

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ANALYTIQUE POUR L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE  
EN RÉGIME TRANSITOIRE D'UNE PLAQUE AVEC TAMPON AMORTISSANT  
CONTRAINTE

BOUBAKER KHALFI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AOÛT 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

MODÉLISATION ANALYTIQUE POUR L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE  
EN RÉGIME TRANSITOIRE D'UNE PLAQUE AVEC TAMPON AMORTISSANT  
CONTRAIT

présentée par : BOUBAKER Khalfi

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

Mme ROSS Annie, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. PETTIGREW Michel, post.grad.dip., membre

M. LAVILLE Frédéric, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

D'abord,

La grande reconnaissance et le grand remerciement à Dieu Seigneur de l'univers.

Ensuite, je tiens à remercier ma directrice, Mme Annie Ross qui a cru à mon potentiel, et m'a accordé l'occasion, le support moral et matériel pour effectuer ce travail.

Je remercie également le président et les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

De même, je tiens à remercier les membres du groupe CREPEC pour le temps accordé et les conseils et discussions que j'avais l'occasion d'entretenir avec eux. Je remercie également l'IRSST pour son support financier, les ingénieurs et techniciens du département mécanique appliquée pour leur support durant les essais expérimentaux.

J'aimerais aussi remercier Dr. Riyad Kechroud pour le support technique et moral qui m'a été accordé durant nos longues discussions.

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance à ma femme, sans qui ce travail n'aurait pas connu le succès.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou du loin à réaliser ce travail.

## RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objectif de développer un modèle analytique permettant l'étude d'un sandwich viscoélastique sous l'effet d'un impact. Le sandwich étudié est constitué d'une plaque rectangulaire avec un tampon amortissant viscoélastique partiel (ensemble d'une plaque rigide et une couche viscoélastique). Cette étude englobe la qualification vibratoire du sandwich (fréquences et modes propres), la performance d'amortissement (le coefficient de perte), la caractérisation du bruit généré et la propagation des ondes dans la plaque. Le modèle offre la flexibilité de faire varier les caractéristiques géométriques et physiques des différentes couches et d'en étudier l'influence sur les grandeurs susmentionnées.

Le modèle est basé sur l'application des équations de Lagrange, qui permettent d'obtenir l'équation du mouvement. Le module de cisaillement de la couche viscoélastique est fonction de la fréquence; il est représenté par une série de Prony. La force d'impact est représentée par la relation théorique de Heitkämper. Deux méthodes de résolution ont été adoptées pour obtenir le déplacement transitoire transversal du sandwich viscoélastique en fonction du temps. La première méthode consiste à résoudre l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel en la transformant à l'aide de la transformée rapide de Fourier, pour ensuite utiliser la transformée inverse rapide de Fourier afin d'obtenir le déplacement dans le domaine temporel. La seconde méthode consiste à résoudre l'équation directement dans le domaine temporel avec la méthode itérative de Newmark & Wilson. Une fois le déplacement obtenu, la pression acoustique est calculée avec l'intégrale de Rayleigh.

Le modèle est validé à différentes étapes. Deux validations avec la littérature sont réalisées en régime permanent avec les fréquences propres et les facteurs de pertes ; la première pour une couverture totale alors que la seconde avec une couverture partielle. D'autre part, un montage expérimental a été réalisé afin d'enregistrer le déplacement transversal instantané d'un point du sandwich sous l'effet d'un impact : les courbes mesurées ont été comparées à celle fournie par le modèle en régime transitoire, une bonne précision est obtenue dans les deux cas. En régime permanent la précision est de l'ordre de 0.3% sur les fréquences naturelles et 1% sur les facteurs de perte, en régime transitoire, le modèle a pu suivre le mouvement instantané du sandwich avec une différence mineure avec le résultat expérimental.

Le modèle a prouvé son efficacité dans l'étude des effets du tampon sur la réponse du sandwich avec ses différentes composantes, en particulier :

- le design du tampon, en effet, le modèle permet de définir les variables du tampon répondant aux exigences du concepteur ;
- la définition des zones de la plaque favorisant le maximum d'amortissement, ces zones sont liées au mode de déformation en question et se situent aux voisinages des coins, sur les crêtes modales et à côté des bords centraux de la plaques;
- la prédiction de la réponse transitoire non seulement en termes de déplacement et de pression acoustique, mais aussi en termes de propagation d'onde transversale, en effet, pour un impact donné et pour tout point de la plaque, il est possible de visualiser le déplacement en fonction du temps ou en fonction de l'une des dimensions du sandwich et de quantifier la pression acoustique générée.

Le modèle a permis de préparer trois articles de journaux. L'objectif du premier article est d'exposer le modèle et le valider dans les deux régimes (permanent et transitoire). Dans le deuxième article, on a étudié l'influence des caractéristiques géométriques du tampon sur l'amortissement du sandwich et sur la pression acoustique générée sous l'effet d'un impact. Dans le dernier article, on a étudié l'influence du tampon sur la propagation de l'onde de flexion dans la plaque.

## ABSTRACT

This thesis aims at developing an analytical model for the study of a viscoelastic sandwich under the effect of an impact. The sandwich consists of a rectangular plate with a PCLD (Partial Constrained Layer Damping). This study includes the characterization of the vibration behaviour of the sandwich (frequencies and mode shapes), the damping performance (loss factors), and the characterization of radiated noise and wave propagation in the plate. The model provides the flexibility to vary the geometric and physical characteristics of the different layers and to study their influences on the aforementioned values.

The model is based on the application of Lagrange's equations, which yield the equation of motion. The shear modulus of the viscoelastic layer is a function of frequency, and is represented by Prony series. The impact is represented by Heitkämper's theoretical relation. Two methods of resolution were adopted for the transverse displacement of the viscoelastic sandwich. In the first method, the equation of motion is converted into the frequency domain using Fast Fourier Transform (FFT). Once solved, the transverse displacement obtained in the frequency domain is converted to the time domain with the Inverse Fast Fourier Transform (IFFT). The second method consists of solving the equation directly in the time domain with the Newmark and Wilson iterative method. Once the displacement is obtained, the acoustic pressure is calculated with Rayleigh's integral.

The model is validated at different stages. The first validation is performed in harmonic response by comparing natural frequencies and loss factors with literature, both for full coverage and partial coverage. Moreover, an experimental setup was made to measure the transverse displacement of the sandwich due to an impact : these results were used for the second validation in transient response. In both cases, good accuracy is obtained. In harmonic response, the accuracy is around 0.3% on natural frequencies and 0.2% on loss factors. In transient response, the simulations provided the instantaneous motion of the sandwich with a minor difference with experimental results.

The model has proved its efficiency for the study of sandwiches with PCLD, in particular :

- the design of the PCLD – the model can be used to quantify the PCLD parameters to meet the requirements of the designer;

- defining areas of plate to promote maximum damping, these areas are related to the deformation mode, and are located in the vicinities of the corners, on the modal crests, and near plate central edges ;
- predicting the transient response not only in terms of displacement and sound pressure, but also in terms of transverse wave propagation, in fact, for a given impact and for any point of the plate, displacement can be visualized with respect to time and space, and the sound pressure generated can be quantified.

The model was used to prepare three papers. The objective of the first article is to explain and validate the model in both regimes (permanent and transient). The second article discusses the influence of geometric characteristics of the PCLD on the damping of the sandwich and on the acoustic pressure generated due to an impact. In the last article we studied the influence of PCLD on the bending wave propagation in the plate.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	III
RÉSUMÉ .....	IV
ABSTRACT .....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VIII
LISTE DES TABLEAUX.....	XII
LISTE DES FIGURES.....	XIII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVI
LISTE DES ANNEXES.....	XX
INTRODUCTION .....	1
Organisation de la thèse .....	3
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE .....	4
1.1 Modélisation analytique des sandwiches .....	4
1.1.1 Élément idéalisé et hypothèses simplificatrices .....	4
1.1.2 Expression du déplacement.....	6
1.1.3 Techniques d’obtention de l’équation du mouvement .....	7
1.1.4 Performance d’un sandwich .....	9
1.2 Amortissements.....	9
1.2.1 Type d’amortissements.....	9
1.2.2 Modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques .....	10
1.3 Modélisation des impacts.....	15
1.4 Régime harmonique .....	17
1.5 Régime transitoire.....	19
1.5.1 Résolution dans le domaine fréquentiel .....	19



1.5.2	Résolution dans le domaine temporel.....	21
1.6	Optimisation et étude paramétrique .....	23
1.6.1	Modèles courants.....	23
1.6.2	Optimisation du tampon .....	24
1.7	Onde de flexion et pression acoustique sous l'effet d'un impact .....	25
1.7.1	Base théorique de l'acoustique des plaques .....	25
1.7.2	Études réalisées .....	30
CHAPITRE 2	DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DE LA THÈSE.....	32
CHAPITRE 3	ARTICLE 1 : TRANSIENT RESPONSE OF A PLATE WITH PARTIAL CONSTRAINED VISCOELASTIC LAYER DAMPING .....	36
3.1	Introduction.....	37
3.2	Model .....	39
3.2.1	Geometry and displacement .....	39
3.2.2	Energies .....	40
3.2.3	Displacements.....	42
3.2.4	Viscoelastic behaviour.....	43
3.2.5	Governing equation .....	44
3.2.6	Impact modelling.....	45
3.2.7	Transient response.....	45
3.3	Validation.....	46
3.3.1	Harmonic response .....	46
3.3.2	Transient response .....	50
3.4	Response of the sandwich and discussion .....	54
3.5	Conclusion .....	57

CHAPITRE 4	ARTICLE 2 : INFLUENCE OF THE CHARACTERISTICS OF PCLD ON THE DAMPING AND ACOUSTIC PRESSURE RADIATED BY AN IMPACTED PLATE	59
4.1	Introduction.....	60
4.2	Model .....	61
4.3	Validation.....	65
4.4	Results and discussion .....	66
4.4.1	Harmonic response .....	66
4.4.2	Transient response .....	79
4.5	Conclusion .....	89
CHAPITRE 5	ARTICLE 3 : INFLUENCE OF PARTIAL CONSTRAINED LAYER DAMPING ON THE WAVE PROPAGATION IN AN IMPACTED VISCOELASTIC SANDWICH	91
5.1	Introduction.....	92
5.2	Model .....	94
5.3	Analysis and discussion .....	96
5.4	Plate without PCLD .....	97
5.4.1	Wave propagation in the plate.....	97
5.4.2	Influence of boundary conditions.....	100
5.4.3	Influence of impact position.....	105
5.5	Plate with PCLD .....	107
5.5.1	Influence of PCLD .....	107
5.5.2	Influence of PCLD thickness.....	109
5.5.3	Influence of PCLD position.....	112
5.6	Conclusion .....	115

CHAPITRE 6	DISCUSSION GÉNÉRALE .....	116
6.1	Hypothèses adoptées pour l'élaboration du modèle .....	116
6.2	Calcul de la pression acoustique .....	117
6.3	Comportement viscoélastique.....	117
6.4	Modélisation de la force d'impact .....	118
6.5	Source d'erreur.....	118
6.6	Cohérence de la réponse dans les régimes harmonique et transitoire.....	118
6.7	Mode du corps rigide .....	119
6.8	Linéarité de la réponse en termes de facteur de perte .....	120
6.9	Limite du modèle .....	120
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS	.....	121
BIBLIOGRAPHIE	.....	125
ANNEXES	.....	131

**LISTE DES TABLEAUX**

Table 3.1 :	Model validation .....	49
Table 4.1 :	Model validation .....	65
Table 4.2 :	Mechanical properties & number of modes .....	66
Table 4.3 :	Values used for patch position simulation .....	71
Table 4.5 :	Values used in transient response.....	79
Table 4.6 :	Logarithmic decrement for three ratios of $h_c/h_b$ .....	81
Table 5.1 :	Mechanical properties and number of modes .....	97
Table 5.2 :	Values used for patch position simulations.....	107

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Élément typique de couche viscoélastique contrainte .....	5
Figure 1.2 : Déformation de la couche viscoélastique : cas de couche non contrainte [30] .....	11
Figure 1.3 : Déformation de la couche viscoélastique : cas de couche contrainte [30] .....	11
Figure 1.4 : Variation du facteur d'amortissement en fonction de la fréquence [34] .....	13
Figure 1.5 : Variation du facteur d'amortissement en fonction du nombre de termes.....	14
Figure 1.6 : Procédure itérative de résolution de l'équation (1.25) [7].....	18
Figure 1.7 : Algorithme de la méthode de Newmark-Wilson .....	22
Figure 1.8 : Système de coordonnées pour le calcul de la pression acoustique [59] .....	30
Figure 3.1 : Simply supported sandwich plate .....	39
Figure 3.2 : Displacements and rotations in a sandwich plate .....	39
Figure 3.3 : Loss factor variation : .....	49
Figure 3.4 : Shear modulus variation : .....	50
Figure 3.6 : Comparison between model and experimental spectrum .....	52
Figure 3.7 : Comparison between theoretical and experimental data .....	53
Figure 3.8 : Displacement at $x=x_b/2; y=y_b/2, x_f=x_b/2; y_f=y_b/2$ .....	54
Figure 3.9 : Displacement at $x=x_b/4; y=y_b/2, x_f=x_b/2; y_f=y_b/2$ .....	55
Figure 3.10 : Displacement at $x=x_b/8; y=y_b/2, x_f=x_b/2; y_f=y_b/2$ .....	55
Figure 3.11 : Superposed displacement of the previous figures .....	56
Figure 3.12 : Transversal displacement in plate section at $y = y_b / 2$ .....	57
Figure 4.1 : Simply supported sandwich plate .....	62
Figure 4.2 : Coordinate system for the acoustic pressure calculation [67] .....	64
Figure 4.3 : Patch positions [57] .....	65
Figure 4.4 : Dimensions of sandwich studied .....	66

Figure 4.5 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio $h_v/h_c$ ,.....	67
Figure 4.6 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio $h_v/h_b$ .....	67
Figure 4.7 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio $h_c/h_b$ .....	68
Figure 4.8 : Variation of loss factor as function of thickness ratio $h_c/h_b$ , .....	68
Figure 4.9 : Variation of loss factor as function of thickness ratio $h_v/h_b$ .....	69
Figure 4.10 : Variation of loss factor as function of thickness ratio $h_v/h_c$ ,.....	70
Figure 4.11 : Configuration studied for the position of the patch .....	71
Figure 4.12 : Variation of loss factor along the plate for mode (1,1).....	72
Figure 4.13 : Variation of loss factor along the plate for mode (2,1).....	73
Figure 4.14 : a) sandwiches studied, b) mode shapes .....	75
Figure 4.15 : Shear angle variation against deformation mode.....	76
Figure 4.16 : Shear angle variation in the patch used in figure 14 (mode (1,1)) .....	76
Figure 4.17 : Frequencies variation.....	77
Figure 4.18 : Loss factors variation.....	78
Figure 4.19 : Patches positions and sizes .....	79
Figure 4.20 : Displacements for 3 thickness ratio of $h_v/h_c$ .....	80
Figure 4.21 : Displacements for 3 thickness ratio of $h_v/h_b$ ,.....	81
Figure 4.22 : Displacements for 3 thickness ratio of $h_c/h_b$ ,.....	82
Figure 4.23 : Acoustic pressure for 3 thickness ratios of $h_v/h_c$ ,.....	82
Figure 4.24 : Acoustic pressure for 3 thickness ratio of $h_v/h_b$ , .....	83
Figure 4.25 : Acoustic pressure for 3 thickness ratio of $h_c/h_b$ ,.....	84
Figure 4.26 : Displacements under different level of coverage .....	85
Figure 4.27 : Spectrum of different level of coverage .....	85
Figure 4.29 : Comparison between mass effect & viscoelastic effect .....	87

Figure 4.30 : Displacement spectrum.....	88
Figure 4.31 : Acoustic pressure for $y=y_b/10$ , $h_b=0.79\text{mm}$ , $h_c=0.79\text{mm}$ , $h_v=0.127\text{mm}$ .....	89
Figure 5.1 : Simply supported sandwich plate .....	94
Figure 5.2 : Sandwich sections.....	97
Figure 5.3 : Simply supported plate, transversal displacement in section A-A .....	98
Figure 5.5 : 3D Plate deformation at contact time .....	99
Figure 5.6 : Transversal displacement section at $y=y_b/2$ .....	100
Figure 5.7 : Transversal displacement in section A-A : .....	101
Figure 5.8 : Close-up view of figure 5.7 .....	102
Figure 5.9 : Transversal displacement in section A-A after end-of-contact : .....	102
Figure 5.10 : Transverse velocities : .....	103
Figure 5.11 : Transversal displacement in section A-A : free edge plate (FFFF).....	104
Figure 5.12 : Transversal displacement in section A-A for SSSS condition .....	105
Figure 5.13 : 2D Plate deformation at end-of-contact time.....	106
Figure 5.14 : Comparison between plate with and without PCLD .....	108
Figure 5.15 : Comparison between plate with and without PCLD .....	108
Figure 5.16 : Transversal displacement in section A-A for thickness ratio $h_v/h_b=0.1$ .....	110
Figure 5.17 : Transversal displacement in section A-A : ratio $h_v/h_c=0.1$ .....	111
Figure 5.18 : Transversal displacement in section A-A : ratio $h_c/h_b=1$ .....	111
Figure 5.19 : Transversal displacement in section A-A : ratio $h_c/h_b=5$ .....	112
Figure 5.20 : Transversal displacement in section A-A : influence of PCLD position.....	112
Figure 5.21 : Zoomed area from figure 5.20 .....	113
Figure 5.22 : Transversal displacement in section A-A : influence of CP thickness .....	114

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Acronymes :

EDM	Équation du mouvement
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FT	<i>Fourier Transform</i>
GHM	<i>(Golla, Hughes and McTavish)</i>
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>
<i>Im</i>	Partie imaginaire
LT	<i>Laplace Transform</i>
PCLD	<i>Partial Constrained Layer Damping</i>
<i>Re</i>	Partie réelle
VL	<i>Viscoelastic Layer</i>

### Variables :

<i>B</i>	Rigidité de flexion (N.m)
<i>C</i>	Matrice d'amortissement (N.s/m)
<i>D</i>	Rigidité de flexion (N.m)
<i>E</i>	Énergie de déformation du sandwich (J)
<i>E<sub>i</sub></i>	Module d'élasticité de la couche d'indice <i>i</i> (MPa)
<i>F(t)</i>	Force d'impact (N)
<i>F<sub>0</sub></i>	Amplitude de la force d'impact (N)
<i>G</i>	Module de cisaillement (MPa) / fonction de Green (m <sup>-1</sup> )
<i>H</i>	Fonction de Heaviside
<i>K</i>	Énergie cinétique du sandwich (J)/ Matrice de rigidité (N.m)
<i>K<sub>m</sub></i>	Rigidité de membrane (N.m)



$L$	Lagrangien (J)
$M$	Matrice de masse (Kg)
$P$	Travaux virtuels (J)
$S$	Fonction de dissipation de Rayleigh (N.s/m)
$T_0$	Temps de contact (s)
$U$	Énergie totale du sandwich (J)
$U_i$	Coordonnée généralisée du déplacement suivant $x$ de la couche d'indice $i$ (m)
$V_i$	Coordonnée généralisée du déplacement suivant $y$ de la couche d'indice $i$ (m)
$X$	Vecteur de déplacement (m)
$V$	Volume de la couche (m)
$W$	Coordonnée généralisée du déplacement transversal (suivant $z$ ) (m)
$C_o$	Vitesse du son dans l'air (m/s)
$n_i$	Nombre de modes dans la direction longitudinale de la couche d'indice $i$
$n_w$	Nombre de modes dans la direction transversale
$m$	Indice du mode de vibration suivant la direction $x$
$n$	Indice du mode de vibration suivant la direction $y$
$h_i$	Épaisseur de la couche d'indice $i$ (m)
$u_i$	Déplacement longitudinal suivant l'axe $x$ de la couche d'indice $i$ (m)
$v_i$	Déplacement longitudinal suivant l'axe $y$ de la couche d'indice $i$ (m)
$f_c$	Fréquence critique (Hz)
$g_n$	Constantes de la série de Prony (s)
$k$	Nombre d'ondes ( $m^{-1}$ )

$j$	$= \sqrt{-1}$
$p$	Pression acoustique (Pa)
$v_g$	Vitesse de groupe (m/s)
$v_\varphi$	Vitesse de phase (m/s)
$(x_f, y_f)$	Coordonnées du point d'impact (m)
$w$	Déplacement transversal du sandwich (m)
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\sigma_i$	Contrainte suivant la direction $i$ (MPa)
$\varepsilon_i$	Déformation suivant la direction $i$ (MPa)
$\rho_i$	Densité de la couche d'indice $i$ (Kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_0$	Densité de l'air (Kg/m <sup>3</sup> )
$\tau_n$	Temps de relaxation (s)
$\tau$	Temps de contact (s)
$\omega$	Pulsation (rd/s)
$\gamma_x$	Angle de cisaillement dans le plan $zx$ (rd)
$\gamma_y$	Angle de cisaillement dans le plan $zy$ (rd)
$\delta$	Fonction de Dirac
$\Lambda$	Paramètre d'impact
$\nabla$	Opérateur laplacien
$\lambda$	Valeur propre / longueur d'onde (m)
$\eta$	Coefficient de perte
$\Gamma$	Fonction admissible du déplacement suivant $x$ de la plaque de base

$\Psi$	Fonction admissible du déplacement suivant $y$ de la plaque de base
$\Omega$	Fonction admissible du déplacement suivant $x$ de la plaque de contrainte
$\Pi$	Fonction admissible du déplacement suivant $y$ de la plaque de contrainte
$\Phi$	Fonction admissible du déplacement transversal
$\mathfrak{F}$	Opérateur de Fourier
$x, y, z$	Axes du repère orthonormé

Indices :

$b$	Indice relatif à la plaque de base
$c$	Indice relatif à la plaque de contrainte
$f$	Indice relatif à la position de frappe
$i$	Indice de la couche dans le sandwich
$v$	Indice relatif à la couche viscoélastique

## LISTE DES ANNEXES

Annexes : Développement de l'équation du mouvement.....	131
Annexe A.1 : Calcul de l'angle.....	131
Annexe A.2 : Calcul de l'énergie.....	133

## INTRODUCTION

Les plaques sont des structures fondamentales dans les industries aérospatiale, maritime, civile et automobile. Cette importance découle des qualités qu'elles fournissent au concepteur pour répondre aux exigences du cahier des charges : légèreté, bonne résistance en tension, et bonne rigidité sont quelques qualités des plaques. Cependant, certains phénomènes gênants sont associés au processus de fabrication ou sont présents lors de l'exploitation. Ces phénomènes sont essentiellement liés à la vibration des plaques. Cette vibration peut mener à la rupture de la structure lorsqu'il s'agit de charges répétées ou à la génération de bruit élevé lorsque la plaque vibre ou reçoit un impact. Cet impact, qui provient surtout des processus de fabrication et d'assemblage des structures (poinçonnage, rivetage), représente non seulement un inconfort pour les ouvriers, mais aussi une menace sérieuse pour leur santé. Une personne exposée pendant une longue période à ces impacts peut subir une perte de ses facultés auditives. De plus, le bruit affecte la qualité du milieu du travail i.e : manque de concentration, mauvaise communication, baisse du rendement etc. Tout ceci demande qu'on pousse la recherche afin de comprendre le bruit d'impact pour pouvoir le contrôler.

Même si les recherches dans le domaine des vibrations des plaques sont abondantes, il reste beaucoup de travail à accomplir pour comprendre les processus associés aux phénomènes transitoires et présenter de nouvelles techniques d'amortissement qui permettent à la fois de sécuriser la structure et réduire le bruit généré. Parmi les techniques dites de *traitement à la source*, on trouve le traitement partiel par couche viscoélastique (*PLD : Partial Layer Damping*). Dans cette technique, une couche viscoélastique est collée sur la plaque afin d'absorber et dissiper une partie de l'énergie reçue. Cette technique devient plus efficace lorsqu'on vient prendre la couche viscoélastique en *sandwich* par une plaque de contrainte, afin de la forcer à travailler en cisaillement; dans ce cas, on parle de traitement partiel par couche viscoélastique contrainte (*PCLD : Partial Constrained Layer Damping*).

La technique de *PCLD* a été largement étudiée surtout pour les cas des poutres. Certains auteurs ont traité des plaques, mais ces études se sont limitées à un seul aspect (i.e. régime permanent, sans le régime transitoire; un seul type de conditions aux limites, généralement le cas simplement supporté,...). Citons à titre d'exemples Cai [1] pour le cas des poutres et Gang [2] pour le cas des

plaques en régime permanent. Granger [3] a poussé l'étude pour le cas des poutres en régime transitoire.

Plusieurs points de la problématique ont été élucidés surtout en régime harmonique, mais d'autres nécessitent plus d'approfondissement. Notamment, le système du sandwich avec une sollicitation ponctuelle limitée dans le temps soulève plusieurs questions, à savoir, quelles dimensions du tampon doit-on choisir et où doit-on le placer afin de maximiser l'amortissement ? Comment évoluent les fréquences propres, le coefficient de perte du système ? Même si ces questions ont été traitées à différents niveaux en régime harmonique, elles ne l'ont pas été autant en régime transitoire. L'étude de ces paramètres en régime transitoire permet non seulement la comparaison des réponses du sandwich dans les deux régimes afin d'évaluer leur cohérence, mais aussi de définir la loi de comportement de la pression acoustique vis-à-vis de ces grandeurs, ainsi que l'influence du tampon sur la propagation de l'onde dans la plaque.

Toutes ces questions rendent légitime et nécessaire le développement d'un modèle analytique qui soit capable non seulement de donner des explications aux différents phénomènes mis en jeu, et de définir les relations entre les entrées et les sorties, mais aussi d'être une plateforme pour de futures recherches plus avancées.

Ce projet vise donc à comprendre les mécanismes dynamiques et acoustiques associés aux impacts sur une structure métallique flexible avec traitement amortissant contraint, afin d'en dégager les paramètres qui permettront un meilleur contrôle du rayonnement acoustique initial transitoire. Pour y parvenir, nous nous attaquerons aux objectifs spécifiques suivants :

- Comprendre l'effet des paramètres des tampons à couverture partielle et de leur emplacement sur l'amortissement de la vibration;
- Comprendre les mécanismes dynamiques transitoires dus à ces tampons, leurs effets sur la propagation des ondes et les paramètres qui les gouvernent;
- Comprendre et pouvoir choisir les techniques les plus appropriées pour modéliser le comportement viscoélastique de l'âme;
- Développer un modèle permettant de lier le son rayonné lors des impacts aux caractéristiques des tampons viscoélastiques (géométrie, propriétés des matériaux,...).

## Organisation de la thèse

Dans cette thèse on a choisi d'inclure des articles scientifiques dans le contenu du rapport. Pour ce faire, en plus de la présente partie et de la revue de littérature présentée au chapitre 2, quatre autres chapitres ont été élaborés pour englober le contenu des trois articles et la discussion générale

Un premier article est exposé au chapitre 3. Il est consacré au développement analytique du modèle, à la validation et à la présentation de quelques résultats afin de montrer la capacité et les performances du modèle. La validation est réalisée sur un sandwich avec couverture totale bien connu, dont l'analyse a été faite par Abdulhedi et reprise par plusieurs auteurs pour valider leurs travaux (citons à titre d'exemple Johnson et Gang [2, 4]).

Dans le chapitre 4, on trouve un deuxième article qui traite de l'influence des propriétés géométriques du tampon (position du tampon, épaisseur des couches, pourcentage de couverture de la plaque) non seulement sur le comportement vibratoire de la plaque en termes de fréquences propres et facteur de perte, mais aussi sur le déplacement transversal et la pression acoustique générée suite à un impact.

Le chapitre 5, dont le contenu constitue le troisième article, est consacré à l'étude du comportement ondulatoire de la plaque avec et sans tampon pour différentes conditions aux limites, et ceci, sous l'effet d'un impact. Dans une première analyse, on a étudié la propagation des ondes de flexion dans la plaque de base, non traitée. Ensuite, le tampon a été ajouté. En faisant varier ses caractéristiques, il a été possible de distinguer l'influence des divers paramètres du tampon sur la propagation de l'onde de flexion dans la structure.

Le chapitre 6 présente une discussion complémentaire portant entre autres sur la justesse des hypothèses adoptées dans le modèle et les limites du modèle.

Le dernier chapitre est réservé à la conclusion générale, dans lequel on a récapitulé la méthodologie, les principaux résultats, la performance du modèle (ainsi que les autres types d'analyses qui peuvent être menées avec le modèle dans son état actuel), et finalement les travaux futurs qui peuvent être réalisés en s'appuyant sur le présent modèle.

Dans ce qui suit on débute par exposer la revue de littérature, un chapitre dans lequel on résume les travaux réalisés dans ce domaine.

## **CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

Dans cette partie, on expose l'état de l'art dans le domaine des sandwichs viscoélastiques. Cette partie est fondamentale non seulement pour définir la terminologie et mettre le lecteur en situation, mais aussi pour faire les bons choix dans notre démarche et situer notre travail par rapport aux travaux existants. On commence par la modélisation des sandwichs, une partie dans laquelle on traite des techniques et hypothèses utilisées pour obtenir son équation du mouvement, suivie de la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques. Après avoir traité la modélisation des impacts, on aborde les régimes d'analyse ainsi que les méthodes de résolution de l'équation du mouvement. Ensuite, on traite l'optimisation et l'étude paramétrique, et on finira par les ondes de flexion et le rayonnement acoustique des plaques sous l'effet d'un impact.

### **1.1 Modélisation analytique des sandwichs**

Dans cette partie, on traite les différentes démarches suivies par les chercheurs pour traduire un cas réel d'une application industrielle en un modèle analytique quantitatif. On commence par décrire l'élément idéalisé représentant le cas réel, les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites qui lui sont attribuées. Par la suite, on traite des techniques utilisées pour décrire les déplacements dans le sandwich. Les méthodes employées pour obtenir l'équation du mouvement (EDM) sont ensuite exposées. Finalement, on décrit les grandeurs permettant d'évaluer la performance ou l'efficacité d'un tel sandwich.

#### **1.1.1 Élément idéalisé et hypothèses simplificatrices**

Un sandwich est constitué essentiellement de deux plaques entre lesquelles est intercalé un noyau. Ce noyau peut être une couche de matériau viscoélastique ou une structure quelconque, par exemple de mousse ou de nid d'abeille. Généralement les deux plaques sont en métal ou en matériaux composites. La première utilisation des sandwichs remonte à la deuxième guerre mondiale dans le bombardier de nuit Mosquito. À partir de 1960 les sandwichs commencent à envahir d'autres domaines à savoir le génie civil, le génie maritime, l'industrie automobile et ferroviaire [5].



Fréquemment, les chercheurs simplifient les systèmes complexes à étudier en un élément idéalisé qui permet d'approximer les effets d'une action sur le système en question. Dans le cas de l'amortissement des plaques par tampon viscoélastique contraint (plaque de contrainte et couche viscoélastique), l'élément typique est souvent une plaque de forme bien définie (e.g. rectangulaire, circulaire) sur laquelle est collé le tampon, tel qu'à la figure 1.1.

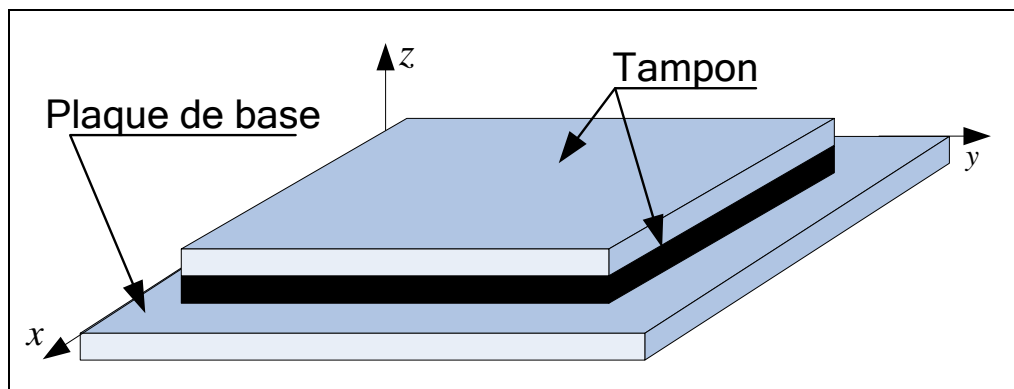


Figure 1.1 : Élément typique de couche viscoélastique contrainte

Le modèle vise à étudier le comportement en flexion du système. En pratique, les trois couches sont montées de façon à ne permettre ni glissement ni manque d'adhérence entre les couches. Cet assemblage a permis à la majorité des chercheurs d'adopter les hypothèses suivantes [1, 2, 6, 7] :

- Les déformations dans les plaques de base et de contrainte sont dans le domaine élastique – ces plaques sont minces et les déformations de cisaillement sont négligeables;
- Les trois couches présentent le même déplacement transversal;
- Il n'y a pas de glissement entre les couches;
- Seules les déformations de cisaillement sont considérées dans la couche viscoélastique;
- L'amortissement dû à la dissipation par les couches rigides (i.e. frottement au niveau des appuis) est négligeable.

En plus de ces hypothèses, certains auteurs [1, 2] négligent les effets d'inertie de rotation et du cisaillement transversal dans les trois couches, alors que d'autres l'incluent [6, 8], surtout lorsque la couche viscoélastique est épaisse par rapport aux autres couches.

Une fois l'élément idéalisé défini, les conditions aux limites doivent être précisées. En réalité ces conditions ne sont que la fixation de certains ou l'ensemble des degrés de liberté aux bords de la

plaque de base. Pour une plaque rectangulaire, on peut avoir plusieurs combinaisons, mais les auteurs se contentent principalement des trois cas les plus connus : extrémités libres, encastées ou simplement supportées.

Le traitement des conditions aux limites pousse à traiter les techniques par lesquelles est exprimé le déplacement. Puisque les expressions du déplacement doivent satisfaire les conditions aux limites, ces dernières sont très souvent traitées conjointement à l'expression du déplacement. Les conditions aux limites dépendent de la méthode utilisée pour obtenir l'équation du mouvement (EDM). La méthode la plus précise et la plus flexible pour la mise en pratique des conditions aux limites est la méthode des éléments finis. En effet dans cette méthode, il est possible d'intervenir directement sur les matrices de rigidité et de masse pour imposer directement les degrés de liberté voulus [7]. Dans la majorité des autres techniques, les conditions aux limites sont incluses dans l'expression du déplacement.

### 1.1.2 Expression du déplacement

L'expression du déplacement peut avoir lieu suivant différentes théories. Certains auteurs [9-12] utilisent la théorie classique des plaques pour sa simplicité et minimiser le temps de calcul. Dans cette théorie, le déplacement est exprimé sous forme linéaire. Cependant, lorsque les résultats attendus doivent être précis ou si la plaque est épaisse, l'emploi des théories des plaques à ordre plus élevé comme celles de Mindlin, ou de Reddy et Touratier [13-15], devient nécessaire. Dans d'autres cas, on utilise plus qu'une théorie dépendamment de l'épaisseur des couches. Par exemple, dans le cas de l'analyse faite par Siala *et al* [7], les déplacements dans les plaques de base et de contrainte sont exprimés selon la théorie classique des plaques minces, et la couche viscoélastique est considérée comme un solide 3D puisqu'elle est plus épaisse que les deux autres couches (trois fois l'épaisseur de la plaque de base). Dans certains cas [16-18] où l'étude du comportement ondulatoire est requise, un mouvement plan dans les couches du sandwich est supposé, et le déplacement est représenté par des fonctions sinusoïdales qui tiennent compte à la fois de la pulsation angulaire et du nombre d'ondes. Toutefois, l'application de cette technique reste limitée au régime permanent.

Cependant, la méthode la plus utilisée est la technique des modes assumés de Galerkin [19]. Cette méthode consiste à exprimer le déplacement sous la forme d'un produit de deux fonctions. La première est appelée coordonnée généralisée  $W(t)$ ; elle dépend du temps et sert à tenir compte

de l'effet sinusoïdal en fonction du temps. La seconde est appelée fonction admissible  $\xi(x,y)$ ; elle dépend de l'espace et sert à simuler les modes de déformation tout en tenant compte des conditions aux limites de la plaque [3]. L'équation suivante résume cette définition :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_w} \xi_i(x, y) W_i(t) \quad (1.1)$$

avec  $n_w$  le nombre de modes,  $t$  la variable du temps et  $x, y$  les variables d'espace telles que définies à la figure 1.1. Les fonctions admissibles sont généralement des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Pour le mouvement transversal qui est perpendiculaire au plan de la plaque, ces fonctions sont obtenues par résolution de l'équation du mouvement transversal de la plaque [3, 20]. Pour les mouvements dans le plan (parallèle au plan de la plaque), les fonctions admissibles sont approximées par les modes de poutres ou de barres [5, 20].

### 1.1.3 Techniques d'obtention de l'équation du mouvement

L'équation du mouvement du sandwich peut être obtenue par différentes méthodes : principe de Hamilton, principe de d'Alembert et équations de Lagrange, par exemple.

Le principe de Hamilton est couramment utilisé [21] dans le domaine des plaques et des coques. Il se base sur la minimisation d'énergie du système. Pour un système mécanique, entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , ce principe se résume dans [20] :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (1.2)$$

où  $K$  est l'énergie cinétique,  $U$  est l'énergie potentielle,  $W_{ext}$  est le travail des forces extérieures sur le système et  $\delta$  est l'opérateur variationnel.

Le principe des travaux virtuels, qui est à la base du principe de d'Alembert, postule un équilibre des travaux lors d'un mouvement virtuel satisfaisant les conditions aux limites. En termes d'équation, ce principe peut s'exprimer sous différentes formes, dont celle mentionnée par Cupia *et al* [9] :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta K - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \right] dt = 0 \quad (1.3)$$

où  $\sigma_{ij}$  représente les contraintes dans la plaque,  $\varepsilon_{ij}$  les déformations dans la plaque,  $V$  le volume du système, et où  $i,j=1,..6$ .

Les équations de Lagrange sont aussi largement utilisées [1, 3, 22]. Cette technique se base sur le calcul du Lagrangien par :

$$L = K - U \quad (1.4)$$

où  $K$  est l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie de déformation. Les équations de Lagrange sont ensuite appliquées :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = Q_i \quad (1.5)$$

où  $Q_i = -\partial S / \partial \dot{\xi}_i + \partial P / \partial \xi_i$  est le vecteur des forces généralisées obtenu par dérivation partielle de la fonction de dissipation de Rayleigh  $S$  et des travaux virtuels  $P$ . La fonction de dissipation de Rayleigh  $S$  inclut les forces d'amortissement proportionnelles à la vitesse. Pour une plaque rectangulaire de dimensions  $(a,b)$ , elle est donnée par [19] :

$$S = \frac{1}{2} c \int_0^a \int_0^b (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy \quad (1.6)$$

où  $\dot{u}, \dot{v}$  et  $\dot{w}$  sont les vitesses des éléments de la couche,  $c$  est le coefficient d'amortissement supposé uniforme et constant. Le coefficient d'amortissement est relié au facteur d'amortissement modal qui peut être déterminé de façon expérimentale par [19] :

$$\zeta_{m,n} = \frac{c_{m,n}}{2\mu_{m,n}\omega_{m,n}} \quad (1.7)$$

avec  $\omega_{m,n}$  la fréquence naturelle du mode  $(m,n)$ . Pour une plaque rectangulaire, la masse modale  $\mu_{m,n}$  est donnée par [19] :

$$\mu_{m,n} = \frac{\rho h a b}{4} \quad (1.8)$$

où  $h$  est l'épaisseur de plaque et  $\rho$  est sa densité.

Les techniques d'obtention de l'EDM permettent d'aboutir à un système d'équations de la forme :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (1.9)$$

où  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, et  $F$  est le vecteur des forces extérieures.

La matrice  $C$ , qui englobe les amortissements visqueux ayant lieu dans les plaques élastiques, est négligée par la plupart des auteurs [2, 3, 7, 9] pour deux raisons. La première raison réside dans la difficulté à évaluer ces facteurs (équation 1.7), sachant qu'ils ne peuvent être déterminés que par voie expérimentale. La seconde raison, c'est que la dissipation visqueuse dans les plaques élastiques est négligeable par rapport à la dissipation due à la couche viscoélastique qui est incluse dans la matrice de rigidité. Certains auteurs [23] considèrent l'amortissement inhérent comme proportionnel; dans ce cas la matrice  $C$  sera exprimée comme combinaison linéaire de la matrice de masse et la matrice de rigidité.

La résolution de ce système dépend du type du régime : harmonique ou transitoire. Nous verrons plus loin les méthodes de résolution pour chaque cas.

#### **1.1.4 Performance d'un sandwich**

Les grandeurs utilisées pour évaluer la performance d'un sandwich sont les fréquences propres et les facteurs de perte [1, 2, 24]. Avec les fréquences propres, le concepteur est capable de choisir les caractéristiques du sandwich qui permettent d'éviter les fréquences de service de la structure. Les facteurs de perte permettent de définir le taux d'amortissement, et en conséquence de réduire l'amplitude des vibrations. Ces deux paramètres seront traités dans la section portant sur le régime harmonique.

### **1.2 Amortissements**

#### **1.2.1 Type d'amortissements**

Nous présentons ici trois types d'amortissement existant dans les systèmes mécaniques.

Amortissement interne : ce type est essentiellement dû au mouvement microscopique des molécules du matériau. Le modèle le plus connu pour représenter ce type d'amortissement est

celui d'hystérésis. Même s'ils découlent de la même classe d'amortissement, les auteurs différencient entre l'amortissement par hystérésis (considéré dans les matériaux élastiques tels les métaux) et l'amortissement viscoélastique [25].

Amortissement structural : ce type est le résultat de la dissipation d'énergie causée par le frottement dû au mouvement relatif entre les pièces (e.g. frottement de Coulomb). La méthode la plus utilisée pour estimer ce type d'amortissement est la mesure expérimentale. Cependant, il faut soustraire les autres types d'amortissement des valeurs mesurées puisque ces dernières englobent l'amortissement global. Généralement l'amortissement interne (autre que viscoélastique) est négligeable devant l'amortissement structural [25].

Amortissement fluide : il provient de l'interaction de la structure avec le fluide dans lequel elle évolue. La dissipation provient du contact ou du frottement entre le fluide et les faces de la structure.

Ces deux types d'amortissement sont négligés par la plupart des auteurs [5, 22, 26-28] lors de l'étude des sandwichs viscoélastiques. Les auteurs ne font appel ni à ces amortissements, ni aux motifs pour lesquels ils ont été négligés, mais il est évident que dans les structures de type sandwich à âme viscoélastique, l'amortissement viscoélastique est beaucoup plus important que les autres types d'amortissement.

L'amortissement viscoélastique qui fait partie de l'amortissement interne est généralement traité à part.

### **1.2.2 Modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques**

Certains matériaux, lorsqu'ils sont soumis à une contrainte, conservent une partie de l'énergie reçue et dissipent le reste. Lorsque la contrainte redevient nulle, une partie de la déformation subie est restituée grâce à l'énergie déjà stockée. De plus, la relation contrainte déformation n'est pas celle des solides élastiques ni celle des liquides visqueux, mais entre les deux. Durant un cycle, une partie de l'énergie est emmagasinée puis rendue, tandis que l'autre partie est dissipée sous forme de chaleur. Un matériau dont le comportement correspond à celui qu'on vient de décrire est dit matériau viscoélastique. Parce que les matériaux viscoélastiques présentent à la fois les caractères visqueux et élastique, ils détiennent des propriétés uniques. Entre autres, en plus de subir un déplacement lorsqu'ils sont soumis à une force constante, ils subissent aussi des

fluages. De même, la force nécessaire pour maintenir une déformation donnée diminue sur une période de temps. Ce phénomène s'appelle la relaxation [29].

L'aptitude des matériaux viscoélastiques à dissiper l'énergie fait d'eux de bons éléments d'amortissement structural dans différents secteurs de l'industrie. Lorsqu'ils sont collés sur des plaques, ils dissipent l'énergie par tension-compression comme le montre la figure 1.1.

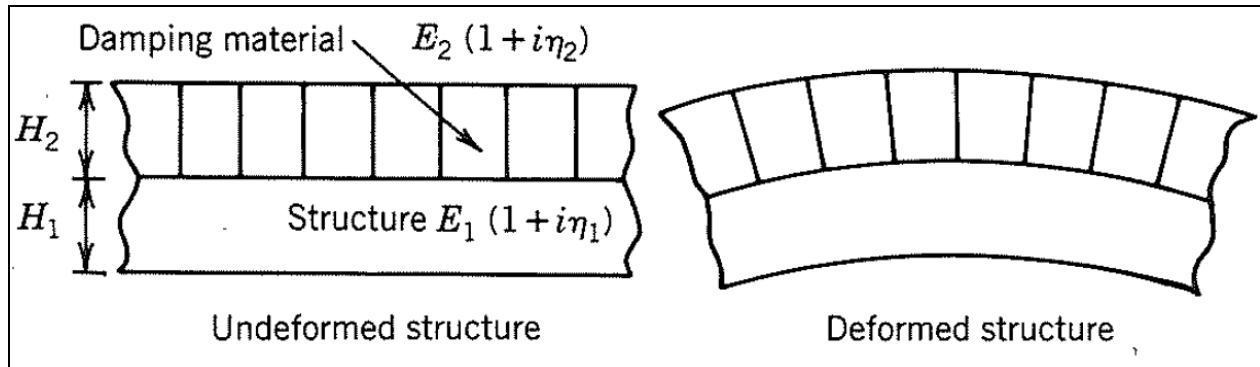


Figure 1.2 : Déformation de la couche viscoélastique : cas de couche non contrainte [30]

Pour augmenter leurs capacités de dissipation, une plaque rigide est collée sur la couche viscoélastique, forçant ainsi la couche viscoélastique à subir un cisaillement; ceci forcera tous les points de la couche à travailler et non pas uniquement les zones aux voisinages des faces extérieures (figure 1.2).

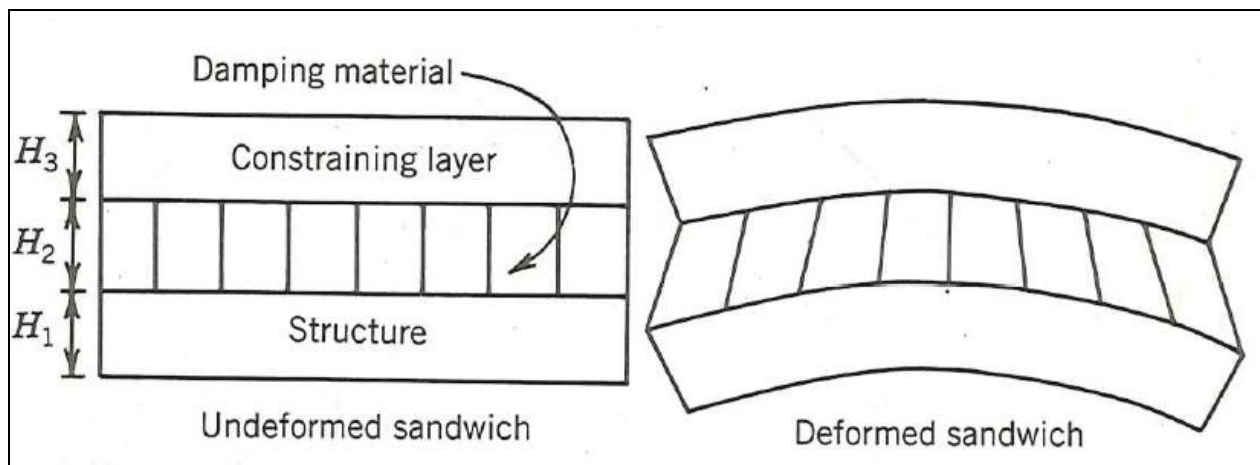


Figure 1.3 : Déformation de la couche viscoélastique : cas de couche contrainte [30]

Lors de l'étude des matériaux viscoélastiques, il est préférable de considérer une représentation du processus viscoélastique avec des modèles linéaires dans le but de maîtriser le comportement de relaxation. Montgomery et William [31] ont distingué deux représentations. La première est basée sur une analogie mécanique; c'est en fait une combinaison d'éléments, généralement des ressorts et des amortisseurs en parallèle et/ou en série. La seconde est basée sur la théorie du mouvement des molécules. La première représentation permet un transfert facile du domaine temporel au domaine fréquentiel et inversement, une opération qui donne l'avantage de permettre l'utilisation de données expérimentales [32]. C'est pourquoi la majorité des chercheurs [2, 31, 33] qui ont traité de l'amortissement des sandwiches ont utilisé cette représentation.

La dissipation d'énergie dans les matériaux viscoélastiques dépend de la fréquence et de la température. Pour une température donnée, la dépendance de la fréquence est assurée dans les expressions de leurs propriétés mécaniques. Entre autres, le module de cisaillement  $G$  a pour expression :

$$G|_{T=T_0} = G_s(\omega)(1 + j\eta(\omega))$$

$$\eta(\omega) = \frac{G_l(\omega)}{G_s(\omega)} \quad (1.10)$$

où  $T_0$  est la température donnée,  $G_s$  et  $G_l$  sont respectivement les modules de restauration et de perte. Le facteur d'amortissement constitue la mesure de la capacité amortissante du viscoélastique et est représenté par  $\eta$  [32]. Ce facteur peut dépasser la valeur 1, donc il ne représente pas un pourcentage ou une proportion, mais plutôt un outil de mesure. La figure 1.3 montre la variation du facteur d'amortissement en fonction de la fréquence pour quelques matériaux viscoélastiques.



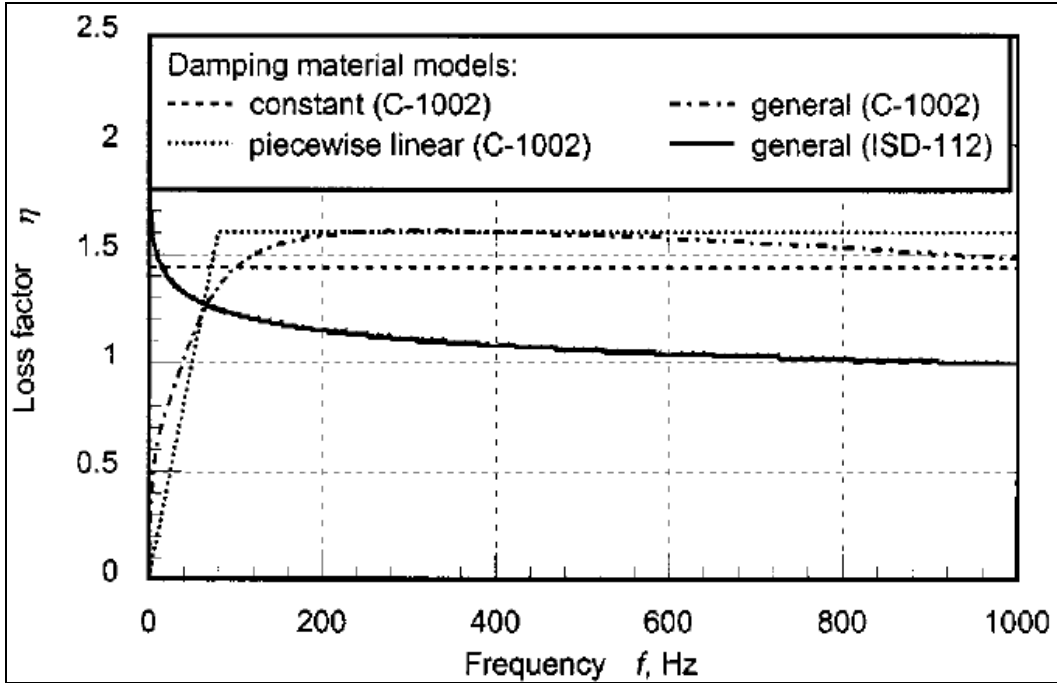


Figure 1.4 : Variation du facteur d'amortissement en fonction de la fréquence [34]

Il existe différents modèles pour simuler le comportement des matériaux viscoélastiques. Le modèle GHM, du nom de ses inventeurs Golla, Hughes et McTavish, prévoit une représentation du comportement viscoélastique sous forme de mini-oscillateurs. Le module de cisaillement s'exprime dans le domaine de Laplace sous la forme [35] :

$$sG(s) = G^\infty \left[ 1 + \sum_k \alpha_k \frac{s^2 + 2\xi_k \omega_k s}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2} \right] \quad (1.11)$$

où  $\alpha_k$  est le facteur participatif,  $\xi_k$  est le taux d'amortissement,  $\omega_k$  est la fréquence naturelle de chacun des  $k$  mini-oscillateurs,  $s$  est l'opérateur de Laplace et  $G^\infty$  est la valeur d'équilibre de  $G$ . L'avantage de la représentation GHM est sa capacité à représenter le comportement d'un matériau viscoélastique dans le temps. Cependant, la détermination des paramètres pour la représentation d'un matériau réel s'avère difficile [32].

La série de Prony est largement utilisée pour la représentation analytique des fonctions caractérisant les matériaux viscoélastiques. Le module de cisaillement dans le domaine de Fourier s'exprime par :

$$G(\omega) = G_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^N g_n + \sum_{n=1}^N \frac{j\omega g_n \tau_n}{1 + j\omega \tau_n} \right] \quad (1.12)$$

où les  $\tau_n$  sont appelés temps de relaxation,  $g_n$  sont les constantes de Prony,  $\omega$  est la fréquence,  $N$  est le nombre de termes, et  $G_0 = G(t=0)$ . Les avantages de l'utilisation d'une série de Prony résident dans sa capacité à décrire le comportement à large bande de fréquence des matériaux viscoélastiques et l'efficacité de calcul associée à ses fonctions exponentielles, ce qui facilite le transfert du domaine temporel au domaine fréquentiel et inversement. Cependant, la précision de ces techniques dépend énormément du nombre de termes utilisé dans l'expression du module du cisaillement. La figure 1.4 compare le facteur d'amortissement du matériau 3M ISD 112 pour 3 cas : 1 terme, 2 termes et 3 termes, et ceci lorsqu'on utilise la série de Prony.

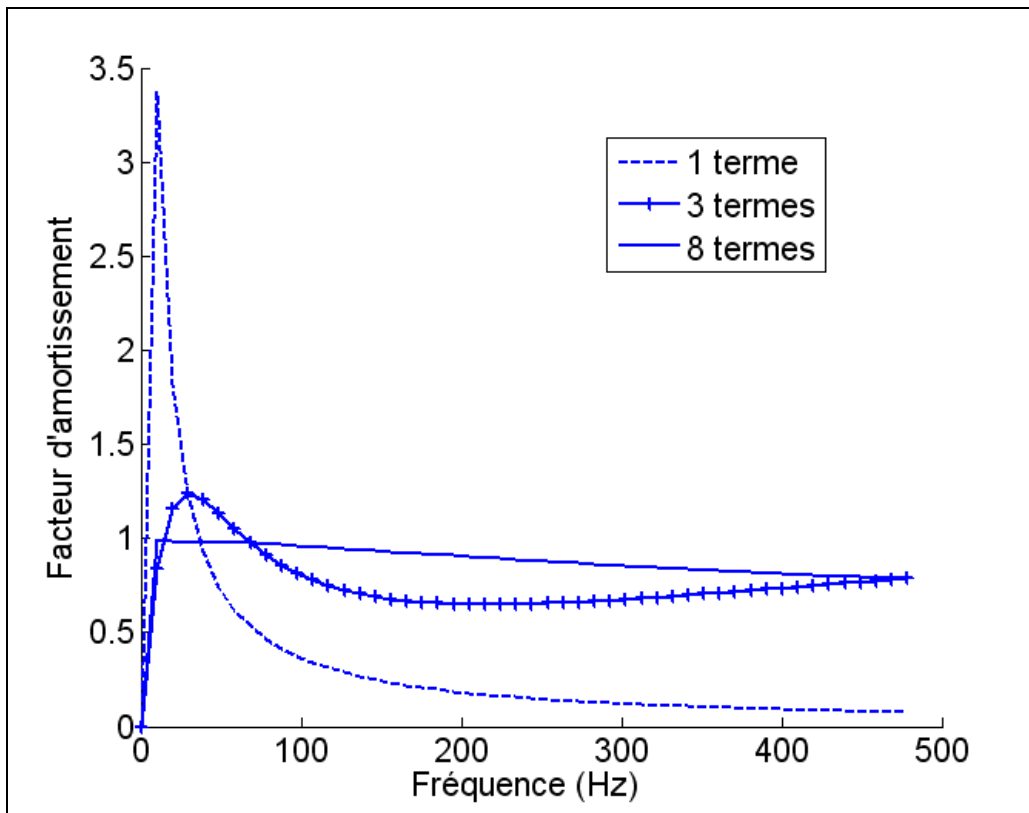


Figure 1.5 : Variation du facteur d'amortissement en fonction du nombre de termes

Il existe d'autres techniques pour exprimer le module de cisaillement en fonction de la fréquence  $f$ . Ces techniques empiriques sont spécifiques à chaque matériau et se basent sur des données expérimentales. Voici, par exemple, le modèle pour le matériau 3M ISD 112 [34] :

$$\begin{aligned} G(f) &= \exp(0.6937 \ln(f) - 2.6962) \quad (N / mm^2) \\ \eta(f) &= \exp(-0.08807 \ln(f) + 0.60503) \end{aligned} \quad (1.13)$$

### 1.3 Modélisation des impacts

La force qu'exerce un objet percutant une structure est fonction des propriétés physiques et mécaniques des deux corps entrant en contact. Un premier modèle pour un impact purement élastique est défini par la loi de Hertz selon laquelle [36] :

$$F(t) = Ku(t)^{3/2} \quad (1.14)$$

où  $u$  est le déplacement relatif de l'élément d'impact par rapport à la structure et  $K$  est une constante dépendante des propriétés mécaniques des deux éléments et de la géométrie de l'élément d'impact. Ce modèle est valable entre autres pour une plaque infiniment épaisse. Dans le cas des plaques minces, la flexibilité de celles-ci entre en jeu dans le calcul. Heitkämper a donné une approximation pour la force dans ce cas. Cette relation est définie par [36] :

$$F(t) = F_0 \left[ \left( \frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \right) \sin(0.97T)^{1.5} e^{-(0.4T)^4} + \left( \frac{1+2/\Lambda}{1+\Lambda} \right) \left( \frac{T}{T+1/\Lambda} \right)^{1.5} e^{-\frac{T}{\Lambda}} \right] \quad (1.15)$$

où  $T = \pi t / T_0$ , et  $T_0$  est le temps de contact Hertzien défini par

$$T_0 \approx \frac{2.9432}{v_s^{1/5}} \left( \frac{5m_s}{4K} \right)^{2/5} \quad (1.16)$$

$F_0$  est l'amplitude de la force d'impact et  $m_s$  et  $v_s$  sont respectivement la masse et la vitesse de l'impacteur :

$$F_0 = \left( \frac{5}{4} \right)^{3/5} m_s^{3/5} v_s^{6/5} K^{2/5} \quad (1.17)$$

La constante  $K$  de la loi de Hertz est définie par :

$$K = \frac{4}{3} \sqrt{r_s} \left( \frac{E'_s E'_p}{E'_s + E'_p} \right) \quad (1.18)$$

où  $r_s$  est le rayon de l'élément d'impact (on suppose ici qu'il s'agit d'une bille), l'indice  $p$  est relatif à la plaque recevant l'impact,  $s$  est relatif à la bille, et

$$E' = \frac{E}{(1-\nu)^2} \quad (1.19)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson. Le paramètre d'impact  $\Lambda$  est donné par :

$$\Lambda = \frac{\pi^{3/5}}{3^{1/2}} \left( \frac{r_s}{h} \right)^2 \left( \frac{\nu}{C_L} \right)^{1/5} \left( \frac{\rho_s}{\rho_p} \right)^{3/5} \left( \frac{E'_s}{E'_s + E'_p} \right)^{2/5} \quad (1.20)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque,  $C_L$  est la vitesse des ondes longitudinales se propageant dans la plaque, et  $\rho_s$  et  $\rho_p$  sont respectivement les densités de la bille et de la plaque. Lors de leur étude d'une poutre sandwich, Granger *et al* [3] ont utilisé d'une part, un marteau instrumenté pour créer l'impact durant les essais qu'ils ont menés, et d'autre part, la relation de Heitkämper pour la modélisation théorique de cet impact. L'enregistrement de la force induite par l'impact montre une bonne cohérence avec les valeurs données par la relation de Heitkämper.

Le modèle basé sur la méthode d'énergie (*energy method*) est moins précis dans la modélisation de l'impact que le modèle de Hertz, selon une étude réalisée par Krishnaprasad *et al* [37]. Le modèle basé sur la méthode d'énergie peut se mettre sous la forme :

$$f_0(t) = K_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \quad (1.21)$$

avec  $K_0$  l'amplitude maximale et  $T_0$  temps d'impact [38]. Sun [39] a utilisé ce modèle en l'ajustant avec la fonction Heaviside pour simuler l'impact lors du développement d'un modèle numérique pour effectuer des tests non destructifs sur des poutres sandwich :

$$f_0(t) = K_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) (H(t) - H(t - T_0)) \quad (1.22)$$

avec  $H$  fonction de Heaviside définie par [39] :

$$H(t - T_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > T_0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = T_0 \\ 0 & \text{si } t < T_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

#### 1.4 Régime harmonique

Dans notre contexte, le régime harmonique amorti est caractérisé par l'absence d'excitation extérieure. Ceci permet de marquer la tendance naturelle du sandwich en termes de fréquences naturelles et de facteur de perte. La majorité des auteurs se servent de ces grandeurs pour qualifier les performances vibratoires des sandwichs. Nous traitons dans un premier temps les techniques utilisées pour résoudre l'EDM dans ce régime; ensuite nous exposons les méthodes utilisées pour évaluer les deux paramètres : fréquences naturelles et facteurs de perte modaux. Tel que mentionné précédemment les techniques d'obtention de l'EDM permettent d'aboutir à un système tel que l'équation (1.9). En supposant une réponse harmonique de la forme :

$$X(x, y, t) = X(x, y)e^{j\omega t}, \quad (1.24)$$

on obtient l'équation suivante :

$$(K - \omega^2 M)X = 0. \quad (1.25)$$

Notons que l'amortissement dû à la couche viscoélastique est inclus dans la matrice complexe  $K$ , et que les autres amortissements du système sont négligés dans le modèle. Il existe deux approches pour rechercher les valeurs propres de la dernière équation. La première suppose que le module de cisaillement est indépendant de la fréquence. Dans ce cas la matrice  $K$  est constante, et la solution est immédiate par résolution de l'expression  $(K - \omega^2 M)X = 0$ . Dans la deuxième approche, qui est plus réaliste, le module de cisaillement est fonction de la fréquence, et la matrice  $K$  est donc variable. Dans ce cas, une procédure itérative (figure 1.5) est nécessaire, comme l'ont mentionné Siala *et al* [7]. Cette procédure consiste à trouver les valeurs propres de l'équation (1.25), en évaluant à chaque fois la matrice  $K$ , jusqu'à la convergence.

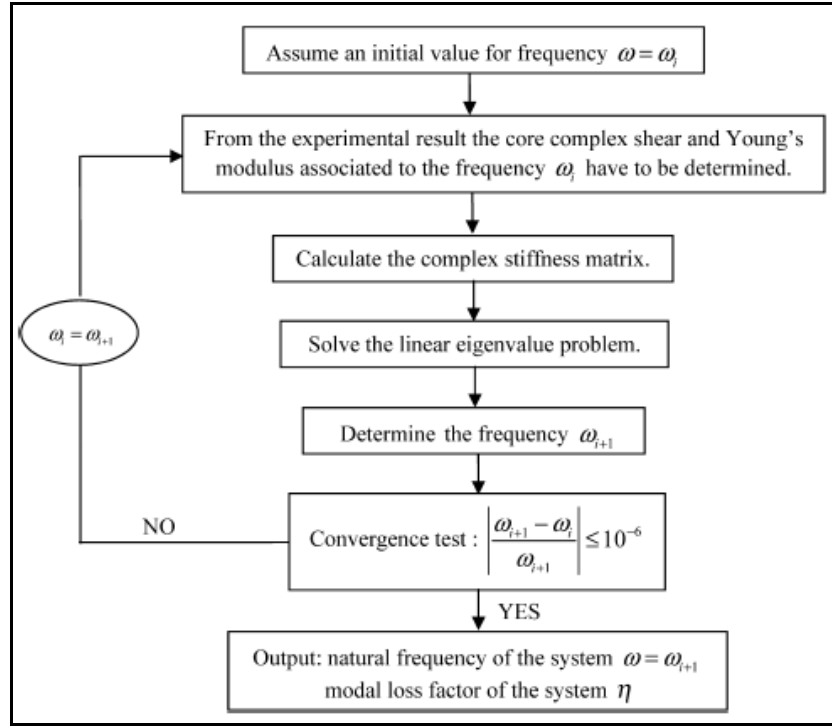


Figure 1.6 : Procédure itérative de résolution de l'équation (1.25) [7]

Les fréquences complexes qui vérifient l'équation (1.25) servent au calcul des fréquences propres et des facteurs de perte par les expressions suivantes :

$$\omega_p = \sqrt{\text{Re}(\omega^2)}; \quad \eta = \frac{\text{Im}(\omega^2)}{\text{Re}(\omega^2)} \quad (1.26)$$

L'équation (1.25) peut être résolue par différentes méthodes. Citons en exemple la méthode se basant sur la factorisation LU de la matrice  $K$  et les itérations de Lanczos [40]. Une autre méthode, mentionnée par Siala *et al* [7], consiste à utiliser la partie réelle de la matrice de rigidité dans l'équation (1.25)  $(K^{\text{Re}} - \omega^2 M)X = 0$ . Les fréquences obtenues en résolvant cette équation sont les fréquences propres. Le facteur de perte pour chaque mode est calculé par le rapport à l'énergie de déformation dissipée par l'énergie emmagasinée, et ceci durant un cycle :

$$\eta = \frac{\Delta U}{2\pi U} \quad (1.27)$$

où  $\Delta U = \pi \phi^T K^{\text{Im}} \phi$ ;  $U = \frac{1}{2} \phi^T K^{\text{Re}} \phi$ ;  $K = K^{\text{Re}} + jK^{\text{Im}}$ ; et  $\phi$  est le vecteur propre pour chaque mode.

## 1.5 Régime transitoire

Dans le présent travail, le régime transitoire est considéré dans le cas d'impacts sur la plaque. Deux approches sont envisageables pour la résolution du système différentiel (1.9). La première a lieu dans le domaine fréquentiel, alors que la seconde a lieu dans le domaine temporel.

### 1.5.1 Résolution dans le domaine fréquentiel

Les principes de l'analyse en fréquence ont trouvé maintes applications dans l'analyse des vibrations. L'utilisation de ces techniques permet de représenter un système dans le domaine des fréquences, et ceci afin d'observer facilement les fréquences qui sont importantes au sein du système [41]. La résolution consiste à appliquer la transformée voulue (e.g. de Fourier) à l'équation (1.9), soit :

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{U}_b \\ \bar{V}_b \\ \bar{U}_c \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

où les lignes supérieures indiquent que les variables sont dans le domaine fréquentiel. La résolution se fait ensuite dans ce domaine :

$$\begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{U}_b \\ \bar{V}_b \\ \bar{U}_c \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K - \omega^2 M \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Finalement, l'application de la transformée inverse permet d'obtenir le déplacement dans le domaine temporel :

$$\begin{pmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{pmatrix} = \mathfrak{F}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{U}_b \\ \bar{V}_b \\ \bar{U}_c \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier (TF) et celle de Laplace sont de bons outils pour l'analyse et l'obtention de la solution. Ces deux outils permettent de visualiser le spectre fréquentiel et les fonctions de réponse en fréquence (FRF) [42]. En pratique, ce sont les transformées discrètes qui sont utilisées pour réaliser la résolution. Dans le cas de la TF, la transformée de Fourier discrète (DFT) est calculée à l'aide de l'algorithme de la transformée rapide de Fourier (FFT).

La DFT est une approximation de la TF en la discrétisant dans un intervalle bien déterminé de façon à avoir la précision voulue. En effet, la TF est approximée par [43] :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \approx \int_{-T/2}^{+T/2-\Delta t} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.31)$$

avec  $\omega$  la variable dans le domaine de Fourier,  $t$  la variable temporelle,  $\Delta t$  le pas de temps et  $T$  l'intervalle de discrétisation. Si  $f(t)$  est discrétisée à pas constante  $\Delta t$ , on aura :

$t = q\Delta t$ ,  $q = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$ , avec  $N$  le nombre d'échantillons, ce qui donne  $\Delta t = T/N$ . De même pour la discrétisation de l'intervalle de fréquence, on aura  $\omega = m\Delta\omega$ ,  $m = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$ , et  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . Remplaçant ces expressions dans l'équation (1.31), on obtient :

$$\begin{aligned} F(m\Delta\omega) &= \sum_{q=-N/2}^{N/2-1} f(q\Delta t)e^{-jm\Delta\omega q\Delta t} \Delta t \\ &= \frac{T}{N} \sum_{q=-N/2}^{N/2-1} f(q\Delta t)e^{-j2\pi m q/N} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pour avoir une sommation de 0 à  $N-1$ , un changement d'indice  $q' = q + N/2$  et  $m' = m + N/2$  est défini, et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} F_{m'} &= \sum_{q'=0}^{N-1} (-1)^{m'} f_q e^{-j2\pi m' q'/N} e^{-i\pi N/2} \\ &= \sum_{q'=0}^{N-1} (-1)^{m'} f_q e^{-j2\pi m' q'/N} \end{aligned} \quad (1.33)$$



Si  $N$  est choisi comme une puissance de 2, alors  $e^{-i\pi N/2} = 1$ , c'est pourquoi l'algorithme utilisé par Matlab pour évaluer la DFT utilise la fonction `nextpow2` pour trouver la valeur de  $N$ .

Même si ces deux techniques permettent d'obtenir et d'étudier la réponse du système, ils ne sont pas au même niveau de justesse et de fidélité des résultats. D'après Barkanov [11, 34] la transformée de Fourier présentent quelques inconvénients, surtout lorsque l'échantillonnage du signal de traitement est inapproprié. Blais [44] remet l'effet de non-causalité à l'utilisation de la FFT sur un échantillon trop court et suggère le remplacement de la FFT par la transformée de Laplace afin d'éliminer cet effet. En réalité, l'effet de non-causalité n'est pas dû à l'utilisation de la FFT, mais plutôt à sa mauvaise utilisation : autrement dit, c'est l'échantillonnage inapproprié qui génère ce phénomène [41].

La transformée de Laplace est peu utilisée pour la résolution de ce type d'équation (en comparaison avec la transformée de Fourier). Parmi les critiques faites à la transformée de Laplace, celle mentionnée par Beerends *et al* [45] précise qu'on ne peut pas donner une interprétation simple en termes de spectres comme c'est le cas de la transformée de Fourier.

### 1.5.2 Résolution dans le domaine temporel

La résolution dans le domaine temporel est une résolution directe. Elle est généralement accomplie par les méthodes itératives. Citons les méthodes d'Euler explicite et implicite, la méthode des différences finies centrales, la méthode de Houbolt et la méthode de Newmark et Wilson, dont le développement est le suivant [15, 40] pour un système d'équations de type  $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$  (équation (1.9)). Cette méthode consiste à construire la solution des vecteurs  $\ddot{X}$ ,  $\dot{X}$  et  $X$  à l'instant  $t + \Delta t$  à partir de celle à l'instant  $t$ . Ces vecteurs seront approximés par les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \{\dot{X}_{t+\Delta t}\} &= \{\dot{X}_t\} + \Delta t \left\{ (1-a)\{\ddot{X}_t\} + a\{\ddot{X}_{t+\Delta t}\} \right\} \\ \{\ddot{X}_{t+\Delta t}\} &= \frac{1}{b} \left( \frac{2}{\Delta t^2} \left( \{X_{t+\Delta t}\} - \left( \{X_t\} + \Delta t \{\dot{X}_t\} \right) \right) - (1-b)\{\ddot{X}_t\} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

où  $a$  et  $b$  sont des facteurs d'approximation de l'accélération. Lorsque  $a=b=1/2$ , l'accélération est supposée constante dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ , alors que si  $a=1/2$ ,  $b=1/3$ , l'accélération varie linéairement dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . Écrivons le système (équation (1.9)) à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$[\bar{K}]\{X_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (1.35)$$

avec,

$$[\bar{K}] = [M] + \Delta t a [C] + \frac{\Delta t^2}{2} b [K] \quad (1.36)$$

et,

$$\begin{aligned} \{R_{t+\Delta t}\} = & \frac{\Delta t^2}{2} b \{F_{t+\Delta t}\} + [M] \left( \{X_t\} + \Delta t \{\dot{X}_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} (1-b) \{\ddot{X}_t\} \right) + \\ & [C] \left( \Delta t a \{X_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} (2a-b) \{\dot{X}_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} (a-b) \{\ddot{X}_t\} \right) \end{aligned} \quad (1.37)$$

L'algorithme suivant résume les étapes de cette méthode.

*Pour  $t = t_0$*

*Définir  $[M]$ ,  $\{U_0\}$ ,  $\{\dot{U}_0\}$ ,  $\{\ddot{U}_0\}$ ,  $\Delta t$ ,*

*Pour chaque pas du temps*

*Calculer  $[K]$ ,  $[C]$ ,  $\{F\}$*

*Construire  $[\bar{K}]$ ,  $\{R_{t+\Delta t}\}$*

*Trouver  $\{X_{t+\Delta t}\}$*

*Calculer  $\{U_t\}$ ,  $\{\dot{U}_t\}$  et  $\{\ddot{U}_t\}$*

*Stocker la solution voulue*

Figure 1.7 : Algorithme de la méthode de Newmark-Wilson

La méthode de Newmark-Wilson possède l'avantage par rapport aux autres de convenir non seulement pour des systèmes linéaires très complexes, mais aussi pour des systèmes non linéaires. De plus, avec un choix adéquat des paramètres d'approximation, cette méthode est inconditionnellement stable.

## 1.6 Optimisation et étude paramétrique

### 1.6.1 Modèles courants

Plusieurs références (e.g. [46]) mentionnent que les premiers à débiter l'étude analytique des sandwichs furent Ross *et al* [47]. Dans leurs analyses, ils ont étudié un sandwich simplement supporté formé de trois couches, avec un noyau viscoélastique. L'objectif de leur analyse était de prédire l'amortissement du sandwich. Ils ont supposé un contact parfait sans glissement entre les trois couches. Cette hypothèse a permis de supposer un déplacement transversal commun et unique pour les trois couches. Kerwin [6] a présenté une analyse pour une poutre sandwich simplement supportée en utilisant la notion de module de cisaillement complexe afin de caractériser l'amortissement et la rigidité du noyau viscoélastique. Le facteur d'amortissement a été mesuré expérimentalement, la concordance des valeurs calculées et mesurées a permis de conclure que la dissipation de l'énergie est essentiellement due au cisaillement dans la couche viscoélastique. Ce résultat a trouvé l'accord de plusieurs auteurs : Mead *et al* [48], DiTaranto *et al* [49]. Il est devenu par la suite une des hypothèses de base dans l'étude des sandwichs viscoélastiques.

Cupial [9] a étudié un sandwich à noyau viscoélastique. Il a utilisé le principe des travaux virtuels pour déterminer l'équation du mouvement et a présenté deux modèles : l'un utilise la théorie des plaques du premier ordre; le second modèle est simplifié pour le cas d'un sandwich symétrique dans lequel il a négligé l'effet d'inertie de rotation. Il suggère, pour les structures exposées à des excitations pouvant induire le phénomène de résonance, que le design soit fait de façon à réaliser un compromis entre rigidité et amortissement. Yuan [50] a développé une méthode qu'il a nommée « méthode à bande finie » (*spline finite strip method*). Il l'a appliquée pour un sandwich composite pour prédire les fréquences propres. Cette méthode consiste à diviser le sandwich en des bandes où le champ de déplacement est représenté par un produit de fonction B-spline et des polynômes Hermiteens ou Lagrangiens. Les plaques extérieures sont traitées avec la théorie classique des plaques, et le noyau est supposé comme un solide 3D. Gang [2] a mené une analyse vibratoire afin de calculer les fréquences propres et le facteur de perte pour une plaque sandwich à noyau viscoélastique. Il a négligé la déformation due au cisaillement transversal et l'effet d'inertie de rotation. Il a utilisé la théorie des plaques du premier ordre pour décrire les déformations dans les couches. Le module de cisaillement de la couche viscoélastique est décrit

avec la technique GHM dans une forme complexe pour compter sa dépendance à la fréquence. Il a utilisé les modes assumés pour décrire les déplacements. Il a validé ses résultats par des mesures expérimentales [51]

### 1.6.2 Optimisation du tampon

L'optimisation se concentre sur le design et le bon choix des caractéristiques du tampon afin d'assurer un amortissement maximal. Dans cette section on traite les questions qui se rapportent à la conception du tampon pour assurer son efficacité.

Les références consultées montrent que les auteurs traitent le problème de la conception du tampon par deux méthodes principales. La première consiste à formuler une fonction d'optimisation dont le facteur de perte, la pression acoustique ou le déplacement est le paramètre à maximiser ou minimiser, alors que les caractéristiques géométriques et physiques du tampon seront les variables à quantifier. La seconde méthode consiste à étudier plusieurs configurations de l'ensemble plaque tampon et comparer l'efficacité de chacune des configurations.

Dans le cadre de la première approche, deux types de traitements sont étudiés : couche viscoélastique contrainte avec couverture partielle ou avec couverture totale. Dans l'étude de la couverture partielle, en plus des caractéristiques géométriques et physiques du tampon, l'emplacement est inclus dans la fonction d'optimisation. Dans le cas des composites, l'angle d'orientation des fibres est aussi inclus dans les variables à optimiser. L'équation du mouvement est obtenue par les méthodes mentionnées précédemment : le principe énergétique a été utilisé dans [22], le principe de Hamilton et la méthode des éléments finis ont été utilisés dans [52], le principe de Lagrange et la méthode des modes assumés ont été utilisés dans [53]. Les algorithmes d'optimisation les plus utilisés sont :

- l'algorithme génétique, comme dans [53, 54];
- l'algorithme du gradient, comme dans [52];
- le *feasible arc point interior algorithm* (FAPIA), comme dans [55].

Les résultats fournis par les techniques d'optimisation montrent que le facteur de perte est proportionnel à la couverture totale [54]. Pour la disposition du tampon, il n'existe pas une seule configuration idéale pour toutes les fréquences; chaque cas doit être analysé en fonction du mode de déformation de la structure et de la gamme de fréquences étudiées. De même, selon [56] les

fréquences naturelles varient en raison de la masse ajoutée par le tampon, mais l'influence de la position du tampon est relativement faible..

Dans le cadre de la deuxième approche, Nakra *et al* [28, 57] ont consacré quelques articles pour l'étude du traitement partiel viscoélastique des plaques. En étudiant l'amortissement du sandwich pour différentes positions du tampon, ils ont conclu que pour le premier mode, le facteur de perte est maximum lorsque le tampon est placé dans le centre de la plaque. De plus, si le tampon est placé dans un coin, le facteur de perte est plus important que si le tampon est placé ailleurs sur les bords de la plaque. Un résultat contraire à celui-ci a été obtenu par Lall *et al* [27]. D'après Lall, pour le premier mode, le facteur de perte est minimum lorsque le tampon est placé au centre de la plaque, alors que le maximum est obtenu en plaçant le tampon au milieu des bords. Dans une autre analyse basée sur la méthode des éléments finis, Assaf [58] a validé son modèle par les résultats de Nakra. En considérant une plaque rectangulaire complètement couverte, Assaf a tracé l'angle de cisaillement dans la couche viscoélastique en fonction de la longueur de la plaque. Toujours pour le premier mode, il a conclu que l'amortissement maximum a lieu lorsque le tampons est placé aux bords, et le minimum a lieu lorsque le tampon est placé au centre de la plaque. Assaf a aussi validé ce résultat en calculant le facteur de perte par la méthode de l'énergie de déformation modale.

## **1.7 Onde de flexion et pression acoustique sous l'effet d'un impact**

### **1.7.1 Base théorique de l'acoustique des plaques**

Les matériaux solides sont capables de générer différents types d'onde (flexion, compression, cisaillement et torsion). Dans la gamme des fréquences audibles, dans les structures épaisses (i.e. poutres de construction), les trois types d'ondes peuvent être importants. Dans les structures minces, vu différence de rigidité de la plaque entre la direction longitudinale et transversale, les déplacements longitudinaux sont beaucoup plus faible que les déplacements transversaux, et par conséquent les ondes de compression peuvent être négligées.

Le son est une onde de pression se propageant dans un milieu élastique. Cette propagation ne peut pas avoir lieu dans le vide puisqu'elle se fait à travers les molécules formant le milieu. Deux mécanismes fondamentaux sont responsables de la génération du son dans les applications typiques d'ingénierie : 1) vibration des corps solides, 2) turbulence des écoulements fluides. Le

premier est connu par le nom de *son ou bruit des structures*, alors que le second est connu par le nom de *son ou bruit aérodynamique*. La variation de l'onde de pression est décrite par l'équation de Helmholtz [59] :

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1.38)$$

avec  $\nabla$  l'opérateur de Laplace et  $k$  le nombre d'ondes.

Les ondes de flexion se propagent parallèlement au plan médian de la plaque et engendrent un déplacement normal au plan neutre de la plaque. Une onde est caractérisée par deux vitesses, la première est celle du déplacement des fronts de l'onde, ou vitesse de phase; la seconde est celle de l'enveloppe de l'onde, ou vitesse de groupe. Si ces vitesses sont égales, on parle d'onde non dispersive, et si elles sont différentes, on parle d'onde dispersive. La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont respectivement données par [60] :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (1.39)$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.40)$$

où  $\omega$  est la pulsation angulaire,  $k = 2\pi / \lambda$  est le nombre d'ondes et  $\lambda$  est la longueur d'onde.

La résolution de l'équation (1.38) nécessite la construction d'une fonction de Green  $G$  qui doit satisfaire les conditions aux limites :

$$\nabla^2 G(r, r') + k^2 G(r, r') = \delta(r - r') \quad (1.41)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac, et où  $r$  et  $r'$  sont définis dans la figure 1.8. À partir des deux dernières équations et le théorème de Green, Kirchhoff a obtenu la solution de la pression acoustique sous forme d'intégrale :

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \oint_s \left[ G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{\partial p}{\partial n'} - p(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \quad (1.42)$$

où  $n'$  est la normale à la face où le son est généré et  $\omega$  est la pulsation angulaire.

Dans notre cas on s'intéresse au son généré par les plaques en flexion. Pour cela, le développement qui suit est relatif aux sources sous forme de plaque rectangulaire. Généralement

l'étude des plaques est idéalisée par une plaque bafflée (*baffled plate*). Dans ce cas, les deux demi-volumes de part et d'autre de la plaque sont isolés au niveau des ses bords par un baffle rigide, ce qui permet d'exprimer les vitesses transversales de la plaque ( $S_1$ ) et dans le baffle rigide ( $S_2$ ) avec :

$$v_B = \begin{cases} v_n(\mathbf{r}_p, \omega) e^{j\omega t} & \mathbf{r}_p = (x', y') \in S_1 \\ 0 & \mathbf{r}_p = (x', y') \in S_2 \end{cases} \quad (1.43)$$

avec  $j = \sqrt{-1}$ ,  $r_p$  est défini dans la figure 1.7. Appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement au niveau de la surface, pour des conditions aux limites bien définies et lorsque la pression acoustique est connue :

$$\frac{\partial p}{\partial n'} = j\rho_0 \omega v_B \quad (1.44)$$

où  $\rho_0$  est la densité de l'air, la fonction de Green sélectionnée doit satisfaire :

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} = 0. \quad (1.45)$$

Avec ces conditions imposées, la fonction de Green sélectionnée est :

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jkR_+}}{R_+} + \frac{e^{-jkR_-}}{R_-} \right) \quad (1.46)$$

où

$$\begin{aligned} R_+ &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_+)^2} \\ R_- &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_-)^2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

et où  $z_+$  et  $z_-$  sont respectivement des petites perturbations suivant les directions positives et négative de Z.

D'après l'équation (1.45) on doit avoir :

$$\left. \frac{\partial G(r, r')}{\partial z'} \right|_{z'_+, z'_- \rightarrow 0} = 0 \quad (1.48)$$

De même lorsque la source sera limitée à la surface de la plaque  $r \rightarrow r_p$  on aura :

$$G(r, r_p) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (1.49)$$

avec  $R = |r - r_p| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ , remplaçant les équations (1.45) et (1.46) dans (1.39), on trouve [59] :

$$p(r, \omega) = \frac{j\rho_0\omega}{2\pi} \int_{S_1} \frac{v_n(r_p, \omega)}{R} e^{-jkR} ds \quad (1.50)$$

Cette équation peut être obtenue plus facilement en considérant la plaque comme une infinité de sources ponctuelles. En effet, il est connu que la pression acoustique générée par une source ponctuelle est donnée par [61] :

$$p = j\omega\rho_0q \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (1.51)$$

où la vitesse volumique est donnée par  $q = v_n S_n$ , et  $S_n$  est la surface de la source. La pression acoustique générée par la plaque est la contribution de tous les points de la plaque :

$$p = j\omega\rho_0 \sum_n q_n \frac{e^{-jkR_n}}{R_n}. \quad (1.52)$$

Cette somme peut être remplacée par une intégration sur la surface de la plaque, d'où l'on obtient la même équation que (1.47).

L'importance du rayonnement du son à partir de la plaque dépend du rapport des longueurs d'onde dans la plaque et dans le fluide qui l'entoure. La fréquence critique est définie lorsque les deux longueurs d'onde sont égales. Au-delà de cette fréquence, la plaque rayonne plus efficacement. Pour une plaque rectangulaire, cette fréquence s'exprime par [61] :



$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{B}} \quad (1.53)$$

avec  $m$  la masse surfacique,  $B$  la rigidité de flexion et  $c_0$  la vitesse du son dans l'air. Cette conclusion peut-être obtenue en supposant que l'onde de flexion se propage suivant l'axe  $x$  et un champ de pression de la forme :

$$p(x, y) = p_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \quad (1.54)$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont respectivement les nombres d'ondes dans la plaque suivant  $x$  et  $y$ . En remplaçant cette expression dans l'équation d'onde (1.37), on obtient :

$$k_y^2 = k^2 - k_x^2 \quad (1.55)$$

$$\text{d'où } k_y = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2} .$$

Dans le cas où  $k < k_x$ , la pression acoustique devient :

$$p(x, y) = p_0 e^{-jk_x x} e^{-y \sqrt{k_x^2 - k^2}} . \quad (1.56)$$

On voit bien que la pression acoustique diminue sous forme de décrétement logarithmique en fonction de  $y$ . Cela montre que lorsque  $\lambda > \lambda_x$  ( $\lambda = 2\pi / k$ ), la pression acoustique s'atténue rapidement dans cette direction.

Dans le cas où  $k > k_x$ , la pression acoustique se propage dans toutes les directions.

Dans le cas où  $k = k_x$ , la pression acoustique se propage uniquement suivant le plan  $x-z$ , et c'est dans cette condition qu'on calcule la fréquence critique déjà définie.

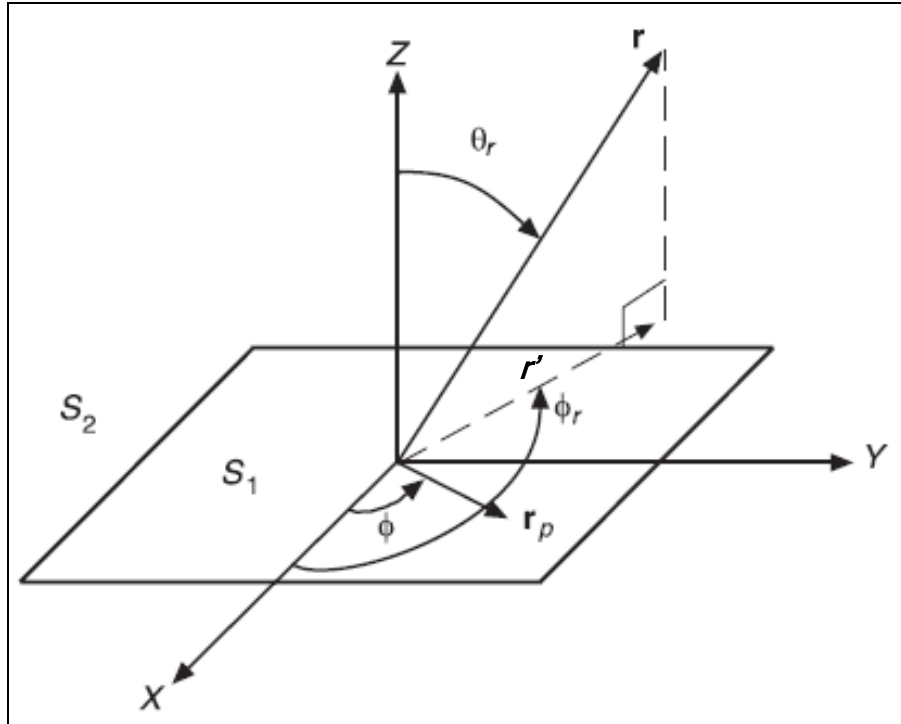


Figure 1.8 : Système de coordonnées pour le calcul de la pression acoustique [59]

Le problème peut être analysé du point de vue de la résistance du fluide à atténuer l'onde, en effet à partir de l'impédance acoustique on peut obtenir la même conclusion. L'impédance acoustique au niveau de la surface de la plaque est définie par le rapport de la pression acoustique par vitesse particulaire de l'onde :

$$\left. \frac{p}{v} \right|_{z=0} = \frac{\rho\omega}{k_y} = \frac{\rho\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \quad (1.57)$$

Si  $k > k_x$  l'impédance est réelle et positive.

### 1.7.2 Études réalisées

Peng [62] a développé un modèle se basant sur la méthode des éléments finis pour étudier la propagation des ondes dans les poutres minces et d'en détecter les défauts. La poutre est excitée à l'une de ses extrémités par une force axiale, ce qui crée une onde se propageant suivant l'axe de la poutre. Lorsque l'onde croise un défaut (e.g. une fracture), une onde réfléchie prend naissance. Avec un maillage soigné au niveau de la fracture, Peng a pu visualiser l'onde incidente et l'onde réfléchie. Le modèle de Pen montre non seulement l'importance des défauts dans la propagation

des ondes dans les milieux solides, mais aussi la sensibilité des ondes vis-à-vis des discontinuités. D'autres auteurs [63-65] ont étudié la propagation des ondes de flexion dans les sandwichs précontraints. En effet lors du montage, certaines structures doivent subir une déformation initiale, en plus des déformations (contraintes) qu'elles subiront durant le service. En cas de problème, l'analyse des sollicitations appliquées sur la structure doit tenir compte des déformations initiales déjà appliquées (précontraintes), d'où l'importance de leur étude. L'étude de la propagation des ondes de flexion dans les composites est utile pour le design des différentes couches, surtout dans définition des proportions de chaque couche comme dans le travail de Kudela *et al* [66], où ils ont mis la lumière sur : 1) la relation entre l'orientation des couches et les vitesses de l'onde, 2) l'influence du volume relatif sur la direction de propagation, 3) l'influence du nombre de couches sur le comportement vibratoire du composite.

Dans les études traitant le bruit généré par les plaques sous l'effet d'un impact, Ross *et al* [67] ont étudié expérimentalement l'effet des Vac Damps (tampon appliqué sur la structure par pompe à vide) sur la pression acoustique d'une structure soumise à un impact d'une part, et ont étudié l'action de l'application asymétrique des Vac Damps sur la pression acoustique d'autre part. D'après Ross *et al* le bruit d'impact est symétrique autour de l'axe de frappe, dans un système symétrique et sa durée est égale à celle du temps de contact (plaque-impacteur) dans la configuration étudiée. Ils ont conclu aussi que les Vac Damps atténuent peu la réponse initiale du système par ajout de masse ou de rigidité. Quant à l'application asymétrique des Vac Damps, elle n'affecte pas trop la direction dans laquelle le bruit est le plus puissant. Dans le cadre des études faites sur la propagation des ondes dans les plaques suite à un impact, on trouve essentiellement Roy *et al* [68] et Oulmane *et al* [69]. À l'aide d'essais expérimentaux d'un modèle numérique, Roy a pu visualiser dans des sections de la plaque, le déplacement à des temps bien déterminés. Ces sections ont permis de voir d'une part la propagation des ondes dans la plaque, et d'autre part l'influence des tampons viscoélastiques sur cette propagation, que ce soit la variation de leurs amplitudes, ou la déformation de l'onde durant le croisement du tampon. Quant à Oulmane, qui a basé ses études sur la méthode des éléments finis (Abaqus), il a concentré ses analyses sur l'influence des caractéristiques du tampon sur la réponse dynamique de la plaque. Selon Oulmane, la rigidité de la couche viscoélastique est un facteur important dans l'étude de l'amortissement des structures, puisque son augmentation entraîne une augmentation de l'énergie de déformation, le tampon doit être placé dans les zones où la flexion est maximale.

## CHAPITRE 2 DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DE LA THÈSE

La revue de littérature a permis d'exposer l'état actuel de l'art. On a essayé de garder l'attention du lecteur par une chronologie permettant d'appréhender les étapes de modélisation d'un cas réel. Ceci a permis de mettre la lumière sur les maillons les plus faibles dans les méthodes utilisées dans le domaine des plaques avec couverture élastique partielle et tout ce qui peut se rapporter.

D'abord, on a remarqué que beaucoup d'effort a été accordé au traitement des sandwichs en régime permanent; cependant, peu de travaux ont été réalisés en régime transitoire, notamment suite à des impacts. Les études menées sur le régime transitoire ont été bornées principalement à des poutres. Ensuite, peu d'études traitent des plaques avec couverture partielle, la plupart des analyses étant limitées aux sandwichs avec couverture totale. Finalement, certains auteurs ont traité directement du rayonnement acoustique des sandwichs sans traiter de la propagation d'onde mise en jeu dans la structure et qui pourrait aider à approfondir le champ de connaissances. On remarque qu'aucun des modèles consultés n'avait la capacité de traiter tous ces aspects en même temps, ni de comparer le comportement du sandwich dans les deux régimes.

Cette thèse vise à combler ces lacunes par le développement d'un modèle analytique :

- qui soit plus complet traitant aussi bien le régime harmonique que le régime transitoire;
- qui soit plus général en traitant les deux types de couvertures : partielle et totale;
- ayant la flexibilité et l'aptitude d'étudier l'influence de tous les paramètres d'entrée sur les fréquences propres, l'amortissement, la pression acoustique et le comportement ondulatoire de la plaque suite à un impact;
- ayant la capacité d'afficher et de suivre le mouvement du sandwich;
- qui servira de base de recherche pour l'intégration d'autres géométries et de cas de chargement.

Il s'agit d'une thèse par articles. Les trois articles qui la composent sont résumés succinctement ci-dessous.

## Article 1

Nous avons réparti les objectifs sur trois articles. Le premier article vise à présenter le modèle, les hypothèses et la méthodologie de résolution, puis à démontrer la validité du modèle. Le type de modèle du sandwich avec ses variables, ainsi que les hypothèses adoptées, sont généralement reconnus dans la littérature. La méthode que nous élaborons pour réaliser le modèle et le solutionner se résume dans les étapes suivantes;

- Calcul des énergies cinétique et de déformation du système;
- Discrétisation des déplacements par la méthode des modes assumés;
- Modélisation du comportement viscoélastique par la série de Prony;
- Calcul de l'équation du mouvement à partir du Lagrangien;
- Résolution dans le domaine fréquentiel, puis conversion dans le domaine temporel;
- Calcul du champ de pression acoustique.

L'énergie cinétique des trois couches est donnée par leur mouvement transversal commun. L'expression de l'énergie de déformation des plaques élastiques diffère de celle de la couche viscoélastique. Celle de la couche viscoélastique tient compte uniquement du cisaillement, alors que celle des plaques élastiques tient compte uniquement des déplacements longitudinaux et de la flexion.

Le modèle est programmé avec Matlab. Le code doit permettre de mener une étude paramétrique où les dimensions, les propriétés et l'emplacement des tampons seront variés pour connaître leurs effets sur le déplacement transitoire de la plaque. Une première validation consiste à comparer les fréquences propres et les facteurs de perte à ceux d'une configuration bien connue dans la littérature.

Le modèle est aussi validé expérimentalement en régime transitoire. Cette étape consiste à tracer le déplacement transversal de la plaque en fonction du temps suite à un impact. Ensuite, le résultat obtenu est comparé avec des mesures expérimentales. Le montage expérimental est constitué d'une plaque en aluminium muni d'un tampon, d'un marteau instrumenté pour réaliser les impacts, d'un vibromètre permettant la mesure du déplacement par effet Doppler à l'aide d'un

rayon laser, d'une unité d'acquisition, et d'un ordinateur munit du programme Labview permettant le traitement des données.

## **Article 2**

Avec le modèle présenté en détails dans l'article 1, une étude paramétrique est réalisée dans l'article 2. Cet article présente l'influence des propriétés géométriques (position du tampon, épaisseur des couches, pourcentage de couverture de la plaque) sur la réponse du sandwich dans les deux régimes. L'analyse du régime harmonique vise à essentiellement à définir les zones de la plaque permettant un maximum d'amortissement, et à résoudre le désaccord par rapport à cette question dans la littérature. Par la suite, l'analyse du régime transitoire est réalisée en termes de déplacement transverses et de pression acoustique. Les paramètres étudiés sont les mêmes que dans le régime harmonique, afin de comparer les réponses du sandwich dans les deux régimes et de définir le poids de chaque paramètre dans la détermination du comportement du sandwich dans chaque régime.

## **Article 3**

L'article 3 est consacré à l'étude du comportement ondulatoire de la plaque sans et avec tampon pour différentes conditions aux limites, et ceci sous l'effet d'un impact. Ici, deux méthodes de résolution sont adoptées : en plus de la résolution dans le domaine fréquentiel décrite précédemment, la méthode de Newmark ayant lieu directement dans le domaine temporel est décrite. Cette méthode s'avère utile lors du traitement des plaques nues puisque la méthode se basant sur la transformée de Fourier éprouve certaines difficultés lors du traitement des systèmes à faible amortissement. Dans une première analyse, la propagation des ondes de flexion dans la plaque nue est étudiée pour trois conditions aux limites appliquées à tous les bords de la plaque : appui simple, encastrement et extrémité libre. Les trois cas sont comparés pour en déduire la contribution des conditions imposées sur les bords de la plaque dans les différentes étapes de formation, de propagation et disparition de l'onde. La plaque avec tampons est ensuite étudiée, en gardant uniquement la condition d'appui simple. Les grandeurs caractéristiques du tampon sont variées afin de noter l'influence de ces paramètres et leur contribution dans l'évolution de l'onde. Les caractéristiques de l'onde de flexion dans la plaque nue et la plaque avec tampon sont comparées dans les différentes phases de l'onde.

Avec la quantité d'analyses comprises au sein de ces articles, on vient compléter la description de l'influence des traitements partiels par couche viscoélastique contrainte, particulièrement en ce qui a trait à la réponse transitoire due à un impact.

## **CHAPITRE 3    ARTICLE 1 : TRANSIENT RESPONSE OF A PLATE WITH PARTIAL CONSTRAINED VISCOELASTIC LAYER DAMPING**

Article soumis dans : International Journal of Mechanical Sciences

Boubaker Khalfi, Annie Ross

CREPEC, Department of mechanical engineering, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6079, Station Centre-ville, Montréal Canada, H3C 3A7

boubaker.mohamed@polymtl.ca; annie.ross@polymtl.ca

### **Abstract**

This paper deals with the analytical modeling of a plate with partial constrained layer damping (PCLD), to obtain the harmonic and transient responses due to an impact. The governing equation is obtained from the Lagrange's equations. The stiffness of the viscoelastic core is assumed to be complex and frequency dependent. Prony series is used to account for core properties. The equation of motion is converted into the frequency domain using fast Fourier transform (FFT). Once solved, the transverse displacement obtained in the frequency domain is converted to the time domain with the inverse fast Fourier transform (IFFT). Two validations are made; the first is done in harmonic motion by comparing the natural frequencies of the plate with PCLD with results available in the literature. The second validation is done in transient response by comparing displacements to the ones obtained by an experimental set-up. Excellent agreement is noted between both results. Once the model is validated, graphs of the transient response are presented and discussed.

**Keywords :** Sandwich, plate, transient response, damping, impact.



### 3.1 Introduction

Impacts are very common in workshops, particularly in the automotive, shipbuilding and aerospace industries. Their adverse effects on hearing raise the growing interest of labour health and safety organizations. However, the physical phenomena associated with impacts, transient vibration response and radiated noise is poorly understood. Therefore reducing vibration and noise due to impacts is challenging. Among the techniques used to reduce plate vibration and radiated noise, partial constrained layer damping (PCLD) which consists of a patch bonded to the structure to be damped. The patch is formed of a viscoelastic layer constrained by a stiff layer covering part of the structure. It provides a simple and flexible tool to absorb the vibration of the structure and reduce noise. It is sought to understand the effects of PCLD on the transient response of impacted plates.

Most studies available in literature deal with full sandwich plates, i.e. plate fully covered with constrained layer damping (CLD). Abdulhadi [70] determined the natural frequencies and loss factor of such sandwich from governing equations based on Newton's laws, assuming no slip between layers and constant complex shear modulus. The results were used to validate many models [2, 4, 9]. One of these models is based on the Galerkin's assumed modes method. Gang [2] studied the influence of the number of modes used on the accuracy of the results (natural frequencies and loss factor). The deformations due to transverse shear in the elastic plates and the rotation inertia were neglected. First order plate theory was used to describe the displacements in the layers. The frequency dependent shear modulus of viscoelastic layer was expressed by GHM technique [2]. Gang showed that the accuracy of natural frequencies and damping factor is more sensitive to the number of in-plane modes than the number of bending modes. Sisemore *et al* [71] studied the significance of extensional vibration of the sandwich, in addition to transverse vibration, on energy dissipation. Unlike most existing models [1, 2, 4, 5, 33, 48], the contribution of in-plane vibration on energy dissipation was considered. Analytical and experimental results on sandwich beams were compared, showing that dissipation from extensional vibration should be included to provide accurate results for thick core sandwiches, whereas it can be neglected for thin cores.

All sandwich plate analyses described above deal with plates that are completely covered with constrained layer damping. Some studies were focused on structures with PCLD. To do so, one

approach is to formulate an optimization function, where variables are the PCLD parameters. This approach was used by Chen *et al* [72] for plates and Zheng *et al* [22] for cylinders. Another approach is to parametrically study different configurations of the PCLD, and to observe the influence of each configuration on the plate damping. Assaf *et al* [58] used Hamilton's principle and finite element method to obtain an appropriate distribution of PCLD over a plate for optimal damping. Assaf [73] also used Rayleigh's integral and modal strain energy to study the influence of geometrical and viscoelastic properties on damping and acoustic pressure. Similar approach was used by Cho *et al* [74] to obtain the natural frequencies and loss factor of a composite sandwich and define the best parameters for high damping. Gang *et al* [5] used this approach in their study of a plate with PCLD, to compare the influence of beam/rod assumed modes and 2D plate bending modes on the natural frequencies and loss factor.

The above works were performed with harmonic response. A limited number of studies were carried out on transient response of plates with PCLD. Slightly more common are studies of beams with PCDL. Granger *et al* [3] used an energy approach to obtain the governing equations of beams. They applied impact forces simulated by Heitkämper's relation [75] and solved the equation in the Fourier domain before converting the solution back into the time domain. They studied the influence of beam length, PCLD position and PCLD dimensions on transient response, and showed that patch position is the most influential parameter on the dynamic response of beams. Barkanov [11, 34] also showed that solving in the Fourier domain was an appropriate method to get the transient response of a sandwich using finite element method.

The aim of this paper is to develop a method to study the transient response of a plate with CLD or PCLD. This goal can be achieved by generalizing the method used by Granger *et al* [3] for the case of beams. We use the assumed modes method for expressing displacements. The shear modulus of the viscoelastic layer depends on frequency and is expressed by Prony series, as in [76]. The solution is obtained in the frequency domain via Fast Fourier Transform (FFT); it is then converted back to the time domain via inverse FFT. To validate the model, the natural frequencies and loss factors are compared with the configuration studied by Abdulhadi [70]. The second validation is carried out for the transient response of simply-supported plate with PCDL by comparing calculated displacements to the ones obtained with an experimental set-up. The results are in good agreement both in harmonic and transient response. Once the model validated, curves are presented showing the transient response of a simply-supported sandwich with PCLD.

## 3.2 Model

### 3.2.1 Geometry and displacement

The sandwich consists of a rectangular plate (or base plate, to be damped), a viscoelastic material layer (VEM) and a constraining plate to constrain the VEM. Figure 3.1 illustrates the geometry of the sandwich and figures 3.2 shows the displacements used in the model.

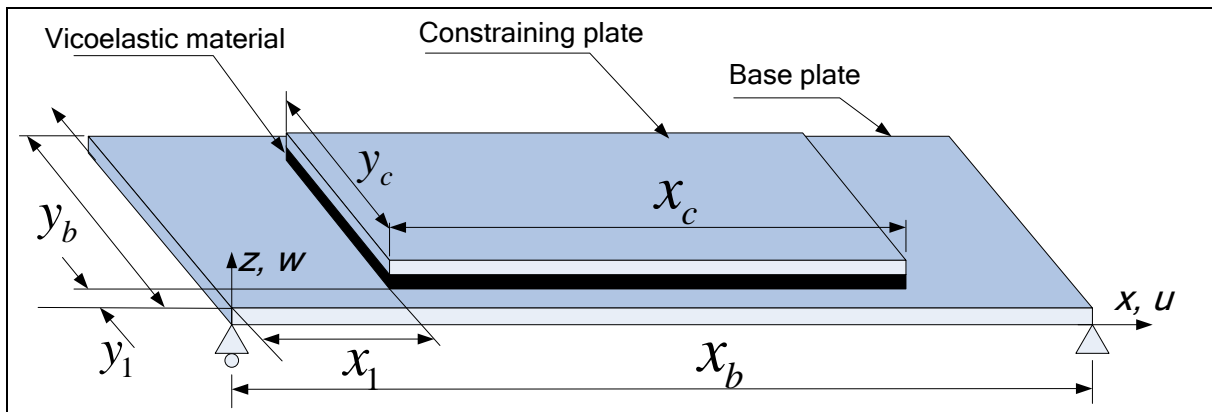


Figure 3.1 : Simply supported sandwich plate

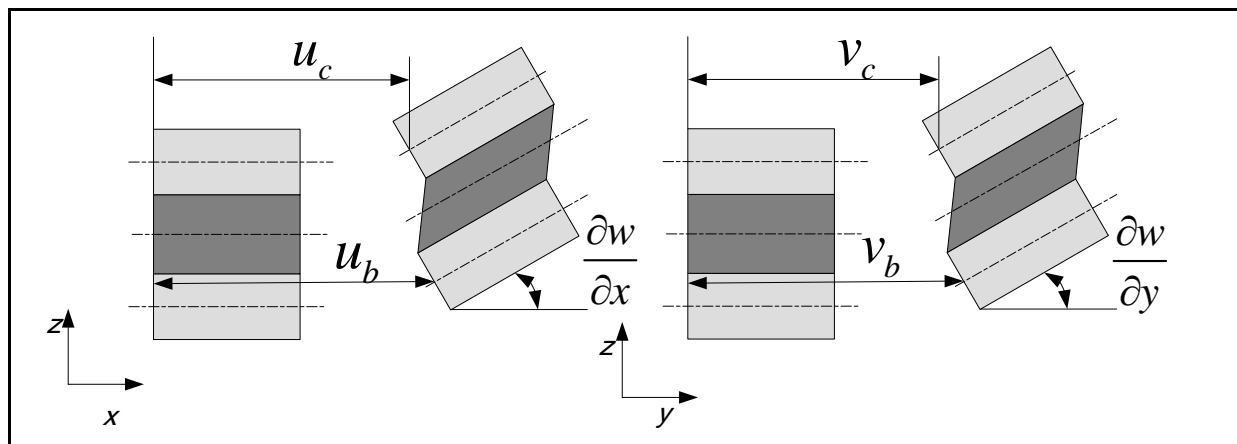


Figure 3.2 : Displacements and rotations in a sandwich plate

The VEM and constraining plate have the same length and width. The three layers are bonded with adhesive. The following assumptions are adopted to derive the governing equation [2] :

- Perfect adherence between the layers and full continuity of displacement at the interface;
- The three layers undergo the same transverse deflection;

- c) Shear strain and rotational inertia in the face plates are neglected;
- d) Viscoelastic layer carries only transverse shear and no normal stress. The shear modulus is assumed to be complex and frequency dependent.

The subscripts  $b$ ,  $c$  and  $v$  are relative to the base plate, constraining plate, and VL, respectively. The transverse displacement is denoted by  $w$ , while the displacements in the  $x$  and  $y$  direction are denoted by  $u$  and  $v$  respectively.

According to assumption (d), the viscoelastic layer carries only shear deformation. The deformation occurs in the two planes ( $zx$  and  $zy$ ). The angles relative to these deformations are denoted respectively by  $\gamma_x$  and  $\gamma_y$ , and can be expressed by.

$$\gamma_x = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\gamma_x = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2)$$

where  $h_i$  is the thickness of the layers.

### 3.2.2 Energies

In order to express the total energy of the sandwich, the strain and kinetic energies of each layer are written separately. For the base plate (BP) and constraining plate (CP), strain energy is

$$E = \frac{K_m}{2} \int_x \int_y \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \right\} dx dy \quad (3.3)$$

$$+ \frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} dx dy$$

where  $K_m$  is the membrane stiffness,  $D$  the bending stiffness and  $\nu$  the Poissons ratio.

The first term is called stretching, extensional or in-plane strain energy, and the second term is the bending strain energy [77].

For the viscoelastic layer this energy is integrated over the volume  $V$  of the material :

$$E_v = \iiint W dV \quad (3.4)$$

where

$$W = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} \quad (3.5)$$

and  $\sigma_i$  and  $\varepsilon_i$  are respectively the stresses and strains applied on viscoelastic layer. According to the assumptions adopted before,  $W$  becomes :

$$W = \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} \quad (3.6)$$

where shear strains  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  can be expressed by (figure 3.2) :

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_x \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_y \quad (3.8)$$

and stresses  $\sigma_{xz}$  and  $\sigma_{yz}$  can be expressed using shear modulus  $G$  :

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad (3.9)$$

$$\sigma_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} \quad (3.10)$$

Replacing equations (3.6) to (3.10) in equation (3.4), we finally find :

$$\begin{aligned} E_v &= \iiint W dv = \iiint 2G \left( \left( \frac{\gamma_x}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_y}{2} \right)^2 \right) dv \\ &= \frac{G}{2} \iiint (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) dv \end{aligned} \quad (3.11)$$

As seen before, the rotational inertia effect and the transverse shear (or kinetic energy of in-plane motion) were neglected. So the kinetic energies for all the plates could be expressed from the transverse displacements only :

$$K = \frac{1}{2}(\rho_b h_b + \rho_c h_c + \rho_v h_v) \iint_{x y} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3.12)$$

where  $\rho$  is the density and  $h$  is the thickness of each layer.

### 3.2.3 Displacements

In order to calculate the total energy, the displacements must be expressed. In this paper, the assumed modes method is used to discretize displacements. Many authors used this technique for sandwich beams [2, 3, 33]. Gang [2] used it for sandwich plates [2, 3, 33]. In this method, the displacement is expressed as the product of two functions satisfying the boundary conditions, one depending on time, the other depending on space. These expressions are :

$$\begin{aligned} u_b(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n_b} \Gamma_i(x, y) \mathcal{U}_{bi}(t) = \Gamma^T U_b \\ v_b(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n_b} \Psi_i(x, y) \mathcal{V}_{bi}(t) = \Psi^T V_b \\ u_c(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n_c} \Omega_i(x, y) \mathcal{U}_{ci}(t) = \Omega^T U_c \\ v_c(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n_c} \Pi_i(x, y) \mathcal{V}_{ci}(t) = \Pi^T V_c \\ w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n_w} \Phi_i(x, y) \mathcal{W}_i(t) = \Phi^T W \end{aligned} \quad (3.13)$$

where  $\Gamma$ ,  $\Psi$ ,  $\Omega$ ,  $\Pi$  and  $\Phi$  are the admissible functions,  $U_b$ ,  $V_b$ ,  $U_c$ ,  $V_c$  and  $W$  are the new generalized coordinates,  $n_b, n_c$  are the number of modes used for the longitudinal displacements of the base plate and constraining plate, respectively, and  $n_w$  is the number of modes for the transverse motion of the sandwich.

All sides of the plate are simply supported with edges mobile in the in-plane directions. The admissible functions are [2, 19] :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x, y) &= \cos\left(\frac{m\pi x}{x_b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{y_b}\right) \\
 \Psi(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi x}{x_b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{y_b}\right) \\
 \Omega(x, y) &= \cos\left(\frac{m\pi x}{x_c}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{y_c}\right) \\
 \Pi(x, y) &= \cos\left(\frac{m\pi x}{x_c}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{y_c}\right) \\
 \Phi(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi x}{x_b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{y_b}\right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

where  $m$  and  $n$  are the vibration mode indexes.

### 3.2.4 Viscoelastic behaviour

Viscoelastic materials exhibit both viscous and elastic characteristics. When subjected to a constant force, they undergo creep over time. Similarly, the force required to maintain a given deformation decreases over time. This phenomenon is called relaxation. In the study of viscoelastic materials, relaxation is represented using a complex shear modulus. The Prony series has shown its efficiency to represent the viscoelastic behaviour [32]. It is adopted to express the complex shear modulus in the frequency domain :

$$G(\omega) = G_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^N g_n + \sum_{n=1}^N \frac{j\omega g_n \tau_n}{1 + j\omega \tau_n} \right] \tag{3.15}$$

where  $\tau_n$  are called relaxation times,  $g_n$  are Prony constants,  $G_0 = G(t=0)$ ,  $\omega$  is the frequency,  $N$  is the number of Prony constants and  $j = \sqrt{-1}$ .

In some models, constant shear modulus (independent of frequency) is expressed by [2] :

$$G = G_0(1 + j\zeta) \tag{3.16}$$

where  $\zeta$  is the damping factor of the viscoelastic material. The two representations are used below with the model, and discussed.

### 3.2.5 Governing equation

The equation of motion is obtained by Lagrange's equations. First, the Lagrangian is calculated from :

$$L = K - (E + E_v) \quad (3.17)$$

where  $E$  is the strain energy in the elastic plates,  $E_v$  the strain energy the VEM, and  $K$  is the total kinetic energy.

The Lagrange's equations is obtained as [19] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = Q_i \quad (3.18)$$

where

$$Q_i = -\partial S / \partial \dot{\xi}_i + \partial P / \partial \xi_i \quad (3.19)$$

is the generalized force obtained by differentiation of Rayleigh's dissipation function  $S$  and of the virtual work  $P$  done by external forces with respect to general coordinates  $\xi_i = W, U_b, U_c, V_b, V_c$ . In the present work, dissipation from the viscoelastic layer is taken into account in Eq. (3.15). For all other viscous friction, damping coefficients could be obtained with experiments, but their influence on results is weak [19]. It is therefore neglected in the present work, together with Coulomb friction at the supports and acoustic damping. The work done by normal forces at the supports is null. The impact force acts along the  $z$  axis (the components along the  $x$  and  $y$  axes are nulls), and depends on position  $(x_f, y_f)$  and time  $t_0$ . This force can be expressed by :

$$f(x, t) = F(t) \delta(x - x_f) \delta(y - y_f) \quad (3.20)$$

where  $F(t)$  is the expression of the impact force (equation 3.23). The virtual work done by this force is :

$$\delta P = \sum_{i=1}^{n_w} \delta W_i(t) \iint_{x y} f(x, t) \Phi(x, y) dx dy \quad (3.21)$$



Finally we can find  $Q = F(t)\Phi(x = x_f, y = y_f)$

Replacing the displacements by their expression in equations (3.14) and developing the calculation, the Lagrange's equations yield the following matrix system :

$$[M] \begin{pmatrix} \ddot{W} \\ \ddot{U}_b \\ \ddot{V}_b \\ \ddot{U}_c \\ \ddot{V}_c \end{pmatrix} + [K] \begin{pmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

where  $M$  is the mass matrix and  $K$  the stiffness matrix which is complex and includes dissipation. Their expressions are given in the appendix.

### 3.2.6 Impact modelling

The impact is modeled using equation (3.23), from [25]. In their study of a sandwich beam, Granger *et al* [3] used an instrumented hammer to create the impacts in their experiments, and found good agreement with the model :

$$F(t) = F_0 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \right) \sin(0.97T)^{1.5} e^{-(0.4T)^4} \\ & + \left( \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + \Lambda} \right) \left( \frac{T}{T + 1/\Lambda} \right)^{1.5} e^{-\frac{T}{\Lambda}} \end{aligned} \right] \quad (3.23)$$

where  $T = \pi t / \tau$ ,  $\tau$  is the contact duration,  $F_0$  the force amplitude,  $\Lambda$  the impact parameter dependent on the geometrical and mechanical properties of the two bodies.

### 3.2.7 Transient response

To conduct a transient analysis of a system subjected to impact excitation, equation (3.22) can be solved in the time domain. However, to avoid resource consuming convolution in the time domain, it is more convenient to solve this equation in the frequency domain. Two methods allow us to achieve this goal : the Laplace transform (LT) (e.g. [44]) or Fourier transform (FT) (e.g.

[3]). In this paper we use the FT to convert equation (3.22) in the frequency domain, where we solve it. The solution is then converted to the time domain by inverse FT.

Applying the FT to equation (3.22) yields :

$$\left[ K - \omega^2 M \right] \begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{U}_b \\ \bar{V}_b \\ \bar{U}_c \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

where the over-bar indicates FT term. Solving equation (3.24) for generalized coordinates :

$$\begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{U}_b \\ \bar{V}_b \\ \bar{U}_c \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \left[ K - \omega^2 M \right]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Then applying the inverse Fourier transform to equation (3.25) leads to the real time domain displacements :

$$\begin{pmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{pmatrix} = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \left[ K - \omega^2 M \right]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.26)$$

### 3.3 Validation

#### 3.3.1 Harmonic response

In order to ensure the accuracy of the method and validate the different steps of calculation, the output of the code is compared with data available in the literature. The model is first validated with free harmonic motion, by calculating natural frequencies and loss factor of the sandwich.

In this case, if we assume the displacement to be [4] :  $X = X(x, y)e^{j\omega t}$ , equation (3.22) will be :

$$\{K - \omega^2 M\} X = 0 \quad (3.27)$$

This equation is an eigenvalue problem and could be solved with different techniques. In our case, the stiffness matrix  $K$  is frequency dependant. An iterative procedure is needed, as mentioned by [7]. In this procedure, iterations begin with an initial value, then the stiffness matrix  $K$  is calculated for each frequency, and the relation  $KX = \omega^2 MX$  is solved. If the accuracy expected on  $\omega$  is reached, the iterations are stopped, otherwise the solution found is used for the next iteration, until the accuracy is reached. However, the problem has to be transformed due to the singularity of the mass matrix. This transformation is :

$$(\bar{K} - \lambda I) X = 0 \quad (3.28)$$

where  $\bar{K} = L^{-1} M U^{-1}$ ,  $I$  is the identity matrix,  $\lambda = 1/\omega^2$  and  $K = LU$ , the LU matrix factorization.

The natural frequencies and loss factors are respectively given by

$$\omega = \sqrt{\text{Re}(\omega^2)} \quad (3.29)$$

and

$$\eta = \frac{\text{Im}(\omega^2)}{\text{Re}(\omega^2)} \quad (3.30)$$

In order to validate the model, we studied the same sandwich as in the well recognized reference [70], which is a simply supported, fully covered sandwich plate. Two cases were considered for the shear modulus : constant and frequency dependent shear modulus in the 0-5000Hz range. The values of the Prony series parameters are taken from [78] and given in the appendix. In Table 3.1, comparison of the results with [2] show that the present model is accurate. When the same constant modulus  $G$  is used, all results are within 0.3% on frequency and 1% on loss factor. In addition, the results of our model are more accurate than the finite element results obtained by Johnson *et al* [4]. The natural frequency values obtained with either constant or frequency dependant shear modulus (Eqs. (3.16) and (3.23)) are comparable, the difference ranging from 1% to 4%. However, the difference between loss factors is significant. The values are approximately 0.13 to 0.16 higher for frequency dependant modulus (relative differences are

given in the right hand column of Table 3.1). The difference is relatively constant for all modes (variation around 30% over the frequency range), as seen in figure 3.3. This difference is due to the values of the parameters in the expressions of shear modulus shown in figure 3.4 : equation (3.15) with Prony series and equation (3.16) for constant shear modulus. For frequencies above 20 Hz, the loss modulus of equation (3.15) is found to be increasingly higher than the one of equation (3.16). Above 70Hz, the storage modulus is also higher. From Table 3.1, the first natural frequency of the structure is 60 Hz. Therefore, for all modes, the loss modulus is higher with the Prony series than with the constant damping factor. Since damping in this model is essentially coming from viscoelastic material, it is expected that the loss factor of the sandwich be higher when shear modulus in the viscoelastic layer is greater. On the contrary, the shear modulus of the viscoelastic layer contributes little to the stiffness of the structure, and the natural frequencies remain unchanged both for constant and variable shear modulus.

Table 3.1 : Model validation

Comparison of natural frequencies and loss factor of a symmetric sandwich plate

$x_b=0.348\text{m}$ ,  $y_b=0.3048\text{m}$ ,  $x_c=x_b$ ,  $y_c=y_b$ ,  $x_l=y_l=0$ ,  $h_b=h_c=0.762\text{mm}$ ,  $h_v=0.254\text{mm}$ ,  $\rho_v=999\text{ kg/m}^3$ ,  
 $\rho_b=2740\text{ kg/m}^3$ ,  $G_v=0,869\text{MPa}$ ,  $\zeta=0,5$ ,  $\rho_c = \rho_b$ ,  $E_b=E_c=68,9\text{GPa}$  and  $\nu_b = \nu_c=0,3$ .

Bending mode	Frequencies (Hz) / Loss factor							
	Reference [70] from [2]		Reference [4]		Proposed model			
					constant $G$		frequency dependant $G$	
	f	$\eta$	f	$\eta$	f	$\eta$	f	$\eta$
1,1	60.30	0.190	57.4	0.176	60.12	0.191	62.84	0.357
2,1	115.40	0.203	113.2	0.188	115.04	0.203	117.96	0.412
1,2	130.60	0.199	129.3	0.188	130.21	0.198	132.91	0.407
2,2	178.70	0.181	179.3	0.153	178.14	0.179	179.94	0.374
1,3	195.70	0.174	196.0	0.153	195.07	0.172	196.53	0.360

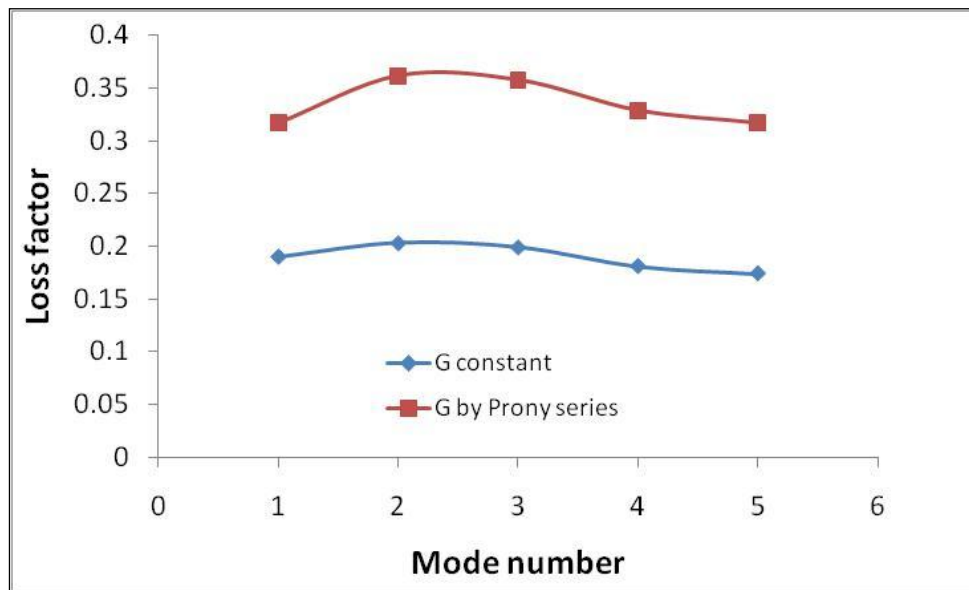


Figure 3.3 : Loss factor variation :

(comparison with frequency dependent (eq. (3.23)) and constant shear modulus (eq. (3.16)))

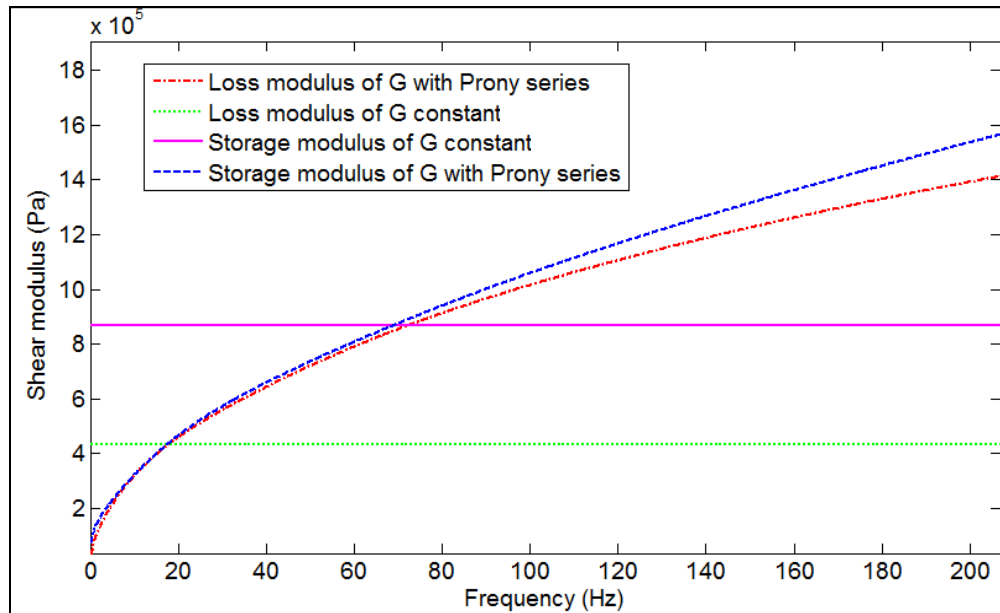


Figure 3.4 : Shear modulus variation :

(comparison with frequency dependent (eq. (3.23)) and constant shear modulus (eq. (3.16)))

### 3.3.2 Transient response

In this section we describe the set-up used to carry out the experimental testing. Then, a comparison between theoretical and experimental data for the transient response is made. Finally, the transient response of the sandwich is studied.

#### 3.3.2.1 Set-up description

The experimental set-up consists of a simply supported sandwich, a laser vibrometer by which the displacement is measured, a manual impact hammer and data acquisition unit (figure 3.4). The time signals are processed using a Labview program. Then the displacement and force curves are displayed in real time and saved.

As mentioned before, the sandwich studied is simply supported. This condition is rendered by blocking the four edges of the plate between two rods as shown in figure 3.4 :

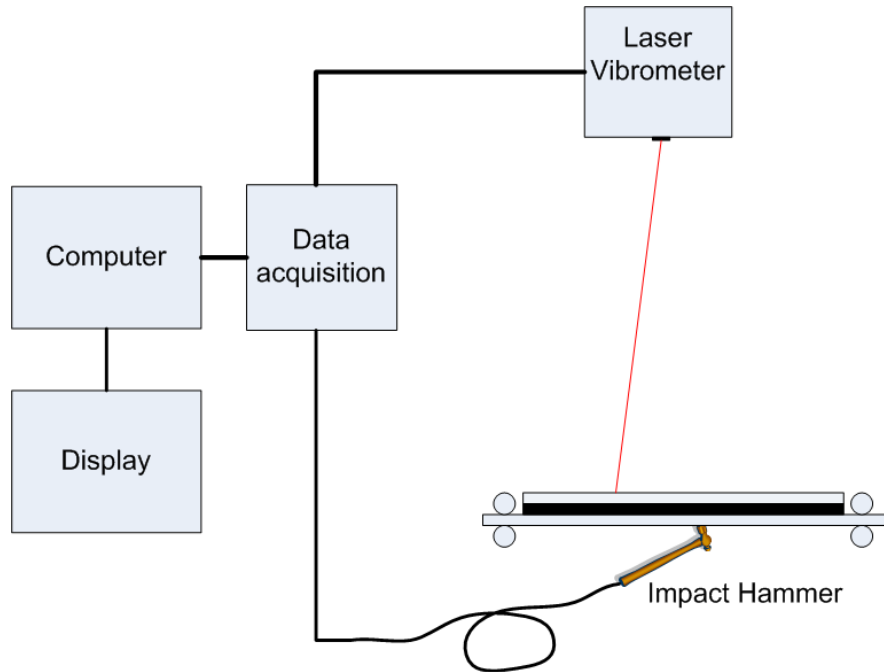


Figure 3.5 : Set-up for experimental measurement

The plate dimensions are 0,601m by 0,283m by 0,793mm. The PCLD is centered on the plate, with dimensions 0,558m by 0,1016m. The thicknesses of the viscoelastic and constraining layers are 0.127mm and 0.793mm, respectively. The elastic layers are aluminum :  $\rho_b=\rho_c=2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_b=E_c=68,9\text{GPa}$  and  $\nu_b=\nu_c=0,3$ . The viscoelastic layer is ISD112 from 3M :  $\rho_v=999 \text{ kg/m}^3$ ,  $G_v=0,869\text{MPa}$ ,  $\zeta=0,5$ .

### 3.3.2.2 Simulation description

For each  $\omega$  over the frequency range, the stiffness matrix is calculated (the mass matrix is calculated before the frequency loop because it does not depend on frequency). Equation (3.21) is converted to the frequency domain by FFT and solved. Once the solution is obtained, it is converted back to the time domain by IFFT. So, the final solution for the transverse displacement  $w$  is selected and multiplied by the appropriate admissible function to get the global solution.

The duration of simulation,  $T_{\max}=2\text{s}$ , is selected to be close to the time in which the response vanishes. The time step is  $\Delta t=5 \cdot 10^{-5}\text{s}$ , so the frequency range is 0-20000 Hz and the frequency step is 0.305 Hz. The impact force is calculated using equation (3.22) with the following values :  $F_0=2.63\text{N}$ ,  $\tau=2 \cdot 10^{-3}\text{s}$ ,  $\Lambda=1$ , and converted to the frequency domain by FFT.

### 3.3.2.3 Testing

To ensure that the set-up meets the boundary conditions, the first natural frequency of the sandwich is measured, and then compared with the ones given by the model. Figure 6 shows both spectra; the experimental spectrum is obtained by applying FFT on measured displacement.

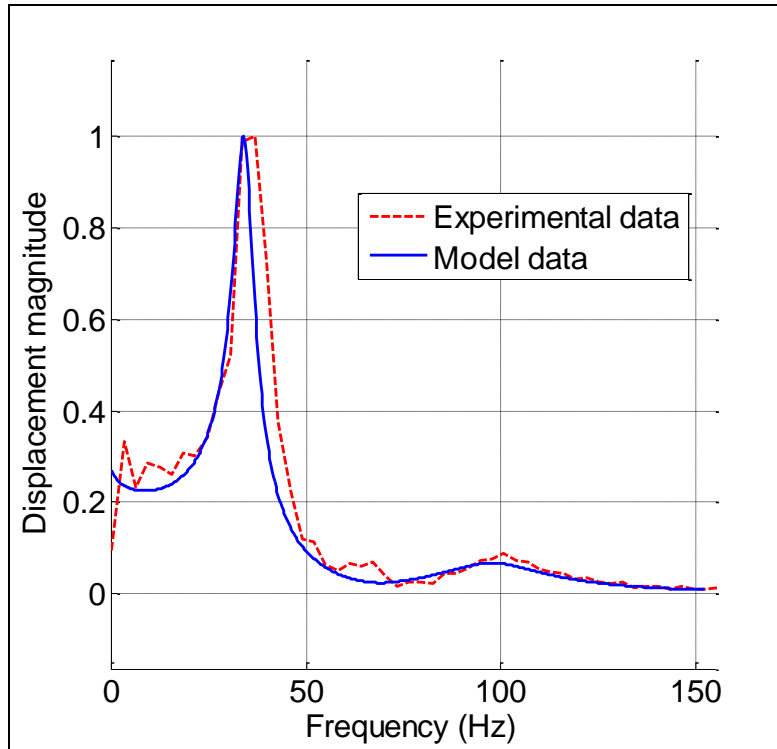


Figure 3.6 : Comparison between model and experimental spectrum

The two spectra are very similar. The natural frequencies are identified from the peaks in the spectra. The experimental and calculated frequencies are very close, the difference being less than 3.6 % on the two visible peaks. It should be noted that these two peaks correspond to modes (1,1) and (1,3); the impact being performed at the center of the plate, even modes are not excited. Higher frequency peaks are not significant, due to very high damping in the sandwich. Thus, the set-up and the model are considered equivalent.

Impacts are applied on the base plate at different positions and the transversal displacement of the sandwich is obtained for different points on the plate. The response calculated using the model is compared to that obtained with the experimental setup, in order to evaluate the accuracy of the model.



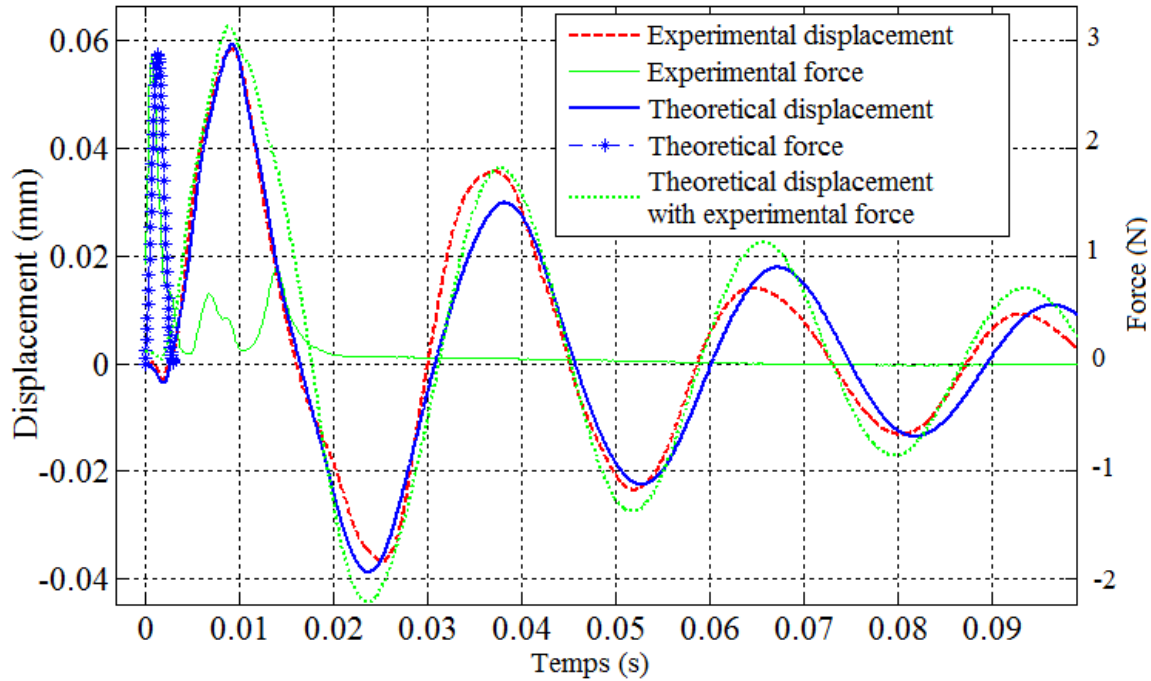


Figure 3.7 : Comparison between theoretical and experimental data  
(displacement at  $x=x_b/4$ ;  $y=y_b/2$ ,  $x_f=x_b/2$ ;  $y_f=y_b/2$ )

Figure 3.7 shows typical theoretical and experimental curves for the time signals. In the figure, results are presented for an impact at the center of the plate ( $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ), and displacement are measured at the center of one half of the plate ( $x=x_b/4$ ;  $y=y_b/2$ ). In the experiments, impacts are being done by hand using an instrumented hammer. Due to the very low stiffness of the sandwich plate, multiple impacts occur, resulting in three crests in figure 3.7. Although the first crest is very well represented by the Heitkämper formulation as shown in figure 3.7, the experimental force signal is also used in the model for validation purposes. The displacement time signals are compared. We see that during the first 20ms, all three curves overlap, showing the ability of the model to reproduce the initial transient displacement for a duration of about 10 times the contact length. Slight differences on frequency and amplitude appear only after the first peak. These differences are mainly due to :

- The small difference in natural frequencies in the theoretical model and the experimental set-up;
- Internal damping of aluminum plates and damping at the supports which are not considered in the model;

- Disparity in the angle of theoretical and experimental impacts;

Despite these small differences, the accuracy of the model is considered acceptable. It should be noted that the purpose of the model is mainly to study the initial transient response of the sandwich plate, which is in excellent agreement with the experiments.

### 3.4 Response of the sandwich and discussion

In the first simulations, an impact was applied at the center of the plate ( $x_f=x_b/2$ ;  $y_f=y_b/2$ ) using equation (3.22). In figures 3.8, 3.9 and 3.10, displacement spectra were plotted for  $x=px_b/8$ ,  $y=y_b/2$ , where  $p=4, 2$  and  $1$ , respectively. All the graphs have similar shapes in the frequency range studied. The crests observed in the response spectrum of the sandwich occur near the natural frequencies of modes (1,1) and (3,1), as discussed in figure 3.6. Since the first mode peak is greater than the third in the spectrum, the first mode is dominant in the transient response. The third mode is seen mostly at the beginning of the signal, and is almost entirely damped within 25ms after initial contact.

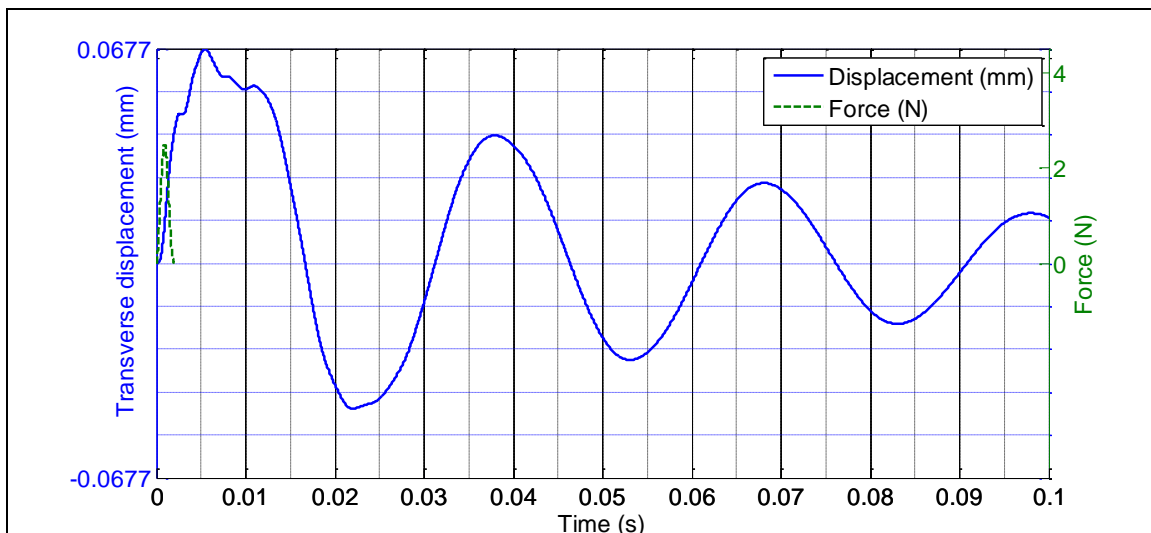


Figure 3.8 : Displacement at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ , impact at  $x_f=x_b/2$ ;  $y_f=y_b/2$

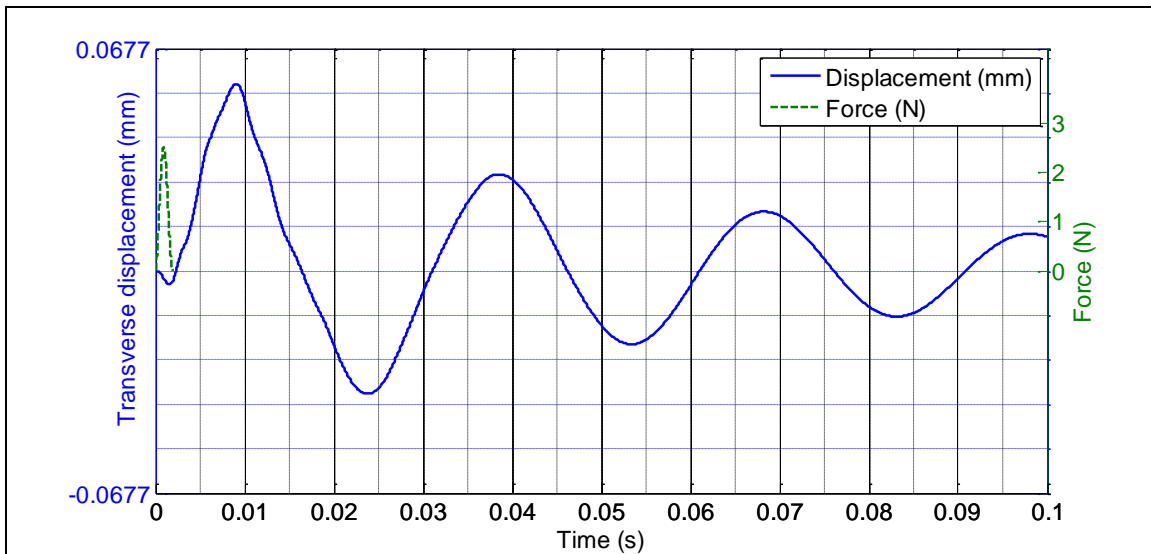


Figure 3.9 : Displacement at  $x=x_b/4$ ;  $y=y_b/2$ , impact at  $x_f=x_b/2$ ;  $y_f=y_b/2$

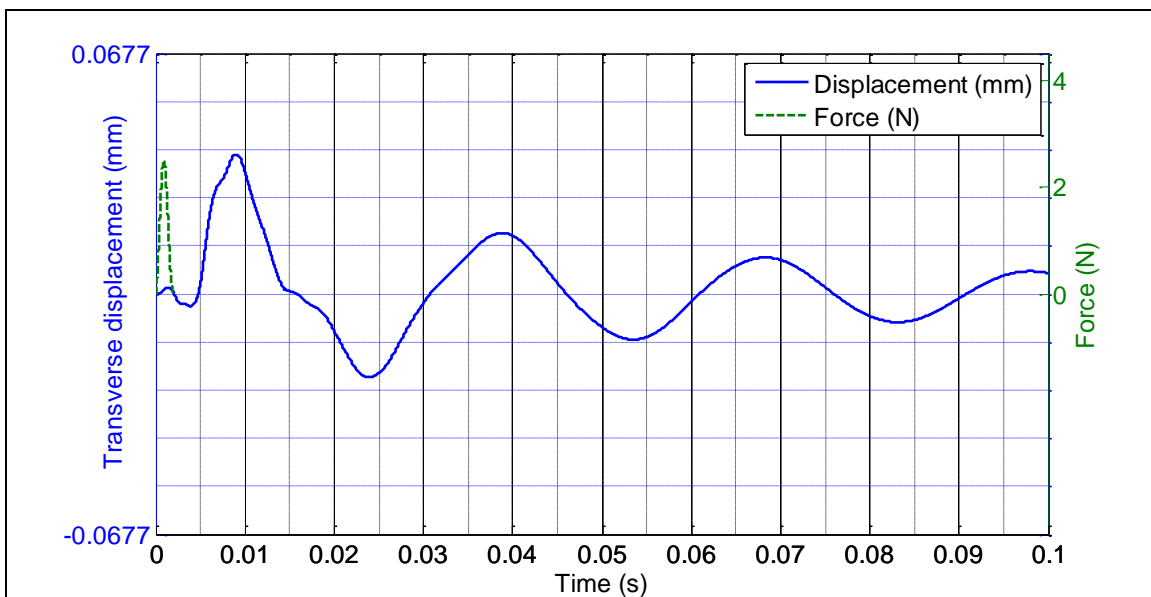


Figure 3.10 : Displacement at  $x=x_b/8$ ;  $y=y_b/2$ , impact at  $x_f=x_b/2$ ;  $y_f=y_b/2$

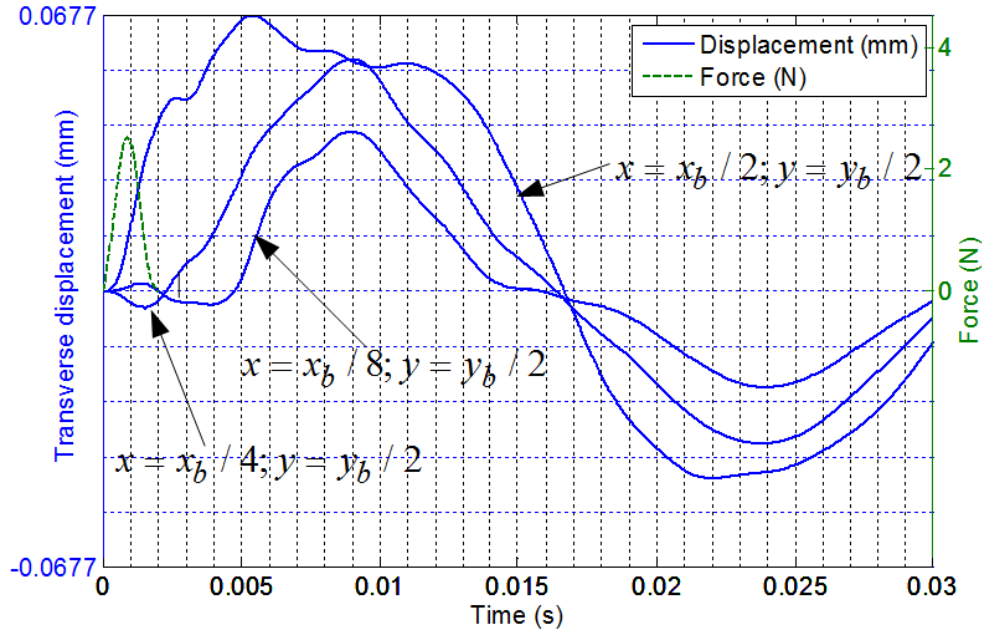


Figure 3.11 : Superposed displacement of the previous figures

Figure 3.8 shows the response of the plate at the point of impact,  $x_f = x_b/2$ ;  $y_f = y_b/2$ . The impact force is represented by a dashed line. It is shown in this figure that the structure reacts quickly, and that the deflection remains high for a few milliseconds before decreasing. The response is typical for the impact point of a flexible plate [79]. The impact point is directly loaded during the impact and the deformation reaches a local maximum at the end-of-contact time; subsequent movement occurs as strain energy is converted into bending waves that travel back and forth through the plate. However, in the other distant points (figures 3.9 and 3.10), the response takes place after a delay and has a different curve-up in the beginning of the signal. This means that the bending wave is propagated from the point of impact towards the other regions of the plate. The farther the observation point is from the impact point, the greater is the delay. We also note that the curves have similar general shapes. In addition, the period of the main cycle in curves is about 0.029s, which corresponds to the first natural frequency of the sandwich plate (33.96 Hz). This shows again that higher modes are quickly damped.

In figure 3.11, all three displacement curves (from figures 3.8 to 3.10) are plotted together. The figure focuses on the initial time responses of the plate, showing that the delay of the response increases with the distance between the impact point and the observation point, as expected.

Figure 3.12 shows a section along the length of the sandwich for different times. One can see how the disturbance created by the hammer propagates and evolves along the plate. The response of the plate is symmetrical due to the symmetry of the system. The highest crest takes place at the point of impact. The deformation increases with time, and at the end-of-contact time (2 ms), the crest begins to decrease. Meanwhile, side lobes appear as bending waves move toward the edges of the plate, as expected by Roy *et al* [68] and Oulmane *et al* [69]. This characteristic of a dispersive medium is also seen in Figure 3.9, where small crests appear prior to the main deformation crest for observation points away from the impact point.

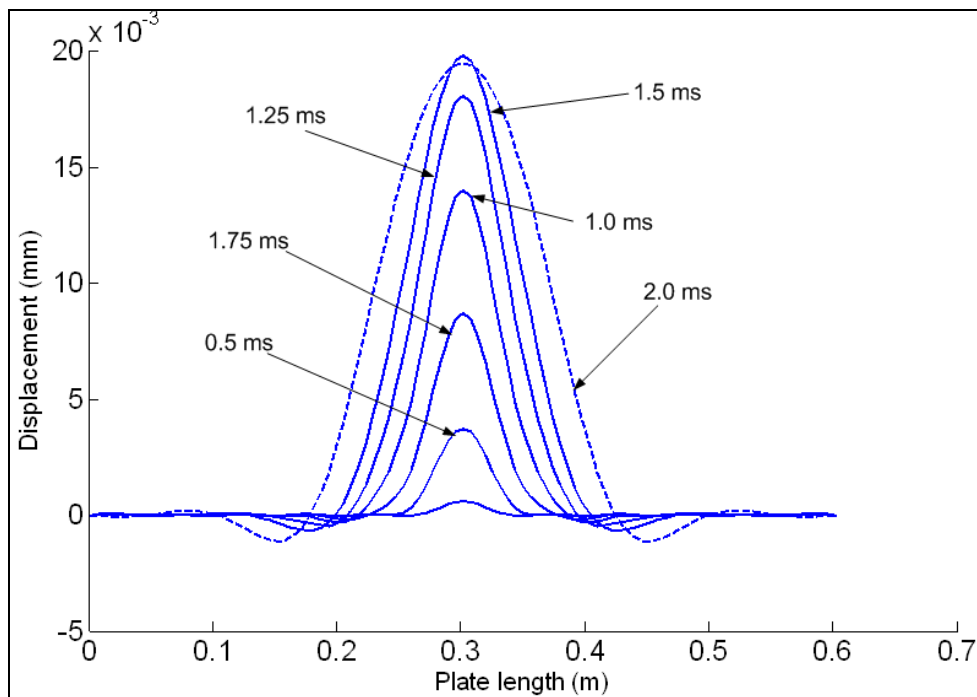


Figure 3.12 : Transversal displacement in plate section at  $y = y_b / 2$

### 3.5 Conclusion

An analytical model was developed to study the transient response of a plate with PCLD, while previous analytical models were solved for harmonic motion only. This model is based on the Lagrange's equation. The Prony series is used to express the frequency dependence of the shear modulus. The solution is carried out in the frequency domain and then converted back to time domain via direct and inverse fast Fourier transforms. The results obtained in terms of natural

frequencies and loss factor correspond accurately with those of the literature. Similarly, the calculated transient responses are in good agreement with experimental data obtained from our test bench. The transient response of a plate with PCLD due to an impact is plotted for different points and analyzed. As expected, increasing delay in the displacement response is observed as the calculation point is farther from the impact point. Similarly, the amplitude of displacement is smaller for farther calculation points. The displacement curves for different points of the sandwich have similar shapes with small differences due to higher modes, mainly in the first few milliseconds. The fundamental vibration frequency is close to the first natural frequency of the sandwich plate, showing that in this configuration, impacts excite mainly the first mode. The proposed model can be used to study the influence of PCLD geometric and physical characteristics on the vibration behaviour of the sandwich and on sound pressure.

### **Acknowledgments**

The authors wish to thank the Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) and the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC). B.K. also wishes to thank Dr. Riyad for his mathematical enlightments.

## **CHAPITRE 4    ARTICLE 2 : INFLUENCE OF THE CHARACTERISTICS OF PCLD ON THE DAMPING AND ACOUSTIC PRESSURE RADIATED BY AN IMPACTED PLATE**

Article soumis dans : Journal of Sound and Vibration

Boubaker Khalfi, Annie Ross

CREPEC, Department of mechanical engineering, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6079, Station Centre-ville, Montréal Canada, H3C 3A7

boubaker.mohamed@polymtl.ca; annie.ross@polymtl.ca

### **Abstract**

The aim of this paper is to present a parametric study of PCLD (partial constraining layer damping) characteristics on the response of a rectangular plate. Both harmonic and transient regimes are considered. In harmonic response, natural frequencies and loss factors are studied, while in transient response, where the external force is an impact, displacement and acoustic pressure are analyzed. The governing equation is obtained from Lagrange's equations. The viscoelastic behaviour of the core, which depends on frequency, is represented by Prony series. Once obtained, the governing equation is solved in frequency domain using Fast Fourier Transform (FFT). The solution is then converted back into time domain with the Inverse Fast Fourier Transform (IFFT).

The model is validated with results from literature using a plate with PCLD. The simulation results show that patch geometry has a significant effect on the vibration behaviour of the sandwich. Several conclusions were obtained :

- Identification of the proportions of different layer thickness for optimal damping;
- Definition of areas in the plate promoting maximum shear in the viscoelastic layer;
- Existence of a relationship between loss factor and deformation mode.

The originality of this work comes from the capacity of the model to study the influence of any input parameter on the behaviour of the sandwich in harmonic response as well as in transient response. Furthermore, the response behaviour of the sandwich is described and discussed.

**Keywords :** Sandwich, PCLD, plate, transient response, damping, impact.

## 4.1 Introduction

Plate and shell structures are used in various fields of engineering such as : aerospace technology, shipbuilding and automotive industry. When machined, drilled or riveted the structures produce harmful noise, especially in processes involving impacts. Since most of the impact noises are directly related to movement of the structure, reducing vibration leads to lower noise. Among techniques used for vibration reduction, we find Partial Constrained Layer Damping (PCLD). This technique consists of a viscoelastic material (VEM) bonded on the plate or shell to be damped. The VEM is constrained by a rigid material, inducing shear in the core to produce damping.

In the design of PCLD, the analysis focuses on the best combination of layer thicknesses, position and covered surface to ensure maximum damping. Literature shows that there are two main methods to design PCLD. The first approach is to formulate an optimization function in which the displacement is the parameter to be minimized and geometric characteristics of the patch are the variables to be determined. The second approach explores various configurations of the entire patch-plate and compares the effectiveness of each configuration.

Under the first approach, Zheng *et al* [22] developed an analytical model based on energy approach, for the optimization of PCLD on a cylinder. They showed that greater coverage provides higher damping, and that large axial to circumferential length ratio is more efficient.

Chen *et al* [72] studied a viscoelastic sandwich, to find the optimal PCLD characteristics for maximum damping based on the energy approach. The results showed that optimal damping was obtained when thickness of the constraining plate is twice the thickness of the viscoelastic layer.

Under the second approach, Mura *et al* [56] conducted a dynamic analysis using a finite element code (Viscoplate) for different sandwiches with partial coverage. The objective was to evaluate the influence of patch design on sandwich damping. The loss factor is obtained by the method of Modal Strain Energy. They showed that changes in natural frequencies depend mainly on the contribution of the patch to modify the mass of the structure.

They also concluded that for all cases studied, greater coverage provides higher damping, and that each vibration mode should be analyzed separately to provide best configuration.



Other authors use optimization algorithms such as Feasible Arc Interior Point Algorithm (FAIPA) or genetic algorithm (GA) to find the optimal design of a sandwich. This technique is mainly used by researchers working on composites as Araujo *et al* [55] and Zheng *et al* [54]. Nakra [57, 80] used finite elements method, perturbation method, and dynamic analysis to find the optimal parameters of sandwich beams and plates. By studying three configurations, he showed that maximum damping takes place when PCLD is located in the middle of the plate and, to a lesser degree, at the corners of the plate.

Lall *et al* [27] used the Rayleigh-Ritz method to obtain the governing equation and analyze different configurations of layer thickness, shear modulus and patch position were varied to determine their influences on natural frequencies and loss factor. They concluded that for high modes, the partial coverage provides a loss factor superior to full coverage. Loss factor is minimal with PCLD located at the center of the plate, and maximal when PCLD is at the border. This last conclusion appears to be in disagreement with the result of Nakra.

Assaf *et al* [58] used Hamilton's principle and finite element method to deduce, by varying the PCLD size (with same layer thicknesses), that partial coverage (75% of full coverage) provides better damping for the first mode.

In this paper, a model is described and two analyses are performed. In the first analysis, the influence of PCLD geometrical properties on natural frequencies and loss factor is examined in harmonic response. The second analysis is performed in transient response, where the relation between PCLD properties and displacement on one hand, and PCLD properties and acoustic pressure on the other hand. By doing so, we intend not only to identify layer thickness ratios for optimal damping, and to define the areas in the plate promoting maximum shear in the viscoelastic layer, but also to show the relationship between loss factor and deformation mode. Significant results summarizing the response of the plate with and without damping treatment are reported, highlighting the efficiency and the flexibility of the present model.

## **4.2 Model**

This section describes the model briefly, with a focus on the elements that are necessary for our discussion. The sandwich studied consists of a simply supported plate or base plate (BP) with a

patch composed of VEM and constraining plate (CP), as in figure 4.1. The different dimensions used in the model are also indicated

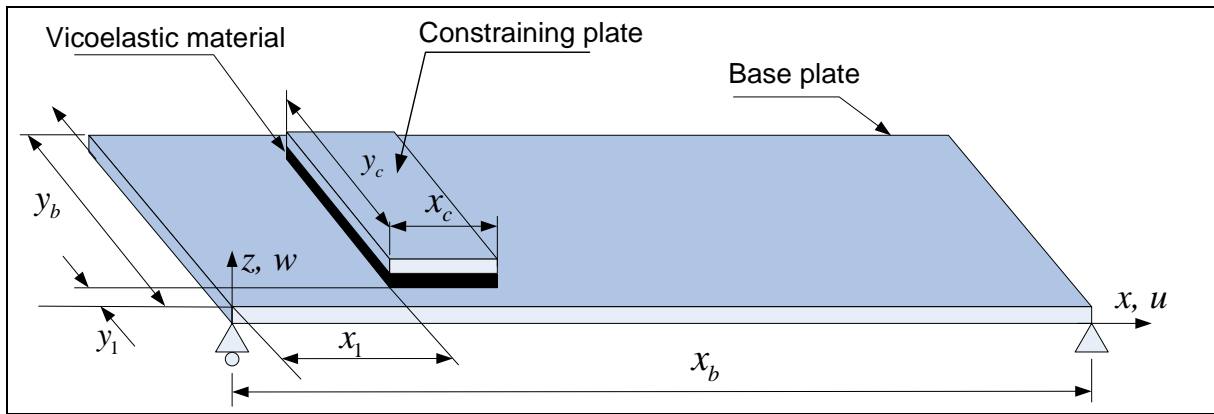


Figure 4.1 : Simply supported sandwich plate

In figure 4.1, subscripts  $b$ ,  $c$  and  $v$  are respectively relative to the BP, CP and VEM. The transverse displacement is expressed by  $w$ , and the longitudinal displacements in the  $x$  and  $y$  direction are represented by  $u$  and  $v$  respectively. It is assumed that the three layers have the same transverse displacement. This assumption is widely used by authors since the three layers are perfectly bonded. In addition, shear deflection and rotation inertia in the elastic plate are neglected. Finally, the VEM undergoes only transverse shear without normal stress. The deformation occurs in two planes ( $zx$  and  $zy$ ). The angles relative to these deformations are denoted respectively by  $\gamma_x$  and  $\gamma_y$ , and can be expressed by :

$$\gamma_x = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$\gamma_y = \frac{v_c - v_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.2)$$

The shear modulus is assumed to be complex and frequency dependent. The Prony series in the frequency domain is used to simulate its behaviour [2].

The displacement is expressed with the assumed mode method, where the space-dependant function must satisfy the boundaries conditions, and the time-dependant function must satisfy initial conditions [1, 12] :

$$X(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i(x, y) \xi_i(t) \quad (4.3)$$

In this expression,  $X$  is the displacement,  $\Gamma_i$  are the admissible functions,  $\xi_i$  are the new generalized coordinates,  $n$  is the number of modes. The equation of motion is derived from the Lagrange's equations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = Q_i \quad (4.4)$$

Both strain  $U$  and kinetic  $K$  energies are expressed to obtain the Lagrangian [19, 81] :

$$L = K - U \quad (4.5)$$

The generalized forces  $Q_i = -\partial S / \partial \dot{\xi}_i + \partial P / \partial \xi_i$  (4.6)

are obtained by differentiation of : Rayleigh's dissipation function  $S$  and virtual work  $P$  done by external forces. Replacing displacement by its expression (equation (4.3)) and developing equation (4.5) for a simply supported plate, we obtain the following system :

$$[M] \ddot{X} + [K] X = Q \quad (4.7)$$

where  $M$  and  $K$  are respectively the mass and stiffness matrix. The impact force is modeled analytically [36] :

$$F(t) = F_0 \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \right) \sin(0.97T)^{1.5} e^{-(0.4T)^4} \\ + \left( \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + \Lambda} \right) \left( \frac{T}{T + 1/\Lambda} \right)^{1.5} e^{-\frac{T}{\Lambda}} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

where  $T = \pi t / T_0$ ,  $T_0$  is the time contact,  $F_0$  the force amplitude,  $\Lambda$  the impact parameter depending on the geometrical and mechanical properties of the two bodies.

Since our analysis encompasses harmonic and transient responses, equation (4.7) will be solved in for both cases.

For free vibration, the system becomes [4] :

$$\{K - \omega^2 M\} X = 0 \quad (4.9)$$

The eigenvalue problem can be solved with different techniques [7] to obtain the natural frequencies and loss factors respectively by [9] :

$$\omega = \sqrt{\text{Re}(\omega^2)} \quad (4.10)$$

$$\eta = \frac{\text{Im}(\omega^2)}{\text{Re}(\omega^2)} \quad (4.11)$$

To conduct a transient analysis of the system subjected to impact excitation, equation (4.7) can be solved in time domain. However, due to the non linear terms in the expression of energy, it is more convenient to solve this equation in the frequency domain. The Fast Fourier Transform FFT is used to convert equation (4.7) in the frequency domain, where it is solved. The solution is converted back to the time domain by Inverse Fast Fourier Transform IFFT. Once the displacement is obtained, acceleration is calculated by numerical differentiation, and acoustic pressure is obtained using Rayleigh's integral [60] :

$$p(X, Y, Z, t) = \frac{\rho}{2\pi} \iint \ddot{w} \left( x, y, t - \frac{d}{c} \right) \frac{dx dy}{d} \quad (4.12)$$

where  $c$  and  $\rho$  are respectively the sound speed in the air and density of air. (see figure 4.2)

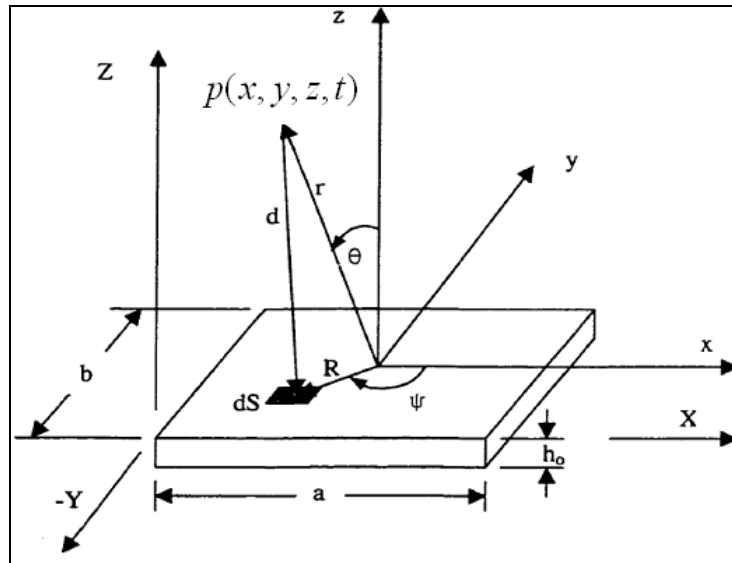


Figure 4.2 : Coordinate system for the acoustic pressure calculation [67]

### 4.3 Validation

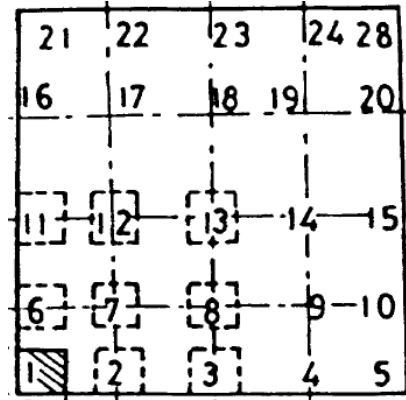


Figure 4.3 : Patch positions [57]

The model is validated with the configuration studied by Nakra [57]. This configuration consists of a simply supported square plate with square PCLD. Three patch positions are studied : position 1, 3 and 13 (figure 4.3). For each position, table 4.1 shows the comparison between natural frequency and loss factor for first mode calculated in reference [57] and those given by the present model. The characteristics of the sandwich are also shown in table 4.1.

Table 4.1 : Model validation

Comparison of natural frequencies and loss factor of a symmetric sandwich plate

$$x_b = 0.4m, y_b = 0.4m, x_c = 0.15m, y_c = 0.15m, h_b = h_c = 5mm, h_v = 2.5mm, \nu_b = \nu_c = 0.334$$

$$\rho_v = 2000kg/m^3, \rho_b = \rho_c = 7800kg/m^3, E_b = E_c = 2.0710^5 MPa, \zeta = 0.38, G_v = 4MPa,$$

	Position 1		Position 3		Position 13	
	Reference [57]	model	Reference [57]	model	Reference [57]	model
$\omega(rd/s)$	968.1	968.04	955.7	955.74	930.8	930.83
$\eta$	0.00184	0.00185	0.0011	0.0011	0.0030	0.0030

The results are in very good agreement with those given by [57] since the error is less than 0.006% on frequencies and 0.54% on loss factors. Knowing that Nakra used finite element

method, this validation ensures that the present model is efficient in analyzing sandwich with PCLD.

#### 4.4 Results and discussion

The simulations are done on a simply supported aluminum plate  $(x_b, y_b, h_b) = (601\text{mm}, 283\text{mm}, 0.793\text{mm})$ . The mechanical properties & number of modes used for the base plate and constraining plate are indicated in table 4.2, these values are applicable in all analysis unless otherwise indicated.

Table 4.2 : Mechanical properties & number of modes

Young Modulus	Shear modulus	Poisson ratio	Density ( $kg / m^3$ )		Damping ratio of the VEM	Number of modes		
			$\rho_b, \rho_c$	$\rho_v$		$\zeta$	$n_w$	$n_b$
$E_b, E_c$ (GPa)	$G_v$ (GPa)	$\nu_b, \nu_c$	$\rho_b, \rho_c$	$\rho_v$	$\zeta$	$n_w$	$n_b$	$n_c$
69.8	0.869	0.33	2700	999	0.5	200	30	30

#### 4.4.1 Harmonic response

##### 4.4.1.1 Influence of thickness

In this section, the influence of layer thickness ratios on natural frequencies and loss factors is studied. The thickness of one layer is maintained constant while the thickness ratio of the two other layers is varied. Thus, three cases are possible, corresponding to ratios :  $h_v/h_c$ ,  $h_v/h_b$  and  $h_c/h_b$ . Using figure 4.1, the sandwich has the following dimensions :  $x_b=0.601\text{m}$ ,  $y_b=0.283\text{m}$ ,  $x_c=0.558\text{m}$ ,  $y_c=0.1016\text{m}$ ,  $x_l=0.0254\text{m}$ ,  $y_l=0.0907\text{m}$  (see figure 4.4).

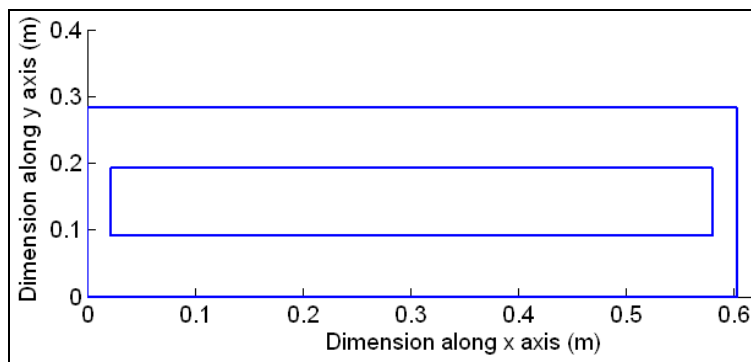


Figure 4.4 : Dimensions of sandwich studied

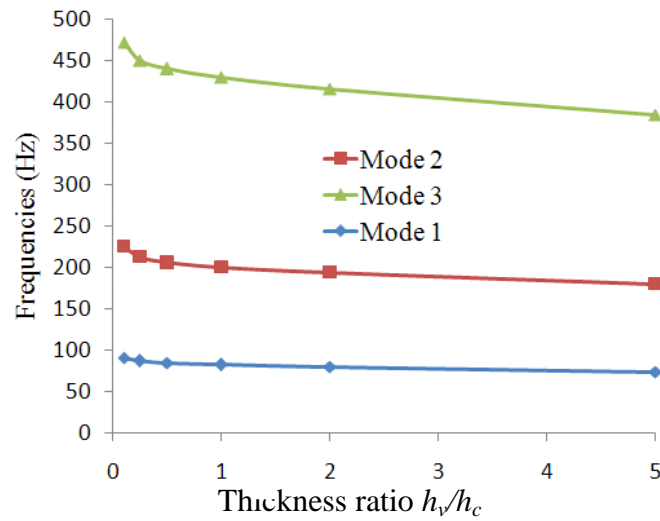


Figure 4.5 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio  $h_v/h_c$ ,

$$h_b=2.38\text{mm}, h_c=0.79\text{mm}$$

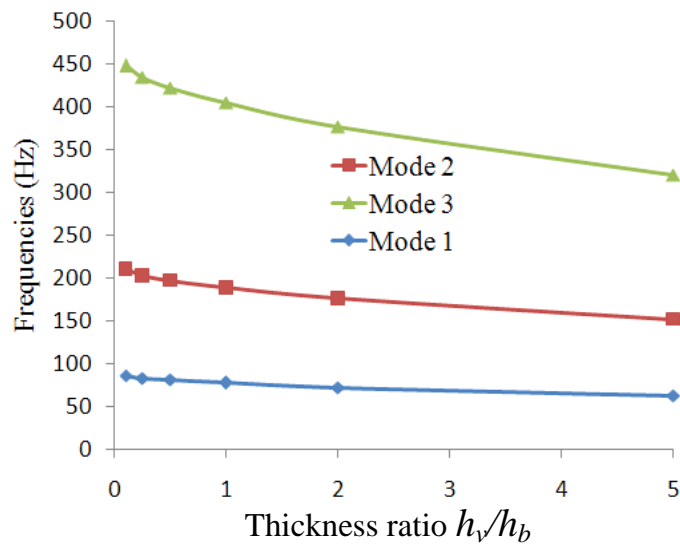


Figure 4.6 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio  $h_v/h_b$

$$(h_b=2.38\text{mm}, h_c=0.79\text{mm})$$

Figures 4.5 and 4.6 show respectively the variation of natural frequencies against ratio  $h_v/h_c$  and  $h_v/h_b$ . We see that natural frequencies decrease when the ratios increase (due to  $h_v$  increase).

Since natural frequencies are proportional to the sandwich stiffness and inversely proportional to the sandwich mass, it is observed that an increase of  $h_v$  contributes more to total added weight than to added stiffness of the sandwich.

In figure 4.7, the variation of natural frequencies is shown against the  $h_c/h_b$  ratio. As shown, the behaviour is reversed compared to figure 4.6. Frequencies increase with higher ratio, meaning that the constraining plate contributes more to increasing stiffness than increasing mass.

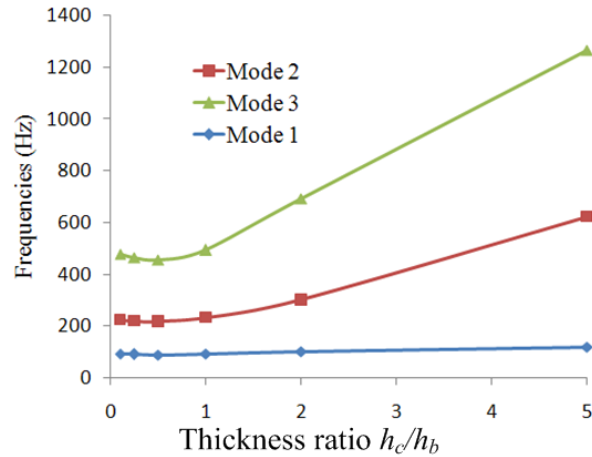


Figure 4.7 : Variation of natural frequencies as function of thickness ratio  $h_c/h_b$

( $h_b=2.38\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ )

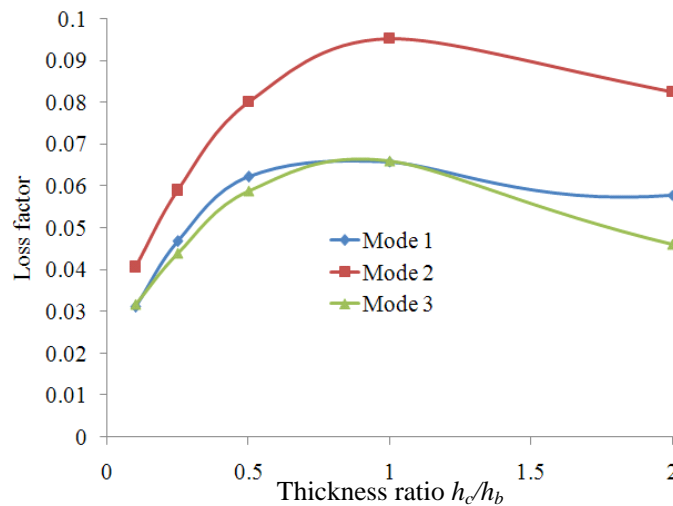


Figure 4.8 : Variation of loss factor as function of thickness ratio  $h_c/h_b$ ,

( $h_b=2.38\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ )



Figures 4.8, 4.9 and 4.10 show respectively the variation of loss factor as functions of the  $h_c/h_b$ ,  $h_v/h_b$  and  $h_v/h_c$  ratio. In figure 4.8 the loss factor is maximal in the vicinity of a ratio equal to unity [30]. For higher ratios, the loss factor decreases, showing that thicker constraining layer is inefficient. In fact, when  $h_c$  exceeds  $h_b$ , the face sheet becomes quite stiff and shear deformation in the VEM is reduced. In other words, the VEM no longer has sufficient flexibility to dissipate as much energy.

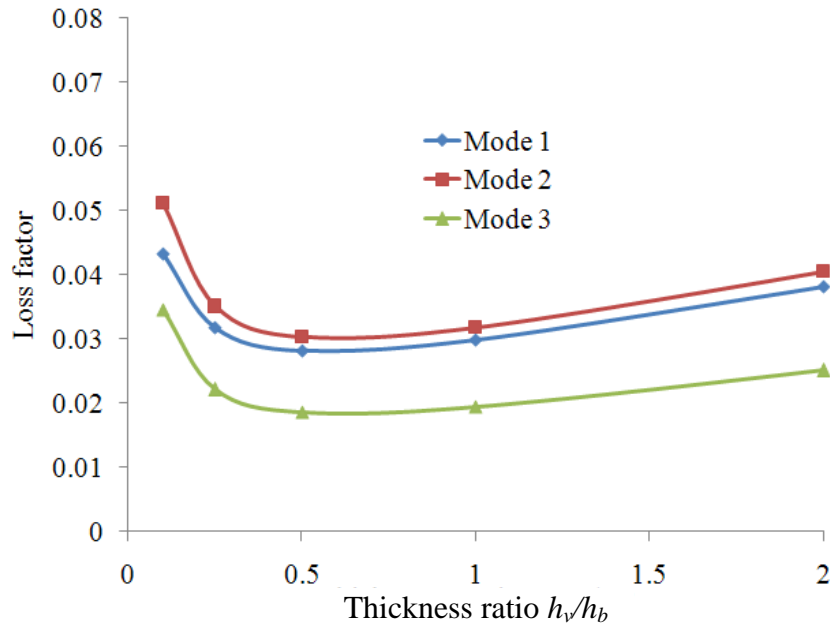


Figure 4.9 : Variation of loss factor as function of thickness ratio  $h_v/h_b$   
 ( $h_b=2.38\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ )

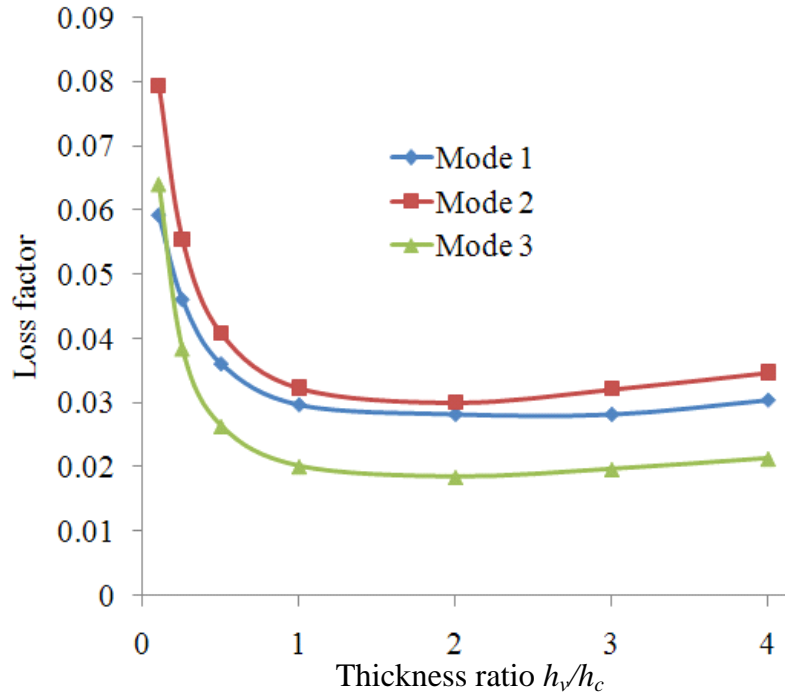


Figure 4.10 : Variation of loss factor as function of thickness ratio  $h_v/h_c$ ,

$$(h_b=2.38\text{mm}, h_c=0.79\text{mm})$$

Figure 4.9 and 4.10 show the variation of loss factor as function of  $h_v/h_b$  and  $h_v/h_c$ , respectively. It is seen that, loss factor is higher for thinner VEM. This can be explained by equations (4.1) and (4.2), in which shear angle is inversely proportional to  $h_v$ . Noting that Chen *et al* [72] had proved by an optimization problem that the best damping is obtained when  $h_v$  is about the half of  $h_c$ , this conclusion is consolidated here, in addition, loss factor reaches its minimum when  $h_v$  is the twice of  $h_c$ . Therefore, damping not only depends on the extent of covered area, as mentioned in the literature, or the thickness of the core, but also on the thickness ratios of the layers.

#### 4.4.1.2 Influence of patch position

Due to symmetries of the base plate and boundary conditions, the study of patch position will be limited only for the quarter of the plate. The dimensions of the patch are  $(x_b/10, y_b/10)$ , and figure 4.11 shows the configuration studied. The thickness of three layers is kept constant. The patch is moved across the surface of the base plate, over one quarter of the sandwich 25 positions are studied, that is five positions across each axis, (see table 4.3). For each position, simulations are

carried out and the loss factor is obtained for each mode, the results are shown in figures 4.12 and 4.13.

Table 4.3 : Values used for patch position simulation

$x_b$ (m)	$y_b$ (m)	$h_b$ (m)	$h_c$ (m)	$h_v$ (m)	$x_c$ (m)	$y_c$ (m)
0.601	0.283	$7.93 \cdot 10^{-4}$	$h_b$	$0.12710^{-3}$	0.0601	0.0283

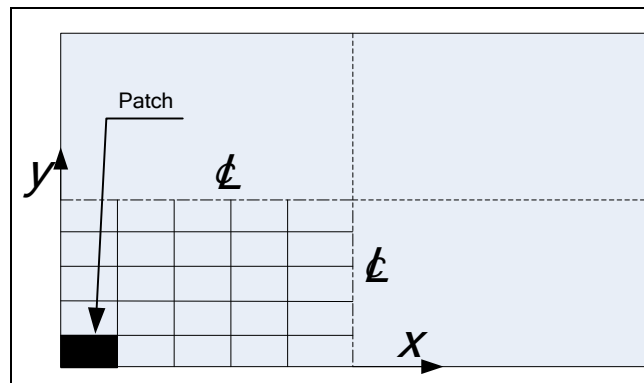


Figure 4.11 : Configuration studied for the position of the patch

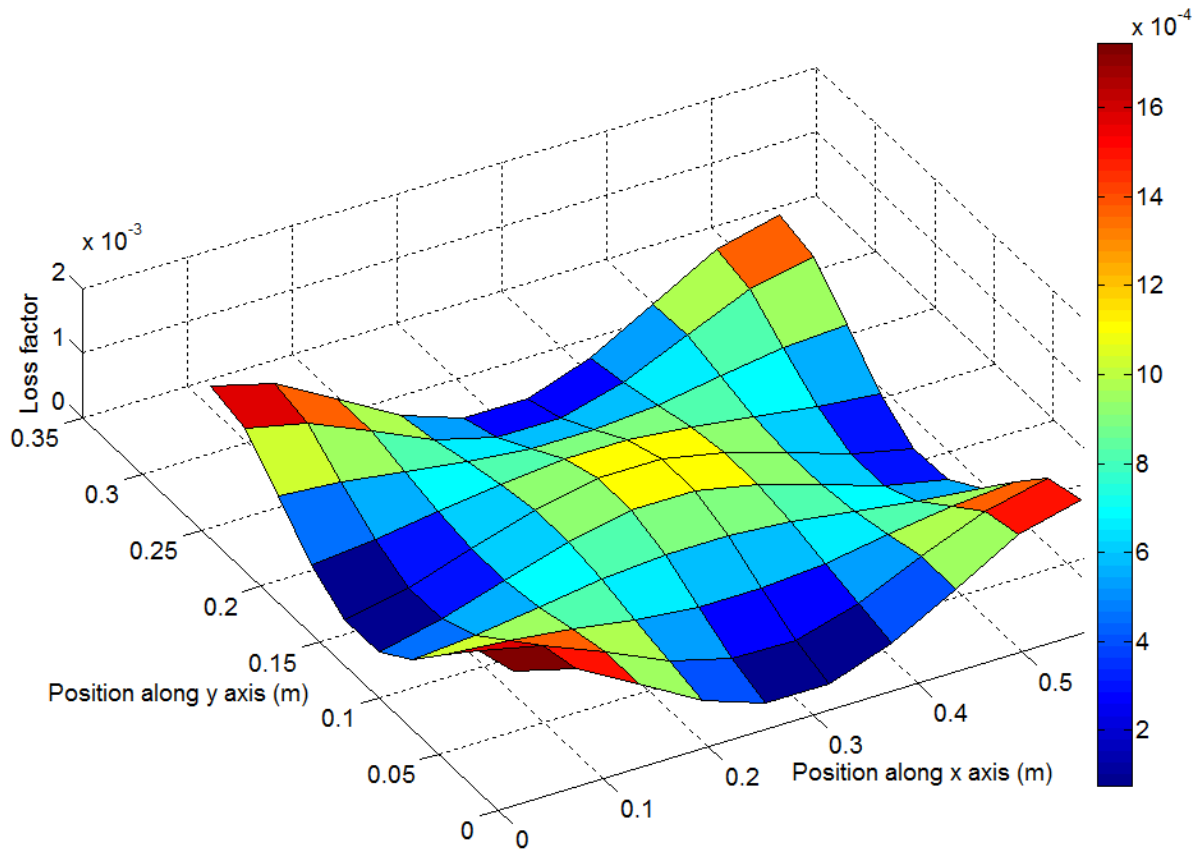


Figure 4.12 : Variation of loss factor along the plate for mode (1,1)

Figure 4.12 shows for mode (1,1) a 3D representation of loss factor as a function of patch position on the plate. Calculations were performed for patch positions over one quarter of the plate, and the three other quarters were obtained by mirror image. It is observed that maximum damping takes place in the corners. A maximum also occurs in the middle of the plate, although it is lower than at the corners. Loss factor reaches its minimum in central borders. This result is in good agreement with Nakra [57] if we use the same viscoelastic material as Nakra.

Furthermore, except for the corners of the plate ( along  $x = x_b / 2$  or  $y = y_b / 2$ ), the value of the loss factor follows the deformation mode of the plate in its amplitude, as a result, the maximum takes place in the center of the plate, while the minimum occurs in the borders. This behaviour is confirmed in figure 4.13, where the same phenomenon can be observed for each crest of the second mode (2,1) : considering each half-plate (the nodal line being the separation between plate halves), the loss factor has maxima at mode crest and at corners of the half-plate,. Along the nodal line, the loss factor is therefore maximal close to the edges of the plate and reaches its minimum in the middle of the plate.

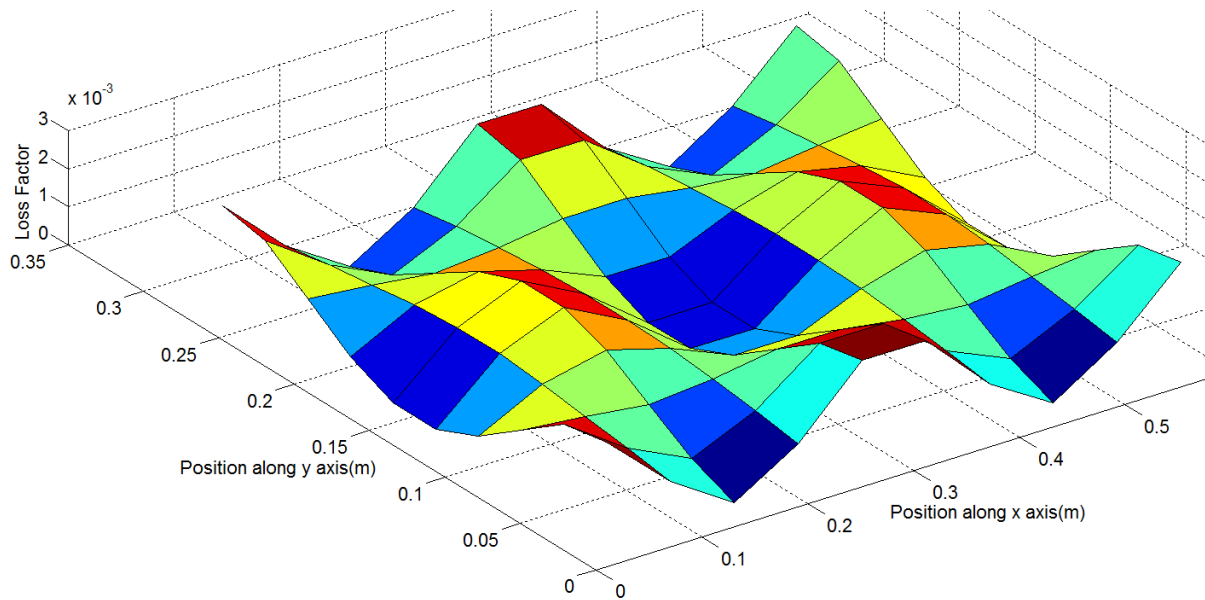


Figure 4.13 : Variation of loss factor along the plate for mode (2,1)

From the previous discussions, it can be concluded that the variation of the LF is closely related to the crests of the deformation mode. For each crest formed in a given mode, the LF is maximal in the corners, medium in the center of the crest, and minimal at the central edges of the crest. In addition, a very interesting thing shown by these figures is that the value of the loss factor is more or less shaped on the deformation mode; inversely, for such plate, by plotting the deformation mode we obtain the evolution of loss factor with respect to patch position along the plate surface. This result will be very helpful for designers in placing the PCLD when damping plate via this technique. These conclusions are valid also for the third mode, and we expect the same for all higher modes.

As mentioned before in the introduction, the results obtained by Nakra [57, 80] and Lall [27] regarding the areas that provide a maximum of loss factor (LF) seems to be contradictory. For Nakra, maximum LF is obtained in the center of the plate, but for Lall the center of the plate provides minimum LF. To elucidate this disagreement, we performed simulations in which we considered both symmetric and non-symmetric patches. In addition, simulations were carried out with and without rigid body mode (0,0) of the constraining layer. The simulations show that for symmetric patches mode (0,0) does not have an effect on LF, but that for non-symmetric patches the results obtained agree with those of Nakra. Since Lall in his paper did not specify if he had

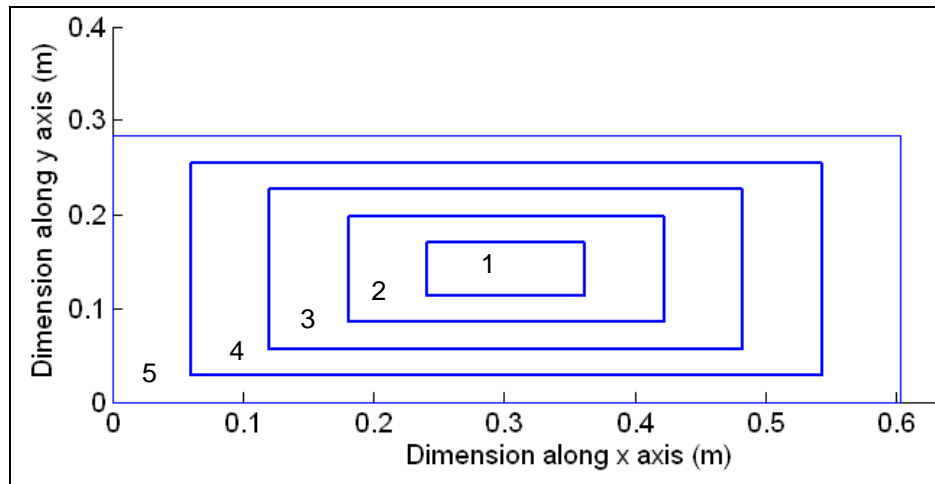
included rigid body mode (0,0) for the constraining layer, this could be the source of the disagreement.

#### 4.4.1.3 Influence of patch size

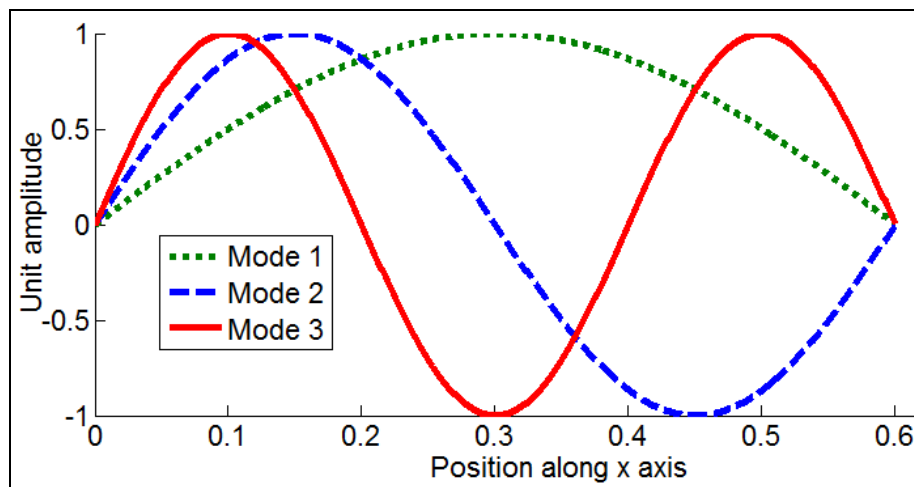
In this section, the influence of the extent of the patch on natural frequencies and LF is analyzed. In addition to the dimensions of the plate mentioned in table 4.3, the layer thicknesses of the patch are :  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ . The figure 4.14 shows the shapes of the first three modes and the different configurations studied (dimensions in table 4.4). We started with a small patch placed in the center of the plate. Then, we increase its size until reaching total coverage. Figures 4.17 and 4.18 show respectively the variations of natural frequencies and loss factor against coverage percent.

Table 4.4 : Dimensions of patches

Configuration	$x_1$	$y_1$	$x_c$	$y_c$
1	0.241	0.113	0.121	0.057
2	0.181	0.085	0.241	0.113
3	0.121	0.057	0.362	0.170
4	0.040	0.018	0.520	0.245
5	0.000	0.000	0.603	0.283



a)



b)

Figure 4.14 : a) sandwiches studied, b) mode shapes

Before studying the influence of coverage extent on natural frequencies and loss factor, shear angle in the viscoelastic layer is plotted in figure 4.15 for full coverage to illustrate its variation in comparison with deformation mode. This will be useful to understand the variation of loss factor as a function of coverage percent. As seen, for mode (1, 1), maximum shear is obtained at the borders, while the minimum takes place at the center of the plate. For mode (2, 1) and mode (3, 1), the maximum is obtained both at nodal line and at borders while the minimum is reached at the crests. The last results could be generalized for all modes, in the case of symmetric sandwiches :

- Maximum occurs at nodal line and borders;
- Minimum occurs at the modal crests.

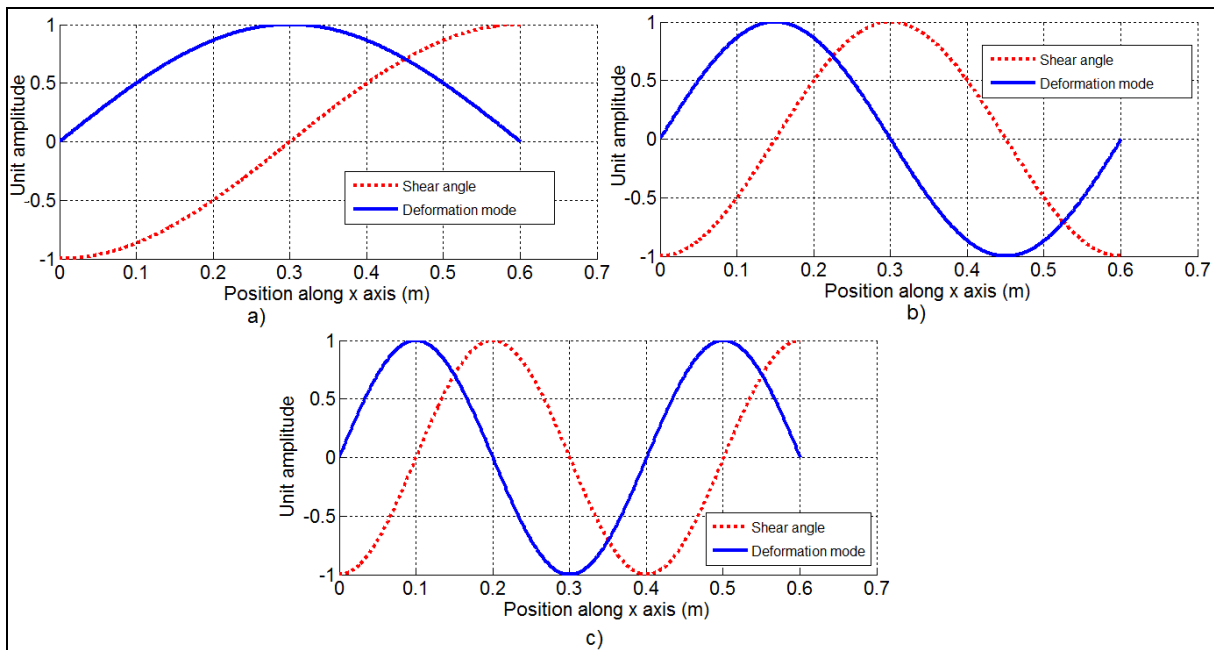


Figure 4.15 : Shear angle variation against deformation mode

a) mode (1,1), b) mode (2,1), c) mode (3,1)

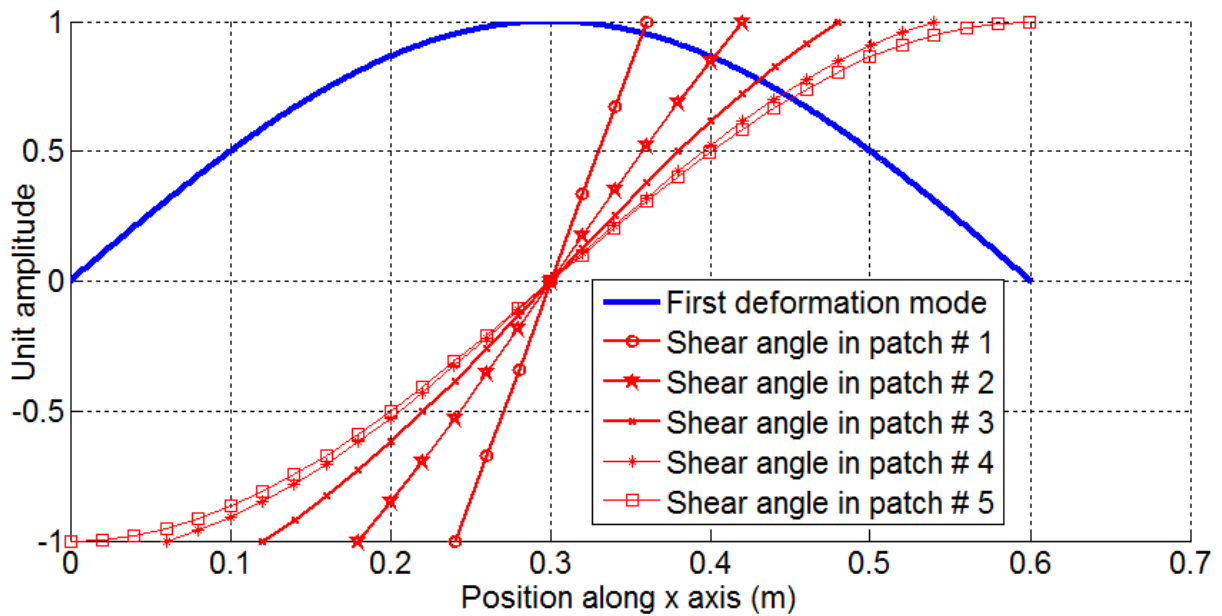


Figure 4.16 : Shear angle variation in the patch used in figure 14 (mode (1,1))



In figure 4.16, we deepen the analysis for the different patches used in figure 4.14, and we plot the shear angle for each patch against the first deformation mode. It is seen that for the two smaller patches (1 and 2), the shear angle is almost linear and increases rapidly. For others configurations, the slope becomes lower with larger patch. From the third patch, increasing curvature can be seen at the extremities of the shear angle curves. Shear angle becomes constant at the extremities of the patch for full coverage (patch # 5).

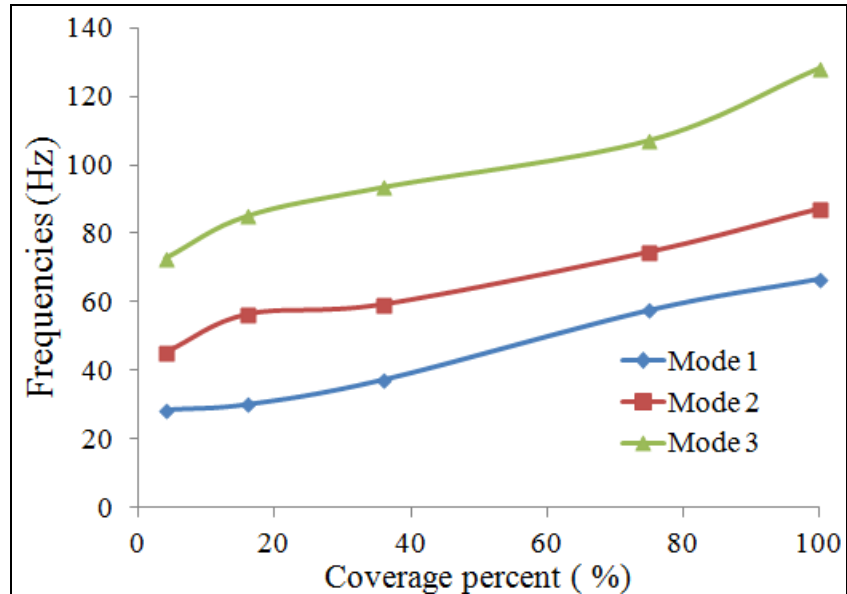


Figure 4.17 : Frequencies variation

In figure 4.17, it is observed that natural frequencies increase when the coverage percent increases; consequently, the enlargement of the patch contributes more to increasing the stiffness than increasing the mass. This conclusion is the same as the one obtained above when varying the thicknesses of the constraining plate and base plate.

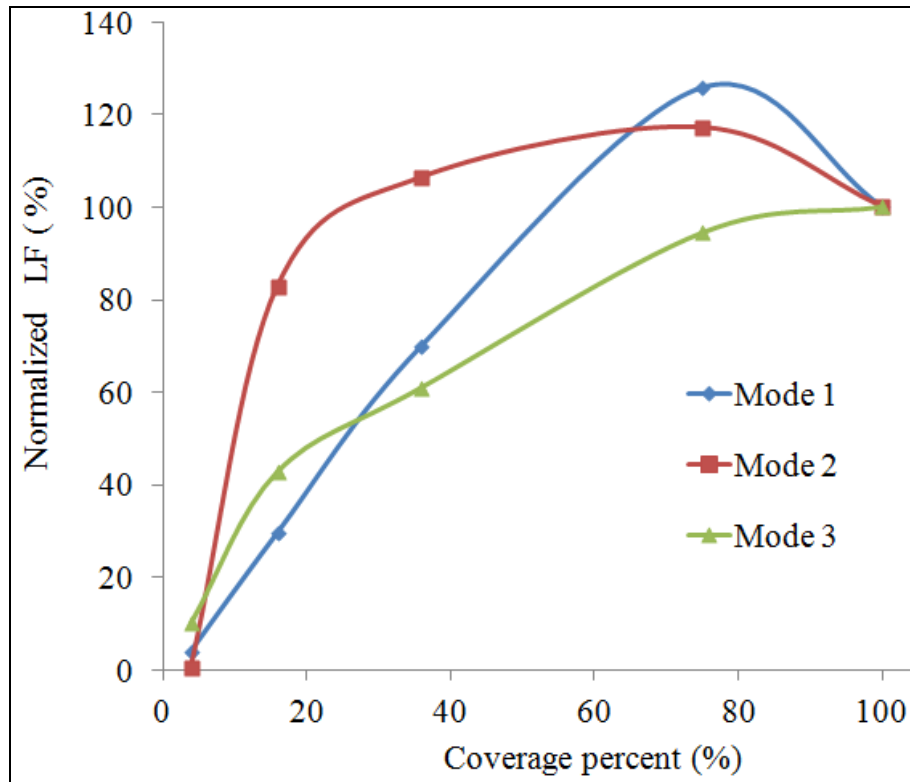


Figure 4.18 : Loss factors variation

Figure 4.18 shows the evolution of the normalized LF percent against coverage, both axes were normalized with respect to their values for full coverage, so that the curves have more explicit meaning. As a first remark, for the mode (1, 1), the slope of the curve remains relatively constant until the loss factor reaches its maximum for 75 % coverage (patch #4). As discussed before, this behaviour is in agreement with the variation of the shear angle. Furthermore, for mode (2,1), a 16% coverage (second patch) gives 82% of loss factor for full coverage configuration, while for modes (3,1) and (1,1), it gives only 42% and 30 % respectively. This can be explained by the fact that even modes have a nodal line at the center of the plate, yielding high shear deformation in the viscoelastic layer even for small patches located at the center of the plate. On the contrary, odd modes (as in figure 4.16) have low shear zones at the center of the plate, and thus require larger pads for greater damping. These conclusions are in agreement with those drawn when studying the influence of patch position.

For the first and second modes, maximum loss factor is obtained for 75% coverage, this result is also in agreement with [58]. To elucidate this behaviour, we have compared the loss factors for three configurations : the first and the second configurations have the same patch but located at

adjacent positions; the third configuration has one patch covering the same total area as configurations one and two together (see figure 4.19). The loss factors obtained are as follow : 0.0641, 0.0860 and 0.137 for configurations 1, 2 and 3 respectively. These results show that the sum of the LF of the two first sandwiches is greater than the LF of the third configuration. From these tests, it can be concluded that loss factor is not linear with surface coverage. A smaller patch located at an area promoting shearing in the viscoelastic layer can be more efficient than a larger patch at a location where shearing is low. This explains why we obtain the maximum LF for a plate with PCLD and not for a plate with full coverage.

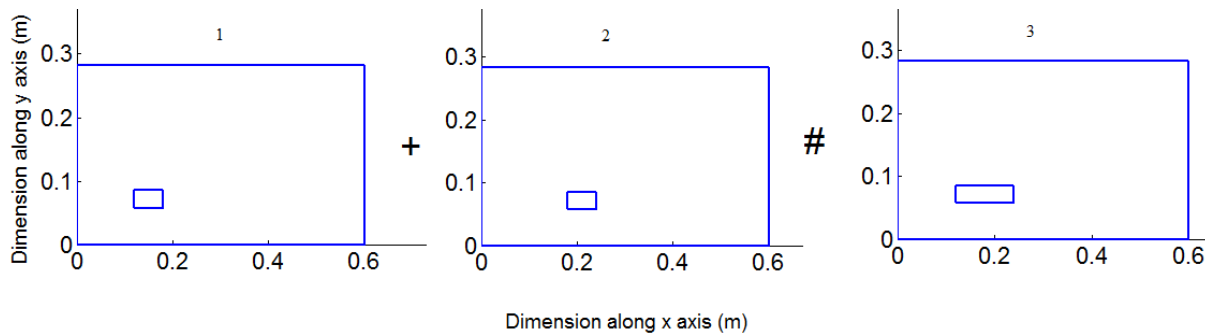


Figure 4.19 : Patches positions and sizes

#### 4.4.2 Transient response

At this stage the second member of the equation of motion (equation (4.7)) is no longer zero; there is an external impact excitation. The impact is modeled by equation (4.8) is applied at the center of the sandwich. In this section, transient response analysis is carried out for the same parameters as for harmonic response. By doing so, it will be possible to compare the behaviour of the sandwich in both states. Furthermore, the analysis includes the influence of patch characteristics on instantaneous displacement and acoustic pressure. In addition to the characteristics of sandwich mentioned in table 4.1, the values in table 5 are used in transient response.

Table 4.5 : Values used in transient response

$F_0(N)$	$T_0(s)$	$\Lambda$	$\Delta t(s)$	$n_w$	$n_b, n_c$	$c(m/s)$
2.62	$210^{-3}$	1	$5 \cdot 10^{-5}$	200	30	340

#### 4.4.2.1 Influence of thickness

The same sandwich as in figure 4.4 is studied, only the thickness ratio are varied.

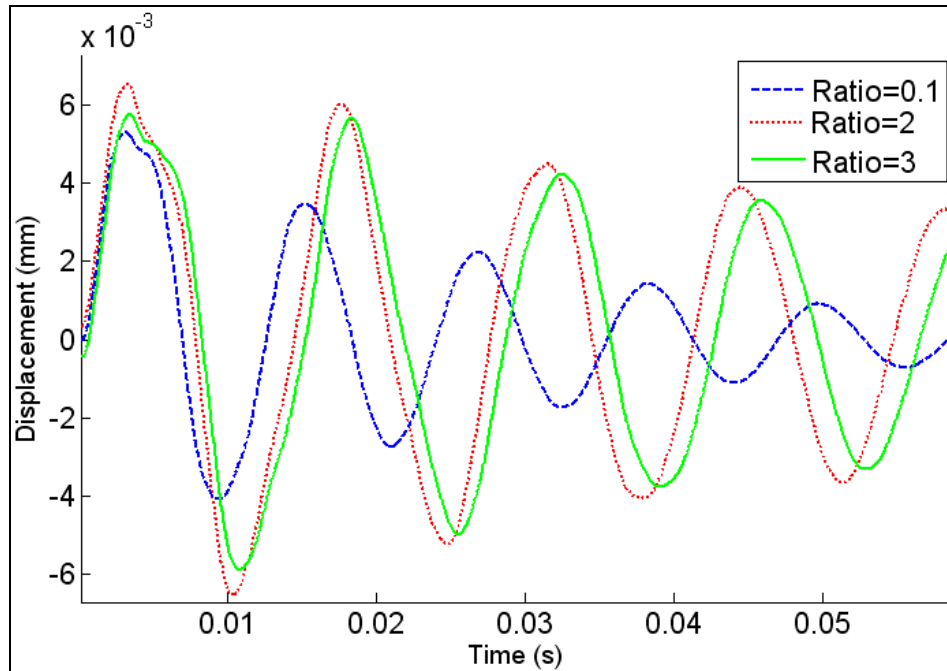


Figure 4.20 : Displacements for 3 thickness ratio of  $h_v/h_c$

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=2.4\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ )

Figure 4.20 compares transverse displacements for three ratios of  $h_v/h_c$  : 0.1, 2 and 3. As shown in the figure, the highest amplitude displacement is obtained for a ratio of 2, while the values obtained for 0.1 and 3 are lower. Thus, damping is not proportional to the viscoelastic layer thickness  $h_v$  : for given base plate and constraining plate thicknesses, there exists an optimal ratio for which damping is maximal. The same trend is obtained when the thickness of the constrained plate is changed with respect to the base plate (figure 4.21) : amplitude is maximum for  $h_v/h_b=1$ , while values for ratios 0.1 and 2 are lower. Comparing thickness difference and displacement amplitude difference, it can be deduced that the case with a ratio of 1 has lower damping than the two other cases in figure 4.21. This result confirms the conclusion obtained before (in harmonic state) and allows to conclude that the behaviour of sandwich is the same in harmonic as in transient response.

In figure 4.22, where  $h_c/h_b$  is studied, the displacement amplitude is inversely proportional to the constraining layer thickness  $h_c$ . This result does not agree with the one obtained in harmonic

response, in which a ratio of 1.0 generates a loss factor higher than a ratio of 2.0. This dissimilarity in behaviour between the two regimes could be explained by the fact that in harmonic response, we measure the VEM damping, while in transient response, the decreasing of amplitude results from VEM damping and inertia effect. Thus, when  $h_c$  increases, the inertia effect increases also, which reduces displacement amplitude. In table 4.6 this effect is highlighted, as it is shown that the logarithmic decrement for the case of ratio of  $h_c/h_b = 2$  is not higher than that for a ratio of 1.

Table 4.6 : Logarithmic decrement for three ratios of  $h_c/h_b$

Ratio	0.1	1	2
$\delta$	0.139	0.197	0.152

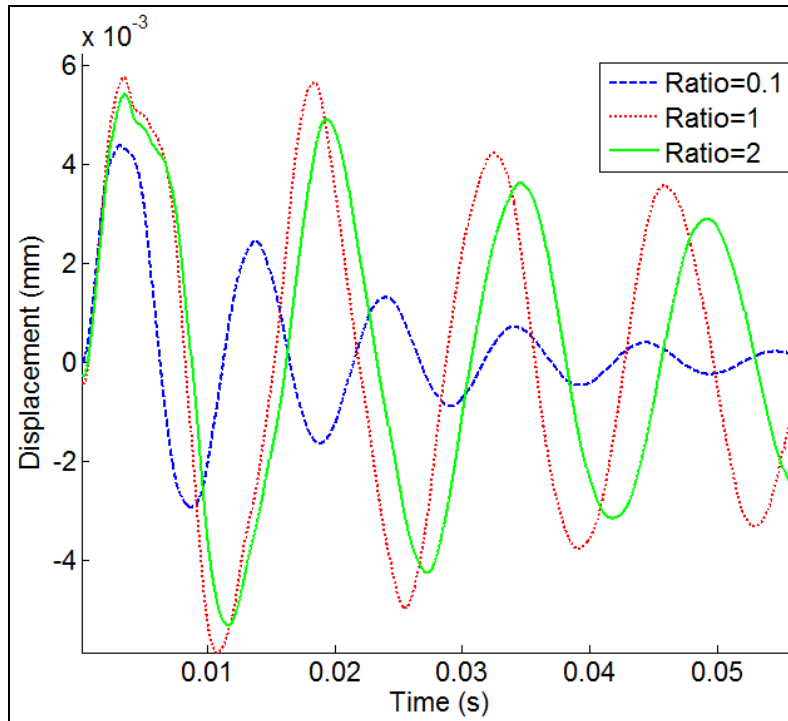


Figure 4.21 : Displacements for 3 thickness ratio of  $h_v/h_b$

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=2.4\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ )

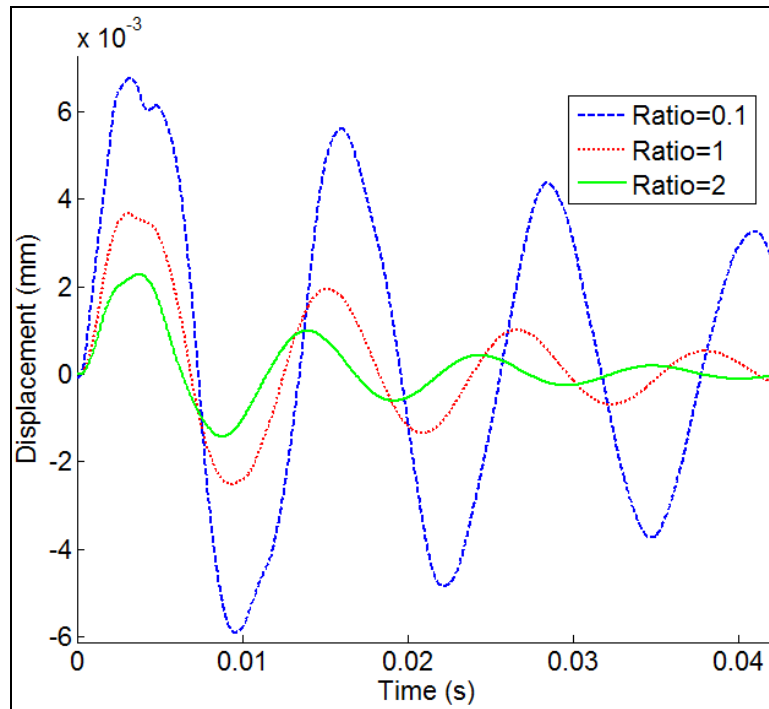


Figure 4.22 : Displacements for 3 thickness ratio of  $h_c/h_b$

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=2.4\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ )

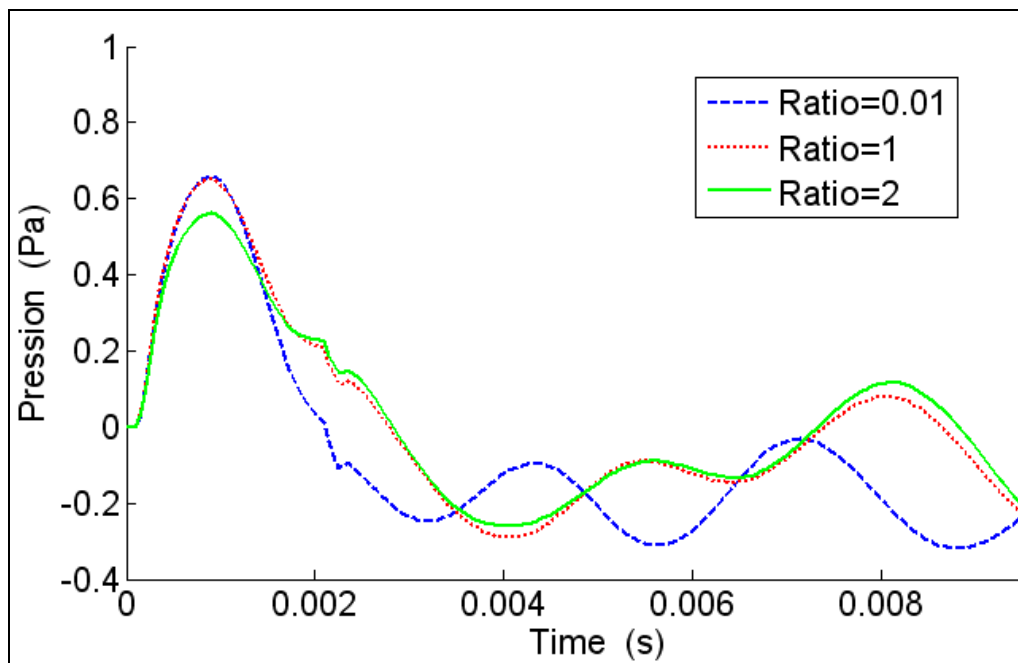


Figure 4.23 : Acoustic pressure for 3 thickness ratios of  $h_v/h_c$

( $h_b=1.6\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ), computation point at plate center at  $z=0.05\text{m}$

The response of the sandwich in terms of radiated acoustic pressure (impact point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ) point of computation at the plate center for  $z=0.05m$ ) is shown in figures 4.23 to 4.25 for different thickness ratios  $h_v/h_c$ ,  $h_v/h_b$  and  $h_c/h_b$  respectively. In figures 4.23 and 4.24 the initial acoustic pressure peak diminishes, when the  $h_v$  increases regarding to face plate thicknesses. Similarly, when ratio  $h_c/h_b$  is studied in figure 4.25, it is seen that the initial acoustic pressure also decreases when  $h_c$  is grater.

By comparing displacement curves of (figures 4.20 to 4.22) and acoustic pressure curves (figures 4.23 to 4.25), it is seen that, the trends are different : initial acoustic pressure is lower with greater layer thicknesses whereas transverse displacement reaches a minimum at thickness mid-values. The explanation of this difference is the equation of acoustic pressure (equation 4.12). In this equation, one sees that acoustic pressure depends on the acceleration of all the points of the sandwich, while the displacement curves are those of a single point (center of sandwich). As a result, applying PCLD does not damp the initial transient movement in the same way over the entire plate : as discussed above, shearing in the viscoelastic layer varies from point to point over the patch. As an example, the points not covered by the PCLD have an undamped acceleration, and therefore, their contribution on acoustic pressure can make the difference with the behaviour of displacement.

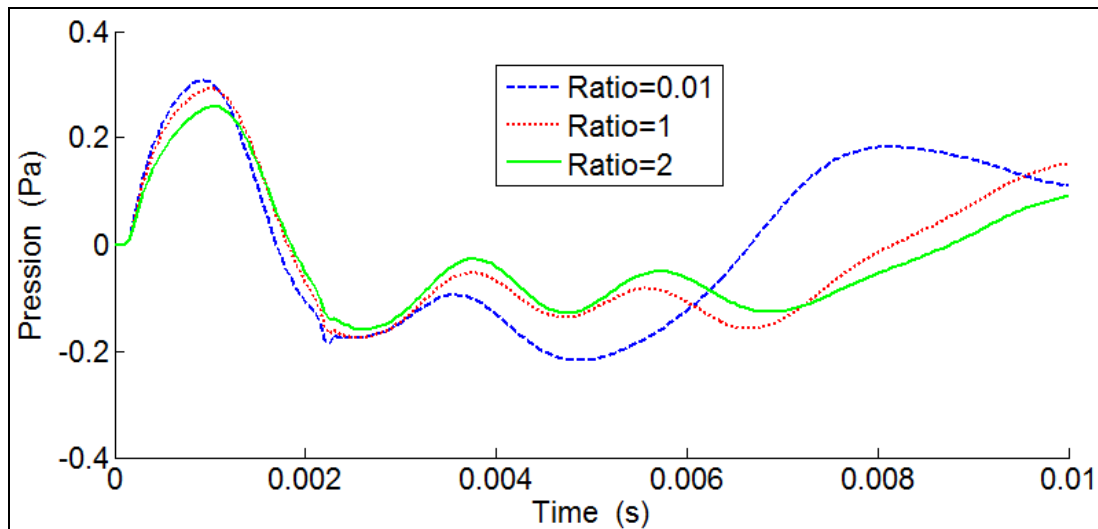


Figure 4.24 : Acoustic pressure for 3 thickness ratio of  $h_v/h_b$ ,

( $h_b = 2.4mm$ ,  $h_c = 0.79mm$ ), computation point at plate center at  $z = 0.05m$

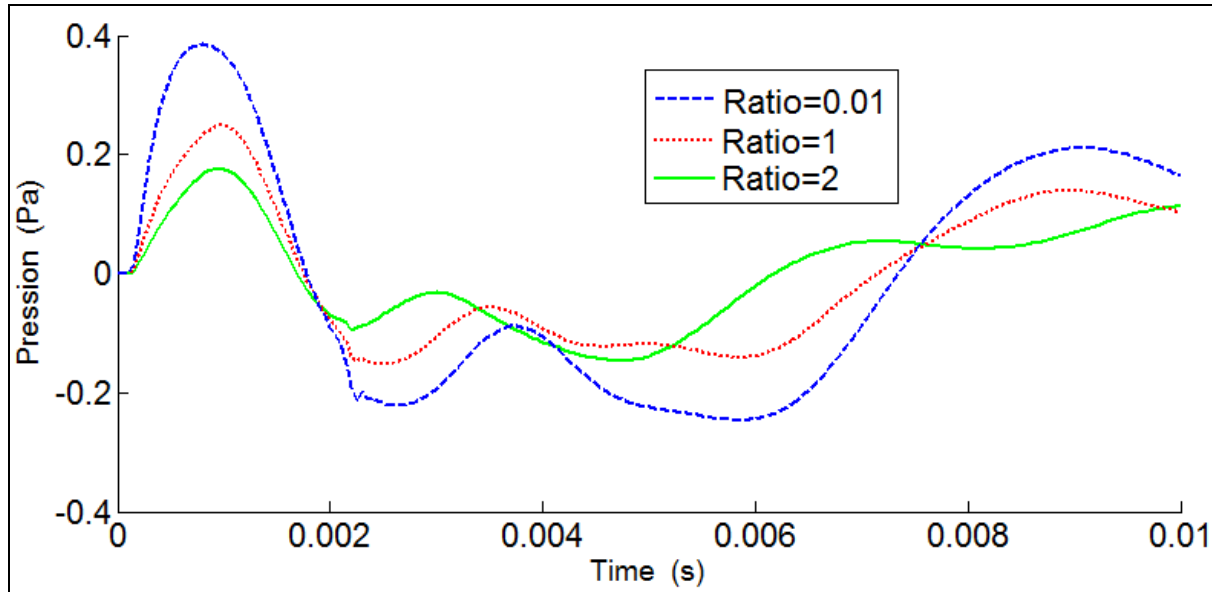


Figure 4.25 : Acoustic pressure for 3 thickness ratio of  $h_c/h_b$

( $h_b=2.4\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ ), computation point at plate center at  $z=0.05\text{m}$

#### 4.4.2.2 Influence of patch size

In this section, the configurations shown in figure 4.14 are studied in transient response. Figure 4.26 shows the displacement curves recorded in the middle of the plate under the effect of an impact occurring at the same point, with different size patches. It is clear that displacement amplitudes decrease and natural frequencies increase with increasing patch size. The decreasing of amplitude comes mainly from energy dissipation by VEM, while the effect on natural frequency comes from the addition of mass and the change in stiffness of the sandwich. In figure 4.27, the displacement spectra of the different sandwiches confirms that attenuations are significant. The loss factors calculated from the peaks in this figure have values up to 36%. This allows us to conclude that the sandwich, under a change in coverage size, reacts the same way in transient regime as in the harmonic regime.

For the acoustic pressure (figure 4.28), it is observed that the reaction is the same as for the displacement : a significant drop in amplitude occurred within the first two milliseconds. The initial acoustic pressure peak decreases as the coverage increases, particularly when coverage increases from 4% to 16%. This is an expected behaviour, since the pressure depends on the movement of all points of the plate; damping these points affects the pressure directly.



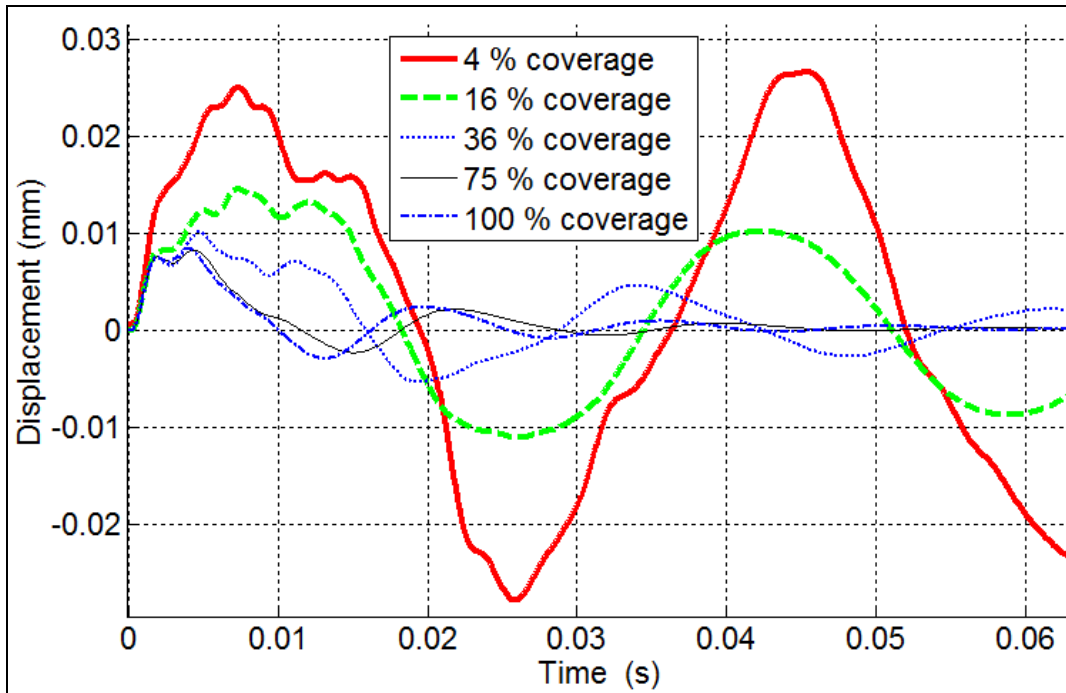


Figure 4.26 : Displacements under different level of coverage

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.127\text{mm}$ )

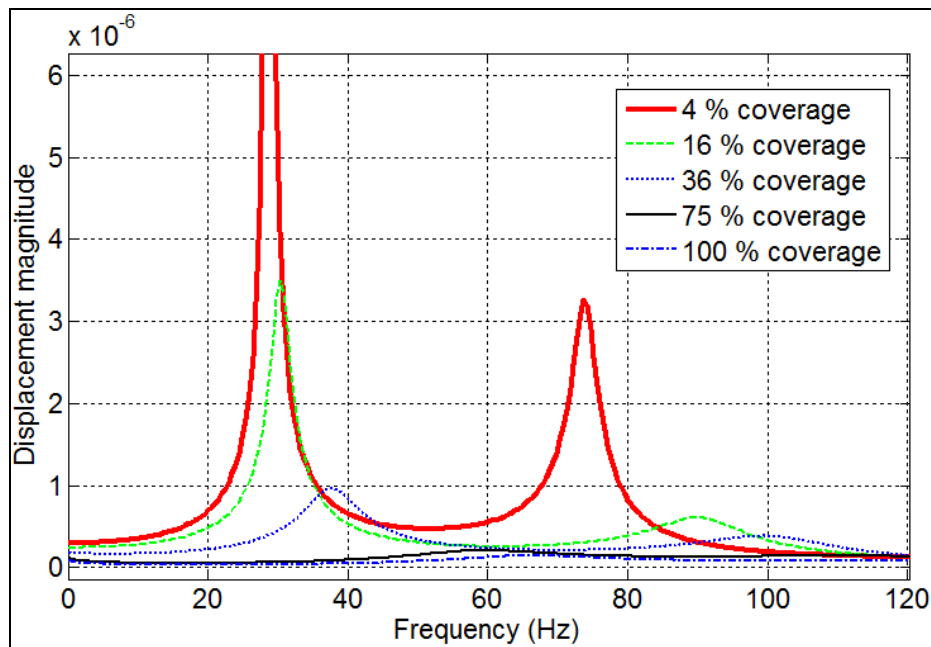


Figure 4.27 : Spectrum of different level of coverage

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.127\text{mm}$ )

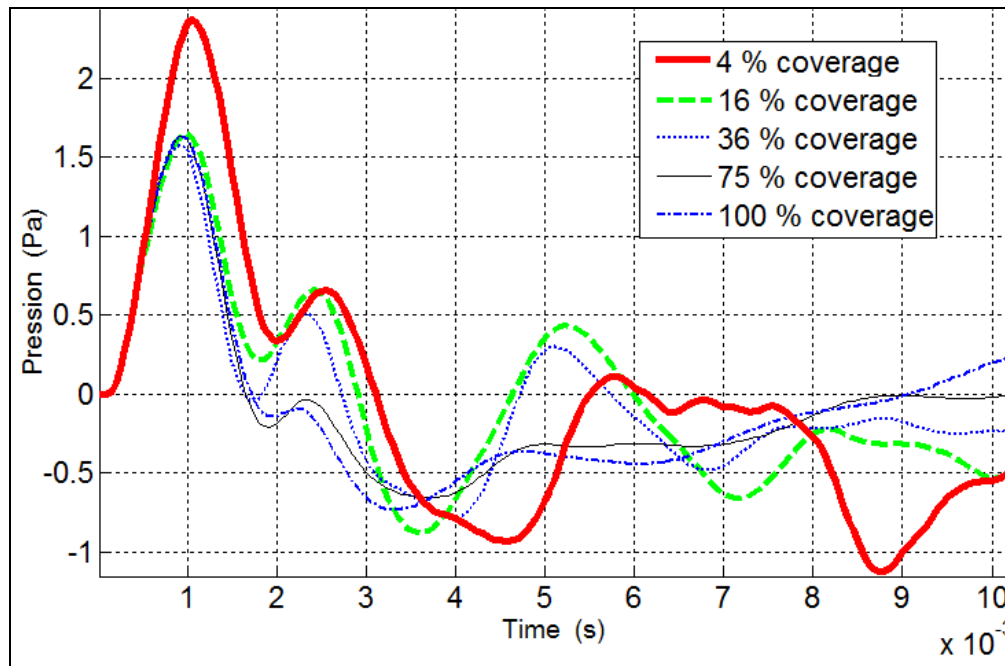


Figure 4.28 : Acoustic pressures under different level of coverage

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $z=50\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_e=0.127\text{mm}$ )

To distinguish the effect of added mass from the VEM damping, figure 4.29 shows the comparison of three sandwiches with different patch densities and damping factors (all others characteristics are the same). The dashed-dot curve is the reference (its values are used throughout the paper). Two other curves are added : in the case shown with solid line the weight of the VEM is decreased, while the case shown with dashed line the damping factor of the VEM is decreased. In this figure, it is seen that lower mass increases the amplitude slightly, whereas lower VEM damping factor increase considerably the displacement amplitude. This figure illustrates the relative importance of added mass (inertia effect). If the intrinsic properties of the material allow it to dissipate energy, then this dissipation is added to the effect of inertia. In the example shown, dissipation in the viscoelastic material is more important than the effect of added mass.

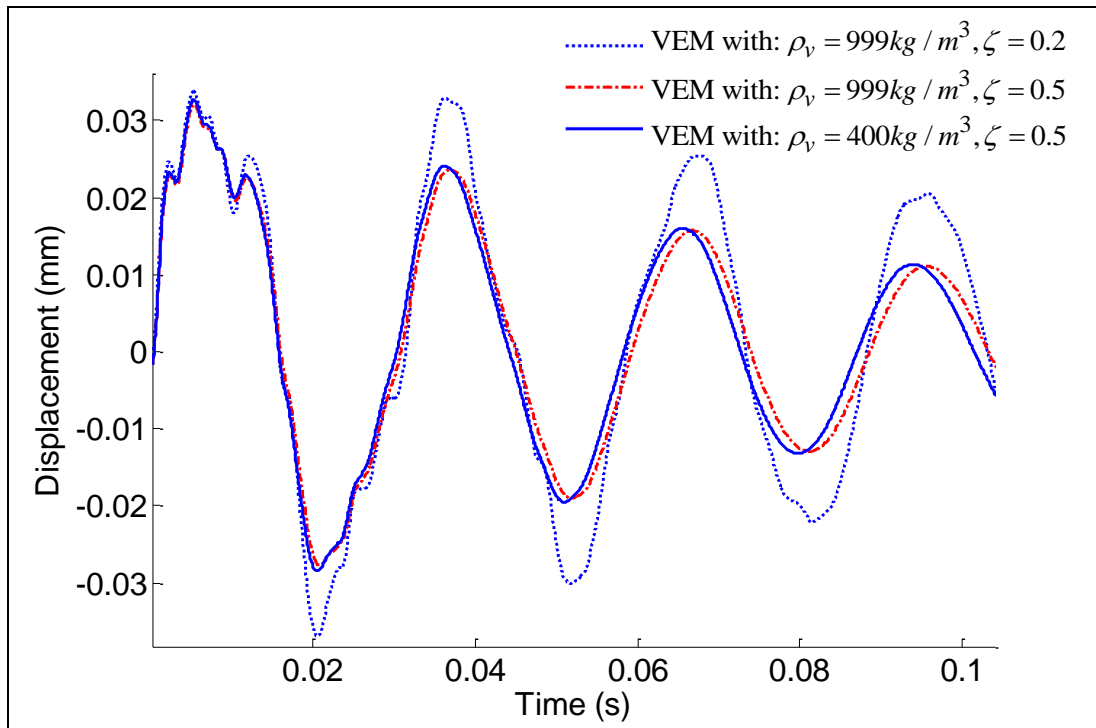


Figure 4.29 : Comparison between mass effect & viscoelastic effect

(impact and measured point at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.127\text{mm}$ )

#### 4.4.2.3 Influence of patch position

In this section, the patch position along  $y$  is kept at  $y=y_b/10$ ; the location along  $x$  axis is varied. For each case we plot the displacement and acoustic pressure. Figure 4.30 shows three spectra representing the computed displacement at the center of plate for three positions of the patch. The impact takes place at the center of the plate.

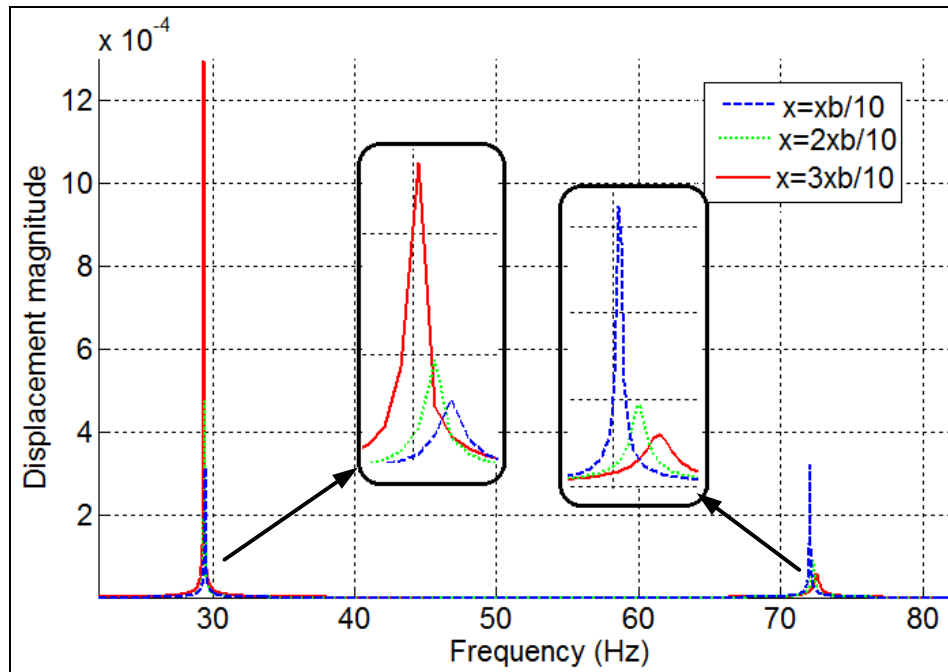


Figure 4.30 : Displacement spectrum

( $y=y_b/10$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.127\text{mm}$ ), ,

In figure 4.30, it is observed that the displacement amplitude of the first mode (about 29 Hz) increases as the patch is placed closer to the center of the plate along the  $x$  axis (red curve). Since the crest of the first mode is located at center of the plate, and these of third mode are located at ( $x=x_b/6$ ,  $x_b/2$ ,  $5x_b/6$ ), the behaviour is the same for the third mode. Thus, when the patch is close to the first crest of the third mode, the displacement reaches its maximum. This is an expected result since we concluded in harmonic response analysis that moving the patch in this direction decreases the loss factor. Furthermore, a slight variation in the natural frequencies is noted; this is due to variation of stiffness to mass ratio. Regarding the contribution of each frequency in the response of the plate, it can be seen that when the patch is placed near the corner ( $x=x_b/10$ ), the third mode (about 72 Hz) contributes with the same proportion as the first mode (about 29 Hz). As we move toward the nodal line of the third mode, along the edge, this mode begins to vanish as the frequency increases. Since the sandwich weight remains constant, the variation in frequency and amplitude is mainly due to a change in stiffness; thus, it can be concluded that placing the patch near the corner of the plate, contributes more to stiffen the sandwich.

For the same positions studied in the case of displacement, sound pressure was calculated in the axis of impact at  $z=0.05\text{m}$ . Remembering that the impact takes place at the center of the plate,

figure 4.31 shows the acoustic pressure curves for the three positions of the patch far from the impact position. It is seen that the curves have the same shape in the first milliseconds, after a small delay, the differences begin to appear. It can be concluded that the effect of the patch occurs after a delay; this delay can be related to the time required for the propagating bending wave to reach the patch. During this time, the resulting sound pressure is coming from area not covered by the patch. This is why the curves coincide during this time. Once the wave reaches the patch, sound pressure begins to originate from the covered area. Therefore the differences between the curves begin to take place. Again we see that acoustic pressure is damped the same way as the loss factory varies.

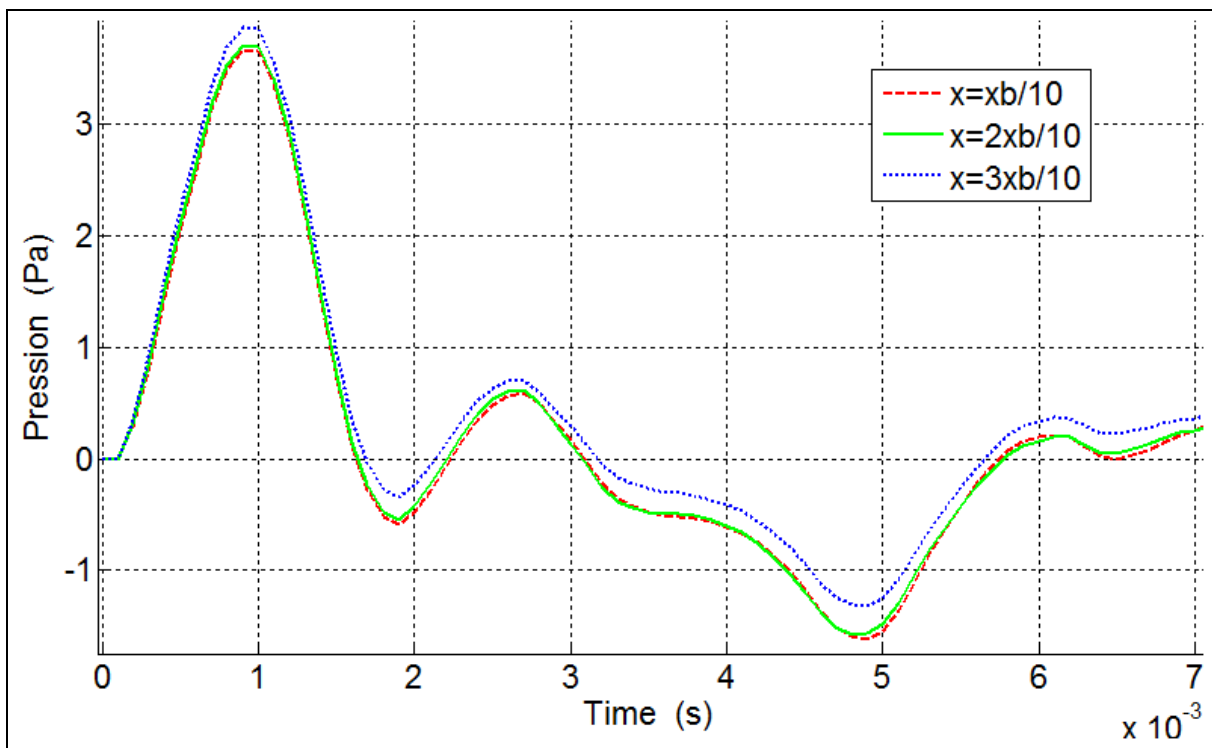


Figure 4.31 : Acoustic pressure for  $y=y_b/10$ ,  $h_b=0.79\text{mm}$ ,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$

#### 4.5 Conclusion

In this paper a parametric study of rectangular plate with PCLD is presented. The study includes both harmonic and transient regimes. The analysis relates PCLD geometric properties to the

response of the plate. The model is based on the principle of energy, Lagrange equations and FFT. The simulations performed showed the importance of using the PCLD in damping plate vibration. Furthermore, the simulations were used to highlight the relation between the vibraton behaviour of the plate and the geometric properties of the patch. The increase of viscoelastic material thickness has a greater influence on the loss factor than on natural frequencies despite the added mass. However, the increase of elastic plate thicknesses plays an important role in increasing natural frequencies. The damping is essentially related to the areas on base plate helping viscoelastic material to undergo shear. These areas are close to corners, and mode shape crests. In general, these conclusions are valid for both states : harmonic and transient response, but the acoustic pressure is more sensitive to the extent of the PCLD than other characteristics. The simulations showed the existence of a close relationship between loss factor and deformation mode. This result is useful, since the deformation modes are easy to obtain : the designer can use them to better place the PCLD on the plate. The accuracy of the results, the ability of the model in predicting the effect of any input parameter, and the similarity between sandwiches studied and composite materials allow to conclude that the present model could be applied for composites. However, the model should be adjusted to include the specificities of these materials such as orthotropic behaviour and fiber orientation.

## **CHAPITRE 5    ARTICLE 3 : INFLUENCE OF PARTIAL CONSTRAINED LAYER DAMPING ON THE WAVE PROPAGATION IN AN IMPACTED VISCOELASTIC SANDWICH**

Article soumis dans : Computers and Structures

Boubaker Khalfi, Annie Ross

CREPEC, Department of mechanical engineering, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6079, Station Centre-ville, Montréal Canada, H3C 3A7

boubaker.mohamed@polymtl.ca; annie.ross@polymtl.ca

### **Abstract**

This paper presents a parametric model to study the transient bending wave propagation in a viscoelastic sandwich plate due to impact loading. The effect of partial constrained layer damping (PCLD) geometry on wave propagation is investigated by comparing with propagation in single layer elastic plate. Several boundary conditions are also considered, and their effect on wave propagation is highlighted.

The equation of motion is obtained from Lagrange's equations. For the single layer plate, the governing equation is solved in time domain using Newman and Wilson method. For the plate with PCLD, the frequency dependant viscoelastic behaviour of the core is represented by Prony series; the equation of motion is converted into frequency domain using Fourier transform the displacement is obtained in the frequency domain and is converted into time domain with the Inverse Fast Fourier Transform.

The model is validated with literature, and good agreement is recorded. The results show that the PCLD covered plate material studied is a dispersive medium. The shape of the wave is mainly related to the sandwich stiffness while the viscoelastic layer contributes in reducing the amplitude and speed of propagation. The particularity of this transient model lies in its ability to follow the shape of the bending wave at all times to observe formation, propagation and disappearance. With this model, the influence of any structural input parameters on the bending wave can be studied. The findings presented will also serve as a research base for more advanced horizons.

**Keywords :** Sandwich, plate, transient response, damping, impact, wave propagation.

## 5.1 Introduction

The use of plates and shells in the industry becomes increasingly important. However, transient phenomena are associated with the assembly process, causing vibrations, and noise. In particular, the sound produced by riveting or other processes requiring impacts may exceed the limits allowed by safety standards, causing growing concern of workplace health and safety organizations.

Among solutions used to reduce the sound generated by the impacted plates, we find Partial Constrained Layer Damping (PCLD). In this technique, the base plate (BP) – which is the plate to be damped - is partially covered with a surface treatment that consists of a viscoelastic material layer (VEM) and a constraining plate (CP). The VEM is sandwiched between the base plate and constraining plate. In most cases, the constraining layer is made of the same material as the base plate or another material with similar stiffness.

Different aspects of research can be developed on this subject, such as the dynamic response of the sandwich due to impact, or the influence of the geometric properties of the PCLD on the transient response and acoustic wave propagation in the sandwich. In this paper, we focus the analysis on the propagation of bending waves in the plate and the influence of the PCLD geometry on propagation.

Sun *et al* [8] studied the wave propagation and transient response of an «*infinite functionally graded plate*» (viscoelastic layer sandwiched between two dissimilar homogeneous plates). They used the high-order shear deformation theory and they included the effect of the rotational inertia in the governing equation. They used a simple power law distribution along the thickness to vary the material properties of the sandwich, and they define the volume fraction of each face plate as  $((2Z+h)/2h)^N$ , where  $h$  is thickness of the layer,  $Z$  is height with respect to neutral line and  $N$  is volume fraction index. They showed that for a given wave number, the plate frequency, and the group velocity of the wave decrease as the layers volume fraction index increases.

Liping *et al* [17] studied the propagation of elastic waves in a sandwich structure with two thin face sheets and a thick core. By considering Hamilton's principle and transfer matrix approach, they presented a complete description of the dispersion; in addition, they deduced a relationship giving all the natural frequencies of the sandwich. Akbarov *et al* [64] used 3D theory to show that initial strain limits the propagation of extensional waves and Lamb waves [82] in the sandwich



plate. Shorter [16] developed a spectral finite element method based on high degree polynomial basis, for analyzing wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. He determined the wave type (progressive or evanescent) and estimated the loss factor from strain energy distribution. Edward *et al* [6] studied the influence viscoelastic core on flexural vibration of a plate. They showed that the damping factor depends on the thickness, wavelength, and elastic modulus of the plates. Haikuo *et al* [62] used wave propagation for damage detection in thick beam based on 3D spectral element method. They concluded that when the thickness of the beam is close to the wavelength of elastic bending wave, a local wave mode exists simultaneously with quasi-symmetric and anti-symmetric wave modes. Pawel *et al* [66] studied the wave propagation in a composite plate. They used spectral element method to solve the problem and to show that the velocity of bending waves is correlated with fiber orientation and volume fraction. Roy [68] observed bending wave propagation in a plate partially covered with Vac Damp (a vacuum applied PCLD) from experiments and using an analytical model. The results showed that wave speed and amplitude are affected by PCLD. Effect of mechanical discontinuity at the borders of the PCLD is also highlighted. Oulmane *et al* [69] studied wave propagation in a rectangular plate, by carrying out finite element analyses. They plot the transverse displacement in sections of the plate, and they used this tool to highlight the effect of discontinuity created by PCLD on wave propagation. In addition, they concluded that the damping of wave depend on PCLD characteristics, as well as the position.

Even though many studies were performed, a lot of issues still need to be examined. These issues, which are the purpose of this paper, are related to boundary conditions and the characteristics of the PCLD (thickness of layers and position). For all these parameters, we will not only relate the response of the plate to the input parameter, but also we will analyze the evolution of the initial bending wave during the transient regime.

In this paper, the analytical model used is briefly described. Two analyses are performed. The first study is carried out on a rectangular plate without PCLD, in which we consider three boundary conditions for all edges :

- simply supported;
- clamped;
- free.

Since the influence of PCLD is located in the vicinity of the area where it is bonded as shown by simulations, we keep only the simply supported boundary condition in the second analysis. In this analysis, the PCLD is included and its geometric parameters are considered to identify their influences on wave propagation :

- Thickness of layers;
- Position of PCLD.

## 5.2 Model

In this section, the main steps of the model are described. The sandwich studied is shown in figure 5.10. In this figure, a simply supported plate (BP) is padded with PCLD composed of VEM layer and constraining plate (CP). The different dimensions used in the model are also indicated.

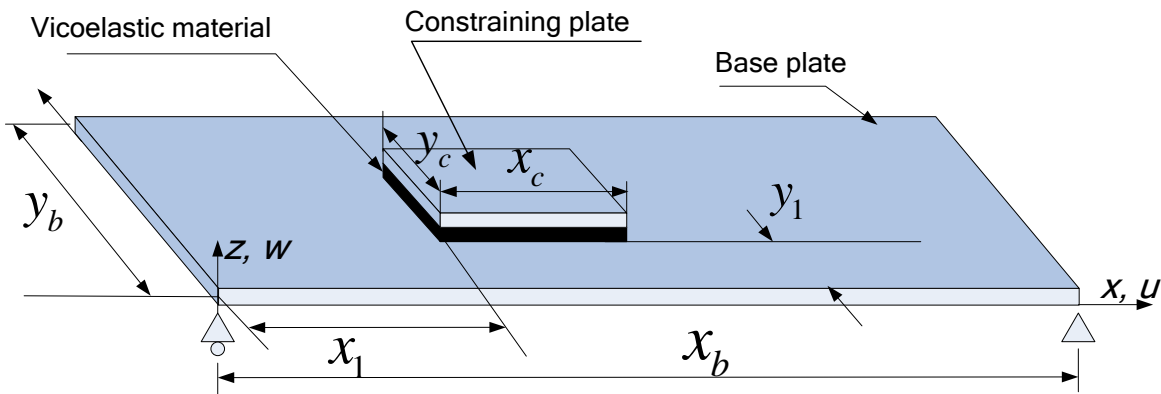


Figure 5.1 : Simply supported sandwich plate

In figure 5.1, subscripts  $b$ ,  $c$ , and  $v$  refer to the base plate, constraining plate, and VEM, respectively. The transverse displacement is denoted by  $w$ , while the displacements in the  $x$  and  $y$  directions are denoted by  $u$  and  $v$  respectively. Thicknesses are denoted by  $h_i$  ( $i=b,c,v$ ). We assume that the three layers undergo the same transversal displacement; this assumption requires that the three layers are perfectly bonded, and that compression in the VEM is negligible. In addition, shear deflection and rotation inertia in the base plate and constraining plate are neglected. Finally, the VEM carries only transverse shear and no normal stress, while the shear modulus (equation (5.1)) is assumed complex and frequency dependent. The Prony series in the frequency domain is used to reflect its behaviour [83]:

$$G(\omega) = G_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^N g_n + \sum_{n=1}^N \frac{j\omega g_n \tau_n}{1 + j\omega \tau_n} \right] \quad (5.1)$$

where  $\tau_n$  are called relaxation times,  $g_n$  are Prony constants,  $G_0 = G(t=0)$ ,  $\omega$  is the frequency,  $N$  is the number of Prony constants and  $j = \sqrt{-1}$ .

The displacement is expressed using the assumed modes technique. In this method, the displacement is expressed as the product of two functions satisfying the boundary conditions; one function is time dependent, and the other is dependent on space. This expression is written as :

$$X(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i(x, y) \xi_i(t) \quad (5.2)$$

where  $X$  is the displacement,  $\Gamma_i$  are the admissible functions (given in appendix),  $\xi_i$  are the new generalized coordinates,  $n$  takes into account  $n_b$  and  $n_c$ , the number of modes used for the longitudinal displacements of the BP and CP, respectively, and  $n_w$ , the number of modes for the flexural motion of the sandwich. The equation of motion is derived from the Lagrange's equations, where the total energy strain energy  $U$  and kinetic energy  $K$  of the sandwich are used to calculate the Lagrangian :

$$L = K - U \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = Q_i \quad (5.4)$$

where  $Q_i$  the generalized forces :  $Q_i = -\partial S / \partial \dot{\xi}_i + \partial P / \partial \xi_i$  (5.5)

are obtained by differentiation of Rayleigh's dissipation function  $S$  and virtual work  $P$  done by external forces. Replacing displacement by its expression (equation (5.2)), in system (5.4) and developing the calculation, we obtain the following system :

$$[M] \ddot{X} + [K] X = Q \quad (5.6)$$

where  $M$  is the mass matrix and  $K$  is the complex stiffness matrix. The impact force (equation (5.7)) is modeled by Heitkämper's relation [36] :

$$F(t) = F_0 \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \right) \sin(0.97T)^{1.5} e^{-(0.4T)^4} \\ &+ \left( \frac{1 + 2/\Lambda}{1 + \Lambda} \right) \left( \frac{T}{T + 1/\Lambda} \right)^{1.5} e^{-\frac{T}{\Lambda}} \end{aligned} \right] \quad (5.7)$$

where  $T = \pi t / T_0$ ,  $T_0$  is the contact duration,  $F_0$  is the force amplitude, and  $\Lambda$  is an impact parameter that depends on the geometrical and mechanical properties of the two bodies.

To conduct a transient analysis of the system subjected to impact excitation, the solution of equation (5.6) can be obtained by two methods. The first one, is performed in the time domain, is based on iterative techniques [40]. This method has the advantage of avoiding time aliasing, which appears in spectral analysis of low damping systems. In this paper, we use the Newmark and Wilson method [40] for the unpadded (single layer) plate. For the plate with PCLD, the shear modulus is poorly represented in the time domain; it is therefore more convenient to work in the frequency domain, as established by Barkanov. For this reason, a second method is used in frequency domain. Equation (5.6) and the impact force are converted to the Fourier domain via Fast Fourier Transform (FFT). Once the solution obtained, it is converted back to the time domain via Inverse Fast Fourier Transform IFFT.

### 5.3 Analysis and discussion

Two analyses are performed in this section. First we study the influence of boundary conditions on the flexural wave propagation for the untreated plate. In the second analysis, we study the influence of PCLD geometry on the wave propagation for a simply supported plate with PCLD. By doing so, it will be possible not only to highlight the influence of the PCLD on the response of the plate, but also to compare the response of the plate with and without PCLD. The base plate is made of aluminum with the following dimensions : 601mm x 283mm x 0.793mm. The mechanical properties used for the sandwich are shown in Table 5.1. The characteristics of the force, calculated by equation (5.7), are :  $F_{max}=102.6\text{N}$ ,  $\tau=0.002\text{s}$ ,  $\Lambda=1.0$ . These values are used in all simulations, unless otherwise indicated.

Table 5.1 : Mechanical properties and number of modes

Young Modulus	Shear modulus	Poisson ratio	Density ( $Kg/m^3$ )		Damping ratio of the VEM	Number of modes		
			$\rho_b, \rho_c$	$\rho_v$		$\zeta$	$n_w$	$n_b$
$E_b, E_c$ (GPa)	$G_v$ (GPa)	$\nu_b, \nu_c$	$\rho_b, \rho_c$	$\rho_v$	$\zeta$	$n_w$	$n_b$	$n_c$
69.8	0.869	0.33	2700	999	0.5	200	30	30

#### 5.4 Plate without PCLD

In this section, the governing equation is solved in the time domain using Newman and Wilson's method. Impacts are simulated and the general characteristics of bending wave propagation in the simply supported plate are first described. Then, the influence of boundary conditions and impact location are discussed. All displacement results are given either for section A-A or for section B-B, both shown in figure 5.2.

##### 5.4.1 Wave propagation in the plate

Figure 5.3 displays the transverse displacement in section A-A of the plate (see figure 5.2) for an impact taking place at the center of the plate ( $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$ ). As expected due to the symmetry of the plate, the response of the plate, which is made of a main crest surrounded by side crests, is symmetrical. The highest crest takes place at the point of impact. This crest increases with time until the end-of-contact time (2 ms); it then starts to decrease. In figure 5.4, side crests are shown with a closer view. The curves describe the evolution of wave fronts located on both sides of the main crest. From the dashed line curve, we see how the secondary crests move towards the edges, while the main crest widens. These results are in good agreement with the work done by Roy *et al.* [68]. Figure 5.5 illustrates the deformation in the entire plate at the end-of-contact time, and is in good agreement with [69].

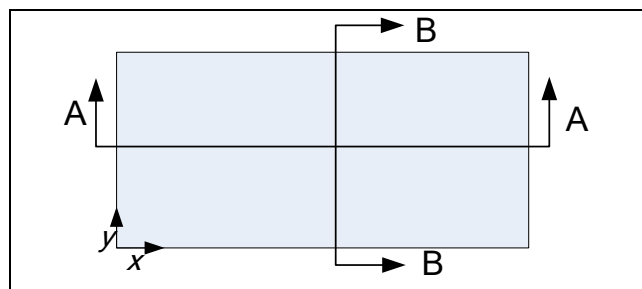


Figure 5.2 : Sandwich sections

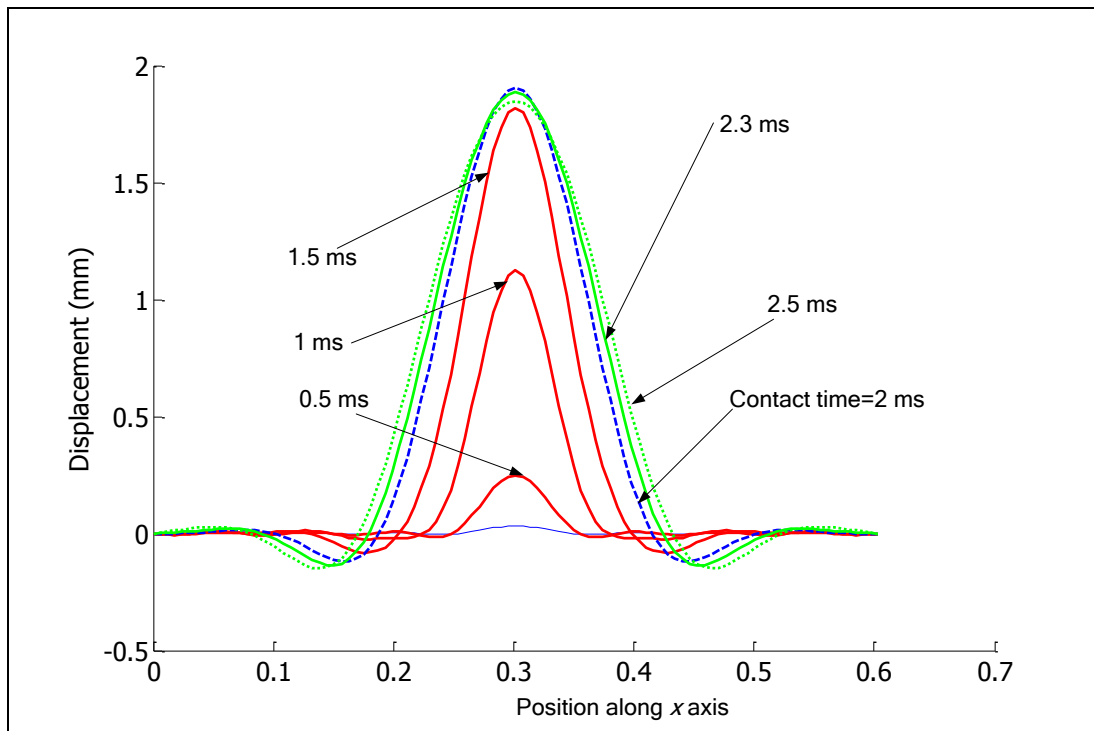


Figure 5.3 : Simply supported plate, transversal displacement in section A-A

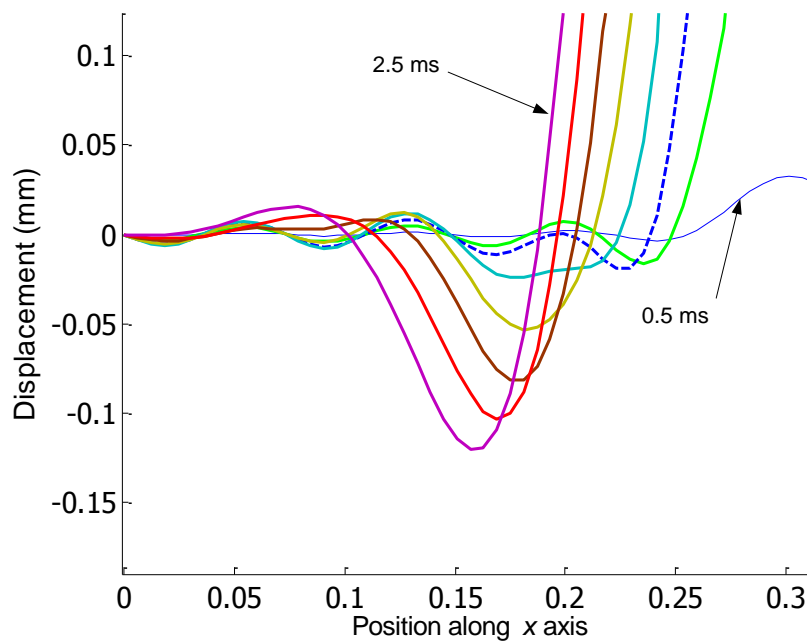


Figure 5.4 : Evolution of wave fronts

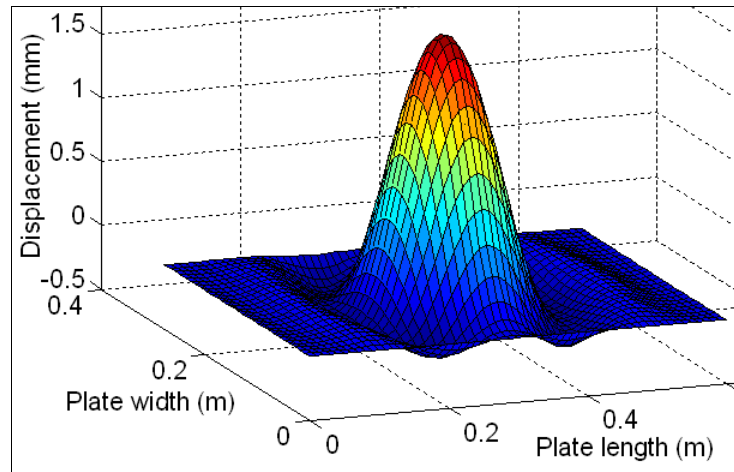


Figure 5.5 : 3D Plate deformation at contact time

Figure 5.6 compares transverse displacements in section A-A obtained by the present model (figure 5. 6c), and the ones obtained by Roy [68] (figure 5. 6a), and Oulmane [69] (figure 5. 6b). The plate studied is simply supported, made from aluminum with the following dimensions : 0.9m x 0.6 m x4.8 mm. Oulmane obtained his results by finite element analysis, while Roy used a rudimentary analytical model. These graphs show that the general motion obtained is very similar in all three analyses. The maximum amplitude varies between 0,05 mm [69] and 0,075 mm [68]; the value for the present study (0,065 mm) is in between.

The conclusion to be drawn from this section is that the present model reflects well the behaviour of the plate.

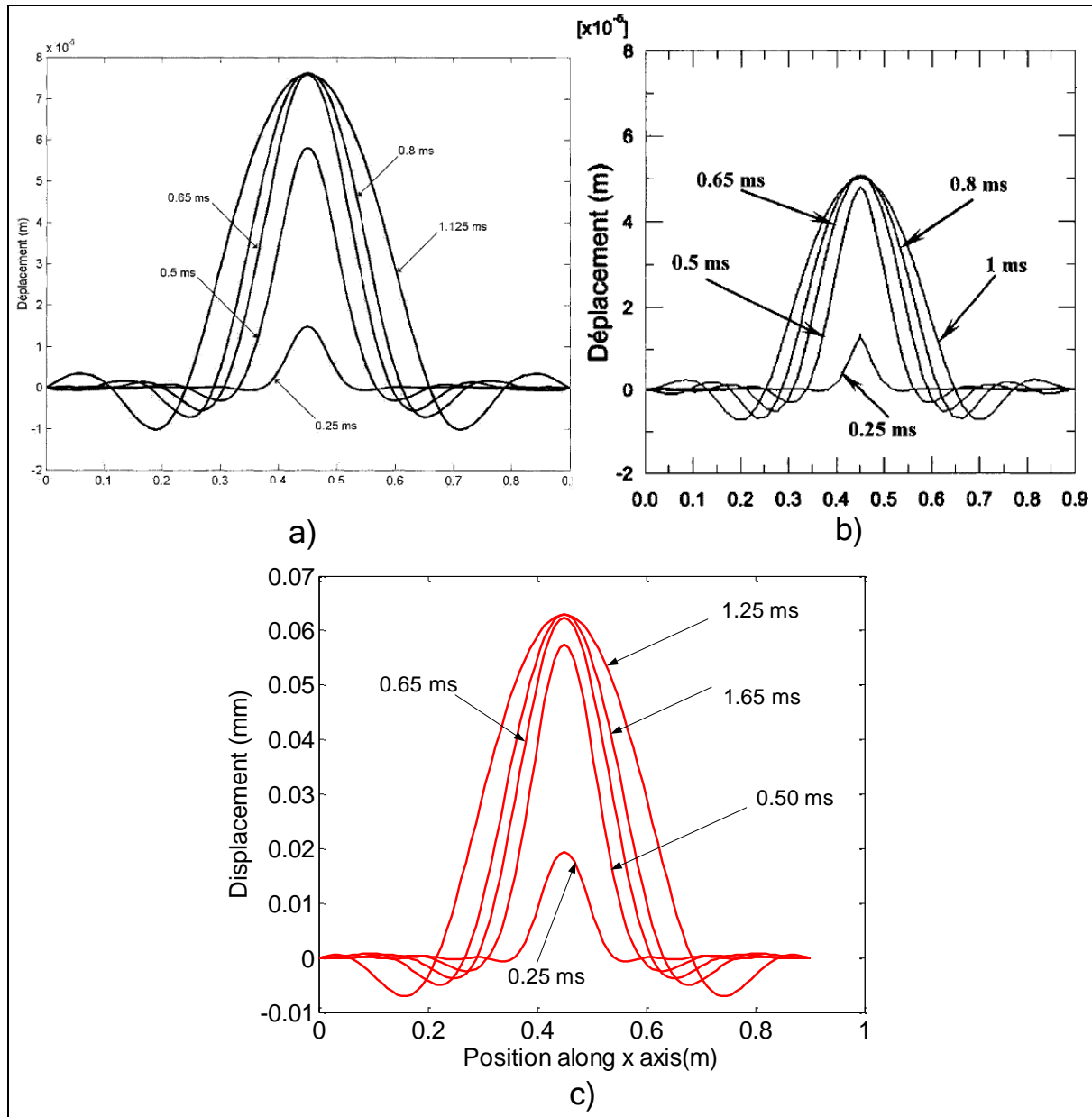


Figure 5.6 : Transversal displacement section at  $y=y_b/2$

a) from [68], b) from [69] and c) present model

#### 5.4.2 Influence of boundary conditions

In this section, simply supported (SSSS), clamped (CCCC) and free (FFFF) boundary conditions are compared. These conditions are the same on all edges of the plate. The plate dimensions are 601mm x 283mm x 0.793mm. Figure 5.7 shows a comparison between the transverse displacements in section A-A for cases SSSS and CCCC, and figure 5.8 displays a close-up of the



main crest near the end-of-contact time. It is seen from these figures that during the entire contact from zero to 2ms, the two curves coincide almost exactly. The shape and amplitude of all crests are nearly identical for the two cases except for a very small difference in amplitude.

For times much greater than contact duration (up to 7,75ms), the two responses lose concurrence, as shown in figure 5.9. This can be explained by the fact that during the contact time the plate is into forced vibration, so it must submit to the external force. Once the external force is suspended, the boundary conditions begin to influence the evolution of the wave. Indeed, the waves reflected from the edges of the plate do not have the same characteristics since the boundary conditions are different. Clamped edges (CCCC) are stiffer, therefore waves travel faster and reflection appears quicker. Reflected waves cause oscillations subsequent to the initial deformation of the plate.

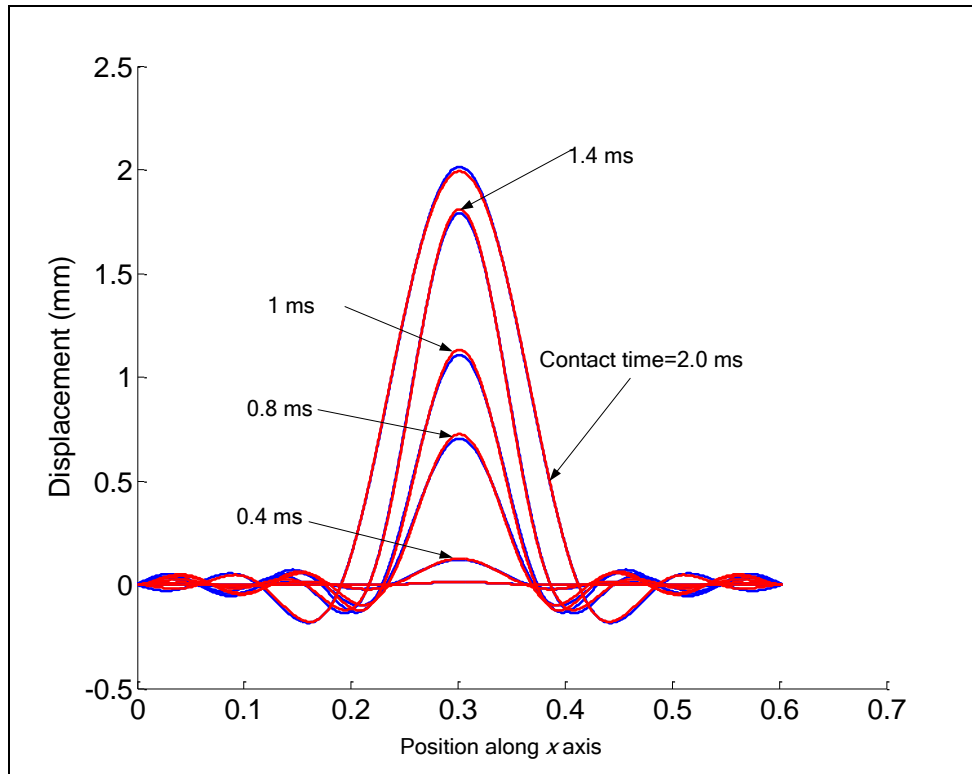


Figure 5.7 : Transversal displacement in section A-A :  
(comparison CC and SS plate during contact time)

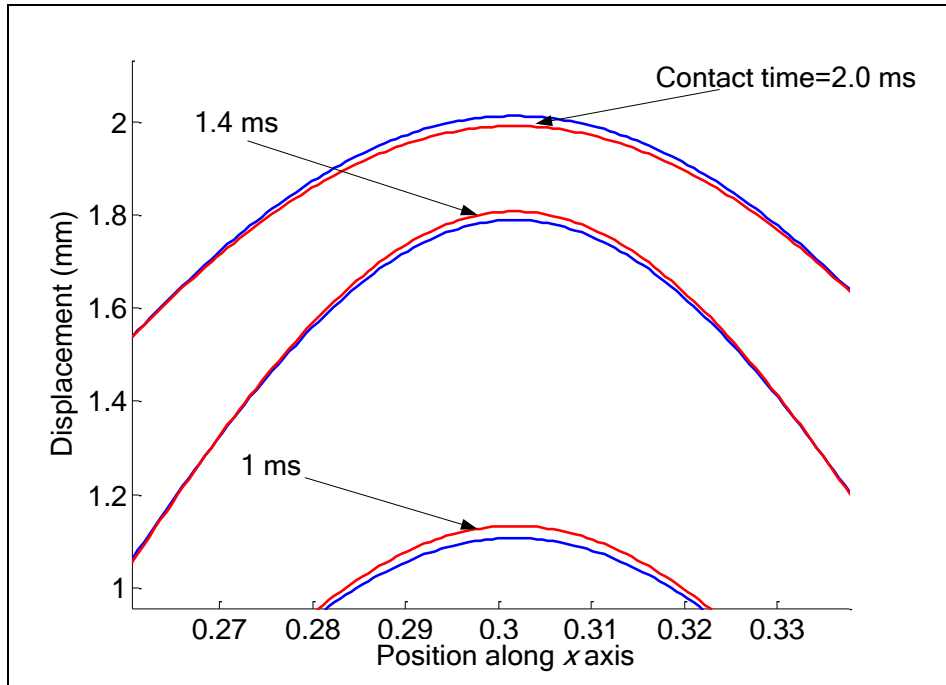


Figure 5.8 : Close-up view of figure 5.7

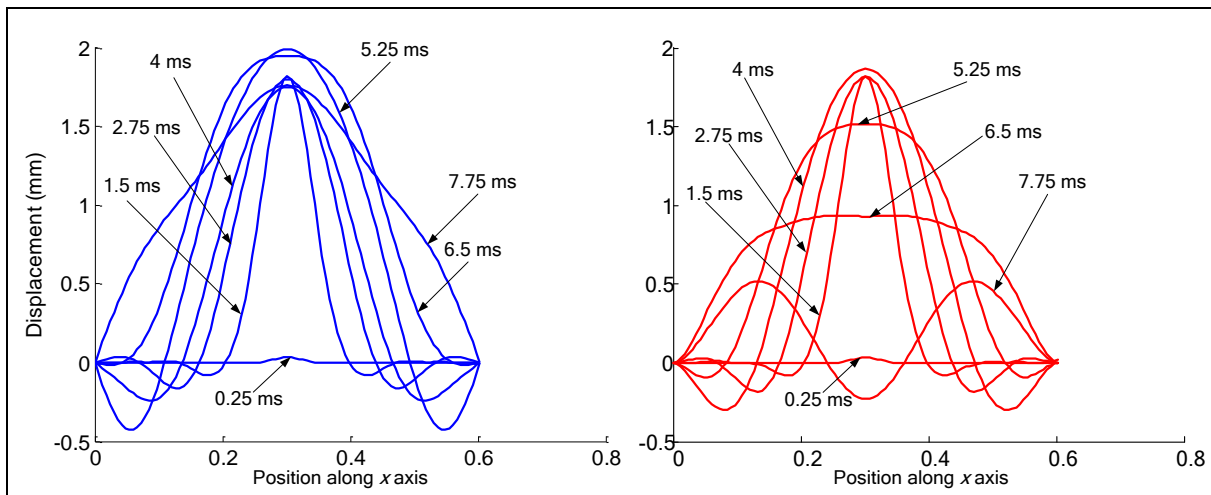


Figure 5.9 : Transversal displacement in section A-A after end-of-contact :

(SSSS (left) and CCCC(right))

The two curves begin to diverge almost immediately after the end-of-contact time (figure 5.9). The absolute transverse velocity is less in the simply supported plate than in the clamped plate. At time 6.5ms for example, the displacement at the impact point of the clamped plate has

reached negative values, while in the case of the simply supported plate, the displacement is still almost at its maximum value; yet, the displacement was the same for the two plates at time 2ms. This behaviour is expected since the natural frequencies of the CCCC plate (first frequency at 39.9 Hz) are superior to that of the SSSS plate (first frequency at 29.4 Hz). Noting that the clamps are stiffer than simple supports, the free response in the simply supported plate is slower. To support this result, figure 5.10 shows the velocities for both cases with respect to time. The curves coincide during the contact time, but soon after, the module of the transverse velocity for the CCCC plate becomes higher than for the SSSS plate. As mentioned before, the time at which the curves split depends on the dimensions and properties of the plate.

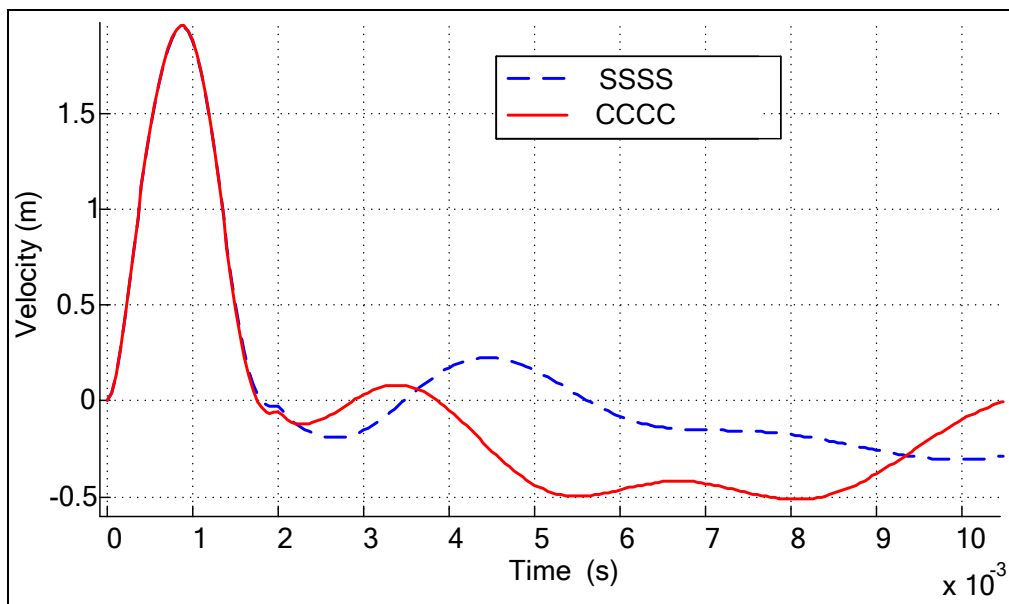


Figure 5.10 : Transverse velocities :

(clamped plate (CCCC) and simply supported plate (SSSS))

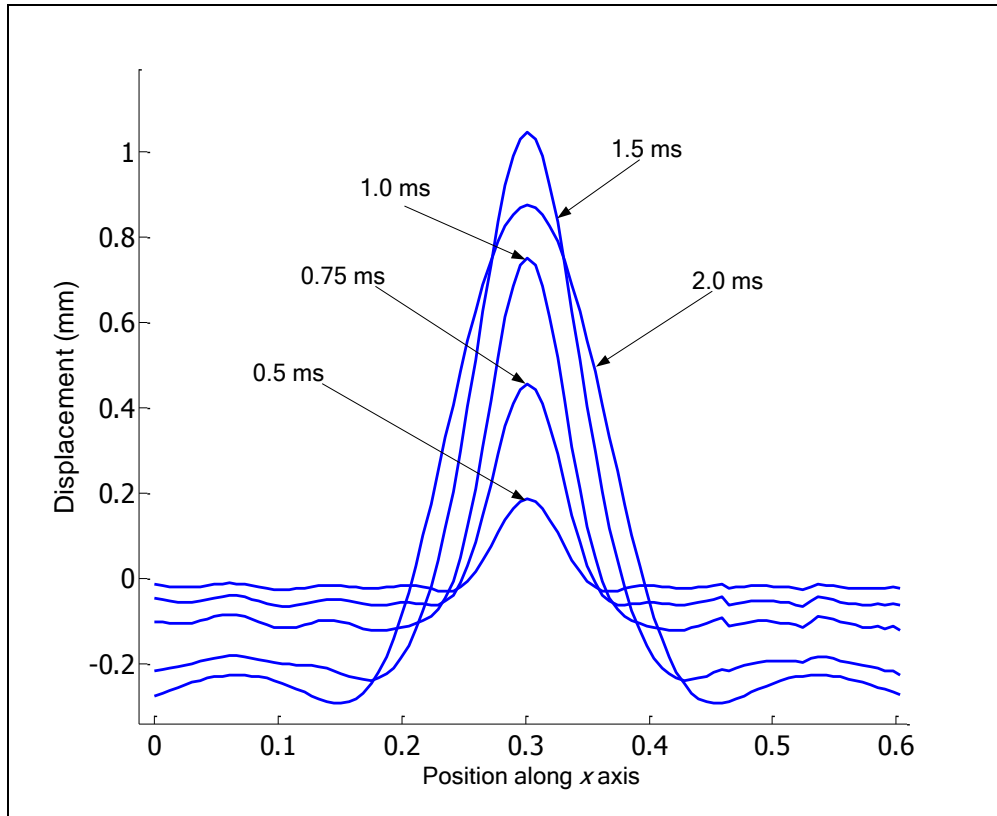


Figure 5.11 : Transversal displacement in section A-A : free edge plate (FFFF)

Figure 5.11 shows the evolution of plate deformation in the case of a plate with free boundaries (FFFF). The dynamic behaviour differs from the two previous cases (SSSS, CCCC). We see essentially two movements of the plate : relative movement and absolute motion. Relative motion is the same as in the previous two cases : vibration of the plate. The absolute motion is the global displacement of the plate with respect to its original position.

Furthermore, a small wave front and low amplitude of the main crest are observed compared to SSSS and CCCC. The small size of wave fronts and oscillation of the plate relative to its initial position can be explained by the absence of supports at the borders. The low amplitude of the flexural deformation, compared to the SSSS and CCCC cases, can be explained by the fact that a great part of the impact energy is converted to rigid body displacement while less energy is converted into deformation..

In addition and as said before, the boundary conditions defines the characteristics of the reflected wave. In case of FFFF, the crest, which is a result of incident and reflected waves, should have

small amplitude, because the reflected wave is weak since the edges are free and they do not have the capacity to reflect the incident wave.

### 5.4.3 Influence of impact position

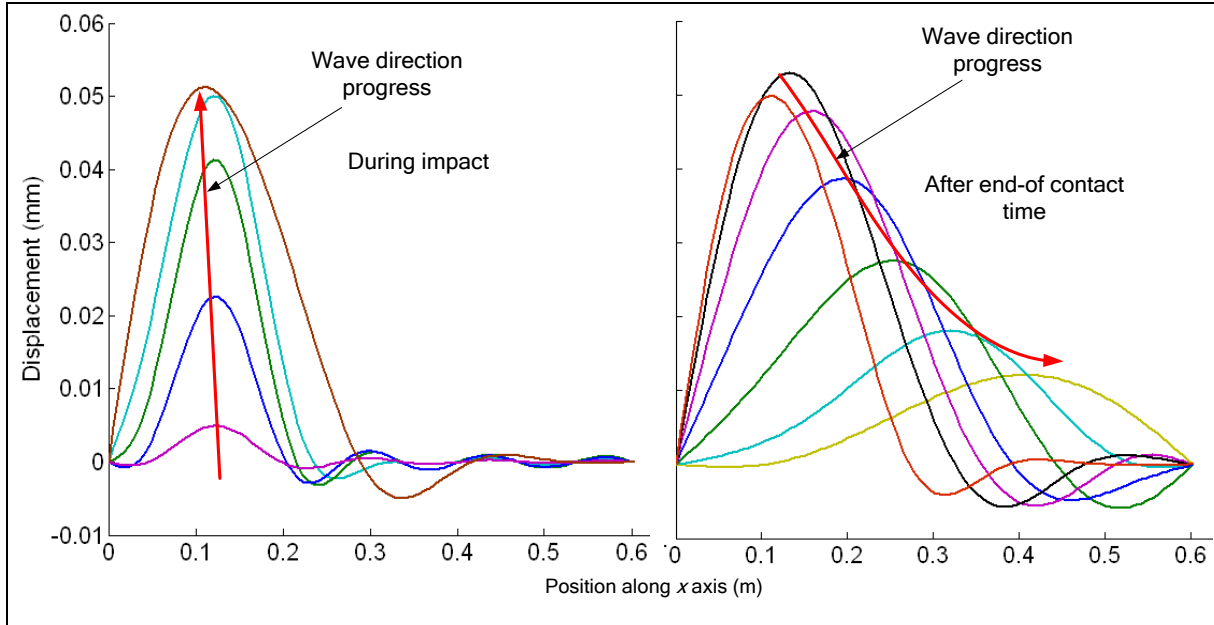


Figure 5.12 : Transversal displacement in section A-A for SSSS condition

(impact at :  $x=x_b/5$ ,  $y=y_b/2$  : during impact (left) and after end-of-contact time (right))

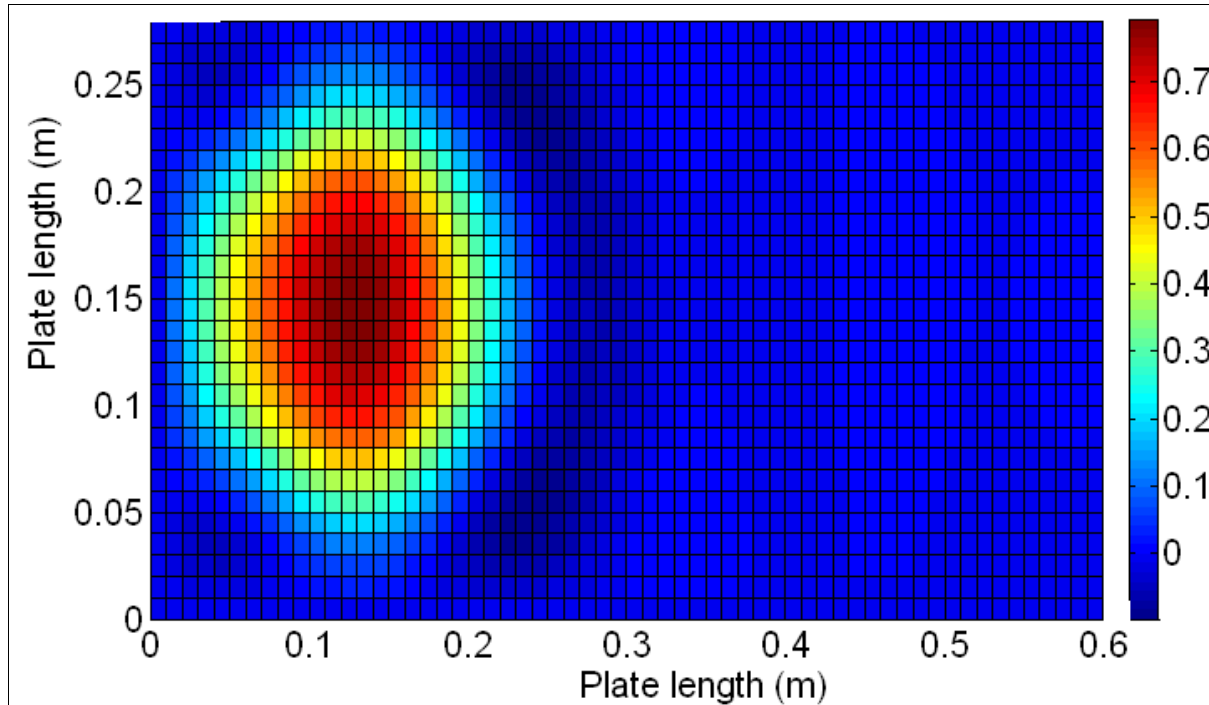


Figure 5.13 : 2D Plate deformation at end-of-contact time

(impact at  $x=x_b/5$ ;  $y=y_b/2$ )

Figure 5.12 displays the transverse displacement in section A-A with an impact taking place at  $x=x_b/5$ ;  $y=y_b/2$ . The figure contains two windows; the left side graph shows the evolution of the wave during the contact time, while the right side graph shows the evolution after the end-of-contact time. It can be seen that during contact time, secondary crests appear to the right side of the main crest as the wave fronts travels in the plate, similar to the behaviour with central impact. Figure 5.13 displays a 2D representation of the plate deformation at end of contact time. In this figure, it is clear that the wave propagates in all directions. After contact time (right side graph of figure 5.12), as the main crest begins to lose magnitude and to spread out, secondary crests move away from the impact point toward the edge at  $x=0.6m$ . This figure shows that the application of the impact at a point other than plate center leads to a shifting of the main crest due to the wave reflection. This displacement forces the wave fronts to disappear one after the other. When the fronts disappear completely, the main crest begins to recover its amplitude but in the opposite side of its creation, and vice versa up to total disappearance.

The simulations performed on the plate without PCLD show that boundary conditions play an important role in defining the shape, the amplitude, and the evolution of the wave. By including

the PCLD in the next section, it will be possible not only to see if the PCLD affects the aforementioned conclusions, but also to identify the influences of the PCLD on the dynamical behaviour of the plate.

## 5.5 Plate with PCLD

In this section, the governing equation is solved in the frequency domain, and the solution is converted back to time domain as explained in the introduction. Again, impacts are simulated at the center of the plate using equation (5.7).

### 5.5.1 Influence of PCLD

The PCLD is included to the same plate as the previous section. For all cases studied in the following, simple support (SSSS) boundary conditions are maintained for the plate, while the PCLD has free boundary conditions at all edges. According to figure 5.1, and in all the remainder of the paper unless otherwise indicated; the sandwich has the following dimensions :

Table 5.2 : Values used for patch position simulations

$x_b$ (m)	$y_b$ (m)	$h_c$ (m)	$h_b$ (m)	$h_v$ (m)	$x_c$ (m)	$y_c$ (m)	$x_1$ (m)	$y_1$ (m)
0.601	0.283	$7.93 \cdot 10^{-4}$	$h_c$	$h_c$	0.558	0.1016	$25.4 \cdot 10^{-3}$	0.0907

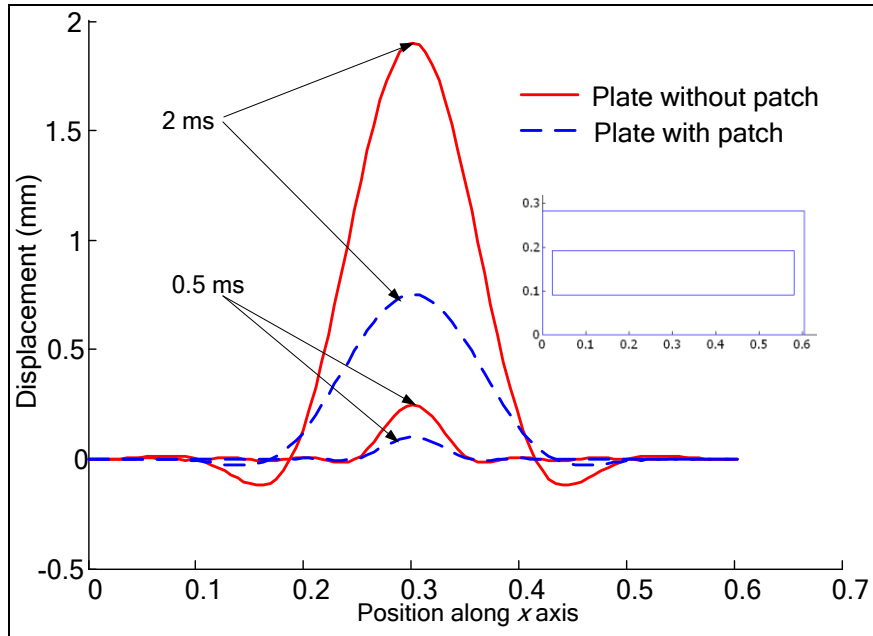


Figure 5.14 : Comparison between plate with and without PCLD  
(transverse displacement in section A-A,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ )

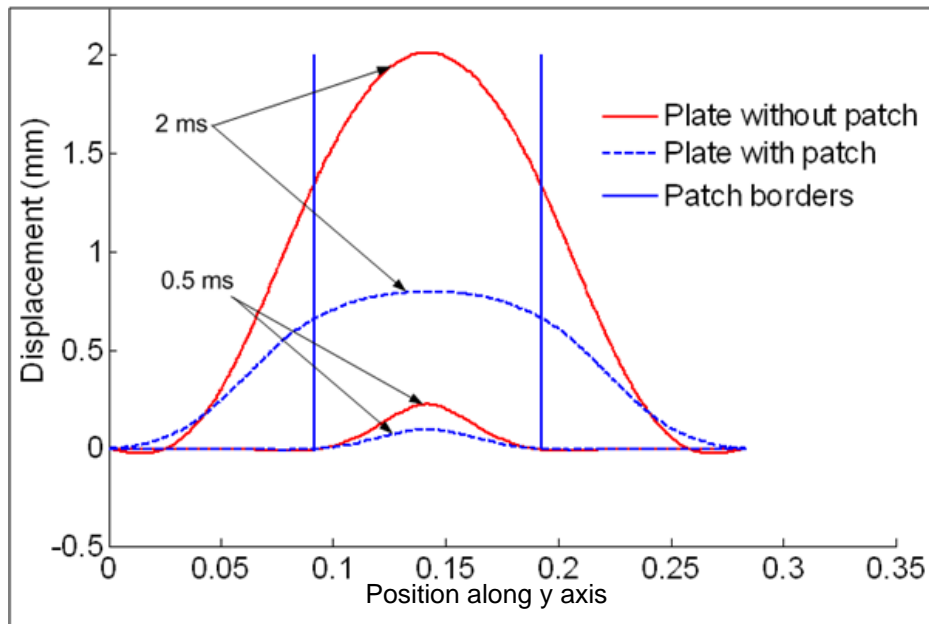


Figure 5.15 : Comparison between plate with and without PCLD  
(transverse displacement in section B-B,  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  $h_v=0.127\text{mm}$ )



Figures 5.14 and 5.15 display respectively displacement in sections A-A and B-B. The curves with dashed lines are for plate with PCLD, while curves with solid lines are for plate without PCLD. Two times are represented, that is, 0.5ms and 2.0ms. In figure 5.14, it can be seen that the PCLD reduces the amplitude of the main crest and its transversal speed by about 50%. Neither the width of the main crest nor the amplitude or width of side crests are influenced by PCLD at 0.5ms. However, at the end-of-contact time (2.0ms), the main crest is wider in the case of plate with PCLD; side crests are smaller and located farther from the impact. This is due to the different stiffnesses and masses in the two cases. The stiffer the plate is, the less it deforms, and greater the mass is, more energy is required to move it. In section B-B (figure 5.15), the locations of PCLD borders are marked with vertical solid lines in order to highlight the influence of discontinuities at the borders. It can be seen that the curvature of the wave at the discontinuity is more important with PCLD, and that the curve in the center of the PCLD area is much flatter. As said before, this is mainly due to the additional stiffness in the area covered by the PCLD.

### 5.5.2 Influence of PCLD thickness

In this section, we study the influence of the thickness of each layer on the wave propagation in the plate. To analyze the relationship between the proportion of each layer pairs and the behaviour of the plate, three different thickness ratios are examined :  $h_v/h_c$ ,  $h_v/h_b$  and  $h_c/h_b$ . The PCLD configuration is as shown in figure 5.14.

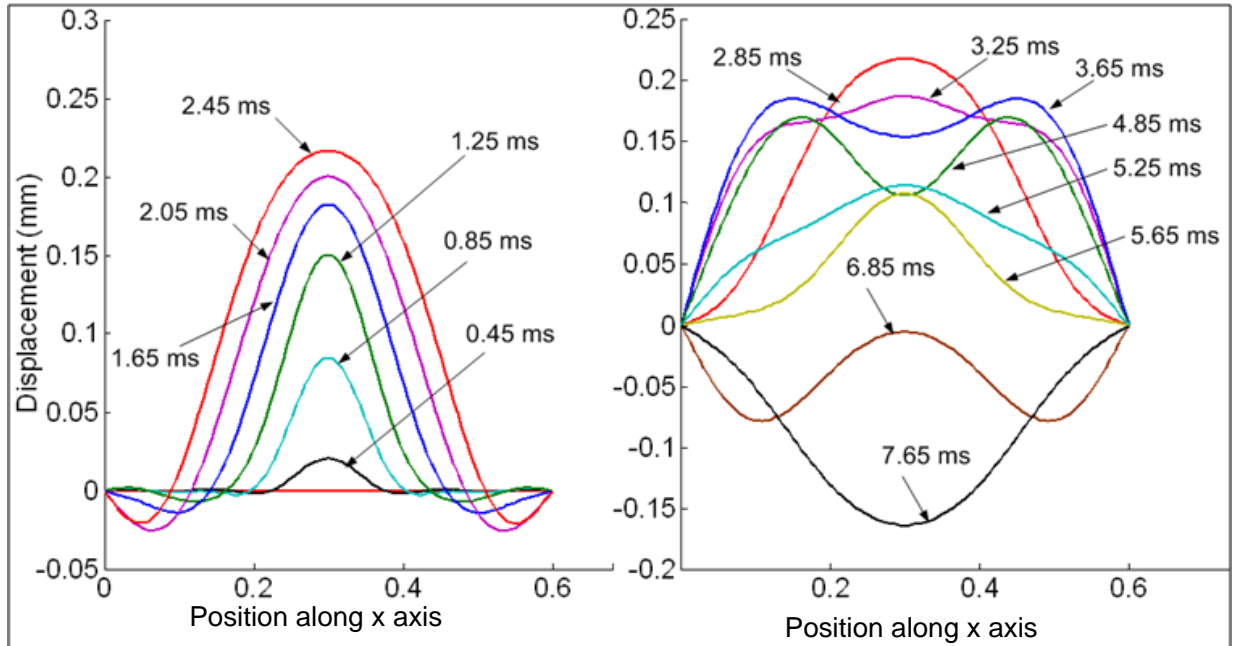


Figure 5.16 : Transversal displacement in section A-A for thickness ratio  $h_v/h_b=0.1$

(impact at  $x=xb/2$ ;  $y=yb/2$  : during contact (left) and after end-of-contact (right)  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  
 $h_b=2.38\text{mm}$ )

In figure 5.16 and figure 5.17, displacements are taken along section A-A for thickness ratios  $h_v/h_b$  of 0.1 and 1.0, respectively. Similar behaviour can be observed in the two figures, where only slight variations of the curve shapes occur between the two configurations. However, displacement amplitudes are smaller with higher ratios. Simulations with higher ratios up to 10 showed that the behaviour remains the same, with even lower amplitudes. It can be concluded that the VEM has a small effect on the shape of deformation curves, and a greater effect on amplitude. The appearance of wave fronts and the shape of the curve are mainly related to the stiffness of the sandwich. This can be seen in figure 5.18 and 5.19 where thickness ratio  $h_c/h_b$  is studied. The analyses are done for ratios from 0.1 to 10. We note that from a value close to five the oscillations become purely sinusoidal. This means that the layers of base plate (BP) and constraining (CP) allow the sandwich to reach certain stiffness, above which it is not possible for higher modes to occur.

By comparing the case of a plate without PCLD (section 3.1) and the present cases, it can be concluded that the VEM affect only the magnitude of displacement, speed and acceleration, on the other hand curve shapes and wave fronts are related to the stiffness of the sandwich.

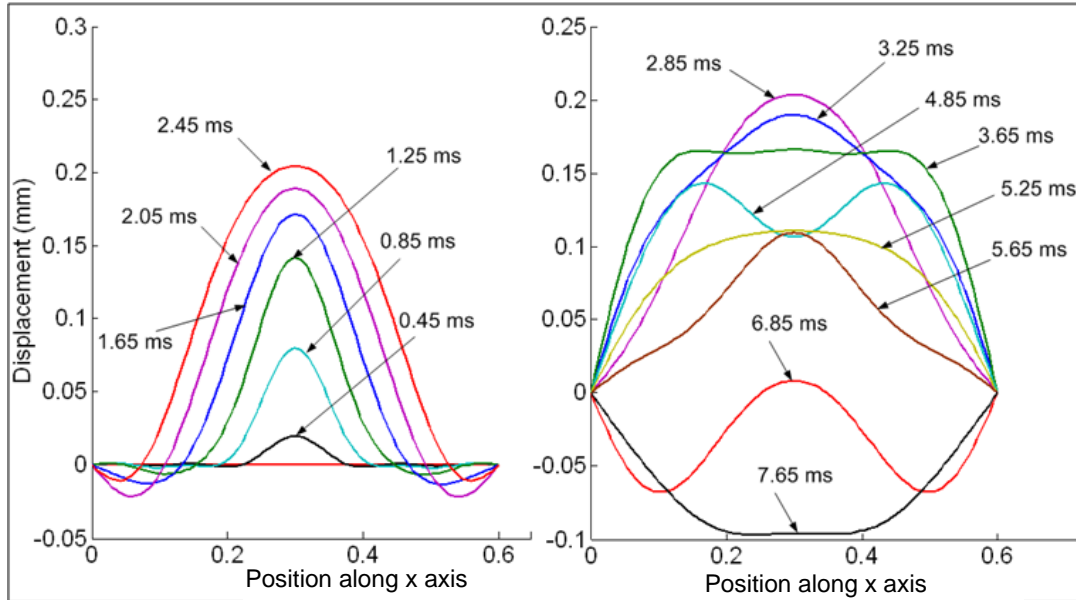


Figure 5.17 : Transversal displacement in section A-A : ratio  $h_v/h_c=0.1$

(impact at  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$  : during contact (left) and after end-of contact (right)  $h_c=0.79\text{mm}$ ,  
 $h_b=2.38\text{mm}$ )

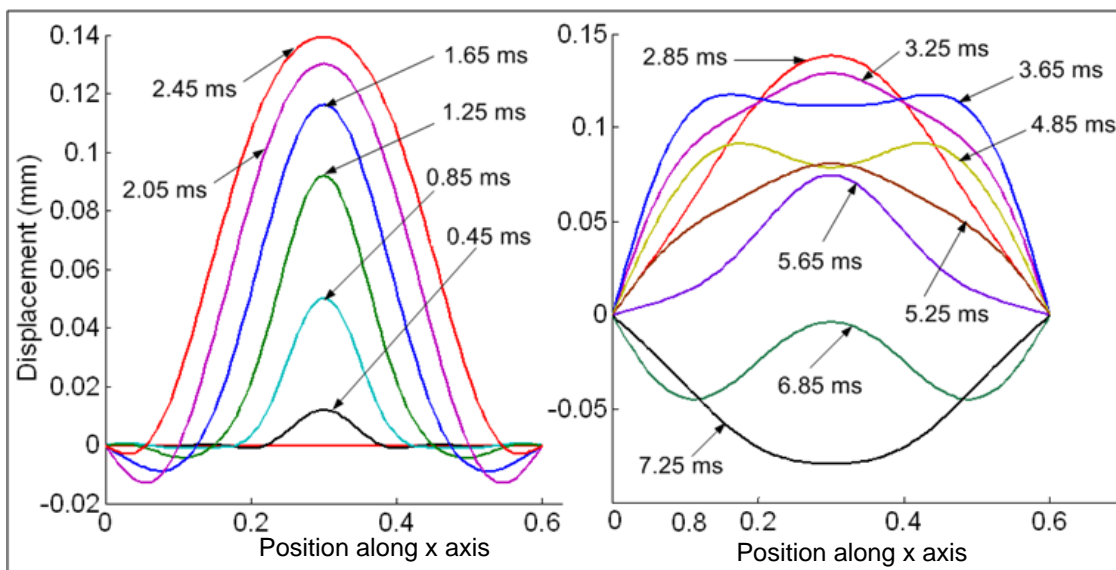


Figure 5.18 : Transversal displacement in section A-A : ratio  $h_c/h_b=1$

(impact at :  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$  : during contact (left) and after end-of contact (right),  $h_v=0.127\text{mm}$ ,  
 $h_b=2.38\text{mm}$ )

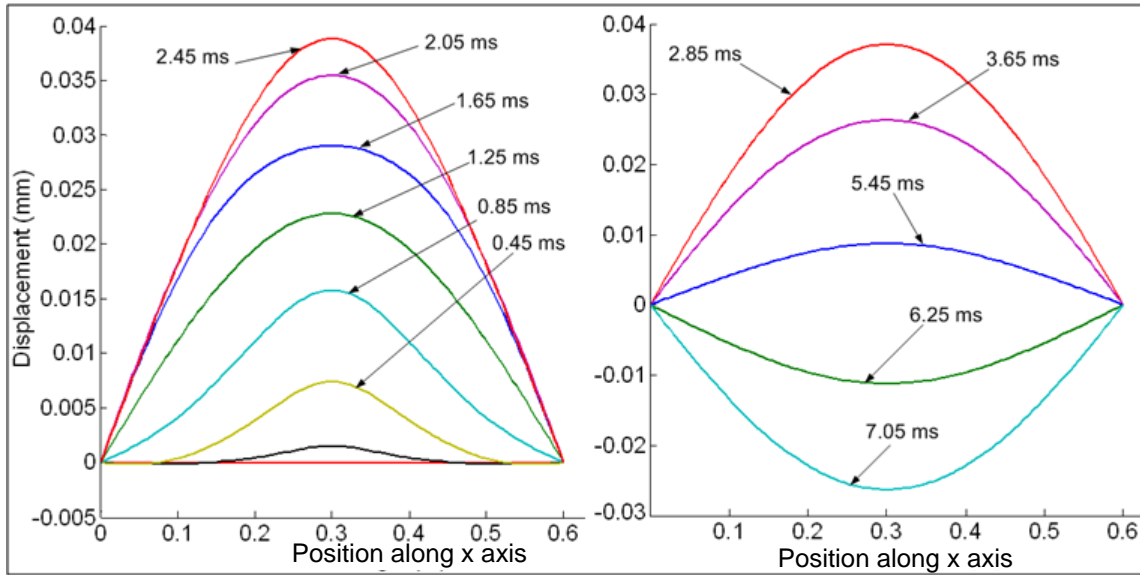


Figure 5.19 : Transversal displacement in section A-A : ratio  $h_c/h_b=5$

(impact at :  $x=x_b/2$ ;  $y=y_b/2$  : during contact (left) and after end-of contact (right),  $h_v=0.127\text{mm}$ ,  
 $h_b=2.38\text{mm}$ )

### 5.5.3 Influence of PCLD position

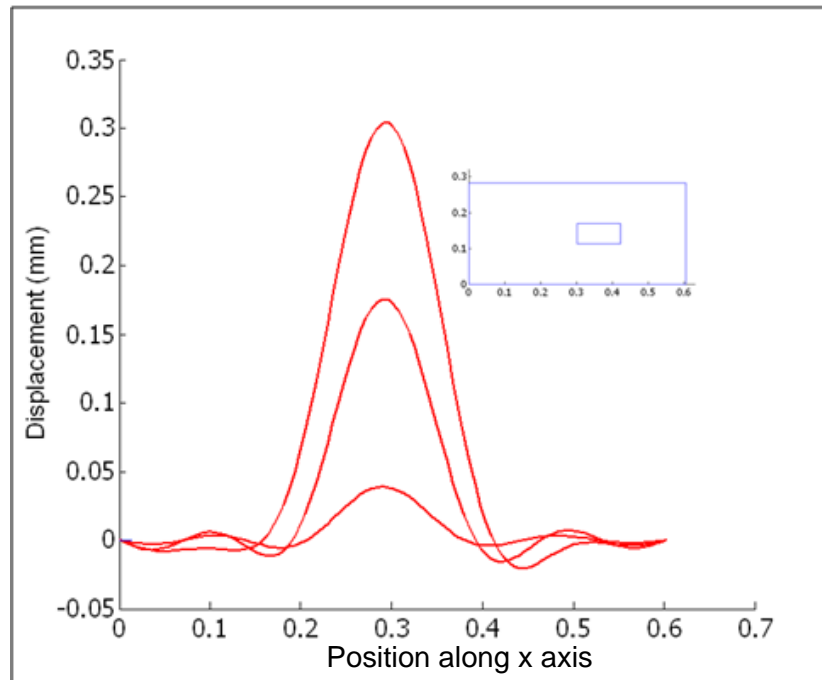


Figure 5.20 : Transversal displacement in section A-A : influence of PCLD position

In this section, we examine the influence of PCLD position on wave propagation. Figure 5.20 displays the transverse displacement in section A-A during contact. In this case, the plate is covered with a PCLD whose characteristics are :  $x_I=300\text{mm}$ ,  $y_I=140\text{mm}$   $x_c=120\text{mm}$   $y_c=28\text{mm}$   $h_c=0.79\text{mm}$   $h_b=2.38\text{mm}$   $h_v=0.127\text{mm}$ . The PCLD is placed as shown in figure 5.20. We observe that the displacement is not perfectly symmetrical with respect to the impact point : the area where PCLD is applied reacts with a delay due to the inertia that is more important than the other half of the plate (in figure 5.21 a zoom of the wave fronts is shown to highlight this asymmetry). This discrepancy is not only due to VEM damping effect, but also to the added stiffness and mass provided by the constraining layer.

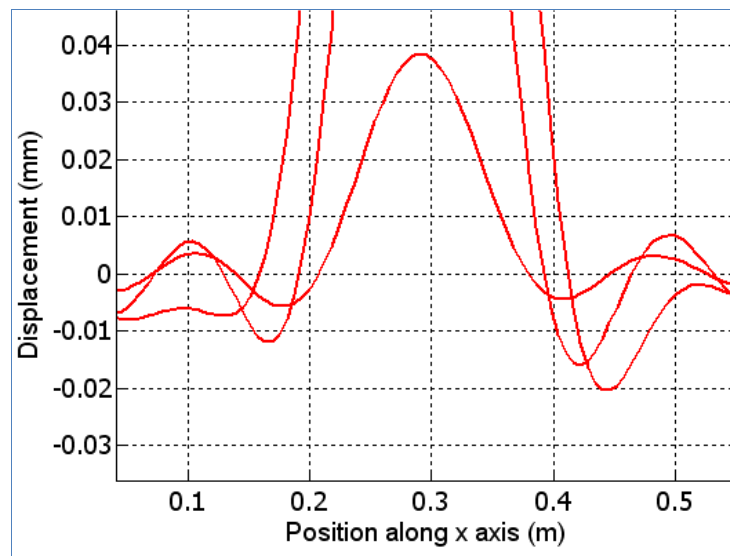


Figure 5.21 : Zoomed area from figure 5.20

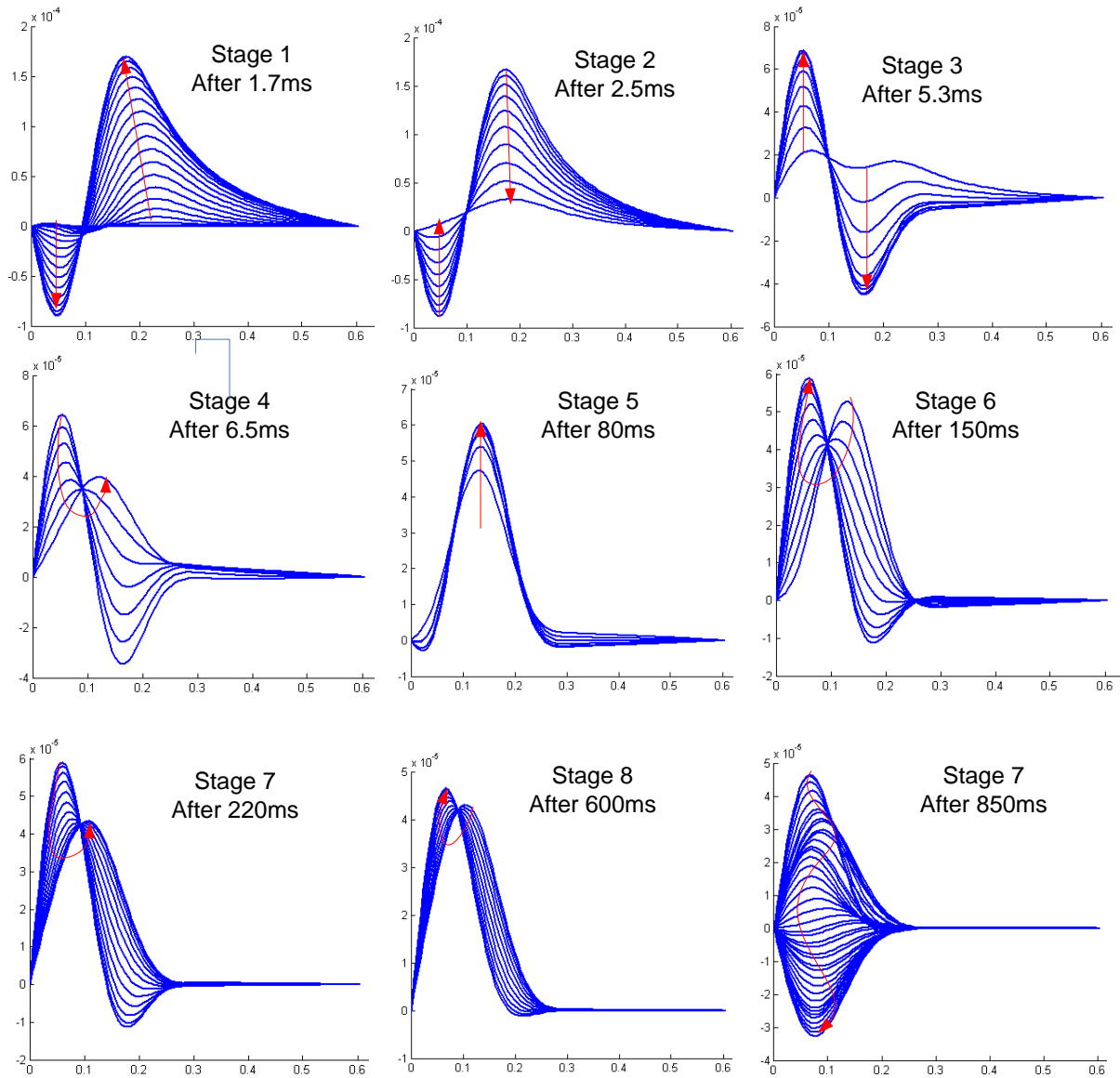


Figure 5.22 : Transversal displacement in section A-A : influence of CP thickness

(impact at  $x=x_b/4$ ;  $y=y_b/2$ )

Figure 5.22 shows the displacement in section A-A of the plate with on half covered with PCLD ( $x_l=300\text{mm}$ ,  $y_l=0\text{mm}$   $x_c=300\text{mm}$   $y_c=281\text{mm}$   $h_c=7.9\text{mm}$   $h_b=0.79\text{mm}$   $h_v=0.127\text{mm}$ ). The thickness of the CP is ten times that of the BP. In this figure, the evolution of waves due to an impact that took place at the center of the PCLD is represented in nine different stages (periods of time). As seen, the transverse movement of the plate is not sinusoidal. The movement consists of a number of modes that want to appear throughout the plate, but they are quickly attenuated. In fact, attenuation is much greater on the half-plate covered with the PCLD, leaving only the

opposite half-plate to vibrate. In the case presented, the covered half of the plate has become so rigid, that the wave cannot spread : the border seems to be moved to the center of the plate.

Finally, it can be concluded that the PCLD postpones the wave and accelerates its damping. This is quite normal since the covered area have a stiffness and surface density much higher than the rest of the plate.

## 5.6 Conclusion

In this paper, an analytical model to study the propagation of bending waves in rectangular plate with PCLD was described. The equation of motion is obtained by the energy principle and Lagrange equations. The resolution is made by two methods. For uncovered plate, the governing equation is solved in time domain. For plate with PCLD the governing equation is solved in frequency domain, then converted back to time domain. Several parameters are analyzed to find their influence on the propagation of bending waves in the sandwich including : boundary conditions, layer thicknesses, position of the impact, and position of PCLD. The simulation results show that stiffer edge supports lead to lower amplitude and higher waves propagation speed. During the contact time, boundary conditions and viscoelastic layer thickness do not affect the wave shape; wave velocity is related to the stiffness provided by constraining layer and base plate. Furthermore, the thickness of the viscoelastic layer plays an important role in the damping of the wave. It not only reduces the transverse speed of the waves, but also lowers the speed of the wave along in-plane direction. If the impact is applied in the middle of the plate, the response is symmetrical. However, if applied elsewhere, the side farthest from the impact will have more wave fronts. If applied very close an edge, the wave fronts appear on one side of the contact point only. The application of a small, off-center PCLD can cause the response to be asymmetric. It also helps to lower the transverse and longitudinal speeds of the wave in the area on which it is bonded.

## CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE

Ce chapitre complète la discussion des points qui n'ont pas eu l'occasion d'être soulevés durant la rédaction des articles. Il met aussi l'accent sur les points qui doivent être traités avec plus d'attention lors de l'étude de l'amortissement des plaques par les tampons viscoélastique. Au début on évalue la justesse des hypothèses adoptées ; afin de voir si elles sont des caractéristiques du système étudié ou si elles sont des simplifications. Ensuite, on discute la simulation du comportement viscoélastique par la série de Prony ainsi que les sources d'erreurs du modèle et leurs relations avec les hypothèses adoptées. Par la suite, on traite de la cohérence de la réponse entre les régimes harmonique et transitoire, et avant de finir on attire l'attention sur l'importance de tenir compte des modes rigides. Dans le dernier paragraphe, on traite de la linéarité du modèle vis-à-vis du facteur de perte.

### 6.1 Hypothèses adoptées pour l'élaboration du modèle

Dans ce paragraphe on discute la validité des hypothèses de refléter l'état des choses. Autrement dit, est-ce que les hypothèses adoptées représentent des caractéristiques réelles du système sandwich ou sont-elles des simplifications ?

Première et deuxième hypothèse :

Si l'impact utilisé ne nuit pas à l'intégrité de la structure, et si les déformations restent dans le domaine élastique, l'hypothèse du non-glissement entre les couches peut être considérée comme une caractéristique du système. En effet, l'effort requis pour provoquer un glissement entre les couches engendre une déformation plastique dans la structure. Cette conclusion est purement expérimentale : on n'a remarqué aucun décollement relatif du tampon par rapport à la plaque après réalisation des tests. Une étude plus avancée de l'adhérence entre la couche viscoélastique et la plaque pourrait confirmer cette conclusion. Cette hypothèse est donc acceptable, ce qui assure la deuxième hypothèse selon laquelle, les trois couches subissent le même déplacement transversal.



Troisième hypothèse :

Selon cette hypothèse, l'énergie cinétique de rotation a été négligée. Certains auteurs [6, 8] ont inclus cet apport et ont obtenu une amélioration de la précision sur les fréquences propres et le facteur de perte. Plus les couches sont épaisses plus l'effet de l'énergie de rotation est important. Si cet effet est présent dans le régime harmonique, alors rien ne l'empêche de l'être dans le régime transitoire. Donc cette hypothèse ne reflète pas l'état des choses, mais plutôt une simplification acceptable dans un sandwich avec des épaisseurs faibles.

Quatrième hypothèse :

Dans cette hypothèse, la dissipation qui a été négligée, est considérée une simplification. Ces pertes d'énergies incluent le frottement au niveau des appuis, la dissipation interne dans les plaques élastiques et le frottement de l'air avec les surfaces des plaques. De plus, la détermination d'un coefficient englobant toutes ces formes de dissipation n'est possible que par les mesures expérimentales. La comparaison de la réponse du sandwich en régime transitoire obtenue expérimentalement et celui du modèle montre que les pertes engendrées par ces frottements sont minimales. Ceci prouve que cette hypothèse reste acceptable.

## 6.2 Calcul de la pression acoustique

L'utilisation de l'intégrale de Rayleigh est applicable soit en champs lointains (le point d'évaluation de la pression est suffisamment loin par rapport aux dimensions de la plaque), soit pour une source est bafflée (vitesse transversale du domaine entourant la plaque (baffle) est nul) [10, 36]. Cette dernière condition est remplie dans notre cas, puisque le traitement se fait dans le régime transitoire, et avant que l'onde n'atteigne les bords de la plaque.

## 6.3 Comportement viscoélastique

Les séries de Prony ont été utilisées pour représenter le comportement du matériau viscoélastique. Ce choix a montré son efficacité à deux niveaux : d'une part, la précision sur les fréquences propres lors de la validation en régime harmonique est adéquate; d'autre part, la réponse en régime transitoire lors de la validation expérimentale a montré une bonne représentation du comportement. La différence obtenue sur les facteurs de perte (validation harmonique) ne remet pas en question l'efficacité de cette technique, puisque les conditions d'une comparaison juste ne sont pas présentes. Rappelons que dans notre étude, la comparaison a

été faite entre des valeurs obtenues avec un module de cisaillement  $G$  constant et des valeurs obtenues avec un module variable. Cependant, la question qui se pose quant à pertinence de cette technique se situe dans les basses fréquences. En effet, la différence dans cette gamme est trop élevée (les valeurs des facteurs de perte en cas de  $G$  variable est pratiquement le double de celui ou  $G$  est constante). Ceci pousse à penser que la mesure du facteur de perte pour différentes fréquences permet de juger la certitude de cette technique.

#### **6.4 Modélisation de la force d'impact**

Même si la force d'impact dépend de la flexibilité de la plaque, et que l'obtention de son allure fait appel à une équation couplant la force et la réponse de la plaque, celle-ci a été modélisée par la relation d'Heitkämper, une relation qui a prouvé son efficacité dans la simulation des impacts surtout si le facteur d'impact  $\Lambda$  est bien choisi. Ceci a été noté durant la comparaison des résultats expérimentaux à ceux fournis par le modèle, en effet, en ajustant  $\Lambda$ , il est possible d'avoir une bonne représentation de l'impact expérimentale par la relation d'Heitkämper.

#### **6.5 Source d'erreur**

Toute modélisation d'un système réel présente des sources d'erreur. En plus des erreurs provenant des hypothèses susmentionnées, on peut rajouter encore la partie de l'énergie cinétique du système qui a été négligé, soit l'énergie liée au mouvement longitudinal. Mentionnons aussi qu'un mauvais choix des indices  $(m,n)$  lors du choix des fonctions admissibles peut affecter la qualité des résultats surtout en régime transitoire. Rappelons que ces indices représentant les modes de vibration de la plaque, ces modes seront pondérés par les fonctions généralisées dépendamment de l'importance de chaque mode. Si un mode plus élevé est appelé avant un autre plus bas, la qualité des résultats est appauvrie. Idéalement, on calcule les fréquences naturelles de la plaque avec les modes de vibration correspondants, ensuite on les classe de façon croissante et on se sert de ce classement dans la construction du vecteur du déplacement par la méthode des modes assumés.

#### **6.6 Cohérence de la réponse dans les régimes harmonique et transitoire**

Les simulations ont montré que la réponse du sandwich dans le régime harmonique et le régime transitoire est caractérisée par une harmonie relative. En effet, les paramètres du tampon affectant

le facteur de perte en régime harmonique affectent de la même façon le déplacement en régime transitoire, mais pas la pression acoustique. Celle-ci est plus sensible à l'étendue de la couverture de la plaque, ceci est tout à fait attendu puisque la pression acoustique dépend de l'accélération de l'ensemble des points de la plaque.

### 6.7 Mode du corps rigide

Le mode (0,0) de vibration transversale ou mode de corps rigide de la plaque de contrainte joue un rôle très important dans la grandeur du facteur de perte. Ce mode n'a d'effet dans une plaque que si elle possède des conditions aux limites libres dans tous ses bords. en effet, pour que la plaque puisse se déplacer sans déformation, elle ne doit avoir aucune entrave qui l'oblige à se déformer. Dans notre cas, ceci s'applique uniquement pour la plaque de contrainte. En cas de l'exclusion de ce mode, le centre de la plaque aura un déplacement longitudinal nul, et ceci est contradictoire à la réalité. Pour tenir compte de ce déplacement, il faut donc inclure ce mode. Dans le design des tampons, nous avons essentiellement deux configurations :

- Plaque avec tampon symétrique;
- Plaque avec tampon asymétrique

Dans le premier cas, et à cause de la symétrie, il n'est pas nécessaire d'inclure ce mode puisque le centre de la plaque de contrainte reste immobile (par rapport au mouvement longitudinal). Dans le cas où le tampon est asymétrique, il faut l'inclure pour tenir compte du déplacement longitudinal du centre de la plaque.

Notons que les simulations ont montré que bien que le mode (0,0) a un effet majeur sur le facteur de perte, les autres modes  $(n,0)$  et  $(0,n)$  pour  $n=1,2,3\dots$  n'ont pas d'effet notable.

Il faut signaler que l'inclusion du mode de corps rigide dans l'analyse des vibrations des plaques constitue un point de divergence entre les auteurs. Comme il a été signalé au chapitre 2, Nakra [57] et Lall [27] ont obtenu des résultats différents par rapport aux zones de la plaque permettant le maximum d'amortissement. Les simulations dont les résultats figurent dans l'article # 2 ont montré que les conclusions obtenues par Lall correspondent à des conditions où le mode rigide est exclu, alors que ceux de Nakra correspondent à ceux où ce mode est inclus. La méthode utilisée par Nakra est la méthode des éléments finis qui ne fait pas de distinction entre les modes, alors que Lall a utilisé la technique de Galerkin, une méthode basée sur la technique des modes

assumées. Par conséquent, on peut conclure avec certitude que la solution de Nakra est adéquate et que l'inclusion du mode de corps rigide dans les méthodes modales est nécessaire pour refléter la réalité..

### **6.8 Linéarité de la réponse en termes de facteur de perte**

Un modèle est dit linéaire s'il respecte le principe de superposition. On a appliqué ce principe par l'étude de trois sandwiches. Les deux premiers avec un même tampon, mais dans des emplacements adjacents, le troisième avec un tampon dont l'aire est égale au double du premier et occupant à la fois les mêmes surfaces couvertes dans les deux premiers sandwiches. La somme des facteurs de perte obtenue avec les deux premiers tampons est supérieure au facteur de perte obtenu avec le troisième tampon. Ce résultat nous a permis non seulement de conclure que le modèle n'est pas linéaire par rapport à la couverture, mais aussi d'expliquer pourquoi une couverture partielle fournit un facteur de perte plus élevé que la couverture totale. En effet la division d'un même tampon en des sous tampons, tout en les gardant dans le même emplacement permet d'obtenir un amortissement plus élevé qu'avec un tampon non divisé. Il en résulte qu'on peut avoir un facteur de perte plus élevé dans une couverture partielle qu'une couverture totale

### **6.9 Limite du modèle**

En plus de la limitation pour des épaisseurs faibles (théorie classique des plaques), on a remarqué lors de l'étude paramétrique une influence particulière de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur le facteur de perte du sandwich. Le facteur de perte baisse lorsqu'on diminue l'épaisseur de la couche viscoélastique, puis il commence à augmenter lorsque l'épaisseur diminue en deçà de la moitié de celui de la plaque de contrainte. Malgré la réduction de l'épaisseur, le facteur de perte continue à augmenter tout en gardant des valeurs faibles, alors que le système s'approche de deux plaques sans couche viscoélastique. Ce résultat paraît en contradiction avec ce qui est attendu. Même si le modèle reste valable pour les plus faibles épaisseurs trouvées dans la littérature (0.127mm), cette caractéristique représente une limite pour le modèle.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Ce travail vient combler une des composantes de recherche sur les sandwichs avec âme viscoélastique. Cette composante qui n'a pas reçu suffisamment d'intérêt jusqu'à présent, englobe non seulement les aspects liés au régime harmonique d'une plaque avec couverture complète, mais surtout le régime transitoire avec couverture partielle.

Les objectifs de cette recherche étaient de bâtir un modèle paramétrique capable de lier la réponse du sandwich à ses caractéristiques et de déterminer l'influence de chaque paramètre sur le comportement du sandwich. Pour atteindre ces objectifs, une plaque rectangulaire avec tampon viscoélastique contraint subissant un impact a été étudiée. Dans cette étude, l'équation du mouvement est obtenue à partir du principe énergétique et les équations de Lagrange. L'impact est modélisé par la relation de Heitkämper. Le module de cisaillement est simulé par la série de Prony. Deux méthodes de résolution ont été utilisées. La première qui se base sur la transformée de Fourier, a lieu dans le domaine fréquentiel où nous pouvons profiter de ce passage pour analyser le spectre de la solution en terme de déplacement. La solution est ensuite convertie au domaine temporel via la transformée inverse rapide de Fourier. La deuxième méthode est une résolution directe dans le domaine temporel à l'aide de la méthode itérative de Newmark. Une fois la solution obtenue, la pression acoustique est calculée par l'équation de Rayleigh.

Le modèle a été validé dans les deux régimes : harmonique et transitoire. Dans le régime harmonique, on a validé avec la littérature en termes de fréquences propres et de facteurs de perte pour deux configurations : couverture partielle et couverture totale. Dans le régime transitoire, une première validation a été faite avec la littérature en termes de propagation d'onde dans la plaque, en comparant la déformée de la plaque enregistrée pour des temps différents avec d'autres résultats de la littérature. Une deuxième validation en régime transitoire a été réalisée avec la mesure du déplacement transversal et du spectre du déplacement obtenu par le biais d'un montage expérimental réalisé aux laboratoires de l'École Polytechnique. Dans tous les cas, les validations avec la littérature et avec les résultats expérimentaux, une bonne précision est obtenue.

Une fois le modèle validé, plusieurs simulations sous différentes conditions ont été réalisées. Ces conditions sont géométriques, statiques et dynamiques. Les diverses conditions géométriques incluent :

- Plaque nue;
- Plaque avec couverture complète ou partielle;
- Tampon de dimensions, d'épaisseurs et de positions variables;
- Conditions aux limites diverses.

Dans les conditions harmoniques (absence d'excitation extérieure), on a calculé les fréquences propres et les facteurs de perte pour caractériser la tendance vibratoire et la capacité d'amortissement du sandwich.

Dans les conditions d'excitation extérieure sous forme d'impact, on a étudié la réponse transitoire initiale du sandwich. Dans ce régime l'étude de plusieurs grandeurs, dont, le déplacement, la vitesse, l'accélération et la pression acoustique était nécessaire afin d'analyser et de comprendre le comportement vibratoire du sandwich.

Les résultats montrent l'efficacité du tampon dans l'amortissement des vibrations dans les deux régimes harmonique et transitoire. Dans le régime harmonique, il était possible non seulement de définir les paramètres optimaux permettant d'avoir le maximum d'amortissement, mais aussi de localiser les zones sur la plaque permettant à la couche viscoélastique de subir le maximum de cisaillement. Ces zones sont étroitement liées au mode de déformation, elles sont situées aux voisinages des coins, sur les crêtes modales et à côté des bords centraux de la plaque. De même, à l'aide d'une figure 3D et pour une fréquence naturelle donnée, on a pu définir la relation entre le facteur de perte et la position du tampon sur la plaque, cette même figure définit le mode de déformation de la fréquence étudiée. L'augmentation de l'épaisseur du matériau viscoélastique a une influence sur le facteur de perte plus que sur les fréquences naturelles. Toutefois, l'augmentation de l'épaisseur plaque de contrainte a un effet significatif sur les fréquences naturelles. Quant au facteur de perte, son augmentation n'est pas proportionnelle aux dimensions de la couche viscoélastique. Il atteint ses valeurs maximales pour des épaisseurs se situant au voisinage de la moitié de celle de la couche de contrainte, et ses valeurs minimales lorsque son épaisseur est au voisinage de celle de la plaque de contrainte. De même, le facteur de perte obtenu n'est pas proportionnel à la taille du tampon. Au contraire, le maximum d'amortissement

est atteint pour une couverture partielle dont le pourcentage est aux environs de 75 %, un résultat qui confirme celui obtenu par Assaf *et al.*

En régime transitoire, les simulations ont été centrées sur les premières millisecondes de la réponse de la plaque. Le traçage du déplacement d'un point en fonction du temps a permis de montrer que la plaque étudiée est dispersive. En effet, il a la présence de deux crêtes lorsque le point choisi n'est pas le lieu d'application de la force a été observée. La première est une indicatrice de la non-coïncidence du point de mesure par rapport au point d'impact. Elle est orientée en sens inverse de la force d'impact, alors que la seconde est orientée au même sens que la force d'impact et informe sur la quantité d'énergie transportée. La représentation du déplacement dans des sections transversales du sandwich pour un temps donné a permis de suivre l'évolution de l'onde. Elle a pu montrer aussi l'influence des conditions aux limites, les caractéristiques du tampon et la durée du contact. Entre autres, plus les bords sont contraints, moins l'amplitude est élevée et plus la vitesse transversale des ondes est élevée. Toutefois, durant le contact les conditions aux limites n'ont pas d'influence sur la forme de l'onde dans les configurations étudiées, puisque la plaque est en vibration forcée, elle doit se soumettre à l'effet de la force extérieure. C'est après ce temps que les conditions aux limites interviennent pour contribuer conjointement avec les autres paramètres dans l'évolution de l'onde. La forme d'onde ne dépend pas de l'épaisseur de la couche viscoélastique, mais elle est liée à la rigidité fournie par les plaques de contraintes et de base.

En plus de ces simulations, la pression acoustique a été représentée afin de voir son évolution. Il a été noté que les conditions d'amortissement maximal obtenues en régime harmonique sont applicables en régime transitoire. Elles permettent de baisser la pression acoustique et le déplacement. Cependant, la pression acoustique est plus sensible à l'étendue du tampon en raison de sa dépendance de l'accélération de tous les points de la plaque.

Avec ce modèle et le nombre important de simulations qui ont été réalisées, nous avons non seulement répondu aux objectifs de la thèse, mais aussi nous avons présenté un modèle capable d'analyser la réponse forcée des plaques et des sandwichs et préparer une plateforme pour des recherches plus avancées. Ces travaux futurs engloberont surtout :

- adaptation du modèle pour l'étude d'autres structures (i.e. plaque circulaire, cylindre);

- adaptation du modèle pour inclure d'autres types de chargements, entre autres, force surfacique, force aléatoire et impacts multiples;
- avec l'augmentation de la capacité des ordinateurs, il sera intéressant d'inclure les formes d'énergie présentement négligées afin de pouvoir traiter des plaques plus épaisses.

Ce projet présente deux retombées significatives l'une industrielle et l'autre scientifique. Dans la composante industrielle, où le design du tampon aura lieu, le concepteur détient maintenant les outils lui permettant de maîtriser et de choisir les paramètres optimaux répondant aux critères du design. La composante scientifique élucide une partie de la propagation des ondes dans les milieux élastiques. Elle déchiffre le comportement du sandwich durant les premières millisecondes. Elle sert aussi de premier pas dans l'étude en régime transitoire de structures avec traitement de surface à couverture partielle stimulant le désir des chercheurs d'aller plus loin afin de compléter et étendre les applications de ce modèle.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Cai a, H. Zheng a, G.R. Liu, "Vibration analysis of a beam with PCLD Patch," *Applied Acoustics*, 2004.
- [2] S. V. Gang Wang, Norman M. Wereley, "Analysis of Sandwich Plates with Isotropic Face Plates and a Viscoelastic Core," *Journal of Vibration and Acoustics*, 2000.
- [3] D. Granger and A. Ross, "Effects of partial constrained viscoelastic layer damping parameters on the initial transient response of impacted cantilever beams: Experimental and numerical results," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, pp. 45-64, 2009.
- [4] C. Johnson and D. Kienholz, "Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers," *AIAA Journal*, vol. 20, pp. 1284-1290, 1982.
- [5] G. Wang, N. M. Wereley, and D.-C. Chang, "Analysis of bending vibration of rectangular plates using two-dimensional plate modes," *Journal of Aircraft*, vol. 42, pp. 542-550, 2005.
- [6] E. M. Kerwin, "Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer," vol. 31, pp. 952-962, 1959.
- [7] W. Siala, M. Abdennadher, L. Hammami, and M. Haddar, "Modal damping prediction of sandwich panel with visco-elastic thick core," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 222, pp. 2077-2086, 2008.
- [8] D. Sun and S.-N. Luo, "Wave propagation and transient response of a FGM plate under a point impact load based on higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 93, pp. 1474-1484, 2011.
- [9] P. Cupial and J. Niziol, "Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 183, pp. 99-114, 1995.
- [10] S. Schedin, C. Lambourg, and A. Chaigne, "Transient Sound Fields From Impacted Plates: Comparison Between Numerical Simulations And Experiments," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 221, pp. 471-490, 1999.
- [11] E. Barkanov, R. Rikards, C. Holste, and O. Täger, "Transient response of sandwich viscoelastic beams, plates, and shells under impulse loading," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 36, pp. 215-222, 2000.
- [12] M. Salehi, F. Bakhtiari-Nejad, and A. Besharati, "Time-domain analysis of sandwich shells with passive constrained viscoelastic layers," *Scientia Iranica*, vol. 15, pp. 637-643, 2008.
- [13] A. Abbadi, Y. Koutsawa, A. Carmasol, S. Belouettar, and Z. Azari, "Experimental and numerical characterization of honeycomb sandwich composite panels," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 17, pp. 1533-1547, 2009.
- [14] C. L. Dym, "Transmission of sound through sandwich panels," 1974.

- [15] A. Nayak, R. Shenoi, and S. Moy, "Transient response of composite sandwich plates," *Composite Structures*, vol. 64, pp. 249-267, 2004.
- [16] P. J. Shorter, "Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, pp. 1917-1925, 2004.
- [17] Liping Liu a, Kaushik Bhattacharya b, "Wave propagation in a sandwich structure," *International Journal of Solids and Structures*, 2009.
- [18] J. A. M. a. n. H. Lyon, "Sound transmission loss characteristics of sandwich panel constructions," 1989.
- [19] M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*: Cambridge Univ Pr, 2008.
- [20] W. Soedel, *Vibrations of shells and plates*: CRC, 2004.
- [21] M. Ray, J. Oh, and A. Baz, "Active constrained layer damping of thin cylindrical shells," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 240, pp. 921-935, 2001.
- [22] H. Zheng, C. Cai, G. S. H. Pau, and G. R. Liu, "Minimizing vibration response of cylindrical shells through layout optimization of passive constrained layer damping treatments," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 279, pp. 739-756, 2005.
- [23] D. Thorby, *Structural dynamics and vibration in practice: an engineering handbook* vol. 10: Butterworth-Heinemann, 2008.
- [24] H. Zheng, X. M. Tan, and C. Cai, "Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 48, pp. 1371-1383, 2006.
- [25] C. W. De Silva, *Vibration damping, control, and design*: CRC Press, 2007.
- [26] P. Dewangan, "Passive Viscoelastic Constrained Layer Damping for Structural Application," 2009.
- [27] A. K. Lall, N. T. Asnani, and B. C. Nakra, "Vibration and damping analysis of rectangular plate with partially covered constrained viscoelastic layer," *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, vol. 109, pp. 241-247, 1987.
- [28] B. Nakra, "Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping," *Journal of Sound and vibration*, vol. 211, pp. 449-465, 1998.
- [29] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*, Third edition ed.: John Wiley & Sons, 1980.
- [30] A. D. Nashif, D. I. G. Jones, and J. P. Henderson, *Vibration damping*: Wiley-interscience, 1985.
- [31] M. T. S. W. J. M. Knight, *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, Third edition ed.: John Wiley & Sons, 2005.
- [32] D. Granger, "Amortissement d'une poutre par traitement viscoélastique contraint et analyse du régime transitoire suite à un impact," ECOLE POLYTECHNIQUE, MONTREAL, 2008.

- [33] H. Z. C. Cai, X.M. Tan, , "Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches," *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006.
- [34] E. Barkanov, "Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 393-403, 1999.
- [35] G. Wang, "Analyses of sandwich beams and plates with viscoelastic cores," Ph.D. 3035833, University of Maryland College Park, United States -- Maryland, 2001.
- [36] J. F. Blais, "Application de l'holographie acoustique en champ proche a l'etude du rayonnement transitoire de plaques soumises a des impacts," M.Sc.A. MR48908, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), Canada, 2009.
- [37] Q. F. Wei, P. S. Krishnaprasad, and W. P. Dayawansa, "Modeling of impact on a flexible beam," San Antonio, TX, USA, 1993, pp. 1377-1382.
- [38] E. H. Lee, *The impact of a mass striking a beam*: Stanford University., 1940.
- [39] L. Sun, F. Luo, and T.-H. Chen, "Transient response of a beam on viscoelastic foundation under an impact load during nondestructive testing," *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, vol. 4, pp. 325-333, 2005.
- [40] G. T. Gouri Dhatt, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A ed. Paris: Les presses de l'université de Laval, 1981.
- [41] P. White, "Time Frequency Methods," Southampton, UK, 2001.
- [42] D. J. Ewins, *Modal testing: theory, practice and application*: Research Studies Press, Ltd., 2000.
- [43] E. G. Williams, *Fourier Acoustics Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. California: Academic Press, 1999.
- [44] J. F. Blais, M. Cimmino, A. Ross, and D. Granger, "Suppression of time aliasing in the solution of the equations of motion of an impacted beam with partial constrained layer damping," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, pp. 870-882, 2009.
- [45] H. G. R. J. Beerends, *Ter Morsche, Fourier and Laplace Transform*. UK: Cambridge University Press, 2003.
- [46] K. Amichi, "Finite element modeling of sandwich structures with viscoelastic core," Ph.D. NR52817, Université de Sherbrooke (Canada), Canada, 2009.
- [47] D. Ross, E. Ungar et E. Kerwin, "Damping of flexural vibrations by means of viscoelastic laminate.," *Structural Damping*, J. E. Ruzicka, ed., ASME, New York, pp. 49-88., 1959.
- [48] D. Mead, "A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 83, pp. 363-377, 1982.
- [49] R. DiTaranto and A. S. o. M. Engineers, "Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams," 1965.
- [50] W. X. Yuan and D. J. Dawe, "Free vibration of sandwich plates with laminated faces," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, pp. 195-217, 2002.

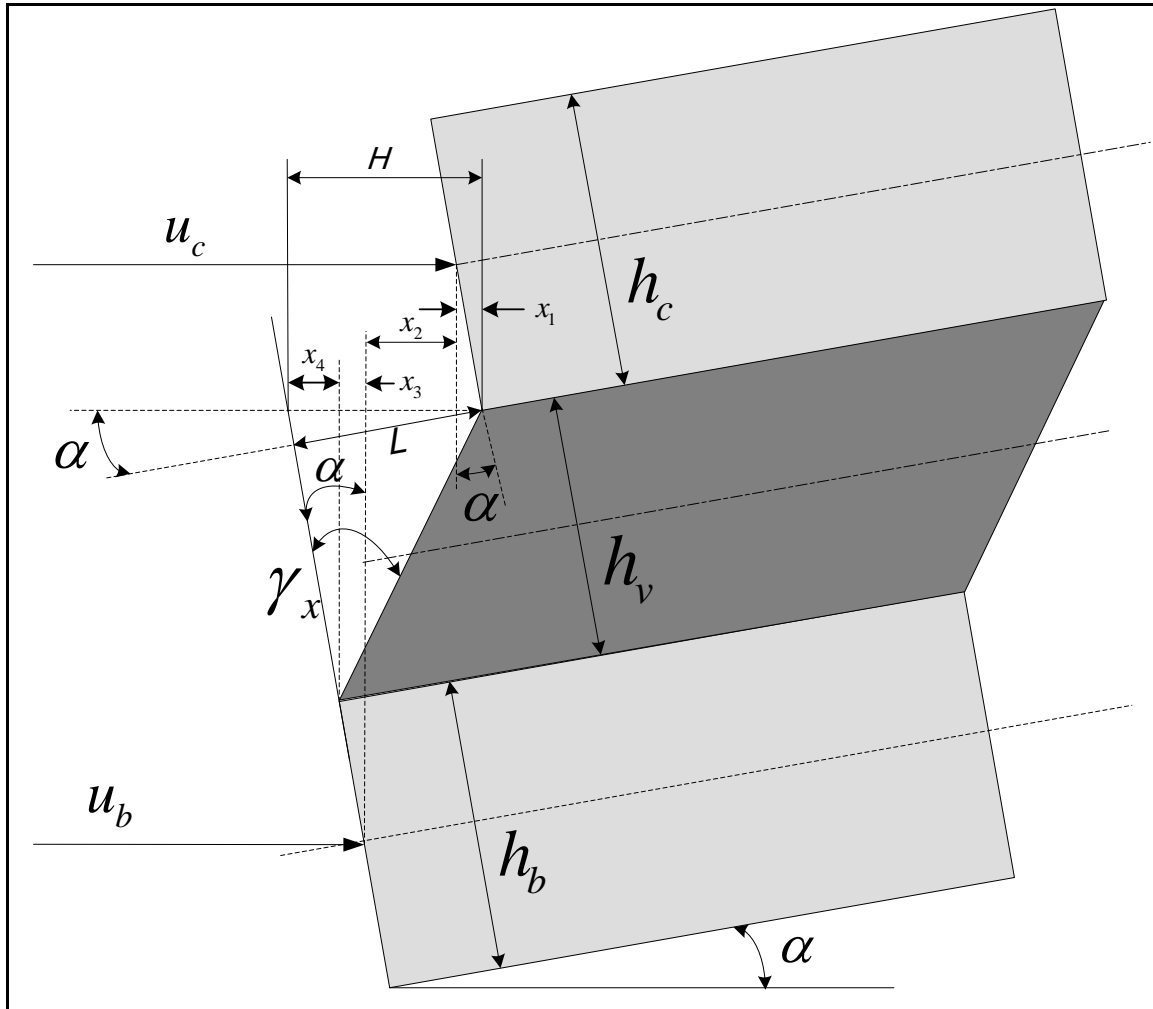
- [51] T.-L. Teng and N.-K. Hu, "Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 3881-3892, 2001.
- [52] J. S. Moita, A. L. Araujo, C. M. Mota Soares, and C. A. Mota Soares, "Finite element model for damping optimization of viscoelastic sandwich plate structures," in *13th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, CC 2011, September 6, 2011 - September 9, 2011*, Chania, Crete, Greece, 2011.
- [53] S. W. Hou, Y. H. Jiao, X. Wang, Z. B. Chen, and Y. B. Fan, "Optimization of Plate with Partial Constrained Layer Damping Treatment for Vibration and Noise Reduction," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 138, pp. 20-26, 2012.
- [54] H. Zheng, G. S. H. Pau, and Y. Y. Wang, "A comparative study on optimization of constrained layer damping treatment for structural vibration control," *Thin-Walled Structures*, vol. 44, pp. 886-896, 2006.
- [55] A. Araújo, P. Martins, C. Mota Soares, C. Mota Soares, and J. Herskovits, "Damping optimization of viscoelastic laminated sandwich composite structures," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 39, pp. 569-579, 2009.
- [56] A. Mura, F. Curà, and G. Curti, "Influence of the viscoelastic FLD patches disposition on damping performances of steel plates," *Pollack Periodica*, vol. 5, pp. 73-86, 2010.
- [57] B. Nakra, "Structural dynamic modification using additive damping," *Sadhana*, vol. 25, pp. 277-289, 2000.
- [58] S. Assaf, M. Guerich, and P. Cuvelier, "Vibration and Damping Analysis of Plates with Partially Covered Damping Layers," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 97, pp. 553-568, 2011.
- [59] S. G. Braun, D. J. Ewins, S. S. Rao, and Knovel, *Encyclopedia of vibration* vol. 11: Academic Press, 2002.
- [60] F. Fahy, *Sound and Structural Vibration*, 2nd Edition ed. vol. 122: ASA, 2007.
- [61] L. Cremer and M. Heckl, "Structure-borne sound: structural vibrations and sound radiation at audio frequencies," *Berlin and New York, Springer-Verlag, 1988, 590 p. Translation.*, vol. 1, 1988.
- [62] L. Y. Haikuo Peng, Guang Meng, Kai Sun, Fucui Li, "Characteristics of elastic wave propagation in thick beams – when guided waves prevail?," *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 49, 3., pp. pp. 807-823, 2011.
- [63] S. Akbarov and M. Guliev, "The influence of the finite initial strains on the axisymmetric wave dispersion in a circular cylinder embedded in a compressible elastic medium," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, pp. 89-95, 2010.
- [64] S. D. Akbarov, E. R. Agasiyev, and A. D. Zamanov, "Wave propagation in a pre-strained compressible elastic sandwich plate," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 30, pp. 409-422.

- [65] S. D. Akbarov and M. S. Guliev, "Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials," *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 39, pp. 155-177, 2009.
- [66] P. Kudela, A. Žak, M. Krawczuk, and W. Ostachowicz, "Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method," *Journal of Sound and vibration*, vol. 302, pp. 728-745, 2007.
- [67] A. Ross, "Visualisation et optimisation des effets des vac damps sur le champ vectoriel d'intensite acoustique d'une structure soumise a des impacts repetes," Ph.D. NQ57383, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), Canada, 2000.
- [68] J.-F. Roy, "Etude de la propagation des ondes de flexion dans une plaque amortie subissant un impact," M.Sc.A. MR10622, Universite de Moncton (Canada), Canada, 2005.
- [69] A. Oulmane, "Dynamique transitoire d'une plaque impactee, partiellement recouverte d'un traitement amortissant contraint," M.Sc.A. MR29249, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), Canada, 2007.
- [70] F. Abdulhadi, "Transverse vibrations of laminated plates with viscoelastic layer damping," *Shock and Vibration Bulletin*, vol. 40, pp. 90-104, 1969.
- [71] C. L. Sisemore and C. M. Darvennes, "Transverse Vibration Of Elastic-Viscoelastic-Elastic Sandwich Beams: Compression-Experimental And Analytical Study," *Journal of Sound and vibration*, vol. 252, pp. 155-167, 2002.
- [72] Y. C. Chen and S. C. Huang, "An optimal placement of CLD treatment for vibration suppression of plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 1801-1821, 2002.
- [73] S. Assaf, M. Guerich, and P. Cuvelier, "Vibration and acoustic response of damped sandwich plates immersed in a light or heavy fluid," *Computers & Structures*, vol. 88, pp. 870-878, 2010.
- [74] K. D. Cho, J. H. Han, and I. Lee, "Vibration and damping analysis of laminated plates with fully and partially covered damping layers," *Journal of reinforced plastics and composites*, vol. 19, pp. 1176-1200, 2000.
- [75] W. Heitkämper, "Näherungsweise Berechnung der Schallabstrahlung von storßating angeregten Platten (An approximate calculation of the acoustic radiation of impacted plates),," *Acustica* vol. 58 (3) pp. 141-148., 1985.
- [76] B. S. W. P. a. Y. R. Kim, "Fitting Prony-Series Viscoelastic Models With Power-Law Presmoothing," *Journal of materials in civil engineering*, 2001.
- [77] J. R. Vinson, *Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction*. Netherlands: Springer, 2005.
- [78] M. L. Slanik, J. A. Nemes, M.-J. Potvin, and J.-C. Piedboeuf, "Time domain finite element simulations of damped multilayered beams using a prony series representation," *Mechanics Time-Dependent Materials*, vol. 4, pp. 211-230, 2000.
- [79] W. Goldsmith, *Impact: the theory and physical behaviour of colliding solids*: Dover Pubns, 2001.

- [80] B. C. Nakra, "Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping," in *Indo-USA Symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering, 18-20 March 1996*, UK, 1998, pp. 449-65.
- [81] A. Marco, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge, 2008.
- [82] [http://en.wikipedia.org/wiki/Lamb\\_waves](http://en.wikipedia.org/wiki/Lamb_waves).
- [83] A. R. Daniel Granger, "Effects of partial constrained viscoelastic layer damping parameters on the initial transient response of impacted cantilever beams : experimental and numerical results," *Elsevier*, 2008.

## ANNEXES : Développement de l'équation du mouvement

### Annexe A.1 : Calcul de l'angle de cisailment :



$$\sin \gamma_x = \frac{L}{h_v} \quad (8.1)$$

$$L = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (8.2)$$

$$H = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{h_c}{2} \sin \alpha + u_b - u_c + \frac{h_b}{2} \sin \alpha + h_v \sin \alpha \quad (8.3)$$

En remplaçant  $H$  dans l'équation (5.2) et  $L$  dans l'équation (5.1), avec l'approximation de  $\sin \gamma = \gamma$ ,  $\cos \gamma = 1$ , et sachant que  $\tan \alpha = \partial w / \partial x$ , on trouve l'expression de  $\gamma_x$  :

$$\gamma_x = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.4)$$

Avec le même raisonnement on trouve  $\gamma_x$  dans le plan  $yz$  :

$$\gamma_y = \frac{v_c - v_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.5)$$



## Annexe A2 : Calcul de l'énergie dans les plaques rigides

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{K}{2} \int_x \int_y \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\
 &+ \frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{K}{2} \int_x \int_y \left\{ (u_{,x} + v_{,y})^2 - 2(1-\nu) u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right\} dx dy \\
 &+ \frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ (w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2] \right\} dx dy \\
 E &= \frac{K}{2} \int_x \int_y \left\{ u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2u_{,x} v_{,y} - 2(1-\nu) u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y}^2 + v_{,x}^2 + 2u_{,y} v_{,x}) \right\} dx dy \\
 &+ \frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2w_{,xx} w_{,yy} - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2] \right\} dx dy \\
 &= \frac{K}{2} \int_x \int_y \left\{ u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2\nu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y}^2 + v_{,x}^2 + 2u_{,y} v_{,x}) \right\} dx dy + \\
 &\frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2(1-\nu) \omega_{,xy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{K}{2} \int_x \int_y \left\{ u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2\nu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y}^2 + v_{,x}^2 + 2u_{,y} v_{,x}) \right\} dx dy + \\
 &\frac{D}{2} \int_x \int_y \left\{ \omega_{,xx}^2 + \omega_{,yy}^2 + 2(1-\nu) \omega_{,xy}^2 + 2\nu \omega_{,xx} \omega_{,yy} \right\} dx dy \\
 &= \frac{K}{2} \int u_{,x}^2 ds + \frac{K}{2} \int v_{,y}^2 ds + \frac{K}{2} \int 2\nu u_{,x} v_{,y} ds + \frac{K}{2} \int \frac{1-\nu}{2} u_{,y}^2 ds + \\
 &\frac{K}{2} \int \frac{1-\nu}{2} v_{,x}^2 ds + \frac{K}{2} \int \frac{1-\nu}{2} 2u_{,y} v_{,x} ds + \\
 &\frac{D}{2} \int \omega_{,xx}^2 ds + \frac{D}{2} \int \omega_{,yy}^2 ds + \frac{D}{2} \int 2(1-\nu) \omega_{,xy}^2 ds + \frac{D}{2} \int 2\nu \omega_{,xx} \omega_{,yy} ds
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{2} \int u_{,x}^2 ds + \frac{K}{2} \int v_{,y}^2 ds + K\nu \int u_{,x} v_{,y} ds + \frac{K(1-\nu)}{4} \int u_{,y}^2 ds + \\
&\frac{K(1-\nu)}{4} \int v_{,x}^2 ds + \frac{K(1-\nu)}{2} \int u_{,y} v_{,x} ds + \\
&\frac{D}{2} \int \omega_{,xx}^2 ds + \frac{D}{2} \int \omega_{,yy}^2 ds + D(1-\nu) \int \omega_{,xy}^2 ds + D\nu \int \omega_{,xx} \omega_{,yy} ds \\
&= \frac{K}{2} U_b^T K_{bux} U_b + \frac{K}{2} V_b^T K_{bvy} V_b + K\nu U_b^T K_{bxy} V_b + \frac{K(1-\nu)}{4} U_b^T K_{buy} U_b + \\
&\frac{K(1-\nu)}{4} V_b^T K_{bvx} V_b + \frac{K(1-\nu)}{2} U_b^T K_{byx} V_b \\
&\frac{D}{2} W^T K_{\phi 1} W + \frac{D}{2} W^T K_{\phi 2} W + D(1-\nu) W^T K_{\phi 3} W + D\nu W^T K_{\phi 4} W
\end{aligned} \tag{8.9}$$

On inclut les coefficients dans les matrices :

$$\begin{aligned}
E &= U_b^T K_{bux} U_b + V_b^T K_{bvy} V_b + U_b^T K_{bxy} V_b + U_b^T K_{buy} U_b + V_b^T K_{bvx} V_b + U_b^T K_{byx} V_b \\
&W^T K_{\phi 1} W + W^T K_{\phi 2} W + W^T K_{\phi 3} W + W^T K_{\phi 4} W \\
&= U_b^T (K_{bux} + K_{buy}) U_b + V_b^T (K_{bvy} + K_{bvx}) V_b + U_b^T (K_{bxy} + K_{byx}) V_b + \\
&W^T (K_{\phi 1} + K_{\phi 2} + K_{\phi 3} + K_{\phi 4}) W
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Énergie potentielle dans la plaque viscoélastique :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} \tag{8.11}$$

Selon les hypothèses adoptées cette équation devient :

$$W = \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} \tag{8.12}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_x, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_y \tag{8.13}$$

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz}, \sigma_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} \tag{8.14}$$

$$E_v = \iiint W dv = \iiint 2G \left[ \left( \frac{\gamma_x}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_y}{2} \right)^2 \right] dv = \frac{G}{2} \iiint \gamma_x^2 + \gamma_y^2 dv \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned}
E_v &= \frac{Gh_v}{2} \int_x \int_y \left[ \left\{ \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] w_{,x} \right\}^2 + \left\{ \frac{v_c - v_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_c + h_b}{2} + h_v \right] w_{,y} \right\}^2 \right] dx dy \\
&= \frac{G}{2h_v} \int_x \int_y \left[ u_c^2 + u_b^2 - 2u_c u_b + d^2 w_{,x}^2 + 2d(u_c - u_b)w_{,x} + v_c^2 + v_b^2 - 2v_c v_b + d^2 w_{,y}^2 + 2d(v_c - v_b)w_{,y} \right] dx dy \\
&= \frac{G}{2h_v} \int_s u_c^2 dx dy + \frac{G}{2h_v} \int_s u_b^2 dx dy - \frac{G}{h_v} \int_s u_c u_b dx dy + \\
&\quad \frac{Gd^2}{2h_v} \int_s w_{,x}^2 dx dy + \frac{Gd}{h_v} \int_s u_c w_{,x} dx dy - \frac{Gd}{h_v} \int_s u_b w_{,x} dx dy \\
&\quad + \frac{G}{2h_v} \int_s v_c^2 dx dy + \frac{G}{2h_v} \int_s v_b^2 dx dy - \frac{G}{h_v} \int_s v_c v_b dx dy + \\
&\quad \frac{Gd^2}{2h_v} \int_s w_{,y}^2 dx dy + \frac{Gd}{h_v} \int_s v_c w_{,y} dx dy - \frac{Gd}{h_v} \int_s v_b w_{,y} dx dy \\
&= \frac{G}{2h_v} U_c^T K_{cu} U_c + \frac{G}{2h_v} U_b^T K_{bu} U_b - \frac{G}{h_v} U_c^T K_{bcu} U_b + \\
&\quad \frac{Gd^2}{2h_v} W^T K_{wx} W + \frac{Gd}{h_v} U_c^T K_{cu1} W - \frac{Gd}{h_v} U_b^T K_{bu1} W \\
&\quad + \frac{G}{2h_v} V_c^T K_{cv} V_c + \frac{G}{2h_v} V_b^T K_{bv} V_b - \frac{G}{h_v} V_c^T K_{bcv} V_b + \\
&\quad \frac{Gd^2}{2h_v} W^T K_{wy} W + \frac{Gd}{h_v} V_c^T K_{cv1} W - \frac{Gd}{h_v} V_b^T K_{bv1} W
\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\text{Avec } d = \frac{h_c + h_b}{2} + h_v$$

On obtient finalement l'expression de  $E_v$  :

$$\begin{aligned}
E_v &= U_c^T K_{cu} U_c + U_b^T K_{bu} U_b - U_c^T K_{bcu} U_b + W^T K_{wx} W + U_c^T K_{cu1} W - \\
&U_b^T K_{bu1} W + V_c^T K_{cv} V_c + V_b^T K_{bv} V_b - V_c^T K_{bcv} V_b + W^T K_{wy} W + V_c^T K_{cv1} W \\
&- V_b^T K_{bv1} W \\
&= \frac{G}{2h_v} U_c^T K_{cu} U_c + \frac{G}{2h_v} U_b^T K_{bu} U_b - \frac{G}{h_v} U_c^T K_{bcu} U_b + \frac{Gd^2}{2h_v} W^T K_{wx} W + \\
&\frac{Gd}{h_v} U_c^T K_{cu1} W - \frac{Gd}{h_v} U_b^T K_{bu1} W + \frac{G}{2h_v} V_c^T K_{cv} V_c + \frac{G}{2h_v} V_b^T K_{bv} V_b - \\
&\frac{G}{h_v} V_c^T K_{bcv} V_b + \frac{Gd^2}{2h_v} W^T K_{wy} W + \frac{Gd}{h_v} V_c^T K_{cv1} W - \frac{Gd}{h_v} V_b^T K_{bv1} W
\end{aligned} \tag{8.17}$$

L'énergie cinétique a la même expression dans les trois plaques :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} (\rho_b h_b + \rho_c h_c + \rho_v h_v) \int_x \int_y w_t^2 dx dy + \\
&\frac{1}{2} \rho_b h_b \int_x \int_y u_{b,t}^2 + v_{b,t}^2 dx dy + \frac{1}{2} \rho_c h_c \int_x \int_y u_{c,t}^2 + v_{c,t}^2 dx dy \\
&= \frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} + \frac{1}{2} \rho_b h_b \left( \begin{aligned} &\dot{U}_b^T \int \int \Gamma \Gamma^T dx dy \dot{U}_b + \\ &\dot{V}_b^T \int \int \Psi \Psi^T dx dy \dot{V}_b \end{aligned} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \rho_c h_c \left( \begin{aligned} &\dot{U}_c^T \int \int \Omega \Omega^T dx dy \dot{U}_c + \dot{V}_c^T \int \int \Pi \Pi^T dx dy \dot{V}_c \end{aligned} \right) \\
&= \frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} + \frac{2h_v}{G} \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\rho_b h_b \left( \begin{aligned} &\dot{U}_b^T K_{bu} \dot{U}_b + \dot{V}_b^T K_{bv} \dot{V}_b \end{aligned} \right) \\ &\rho_c h_c \left( \begin{aligned} &\dot{U}_c^T K_{cu} \dot{U}_c + \dot{V}_c^T K_{cv} \dot{V}_c \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Avec :

$$M_b = \rho_b h_b \int_x \int_y \Phi(x, y) \Phi^T(x, y) dx dy$$

$$M_c = \rho_c h_c \int_x \int_y \Phi(x, y) \Phi^T(x, y) dx dy$$

$$M_v = \rho_v h_v \int_x \int_y \Phi(x, y) \Phi^T(x, y) dx dy$$

$$K_{wi} = \frac{Gd^2}{2h_v} \iint_{x y} \Phi_{,i} \Phi_{,i}^T dx dy, \quad i = x, y$$

$$K_{bv1} = \frac{Gd}{h_v} \iint_{x y} \Psi \Phi_{,y}^T dx dy \quad K_{cu1} = \frac{Gd}{h_v} \iint_{x y} \Omega \Phi_{,x}^T dx dy$$

$$K_{bcv} = \frac{G}{h_v} \iint_{x y} \Pi \Psi^T dx dy \quad K_{bcu} = \frac{G}{h_v} \iint_{x y} \Omega \Gamma^T dx dy$$

$$K_{bu} = \frac{G}{2h_v} \iint_{x y} \Gamma^T \Gamma dx dy \quad K_{cu} = \frac{G}{2h_v} \iint_{x y} \Omega^T \Omega dx dy$$

$$K_{bv} = \frac{G}{2h_v} \iint_{x y} \Psi^T \Psi dx dy \quad K_{cv} = \frac{G}{2h_v} \iint_{x y} \Pi^T \Pi dx dy$$

$$K_{byx} = \frac{K(1-\nu)}{2} \iint_{x y} \Gamma_{,y} \Psi_{,x}^T dx dy \quad K_{cyx} = \frac{K(1-\nu)}{2} \iint_{x y} \Omega_{,y} \Pi_{,x}^T dx dy$$

$$K_{bvy} = \frac{K}{2} \iint_{x y} \Psi_{,y} \Psi_{,y}^T dx dy \quad K_{cvy} = \frac{K}{2} \iint_{x y} \Pi_{,y} \Pi_{,y}^T dx dy$$

$$K_{buy} = \frac{K(1-\nu)}{4} \iint_{x y} \Gamma_{,y} \Gamma_{,y}^T dx dy \quad K_{cuy} = \frac{K(1-\nu)}{4} \iint_{x y} \Omega_{,y} \Omega_{,y}^T dx dy$$

$$K_{bxy} = K\nu \iint_{x y} \Gamma_{,x} \Psi_{,y}^T dx dy \quad K_{cxy} = K\nu \iint_{x y} \Omega_{,x} \Pi_{,y}^T dx dy$$

$$K_{bvx} = \frac{K(1-\nu)}{4} \iint_{x y} \Psi_{,x} \Psi_{,x}^T dx dy \quad K_{cvx} = \frac{K(1-\nu)}{4} \iint_{x y} \Pi_{,x} \Pi_{,x}^T dx dy$$

$$K_{bux} = \frac{K}{2} \iint_{x y} \Gamma_{,x} \Gamma_{,x}^T dx dy \quad K_{cux} = \frac{K}{2} \iint_{x y} \Omega_{,x} \Omega_{,x}^T dx dy$$

$$K_{\Phi i} = K_{\Phi 1i} + K_{\Phi 2i} + K_{\Phi 3i} + K_{\Phi 4i} \quad i = b, c \quad d = \frac{h_c + h_b}{2} + h_v$$

$$K_{\phi 1i} = \frac{D_i}{2} \iint_{x y} \Phi_{,xx} \Phi_{,xx}^T dx dy \quad K_{\phi 2i} = \frac{D_i}{2} \iint_{x y} \Phi_{,yy} \Phi_{,yy}^T dx dy \quad i = b, c$$

$$K_{\phi 3i} = D_i(1-\nu) \iint_{x y} \Phi_{,xy} \Phi_{,xy}^T dx dy \quad K_{\phi 4i} = D_i\nu \iint_{x y} \Phi_{,xx} \Phi_{,yy}^T dx dy \quad i = b, c$$

Expression du Lagrangien :

$$\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&\frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} - \\
&\left[ \left\{ \begin{aligned} &U_c^T (K_{cux} + K_{cuy}) U_c + V_c^T (K_{cvx} + K_{cvy}) V_c + U_c^T (K_{cxy} + K_{cyx}) V_c + W^T K_{\Phi c} W + \\ &U_b^T (K_{bux} + K_{buy}) U_b + V_b^T (K_{bvx} + K_{bvy}) V_b + U_b^T (K_{bxy} + K_{byx}) V_b + W^T K_{\Phi b} W \end{aligned} \right\} + \right. \\
&\left. \left\{ \begin{aligned} &U_c^T K_{cu} U_c + U_b^T K_{bu} U_b - U_c^T K_{bcu} U_b + W^T K_{wx} W + U_c^T K_{cu1} W - U_b^T K_{bu1} W + \\ &V_c^T K_{cv} V_c + V_b^T K_{bv} V_b - V_c^T K_{bcv} V_b + W^T K_{wy} W + V_c^T K_{cv1} W - V_b^T K_{bv1} W \end{aligned} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} - \\
&\left[ \begin{aligned} &U_c^T (K_{cux} + K_{cuy} + K_{cu}) U_c + V_c^T (K_{cvx} + K_{cvy} + K_{cv}) V_c + U_c^T (K_{cxy} + K_{cyx}) V_c + \\ &W^T (K_{\Phi c} + K_{\Phi b} + K_{wx} + K_{wy}) W + \\ &U_b^T (K_{bux} + K_{buy} + K_{bu}) U_b + V_b^T (K_{bvx} + K_{bvy} + K_{bv}) V_b + U_b^T (K_{bxy} + K_{byx}) V_b - \\ &U_c^T K_{bcu} U_b + U_c^T K_{cu1} W - U_b^T K_{bu1} W - \\ &V_c^T K_{bcv} V_b + V_c^T K_{cv1} W - V_b^T K_{bv1} W \end{aligned} \right] \quad (8.19)
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
K_{cu12} &= K_{cux} + K_{cuy} + K_{cu} \\
K_{cv12} &= K_{cvx} + K_{cvy} + K_{cv} \\
K_{2cxy} &= K_{cxy} + K_{cyx} \\
K_{\Phi v} &= K_{\Phi c} + K_{\Phi b} + K_{wx} + K_{wy} \\
K_{bu12} &= K_{bux} + K_{buy} + K_{bu} \\
K_{bv12} &= K_{bvx} + K_{bvy} + K_{bv} \\
K_{2bxy} &= K_{bxy} + K_{byx}
\end{aligned} \quad (8.20)$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} - \left. \begin{aligned} & \left\{ U_c^T K_{cu12} U_c + V_c^T K_{cv12} V_c + U_c^T K_{2cxy} V_c + W^T K_{\Phi v} W + \right. \\ & U_b^T K_{bu12} U_b + V_b^T K_{bv12} V_b + U_b^T K_{2bxy} V_b - \\ & U_c^T K_{bcu} U_b + U_c^T K_{cu1} W - U_b^T K_{bu1} W - \\ & \left. V_c^T K_{bcv} V_b + V_c^T K_{cv1} W - V_b^T K_{bv1} W \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Équation de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{Avec } q_i = W, U_b, U_c, V_b, V_c. \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{W}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial W} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{W}} \right) - \left( \frac{\partial K}{\partial W} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{W}} \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial W} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{W}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial W} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{W}} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial W} \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{w}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \dot{W}^T M \dot{W} \right)}{\partial \dot{w}_i} \right)$$

avec  $\dot{W}^T = \langle \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n \rangle$  et  $M = M_c + M_b + M_v$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \dot{W}^T M \dot{W} \right)}{\partial \dot{w}_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle M \dot{W}^T + \frac{1}{2} \dot{W} M \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle M \ddot{W}^T \\
\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots & \\
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \dot{W}^T M \dot{W} \right)}{\partial \dot{w}_n} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle M \dot{W}^T + \frac{1}{2} \dot{W} M \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Bmatrix} \right] = \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle M \ddot{W}^T
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Ce système peut se mettre sous forme matricielle :

$$K = \frac{1}{2} \dot{W}^T (M_b + M_c + M_v) \dot{W} + \frac{2h_v}{G} \frac{1}{2} \rho_b h_b \dot{U}_b^T K_{bu} \dot{U}_b + \dot{V}_b^T K_{bv} \dot{V}_b + \rho_c h_c \dot{U}_c^T K_{cu} \dot{U}_c + \dot{V}_c^T K_{cv} \dot{V}_c \tag{8.25}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{W}} \right) &= M \ddot{W}^T + \frac{2h_v}{G} \rho_b h_b K_{bu} \ddot{U}_b^T + K_{bv} \ddot{V}_b^T + \rho_c h_c K_{cu} \ddot{U}_c^T + K_{cv} \ddot{V}_c^T \\
&= M \ddot{W}^T + \frac{2h_v}{G} \rho_b h_b K_{bu} \ddot{U}_b^T + \frac{2h_v}{G} \rho_b h_b K_{bv} \ddot{V}_b^T + \frac{2h_v}{G} \rho_c h_c K_{cu} \ddot{U}_c^T + \frac{2h_v}{G} \rho_c h_c K_{cv} \ddot{V}_c^T \\
&= M \ddot{W}^T + M_{bu} \ddot{U}_b^T + M_{bv} \ddot{V}_b^T + M_{cu} \ddot{U}_c^T + M_{cv} \ddot{V}_c^T
\end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\left( \frac{\partial K}{\partial W} \right) = 0 \tag{8.27}$$



De même pour les autres termes

$$\frac{\partial U}{\partial W} = 2K_{\Phi v} W - K_{bu1}^T U_b - K_{bv1}^T V_b + K_{cu1}^T U_c + K_{cv1}^T V_c = 2K_{\Phi v} \quad -K_{bu1}^T \quad -K_{bv1}^T \quad K_{cu1}^T \quad K_{cv1}^T \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial U_b} = -K_{bu1} W + 2K_{bu12} U_b + K_{2bxy} V_b - K_{bcu}^T U_c = -K_{bu1} \quad 2K_{bu12} \quad K_{2bxy} \quad -K_{bcu}^T \quad 0 \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial V_b} = -K_{bv1} W + K_{2bxy}^T U_b + 2K_{bv12} V_b - K_{bcv}^T V_c = -K_{bv1} \quad K_{2bxy}^T \quad 2K_{bv12} \quad 0 \quad -K_{bcv}^T \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial U_c} = K_{cu1} W - K_{bcu} U_b + 2K_{cu12} U_c + K_{2cxy} V_c = K_{cu1} \quad -K_{bcu} \quad 0 \quad 2K_{cu12} \quad K_{2cxy} \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial V_c} = K_{cv1}W - K_{bcv}V_b + K_{2cxy}^T U_c + 2K_{cv12}V_c = K_{cv1} \quad 0 \quad -K_{bcv} \quad K_{2cxy}^T \quad 2K_{cv12} \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

Cette équation donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} M_b + M_c + M_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{bu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{bv} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{cu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{cv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{W} \\ \ddot{U}_b \\ \ddot{V}_b \\ \ddot{U}_c \\ \ddot{V}_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\Phi v} + K_{\Phi v}^T & -K_{bu1}^T & -K_{bv1}^T & K_{cu1}^T & K_{cv1}^T \\ -K_{bu1} & K_{bu12} + K_{bu12}^T & K_{2bxy} & -K_{bcu}^T & 0 \\ -K_{bv1} & K_{2bxy}^T & K_{bv12} + K_{bv12}^T & 0 & -K_{bcv}^T \\ K_{cu1} & -K_{bcu} & 0 & K_{cu12} + K_{cu12}^T & K_{2cxy} \\ K_{cv1} & 0 & -K_{bcv} & K_{2cxy}^T & K_{cv12} + K_{cv12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ U_b \\ V_b \\ U_c \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$