroupées jusqu'à ce qu'elles atteignent la sous-station. La suite de liens consécutifs (le chemin) à travers lesquels circule l'énergie produite par un groupe d'éoliennes constitue un circuit selon la terminologie du génie électrique (Camm *et al.* (2009)). Ainsi, le réseau électrique que nous allons concevoir est un ensemble de circuits électriques dont les origines sont des éoliennes réparties en groupes et la destination est la sous-station. La difficulté majeure de notre problème réside dans le fait que la partition des éoliennes en groupes n'est pas connue a priori, et donc la manière dont les circuits électriques seront construits dépend de la partition optimale des éoliennes. La nécessité de concevoir de tels circuits justifie la modélisation de notre problème comme un problème de flot non bifurqué.

Un exemple d'un réseau de collecte avec 6 éoliennes est décrit dans la figure 2.2. Les éoliennes sont les nœuds en noir et la sous-station représentée par un carré. Les nœuds intermédiaires représentent les intersections de lignes de transmission du réseau aérien. Tous les liens du réseau ont une capacité de 3 et ont le même coût. La valeur inscrite sur un lien représente la quantité d'énergie transmise à travers ce lien. En fait, ce réseau représente une configuration possible pour acheminer l'énergie produite par les éoliennes vers la sous-station qui respecte la contrainte de la non-bifurcation d'énergie. Il est nécessaire d'installer deux lignes de transmission parallèles sur les liens $(5, 6)$ et $(6, 1)$ pour faire passer les 4 unités d'énergie entrant au nœud 5.

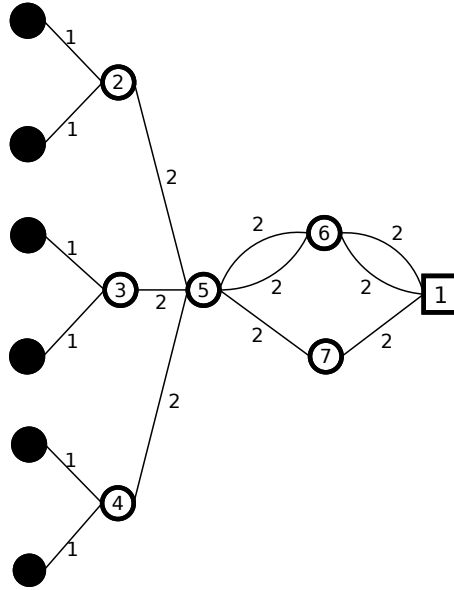


Figure 2.2: Un réseau de collecte

2.4 Choix de la capacité d'un lien

Le système de collecte d'énergie dans un parc éolien doit être planifié de façon à réaliser des économies importantes non seulement lors de sa construction, mais également lors de son exploitation. Le transfert de l'énergie produite par les éoliennes vers la sous-station nécessite l'utilisation d'une grande quantité de câbles et lignes électriques, dépendamment de leurs capacités. Lors de ce transfert, une quantité d'énergie est perdue. Les pertes sont principalement dues au phénomène physique appelé dissipation d'énergie par « effet de Joule », qui dépend essentiellement de la quantité d'énergie transférée. Le but est donc de minimiser les pertes d'énergie. Le choix d'utiliser des câbles ou lignes de grande capacité s'impose dès qu'il s'agit de transporter de l'énergie électrique sur de longues distances. Cependant, le coût d'installation d'un câble ou d'une ligne dépend de sa longueur ainsi que de sa capacité. Il faut donc établir un compromis entre les coûts d'installation des liens et les pertes qu'ils entraînent. Notre problème industriel sera étudié en deux volets. Dans le chapitre 4 nous supposons qu'il y a un seul type de câble souterrain et un seul type de ligne de transmission. Autrement dit, le type du câble ou de la ligne de transmission est connu a priori. Il s'agit alors de concevoir un réseau de collecte d'énergie qui minimise les coûts d'installation et respecte les contraintes de capacités de liens et la contrainte de non-bifurcation de flot. Dans le chapitre 5, nous allons considérer le cas où nous disposons de plusieurs types de liens. Pour chaque type de lien disponible, nous connaissons le coût d'installation, la capacité et la perte d'énergie potentielle. Dans ce cas, il s'agit de concevoir un réseau de collecte qui minimise

à la fois les coûts d'installation et les pertes d'énergie tout en respectant les contraintes de capacités des liens installés et la contrainte de non-bifurcation de flot.

2.5 Un cas particulier du problème

Dans le cas où un seul type de lien est disponible dont la capacité est suffisante pour collecter la totalité de l'énergie produite par les éoliennes (pas de liens parallèles), le problème revient à résoudre un problème d'arbre de Steiner avec les éoliennes et la sous-station comme des sommets terminaux.

Définition 2.5.1 *Étant donné un graphe non orienté pondéré $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $T \subseteq V$ dits terminaux, le problème de l'arbre de Steiner consiste à trouver un sous-graphe partiel qui soit un arbre de poids minimum couvrant tous les sommets terminaux; cet arbre peut contenir des sommets autres que les sommets terminaux.*

Il s'agit de trouver l'arbre de coût minimum qui permet de connecter les éoliennes à la sous-station (dans ce cas la question de non-bifurcation du flot ne se pose plus). Nous pouvons alors conclure que notre problème est NP-difficile (Garey et Johnson (1979)) même lorsqu'il est possible d'installer un seul câble sur chaque lien du réseau avec une capacité illimitée. L'ajout des capacités sur les liens ne fait que complexifier le problème. Nous montrerons plus tard dans cette thèse que le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne peut être modélisé comme un problème d'arbre de Steiner avec certaines contraintes supplémentaires.

Pour conclure, le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne est sujet à plusieurs contraintes complexes. Certaines contraintes ont été considérées afin de répondre au mieux à des questions techniques qui reflètent les exigences du partenaire industriel. Dans les chapitres suivants, nous proposons deux modèles mathématiques intégrant les différentes contraintes définies ci-dessus ainsi que des méthodes pour la résolution de ce problème.

CHAPITRE 3

REVUE DE LITTÉRATURE

La littérature de la recherche opérationnelle ne contient pas beaucoup de références traitant de problèmes de conception de réseaux de collecte d'énergie éolienne. Il est donc plus judicieux de définir le contexte général et théorique de ce problème industriel. Ainsi, nous pouvons déterminer ce qui existe dans la littérature comme travaux en rapport avec ce problème pour pouvoir développer des modèles mathématiques et des méthodes de résolution efficaces. Nous donnons, en premier lieu, les définitions de flot bifurqué, non bifurqué et confluent. Nous abordons, en deuxième lieu, un problème classique de la recherche opérationnelle, à savoir le problème de conception de réseaux, pour explorer les similitudes et les différences entre ce problème et le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne. En troisième lieu, nous nous intéressons au problème de l'arbre de Steiner afin d'établir le lien entre ce problème et le nôtre. Finalement, nous citons quelques travaux qui ont traité des problèmes liés à l'énergie éolienne.

3.1 Flot bifurqué, non bifurqué et confluent

Dans un problème de flot sur un réseau, il s'agit d'envoyer une quantité de flot d'un ensemble de sommets appelés sources vers un autre ensemble de sommets appelés puits. Dans la littérature, la manière dont le flot circule dans le réseau diffère d'un problème à un autre. Par exemple, dans le cas d'un flot non bifurqué (indivisible), le flot envoyé par une source doit suivre un chemin unique du réseau pour atteindre un puits. En revanche dans le cas d'un flot bifurqué, le flot envoyé par une source est acheminé vers un puits à travers plusieurs chemins. Dans ce cas, chaque sommet du réseau peut envoyer du flot à plusieurs sommets voisins. Dans certains contextes, on peut exiger qu'un flot entrant dans un sommet soit envoyé vers d voisins au plus (Séguin-Charbonneau (2009)) : on parle alors d'un flot d -furqué. En particulier, lorsqu'il n'est possible d'envoyer du flot à partir d'un sommet que vers un seul sommet voisin ($d = 1$), on parle d'un flot confluent (voir Séguin-Charbonneau (2009)). En fait, le flot confluent peut être aussi vu comme un cas particulier de flot indivisible quand il s'agit d'un problème de flot avec plusieurs sources et un seul puits. En effet, tout flot envoyé par une source suit un seul chemin vers le puits et donc tous les flots envoyés par les sommets sources peuvent se joindre à un sommet particulier du réseau pour ensuite atteindre le puits.

Le type de flot que nous traitons dans cette thèse (tel que nous l'avons défini dans le chapitre 2) est différent des trois cas mentionnés ci-dessus. Il n'est pas confluent, puisqu'on peut avoir une situation où une quantité de flot transmise par au moins k liens aboutissant à un sommet donné peut être envoyée vers au plus k voisins. En particulier lorsque $k = 2$, il est possible d'avoir la situation représentée dans la figure 3.1.

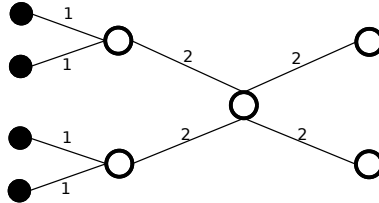


Figure 3.1: Un exemple de flot non confluent

Le flot dans notre problème n'est pas non plus d -furqué pour un $d \geq 2$, puisque si les unités de flot envoyées par différentes sources ont été fusionnées sur un lien donné, alors elles doivent quitter ce lien à travers un seul autre lien. La situation dans la figure 3.2 est interdite dans notre problème.

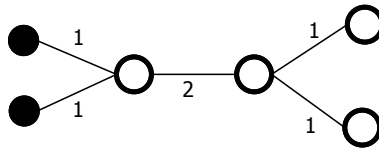


Figure 3.2: Un exemple de flot 2-furqué

Finalement, la manière dont le flot est acheminé vers la sous-station dans notre problème est plus restrictive que le flot non bifurqué défini ci-dessus. Plus précisément, si nous nous situons dans le cas d'un problème de flot avec plusieurs sources (les éoliennes) et un seul puits (la sous-station), non seulement le flot envoyé par une éolienne est acheminé vers la sous-station à travers un seul chemin, mais en plus, si les flots de plusieurs éoliennes sont regroupés sur un lien donné, ils doivent atteindre la sous-station par la suite à travers le même chemin.

Ces différentes manières d'acheminement du flot sont généralement abordées dans le cadre des problèmes de conception de réseaux. Ainsi, les formulations et les méthodes de résolution pour ces problèmes diffèrent selon la manière d'acheminer le flot dans le réseau associé.

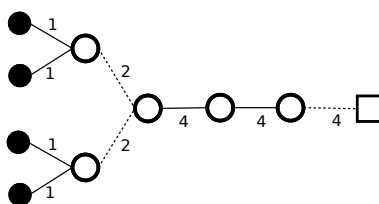


Figure 3.3: Un exemple de flot non bifurqué

3.2 Le problème de conception de réseaux

Le problème de conception de réseaux, connu dans la littérature sous le nom de « Network Design Problem », se pose généralement lorsqu'on souhaite mettre en place de nouvelles infrastructures afin de pouvoir répondre aux exigences des utilisateurs d'un réseau donné (transport, télécommunication, électricité...). Lorsqu'il y a une restriction sur les capacités des infrastructures, on parle d'un problème avec capacités. La littérature traitant la version sans restriction de capacité est omise puisque cette version est beaucoup plus facile à résoudre.

Sans perte de généralité, le problème de conception de réseaux avec capacités est défini dans un graphe non orienté où l'ensemble des arêtes correspond à l'ensemble des liens potentiels. Étant donné un ensemble de paires de sommets Origine-Destination (plusieurs produits) et un ensemble fini de types de capacités, le problème consiste à installer les capacités nécessaires sur les liens du réseau à construire pour transporter au moindre coût des demandes (produits) à partir des sommets Origines vers les sommets Destinations. Ce coût correspond, en fait, au coût d'installation des capacités sur les liens et de transport des demandes (produits). Il est possible d'installer simultanément plusieurs types de capacités sur chaque lien. Nous pouvons distinguer deux types d'utilisation de la capacité. La capacité installée sur un lien peut être utilisée indépendamment par les flots circulant dans l'un ou l'autre sens ou encore utilisée simultanément par les flots circulant dans les deux sens (dans ce cas les contraintes de capacité exigent que la somme des flots circulant dans les deux sens d'un lien donné ne doit pas excéder la capacité installée sur ce lien). Nous notons aussi que le problème de conception de réseaux est souvent formulé dans l'espace des arcs ou dans l'espace des chemins. La deuxième formulation est généralement utilisée dans le cas d'un flot non bifurqué.

Dépendamment du nombre de différentes capacités disponibles pour concevoir le réseau et du nombre de produits à transporter, plusieurs variantes et cas particuliers de ce problème ont été étudiés durant ces dernières décennies. À titre d'exemple, lorsque les coûts d'acheminement des demandes entre les paires de sommets Origine-Destination sont nuls et les capacités installées sont des multiples d'une même capacité de base, il s'agit d'un pro-

blème de chargement de réseaux (« Network Loading Problem »). Ce problème a été introduit pour la première fois par Magnanti *et al.* (1993). Lorsqu'il n'est permis d'installer qu'un seul type de capacité sur chaque arête du réseau pour satisfaire les demandes, on parle du problème de conception de réseaux avec capacités et coûts fixes (« Fixed Charge Network Design Problem »). Une revue de littérature plus approfondie est disponible dans les travaux de Magnanti et Wong (1984) et Minoux (1989). Bien que la publication de ces deux articles remonte à une trentaine d'années environ, ils constituent encore des documents de référence précieux sur les problèmes de conception de réseaux. Pour une revue de littérature plus récente, le lecteur est invité à consulter la référence de Gendron *et al.* (1998).

Les problèmes de conception de réseaux forment une classe de problèmes d'optimisation combinatoire sur laquelle la recherche de ces dernières années s'est fortement concentrée. Les méthodes de résolution comprennent des méthodes exactes et des recherches heuristiques. Nous donnons dans cette section un aperçu des méthodes de résolution proposées dans la littérature pour certains problèmes de conception de réseaux avec capacités en faisant la distinction entre la bifurcation et la non-bifurcation de flot.

3.2.1 Le problème de conception de réseaux avec bifurcation de flot

Le problème de conception de réseaux dans la version avec bifurcation de flot a fait l'objet d'une revue de littérature abondante. En particulier, de nombreux chercheurs se sont concentrés sur les études polyédrales et ont proposé plusieurs familles d'inégalités valides, notamment des inégalités de coupes (« Cutset inequalities ») pour résoudre ce problème et ses différentes variantes.

Magnanti *et al.* (1993) ont étudié les structures polyédrales de deux cas particuliers du problème de chargement de réseaux avec un seul de type de capacité tel que la capacité installée sur chaque lien du réseau est utilisée simultanément par les flots circulant dans les deux sens. Le premier cas est un problème de conception de réseaux dont les contraintes de capacité sont définies dans un seul sens pour chaque lien (« single arc capacitated network design problem »). Ce problème surgit lorsqu'une relaxation lagrangienne est appliquée aux contraintes de conservation de flot. Les auteurs ont montré que l'ajout des inégalités de capacités résiduelles (qui indiquent que la somme des flots d'un sous-ensemble de produits sur un arc ne peut pas excéder la somme des demandes de ce sous-ensemble de produits) permet de décrire entièrement l'enveloppe convexe du problème en question. Le deuxième cas est un problème de conception de réseaux avec trois sommets où chaque paire de sommets est reliée avec une arête (« three node network »). Les auteurs ont aussi prouvé que les inégalités de coupes (qui stipulent qu'il doit y avoir une capacité suffisante installée sur les

arcs d'une coupe séparant deux sous-ensembles de sommets pour satisfaire les demandes à travers cette coupe) et les inégalités de 3-partition (qui reposent sur le même principe des inégalités de coupe en séparant les sommets en trois sous-ensembles de sommets) suffisent pour une description complète de l'enveloppe convexe des solutions réalisables du problème. Ces inégalités ont été par la suite généralisées par Magnanti *et al.* (1995) pour résoudre ce même problème mais avec deux types de capacité tels que la petite capacité est égale à 1. Ils ont observé que les inégalités de coupes sont plus efficaces que les autres inégalités même quand elles sont ajoutées à la racine de l'arbre de branchement.

Bienstock *et al.* (1998) ont traité le problème de chargement de réseaux. Deux algorithmes de Branch-and-Cut ont été proposés pour la résolution du problème. Le premier algorithme combine une formulation basée sur des variables de capacités et trois familles d'inégalités valides : les inégalités de partition, les inégalités de capacité totale et les inégalités métriques (une généralisation du théorème coupe-min/flot-max pour le cas des multiflots). Le deuxième algorithme combine une formulation de multiflots et trois autres familles d'inégalités valides : les inégalités de coupes, les inégalités de couverture de flot et les inégalités de partition. Toutes ces familles d'inégalités ont été détectées en utilisant des algorithmes heuristiques de séparation. Les deux approches ont été utilisées pour résoudre des exemples concrets.

Atamtürk et Rajan (2002) ont traité le problème de conception de réseaux avec capacités en considérant les deux cas de flot bifurqué et non bifurqué. Ils ont aussi considéré que les capacités sont des entiers multiples d'une capacité de base donnée. Pour résoudre le problème dans le cas du flot bifurqué, une formulation basée sur des variables de flot continues a été proposée. Ensuite, ils ont développé un algorithme de plans coupants basé sur les inégalités de capacité résiduelle. Des inégalités valides violées ont été détectées à la racine de l'arbre de branchement en appliquant un algorithme exact de séparation.

Atamtürk (2002) a effectué une étude polyédrale basée sur les inégalités de coupes sur trois variantes du problème de conception de réseaux avec capacités (sans aucune restriction sur les capacités). Il a présenté une description complète de l'enveloppe convexe du problème dans le cas d'un seul type de produit (demande) et un seul type de capacité. Ces résultats ont été par la suite généralisés pour le cas avec un seul type de produit et plusieurs types de capacités, et le cas avec plusieurs types de produits et plusieurs types de capacités. Pour montrer l'efficacité de ces inégalités valides, l'auteur a implémenté un algorithme de Branch-and-Cut en utilisant CPLEX pour résoudre le problème dans le cas de plusieurs types de produits et plusieurs types de capacités. Afin de détecter des inégalités de coupe violées, l'auteur a utilisé des sous-ensembles composés d'un sommet et de deux sommets seulement puisque trouver des bonnes coupes parmi toutes les coupes dans le réseau est une tâche difficile. Les

résultats numériques ont montré que les inégalités de coupes sont nécessaires pour améliorer la résolution du problème.

L'une des variantes du problème de conception de réseaux les plus étudiées à ce jour est la variante avec capacités et coûts fixes. Par exemple, Holmberg et Yuan (2000) ont proposé un algorithme de Branch-and-Bound basé sur une relaxation lagrangienne obtenue en relaxant les contraintes de conservation de flot. Cette relaxation lagrangienne a permis de décomposer le problème en plusieurs sous-problèmes faciles à résoudre à l'aide d'un algorithme de sous-gradient. Les résultats expérimentaux ont montré que l'algorithme proposé est plus efficace qu'un algorithme de Branch-and-Bound de CPLEX. Cette méthode a été améliorée plus tard par Kliewer et Timajev (2005) en utilisant une méthode de coupes pour détecter deux familles d'inégalités valides violées : des inégalités de couverture et des inégalités locales.

Costa *et al.* (2009) ont étudié l'impact de trois familles d'inégalités valides pour la résolution du problème : les inégalités de Benders (utilisées généralement dans la décomposition de Benders), les inégalités métriques et les inégalités de coupes. Ils ont montré que les inégalités de coupes et les inégalités métriques sont des inégalités de Benders sous certaines conditions. Ces inégalités ont été détectées dans le cadre d'un algorithme basé sur la décomposition de Benders.

Récemment, Chouman *et al.* (2011) ont développé un algorithme de coupes qui génère plusieurs familles d'inégalités valides qui sont toutes dérivées des inégalités de coupes pour la résolution du même problème. Pour la détection de ces inégalités ils ont proposé des algorithmes heuristiques de séparation. Pour mesurer l'impact de différentes familles d'inégalités valides sur la formulation du problème, ils ont effectué des tests sur un grand nombre d'exemples.

Outre les méthodes exactes utilisées pour la résolution de cette variante, plusieurs heuristiques, notamment des recherches tabous (Crainic *et al.* (2000), Crainic et Gendreau (2002), Ghamlouche *et al.* (2003), etc.) ont été développées pour obtenir des solutions approchées en temps raisonnable et ainsi trouver une borne supérieure de la valeur optimale. Chouman et Crainic (2010) ont développé une méthode hybride combinant des méthodes exactes et une recherche tabou. Rodríguez-Martín et Salazar-González (2010) et Hewitt *et al.* (2010) ont également proposé une méthode qui combine des techniques de programmation mathématique avec une recherche locale.

Une variante du problème de chargement de réseaux similaire au problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne avec plusieurs types de capacités a été étudiée par Salman *et al.* (2008) et Ljubić *et al.* (2012). Dans ce problème connu dans la littérature comme étant le « Single Source Network Loading Problem », il s'agit d'envoyer des demandes

(d'un seul produit) à partir d'un ensemble de sommets Origines vers un sommet particulier (Destination) grâce à l'installation de plusieurs types de capacités (câbles) sur les liens d'un réseau. Des méthodes exactes ont été proposées pour la résolution de ce problème. La méthode de Salman *et al.* (2008) est basée sur deux phases. Dans la première phase, ils ont calculé le choix optimal du type de câble pour toutes les valeurs possibles de flot sur chaque lien du réseau. Dans la deuxième phase, ils ont élaboré un algorithme de Branch-and-Bound pour résoudre un problème de flot en tenant compte de la fonction de coûts obtenue dans la première phase. Ljubić *et al.* (2012) ont proposé un algorithme de Branch-and-Cut qui génère des coupes de Benders pour la résolution de ce problème.

Il est aussi important de noter que certains chercheurs ont étudié le problème traité dans Salman *et al.* (2008) en proposant des algorithmes d'approximation. Nous citons par exemple les travaux de Salman *et al.* (1997) et de Salman *et al.* (2000).

Pour finir, un autre cas particulier du problème de conception de réseaux est celui de la conception de réseaux d'accès étudié par Chardy *et al.* (2012). Ce problème est, en quelque sorte, le cas inverse du problème de conception de réseaux de collecte d'énergie éolienne. Plus précisément, il s'agit de mettre en place des coupleurs optiques (« splitter ») sur des sommets d'un réseau existant et de sélectionner les chemins empruntés par les fibres optiques sur les liens de ce réseau pour desservir un ensemble des clients d'internet. Il est possible d'installer trois niveaux de fibres optiques sur ce réseau tels qu'une fibre entrant dans un coupleur soit répartie en plusieurs fibres d'un niveau plus élevé tout en respectant les capacités permises. Chaque client a une demande connue et il est placé au bout d'une fibre du troisième niveau. Les auteurs ont proposé un modèle mathématique en nombres entiers basé sur une généralisation du problème de multiflot. Ils ont ensuite montré que ce problème est *NP*-difficile. Par ailleurs, des inégalités valides basées sur les techniques d'arrondi ont été développées pour améliorer la performance du modèle. Ils ont aussi utilisé la méthode de la réduction des graphes pour réduire la taille du problème. Des tests sur des réseaux concrets ont été réalisés.

3.2.2 Le problème de conception de réseaux avec non-bifurcation de flot

Le problème de conception de réseaux avec non-bifurcation de flot a été peu étudié par rapport à la version avec bifurcation de flot. Barahona (1996) a étudié le problème de chargement de réseaux dans un réseau non orienté où la capacité installée sur une arête du réseau est utilisée simultanément par les flots circulant dans les deux sens. Pour résoudre ce problème, des sous-ensembles de nœuds ont été fusionnés en plusieurs « supernœuds » pour réduire la taille du problème. Ensuite, le problème a été résolu dans le nouveau réseau, où la bifurcation du flot est permise, en utilisant une méthode de Branch-and-Cut basée sur les inégalités

de coupes. Ces inégalités ont été générées à l'aide d'un algorithme exact de séparation. Par ailleurs à partir de la solution obtenue pour le cas bifurqué, il a résolu le cas non bifurqué dans le réseau initial en utilisant une procédure heuristique. Cette méthode a été appliquée pour résoudre des exemples comportant jusqu'à 64 nœuds.

Brockmüller *et al.* (1998) ont étudié une variante du problème de chargement de réseaux où chaque demande doit être envoyée à travers un chemin unique et en plus ce chemin peut inclure au plus un nombre limité de sommets (« hub nodes »). Les auteurs ont proposé une formulation mathématique basée sur les chemins. Ils ont développé une approche qui combine une méthode de plans coupants et l'algorithme de Branch-and-Bound pour la résolution de ce problème. Les auteurs ont utilisé une nouvelle famille d'inégalités valides appelées inégalités *c*-fortes (« *c*-strong inequalities ») en plus des inégalités de coupes. Leur méthode consiste à ajouter a priori quelques inégalités valides simples au modèle. Ensuite, ils appliquent itérativement une méthode de plans coupants pour améliorer la relaxation linéaire du modèle. Lorsque l'algorithme n'est plus capable de détecter de nouvelles inégalités violées, une heuristique est utilisée pour raffiner la solution de la relaxation linéaire et obtenir une solution réalisable. Finalement, la meilleure solution réalisable obtenue est utilisée comme une borne supérieure dans un algorithme de Branch-and-Bound pour résoudre le problème.

Atamtürk et Rajan (2002) ont proposé un modèle mathématique utilisant des variables binaires pour représenter le flot sur les arcs afin de résoudre le problème de conception de réseaux avec capacités dans le cas d'un flot non bifurqué. Ils ont également introduit deux nouvelles familles d'inégalités valides dérivées des inégalités *c*-fortes. Les auteurs ont formellement démontré que la séparation des inégalités *c*-fortes est *NP*-difficile. Finalement, l'efficacité de ces inégalités valides a été testée dans le cadre d'un algorithme de Branch-and-Cut.

Les auteurs van Hoesel *et al.* (2002) ont développé un algorithme de Branch-and-Cut basé sur une formulation utilisant des variables de flot pour la résolution d'une variante du problème de chargement de réseaux avec un seul type de capacité. Plus précisément, ils ont proposé plusieurs familles d'inégalités valides dérivées des inégalités *c*-fortes et des inégalités de coupes. Des résultats expérimentaux sur des exemples concrets d'un maximum de 8 nœuds ont été rapportés ; ils montrent que l'algorithme de Branch-and-Cut est capable de résoudre tous les exemples à l'exception de ceux comportant 8 nœuds.

Récemment, Bartolini et Mingozzi (2008) ont présenté un modèle mathématique en nombres entiers basé sur des variables de flot. Ainsi, ils ont proposé un algorithme exact renforcé par des inégalités de coupes et ils ont aussi développé plusieurs heuristiques : une heuristique gloutonne, une recherche tabou et deux autres basées sur des énumérations partielles. Ils

ont montré une fois de plus que la performance des algorithmes exacts reste limitée aux exemples de petite taille et que l'utilisation des heuristiques est nécessaire pour la résolution des exemples de taille importante. Toutefois, ils ont démontré que leur algorithme de Branch-and-Cut est aussi bon que celui présenté dans les travaux d'Atamtürk (2002).

Berger *et al.* (2000) ont également étudié une variante du problème de chargement de réseaux dans un contexte de télécommunication. Plus précisément, il s'agit d'installer des équipements (en utilisant éventuellement plusieurs types de câbles en fibre optique) sur les liens d'un réseaux non orienté pour satisfaire les demandes d'un ensemble de sommets terminaux à partir d'un sommet central. Pour acheminer la demande de chaque sommet terminal à partir du sommet central, il est imposé d'utiliser un seul chemin (non-bifurcation de flot). Une heuristique de recherche tabou a été proposée pour trouver des solutions approchées à ce problème. L'idée de cette recherche tabou est d'améliorer itérativement une solution courante en explorant son voisinage pour trouver une meilleure solution. Une solution voisine de la solution courante est obtenue en remplaçant le chemin courant entre un sommet terminal et le sommet central par un chemin optionnel. Ces chemins sont obtenus en appliquant un algorithme de K plus courts chemins. Une fois une meilleure solution voisine obtenue, le sommet terminal qui a mené à cette solution est déclaré tabou pendant un certain nombre d'itérations. Des expériences sur des réseaux avec un maximum de 200 sommets et 100 sommets terminaux indiquent que la recherche tabou fournit de meilleures solutions qu'une heuristique de descente basée sur les voisinages 1-opt et 2-opt.

Gendron *et al.* (2002) ont aussi proposé des heuristiques qui appliquent alternativement des phases de recherche locale et de construction pour la résolution du même problème que celui étudié par Berger *et al.* (2000). À chaque phase de construction, des solutions réalisables ont été construites à l'aide d'une stratégie de diversification en exploitant les informations recueillies le long des itérations précédentes. Chaque solution réalisable obtenue sert de point de départ pour la procédure de recherche locale (qui peut être une méthode de descente ou une recherche tabou). Pour comparer les stratégies de diversification élaborées, les auteurs ont rapporté des résultats sur des réseaux de grande taille avec un maximum de 500 sommets.

3.3 Le problème de l'arbre de Steiner

La deuxième partie de cette revue de littérature est consacrée au problème de l'arbre de Steiner. Ce problème est un problème classique de l'optimisation combinatoire et est connu comme étant *NP*-difficile (Garey et Johnson (1979)). Il a été étudié par beaucoup de chercheurs et plusieurs formulations mathématiques dans le cas d'un graphe orienté ou non orienté ont été proposées, notamment dans les références suivantes : Wong (1984) et

Goemans et Myung (1993). Nous avons choisi de présenter une formulation classique basée sur les flots dans un graphe orienté (Wong (1984)). Considérons alors le graphe $G = (V, A)$ tel que V est l'ensemble des sommets de G et A l'ensemble des arcs de G . Soit $T \subseteq V$ l'ensemble des sommets terminaux, et 1 un terminal particulier appelé sommet racine. Un coût c_{ij} est associé à tout arc $(i, j) \in A$. Il s'agit alors de trouver un arbre ou à proprement parler une arborescence de poids minimum qui contient un chemin orienté entre le sommet 1 et tout sommet terminal. Pour commencer, nous introduisons les variables x_{ij}^k pour représenter la quantité de flot circulant sur l'arc (i, j) et qui est envoyée par la racine vers le terminal k , et les variables binaires y_{ij} qui valent 1 si l'arc (i, j) fait partie de la solution et 0 sinon. Le modèle mathématique s'écrit comme suit.

$$\min_{i,j} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \quad \text{s.c.} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji}^k - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ -1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq 1, k \end{cases} \quad \forall k \in T \quad (3.2)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, k \in T \quad (3.3)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in T \quad (3.4)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.5)$$

Les contraintes (3.2) permettent de s'assurer qu'il y a une seule unité de flot de type k qui circule entre les sommets 1 et k , tandis que les contraintes (3.3) indiquent que le flot sur l'arc (i, j) est permis si et seulement si la variable y_{ij} vaut 1. Les contraintes (3.2)-(3.5) indiquent qu'une solution réalisable doit nécessairement contenir un chemin entre le sommet 1 et tout sommet terminal de l'ensemble T .

Par ailleurs, plusieurs chercheurs ont proposé diverses méthodes de résolution exactes et approchées pour la résolution du problème de l'arbre de Steiner. Dans ce qui suit nous présentons un survol rapide de quelques méthodes proposées dans la littérature pour ce problème. En ce qui concerne les méthodes exactes, nous citons par exemple le travail de Beasley (1989), dans lequel l'auteur a proposé une formulation mathématique en utilisant le fait que le problème de l'arbre de Steiner est équivalent à un problème d'arbre couvrant de poids minimal avec des contraintes additionnelles. Il a développé une borne inférieure en se basant sur la relaxation lagrangienne obtenue en relaxant les contraintes additionnelles dans

la formulation proposée.

Plus tard, cette formulation mathématique a été utilisée par Lucena et Beasley (1998) pour développer un algorithme de type Branch-and-Cut. Les auteurs ont amélioré cette formulation en ajoutant des contraintes d'élimination de sous-tours. Les résultats ont prouvé que cet algorithme permet de résoudre des exemples de grande taille en utilisant des procédures de réduction de taille.

Chopra *et al.* (1992) ont présenté un autre algorithme de type Branch-and-Cut en utilisant une formulation mathématique classique du problème de l'arbre de Steiner, basée sur ce qu'on appelle les coupes de Steiner (qui expriment le fait que toute coupe séparant le sommet racine des sommets terminaux dans la solution doit contenir au moins une arête).

Du côté des méthodes approchées, nous trouvons celle de Khoury et Pardalos (1996), qui ont proposé une heuristique basée sur l'algorithme de Prim pour la résolution du problème de l'arbre de poids minimal. En effet, cette heuristique calcule des poids de préférence pour les arcs. Ces poids sont ensuite utilisés dans une approche basée sur l'algorithme de Prim pour résoudre le problème de l'arbre de Steiner. Les auteurs ont prouvé l'efficacité de cette heuristique en effectuant des tests sur des graphes avec un maximum de 500 sommets et 2500 arêtes.

Gendreau *et al.* (1999) ont développé un algorithme de recherche tabou pour résoudre ce problème qu'ils ont appelé TABUSTEINER. À chaque itération de l'algorithme TABUSTEINER, on ajoute ou on enlève un seul sommet de Steiner de la solution courante et le sommet choisi est mis dans une liste taboue durant un certain nombre d'itérations. La solution de départ est générée en appliquant une heuristique (« Minimum Path Heuristic ») qui utilise les plus courts chemins du graphe pour construire l'arbre. Dans le but d'améliorer leur algorithme, ils ont introduit des techniques de diversification de l'espace de recherche. Cet algorithme a été testé sur des exemples tirés de la OR-Library (dont les solutions optimales sont connues). Ainsi, les auteurs ont montré que leur recherche tabou est plus efficace que les algorithmes génétiques proposés par Esbensen (1995) et Voß et Gutenschwager (1998).

Une autre recherche tabou a été proposée par Ribeiro et Souza (2000). Elle repose sur le même principe de l'ajout et de la suppression de sommets de Steiner, utilisé par Gendreau *et al.* (1999). Pour accélérer leur algorithme, ils ont proposé des bornes supérieures pour favoriser l'insertion de sommets et des bornes inférieures pour éviter certaines suppressions de sommets. Les auteurs ont prouvé que leur heuristique de recherche tabou consomme moins de temps que celle présentée par Gendreau *et al.* (1999).

Martins *et al.* (2000) ont développé deux procédures GRASP pour la résolution approchée du problème. Une procédure GRASP est composée de deux phases, une phase constructive et

une phase d'amélioration basée sur une recherche locale. Les deux méthodes GRASP reposent sur le même principe pour la phase constructive. Pour la phase d'amélioration, la première stratégie de recherche locale utilise un voisinage basé sur l'ajout ou la suppression d'un seul sommet de Steiner, et la deuxième utilise un voisinage basé sur le remplacement d'un chemin de la solution courante dont tous les sommets intermédiaires sont des sommets de Steiner par un chemin plus court. Dans cette dernière stratégie de recherche locale, le voisinage d'une solution contient soit de meilleures solutions, soit des solutions de même qualité. Les auteurs ont ensuite proposé une nouvelle méthode hybride qui combine les deux procédures de recherche locale. Finalement, les résultats obtenus ont montré que l'algorithme GRASP avec la stratégie hybride de recherche locale est comparable à ou même meilleure dans certains cas que celle donnée par l'algorithme proposé dans Ribeiro et Souza (2000).

3.4 L'énergie éolienne

Dans cette section, nous passons en revue les travaux, peu nombreux, qui ont traité du problème de conception d'un réseau de collecte de l'énergie éolienne. Berzan *et al.* (2011) considèrent un problème similaire au nôtre et le décomposent en trois niveaux selon la difficulté : la conception du circuit, la sous-station, et le parc au complet. Dans le premier niveau, étant donné un ensemble d'éoliennes formant un seul circuit, il s'agit de trouver un arbre couvrant de poids minimum qui permet de connecter toutes les éoliennes. Dans le deuxième niveau, étant donné une sous-station et un ensemble d'éoliennes, il s'agit de trouver un arbre couvrant de poids minimum qui permet de connecter les éoliennes à la sous-station tout en respectant un nombre maximum d'éoliennes par circuit. Dans le troisième niveau, étant donné un ensemble de sous-stations et un ensemble d'éoliennes, il s'agit de trouver une forêt composée d'arbres couvrants de poids minimum où chaque arbre de poids minimum permet de connecter un sous-ensemble d'éoliennes à une sous-station. Dans le cas où il y a un seul type de câble, ils ont développé un algorithme glouton pour résoudre le problème d'une manière approchée. Leur algorithme a été testé sur des exemples avec un maximum de 976 éoliennes et 24 sous-stations. Ils ont également formulé le problème de circuit comme un programme mixte en nombres entiers et ont utilisé cette formulation pour résoudre des exemples avec un maximum de huit éoliennes et avec plusieurs types de câbles.

Fagerfjäll (2010) a proposé deux modèles : le modèle de production et le modèle de conception. Le modèle de production permet de choisir l'emplacement des éoliennes qui maximise la production énergétique en respectant la distance minimale prescrite entre les éoliennes. Ce premier modèle tient compte des pertes de production causées par l'effet de sillage entre les éoliennes et de l'impact sonore des éoliennes à proximité des zones habitées. Le modèle

de conception, quant à lui, permet de connecter les éoliennes à une sous-station de transformation au moyen de câbles électriques. La solution obtenue est sous forme d'un arbre de Steiner. D'autre part, l'auteur a donné des suggestions dans le but d'étendre son modèle telles que la possibilité d'installer des câbles parallèles, d'utiliser des câbles avec différentes capacités et de tenir compte des pertes d'énergie. Par ailleurs, seul le modèle de conception ressemble au nôtre, mais il existe une différence entre le modèle de Fagerfjäll (2010) et le nôtre ; en particulier dans le modèle de conception de Fagerfjäll (2010), les emplacements des éoliennes ne sont pas fixés. Dans ce sens, le modèle de Fagerfjäll (2010) est plus général que notre modèle, mais les exemples résultants sont difficiles à résoudre. Par conséquent, il faut développer des heuristiques ou se concentrer sur des exemples beaucoup plus petits que ceux qu'on trouve en pratique.

Dutta et Overbye (2011) ont proposé trois algorithmes pour concevoir étape par étape le système de collecte d'énergie éolienne. L'objectif de chacun de ces algorithmes est de minimiser la longueur totale du système de collecte dont la structure ressemble à un arbre de Steiner qui connecte les éoliennes à une sous-station. La solution de départ pour le premier algorithme est un arbre couvrant de poids minimum où des sommets intermédiaires (sommets de Steiner) ont été créés pour réduire la longueur totale de l'arbre. Dans le deuxième algorithme, les auteurs ont introduit une restriction sur le nombre maximum d'éoliennes connectées par une branche de l'arbre du système de collecte en regroupant a priori les éoliennes (la partition des éoliennes est obtenue en utilisant l'algorithme de k -moyennes). Et finalement, le troisième algorithme permet de déterminer la direction de la circulation de l'énergie pour affecter le type de câble adéquat à chaque branche de l'arbre du système de collecte.

Les problèmes de conception de réseaux et de l'arbre de Steiner constituent depuis plusieurs décennies un défi majeur pour la communauté scientifique. Malgré leur difficulté, les chercheurs tentent constamment d'améliorer les techniques existantes ou même de développer de nouvelles techniques pour résoudre ces problèmes. Une des principales raisons justifiant ces efforts est l'intérêt pratique des méthodes proposées pour la résolution des applications concrètes. Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne est une application parmi tant d'autres. Dans le prochain chapitre, nous nous inspirons des techniques discutées ci-dessus pour formuler et développer des méthodes afin de résoudre ce problème.

CHAPITRE 4

OPTIMISATION D'UN RÉSEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE AVEC UN SEUL TYPE DE CAPACITÉ

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne qui se pose lors de l'exploitation de l'énergie éolienne. Nous allons considérer la version la plus simple du problème où seulement deux types de liens sont disponibles (un seul type de câble souterrain et un seul type de ligne de transmission). Nous formulons le problème comme un programme mixte en nombres entiers. Afin d'accélérer la résolution du problème par une méthode de séparation et évaluation progressive, nous présentons plusieurs inégalités valides et plans coupants. Nous proposons ensuite notre vision sur la modélisation du problème comme un problème de l'arbre de Steiner. Finalement, des résultats sont présentés pour des applications concrètes du problème de conception d'un réseau de collecte.

4.1 Modélisation en terme de graphe

Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne consiste à trouver un réseau de coût minimum à travers lequel l'énergie produite par les éoliennes est acheminée vers la sous-station. Afin de modéliser ce problème, nous devons décrire formellement le graphe $G = (V, A)$ sous-jacent à ce problème. L'ensemble V est la réunion disjointe de l'ensemble T des sommets correspondant à des éoliennes, de l'ensemble R des sommets représentant les sommets intermédiaires dans le réseau hors-terre de lignes de transmission, et de $\{0, s\}$, où le sommet s est la sous-station et 0 est un sommet fictif appelé source. L'énergie est transmise à partir de la source 0 vers la sous-station s . Cependant, elle peut circuler dans l'un ou l'autre sens sur un lien dont les extrémités appartiennent toutes les deux à T ou à R . C'est la raison pour laquelle le graphe sous-jacent G est orienté. L'ensemble A représente les liens potentiels qu'on peut utiliser pour installer les câbles souterrains et les lignes aériennes permettant d'acheminer l'énergie transmise par la source vers la sous-station. Plus précisément, A est la réunion disjointe des cinq catégories d'arcs suivantes :

1. tous les arcs de la forme $(0, u)$ pour tout $u \in T$, qui sont des arcs fictifs permettant de transmettre une unité d'énergie de la source vers chaque éolienne ;
2. tous les arcs de la forme (u, v) et (v, u) pour chaque câble souterrain dont les extrémités u et v appartiennent à T ;

3. tous les arcs de la forme (u, v) pour chaque câble reliant le réseau souterrain au réseau aérien avec u appartient à T et v appartient à R ;
4. tous les arcs de la forme (u, v) et (v, u) représentant une ligne de transmission dont les extrémités u et v appartiennent à R ; et
5. tous les arcs de la forme (v, s) , tels que v appartient à R et il existe une ligne de transmission entre v et s .

Dans le but d'alléger la notation, nous notons A_1 l'ensemble des arcs (u, v) tels que (v, u) n'appartient pas à A et E l'ensemble des paires $\{u, v\}$ telles que (u, v) et (v, u) appartiennent à A .

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, il est possible d'installer plusieurs câbles ou lignes parallèles sur les liens potentiels du réseau électrique. Nous notons m le nombre maximal de câbles ou lignes parallèles entre deux nœuds du graphe. Par exemple, il est possible d'installer jusqu'à m câbles souterrains entre deux éoliennes u et v . Dans ce cas, les liens sont notés $(u, v, 1)$, $(v, u, 1)$, $(u, v, 2)$, $(v, u, 2)$, etc. Seulement un des deux liens (u, v, k) , (v, u, k) peut être sélectionné pour chaque k (ce qui revient à choisir le sens d'écoulement du flot sur le k -ième lien entre u et v). La valeur de m est 4 dans les exemplaires fournis par notre partenaire industriel.

Chaque câble souterrain ou ligne de transmission a une capacité limitée qui correspond dans notre problème au nombre maximal d'éoliennes en aval. Dans ce chapitre, nous supposons qu'il y a un seul type de câble souterrain et un seul type de ligne de transmission. Par ailleurs, les capacités des arcs dans le graphe G sont de trois types. La capacité d'un arc de la catégorie 1 est égale à 1. La capacité d'un arc de la catégorie 2 ou 3 est égale à C_{ug} , où C_{ug} (ug veut dire « underground ») est une constante. La capacité d'un arc de la catégorie 4 ou 5 est égale à C_{ag} , où C_{ag} (ag veut dire « above-ground ») est une autre constante. Pour décrire les coûts des arcs, il faut faire la distinction entre les arcs parallèles. Plus précisément, le coût de chaque lien additionnel entre deux sommets u et v est au plus le coût du lien précédent entre u et v . Ainsi si c_{uv}^k représente le coût du lien (u, v, k) , la relation $c_{uv}^1 \geq c_{uv}^2 \geq \dots \geq c_{uv}^m$ est vérifiée pour tout arc (u, v) et la relation $c_{uv}^k = c_{vu}^k$ est vérifiée pour tout k et tout arc appartenant aux catégories 2 et 4. Pour tout k et tout u appartenant à T , c_{0u}^k est égal à 0 puisque le sommet source 0 est fictif et sert seulement à injecter du flot dans le réseau.

Comme indiqué précédemment, le coût total des liens choisis doit être minimisé. Notre partenaire industriel va tirer un bénéfice économique évident de la minimisation du coût total

des câbles. Il est également raisonnable de s'attendre à ce qu'une solution optimale offre une conception simple mais qui répond aux attentes du partenaire industriel pour la construction du réseau de collecte. Dans la section suivante, nous proposons un modèle mathématique dans le but de résoudre ce problème en utilisant le solveur CPLEX. Mais avant cela, nous proposons un exemple de graphe correspondant à un parc éolien et un réseau conçu pour la collecte de l'énergie éolienne dans ce graphe.

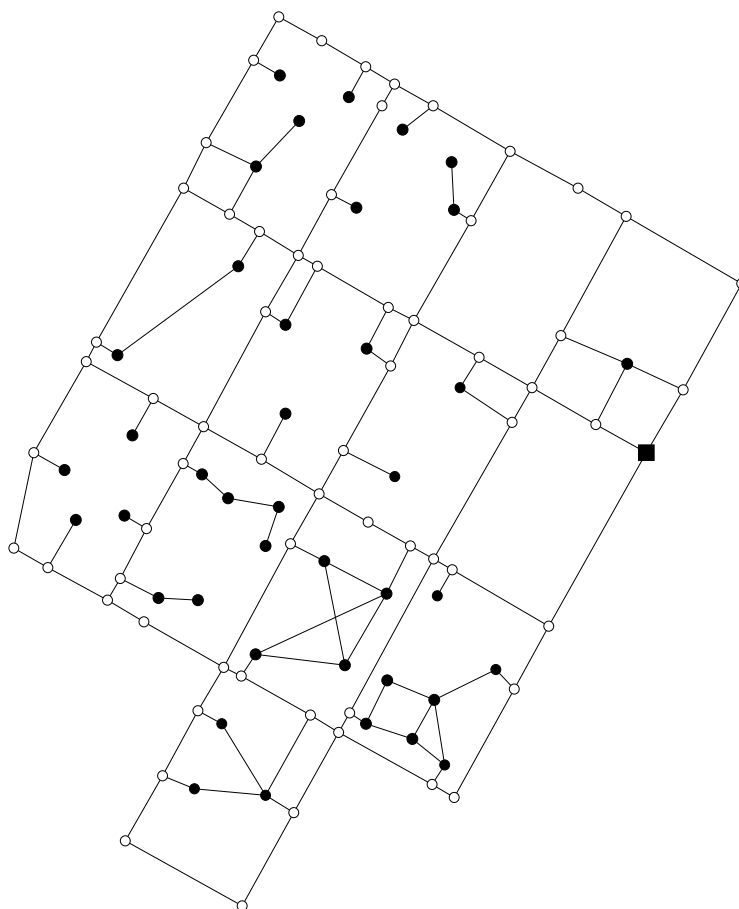


Figure 4.1: Le graphe sous-jacent à un réseau de collecte dans un parc éolien

La figure 4.1 montre le graphe sous-jacent à un réseau de collecte dans un parc éolien. Les éoliennes sont représentées par des nœuds noirs et la sous-station par un carré noir. Les autres nœuds représentent les extrémités des lignes de transmission. Les câbles souterrains sont les liens qui ont au moins une éolienne (un nœud noir) comme extrémité. Les lignes de transmission sont les liens qui relient deux nœuds blancs ou un nœud blanc au carré noir. Dans cet exemple, un nœud dans le réseau souterrain est toujours une éolienne, dans d'autres exemples le réseau souterrain peut contenir des nœuds intermédiaires ainsi que des éoliennes.

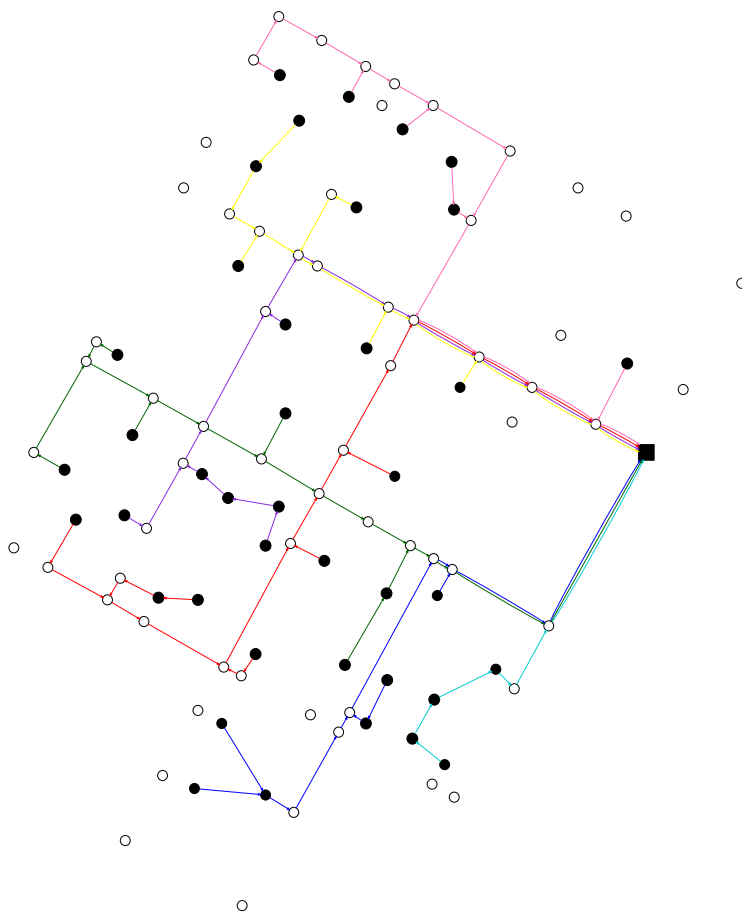


Figure 4.2: Une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte

Notons que dans la figure 4.1, comme dans la suite de ce chapitre, chaque éolienne produit exactement une unité d'énergie. Les capacités C_{ug} et C_{ag} sont respectivement égales à 4 et 6.

La figure 4.2 montre une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte décrit dans la figure 4.1. Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne consiste à trouver un réseau de coût minimum à travers lequel l'énergie produite par les éoliennes est acheminée vers la sous-station en respectant la condition de non-bifurcation d'énergie. Dans ce réseau, les circuits aboutissant à la sous-station sont représentés avec différentes couleurs (bleu, rouge, turquoise, vert, jaune, violet et rose). Chaque circuit permet d'acheminer l'énergie produite par un groupe d'éoliennes vers la sous-station.

4.2 Modélisation mathématique

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne tel que défini dans le chapitre 2 n'a pas été traité auparavant.

Nous proposons alors une formulation mixte en nombres entiers qui permettra de concevoir le réseau de collecte de l'énergie éolienne en respectant les contraintes de capacité et la contrainte de non-bifurcation de flot.

4.2.1 Variables de décision

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, le problème consiste à sélectionner les liens où seront installés les câbles et les lignes nécessaires pour acheminer l'énergie produite par les éoliennes vers la sous-station. Par conséquent, le choix d'installation d'un câble ou d'une ligne sur la k -ième copie de l'arc (u, v) se fait à l'aide des variables binaires t_{uv}^k . En effet, t_{uv}^k vaut 1 si la k -ième copie de l'arc (u, v) appartient au réseau électrique et 0 sinon. Nous avons aussi besoin d'autres variables (qui sont continues) pour représenter l'énergie qui circule à travers un arc donné : x_{uv}^k représente le flot sur la k -ième copie de l'arc (u, v) . Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, le flot est non bifurqué et les unités de flot combinées doivent suivre le même circuit jusqu'à la sous-station. Pour exprimer cette contrainte en termes mathématiques, nous avons choisi d'introduire les variables binaires $y_{uvw}^{kk'}$ définies comme suit : $y_{uvw}^{kk'}$ vaut 1 si et seulement si l'énergie circulant sur la k -ième copie de l'arc (u, v) est dirigée vers la k' -ième copie de l'arc (v, w) . Enfin, $z_{uvw}^{kk'}$ indique la quantité d'énergie circulant sur la k -ième copie de l'arc (u, v) et ensuite sur la k' -ième copie de l'arc (v, w) . Rappelons que toute la quantité d'énergie qui circule sur la k -ième copie de l'arc (u, v) doit passer par un seul arc d'origine v (sauf si v est la sous-station s).

4.2.2 Fonction-objectif

L'objectif du modèle mathématique est de minimiser la somme des coûts d'installation de câbles souterrains et des coûts d'utilisation des lignes de transmission qui composent le réseau électrique. La fonction de coût ne dépend pas des valeurs des flots transmis à travers un lien mais plutôt de la décision de conception (installer ou non un lien) ; en d'autres termes elle dépend des variables t_{uv}^k . Donc si c_{uv}^k représente le coût associé à l'installation d'un lien sur la k -ième copie de l'arc (u, v) , il s'agit de minimiser la fonction-objectif suivante.

$$\min \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m c_{uv}^k t_{uv}^k \quad (4.1)$$

4.2.3 Contraintes

Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne est sujet à plusieurs contraintes. Il convient de noter que notre problème est un problème avec flot non bifurqué.

Sans perte de généralité, rappelons qu'un problème de flot consiste à attribuer une quantité de flot sur chaque arc d'un réseau de sorte que la somme des flots entrant dans un sommet soit égale à la somme des flots sortant de ce sommet (la loi de conservation de flot). Plus précisément, le flot doit être conservé pour tout sommet appartenant à V à l'exception du sommet source 0 à partir duquel $|T|$ unités de flot sont envoyées et de la sous-station s qui reçoit $|T|$ unités de flots. Nous avons donc les contraintes suivantes.

$$\sum_{v \in P(u)} \sum_{k=1}^m x_{vu}^k - \sum_{v \in S(u)} \sum_{k=1}^m x_{uv}^k = \begin{cases} |T| & \text{si } u = s \\ -|T| & \text{si } u = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

Notons que $P(u)$ (respectivement $S(u)$) est l'ensemble de prédécesseurs (respectivement successeurs) de u ; en d'autres termes $P(u)$ (respectivement $S(u)$) est l'ensemble des sommets v tels que (v, u) (respectivement (u, v)) est un arc du graphe G .

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, chaque éolienne produit une seule unité d'énergie. Nous introduisons alors les contraintes suivantes pour nous assurer qu'exactly une unité de flot provenant de la source 0 atteint chaque éolienne.

$$\sum_{k=1}^m x_{0v}^k = 1 \quad \forall v \in T \quad (4.3)$$

Si un arc (u, v) est choisi pour installer un câble souterrain ou une ligne de transmission, alors le nombre d'unités de flot transmises est au plus égale à la capacité de cet arc. En d'autres termes, nous imposons qu'il y a un flot strictement positif sur la k -ième copie de l'arc (u, v) si et seulement si t_{uv}^k vaut 1 et que ce flot ne peut pas excéder la capacité de cet arc, notée C_{uv} (égale à 1, C_{ug} ou C_{ag} selon la catégorie de l'arc).

$$x_{uv}^k \leq C_{uv} t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K \quad (4.4)$$

Remarquons que K désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$.

Pour tous les arcs appartenant à l'ensemble E (rappelons que E est l'ensemble des paires $\{u, v\}$ telles que (u, v) et (v, u) appartiennent à A), il est possible d'installer au plus m liens parallèles dans l'un ou l'autre sens. Il faut donc imposer qu'un lien donné (disons le k -ième lien entre u et v) ne peut être utilisé que dans un seul sens. Ainsi, nous avons les contraintes

suivantes.

$$t_{uv}^k + t_{vu}^k \leq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E, \forall k \in K \quad (4.5)$$

Le coût d'installation du premier lien est le plus élevé; il faut donc s'assurer que le deuxième lien n'est utilisé que si le premier lien l'est, que le troisième lien n'est utilisé que si le deuxième l'est et ainsi de suite. Pour cela, nous introduisons les contraintes suivantes pour tous les arcs appartenant à A_1 (rappelons que A_1 est l'ensemble des arcs (u, v) tels que (v, u) n'appartient pas à A) qui impliquent que la $(k + 1)$ -ième copie de l'arc (u, v) ne peut être utilisée que si la k -ième copie de cet arc est utilisée.

$$t_{uv}^{k+1} \leq t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A_1, \forall k \in K, k < m \quad (4.6)$$

De la même manière et pour tous les arcs appartenant à E , nous imposons que le $(k + 1)$ -ième lien entre u et v (dans un sens ou dans l'autre) ne peut être utilisé que si le k -ième lien entre u et v est utilisé.

$$t_{uv}^{k+1} + t_{vu}^{k+1} \leq t_{uv}^k + t_{vu}^k \quad \forall \{u, v\} \in E, \forall k \in K, k < m \quad (4.7)$$

Il faut ensuite imposer que le flot circulant sur une copie de l'arc (v, w) soit égal à la somme des flots acheminés vers cet arc depuis ses prédécesseurs.

$$\sum_{u \in P(v)} \sum_{k=1}^m z_{uvw}^{kk'} = x_{vw}^{k'} \quad \forall (v, w) \in A, v \neq 0, \forall k' \in K \quad (4.8)$$

De la même manière, il faut que le flot circulant sur une copie de l'arc (u, v) soit égal à la somme des flots acheminés depuis cet arc vers ses successeurs.

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m z_{uvw}^{kk'} = x_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, v \neq s, \forall k \in K \quad (4.9)$$

S'il y a un flot strictement positif traversant la k -ième copie de l'arc (u, v) vers la k' -ième copie de l'arc (v, w) (c'est-à-dire que la variable $y_{uvw}^{kk'}$ vaut 1), alors ce flot ne peut pas dépasser le minimum des capacités des arcs (u, v) et (v, w) . Notons P_2 l'ensemble des chemins simples de longueur 2, en d'autres termes, l'ensemble des triplets (u, v, w) tels que (u, v) et (v, w)

appartiennent à A et u, v et w sont trois sommets distincts.

$$z_{uvw}^{kk'} \leq \min(C_{uv}, C_{vw}) y_{uvw}^{kk'} \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.10)$$

Finalement, si la k -ième copie de l'arc (u, v) est utilisée dans le réseau de collecte et v n'est pas la sous-station, alors le flot sur la k -ième copie de l'arc (u, v) est acheminé vers un seul arc sortant de v . Autrement dit, pour empêcher la bifurcation du flot, nous imposons que le flot traversant la k -ième copie de l'arc (u, v) soit acheminé sur au plus un arc sortant de v .

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m y_{uvw}^{kk'} = t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, v \neq s, \forall k \in K \quad (4.11)$$

Le modèle mathématique (formulation 1) s'écrit alors comme suit.

$$\min \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m c_{uv}^k t_{uv}^k \quad \text{s.c.} \quad (4.1)$$

$$\sum_{v \in P(u)} \sum_{k=1}^m x_{vu}^k - \sum_{v \in S(u)} \sum_{k=1}^m x_{uv}^k = \begin{cases} |T| & \text{si } u = s \\ -|T| & \text{si } u = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^m x_{0v}^k = 1 \quad \forall v \in T \quad (4.3)$$

$$x_{uv}^k \leq C_{uv} t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K \quad (4.4)$$

$$t_{uv}^k + t_{vu}^k \leq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E, \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$t_{uv}^{k+1} \leq t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A_1, \forall k \in K, k < m \quad (4.6)$$

$$t_{uv}^{k+1} + t_{vu}^{k+1} \leq t_{uv}^k + t_{vu}^k \quad \forall \{u, v\} \in E, \forall k \in K, k < m \quad (4.7)$$

$$\sum_{u \in P(v)} \sum_{k=1}^m z_{uvw}^{kk'} = x_{vw}^{k'} \quad \forall (v, w) \in A, v \neq 0, \forall k' \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m z_{uvw}^{kk'} = x_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, v \neq s, \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$z_{uvw}^{kk'} \leq \min(C_{uv}, C_{vw}) y_{uvw}^{kk'} \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.10)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m y_{uvw}^{kk'} = t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, v \neq s, \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$x_{uv}^k \geq 0 \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K \quad (4.12)$$

$$z_{uvw}^{kk'} \geq 0 \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.13)$$

$$t_{uv}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K \quad (4.14)$$

$$y_{uvw}^{kk'} \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.15)$$

Notons que si le modèle a une solution réalisable, il a une solution optimale entière. Car si les variables t_{uv}^k et $y_{uvw}^{kk'}$ ont des valeurs entières, alors nous pouvons résoudre un problème de flot de coût minimum dans un réseau avec capacités pour obtenir des valeurs entières pour les variables x_{uv}^k et $z_{uvw}^{kk'}$.

Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne fait partie de la famille des problèmes de conception de réseaux. La plupart de ces problèmes sont NP-difficiles. De plus, après avoir effectué des tests préliminaires sur quelques cas réels fournis par notre partenaire industriel, nous avons remarqué que les temps de calcul requis pour trouver des solutions optimales augmentent exponentiellement en fonction de la taille des exemplaires. Nous avons alors constaté que l'écart entre les valeurs optimales du programme mathématique et de sa relaxation linéaire continue peut être grand et qu'il peut y avoir un grand nombre de nœuds à explorer dans l'arbre de branchement. Ce dernier constat peut être dû, en particulier, à la présence de symétrie dans le modèle ci-dessus. C'est la raison pour laquelle la résolution du modèle mathématique utilisant un logiciel commercial tel que CPLEX n'est pas suffisante. Dans ce qui suit, nous décrivons deux techniques permettant d'accélérer la résolution du problème. Nous proposons tout d'abord quelques contraintes valides pour renforcer le modèle initial. Ensuite, nous étudions le problème d'un point de vue polyédral afin de générer des plans coupants.

4.3 Renforcement du modèle mathématique

Étant donné que la qualité des bornes inférieures issues de la relaxation linéaire du modèle mathématique est médiocre, nous avons tenté d'ajouter des contraintes supplémentaires pour le raffiner. Ces contraintes sont valides dans le sens où leur introduction n'élimine pas toutes les solutions optimales. En fait, ces contraintes expriment des propriétés des solutions qui permettent d'explorer l'espace des solutions plus efficacement en réduisant le nombre de sous-problèmes équivalents traités dans l'arbre de branchement.

Tout d'abord, considérons un sommet v qui n'est ni la source ni la sous-station. Supposons aussi que les capacités de tous les liens incidents à v sont égales. Alors dans une solution optimale, le nombre d'arcs sortant de v est au moins égal au nombre de liens parmi les k premiers qui sont utilisés entre les sommets u et v .

Proposition 4.3.1 *Les contraintes suivantes sont satisfaites par toutes les solutions opti-*

males.

$$\sum_{i=1}^k t_{uv}^i \leq \sum_{w \in S(v), w \neq u} \sum_{i=1}^k t_{vw}^i \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K \quad (4.16)$$

Preuve Supposons que $\sum_{i=1}^k t_{uv}^i = N$, ce qui signifie que N liens sont utilisés en parallèle pour relier le sommet u au sommet v . Supposons également que le nombre de liens sortant du sommet v soit au plus égal à $(N - 1)$. Ça signifie donc que le flot sur au moins deux liens reliant u à v a été fusionné sur un seul lien sortant de v . Cette fusion aurait pu être faite en amont, entre u et v , puisque, par hypothèse, les capacités de tous les liens incidents à v sont égales. En résumé, on aurait économiser un lien entre u et v , ce qui contredit l'optimalité de la solution. \square

L'introduction des inégalités (4.16) dans le modèle permet d'éliminer des solutions réalisables mais pas optimales. Notons que dans le cas particulier où v est une éolienne, nous obtenons l'inégalité $1 = t_{0v}^1 \leq \sum_{w \in S(v)} t_{vw}^1$.

Considérons maintenant une solution optimale du modèle ci-dessus et supposons encore que les capacités de tous les liens incidents à v sont égales. Si le chemin simple (u, v, w) appartient au réseau et une quantité Q traverse la k' -ième copie de l'arc (v, w) , alors la même quantité (ou une plus petite) peut s'écouler à travers au plus un lien entre u et v .

Proposition 4.3.2 *Les contraintes suivantes sont satisfaites par toutes les solutions optimales.*

$$\sum_{k=1}^m y_{uvw}^{kk'} \leq 1 \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k' \in K \quad (4.17)$$

Preuve Supposons que $\sum_{k=1}^m y_{uvw}^{kk'} > 2$, ce qui signifie que le flot sur au moins deux liens reliant u à v a été fusionné pour circuler sur la k' -ième copie de l'arc (v, w) . Cette fusion aurait pu être faite entre u et v puisque, par hypothèse, les capacités des arcs (u, v) et (v, w) sont égales. On aurait donc pu économiser un lien entre u et v , ce qui contredit l'optimalité de la solution. \square

Considérons ensuite un arc de la forme (u, s) où s désigne la sous-station. Dans une solution optimale, le $(k + 1)$ -ième lien entre u et s ne sera utilisé que si la somme des flots sur les k -ième et $(k + 1)$ -ième liens entre u et s est supérieure à la capacité du lien (C_{ag} , dans ce cas).

Proposition 4.3.3 *Les inégalités suivantes sont vérifiées par au moins une solution optimale.*

$$(C_{ag} + 1)t_{us}^{k+1} \leq x_{us}^k + x_{us}^{k+1} \quad \forall (u, s) \in A, \forall k < m \quad (4.18)$$

Preuve Considérons une solution où la somme des flots sur les k -ième et $(k + 1)$ -ième liens entre u et s est inférieure à la capacité d'un seul lien entre u et s (C_{ag}). Il est donc possible de fusionner cette somme des flots sur un seul lien et de n'utiliser que le k -ième lien entre u et s pour obtenir une solution de coût inférieur. \square

Nous pouvons aussi ajouter les deux inégalités valides suivantes qui indiquent que s'il y a du flot positif sur le chemin (u, v, w) , alors il y a forcément du flot positif sur l'arc (u, v) et sur l'arc (v, w) .

Proposition 4.3.4 *Les inégalités suivantes sont vérifiées par toutes les solutions optimales.*

$$y_{uvw}^{kk'} \leq t_{uv}^k \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.19)$$

$$y_{uvw}^{kk'} \leq t_{vw}^{k'} \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (4.20)$$

Preuve Les inégalités (4.19) et (4.20) sont déduites à partir des contraintes (4.11). \square

Enfin, il est possible d'éliminer certaines symétries dans le modèle initial en s'assurant que s'il y a une quantité de flot Q traversant la k -ième copie de l'arc (u, v) , d'une part, et une autre quantité de flot Q' traversant la ℓ -ième copie du même arc, d'autre part, alors la quantité Q doit être acheminée par la suite vers la k' -ième copie de l'arc (v, w) et la quantité Q' vers la ℓ' -ième copie de l'arc (v, w) , où $k < \ell$ et $k' \leq \ell'$.

Proposition 4.3.5 *Les contraintes suivantes n'éliminent pas toutes les solutions optimales.*

$$y_{uvw}^{kk'} + y_{uvw}^{\ell\ell'} \leq 1 \quad \forall (u, v, w) \in P_2, \forall k, k', \ell, \ell' \mid k < \ell, k' > \ell' \quad (4.21)$$

Preuve Pour chaque chemin de la forme (u, v, w) , il y a plusieurs possibilités pour faire passer simultanément deux quantités de flot Q et Q' . Considérons, par exemple, deux solutions réalisables. Dans la première solution, la quantité Q traverse la k -ième copie de l'arc (u, v) ensuite la k' -ième copie de l'arc (v, w) et la quantité Q' traverse la ℓ -ième copie de l'arc (u, v) ensuite la ℓ' -ième copie de l'arc (v, w) . Dans la deuxième solution, la quantité Q traverse la k -ième copie de l'arc (u, v) ensuite la ℓ' -ième copie de l'arc (v, w) et la quantité Q' traverse

la ℓ -ième copie de l'arc (u, v) ensuite la k' -ième copie de l'arc (v, w) . Il est évident que ces deux solutions réalisables sont identiques. Pour casser cette symétrie et ne garder qu'une seule solution réalisable parmi toutes les solutions équivalentes, nous pouvons donc imposer les inégalités (4.21). \square

Le modèle initial est raffiné par l'ajout des contraintes (4.16)-(4.21). Toutefois, il se peut qu'une contrainte de ce genre n'implique aucune amélioration de la résolution et conduise à la détérioration des performances du modèle. Avant d'inclure toutes les contraintes décrites ci-dessus, nous allons étudier l'impact de ces contraintes sur la relaxation linéaire et choisir seulement celles qui sont susceptibles d'améliorer l'efficacité de la résolution du modèle initial. Par ailleurs, cette amélioration n'est peut être pas suffisante dans certains cas. Pour cette raison, la génération des plans coupants s'avère nécessaire pour accélérer encore plus la résolution du problème.

4.4 Génération de plans coupants

Dans cette section, nous rappelons rapidement quelques notions de base de la théorie polyédrale nécessaires pour la compréhension des expressions que nous rencontrerons par la suite. Nous proposons ensuite quelques inégalités valides et les techniques nécessaires pour la génération de plans coupants.

4.4.1 Approche polyédrale

L'approche polyédrale représente maintenant un outil essentiel pour la résolution pratique efficace des problèmes de programmation (mixte) en nombres entiers. Le principe consiste à cerner l'enveloppe convexe des solutions entières admissibles du problème par un système d'inégalités linéaires induisant idéalement des facettes afin de se rapprocher des points extrêmes. Rappelons, en effet, que tout programme linéaire atteint son optimum en au moins un point extrême (Wolsey (1998)). L'identification des inégalités valides nécessite donc une analyse mathématique préalable approfondie exploitant les propriétés polyédrales du problème à résoudre. Toutefois, le nombre d'inégalités valides décrivant l'enveloppe convexe est généralement très important. C'est la raison pour laquelle la caractérisation complète de cette enveloppe est a priori difficile à trouver, surtout quand il s'agit d'un problème NP-difficile. En pratique, une description partielle peut être suffisante lorsqu'on combine cette méthode avec un algorithme de Branch-and-Bound. Ces méthodes sont généralement connues sous le nom d'algorithme de coupes.

L'idée générale de la méthode de coupes est de résoudre le programme (mixte) en nombres

entiers comme une séquence de programmes linéaires (obtenus en relâchant les contraintes d'intégrité) et de rajouter au fur et à mesure les inégalités obtenues seulement si elles sont violées par la solution (fractionnaire) optimale courante. Plus précisément, si la solution optimale de la relaxation linéaire, notée x^* , est entière (c'est rarement le cas), alors cette solution est aussi optimale pour le programme en nombres entiers. Si en revanche la solution est fractionnaire, alors elle viole forcément une inégalité valide qui peut être déterminée à l'aide d'un algorithme dit de séparation. Cette inégalité appelée aussi plan coupant est ensuite rajoutée au programme pour éliminer une partie inutile du polyèdre de la relaxation linéaire contenant x^* , sans toutefois éliminer aucune solution entière. Cette procédure est répétée jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de trouver d'inégalités violées. Dans le cas échéant, un algorithme de Branch-and-Bound est utilisé en espérant obtenir une solution optimale du problème en temps polynomial. L'ajout des plans coupants permet, en fait, de réduire les sous-problèmes traités par l'algorithme de Branch-and-Bound. Par ailleurs, les méthodes basées sur les approches polyédrales reposent généralement sur deux éléments clés, à savoir l'identification théorique des inégalités valides et le développement d'un algorithme efficace pour résoudre le problème de séparation.

4.4.2 Inégalités valides

Dans cette section, nous allons décrire une famille d'inégalités valides qui sont très utiles, mais ne peuvent pas être toutes incluses dans le modèle. À cette fin, nous avons étudié les propriétés polyédrales du problème dans le but de générer des inégalités valides. On peut trouver dans un délai raisonnable certaines inégalités qui sont violées par les solutions fractionnaires, mais vérifiées par toutes les solutions entières. Nous mentionnons que ces inégalités sont étroitement liées à celles dites coupes de Steiner (voir par exemple Chopra et Rao (1994)). Nous donnons d'abord deux groupes d'inégalités appartenant à cette famille. Rappelons que $P(s)$ est l'ensemble des prédécesseurs de la sous-station s et notons par D_s l'ensemble des arcs de la forme (u, s, k) pour tout u dans $P(s)$. Considérons une solution réalisable (entière) du modèle. Nous pouvons dire que la somme des capacités des arcs appartenant à D_s et qui sont utilisés dans la solution est au moins égale au nombre des éoliennes. En d'autres termes, pour la somme des arcs arrivant à la sous-station, l'inégalité suivante doit être satisfaite (où C_{uv}^k est la capacité du lien et $|T|$ le nombre des éoliennes).

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} C_{uv}^k t_{uv}^k \geq |T|$$

Étant donné que les variables t_{uv}^k sont entières, plusieurs inégalités peuvent être tirées de cette dernière. Par exemple, si toutes les capacités C_{uv}^k sur les arcs appartenant à D_s

sont égales à C_{ag} (comme dans les exemplaires fournis par notre partenaire industriel), nous pouvons conclure que l'inégalité

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} t_{uv}^k \geq \lceil |T|/C_{ag} \rceil \quad (4.22)$$

est satisfaite par toute solution réalisable du programme mixte en nombres entiers.

De la même manière, si D_b (où b veut dire « border ») désigne l'ensemble de tous les arcs allant du réseau souterrain vers le réseau aérien (traversant la frontière), l'inégalité

$$\sum_{(u,v,k) \in D_b} C_{uv}^k t_{uv}^k \geq |T|$$

est vérifiée. Ainsi, si tous les arcs appartenant à D_b ont une capacité C_{ug} (comme dans nos exemplaires), nous pouvons conclure que l'inégalité

$$\sum_{(u,v,k) \in D_b} t_{uv}^k \geq \lceil |T|/C_{ug} \rceil \quad (4.23)$$

est également satisfaite par toute solution réalisable du programme mixte en nombres entiers .

Les deux inégalités (4.22) et (4.23) sont en réalité des cas particuliers de l'inégalité (4.25) ci-dessous, que nous allons développer maintenant.

Pour cela considérons un sous-ensemble de sommets V_1 contenant le sommet source 0, mais pas la sous-station s . L'ensemble des arcs (u, v) tels que u appartient à V_1 et v appartient au complémentaire de V_1 est appelé une coupe. Cette coupe sépare le sommet 0 du sommet s . Soit D une coupe qui sépare 0 de s et D_1 le sous-ensemble des arcs dans D dont l'origine est la source 0. Nous désignons par T' l'ensemble des éoliennes u telles que $(0, u)$ n'appartient pas à D_1 . Nous avons,

$$\sum_{(u,v,k) \in D} C_{uv}^k t_{uv}^k \geq |T|$$

et ainsi

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} C_{uv}^k t_{uv}^k \geq |T| - \sum_{(u,v,k) \in D_1} t_{uv}^k.$$

Puisque tous les arcs (u, v, k) dans D_1 ont la propriété que t_{uv}^k est égal à 1, nous obtenons

l'inégalité

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} C_{uv}^k t_{uv}^k \geq |T| - |D_1| = |T'|. \quad (4.24)$$

Nous pouvons déduire de nombreuses inégalités valides à partir de cette inégalité. En particulier, si M représente la plus grande valeur de C_{uv}^k pour $(u, v, k) \in D \setminus D_1$, l'inégalité

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} t_{uv}^k \geq \lceil |T'|/M \rceil \quad (4.25)$$

est satisfaite par toute solution réalisable du programme mixte en nombres entiers.

Il est possible de dériver au moins une autre inégalité valide à partir de (4.24). Si nous supposons que toutes les capacités sont égales à C_{ag} ou C_{ug} et nous désignons par q le plus grand diviseur commun de C_{ag} et C_{ug} , alors l'inégalité suivante est valide.

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} (C_{uv}^k/q) t_{uv}^k \geq \lceil |T'|/q \rceil \quad (4.26)$$

Lorsqu'il y a plus de deux valeurs de capacités sur les arcs, il est possible de dériver encore plus d'inégalités valides; il s'agit notamment de toutes les inégalités valides pour une équation de sac-à-dos.

En pratique, on est confronté à une question essentielle : quand et comment générer des inégalités valides parmi celle décrites ci-dessus ?

4.4.3 Algorithme de séparation

Nous supposons que nous avons résolu la relaxation linéaire du modèle décrit dans la section 4.2. Certaines inégalités développées dans la section précédente peuvent être incluses itérativement dans le modèle initial en utilisant un algorithme de séparation pour les identifier. En effet, nous allons chercher des exemples d'inégalités (4.25) qui sont violées par la solution optimale fractionnaire de la relaxation linéaire. En théorie, il est difficile de trouver les inégalités violées parce que T' n'est pas connu. Par ailleurs, nous proposons un algorithme afin d'identifier des inégalités valides. Cet algorithme construit un réseau auxiliaire ayant le même graphe sous-jacent que le réseau originel, mais avec des capacités différentes. Plus

précisément, les capacités sur les arcs sont les valeurs des variables t_{uv}^k dans la solution courante de la relaxation linéaire. Il s'agit alors de résoudre un problème de flot maximum dans ce réseau auxiliaire avec capacités. Rappelons qu'un problème de flot maximum consiste à trouver la quantité de flot maximale qui peut circuler de la source au puits en respectant les capacités des arcs dans le réseau (Ahuja *et al.* (1993)). Par la suite, nous pouvons exploiter la relation entre le problème de flot maximum et le problème de la coupe minimale pour en déduire une coupe minimale qui sépare la source 0 de la sous-station s . En effet, en résolvant le problème de flot maximum dans un réseau, nous résolvons le problème de la coupe minimale qui n'est autre que son dual. Ainsi, parmi toutes les coupes qui séparent la source du puits, nous obtenons celle de capacité minimale. L'algorithme de séparation se résume dans les étapes suivantes.

- Sélectionner un sous-ensemble d'éoliennes T' et définir D_1 comme l'ensemble des arcs $(0, u)$ tel que u appartient à $T \setminus T'$.
- Associer la capacité de 1 à chaque arc $(0, u)$ pour tout u appartenant à T' et de 0 sinon.
- Attribuer la capacité t_{uv}^k pour tout arc (u, v, k) tel que u n'est pas la source 0. En pratique, on peut fusionner tous les arcs de la forme (u, v, k) pour un couple de sommets (u, v) tel que u n'est pas la source 0, en d'autres termes, créer un seul arc de u vers v ayant une capacité égale à $\sum_{k=1}^m t_{ij}^k$.
- Résoudre le problème de flot maximum dans le réseau auxiliaire, où le sommet 0 est la source et s est le puits. Soit D' la coupe de capacité minimale séparant 0 de s .
- Soit D'_1 l'intersection des deux ensembles D' et D_1 ($D' \cap D_1$) et T'' le sous-ensemble $T \setminus \{u | (0, u) \in D'_1\}$. Si l'inégalité (4.25), en remplaçant D_1 par D'_1 et T' par T'' , est violée, alors rajoutons cette inégalité dans le modèle.

L'algorithme ci-dessus sera considéré comme séparer T' de s et D' comme une coupe standard pour T' . Dans la proposition suivante, nous montrerons qu'il est possible que l'ensemble T'' ne contienne pas les mêmes éléments de l'ensemble T' défini au début de cet algorithme.

Dans la figure 4.3, l'ensemble T' est composé des éoliennes représentées par des nœuds bleus 2, 3 et 4. L'algorithme ci-dessus a retourné la coupe D' qui contient les arcs en rouge. Nous constatons dans cette figure qu'il y a une éolienne qui n'appartient pas à T' mais appartient à la même rive de la source 0. Dans ce cas, l'ensemble T'' sera composé des éoliennes 2, 3, 4 et 7.

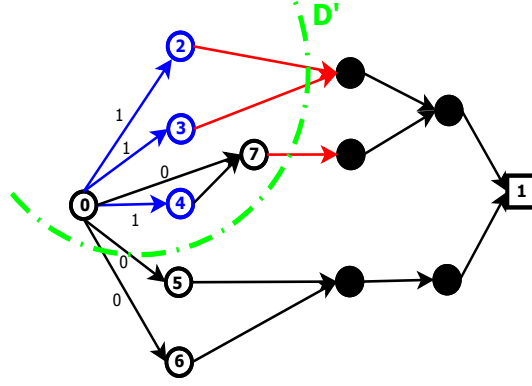


Figure 4.3: Séparation d'un ensemble d'éoliennes T' de la sous-station

Proposition 4.4.1 *Supposons qu'il existe une coupe D qui sépare 0 de s dans le réseau auxiliaire associé à T' , telle que D inclut D_1 et satisfait $\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} t_{uv}^k < \lceil |T'|/M \rceil$. Alors l'algorithme ci-dessus permet d'obtenir une coupe standard D' qui satisfait*

$$\sum_{(u,v,k) \in D' \setminus D'_1} t_{uv}^k < \lceil |T''|/M \rceil.$$

où D'_1 dénote $D' \cap D_1$ et T'' le sous-ensemble $T \setminus \{u \mid (0, u) \in D'_1\}$.

Preuve Dans le réseau auxiliaire la capacité d'un arc appartenant à D_1 (et aussi à D'_1) est égale à 0. Par conséquent

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} t_{uv}^k = \text{la capacité de la coupe } D \text{ dans le réseau auxiliaire}$$

et

$$\sum_{(u,v,k) \in D' \setminus D'_1} t_{uv}^k = \text{la capacité de la coupe } D' \text{ dans le réseau auxiliaire.}$$

Puisque D' est une coupe de capacité minimale dans le réseau auxiliaire, nous avons

$$\sum_{(u,v,k) \in D' \setminus D'_1} t_{uv}^k \leq \sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} t_{uv}^k < \lceil |T'|/M \rceil \leq \lceil |T''|/M \rceil.$$

□

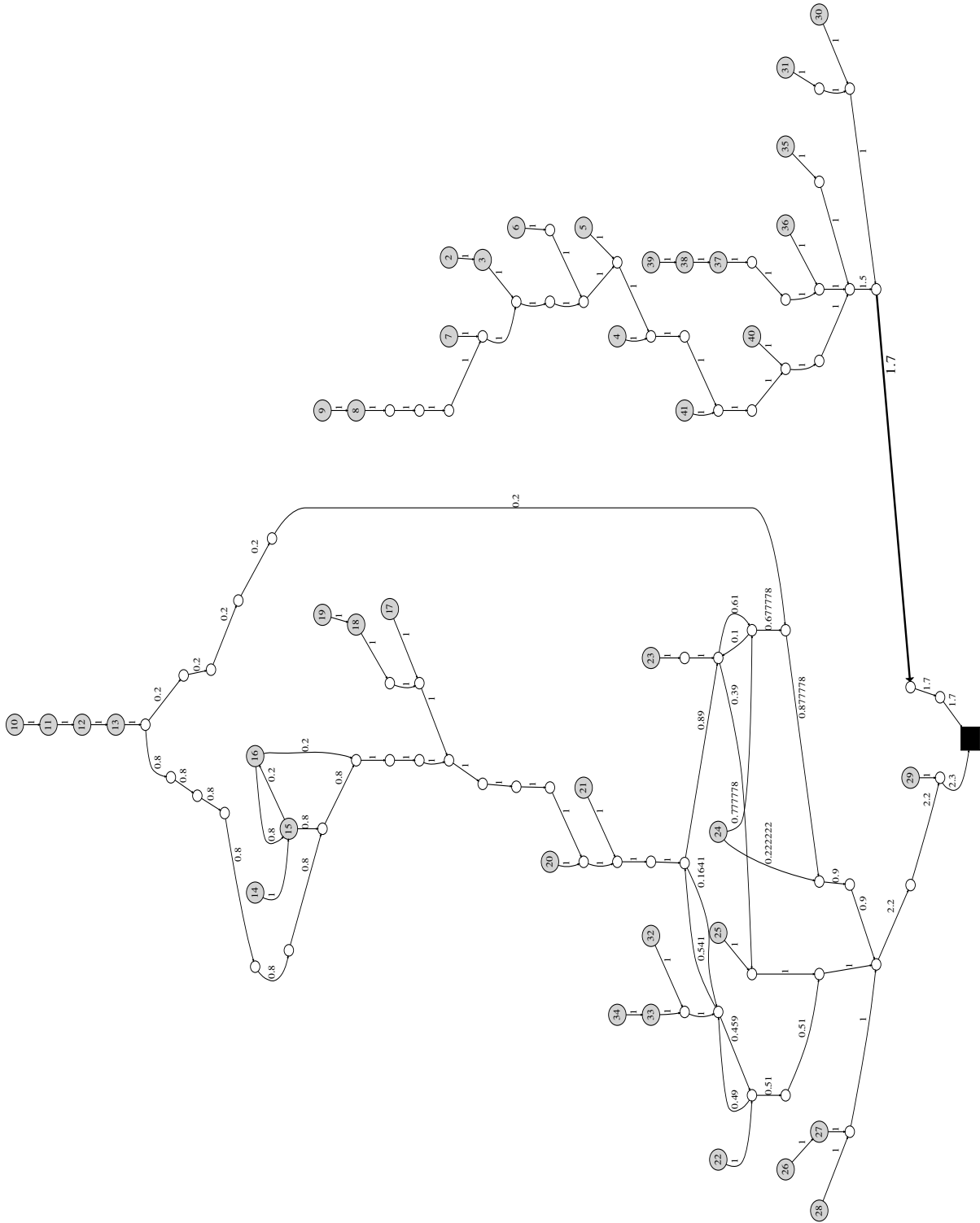


Figure 4.4: La solution optimale de la relaxation linéaire d'un exemplaire de 40 éoliennes

La figure 4.4 affiche une solution optimale de la relaxation linéaire (fractionnaire) du problème pour un exemplaire de 40 éoliennes, 143 sommets et 384 arcs. Les capacités C_{ug} et C_{ag} sont respectivement égales à 5 et 10. Les éoliennes sont représentées par des cercles gris. La valeur sur chaque arc du réseau représente $\sum_{k=1}^m t_{ij}^k$ dans la solution. Dans cette solution, nous pouvons détecter visuellement une coupe au niveau de l'arc en gras où la valeur inscrite est 1.7. Dans cet exemple, la capacité C_{ag} est égale à 10 et le nombre d'unités d'énergie aboutissant à cet arc est 17. Nous avons donc besoin de deux liens au moins pour acheminer l'énergie produite par ces éoliennes vers la sous-station. Dans ce cas, il suffit de résoudre un problème de flot maximum dans le graphe auxiliaire associé à cette solution de la relaxation linéaire pour trouver une coupe de capacité minimale D' qui sépare l'ensemble $T' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41\}$ de la sous-station s .

Une autre question importante, qui surgit lors de l'application de la méthode de plans coupants, est de savoir comment choisir les sous-ensembles de sommets T' pour lesquels les inégalités de la forme (4.25) seront générées. Puisque trouver toutes les combinaisons possibles de sous-ensembles d'éoliennes est une tâche difficile, nous proposons dans la section 4.7 des stratégies permettant de choisir certains ensembles T' .

4.5 Formulation mathématique basée sur la répartition des éoliennes sous forme de groupes

Dans ce paragraphe, nous présentons une façon différente de modéliser le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne. Cette idée a été proposée par Christophe Meyer.

La contrainte de non-bifurcation de flot ajoute beaucoup de complexité au problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne. En effet, le réseau électrique que nous voulons concevoir est un ensemble de circuits électriques acheminés vers la sous-station. Chaque circuit permet de collecter l'énergie produite par un groupe d'éoliennes et de l'acheminer vers la sous-station, ce qui nous a poussés à explorer l'idée de répartir les éoliennes sous forme de groupes sous condition que l'énergie produite par un groupe d'éoliennes atteigne la sous-station à travers le même chemin (circuit). De plus chaque groupe peut contenir au plus la capacité d'un lien du réseau. Étant donné que nous avons deux types de capacités (la capacité d'un câble et la capacité d'une ligne de transmission), les éoliennes ont été réparties tout d'abord sous forme de groupes dans le réseau souterrain. Par la suite, ces éoliennes sont regroupées de nouveau le long d'un circuit électrique acheminé vers la sous-station.

Nous rappelons que $G = (V, A)$ est le graphe sous-jacent au problème. Nous notons

$G_s = (V_s, A_s)$ le réseau souterrain : V_s est l'ensemble des sommets appartenant à ce réseau et A_s est l'ensemble des liens potentiels établis pour l'installation des câbles souterrains. Nous introduisons ensuite P et Q qui représentent respectivement l'ensemble des groupes nécessaires pour répartir les éoliennes dans le réseau souterrain et l'ensemble des groupes nécessaires pour répartir les éoliennes dans le graphe G . Les cardinalités des ensembles P et Q ne sont pas connues a priori. Nous notons D l'ensemble des sommets qui représentent des commutateurs permettant de relier les extrémités des câbles souterrains aux lignes de transmission du réseau aérien. Dans ce qui suit, nous proposons une modélisation du problème de conception de réseau de collecte d'énergie éolienne basée sur l'idée de répartir les éoliennes en groupes.

4.5.1 Variables de décision

En plus des variables x_{uv}^k et t_{uv}^k , nous avons besoin des variables binaires r_{up} et r_{uq} telles que r_{up} vaut 1 si le groupe $p \in P$ atteint le sommet u (pour tout $u \in V_s$) et 0 sinon, r_{uq} vaut 1 si le groupe $q \in Q$ atteint le sommet u (pour tout $u \in V$) et 0 sinon. Nous définissons ensuite les variables binaires a_{uvp} et a_{uvq} : a_{uvp} vaut 1 si le groupe $p \in P$ utilise l'arc (u, v) (pour tout $(u, v) \in A_s$) et 0 sinon, a_{uvq} vaut 1 si le groupe $q \in Q$ utilise l'arc (u, v) (pour tout $(u, v) \in A$) et 0 sinon. Nous introduisons aussi les variables binaires b_{pq} : b_{pq} vaut 1 si le groupe p fait partie du groupe q et 0 sinon. Et finalement, nous définissons les variables entières w_{uv} pour déterminer le nombre de liens (câbles ou lignes de transmission) installés entre deux sommets u et v du graphe.

4.5.2 Fonction-objectif

Le but du modèle mathématique est de trouver une répartition des éoliennes sous forme de groupes où l'énergie produite par chaque groupe d'éoliennes doit atteindre la sous-station à travers le même circuit électrique. L'ensemble des circuits obtenus forment le réseau électrique pour collecter l'énergie éolienne et l'acheminer vers la sous-station. Ainsi, nous avons la même fonction-objectif (4.1).

4.5.3 Contraintes

Pour déterminer la répartition optimale des éoliennes, la fonction-objectif (4.1) est soumise à plusieurs contraintes. Parmi ces contraintes, nous avons tout d'abord les contraintes (4.2)-(4.7). Ensuite, nous définissons les contraintes qui permettent de relier entre elles les nouvelles variables définies ci-dessus.

Chaque éolienne ne peut faire partie que d'un seul groupe p du réseau souterrain et que d'un seul groupe q du réseau G . Ces conditions sont satisfaites en imposant les contraintes suivantes qui stipulent que pour toute éolienne u , il n'y a qu'une seule variable r_{up} et une seule variable r_{uq} qui prennent la valeur 1 .

$$\sum_{p \in P} r_{up} = 1 \quad \forall u \in T \quad (4.27)$$

$$\sum_{q \in Q} r_{uq} = 1 \quad \forall u \in T \quad (4.28)$$

Chaque groupe d'éoliennes p (respectivement q) peut contenir au plus le nombre d'éoliennes supportées par un câble du réseau souterrain, la capacité C_{ug} dans ce cas (respectivement le nombre d'éoliennes supportées par une ligne de transmission, la capacité C_{ag} dans ce cas). Ainsi pour tout groupe $p \in P$ et tout groupe $q \in Q$, nous imposons les contraintes suivantes. Nous rappelons que T est l'ensemble des sommets correspondant à des éoliennes.

$$\sum_{u \in T} r_{up} \leq C_{ug} \quad \forall p \in P \quad (4.29)$$

$$\sum_{u \in T} r_{uq} \leq C_{ag} \quad \forall q \in Q \quad (4.30)$$

Si un groupe p non vide (respectivement q) atteint un sommet v qui n'est ni la source ni une éolienne, alors ce groupe p (respectivement q) doit contenir au moins une éolienne. En d'autres termes, si un groupe p (respectivement q) ne contient pas d'éoliennes, alors ce groupe ne peut contenir aucun autre sommet. Nous imposons alors les contraintes suivantes pour tout sommet qui n'est ni la source ni une éolienne et pour tout groupe p et q .

$$r_{vp} \leq \sum_{u \in T} r_{up} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus (T \cup \{0\}), \quad p \in P \quad (4.31)$$

$$r_{vq} \leq \sum_{u \in T} r_{uq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus (T \cup \{0\}), \quad q \in Q \quad (4.32)$$

Un groupe p non vide (composé d'éoliennes) doit atteindre la sous-station à travers le même chemin. Il faut alors imposer les contraintes suivantes qui indiquent que si un groupe p (respectivement q) atteint un sommet u qui n'est ni la source ni la sous-station, alors ce groupe p (respectivement q) utilise un seul arc sortant de u .

$$\sum_{v \in S(u)} a_{uvp} = r_{up} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad u \in V_s \setminus \{0\}, \quad p \in P \quad (4.33)$$

$$\sum_{v \in S(u)} a_{uvq} = r_{uq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad u \in V \setminus \{0, s\}, \quad q \in Q \quad (4.34)$$

Si un groupe p non vide (respectivement q) atteint un sommet v différent de la source, alors le groupe p (respectivement q) utilise au moins arc aboutissant à v .

$$r_{vp} \leq \sum_{u \in P(v)} a_{uvp} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus \{0\}, \quad p \in P \quad (4.35)$$

$$r_{vq} \leq \sum_{u \in P(v)} a_{uvq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus \{0\}, \quad q \in Q \quad (4.36)$$

Le nombre d'éoliennes appartenant à un groupe p et traversant un sommet v qui n'est ni la source ni un commutateur ne peut pas dépasser la capacité de l'arc utilisé C_s pour sortir du sommet v .

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvp} \leq C_{ug} \sum_{w \in S(v)} a_{vwp} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus (D \cup \{0\}), \quad p \in P \quad (4.37)$$

Le nombre d'éoliennes appartenant également à un groupe q et traversant un sommet v qui n'est la source ni la sous-station ne peut pas dépasser la capacité de l'arc utilisé C_a pour sortir du sommet v .

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvq} \leq C_{ag} \sum_{w \in S(v)} a_{vwq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus \{0, s\}, \quad q \in Q \quad (4.38)$$

D est l'ensemble des sommets représentant des commutateurs qui servent à relier les extrémités des câbles souterrains au réseau aérien. Tout groupe p non vide du réseau souterrain doit atteindre un sommet v appartenant à D en utilisant un seul arc aboutissant à v . Nous imposons alors les contraintes suivantes pour tout groupe p et tout sommet v appartenant à D .

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvp} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in D, \quad p \in P \quad (4.39)$$

De la même manière, nous imposons les contraintes suivantes qui stipulent que tout groupe q non vide du réseau G doit atteindre la sous-station s en utilisant un seul arc aboutissant à s .

$$\sum_{u \in P(s)} a_{usq} \leq 1 \quad \forall (u, s) \in A, \quad q \in Q \quad (4.40)$$

Tout groupe p du réseau souterrain doit faire partie d'un seul groupe du réseau G . Ainsi, nous imposons les contraintes suivantes qui indiquent qu'une seule variable b_{pq} peut prendre la valeur 1.

$$\sum_{q \in Q} b_{pq} = 1 \quad \forall p \in P \quad (4.41)$$

Si deux groupes p et q atteignent un sommet u du réseau souterrain, alors le groupe p doit forcément faire partie du groupe q . Cette condition peut être exprimée par les contraintes suivantes.

$$r_{up} - r_{uq} + b_{pq} \leq 1 \quad \forall u \in V_s, \quad p \in P, \quad q \in Q \quad (4.42)$$

Le nombre de groupes utilisant l'arc (u, v) est exactement égal au nombre de liens installés sur cet arc.

$$\sum_{q \in Q} a_{uvq} = w_{uv} \quad \forall (u, v) \in A \quad (4.43)$$

Puisqu'il est possible d'installer au plus m liens (câbles ou lignes de transmission) entre deux sommets du graphe, il faut donc imposer que le nombre de liens installés entre deux sommets u et v ne doit pas dépasser m (rappelons que E est l'ensemble des paires $\{u, v\}$ telles que (u, v) et (v, u) appartiennent à A et A_1 l'ensemble des arcs (u, v) tels que (v, u) n'appartient pas à A).

$$w_{uv} + w_{vu} \leq m \quad \forall (u, v) \in E \quad (4.44)$$

$$w_{uv} \leq m \quad \forall (u, v) \in A_1 \quad (4.45)$$

Et finalement pour relier les variables w_{uv} et les variables t_{uv}^k , nous imposons que le nombre de liens installés entre deux sommets u et v du graphe doit être égal à la somme des arcs parallèles entre ces deux sommets.

$$w_{uv} \leq k(1 - t_{uv}^k) + (m + 1)t_{uv}^k - 1 \quad \forall (u, v) \in A, \quad k \in K \quad (4.46)$$

Le modèle mathématique (formulation 2) s'écrit alors comme suit.

$$\min \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m c_{uv}^k t_{uv}^k \quad \text{s.c.} \quad (4.1)$$

$$(4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7)$$

$$\sum_{p \in P} r_{up} = 1 \quad \forall u \in T \quad (4.27)$$

$$\sum_{q \in Q} r_{uq} = 1 \quad \forall u \in T \quad (4.28)$$

$$\sum_{u \in T} r_{up} \leq C_{ug} \quad \forall p \in P \quad (4.29)$$

$$\sum_{u \in T} r_{uq} \leq C_{ag} \quad \forall q \in Q \quad (4.30)$$

$$r_{vp} \leq \sum_{u \in T} r_{up} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus (T \cup \{0\}), \quad p \in P \quad (4.31)$$

$$r_{vq} \leq \sum_{u \in T} r_{uq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus T(\cup \{0\}), \quad q \in Q \quad (4.32)$$

$$\sum_{v \in S(u)} a_{vvp} = r_{up} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad u \in V_s \setminus \{0\}, \quad p \in P \quad (4.33)$$

$$\sum_{v \in S(u)} a_{uvq} = r_{uq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad u \in V \setminus \{0, s\}, \quad q \in Q \quad (4.34)$$

$$r_{vp} \leq \sum_{u \in P(v)} a_{vvp} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus \{0\}, \quad p \in P \quad (4.35)$$

$$r_{vq} \leq \sum_{u \in P(v)} a_{uvq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus \{0\}, \quad q \in Q \quad (4.36)$$

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvp} \leq C_s \sum_{u \in S(v)} a_{vup} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in V_s \setminus (D \cup \{0\}), \quad p \in P \quad (4.37)$$

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvq} \leq C_a \sum_{u \in S(v)} a_{vuq} \quad \forall (u, v) \in A, \quad v \in V \setminus \{0, s\}, \quad q \in Q \quad (4.38)$$

$$\sum_{u \in P(v)} a_{uvp} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad v \in D, \quad p \in P \quad (4.39)$$

$$\sum_{u \in P(s)} a_{usq} \leq 1 \quad \forall (u, s) \in A, \quad q \in Q \quad (4.40)$$

$$\sum_{q \in Q} b_{pq} = 1 \quad \forall p \in P \quad (4.41)$$

$$r_{up} - r_{uq} + b_{pq} \leq 1 \quad \forall u \in V_s, \quad p \in P, \quad q \in Q \quad (4.42)$$

$$\sum_{q \in Q} a_{uvq} = w_{uv} \quad \forall (u, v) \in A \quad (4.43)$$

$$w_{uv} + w_{vu} \leq m \quad \forall (u, v) \in E \quad (4.44)$$

$$w_{uv} \leq m \quad \forall (u, v) \in A_1 \quad (4.45)$$

$$w_{uv} \leq k(1 - t_{uv}^k) + (m + 1)t_{uv}^k - 1 \quad \forall (u, v) \in A, \quad k \in K \quad (4.46)$$

$$x_{uv}^k \geq 0 \quad \forall (u, v) \in A, \quad k \in K \quad (4.47)$$

$$t_{uv}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v) \in A, \quad k \in K \quad (4.48)$$

$$r_{up} \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V_s, \quad p \in P \quad (4.49)$$

$$r_{uq} \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V, \quad q \in Q \quad (4.50)$$

$$a_{uvp} \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v) \in A_s, \quad p \in P \quad (4.51)$$

$$a_{uvq} \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v) \in A, \quad q \in Q \quad (4.52)$$

$$b_{pq} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, \quad q \in Q \quad (4.53)$$

$$w_{uv} \geq 0 \text{ entiers} \quad \forall (u, v) \in A \quad (4.54)$$

La formulation du problème basée sur la répartition des éoliennes en groupes donne beaucoup plus de variables et de contraintes que la formulation proposée dans la section 4.2. De plus, cette formulation contient plusieurs sources de symétrie. En effet, considérons que nous avons obtenu une solution avec N groupes d'éoliennes. Cependant, il y a plusieurs façons de numéroter ces groupes de 1 à N , et donc plusieurs solutions qui sont identiques. Nous pensons que ce modèle n'est pas meilleur que le modèle de la section 4.2. Nous présentons dans la section une comparaison de la qualité de deux formulations, en terme de taille des formulations et également en terme de temps de résolution.

4.6 Relation entre le problème de conception d'un réseau de collecte et le problème de l'arbre de Steiner

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, de nombreuses solutions réalisables du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne sont en fait des anti-arborescences. Cette observation a suscité notre intérêt pour l'exploration de relations entre les solutions réalisables de notre problème, d'un côté, et les arbres de Steiner dans le cas d'un graphe orienté, de l'autre côté. De plus, le modèle de l'arborescence de Steiner exprime explicitement la condition de la non-bifurcation de flot. Nous allons montrer qu'il existe une bijection entre les solutions réalisables du problème de conception d'un réseau de collecte et certaines arborescences de Steiner dans un réseau connexe. Ce réseau, noté $H = (V', A')$, est quasiment identique au graphe adjoint associé au multigraphe obtenu en remplaçant chaque arc (u, v) de G par m arcs entre u et v . L'ensemble de sommets V' est composé d'un nouveau sommet s' et de tous les sommets de la forme p_{uvk} (où uv est un arc de G et $1 \leq k \leq m$). L'ensemble d'arcs A' est défini par la réunion de

- l'ensemble des couples de la forme (p_{uvk}, p_{vwl}) tels que u et w sont deux sommets distincts, et
- l'ensemble des couples de la forme (p_{usk}, s') .

Nous attribuons un coût c_{uv}^k à chaque arc de la forme (p_{uvk}, p_{vwl}) et un coût c_{us}^k pour chaque arc (p_{usk}, s') . Étant donné une solution réalisable du problème de la conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne défini dans le graphe G , il est simple de définir une anti-arborescence correspondante (arbre orienté de Steiner) dans le graphe H . À cette fin, observons que la totalité du flot sur la k -ième copie de l'arc (u, v) du graphe G est acheminée à travers un seul lien sortant de v . Ainsi, la k -ième copie de l'arc (u, v) possède un seul successeur, disons la ℓ ^{ième} copie de l'arc (v, w) . Donc, si une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte contient la k -ième copie de l'arc (u, v) et le flot sur cet arc est acheminé à travers la ℓ ^{ième} copie de l'arc (v, w) , nous incluons l'arc (p_{uvk}, p_{vwl}) dans l'arborescence de Steiner dans le graphe correspondant H . De même, si une solution réalisable contient la k -ième copie de l'arc (u, s) , nous incluons l'arc (p_{usk}, s') dans l'arborescence de Steiner.

Cette construction peut être inversée, c'est à dire qu'une arborescence de Steiner dans H peut être transformée en une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte, pourvu que les conditions suivantes soient respectées :

- s'il contient un sommet de la forme p_{uvk} , alors il contient un sommet de la forme $p_{uv\ell}$ ou $p_{v\ell k}$ pour tout ℓ inférieur à k ; et
- s'il contient un sommet de la forme p_{uvk} , alors la sous-arborescence d'anti-racine p_{uvk} contient au plus C_{uv} éoliennes (rappelons que C_{uv} est la capacité de l'arc uv dans le réseau de collecte).

Par conséquent, si on veut formuler notre problème comme un problème d'arborescence de Steiner, il faut tenir compte de ces contraintes additionnelles, à savoir les contraintes de priorité et les contraintes de capacité. En pratique, nous n'allons pas transformer le graphe G en H car ce dernier est d'une taille très grande.

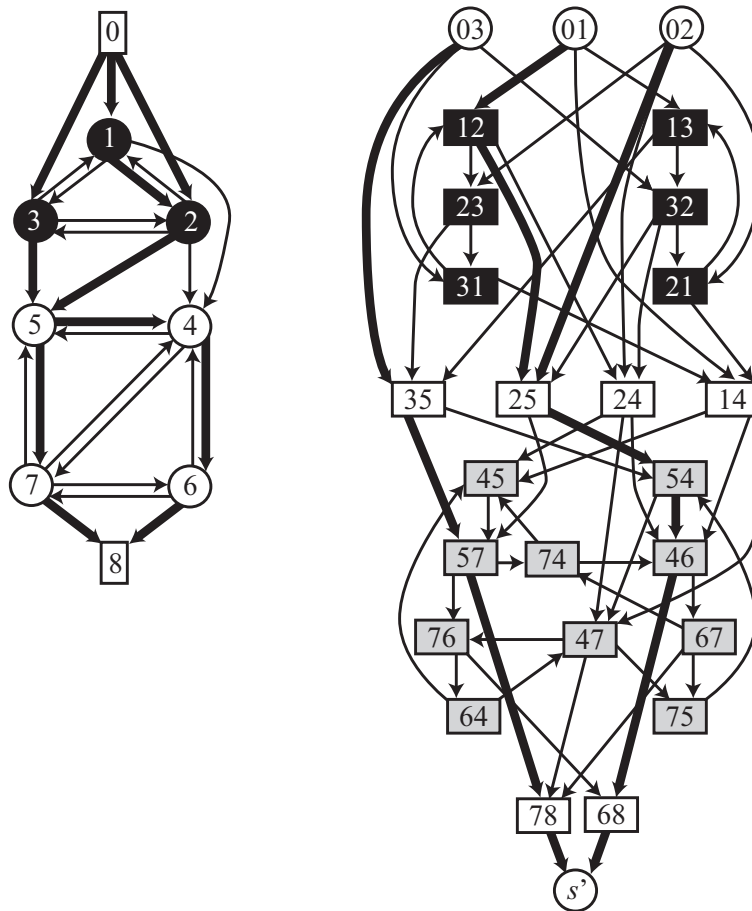


Figure 4.5: Une solution du problème d'un réseau de collecte et son arborescence de Steiner correspondant

La figure 4.5 montre le graphe orienté sous-jacent d'un petit exemple du problème d'un réseau de collecte ainsi que le graphe construit par la transformation ci-dessus. Dans cet exemple, m est égal à 1. Les sommets 1, 2 et 3 représentent des éoliennes et le sommet 8 est la sous-station. Dans le graphe de droite, tout sommet, excepté s' , correspond à un arc dans le graphe de gauche et il est étiqueté en conséquence : par exemple, le sommet 24 correspond à l'arc (2, 4) et le sommet 75 correspond à l'arc (7, 5). Les rectangles noirs sont les sommets du graphe adjoint associé au sous-graphe induit par $\{1, 2, 3\}$. De même, les rectangles gris correspondent aux arcs du sous-graphe induit par les sommets du réseau aérien à l'exception de la sous-station 8. Les rectangles blancs représentent deux groupes d'arcs : les arcs reliant une éolienne à un sommet du réseau aérien et les arcs entrant à la sous-station. Une solution réalisable du problème de conception d'un réseau de collecte est présentée sur le graphe de gauche, et elle est composée des « vrais » arcs 12, 25, 35, 54, 57, 46, 78, 68 et des arcs « fictifs » 01, 02, 03. Cette solution n'est pas une arborescence. Afin de décrire la solution adéquatement, il faut préciser que le flot sur l'arc (3, 5) est acheminé à travers l'arc (5, 7) et le flot sur l'arc (2, 5) est acheminé à travers l'arc (5, 4). L'arborescence de Steiner correspondante est présentée dans le graphe de droite.

4.7 Expériences

Nous avons effectué des expériences sur neuf exemplaires concrets fournis par notre partenaire industriel. Dans le tableau 4.1, nous donnons une description détaillée de ces exemplaires. Les réseaux sous-jacents aux exemplaires sont de niveaux de difficulté différents, définis selon le rapport entre le nombre d'éoliennes et les capacités associées aux arcs dans chaque réseau. Le plus petit problème compte près de 6000 variables et 7700 contraintes, alors que le plus grand problème comporte environ 64500 variables et plus de 60000 contraintes (voir tableau 4.2).

Les expériences ont été réalisées à l'aide de l'un des logiciels les plus performants pour la résolution de problèmes d'optimisation mixte en nombres entiers, à savoir CPLEX (en utilisant sa version 12.5 et ses paramètres implicites). Tous les tests ont été effectués sur un ordinateur Intel Core i7 à 2.67 GHz et disposant de 9G de mémoire. Nous avons imposé une limite de temps de résolution d'une heure. Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau 4.3. Tout d'abord, nous avons testé le modèle présenté dans la section 4.2 sur les neuf exemplaires. Nous avons ensuite effectué des tests pour évaluer l'impact des inégalités valides (4.16) à (4.21). Nous avons réalisé des tests avec plusieurs combinaisons de ces inégalités

Tableau 4.1: Description des exemplaires

	Nombre d'éoliennes	Nombre de sommets	Nombre d'arcs	Capacité C_{ug}	Capacité C_{ag}
Exempl. 1	40	143	384	5	10
Exempl. 2	88	220	517	10	25
Exempl. 3	53	306	868	10	15
Exempl. 4	73	256	679	10	15
Exempl. 5	33	64	160	11	11
Exempl. 6	42	91	232	11	11
Exempl. 7	60	189	478	3	10
Exempl. 8	112	281	793	5	12
Exempl. 9	79	231	677	5	12

Tableau 4.2: Tailles des exemplaires

	Nombre de variables	Nombre de contr. du modèle	Nombre de contr. supp. (4.16)	Nombre de contr. supp. (4.17)
Exempl. 1	26112	24060	1304	1304
Exempl. 2	31920	30051	1672	2576
Exempl. 3	64536	60039	3221	6328
Exempl. 4	45648	42629	2257	4192
Exempl. 5	6024	7712	389	684
Exempl. 6	13440	11814	602	904
Exempl. 7	29936	26768	1604	2020
Exempl. 8	52424	43561	2164	3372
Exempl. 9	48200	39580	1935	3276

et nous avons décidé d'inclure seulement les inégalités (4.16) et (4.17). L'inclusion de ces deux familles d'inégalités dans le modèle initial permet d'obtenir de meilleures relaxations linéaires et ainsi de résoudre quatre exemplaires sur neuf. Cependant, l'ajout de ces deux familles d'inégalités au modèle initial reste insuffisant pour résoudre les exemplaires difficiles.

Nous avons par la suite introduit quelques plans coupants de la forme des inégalités (4.25). Pour cela, nous avons procédé de la manière suivante. Les inégalités (4.22) et (4.23) qui sont des cas particuliers de la forme (4.25) ont été introduites en premier lieu dans le modèle. Nous avons ensuite généré trois groupes de plans coupants. Le premier groupe correspond aux inégalités de la forme (4.25) où T' est un singleton composé d'une éolienne. L'algorithme 4.1 décrit la procédure utilisée pour générer le premier groupe de plans coupants. Nous notons que nous avons également généré des plans coupants pour tous les ensembles T' composés de deux éoliennes. Toutefois, dans les expériences finales, nous avons utilisé seulement les ensembles T' composés d'une seule éolienne, puisque ceux de deux éoliennes n'ont pas apporté une amélioration remarquable pour les relaxations linéaires.

Pour le deuxième groupe de plans coupants, nous avons considéré l'ensemble de toutes les éoliennes (T' est égal à T). En effet, nous avons essayé de séparer l'ensemble de toutes les éoliennes de la sous-station. Nous avons ajouté les inégalités (4.25) et (4.26) dans le modèle

Algorithme 4.1 Premier groupe de plans coupants

```

1: pour chaque éolienne  $u$  faire
2:    $T' := \{u\}$ 
3:   répéter
4:     séparer  $T'$  de  $s$ 
5:     soit  $D$  une coupe standard de capacité minimale pour  $T'$ 
6:     si l'inégalité (4.25) pour  $D$  est violée alors
7:       ajouter (4.25) au modèle
8:       résoudre la relaxation linéaire du modèle
9:     fin
10:  jusqu'à la valeur optimale de la relaxation linéaire n'est pas améliorée
11: finpour
  
```

chaque fois que ces inégalités sont violées. L'algorithme 4.2 décrit la procédure utilisée.

Algorithme 4.2 Deuxième groupe de plans coupants

```

1: répéter
2:   séparer  $T$  de  $s$ 
3:   soit  $D$  une coupe standard de capacité minimale pour  $T$ 
4:   si Inégalité (4.25) ou (4.26) pour  $D$  est violée alors
5:     ajouter les coupes violées au modèle
6:     résoudre la relaxation linéaire du modèle
7:   fin
8: jusqu'à la valeur optimale de la relaxation linéaire n'est pas améliorée
  
```

Finalement, nous avons tenté de détecter encore plus de plans coupants en séparant des sous-ensembles d'éoliennes de la sous-station. Puisqu'il est difficile d'énumérer toutes les combinaisons possibles composées de plus de trois éoliennes, nous avons procédé comme suit pour générer quelques sous-ensembles T' . Pour chaque sommet v dans le graphe auxiliaire, nous notons par $M(v)$ l'ensemble des sommets $u \neq v$ tels qu'il existe un chemin de u vers v composé d'arcs (w, w', k) où $t_{ww'}^k > 0$. Nous notons aussi $T(v)$ l'ensemble des éoliennes dans $M(v)$ (en d'autres termes, $T(v) = M(v) \cap T$) et $D(v)$ la coupe $\{(w, w') \in A \mid w \in M(v), w' \notin M(v)\}$. Si l'inégalité (4.25) (en remplaçant D par $D(v)$) était violée, nous avons mémorisé l'ensemble $T(v)$ dans un ensemble noté S_i (où i est l'indice du plan coupant courant). Une fois que tous les sous-ensembles d'éoliennes utiles ont été déterminés, nous avons séparé chaque sous-ensemble de s et ajouté un groupe de nouveaux plans coupants dans le modèle. Cette procédure a été répétée jusqu'à ce qu'il n'ait plus été possible d'améliorer la valeur de la relaxation linéaire. L'algorithme 4.3 résume en détail les étapes de la procédure adoptée pour trouver des sous-ensembles d'éoliennes T' .

Algorithme 4.3 Troisième groupe de plans coupants

```

1:  $i := 0$ 
2: pour chaque sommet  $v$  faire
3:   calculer  $M(v)$ ,  $T(v)$ , et  $D(v)$ 
4:   si Inégalité (4.25) en remplaçant  $D$  par  $D(v)$  est violée alors
5:      $i := i + 1$ 
6:     sauvegarder  $T(v)$  dans  $S_i$ 
7:   finsi
8: finpour
9: répéter
10: pour chaque indice  $i$  faire
11:   séparer  $S_i$  de  $s$ 
12:   soit  $D_i$  une coupe de capacité minimale pour  $S_i$ 
13:   si l'inégalité (4.25) pour  $D_i$  est violée alors
14:     ajouter l'inégalité (4.25) au groupe de nouveaux plans coupants
15:   finsi
16: finpour
17: ajouter tous les plans coupants obtenus au modèle
18: résoudre la relaxation linéaire du modèle
19: jusqu'à la valeur optimale de la relaxation linéaire n'est pas améliorée

```

Les trois groupes de plans coupants que nous venons de décrire sont générés seulement au niveau de la racine de l'arbre de branchement. Ce choix est basé sur notre observation que les coupes les plus efficaces sont obtenues au niveau de la racine de l'arbre de branchement. Un aperçu des résultats obtenus est présenté dans le tableau 4.3. Nous notons que le caractère « ? » signifie que CPLEX n'a pas pu trouver une solution réalisable en moins d'une heure de temps de calcul. Dans la colonne solution, nous rapportons soit la valeur de la solution optimale, si cette dernière est obtenue, soit la valeur de la meilleure solution réalisable obtenue après une heure de temps de calcul. En utilisant la formulation de la section 4.2 (modèle initial), nous avons pu résoudre trois exemplaires. Après avoir introduit les contraintes (4.16) et (4.17), nous avons pu résoudre un seul exemplaire de plus.

Le saut d'intégrité représente une information intéressante pour mieux mesurer la qualité des relaxations linéaires des modèles mathématiques proposées. Cette mesure désigne l'écart relatif entre la valeur de la solution de la relaxation continue et la valeur de la solution entière. En effet, plus la valeur du saut d'intégrité est faible, plus la borne inférieure issue de la relaxation continue est bonne (puisqu'elle est proche de la valeur de la solution entière). De plus, l'efficacité de l'algorithme de résolution est généralement liée à la qualité des bornes

inférieures. Le saut d'intégrité est calculé pour chacun des exemplaires à l'aide de la formule suivante en considérant X la valeur de la solution de la relaxation linéaire (obtenue à la racine de l'arbre de branchement) et X^* la valeur de la meilleure solution réalisable connue (souvent optimale).

$$\Delta X^* = \frac{(X^* - X)}{X^*} \times 100$$

Nous constatons dans le tableau 4.4 qu'il y a une amélioration considérable des relaxations linéaires du modèle mathématique avec les contraintes (4.16) et (4.17) puisque les sauts d'intégrité obtenus par ce dernier modèle sont plus faibles que ceux obtenus par le modèle mathématique initial (un gain de plus de 25% en moyenne). Le gain lié à l'ajout de ces deux contraintes est plus important dans le cas des exemplaires de petite taille. Les résultats du tableau 4.3 confirment ce constat et montrent que l'inclusion de ces deux contraintes dans le modèle initial garantit des temps de calcul plus court pour les quatre exemplaires résolus et permet d'améliorer les écarts entre les meilleures solutions obtenues et les meilleures bornes inférieures obtenues après la limite de temps imposée (une heure). Finalement, en introduisant les contraintes (4.16), (4.17) et les trois groupes de plans coupants dans le modèle initial, six exemplaires parmi neuf sont résolus à l'optimalité. Les plans coupants améliorent, eux aussi, de près de 5% les relaxations continues à la racine de l'arbre de branchement. En particulier, l'ajout des plans coupants donne un saut d'intégrité de moins de 1% pour l'exemplaire 3, qui a le plus grand nombre de sommets et d'arcs. Ceci, entre autres, nous a permis de résoudre cet exemplaire en une vingtaine de minutes. Il est encourageant de voir que l'ajout des plans coupants, même avec un choix restreint de sous-ensembles d'éoliennes, améliore significativement la qualité des solutions obtenues. Dans le tableau 4.5, nous présentons le nombre de plans coupants générés pour chaque exemplaire durant l'exécution de chaque algorithme. Le temps alloué pour la génération de coupes pour la plupart des exemplaires est de quelques secondes voire même quelques minutes pour l'exemplaire 3.

Nous notons que les trois derniers exemplaires sont les plus difficiles. Ceci est peut-être dû à « l'incompatibilité » entre les valeurs des capacités C_{ug} et C_{ag} : dans chacun des exemplaires ces valeurs sont des nombres premiers ! Il n'est pas possible de fusionner 4 câbles de capacité 3 dans une ligne de transmission de capacité 10 dans l'exemplaire 7 et 3 câbles de capacité 5 dans une ligne de transmission de capacité 12 dans l'exemplaire 8, ce qui rend la tâche de trouver une solution réalisable plus difficile dans ces cas-là. Nous avons décidé alors de les résoudre en incluant les contraintes (4.16), (4.17), (4.22), et (4.23). Après une heure de temps de calcul, CPLEX n'a pu résoudre à l'optimum aucun exemplaires parmi les trois derniers, mais après un peu plus d'une journée, une solution optimale est obtenue pour l'exemplaire

Tableau 4.3: Résultats

	Modèle (4.1)-(4.15)			Modèle (4.1)-(4.15), (4.16), et (4.17)			Modèle (4.1)-(4.15), (4.16), (4.17), et plans coupants		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 1	88424.8	3.19	3600	87592.4	0.0	360	87592.4	0.0	315
Exempl. 2	126321.0	0.0	1464	126321.0	0.0	57	126321.0	0.0	75
Exempl. 3	?	?	3600	?	?	3600	121779.0	0.0	1372
Exempl. 4	119887.0	2.50	3600	119887.0	0.9	3600	119887.0	0.0	917
Exempl. 5	45668.8	0.0	6	45668.8	0.0	1	45668.8	0.0	6
Exempl. 6	63585.6	0.0	2266	63585.6	0.0	157	63585.6	0.0	145
Exempl. 7	?	?	3600	114323.5	3.31	3600	114185.0	4.13	3600
Exempl. 8	155894.0	11.34	3600	154643.0	6.8	3600	154643.0	6.36	3600
Exempl. 9	107834.0	7.72	3600	107741.0	3.32	3600	107259.0	2.78	3600

Tableau 4.4: Comparaison des sauts d'intégrité

	Modèle (4.1)-(4.15)		Modèle (4.1)-(4.15), (4.16), et (4.17)		Modèle (4.1)-(4.15), (4.16), (4.17), et plans coupants	
	X	ΔX^* (%)	X	ΔX^* (%)	X	ΔX^* (%)
Exempl. 1	62726.5	28.39	79314.9	9.45	82734.8	5.55
Exempl. 2	83131.6	34.19	122784.6	2.80	82734.8	1.33
Exempl. 3	63682.9	47.71	103216.4	15.24	120580.0	0.98
Exempl. 4	78389.8	34.61	112607.3	6.07	116670.0	2.68
Exempl. 5	35581.2	22.09	42490.1	6.96	45634.6	0.07
Exempl. 6	44435.7	30.12	57271.1	9.93	58472.4	8.04
Exempl. 7	66132.8	42.08	98742.7	13.52	104843.0	8.18
Exempl. 8	102089.1	33.98	132978.9	14.01	136330.0	11.84
Exempl. 9	60123.1	43.95	97102.9	9.47	99025.5	7.68

Tableau 4.5: Nombre de plans coupants

Exemplaires	Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Exempl. 1	62	1	65
Exempl. 2	41	7	16
Exempl. 3	422	61	490
Exempl. 4	99	16	152
Exempl. 5	28	1	9
Exempl. 6	62	1	7
Exempl. 7	338	1	68
Exempl. 8	316	11	77
Exempl. 9	339	41	28

Tableau 4.6: Résultats avec le modèle initial et les contraintes (4.16), (4.17), (4.22), et (4.23)

	Avec limite de temps			Sans limite de temps		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 7	114323.6	3.57	3600	114185.0	1.37	68098
Exempl. 8	153135.6	5.78	3600	152072.0	3.91	47048
Exempl. 9	107259.0	2.70	3600	107259.0	0.0	102165

9. Pour les deux autres exemplaires, CPLEX s'est arrêté après quelques heures de calcul à cause d'une insuffisance de mémoire. Le tableau 4.6 rapporte un sommaire des résultats pour ces trois exemplaires.

Comparaison expérimentale des formulations

Nous notons que nous avons réalisé des tests pour comparer la formulation présentée dans la section 4.2 (dénotée formulation 1) et celle présentée dans la section 4.5 (dénotée formulation 2). Nous avons constaté que le dernier modèle n'est pas capable de battre les résultats du premier modèle (même en ajoutant les inégalités valides) bien que les bornes inférieures issues des relaxations linéaires sont assez similaires. En fait, nous n'avons même pas pu obtenir des solutions réalisables en moins d'une heure pour la plupart des exemplaires avec la formulation de la section 4.5. Pour cette raison, nous n'allons pas détailler les résultats obtenus en utilisant cette dernière formulation. Ainsi, nous pensons que la formulation de la section 4.2 est, dans l'ensemble, plus performant puisqu'elle permet de résoudre la majorité des exemplaires. Par ailleurs, nous sommes particulièrement intéressés par les raisons pour lesquelles la formulation de la section 4.5 semble être moins efficace. Cette dernière formulation donne dans la plupart des cas plus de variables et de contraintes que l'autre formulation. La figure 4.6 illustre une comparaison de la taille des deux formulations mathématiques pour les neuf exemplaires. Cette illustration permet de se rendre compte de l'écart de la taille entre ces deux formulations. Malgré le fait que les bornes inférieures issues des relaxations linéaires soient assez similaires pour les deux formulations, le temps de résolution que prend CPLEX pour résoudre le problème est beaucoup plus long avec la deuxième formulation : le temps passé à chaque nœud est très important à cause du plus grand nombre de contraintes. En d'autres termes, le nombre de contraintes de la deuxième formulation qui augmente considérablement avec la taille des exemplaires ralentit beaucoup l'exploration des nœuds de l'arbre de branchement et la rend ainsi moins efficace. Nous pouvons alors conclure que ces résultats donnent une vision globale de l'efficacité de chaque formulation. Nous pensons que, dans l'état actuel des choses, il n'est pas intéressant de poursuivre nos recherches dans cette direction.

Expériences en interdisant les liens de sens opposés

Revenons maintenant à une condition importante dans notre modèle, à savoir la possibilité d'installer des câbles ou des lignes de transmission dans les deux sens sur les liens potentiels du réseau électrique. Bien que cette condition soit nécessaire en pratique, nous

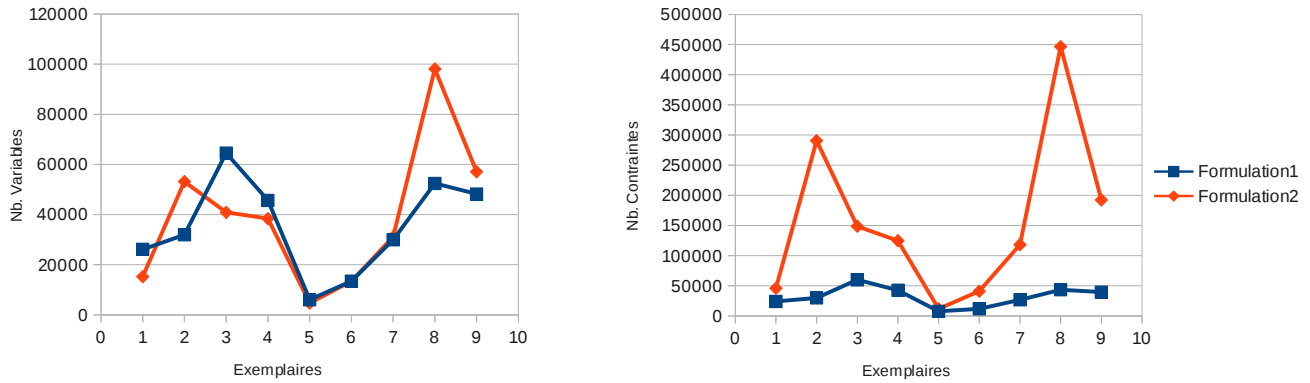


Figure 4.6: Comparaison de la taille de deux formulations mathématiques

avons constaté qu'il n'existe pas de liens parallèles installés dans les deux sens dans tous les réseaux électriques des exemplaires résolus. Considérons l'exemple 4.7 où dans ce réseau potentiel les éoliennes sont représentées en cercles noirs et la sous-station est représentée par un carré. Il est possible d'installer des liens parallèles dans les deux sens. Tous les arcs ont le même coût et la même capacité qui est égale à 3. La seule solution optimale pour cet exemple utilise deux liens parallèles installés dans des sens opposés entre les sommets A et B . Il est rare qu'une telle situation existe dans les exemplaires concrets.

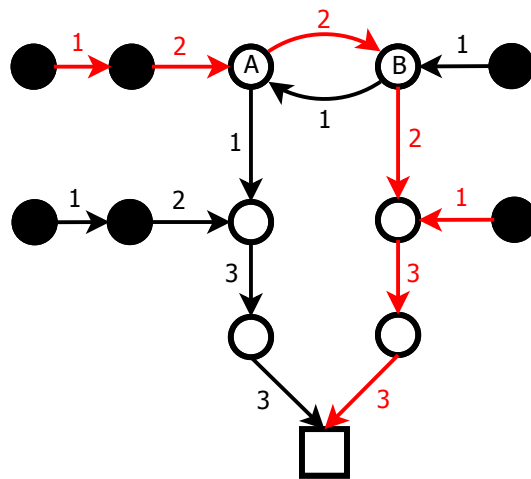


Figure 4.7: Un exemple d'une solution optimale utilisant des arcs parallèles dans les deux sens

L'idée de tester le modèle mathématique en interdisant les liens dans des sens opposés suscite notre intérêt. Pour tous les liens appartenant à l'ensemble E (rappelons que E est l'ensemble des paires $\{u, v\}$ telles que (u, v) et (v, u) appartiennent à A), il faut choisir le sens

de la circulation du flot. En d'autres termes, si le sens de la circulation du flot est choisi sur le premier lien installé, alors les autres liens installés auront le même sens. Pour appliquer cette idée, nous avons remplacé les contraintes (4.6) et (4.7) par les contraintes suivantes dans le modèle mathématique présenté dans la section 4.2.

$$t_{uv}^{k+1} \leq t_{uv}^k \quad \forall (u, v) \in A, \forall k \in K, k < m \quad (4.55)$$

Tableau 4.7: Comparaison entre les résultats du modèle permettant les liens de sens opposés et ceux du modèle les interdisant

	Modèle permettant les liens de sens opposés			Modèle interdisant les liens de sens opposés		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 1	87592.4	0.0	315	87592.4	0.0	405
Exempl. 2	126321.0	0.0	75	126321.0	0.0	50
Exempl. 3	121779.0	0.0	1372	121779.0	0.0	961
Exempl. 4	119887.0	0.0	917	119887.0	0.0	762
Exempl. 5	45668.8	0.0	6	45668.8	0.0	4
Exempl. 6	63585.6	0.0	145	63585.6	0.0	61
Exempl. 7	114185.0	4.13	3600	114185.0	3.91	3600
Exempl. 8	154643.0	6.36	3600	152607.0	4.90	3600
Exempl. 9	107259.0	2.78	3600	107454.0	2.42	3600

Dans le tableau 4.7, nous proposons une comparaison entre les résultats du modèle initial et ceux du modèle interdisant l'installation de liens parallèles de sens opposés en imposant une limite de temps (une heure). Dans les deux cas, nous avons ajouté les contraintes (4.16), (4.17) et des plans coupants. Nous notons qu'il y a une légère amélioration dans les temps de calcul des exemplaires résolus à l'optimalité ainsi que dans les écarts entre les bornes inférieures et les meilleures solutions obtenues pour les trois derniers exemplaires. Pour ces derniers exemplaires, nous avons aussi testé le modèle interdisant les liens parallèles de sens opposés en ajoutant seulement les contraintes (4.16), (4.17), (4.22) et (4.23). Ce modèle a permis de prouver l'optimalité de l'exemple 9 en moins de temps et d'obtenir la solution optimale de l'exemple 7 en un peu plus de 7 heures. Le tableau 4.8 montre un sommaire de ces résultats.

Comme nous l'avons montré ci-dessus, l'idée d'utiliser un modèle interdisant l'installation des liens parallèles dans des sens opposés semble être avantageuse. Même si en réalité nous ne pouvons pas interdire au flot de circuler simultanément dans les deux sens sur un lien du réseau électrique, il est possible d'utiliser une solution fournie par un modèle interdisant la circulation du flot dans les deux sens comme borne supérieure du modèle original. Cette idée pourrait éventuellement améliorer les temps de résolution. Hélas, nous ne sommes pas en mesure de tester cette idée car nous n'avons pas d'exemplaires dont toutes les solutions

optimales comportent au moins une paire de liens symétriques.

Tableau 4.8: Résultats de deux modèles avec (4.16), (4.17), (4.22) et (4.23)

	Modèle permettant les liens de sens opposés			Modèle interdisant les liens de sens opposés		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 7	114185.0	1.37	68098	114185.0	0.0	25933
Exempl. 8	152072.0	3.91	47048	152222.3	3.37	43842
Exempl. 9	107259.0	0.0	102165	107259.0	0.0	39356

Pour conclure ce chapitre, nous avons formulé le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne comme un programme mixte en nombres entiers. Nous avons aussi montré que le renforcement du modèle initial et l'ajout des plans coupants au nœud racine de l'arbre de branchement nous permettent soit d'obtenir des solutions optimales pour les exemplaires fournis par le partenaire industriel, soit de réduire significativement les écarts entre les meilleures solutions obtenues et les bornes inférieures. Ces résultats confirment la nécessité d'ajouter des plans coupants pour améliorer d'une manière significative les temps de calcul en particulier pour les exemplaires de grande taille.

Les résultats obtenus dans le présent chapitre laissent espérer que des techniques semblables pourraient être utilisées pour la résolution du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne avec plusieurs types de capacités à installer et en tenant compte des pertes engendrées par le transfert de l'énergie. Ce problème fera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 5

OPTIMISATION D'UN RÉSEAU DE COLLECTE D'ÉNERGIE AVEC PLUSIEURS TYPES DE CAPACITÉS ET PERTES D'ÉNERGIE

Les pertes d'énergie dans les réseaux électriques représentent pour les concepteurs un enjeu important. Sachant que la longueur des liens électriques et leurs capacités ont un impact sur les pertes, ces dernières jouent un rôle important dans la manière dont les réseaux doivent être conçus et installés. Par ailleurs, afin de minimiser, entre autres, les pertes d'énergie dans un réseau électrique, nous proposons dans ce chapitre une première modélisation non linéaire en variables mixtes du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne avec plusieurs types de capacités. Pour pallier cette difficulté, nous reformulons ce modèle non linéaire en un programme linéaire en variables mixtes. Ensuite, nous développons des inégalités valides pour améliorer les bornes inférieures issues des relaxations continues du modèle linéarisé. Nous présentons finalement les résultats d'expériences réalisées sur des applications concrètes fournies par notre partenaire industriel.

5.1 Les pertes d'énergie

En réalité, les concepteurs de réseaux électriques peuvent utiliser plusieurs types de liens électriques (câbles ou lignes de transmission) avec différentes capacités pour la construction d'un réseau de collecte dans un parc éolien. Puisque la quantité d'énergie qui circule sur un lien du réseau augmente avec le nombre d'éoliennes connectées, les concepteurs doivent décider de la capacité adéquate à installer sur ce lien pour minimiser les coûts d'installation. Toutefois, le choix de la capacité appropriée n'est pas trivial puisque chaque type de lien (câble ou ligne de transmission) peut dissiper l'énergie par « effet de Joule ». Par conséquent, les concepteurs doivent minimiser à la fois les coûts d'installation et les pertes encourues dans le réseau électrique.

En physique, les pertes sont proportionnelles au carré de l'énergie qui circule à travers un lien donné (câble ou ligne de transmission) et peuvent être calculées à l'aide de l'équation suivante.

$$P = BX^2$$

La constante B est un coefficient qui dépend du type de lien utilisé (souterrain ou aérien),

de sa longueur et de sa capacité et X dénote la quantité d'énergie qui traverse ce lien.

Concrètement, la perte d'énergie est un phénomène physique qui se produit en tout temps et tant qu'il y a un transfert d'énergie dans un réseau électrique. Comme les pertes d'énergie jouent un rôle important dans la manière dont un réseau de collecte d'énergie dans un parc éolien doit être conçu, les concepteurs de réseaux doivent effectuer une estimation de ces pertes au préalable. Pour résumer, le coefficient B est estimé en tenant compte de plusieurs facteurs tels que le type de lien électrique utilisé, sa longueur et la durée d'utilisation du réseau électrique. Pour la réalisation de notre projet, le partenaire industriel nous a fourni le coefficient B estimé pour chaque type de câble ou de ligne de transmission pouvant être installé sur un lien potentiel du réseau à concevoir.

Dans la prochaine section, nous présentons un modèle quadratique en variables mixtes pour résoudre le problème de la collecte de l'énergie éolienne en tenant compte des pertes d'énergie ainsi que des hypothèses faites dans le chapitre précédent pour construire le réseau électrique.

5.2 Modèle mathématique

Le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie avec plusieurs types de capacités consiste à installer la capacité nécessaire sur chaque lien du réseau pour collecter l'énergie produite par les éoliennes en minimisant les coûts d'installation et les pertes encourues. Ce problème est défini sur le graphe $G = (V, A)$ décrit dans le chapitre 4. Par ailleurs, nous distinguons A_{ug} l'ensemble des arcs appartenant au réseau souterrain et A_{ag} l'ensemble des arcs appartenant au réseau aérien. $H_{ug} = \{1, 2, \dots, q_{ug}\}$ et $H_{ag} = \{1, 2, \dots, q_{ag}\}$ représentent respectivement l'ensemble de types de capacités de câbles souterrains et l'ensemble de types de capacités de lignes de transmission disponibles. Pour décrire les types de capacités disponibles sur les arcs du graphe G , nous faisons la distinction entre les catégories d'arcs décrites dans le chapitre 4. Une seule capacité de 1 est disponible pour les arcs de la catégorie 1. Tout arc de la catégorie 2 ou 3 peut être desservi par un ou plusieurs types de câbles où la capacité de chaque type $h \in H_{ug}$ est C_{ug}^h . Par contre, tout arc de la catégorie 4 ou 5 peut être desservi par un ou plusieurs types de lignes de transmission où la capacité de chaque type $h \in H_{ag}$ est C_{ag}^h . Nous notons qu'il est possible d'installer différents types de capacités sur chaque lien du réseau électrique. Nous supposons que les capacités disponibles sont des entiers non nuls satisfaisant les relations

$$C_{ug}^1 < C_{ug}^2 < \dots < C_{ug}^q \quad \text{et} \quad C_{ag}^1 < C_{ag}^2 < \dots < C_{ag}^q.$$

Pour alléger la notation, nous introduisons l'ensemble H qui dénote la réunion disjointe des ensembles H_{ug} et H_{ag} et nous notons C_{uv}^h la capacité de type $h \in H$ pouvant être installée sur un arc $(u, v) \in A$.

Nous rappelons qu'il est possible d'installer jusqu'à m liens parallèles entre deux sommets u et v . Les liens parallèles peuvent être de différentes capacités. Par ailleurs, si un lien de type h est installé sur la k -ième copie de l'arc (u, v) , alors un coût c_{uv}^{kh} est payé et le flot circulant à travers ce lien ne doit pas dépasser la capacité C_{uv}^h . En outre, si un flot, disons x_{uv}^{kh} , circule à travers un lien de type h installé sur une copie de l'arc (u, v) , alors un coût proportionnel au carré de ce flot ($b_{uv}^h (x_{uv}^{kh})^2$) est aussi appliqué. Ce coût non linéaire représente les pertes encourues si ce type de lien est utilisé et a été estimé a priori par les concepteurs de réseaux sous forme d'un coefficient b_{uv}^h . Ainsi pour chaque lien (u, v, k) , nous avons les relations suivantes. Nous notons que plus la capacité d'un lien est grande, plus la dissipation de l'énergie est faible.

$$c_{uv}^{k1} < c_{uv}^{k2} < \dots < c_{uv}^{kq} \quad \text{et} \quad b_{uv}^1 > b_{uv}^2 > \dots > b_{uv}^q.$$

Nous rappelons également que le sommet fictif 0 est connecté avec un coût nul à tous les sommets appartenant à T . De plus, les relations suivantes sont encore valides.

- Pour tout arc (u, v) et tout $h \in H$, $c_{uv}^{1h} \geq c_{uv}^{2h} \geq \dots \geq c_{uv}^{mh}$,
- Pour tout arc (u, v) de la catégorie 2 ou 4, tout $k \in K$ et $h \in H$, $c_{uv}^{kh} = c_{vu}^{kh}$.

La figure 5.1 illustre une solution réalisable du problème de collecte d'énergie éolienne (pour le même réseau 4.1 décrit dans le chapitre 4) dans le cas où il est possible d'installer des câbles ou des lignes de transmission de différentes capacités sur chaque lien du réseau. En effet, deux types de câbles de capacités 6 (les liens bleus) et 13 (les liens rouges) ainsi que deux types de lignes de transmission de capacités 8 (les liens verts) et 19 (les liens violets) sont disponibles pour tout le réseau. La valeur affichée sur chaque lien représente le nombre d'unités de flot circulant à travers ce lien. Nous notons que dans certaines situations, un deuxième lien est installé bien que les quantités de flots puissent être fusionnées sur un seul lien. Cela s'explique par le fait que l'utilisation de deux liens parallèles coûte moins cher qu'un seul à cause des pertes d'énergie.

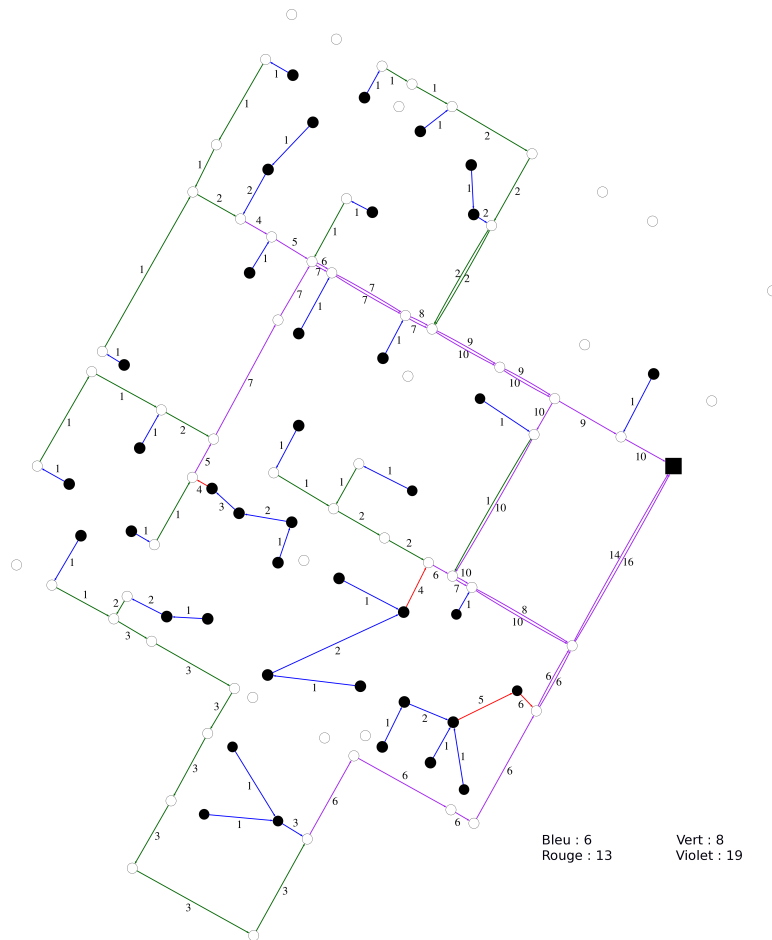


Figure 5.1: Une solution réalisable du problème avec plusieurs types de capacités

Pour tenir compte de la possibilité d'installer plusieurs types de liens (câbles ou lignes de transmission) avec différentes capacités entre deux sommets du graphe G , il suffit de modifier légèrement le modèle proposé dans le chapitre 4. Pour ce faire, nous introduisons les variables binaires t_{uv}^{kh} définies comme suit : t_{uv}^{kh} vaut 1 si et seulement si le type de capacité h est installé sur la k -ième copie de l'arc (u, v) . Nous avons aussi remplacé les variables x_{uv}^k par les variables x_{uv}^{kh} pour représenter le flot qui circule sur le k -ième lien de type h installé sur l'arc (u, v) . Le problème est de décider quel type de lien installer sur chaque arc du réseau et comment acheminer l'énergie à partir des éoliennes vers la sous-station de transformation de telle sorte que les coûts d'installation et les pertes soient minimisés. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus les pertes sont proportionnelles au carré de la quantité d'énergie transférée. Ainsi, nous proposons une première formulation du problème comme un programme quadratique

en variables mixtes qui s'énonce comme suit.

$$\min \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q c_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} + \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q b_{uv}^h (x_{uv}^{kh})^2 \quad (5.1)$$

s.c.

$$\sum_{\{v:(v,u) \in A\}} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q x_{vu}^{kh} - \sum_{\{v:(u,v) \in A\}} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q x_{uv}^{kh} = \begin{cases} |T| & \text{si } u = s \\ -|T| & \text{si } u = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\sum_{h=1}^q x_{0v}^{1h} = 1 \quad \forall v \in T \quad (5.3)$$

$$x_{uv}^{kh} \leq C_{uv}^h t_{uv}^{kh} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H \quad (5.4)$$

$$\sum_{h=1}^q t_{uv}^{kh} = t_{uv}^k \quad \forall (u,v) \in A, k \in K \quad (5.5)$$

$$t_{uv}^k + t_{vu}^k \leq 1 \quad \forall \{u,v\} \in E, k \in K \quad (5.6)$$

$$t_{uv}^{k+1} \leq t_{uv}^k \quad \forall (u,v) \in A_1, k \in K, k \leq m \quad (5.7)$$

$$t_{uv}^{k+1} + t_{vu}^{k+1} \leq t_{uv}^k + t_{vu}^k \quad \forall \{u,v\} \in E, k \in K, k \leq m \quad (5.8)$$

$$\sum_{u \in P(v)} \sum_{k=1}^m z_{uvw}^{kk'} = \sum_{h=1}^q x_{vw}^{k'h} \quad \forall (u,v) \in A, v \neq 0, k' \in K \quad (5.9)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m z_{uvw}^{kk'} = \sum_{h=1}^q x_{uv}^{kh} \quad \forall (u,v) \in A, v \neq s, k \in K \quad (5.10)$$

$$z_{uvw}^{kk'} \leq \min \left(\max_{h \in H} C_{uv}^h, \max_{h \in H} C_{vw}^h \right) y_{uvw}^{kk'} \quad \forall (u,v,w) \in P_2, \forall k, k' \in K, h \in H \quad (5.11)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m y_{uvw}^{kk'} = t_{uv}^k \quad \forall (u,v) \in A, v \neq s, k \in K \quad (5.12)$$

$$x_{uv}^{kh} = t_{uv}^{kh} = 0 \quad \forall (u,v) \in A_{ug}, h \in H_{ug} \quad (5.13)$$

$$x_{uv}^{kh} = t_{uv}^{kh} = 0 \quad \forall (u,v) \in A_{ag}, h \in H_{ag} \quad (5.14)$$

$$x_{uv}^{kh} \geq 0 \quad \forall (u,v) \in A, k \in K \quad (5.15)$$

$$z_{uvw}^{kk'} \geq 0 \quad \forall (u,v,w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (5.16)$$

$$t_{uv}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K \quad (5.17)$$

$$t_{uv}^{kh} \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H \quad (5.18)$$

$$y_{uvw}^{kk'} \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v,w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (5.19)$$

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, nous avons apporté de légères modifications au modèle mathématique présenté dans le chapitre 4, pour tenir compte de la possibilité d'installer plusieurs types de capacités sur les liens du réseau électrique. Plus précisément, ce nouveau modèle minimise, en plus de la somme des coûts d'installation des capacités sur les arcs du réseau électrique, les coûts des pertes encourues lors du transfert de l'énergie produite par les éoliennes. De plus, nous avons remplacé partout dans le modèle les variables x_{uv}^k par les variables x_{uv}^{kh} . Par contre, nous avons ajouté les contraintes (5.5) qui stipulent qu'il ne peut y avoir plus d'un seul type de lien sur chaque copie de l'arc (u, v) et les contraintes (5.12) qui indiquent que si le k -ième lien entre les sommets u et v est installé et que v n'est pas la sous-station, alors le flot sur ce lien doit être envoyé vers un seul lien.

Nous notons que si le modèle quadratique a une solution réalisable, alors il a une solution optimale entière. D'une part, les contraintes (5.3) imposent qu'exactement une seule unité de flot provenant de la source 0 atteint chaque éolienne. De plus, à partir des contraintes (5.4) et (5.5), nous pouvons déduire qu'une seule variable x_{0v}^{1h} pour toute éolienne v est non nulle. D'autre part, si la k -ième copie de l'arc (u, v) est utilisée dans une solution, alors les contraintes (5.11) et (5.12) imposent que le flot traversant cette copie de l'arc (u, v) soit acheminé vers un seul arc sortant de v (le flot ne peut pas bifurquer), il s'ensuit qu'une seule variable $z_{uvw}^{kk'}$ est non nulle. Par conséquent, les contraintes (5.10) font en sorte que les variables $z_{uvw}^{kk'}$ et x_{uv}^{kh} soient entières.

L'incorporation des pertes d'énergie au problème le rend beaucoup plus complexe, car elles sont dépendantes de manière non linéaire des flots d'énergie et donc des variables de décision x_{uv}^{kh} . Ce programme quadratique en variables mixtes est convexe avec des contraintes linéaires (puisque les b_{uv}^h sont positifs). Théoriquement, il est possible d'utiliser les méthodes de résolution implantées par des solveurs comme CPLEX pour résoudre des programmes quadratiques convexes. Cependant, les bornes inférieures fournies par les relaxations continues de ces programmes quadratiques sont généralement de qualité médiocre. Ainsi, parvenir à résoudre des problèmes de taille moyenne voire même petite représente un défi important. C'est la raison pour laquelle nous reformulons le modèle proposé ci-dessus pour remédier à sa nature quadratique. Plus précisément, nous proposons de transformer le modèle quadratique en un programme linéaire en ajoutant des variables et des contraintes supplémentaires.

5.3 Linéarisation du modèle quadratique

Linéariser un problème quadratique en variables mixtes est une idée qui surgit assez naturellement. Cette idée permet, en fait, de bénéficier de la bonne qualité de la borne inférieure obtenue à la racine de l'arbre de branchement lorsqu'un programme linéaire est résolu en utilisant CPLEX. Par ailleurs, il existe plusieurs méthodes de transformation connues pour transformer à une fonction quadratique en une fonction linéaire. En particulier, nous envisageons de linéariser par morceaux la forme quadratique présente dans la fonction objectif (5.1). En effet, notre forme quadratique est additivement séparable puisque on peut l'écrire sous la somme de plusieurs fonctions dont chacune implique une seule variable x_{uv}^{kh} .

$$g(x) = \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q b_{uv}^h (x_{uv}^{kh})^2 = \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q g(x_{uv}^{kh}) \quad (5.20)$$

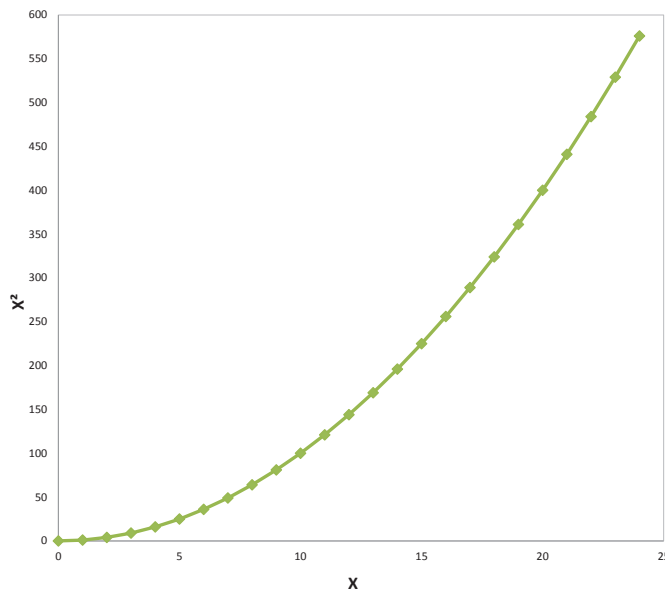


Figure 5.2: Approximation par une série de points de rupture entiers

De plus la fonction $g(x)$ est convexe. Il est alors possible d'approximer chaque fonction sur un intervalle par une fonction linéaire par morceaux. Nous rappelons que les variables de flot x_{uv}^{kh} sont bornées supérieurement par des capacités entières C_{uv}^h . Nous pouvons alors estimer la courbe décrivant la relation entre x_{uv}^{kh} et son carré par une série de points de rupture entiers (figure 5.2). Ainsi, nous notons $R_{uv}^h = \{0, 1, 2, \dots, C_{uv}^h\}$ l'ensemble des valeurs

entières (points de rupture entiers) que peut prendre chaque variable x_{uv}^{kh} et $|R_{uv}^h|$ le cardinal de cet ensemble. Nous avons alors besoin d'introduire les variables de décision binaires α_{uvr}^{kh} (pour tout $r \in R_{uv}^h$) afin d'identifier la valeur de x_{uv}^{kh} considérée dans une solution réalisable pour chaque lien de type h installé sur la k -ième copie de l'arc (u, v) . En d'autres termes, chaque variable α_{uvr}^{kh} vaut 1 si et seulement si la variable x_{uv}^{kh} est égale à r , pour tout lien de type h installé sur la k -ième copie de l'arc (u, v) . Une seule variable α_{uvr}^{kh} , indiquant un point de rupture, peut prendre une valeur strictement positive. Pour cela, nous imposons les contraintes (5.28). Dans ce modèle linéarisé, x_{uv}^{kh} est remplacé par $\sum_{r=0}^{C_{uv}^h} r \alpha_{uvr}^{kh}$ et la fonction $g(x_{uv}^{kh})$ est remplacée par $b_{uv}^h \sum_{r=1}^{C_{uv}^h} r^2 \alpha_{uvr}^{kh}$. Le modèle linéarisé s'écrit alors comme suit.

$$\min \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q c_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} + \sum_{(u,v) \in A} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q b_{uv}^h \sum_{r=0}^{C_{uv}^h} r^2 \alpha_{uvr}^{kh} \quad (5.21)$$

s.c.

$$(5.5) - (5.8), (5.11)$$

$$\sum_{\{v:(v,u) \in A\}} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q \sum_{r=1}^{C_{uv}^h} r \alpha_{uvr}^{kh} - \sum_{\{v:(u,v) \in A\}} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q \sum_{r=1}^{C_{uv}^h} r \alpha_{uvr}^{kh} = \begin{cases} |T| & \text{si } u = s \\ -|T| & \text{si } u = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^q \sum_{r=0}^{C_{uv}^h} r \alpha_{0vr}^{kh} = 1 \quad \forall v \in T \quad (5.23)$$

$$\sum_{r=0}^{C_{uv}^h} r \alpha_{uvr}^{kh} \leq C_{uv}^h t_{uv}^{kh} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H \quad (5.24)$$

$$\sum_{u \in P(v)} \sum_{k=1}^m z_{uvw}^{kk'} = \sum_{h=1}^q \sum_{r=0}^{C_{vw}^h} r \alpha_{vwr}^{k'h} \quad \forall (u,v) \in A, v \neq 0, k' \in K \quad (5.25)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m z_{uvw}^{kk'} = \sum_{h=1}^q \sum_{r=0}^{C_{uv}^h} r \alpha_{uvr}^{kh} \quad \forall (u,v) \in A, v \neq s, k \in K \quad (5.26)$$

$$\sum_{w \in S(v)} \sum_{k'=1}^m y_{uvw}^{kk'} = t_{uv}^k \quad \forall (u,v) \in A, v \neq s, k \in K \quad (5.27)$$

$$\sum_{r=0}^{C_{uv}^h} \alpha_{uvr}^{kh} = t_{uv}^{kh} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H \quad (5.28)$$

$$z_{uvw}^{kk'} \geq 0 \quad \forall (u,v,w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (5.29)$$

$$\alpha_{uvr}^{kh} = 0 \quad \forall (u,v) \in A_{ug}, h \in H_{ug}, r \in R \quad (5.30)$$

$$\alpha_{uvr}^{kh} = 0 \quad \forall (u,v) \in A_{ag}, h \in H_{ag}, r \in R \quad (5.31)$$

$$t_{uv}^k \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K \quad (5.32)$$

$$t_{uv}^{kh} \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H \quad (5.33)$$

$$y_{uvw}^{kk'} \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v,w) \in P_2, \forall k, k' \in K \quad (5.34)$$

$$\alpha_{uvr}^{kh} \in \{0, 1\} \quad \forall (u,v) \in A, k \in K, h \in H, r \in R \quad (5.35)$$

Nous avons ainsi transformé le programme quadratique proposé dans la section 5.2 en un programme linéaire en variables mixtes. Hélas, cela se fait au prix fort, en rajoutant de nombreuses variables et contraintes. Ce nombre de variables et de contraintes supplémentaires dépend principalement des capacités disponibles.

5.4 Génération de plans coupants

Comme nous l'avons fait dans le cas d'un seul type de capacité, nous essayons dans cette section de développer des inégalités valides afin d'améliorer la formulation du problème avec plusieurs types de capacités. Avant d'entamer l'élaboration des inégalités valides, nous notons que les différents types de capacités disponibles n'ont aucune structure spécifique. En particulier, les capacités ne satisfont pas la propriété de divisibilité. Par contre, dans la littérature, la plupart des chercheurs ont travaillé sur des versions du problème de conception de réseaux avec plusieurs types de capacités qui sont des multiples d'une certaine capacité de base (c'est à dire que le deuxième type de capacité est un multiple entier du premier, le troisième est un multiple du deuxième, et ainsi de suite). Malheureusement, les inégalités valides développées sous l'hypothèse de la divisibilité ne peuvent pas être appliquées dans ce contexte.

Par ailleurs, nous partons du même principe que dans le chapitre 4 pour développer de nouvelles inégalités valides. Pour ce faire, nous procédons de la manière suivante. Nous dénotons D_s l'ensemble des arcs de la forme (u, s, k) pour tout u dans $P(s)$ (l'ensemble des prédécesseurs de la sous-station s). Étant donné une solution réalisable (entière) du modèle, notamment les valeurs des variables de conception t_{uv}^{kh} , nous pouvons dire que la somme de capacités installées sur les arcs appartenant à D_s est au moins égale au nombre des éoliennes. Ceci implique que l'inégalité suivante doit être satisfaite (où C_{uv}^{kh} est la capacité de type h installée sur un arc de la forme (u, v, k) et $|T|$ le nombre des éoliennes).

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T| \quad (5.36)$$

Il s'ensuit que, pour un type de capacité c , on a

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^c C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} + \sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T|$$

et donc

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^c C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T| - \sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh}.$$

Puisque les variables t_{uv}^{kh} sont entières et qu'un seul type de capacité h est permis pour tout arc de la forme (u, v, k) , nous pouvons alors déduire des inégalités valides de cette dernière. En particulier, pour chaque type de capacité $c \in H_{ag}$ pouvant être installé sur les arcs appartenant à D_s , nous obtenons les inégalités valides suivantes qui sont satisfaites par toute solution réalisable du modèle mathématique linéarisé puisque $C_{ag}^1 < C_{ag}^2 < \dots < C_{ag}^q$.

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \left\lceil \left(|T| - \sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / C_{ag}^c \right\rceil \quad \forall c \in H_{ag} \quad (5.37)$$

Les inégalités valides (5.37) sont non linéaires. Il est donc plus judicieux de transformer ces inégalités non linéaires en inégalités linéaires pour pouvoir les utiliser dans une méthode de plans coupants. Pour ce faire, nous introduisons pour chaque inégalité valide une variable entière δ_c telle que :

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \delta_c \quad \forall c \in H_{ag} \quad (5.37a)$$

$$\delta_c \geq \left(|T| - \sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / C_{ag}^c \quad \forall c \in H_{ag} \quad (5.37b)$$

$$\delta_c \geq 0 \quad \text{entiers} \quad \forall c \in H_{ag} \quad (5.37c)$$

De la même manière, si D_b représente l'ensemble de tous les arcs allant du réseau souterrain vers le réseau aérien, nous pouvons conclure que, pour tout type de capacité $c \in H_{ug}$ pouvant être installé sur les arcs appartenant à D_b , les inégalités suivantes sont vérifiées par toute solution réalisable de notre modèle mathématique puisque $C_{ug}^1 < C_{ug}^2 < \dots < C_{ug}^q$.

$$\sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \left\lceil \left(|T| - \sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / C_{ug}^c \right\rceil \quad \forall c \in H_{ug} \quad (5.38)$$

Si nous linéarisons les inégalités (5.38), nous obtenons

$$\sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \gamma_c \quad \forall c \in H_{ug} \quad (5.38a)$$

$$\gamma_c \geq \left(|T| - \sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / C_{ug}^c \quad \forall c \in H_{ug} \quad (5.38b)$$

$$\gamma_c \geq 0 \quad \text{entiers} \quad \forall c \in H_{ug} \quad (5.38c)$$

Nous notons que les inégalités valides (4.22) et (4.23) sont respectivement des cas particuliers des inégalités valides (5.37) et (5.38). En effet, pour le type de capacité q , nous avons les inégalités valides suivantes.

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^q t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T| / C_{ag}^q \rceil, \quad \sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=1}^q t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T| / C_{ug}^q \rceil$$

Maintenant, nous suivons le même raisonnement pour dériver d'autres inégalités valides plus générales que celles décrites ci-dessus. À cette fin, nous considérons une coupe D qui sépare 0 de s et le sous-ensemble D_1 qui contient tous les arcs dans D , dont l'origine est la source 0. Nous désignons par T' l'ensemble des éoliennes u tel que $(0, u)$ n'appartient pas à D_1 . Alors, nous avons

$$\sum_{(u,v,k) \in D} \sum_{h=1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T|$$

et ainsi,

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T| - \sum_{(u,v,k) \in D_1} \sum_{h=1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh}$$

Puisque que tous les arcs (u, v, k) dans D_1 ont la propriété que $\sum_{h=1}^q t_{uv}^{kh}$ est égal à 1, il s'ensuit que

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T| - |D_1| = |T'|. \quad (5.39)$$

Cette inégalité peut être écrite de la manière suivante.

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^c C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} + \sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T'|$$

Donc nous avons

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^c C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \geq |T'| - \sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh}.$$

Étant donné que les variables t_{uv}^{kh} sont entières, nous pouvons dériver plusieurs inégalités valides à partir de cette dernière. Plus précisément, si M_c représente la plus grande valeur de C_{uv}^{kh} pour $(u, v, k) \in D \setminus D_1$ et pour tout $h \in \{1, \dots, c\}$, nous obtenons les inégalités valides suivantes qui sont vérifiées pour chaque solution réalisable du programme linéaire en variables mixtes.

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \left\lceil \left(|T'| - \sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / M_c \right\rceil \quad \forall c \in H \quad (5.40)$$

Afin de linéariser les inégalités valides (5.40), nous introduisons aussi des variables entières σ_c telles que :

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^c t_{uv}^{kh} \geq \sigma_c \quad \forall c \in H \quad (5.40a)$$

$$\sigma_c \geq \left(|T'| - \sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=c+1}^q C_{uv}^{kh} t_{uv}^{kh} \right) / M_c \quad \forall c \in H \quad (5.40b)$$

$$\sigma_c \geq 0 \quad \text{entiers} \quad \forall c \in H \quad (5.40c)$$

L'utilisation des inégalités valides (5.37), (5.38) et (5.40) nécessite l'ajout d'une variable entière pour chaque inégalité valide violée, si cette dernière est détectée. Dans ce qui suit, nous allons développer des inégalités valides plus simples et qui ne nécessitent pas l'ajout de nouvelles variables. À partir des inégalités (5.36) et pour un type de capacité $c \in H_{ag}$

pouvant être installé sur les arcs appartenant à D_s , nous obtenons

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^q (C_{uv}^{kh}/C_{ag}^c) t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T|/C_{ag}^c \rceil.$$

Étant donné que $\lceil C_{uv}^{kh}/C_{ag}^c \rceil \geq C_{uv}^{kh}/C_{ag}^c$, nous avons les inégalités suivantes.

$$\sum_{(u,v,k) \in D_s} \sum_{h=1}^q \lceil C_{uv}^{kh}/C_{ag}^c \rceil t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T|/C_{ag}^c \rceil \quad \forall c \in H_{ag} \quad (5.41)$$

De la même manière, pour un type de capacité $c \in H_{ug}$ pouvant être installé sur les arcs appartenant à D_b , nous avons les inégalités suivantes.

$$\sum_{(u,v,k) \in D_b} \sum_{h=1}^q \lceil C_{uv}^{kh}/C_{ug}^c \rceil t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T|/C_{ug}^c \rceil \quad \forall c \in H_{ug} \quad (5.42)$$

D'une manière générale, à partir des inégalités (5.39), nous avons les inégalités suivantes qui sont vérifiées par toute solution réalisable du programme linéaire en variables mixtes. Nous rappelons que M_c représente la plus grande valeur de C_{uv}^{kh} pour $(u, v, k) \in D \setminus D_1$ et pour tout $h \in \{1, \dots, c\}$.

$$\sum_{(u,v,k) \in D \setminus D_1} \sum_{h=1}^q \lceil C_{uv}^{kh}/M_c \rceil t_{uv}^{kh} \geq \lceil |T|/M_c \rceil \quad (5.43)$$

Nous soulignons que les inégalités valides (4.22), (4.23) et (4.25) sont également des cas particuliers des inégalités (5.41), (5.42) et (5.43).

La difficulté majeure pour appliquer la méthode de plans coupants est l'identification des inégalités valides qui sont violées par des solutions fractionnaires de la relaxation continue. En d'autres termes, il s'agit de trouver une coupe D pour laquelle au moins une inégalité valide de la forme (5.40) ou de la forme (4.25) qui soit violée. Bien que nous ayons réussi à développer un algorithme qui permet l'identification des inégalités valides qui sont violées lorsque un seul type de capacité est disponible, la tâche s'annonce beaucoup plus difficile dans le cas de plusieurs types de capacités.

5.5 Expériences

L'un des critères essentiels de l'efficacité d'un algorithme de séparation et évaluation progressive est la qualité de la borne inférieure issue de la relaxation continue de la formulation mathématique. Ainsi, nous pouvons dire qu'une reformulation mathématique est meilleure qu'une autre si sa relaxation linéaire fournit une meilleure borne. Afin d'évaluer l'efficacité des reformulations mathématiques proposées ci-dessus, nous avons mené des expériences sur des exemplaires concrets de réseaux de collecte d'énergie éolienne. En effet, nous avons réalisé des expériences sur trois exemplaires concrets (réseaux potentiels). Pour chaque exemplaire, notre partenaire industriel nous a fourni trois configurations différentes selon deux critères, à savoir le nombre de types de capacités disponibles et l'horizon d'utilisation du réseau de collecte d'énergie sur lequel les pertes ont été estimées. Dans les deux premières configurations, nous avons deux types de capacités disponibles pour chaque réseau (souterrain et aérien) et les pertes sont calculées sur deux horizons de 5 et 10 ans. Dans la troisième configuration, nous avons 5 types de capacités disponibles pour chaque réseau et les pertes sont calculées sur un horizon de 20 ans. Une description détaillée de ces configurations se trouve dans le tableau 5.1.

Tous les modèles mathématiques présentés ci-dessus ont été implémentés à l'aide de CPLEX dans sa version 12.5 et avec ses paramètres implicites. Tous les tests ont été effectués sur un ordinateur Intel Core i7 à 2.67 GHz et disposant de 9G de mémoire. Pour tous les tests que nous avons effectués, nous avons limité le temps de résolution de CPLEX à 12 heures. Le caractère « ? » signifie que soit CPLEX n'a pas pu trouver une première solution réalisable en moins de 12 heures (la limite de temps de résolution imposée), soit qu'il s'est arrêté bien avant la limite de temps et sans fournir une première solution réalisable à cause d'une insuffisance de mémoire.

Une première série de tests a été effectuée avec différentes combinaisons des inégalités valides (4.16) à (4.21) proposées dans le chapitre 4. Nous avons donc choisi d'inclure seulement les inégalités (4.16) et (4.21) qui permettent d'obtenir des meilleures relaxations continues et des meilleurs temps de résolution. Nous mentionnons que malgré leur très grand nombre (voir tableau 5.2), les contraintes (4.21) accélèrent nettement le temps de résolution des deux modèles quadratique et linéarisé : elles permettent d'explorer l'espace des solutions plus efficacement en réduisant le nombre de sous-problèmes équivalents traités dans l'arbre de branchement. Ainsi, tous les résultats rapportés ci-dessous ont été produits en incluant les inégalités (4.16) et (4.21) dans tous les modèles mathématiques proposés dans ce chapitre.

Le tableau 5.3 présente une comparaison entre le modèle quadratique proposé dans la section 5.2 et le modèle linéarisé de la section 5.3. Les résultats pour le modèle quadratique montrent que les écarts entre les meilleures solutions obtenues et les bornes inférieures fournies par les relaxations continues après 12 heures de temps de résolution sont grands. Cela est principalement dû à la mauvaise qualité des bornes inférieures obtenues à la racine de l'arbre de branchement, avec un saut d'intégrité de 53% en moyenne. Nous détaillons dans le tableau 5.4 les sauts d'intégrité calculés pour chacun des exemplaires. Nous rappelons que pour calculer les sauts d'intégrité, nous avons utilisé la formule suivante.

$$\Delta X^* = \frac{(X^* - X)}{X^*} \times 100$$

où, X est la valeur de la solution de la relaxation linéaire (obtenue à la racine de l'arbre de branchement) et X^* est la valeur de la meilleure solution réalisable connue (souvent optimale). Nous pouvons alors dire que la performance de CPLEX est très limitée lorsqu'il s'agit de résoudre des programmes quadratiques de grande taille, de plusieurs milliers de contraintes et de variables (voir tableau 5.2). D'autre part les résultats de la deuxième partie du tableau 5.3 montrent que le modèle linéaire par morceaux permet de résoudre la majorité des exemplaires, à l'inverse du modèle quadratique. Malgré le grand nombre de variables et de contraintes de ce modèle (voir tableau 5.2), CPLEX a obtenu des solutions optimales pour 7 exemplaires sur 9 en des temps de résolution raisonnables. D'ailleurs, les bornes inférieures obtenues à la racine de l'arbre de branchement avec le modèle linéarisé sont améliorées de plus de 50%. En d'autres termes, les écarts entre les bornes inférieures et les meilleures solutions obtenues avec le modèle linéarisé sont très faibles, ce qui permet de résoudre plus rapidement la plupart des exemplaires. Pour l'exemplaire 3 (H-05), CPLEX s'est arrêté après seulement une heure à cause de la taille du programme mathématique et donc d'une insuffisance de mémoire, malgré que le saut d'intégrité soit très faible, de l'ordre de 2%. En ce qui concerne, l'exemplaire 3 (H-20), CPLEX a fourni une très bonne solution dont l'écart par rapport à la meilleure borne inférieure obtenue est très faible (0.31%). Ces résultats confirment une fois de plus que CPLEX est plus performant pour la résolution de programmes linéaires que pour la résolution de programmes quadratiques.

Une deuxième série de tests a été ensuite réalisée pour étudier l'impact des inégalités valides proposées dans la section 5.4. Seules les inégalités valides (5.37), (5.38), (5.41) et (5.42) sont introduites dans le programme linéaire par morceaux. Malheureusement, nous n'avons pas pu trouver un algorithme efficace pour identifier des inégalités valides des formes (5.40) et (5.43). Les résultats présentés dans le tableau montrent que l'ajout des inégalités

Tableau 5.1: Description des exemplaires

	Nombre d'éoliennes	Nombre de sommets	Nombre d'arcs	Capacités C_{ug}	Capacités C_{ag}	Horizon
Exempl. 1 (H-05)	40	143	384	(6,13)	(8,19)	5
Exempl. 1 (H-10)				(6,13)	(8,19)	10
Exempl. 1 (H-20)				(4,6,8,13,20)	(5,8,13,19,24)	20
Exempl. 2 (H-05)	33	64	160	(6,20)	(8,24)	5
Exempl. 2 (H-10)				(6,20)	(8,24)	10
Exempl. 2 (H-20)				(4,6,8,13,20)	(5,8,13,19,24)	20
Exempl. 3 (H-05)	42	91	232	(6,20)	(8,24)	5
Exempl. 3 (H-10)				(6,20)	(8,24)	10
Exempl. 3 (H-20)				(4,6,8,13,20)	(5,8,13,19,24)	20

Tableau 5.2: Comparaison de la taille des exemplaires

	Modèle quadratique		Modèle linéarisé		Nombre de contraintes (4.16)	Nombre de contraintes(4.21)
	Nombre de variables	Nombre de contraintes	Nombre de variables	Nombre de contraintes		
Exempl. 1 (H-05)	30400	24720	65664	27632	1304	25920
Exempl. 1 (H-10)	30400	24720	65664	27632	1304	25920
Exempl. 1 (H-20)	38656	32976	129152	40016	1304	25920
Exempl. 2 (H-05)	10680	8295	27068	9443	389	8712
Exempl. 2 (H-10)	10680	8295	27068	9443	389	8712
Exempl. 2 (H-20)	13728	11343	48912	14015	389	8712
Exempl. 3 (H-05)	15888	12816	38312	14504	608	13032
Exempl. 3 (H-10)	15888	12816	38312	14504	608	13032
Exempl. 3 (H-20)	20448	17376	66864	21344	608	13032

Tableau 5.3: Résultats

	Modèle (5.1)-(5.19),(4.16), (4.21)			Modèle (5.21)- (5.35),(4.16), (4.21)		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 1 (H-05)	2237195.6	37.57	43200	2169201.8	0.0	387
Exempl. 1 (H-10)	3057789.5	42.86	43200	2977032.8	0.0	4445
Exempl. 1 (H-20)	?	?	43200	3966841.8	0.0	4117
Exempl. 2 (H-05)	994716.7	21.11	20650	983985	0.0	12257
Exempl. 2 (H-10)	1311036.1	26.46	13821	1298614.8	0.0	25
Exempl. 2 (H-20)	1824757.7	50.12	36976	1775457.6	0.0	26926
Exempl. 3 (H-05)	1862392.7	35.93	38451	?	?	3711
Exempl. 3 (H-10)	2525558.1	40.07	30373	2464301.9	0.0	5670
Exempl. 3 (H-20)	3750294.0	62.69	23491	3452628.8	0.31	13489

Tableau 5.4: Comparaison des sauts d'intégrité

	Modèle (5.1)-(5.19),(4.16), (4.21)		Modèle (5.21)- (5.35),(4.16), (4.21)	
	X	ΔX^* (%)	X	ΔX^* (%)
Exempl. 1 (H-05)	1141062.6	47.40	2113918.5	2.55
Exempl. 1 (H-10)	1449561.3	51.31	2917056.3	2.01
Exempl. 1 (H-20)	1327767.6	66.53	3916383.4	1.27
Exempl. 2 (H-05)	609959.6	38.01	960796.8	2.36
Exempl. 2 (H-10)	744635.7	42.66	1283341.1	1.18
Exempl. 2 (H-20)	749525.2	57.78	1745557.7	1.68
Exempl. 3 (H-05)	891510.3	50.25	1751742.5	2.25
Exempl. 3 (H-10)	1136594.4	53.88	2414901.3	2.0
Exempl. 3 (H-20)	1110112.3	70.40	3395886.4	9.45

Tableau 5.5: Résultats avec le modèle linéaire par morceaux et les inégalités valides

	Modèle (5.21)- (5.35),(4.16), (4.21) (5.37) et (5.38)			Modèle (5.21)- (5.35),(4.16), (4.21) (5.41) et (5.42)			Modèle (5.21)- (5.35),(4.16), (4.21) (5.37) , (5.38) , (5.41) et (5.42)		
	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)	Solution	Gap (%)	CPU (s)
Exempl. 1 (H-05)	2169201.8	0.0	945	2169201.8	0.0	458	2169201.8	0.0	391
Exempl. 1 (H-10)	2977032.8	0.0	612	2977032.8	0.0	1951	2977032.8	0.0	458
Exempl. 1 (H-20)	3966841.8	0.0	2570	3966841.8	0.0	2952	3966841.8	0.0	1127
Exempl. 2 (H-05)	983985	0.0	5419	983985	0.0	6580	983985	0.0	24914
Exempl. 2 (H-10)	1298614.8	0.0	32	1298614.8	0.0	5	1298614.8	0.0	27
Exempl. 2 (H-20)	1775457.6	0.0	39761	1775457.6	0.0	3557	1775457.6	0.0	31464
Exempl. 3 (H-05)	1792033.9	0.0	1716	1792033.9	0.0	1621	1792033.9	0.0	1629
Exempl. 3 (H-10)	2464301.9	0.0	1724	2464301.9	0.0	2948	2464301.9	0.0	1610
Exempl. 3 (H-20)	3452628.6	0.36	12998	?	?	3388	?	?	4271

valides (5.37), (5.38), (5.41) et (5.42) dans le programme linéaire par morceaux a généralement amélioré les temps de résolution des exemplaires. Plus précisément, ces inégalités n'ont pas permis de diminuer le saut d'intégrité qui est maintenu à une moyenne de près de 3% (nous avons obtenu les mêmes valeurs des relaxations continues qu'avec le modèle linéarisé, présentées dans tableau 5.4). Toutefois, de par leur présence, elles réduisent le nombre des sous-problèmes traités dans l'arbre de branchement, ceci contribue donc à réduire la taille de l'espace des solutions admissibles. Ainsi, nous pouvons dire que les inégalités valides ont un net intérêt sur la plupart des exemplaires, excepté pour l'exemplaire 3 (H-20) où le modèle linéarisé sans ces inégalités valides semble être plus efficace. En fait, nous constatons que l'ajout des inégalités valides contribue à la détérioration de l'écart entre la meilleure solution obtenue et la meilleure borne inférieure et sature vite la mémoire disponible sans même que CPLEX obtienne une première solution réalisable. Nous soulignons que lorsque nous parlons des inégalités (5.37), (5.38), (5.41) et (5.42), nous voulons dire leurs formes linéarisées.

Nous examinons maintenant de plus près ces résultats qui ont été réalisés sur trois étapes. Nous avons introduit en premier lieu les inégalités valides (5.37) et (5.38), en deuxième lieu les inégalités (5.41) et (5.42) et en dernier lieu les deux groupes d'inégalités valides. Les résultats sont dans la plupart des cas similaires, à l'exception des résultats pour l'exemplaire 2 (H-20) où l'ajout du deuxième groupe d'inégalités valides a permis de résoudre ce problème en moins d'une heure, alors que les temps de résolution dans les deux autres cas ont dépassé les 8 heures. Nous notons que dans tous les cas CPLEX trouve la solution optimale en quelques minutes. Prenons le cas de l'exemplaire 2 (H-20) : en incluant les inégalités (5.37) et (5.38) dans le modèle linéaire par morceaux, CPLEX trouve la solution optimale en deux minutes seulement et consacre le reste du temps (presque 10 heures) pour prouver l'optimalité de cette solution. La figure 5.3 illustre l'évolution de l'écart entre la borne inférieure et la meilleure solution obtenue dans le temps de résolution. Cette figure montre que CPLEX est capable de trouver des solutions réalisables (représentées dans la figure par des cercles en noir) ou même

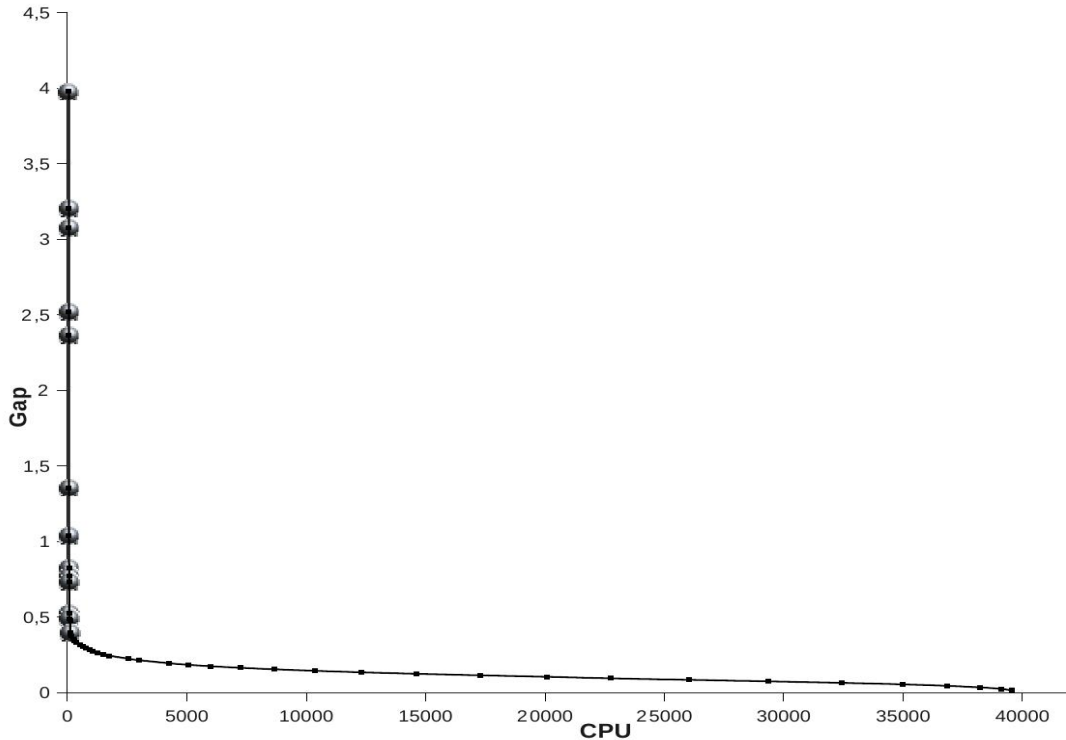


Figure 5.3: La représentation de l'écart entre la borne inférieure et la meilleure solution obtenue dans le temps de résolution

la solution optimale rapidement, mais il met beaucoup de temps pour prouver l'optimalité, bien que l'écart entre la solution « optimale » et la borne inférieure soit seulement de 0.4%.

Pour faire le point, nous pouvons dire que le modèle linéaire par morceaux incluant les inégalités valides et les contraintes supplémentaires a permis de résoudre 8 exemplaires sur 9. Mais en se basant seulement sur ces résultats, nous ne pouvons pas conclure qu'une combinaison d'inégalités valides est plus avantageuse qu'une autre : nous nous contentons de dire que l'ajout d'inégalités valides est nécessaire pour la résolution du problème de la collecte de l'énergie éolienne. Il est donc intéressant de développer une méthode de plans coupants permettant d'identifier des inégalités valides des formes (5.40) et (5.43) pour améliorer les temps de résolution des exemplaires fournis par notre partenaire industriel et pour garantir la résolution des exemplaires de plus grande taille.

Expériences sans les contraintes de non-bifurcation de flot

Selon notre partenaire industriel, les contraintes de non-bifurcation de flot ne devraient pas être nécessaires lorsqu'il y a plusieurs choix de capacités pour chaque lien. A priori, les coûts des liens selon leur capacité sont calculés de telle sorte qu'il n'est jamais avantageux de bifurquer le flot. Nous avons donc décidé de tester le modèle mathématique en éliminant les contraintes et les variables permettant d'éviter la bifurcation de flot. Comme les pertes ont un impact considérable sur le choix du type de capacité à installer sur un lien, nous avons choisi, tout d'abord, de tester une nouvelle formulation mathématique qui ne tient pas compte des pertes d'énergie. Dans cette formulation mathématique nous n'avons gardé que les contraintes (5.2)-(5.8). La fonction-objectif minimise simplement les coûts d'installation des capacités sur les liens du réseau électrique. L'avantage crucial que présente ce modèle réside dans le fait que nous avons beaucoup moins de variables et de contraintes et donc la résolution du problème devrait être nettement plus rapide. Cependant les expériences réalisées ont contredit les hypothèses faites par notre partenaire industriel. En fait, dans les solutions obtenues, nous avons souvent des structures qui contiennent un flot bifurqué. Dans ce cas, les concepteurs sont probablement capables de modifier manuellement les solutions proposées en choisissant un lien de capacité supérieure à celle des liens utilisés dans cette structure pour éviter la bifurcation de flot. Mais, il n'y a aucune garantie sur la qualité de cette nouvelle solution. De plus, nous soulignons que nous n'avons pas constaté un gain considérable de temps de résolution par rapport au modèle avec les contraintes de non-bifurcation de flot lorsque la fonction-objectif ne tient pas en compte des pertes.

Par ailleurs, nous avons également réalisé d'autres tests en utilisant un modèle mathématique qui tient compte des pertes d'énergie mais sans les contraintes de non-bifurcation de flot. Nous avons à nouveau constaté que la solution contient des structures qui contiennent du flot bifurqué. Mais, cette fois-ci, le temps de résolution est beaucoup plus rapide. Certes les solutions obtenues sont réparables manuellement par les concepteurs du réseau électrique, mais il n'y a aucune garantie sur la qualité des solutions modifiées ni le temps qu'il faut pour faire ces modifications. Nous rappelons que notre modèle linéaire par morceaux avec les quelques inégalités valides ajoutées est lui aussi capable de fournir des bonnes solutions en des temps de résolution courts, et nous avons en plus une garantie sur la qualité des solutions obtenues. En conclusion, nous pouvons affirmer que dans l'état actuel des choses les contraintes de non-bifurcation de flot sont effectivement nécessaires.

Notre objectif dans ce chapitre était de résoudre le problème de la collecte de l'énergie éolienne en permettant l'installation de plusieurs types de capacités sur les liens du réseau

électrique et en tenant compte des pertes d'énergie encourues lors du transfert de cette énergie. Nous avons d'abord présenté une formulation comme programme quadratique. Nous avons ensuite transformé ce programme quadratique en un programme linéaire par morceaux pour pouvoir bénéficier de la performance de CPLEX. Puis nous avons développé quelques inégalités valides pour améliorer la qualité des bornes inférieures issues des relaxations continues. Finalement, les résultats expérimentaux montrent la qualité de la formulation linéaire par morceaux proposée et des inégalités valides développées pour la résolution du problème.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Le monde est particulièrement vorace en énergie électrique : cet appétit a fait progresser le développement de la filière éolienne partout au monde, en particulier le développement de nouvelles technologies pour faciliter la construction des parcs éoliens. Pour la compagnie HATCH, disposer d'un outil efficace et rapide pour concevoir des réseaux de collecte d'énergie dans des vastes parcs éoliens est devenue capitale. L'objectif principal de cette thèse était de développer un outil qui répond aux attentes de notre partenaire industriel.

Plus précisément, nous nous sommes intéressés au problème de conception d'un réseau électrique pour collecter l'énergie produite par des éoliennes situées à différents endroits et l'acheminer vers une sous-station de transformation peu éloignée. Un tel réseau électrique est généralement étendu sur plusieurs kilomètres de câbles souterrains et de lignes de transmission aériennes. Dans le cadre de cette thèse, les liens potentiels pour construire ce réseau sont fournis par notre partenaire industriel. Sur chaque lien potentiel, il est possible d'installer un câble souterrain ou une ligne de transmission en choisissant la capacité nécessaire pour acheminer la totalité de l'énergie éolienne. Cependant, il faut s'assurer que l'énergie transmise sur un lien donné ne bifurque pas tout au long du chemin vers la sous-station. Cette contrainte de non-bifurcation ajoute beaucoup de complexité à notre problème.

Nous avons tout d'abord traité le problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne qui consiste à minimiser les coûts d'installation des câbles souterrains et des lignes de transmission. Dans ce cas, nous disposons d'un seul type de câble à utiliser sur les liens du réseau souterrain et d'un seul type de ligne de transmission à utiliser sur le réseau aérien. Le problème de décision dans ce cas était donc de choisir les liens nécessaires pour installer des câbles souterrains et des lignes de transmission pour collecter l'énergie produite par les éoliennes et l'acheminer vers une sous-station. Par ailleurs, nous avons proposé un modèle mathématique mixte en nombres entiers pour résoudre le problème en utilisant l'algorithme de séparation et évaluation progressive implémenté dans CPLEX. Il est connu que le comportement de ce genre d'algorithme dépend de la borne inférieure fournie à la racine de l'arbre de branchement, qui est la valeur de la relaxation continue du programme en question. En effet, plus la solution optimale (fractionnaire) de la relaxation continue est proche de la solution optimale entière, plus l'arbre de branchement est petit et plus la résolution du problème est

rapide. Motivés par cette idée nous avons tenté de renforcer le modèle proposé pour améliorer les bornes inférieures des relaxations continues en ajoutant des contraintes supplémentaires et des inégalités valides. Nous avons proposé dans cette thèse un algorithme de plans coupants basé sur la résolution d'un problème de flot maximum pour identifier des inégalités violées par des solutions fractionnaires. Ces inégalités valides ont été ajoutées itérativement à la racine de l'arbre de branchement. Les résultats expérimentaux ont confirmé l'hypothèse que l'ajout de plans coupants contribue énormément à l'efficacité d'un algorithme de séparation et évaluation progressive. Nous soulignons que notre partenaire industriel Hatch a commencé à utiliser les méthodes proposées.

Nous avons abordé ensuite un cas plus général du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne où il est possible de choisir les capacités à installer sur les liens potentiels du réseau électrique. Dans ce cas, nous avons le choix entre plusieurs types de câbles souterrains et plusieurs types de lignes de transmission pour construire le réseau électrique. Dans cette partie, nous avons aussi tenu compte des pertes engendrées lors du transfert de l'énergie dans le réseau électrique. Ces pertes d'énergie sont proportionnelles au carré de la quantité d'énergie qui circule dans le réseau électrique et dépendent des types des liens électriques utilisés. Il s'agit donc de minimiser les coûts d'installation des câbles et des lignes de transmission du réseau électrique et de minimiser aussi les coûts des pertes encourues lors du transfert de l'énergie produite par les éoliennes vers la sous-station de transformation. Par ailleurs, pour résoudre ce problème, nous avons proposé un premier modèle mathématique quadratique (fonction-objectif quadratique puisque les pertes sont non linéairement dépendantes des variables de flot). Pour remédier à sa nature non linéaire, nous avons transformé ce modèle quadratique en un modèle linéaire par morceaux. Nous avons aussi développé des inégalités valides. Les résultats expérimentaux ont une fois de plus montré l'impact des inégalités valides sur la performance de l'algorithme de séparation et évaluation progressive utilisé pour la résolution du problème.

Bien que nous ayons réussi à résoudre la majorité des exemples concrets fournis par le partenaire industriel, il y a encore beaucoup de travail à faire pour ce problème. En particulier, l'étude menée pour détecter des inégalités valides de la forme (4.25) pourrait être approfondie en développant des heuristiques permettant de trouver des choix pertinents de sous-ensembles composés d'éoliennes. Cette idée est susceptible d'améliorer la méthode de plans coupants proposée afin de résoudre des exemples plus difficiles en des temps raisonnables, notamment l'exemple qui est resté non résolu dans cette thèse. D'autres approches exactes et heuristiques sont également envisageables en se basant sur la relation entre le problème de la collecte de

l'énergie éolienne avec un seul type de capacité et le problème de l'arbre de Steiner présenté dans cette thèse. Par ailleurs, une autre idée qui mérite d'être explorée est de pousser nos recherches pour améliorer le modèle mathématique basée sur la répartition des éoliennes en groupes. Nous rappelons que ce dernier modèle apporte un nombre considérable de variables et de contraintes. Une alternative serait alors d'ajouter certaines variables et contraintes dynamiquement dans le modèle mathématique en utilisant la méthode de génération de colonnes.

Il serait également intéressant d'élaborer des algorithmes de séparation pour identifier des inégalités valides des formes (5.40) et (5.43) développées dans le chapitre traitant la version du problème de conception d'un réseau de collecte d'énergie éolienne avec plusieurs types de capacités. Nous attendons à ce que de tels efforts permettent d'améliorer les temps de résolution des applications réelles.

RÉFÉRENCES

- AHUJA, R. K., MAGNANTI, T. L. et ORLIN, J. B. (1993). *Network flows : theory, algorithms, and applications*.
- ATAMTÜRK, A. (2002). On capacitated network design cutset polyhedra. *Mathematical Programming*, 92, 425–437.
- ATAMTÜRK, A. et RAJAN, D. (2002). On splittable and unsplittable flow capacitated network design arc-set polyhedra. *Mathematical Programming*, 92, 315–333.
- BARAHONA, F. (1996). Network design using cut inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, 6, 823–837.
- BARTOLINI, E. et MINGOZZI, A. (2008). Algorithms for the non-bifurcated network design problem. *Journal of Heuristics*, 15, 259–281.
- BEASLEY, J. E. (1989). An SST-based algorithm for the Steiner problem in graphs. *Networks*, 19, 1–16.
- BERGER, D., GENDRON, B., POTVIN, J. Y., RAGHAVAN, S. et SORIANO, P. (2000). Tabu search for a network loading problem with multiple facilities. *Journal of Heuristics*, 6, 253–267.
- BERZAN, C., VEERAMACHANENI, K., MCDERMOTT, J. et O'REILLY, U. (2011). Algorithms for cable network design on large-scale wind farms. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology.
- BIENSTOCK, D., CHOPRA, R., GÜNLÜK, O. et TSAI, C. (1998). Minimum cost capacity installation for multicommodity network flows. *Mathematical Programming*, 81, 177–199.
- BROCKMÜLLER, B., GÜNLÜK, O. et WOLSEY, L. (1998). Designing private line networks polyhedral analysis and computation. Rapport technique, Center for Operations Research and Econometrics, Université Catholique de Louvain.
- CAMM, E., BEHNKE, M., BOLADO, O., BOLLEN, M., BRADT, M., BROOKS, C., DILLING, W., EDDS, M., HEJDAK, W., HOUSEMAN, D., KLEIN, S., LI, F., LI, J., MAIBACH, P., NICOLAI, T., PATINO, J., PASUPULATI, S., SAMAN, N., SAYLORS, S., SIEBERT, T., SMITH, T., STARKE, M. et WALLING, R. (2009). Wind power plant collector system design considerations : IEEE PES wind plant collector system design working group. 1–7.
- CHARDY, M., COSTA, M.-C., FAYE, A. et TRAMPONT, M. (2012). Optimizing splitter and fiber location in a multilevel optical FTTH network. *European Journal of Operational Research*, 222, 430–440.

- CHOPRA, S., GORRES, E. R. et RAO, M. R. (1992). Solving the Steiner tree problem on a graph using branch and cut. *ORSA Journal on Computing*, 4, 320–335.
- CHOPRA, S. et RAO, M. R. (1994). The Steiner tree problem I : formulations, compositions and extension of facets. *Mathematical Programming*, 674, 209–229.
- CHOUMAN, M. et CRAINIC, T. (2010). A mip-tabu search hybrid framework for multi-commodity capacitated fixed-charge network design. Rapport technique, CIRRELT-2010-31, Centre interuniversitaire de recherche sur les réseaux d'entreprise, la logistique et le transport (CIRRELT).
- CHOUMAN, M., CRAINIC, T. et GENDRON, B. (2011). A cutting-plane algorithm for multicommodity capacitated fixed-charge network design. Rapport technique, CIRRELT-2009-20, Centre interuniversitaire de recherche sur les réseaux d'entreprise, la logistique et le transport (CIRRELT).
- COSTA, A., CORDEAU, J. et GENDRON, B. (2009). Benders, metric and cutset inequalities for multicommodity capacitated network design. *Computational Optimization and Applications*, 42, 371–392.
- CRAINIC, T. G. et GENDREAU, M. (2002). Cooperative parallel tabu search for capacitated network design. *Journal of Heuristics*, 8, 601–6027.
- CRAINIC, T. G., GENDREAU, M. et FARVOLDEN, J. M. (2000). A simplex-based tabu search method for capacitated network design. *INFORMS Journal on Computing*, 12, 223–236.
- DUTTA, S. et OVERBYE, T. J. (2011). A clustering based wind farm collector system cable layout design. 1–6.
- EMAMI, A. et NOGHREH, P. (2010). New approach on optimization in placement of wind turbines within wind farm by genetic algorithms. *Renewable Energy*, 35, 1559–1564.
- ESBENSEN, H. (1995). Computing near-optimal solutions to the Steiner problem in a graph using a Genetic algorithm. *Networks*, 26, 173–185.
- FAGERFJÄLL, P. (2010). *Optimizing wind farm layout - more bang for the buck using mixed integer linear programming*. Mémoire de maîtrise, Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and Gothenburg University, Göteborg, Sweden.
- GAREY, M. R. et JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and intractability : a guide to the theory of NP-Completeness*.
- GENDREAU, M., LAROCHELLE, J. F. et SANSÓ, B. (1999). A Tabu Search heuristic for the Steiner tree problem. *Networks*, 34, 162–172.

- GENDRON, B., CRAINIC, T. et FRANGIONI, A. (1998). *Multicommodity capacitated network design*. Telecommunications Network Planning, Norwell, MA : Kluwer.
- GENDRON, B., POTVIN, J. Y. et SORIANO, P. (2002). Diversification strategies in local search for a nonbifurcated network loading problem. *European Journal of Operational Research*, 142, 231–241.
- GHAMLOUCHE, I., CRAINIC, T. G. et GENDREAU, M. (2003). Cycle-based neighborhoods for fixed-charge capacitated multicommodity network design. *Operations Research*, 51, 665–667.
- GOEMANS, M. et MYUNG, Y. (1993). A catalog of Steiner tree formulations. *Networks*, 23, 19–28.
- HEWITT, M., NEMHAUSER, G. L. et SAVELSBERGH, M. W. P. (2010). Combining exact and heuristic approaches for the capacitated fixed-charge network flow problem. *INFORMS Journal on Computing*, 22, 314–325.
- HOLMBERG, K. et YUAN, D. (2000). A lagrangean heuristic based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Research*, 48, 461–481.
- KHOURY, B. N. et PARDALOS, P. M. (1996). A heuristic for the Steiner problem in graphs. *Computational Optimization and Applications*, 6, 5–14.
- KLIEWER, G. et TIMAJEV, L. (2005). Relax-and-Cut for capacitated network design. *Lecture Notes in Computer Science*, 3669, 47–58.
- LJUBIĆ, I., PUTZ, P. et SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. (2012). Exact approaches to the single-source network loading problem. *Networks*, 59, 89–106.
- LUCENA, A. et BEASLEY, J. E. (1998). A branch and cut algorithm for the Steiner problem in graphs. *Networks*, 31, 39–59.
- MAGNANTI, T. L., MIRCHANDANI, P. et VACHANI, R. (1993). The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, 60, 233–250.
- MAGNANTI, T. L., MIRCHANDANI, P. et VACHANI, R. (1995). Modeling and solving the two-facility capacitated network loading problem. *Operations Research*, 43, 142–157.
- MAGNANTI, T. L. et WONG, R. T. (1984). Network design and transportation planning : models and algorithms. *Transportation Science*, 18, 1–55.
- MARTINS, S. L., RESENDE, M. G. C. et RIBEIRO, C. C. (2000). A parallel GRASP for the Steiner tree problem in graphs using a hybrid local search strategy. *Journal of Global Optimization*, 17, 267–283.
- MCWILLIAM, M., VAN KOOTEN, G. et CRAWFORD, C. (2012). A method for optimizing the location of wind farms. *Renewable Energy*, 48, 287–299.

- MINOUX, M. (1989). Network synthesis and optimum network design problems : models, solution methods and applications. *Networks*, 19, 313–360.
- RIBEIRO, C. C. et SOUZA, M. C. D. (2000). Tabu Search for the Steiner Problem in Graphs. *Networks*, 36, 138–146.
- RODRÍGUEZ-MARTÍN, I. et SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. (2010). A local branching heuristic for the capacitated fixed-charge network design problem. *Computers & Operations Research*, 37, 575–581.
- SALMAN, F., RAVI, R. et HOOKER, J. (2008). Solving the capacitated local access network design problem. *INFORMS Journal on Computing*, 20, 243–254.
- SALMAN, F. S., CHERIYAN, J., RAVI, R. et SUBRAMANIAN, S. (1997). Buy-at-Bulk network design : approximating the single-sink edge installation problem. *Proceedings of the 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*.
- SALMAN, F. S., CHERIYAN, J., RAVI, R. et SUBRAMANIAN, S. (2000). Approximating the Single-Sink Link Installation Problem in Network Design. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 595–610.
- SÉGUIN-CHARBONNEAU, L. (2009). *Confluent, bifurcated and unsplittable flows*. Mémoire de maîtrise, McGill University.
- VAN HOESEL, S. P. M., KOSTER, A. M. C. A., VAN DE LEENSEL, R. L. M. J. et SAVELSBERGH, M. W. P. (2002). Polyhedral results for the edge capacity polytope. *Mathematical Programming*, 92, 335–358.
- VEERAMACHANENI, K., WAGNER, M., O'REILLY, U.-M. et NEUMANN, F. (2012). Optimizing energy output and layout costs for large wind farms using particle swarm optimization. *Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on*.
- VOß, S. et GUTENSCHWAGER, K. (1998). A chunking based Genetic algorithm for the Steiner tree problem in graphs. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 40, 335–355.
- WAN, C., WANG, J., YANG, G., GU, H. et ZHANG, X. (2012). Wind farm micro-siting by gaussian particle swarm optimization with local search strategy. *Renewable Energy*, 48, 276–286.
- WOLSEY, L. A. (1998). *Integer programming*. Wiley.
- WONG, R. T. (1984). A dual ascent approach for Steiner tree problems on a directed graph. *Mathematical Programming*, 28, 271–287.