



**José Guilherme Costa de Oliveira**

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Aplicação do Método de  
Subestruturação na Análise Modal de  
um Banco de Ensaio de Compressores**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica

Orientador: António Paulo Vale Urgueira, Prof.  
Associado, DEMI

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António José Freire Mourão  
Arguente: Prof. Doutor João Burguete Cardoso  
Vogal: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2017



## **Aplicação do Método de Subestruturação na Análise Modal de um Banco de Ensaio de Compressores**

Copyright© 2017 José Guilherme Costa de Oliveira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Este trabalho foi redigido segundo o novo acordo ortográfico em vigor.



À minha família e amigos...



# Agradecimentos

Um muito obrigado a todo o corpo docente da FCT envolvido no meu percurso académico, principalmente ao Prof. António Urgueira por todo o apoio prestado nesta etapa final, pela sua orientação técnica e pelos conselhos sobre a direção que o trabalho deveria tomar. Permitiu-me ultrapassar todos os obstáculos que se impuseram no caminho. Um agradecimento especial ao Prof. Mourão por ter criado a oportunidade de poder realizar a tese de mestrado no contexto de uma empresa.

Aos meus pais, pelos sacrifícios que fizeram para que aqui pudesse chegar, pelos valores que me transmitiram, pelo amor que me deram e pelo Lar que ergueram para mim e para a minha irmã. Aos meus avós, que me criaram e me viram crescer e para os quais sempre fui e espero continuar a ser motivo de orgulho. Ao resto da minha família pela presença e apoio.

Aos amigos de Torres Novas e aos amigos do Estoril, amigos de sempre e para sempre. E aos irmãos que a faculdade me deu, obrigado pela memória coletiva que criámos.

Quero agradecer a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização desta dissertação, quer tenha sido em conhecimento transferido, apoio moral prestado, refeições servidas ou gargalhadas partilhadas. Muito Obrigado por tudo!



# Resumo

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta plenamente estabelecida na análise estrutural moderna, sendo aplicado por via computacional para prever o comportamento estático e dinâmico de todo o tipo de estruturas. Atualmente, a complexidade e dimensão das estruturas projetadas implica uma grande capacidade e tempo computacional necessário para processamento de quantidades de informação consideráveis. Para colmatar a falta de recursos computacionais disponíveis, foram desenvolvidos métodos de redução para serem usados na análise de grandes problemas estruturais.

A subestruturação é um método de resolução de problemas dinâmicos cujo princípio se baseia na divisão de grandes modelos em componentes de dimensão inferior para que possam ser examinados em separado. O comportamento dinâmico de todo o modelo será então calculado ao reunir toda a informação obtida nas várias análises feitas. O presente trabalho tem como objetivo a aplicação do método de subestruturação de modo a facilitar a análise modal a um banco de ensaio de compressores. Com esta abordagem visam obter-se as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura sem que haja a necessidade de recursos computacionais consideráveis.

Numa primeira instância serão revistos os conceitos teóricos que estão na base da análise modal e do método de subestruturação. De seguida o método de subestruturação será posto em prática para facilitar a análise modal de um modelo de geometria simples. Serão feitas diferentes parametrizações de modo a conhecer as possibilidades e limitações deste método. A metodologia traçada será então aplicada na análise modal do banco de ensaio de compressores para assim ilustrar a utilização do processo em estruturas com um grau elevado de complexidade.



# *Abstract*

*The Finite Element Method (FEM) is a well-established tool that can be used in the analysis of dynamic structures. Nowadays, increasingly complex structures require higher computational power to provide viable and detailed results within a reasonable time frame. In order to deal with the lack of computational resources several reduction techniques were developed to be used in the analysis of larger, more complex structures.*

*One of these techniques is known as Substructuring, and it is mostly used to perform dynamic structural analysis by dividing a large model into smaller subcomponents, thus making their study easier. The dynamic behavior of the total structure will be derived by combining the results of the various analysis performed. This thesis focuses on Substructuring as the means to facilitate the modal analysis of a compressor test bench. This approach expects to obtain natural frequencies and mode shapes by using fewer computational resources.*

*First, the theoretical concepts behind Substructuring and modal analysis will be discussed. Then, Substructuring will be performed on a simple model in order to get familiarized with its methodology, its possibilities and limitations. Lastly, the method will be applied to the modal analysis of the test bench, therefore illustrating the process needed to portray the dynamic properties of complex finite element structures.*



# Índice de matérias

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	iii
<i>Abstract</i> .....	v
Índice de matérias.....	vii
Índice de figuras.....	xi
Índice de tabelas.....	xiii
Simbologia e Notações.....	xv
<b>1. Introdução</b> .....	1
1.1 Enquadramento e Motivação.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	3
1.3 Objetivos e Estrutura.....	5
<b>2. Conceitos Teóricos</b> .....	7
2.1 Introdução.....	7
2.2 Conceitos Teóricos da Análise Modal.....	7
2.2.1 Sistema com 1 Grau de Liberdade.....	7
Resposta livre.....	8
Resposta forçada.....	11
2.2.2 Análise Modal.....	13
2.2.3 Frequências naturais e modos de vibração.....	14
2.2.4 Sistema com N Graus de Liberdade.....	15
2.3 Subestruturação.....	17
2.3.1 Introdução.....	17
2.3.2 Equações Gerais.....	17
2.3.3 Método de Redução de Guyan.....	19
2.3.4 Acoplamento Modal.....	20
2.3.4.1 Método de Interface Fixa.....	21
Modos da Interface fixa.....	21
Modos Constrangidos.....	21
Matriz de Transformação.....	22
2.3.4.2 Método da Interface Livre.....	22
Modos da Interface Livre.....	23
Modos do Corpo Rígido.....	23
Modos de Alívio de Inércia.....	23
Matriz de Transformação.....	23
<b>3. Aplicação do Método de Subestruturação</b> .....	25
3.1 1º Caso de Estudo.....	25

3.1.1	Processo.....	25
	Geometria.....	26
	Modelo de Elementos Finitos.....	27
	Preparação do Modelo.....	28
	Generation Pass.....	29
	Use Pass.....	30
	Análise Modal.....	31
	Expansion Pass.....	32
	Ficheiro Agregado de Resultados.....	34
	Pós Processamento.....	34
3.1.2	Resultados e Discussão.....	35
	3.1.2.1 Comparação com o Modelo Completo.....	35
	Frequências.....	35
	Modos de Vibração.....	36
	3.1.2.2 Validação do Modelo Reduzido – MAC.....	43
	3.1.2.3 Conclusões.....	44
3.1.3	Modificação do Superelemento.....	44
	Novo Generation Pass.....	44
	Novo Use Pass.....	45
	Análise Modal.....	45
	Expansion Pass.....	46
	Ficheiro Agregado de Resultados.....	47
3.2	2º Caso de Estudo.....	49
	3.2.1 Processo.....	49
	Geometria.....	49
	Modelo de Elementos Finitos.....	50
	Preparação do Modelo.....	51
	Generation Pass.....	52
	Use Pass.....	53
	Análise Modal.....	54
	Expansion Pass.....	55
	Ficheiro Agregado de Resultados.....	57
	Pós Processamento.....	57
	3.2.2 Resultados e Discussão.....	58
	3.2.2.1 Comparação com o Modelo Completo.....	58
	Variação do Número de Superelementos Criados.....	58
	3.2.2.2 Validação do Modelo Reduzido - MAC.....	59

3.2.2.3	Conclusão .....	59
<b>4.</b>	<b>Conclusão Final e Trabalhos Futuros .....</b>	<b>61</b>
	Referências Bibliográficas .....	63
	Anexos.....	65
Anexo I	Resultados obtidos nas análises feitas no 1º Estudo de Caso .....	65
Análise com extração de 10 modos.....		65
Análise com extração de 20 modos.....		65
Análise com extração de 30 modos.....		65
Análise com extração de 40 modos.....		66
Análise com extração de 50 modos.....		66
Anexo II	Resultados obtidos nas análises feitas no 2º Estudo de Caso .....	67
1	Análises Modais com 1 Super elemento Presente.....	67
Super elemento Presente na Subestruturação - parte 2.....		67
Super elemento Presente na Subestruturação - parte 3.....		67
Super elemento Presente na Subestruturação - parte 4.....		67
Super elemento Presente na Subestruturação - parte 5.....		68
2	Análises Modais com 2 Super elementos Presentes.....	68
Super elementos Presentes na Subestruturação - parte 2 e parte 4.....		68
Super elementos Presentes na Subestruturação - parte 3 e parte 5.....		68
3	Análises Modais com 3 Super elementos Presentes.....	69
Super elementos Presentes na Subestruturação - parte 2, parte 4 e parte 5.....		69
Super elementos Presentes na Subestruturação - parte 3, parte 4 e parte 5.....		69
4	Análise Modal com 4 Super elementos Presentes.....	69
Super elementos Presentes na Subestruturação – parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5.....		69
	Erro médio das frequências naturais segundo o número de Super elementos Presentes na Análise Modal .....	70
Anexo III – Valores de correspondência obtidos pelo MAC relativamente ao 1º caso de estudo .....		71
1	Valores relativos à análise realizada com 10 modos extraídos .....	71
2	Valores relativos à análise realizada com 20 modos extraídos .....	71
3	Valores relativos à análise realizada com 30 modos extraídos .....	72
4	Valores relativos à análise realizada com 40 modos extraídos .....	73
5	Valores relativos à análise realizada com 50 modos extraídos .....	76
Anexo IV – Valores de correspondência obtidos pelo MAC relativamente ao 2º caso de estudo .....		81
1	Valores relativos à análise realizada com 1 Super elemento presente (parte 2).....	81
2	Valores relativos à análise realizada com 2 Super elementos presentes (parte 2 e parte 3).....	81

3	Valores relativos à análise realizada com 3 Superelementos presentes (parte 2, parte 3 e parte 4).....	82
4	Valores relativos à análise realizada com 4 Superelementos presentes (parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5).....	83
	Anexo V – Entidades Nomeadas no 2º Estudo de Caso.....	84
	Anexo VI – Scripts para o ANSYS Mechanical APDL.....	87

# Índice de figuras

Figura 1 - Acoplamento de Modelos pela via teórica e experimental [16] .....	2
Figura 2 - A Subestruturação e o seu enquadramento na decomposição do domínio [2] .....	3
Figura 3 – Sistema Massa-Mola-Amortecedor com 1 GDL [19].....	7
Figura 4 - Sistema Massa-Mola com 1 GDL [19].....	8
Figura 5 - Evolução de um sistema livre não amortecido ( $m = 100\text{kg}$ , $k = \text{Nm}$ , $x_0 = 0,5\text{m}$ , $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ , $\omega_n=0,4472\text{rad/s}$ ) [19].....	9
Figura 6 - Sistema Massa-Mola-Amortecedor com 1 GDL [19] .....	9
Figura 7 - Evolução de um sistema livre sub-amortecido ( $m = 100\text{kg}$ , $k = \text{Nm}$ , $x_0 = 0,5\text{m}$ , $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ , $c = 10\text{m/s}$ , $\omega_n=0,4472\text{rad/s}$ ) $\zeta=0,11$ [19].....	10
Figura 8 - Sistema Massa-Mola com 1 GDL excitado [19] .....	11
Figura 9 - Evolução de um sistema excitado não amortecido ( $m = 100\text{kg}$ , $k = \text{Nm}$ , $x_0 = 0,5\text{m}$ , $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ , $\omega_n=0,4472\text{rad/s}$ , $F=100\cos(2t)$ ) [19].....	11
Figura 10 - Evolução de um sistema excitado. amortecido ( $m = 100\text{kg}$ , $k = \text{Nm}$ , $x_0 = 0,5\text{m}$ , $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ , $c = 10\text{m/s}$ , $\omega_n=0,4472\text{rad/s}$ , $F=100\cos(2t)$ ) [19].....	12
Figura 11 - Magnitude e fase ( $m = 10\text{kg}$ , $k = 20\text{Nm}$ , $\omega_n = 0,4472 \text{ rad/s}$ ) .....	13
Figura 12 - Sistema Massa-Mola excitado com n GDL [19] .....	15
Figura 13 - Ficheiros criados e usado pelo ANSYS no método de subestruturação .....	26
Figura 14 - dimensões gerais do Modelo CAD do 1º Caso de Estudo .....	26
Figura 15 - Modelo de elementos finitos gerado no ANSYS Workbench .....	27
Figura 16 - Entidades nomeadas no ANSYS Workbench.....	28
Figura 17 - Modelo de elementos finitos importado para o ANSYS Mechanical APDL. ....	28
Figura 18 - Superelemento da parte 2 .....	30
Figura 19 - Superelemento da parte 3 .....	30
Figura 20 - Modelo reduzido.....	31
Figura 21 - 15º Modo de vibração do Modelo reduzido .....	32
Figura 22 - Comparação do 15º modo de vibração entre os modelos reduzido e original .....	32
Figura 23 - 15º Modo de vibração da parte 2 .....	33
Figura 24 - Comparação do 15º modo de vibração entre a parte 2 reduzida e o modelo original .....	33
Figura 25 - 15º Modo de Vibração da parte 3 .....	33
Figura 26 - Comparação do 15º modo de vibração entre a parte 3 reduzida e o modelo original .....	34
Figura 27 - Comparação do 15º modo de vibração entre os modelos agregado e original .....	34
Figura 28 - Erro de cada frequência para 10, 20, 30, 40 e 50 modos extraídos .....	35
Figura 29 - Representação do 10 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos .....	36
Figura 30 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 10 modos extraídos .....	36
Figura 31- Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 20 modos extraídos .....	37
Figura 32 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos .....	37
Figura 33 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos .....	37
Figura 34 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos .....	38
Figura 35 - Representação do 20 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos .....	38

Figura 36 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 20 modos extraídos .....	38
Figura 37- Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos .....	39
Figura 38 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos .....	39
Figura 39 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos .....	39
Figura 40 - Representação do 30 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos .....	40
Figura 41 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos .....	40
Figura 42 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos .....	40
Figura 43 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos .....	41
Figura 44 - Representação do 40 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos .....	41
Figura 45 - Representação do 40 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos .....	41
Figura 46 - Representação do 40 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos .....	42
Figura 47 - Representação do 50 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos .....	42
Figura 48 - Representação do 50 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos .....	42
Figura 49 - Valores de correspondência obtidos na aplicação do MAC aos resultados obtidos nas várias análises realizadas.....	43
Figura 50 - Rasgo 40x40mm feito na parte 2.....	45
Figura 51 - Modelo reduzido modificado.....	45
Figura 52 - 15º Modo de vibração do modelo modificado reduzido.....	46
Figura 53 - 15º Modo de vibração da parte 2 modificada .....	47
Figura 54 - 15º Modo de vibração da parte 3 .....	47
Figura 55 - 15º Modo de vibração do modelo agregado .....	48
Figura 56 - Vista dimétrica do modelo CAD da bancada de ensaio .....	49
Figura 57 - Vista da secção do modelo CAD do banco de ensaio .....	50
Figura 58 - Modelo de elementos finitos do banco de ensaio gerado no ANSYS Workbench...	50
Figura 59 - Entidades nomeadas no ANSYS Workbench.....	51
Figura 60 - Modelo importado para o ANSYS Mechanical APDL .....	51
Figura 61 - Superelemento da parte 2 .....	52
Figura 62 - Superelemento da parte 3 .....	52
Figura 63 - Superelemento da parte 4 .....	53
Figura 64 - Superelemento da parte 5 .....	53
Figura 65 - Modelo reduzido.....	54
Figura 66 - 11º Modo de vibração do modelo reduzido.....	55
Figura 67 - 11º Modo de vibração da parte 2 .....	55
Figura 68 - 11º Modo de vibração da parte 3 .....	56
Figura 69 - 11º Modo de vibração da parte 4 .....	56
Figura 70 - 11º Modo de vibração da parte 5 .....	56
Figura 71 - 11º Modo de vibração do modelo agregado (vista 1).....	57
Figura 72 - 11º Modo de vibração do modelo agregado (vista 2).....	57

Figura 73 - Erro de cada frequência para análises com 1, 2, 3 e 4 superelementos gerados.....	59
Figura 74 - Valores de correspondência obtidos na aplicação do MAC aos resultados obtidos nas várias análises realizadas.....	59

## Índice de tabelas

Tabela 1- Propriedades do aço estrutural usado .....	27
Tabela 2 - Modos extraídos e respectivas frequências.....	31
Tabela 3 - Aplicação do MAC aos modos de vibração relativos ao modelo com 10 modos extraídos .....	43
Tabela 4 - Modos obtidos e respectivas frequências naturais .....	46
Tabela 5 - Propriedades do aço estrutural usado.....	50
Tabela 6 - Modos extraídos e respectivas frequências.....	54



# Simbologia e Notações

$\mathbf{k}$	Constante de Rigidez
$\mathbf{m}$	Massa
$\mathbf{c}$	Constante de Amortecimento
$t$	Tempo
$x(t)$	Deslocamento
$\dot{x}(t)$	Velocidade
$\ddot{x}(t)$	Aceleração
$f(t)$	Força aplicada
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida
$C_1$	Primeira condição inicial do sistema
$C_2$	Segunda condição inicial do sistema
$x_0$	Posição inicial
$\dot{x}_0$	Velocidade no instante inicial
$c_{crit}$	Coefficiente de amortecimento crítico
$\zeta$	Fator de amortecimento
$F_0$	Força aplicada inicialmente
$X_h$	Solução homogénea
$X_p$	Solução particular
$H(\omega)$	Função de receptância
$Z(\omega)$	Função de rigidez dinâmica
$[M]$	Matriz de massa
$[K]$	Matriz de rigidez
$[C]$	Matriz de amortecimento viscoso
$[H]$	Matriz de amortecimento histórico

$\{\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\}$	Matriz de aceleração
$\{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\}$	Vetor de velocidade
$\{\mathbf{x}(\mathbf{t})\}$	Vetor de deslocamento
$\{\mathbf{f}(\mathbf{t})\}$	Vetor de força
$\{\bar{\mathbf{X}}\}$	Vetor de amplitude complexa
$[\boldsymbol{\omega}^2]$	Matriz diagonal das frequências naturais do sistema
$\{\boldsymbol{\Psi}\}$	Vetor modal
$[\boldsymbol{\Psi}]$	Matriz modal
$\omega_n^2$	Frequência natural
$[\mathbf{m}_r]$	Matriz de massa modal
$[\mathbf{k}_r]$	Matriz de rigidez modal
$[\mathbf{c}_r]$	Matriz de amortecimento modal
$[\boldsymbol{\Phi}]$	Matriz modal normalizada em relação à massa
$[\mathbf{I}]$	Matriz identidade
$[\tilde{\mathbf{M}}]$	Matriz de massa do sistema reduzido
$[\tilde{\mathbf{K}}]$	Matriz de rigidez do sistema reduzido
$\{\mathbf{x}_p\}$	Vetor do deslocamento contendo os graus de liberdade principais (ou ativos)
$\{\mathbf{x}_s\}$	Vetor do deslocamento contendo os graus de liberdade secundários (ou inativos)
$\{\dot{\mathbf{x}}_p\}$	Vetor da velocidade contendo os graus de liberdade principais (ou ativos)
$\{\dot{\mathbf{x}}_s\}$	Vetor da velocidade contendo os graus de liberdade secundários (ou inativos)
$\{\mathbf{f}_p\}$	Vetor das forças aplicadas nos graus de liberdade principais (ou ativos)
$\{\mathbf{f}_s\}$	Vetor das forças aplicadas nos graus de liberdade secundários (ou inativos)
$[\mathbf{T}]_G$	Matriz de transformação de Guyan
$[\tilde{\mathbf{M}}]_G$	Matriz de massa reduzida de Guyan

- $[\tilde{\mathbf{K}}]_G$  Matriz de rigidez reduzida de Guyan
- $[\tilde{\mathbf{Z}}]_G$  Matriz de rigidez dinâmica
- $[\tilde{\mathbf{H}}]_G$  Matriz de receptância
- $[\Phi_{sm}]$  Matriz dos modos da interface fixa
- $[\Phi_s^*]$  Matriz dos modos estáticos
- $[\mathbf{T}]_{CB}$  Matriz de transformação de Craig-Brampton
- $[\tilde{\mathbf{M}}]_{CB}$  Matriz de massa reduzida de Craig-Brampton
- $[\tilde{\mathbf{K}}]_{CB}$  Matriz de rigidez reduzida de Craig-Brampton
- $\Phi_f$  Modo da interface livre
- $\omega_f^2$  Frequência da interface livre
- $[\Phi_f]$  Matriz dos modos da interface livre
- $[\Phi_r]$  Matriz dos modos do corpo rígido
- $[\Phi_{am}]$  Matriz dos modos de alívio de inércia
- $[\mathbf{T}]_{CC}$  Matriz de transformação de Craig-Chang
- $[\tilde{\mathbf{M}}]_{CC}$  Matriz de massa reduzida de Craig-Chang
- $[\tilde{\mathbf{K}}]_{CC}$  Matriz de rigidez reduzida de Craig-Chang
- $\{\phi_C\}_i$  Vetor modal do modo  $i$  do sistema completo
- $\{\phi_R\}_j$  Vetor modal do modo  $j$  do sistema reduzido



# 1. Introdução

## 1.1 Enquadramento e Motivação

A constante melhoria das capacidades de projeto permite a criação de sistemas mecânicos de dimensões e complexidade cada vez maiores. Esta evolução tem persistido graças ao uso de ferramentas de análise estrutural progressivamente mais capazes.

Inicialmente, os métodos de análise desenvolvidos visavam a análise de estruturas relativamente simples, ao solucionar equações diferenciais e integrais que caracterizavam as suas propriedades dinâmicas. Apesar de eficaz, esta via analítica veio a revelar-se insuficiente para o projeto de estruturas com um grau de complexidade superior. O advento dos computadores trouxe consigo possibilidades de cálculo que outrora se pensavam impossíveis, e a possibilidade de analisar e desenvolver sistemas mais complexos tornou-se uma realidade comum. Passou a ser possível realizar simulações numéricas, ou seja, criar o modelo matemático que rege o fenómeno físico e estimar as suas características. Esta nova via designada de simulação numérica estabeleceu-se como uma ferramenta indispensável para o projeto rápido e preciso de todo o tipo de estruturas e sistemas mecânicos.

**O Método dos Elementos Finitos.** Entre vários métodos numéricos disponíveis para este tipo de análises estruturais (tais como o método dos volumes finitos, método das diferenças finitas, etc.), é possível destacar pela sua relevância o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF permite executar várias simulações nos domínios da engenharia e da física, sendo maioritariamente empregue na análise de tensões e deformações, na análise das características vibratórias na análise ao escoamento térmico das estruturas. Segundo *Cardoso et al.*[1], este método numérico decompõe o domínio do problema em vários subdomínios e em cada um desses sub-domínios as equações que regem o fenómeno são aproximadas utilizando um método variacional.

Contudo, este método tem as suas limitações e a análise de grandes estruturas implica a manipulação de quantidades consideráveis de informação, sendo que as capacidades computacionais disponíveis e/ou o tempo necessário para a sua aplicação nem sempre estão a par das necessidades. É também comum que o enfoque da análise estrutural seja num elemento em particular e não no seu todo, o que torna desnecessário o processamento de toda a informação disponível acerca do modelo. Para colmatar estes problemas foram desenvolvidos métodos numéricos de redução que preservam as características do sistema dinâmico ao condensar a informação modal relativa a elementos secundários (ditos inativos) e focar-se apenas nos elementos principais (ditos ativos) sobre os quais recai a análise.

**Análise modal.** Tal como referido anteriormente, o MEF pode ser usado na análise de vibrações da estrutura ao calcular a sua resposta dinâmica a uma força externa, num procedimento conhecido como análise modal. No contexto da análise de vibrações, o termo análise modal pode significar a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração com recurso a:

- Um procedimento formal de teste para identificar as propriedades dinâmicas de uma estrutura;
- Um procedimento matemático que recorre a valores e vetores próprios.

O teste modal é um método formal para a identificação das frequências naturais e modos de vibração das estruturas. Com recurso a acelerómetros distribuídos pela estrutura são feitas medições diretas ou indiretas, resultando na divisão entre a resposta registada em cada acelerómetro (aceleração) e a excitação (força) aplicada em qualquer ponto da estrutura. Com os dados registados sob a forma de uma Função de Resposta em Frequência (FRF) é possível obter as várias frequências naturais, modos de vibração e respetivos fatores de amortecimento. Como procedimento matemático, a análise modal é um método analítico usado para desacoplar as equações de movimento de uma estrutura recorrendo a transformações conhecidas, podendo ser conjugado com o MEF para a análise de estruturas de grande dimensão ou complexidade. Os procedimentos acima enunciados são semelhantes na medida em que identificam os modos e frequências estruturais para uma análise mais pormenorizada recorrendo a uma prática analítica conhecida como análise modal, que desacopla as equações do movimento para tornar possível a sua solução.

O seguinte esquema representa as várias possibilidades de obtenção de um modelo a partir dos vários tipos de modelos das subestruturas:

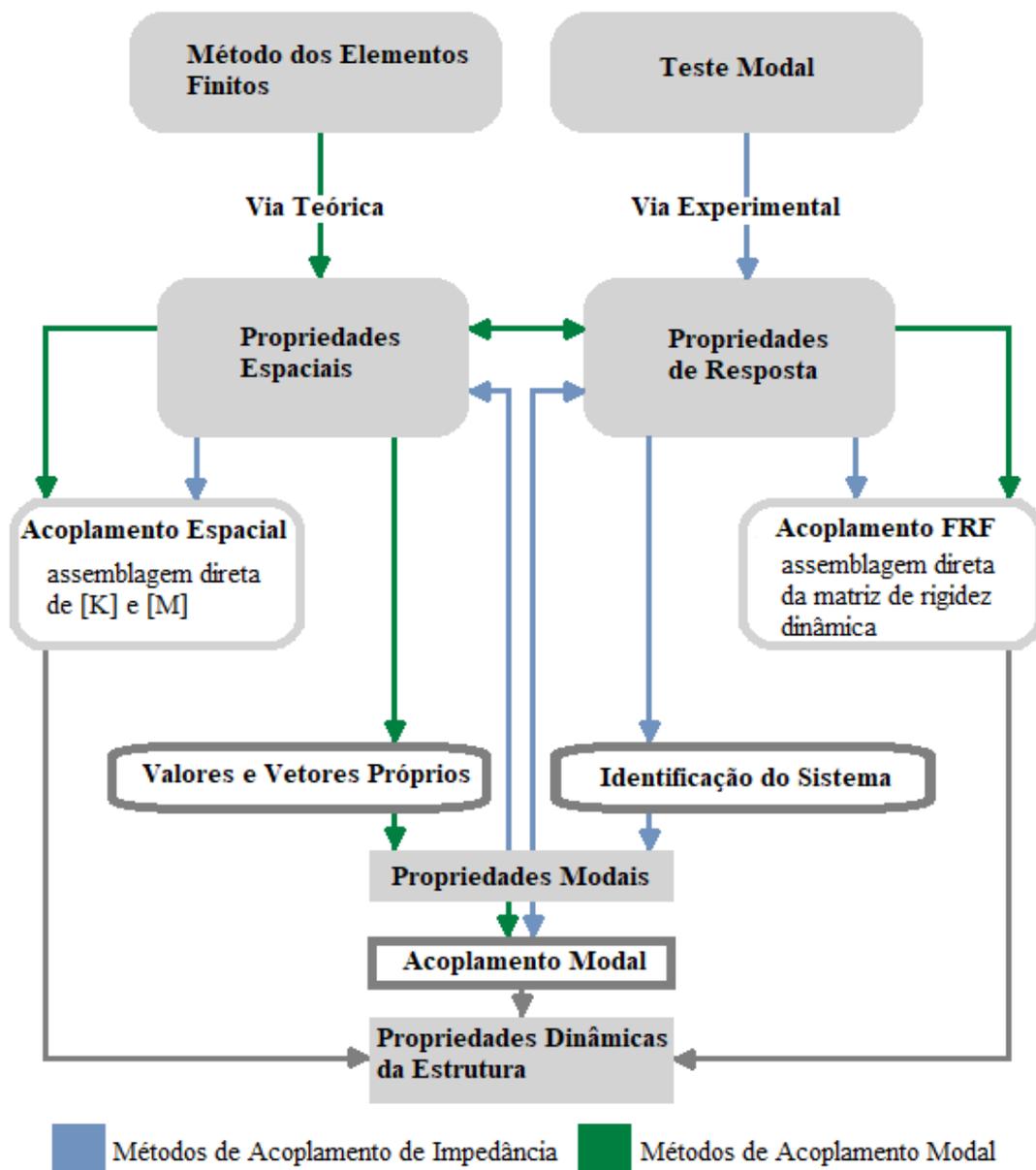


Figura 1 - Acoplamento de Modelos pela via teórica e experimental [16]

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O método de subestruturas tem sido o alvo de várias iterações ao longo dos tempos, sendo constantemente escrutinado por investigadores de modo a tornar o método cada vez rápido e preciso. De seguida apresenta-se uma breve revisão de modo obter uma perspetiva histórica sobre a evolução do método de subestruturação.

O conceito de subestrutura advém da análise de problemas de *decomposição do domínio*. De acordo com a revisão bibliográfica feita por *Kerk et al. (2008)* [2], o paradigma da decomposição do domínio surge do desejo de considerar separadamente problemas relativos a vários componentes que constituem um sistema complexo e da necessidade de encontrar a solução nas suas interfaces. Por outras palavras, visava-se obter a solução ao nível das suas partes, assumindo que a informação relativa às interfaces era conhecida. *Schwarz (1890)* [3] começou por imaginar um processo iterativo baseado na decomposição do domínio para provar a existência de uma única solução para um problema de Laplace cujo domínio era constituído por um círculo e um retângulo ilustrado pela figura 1. Os seus estudos abriram caminho para a possibilidade de solucionar problemas analíticos em domínios complexos. Contudo, a maioria dos modelos analíticos de subdomínios continuamente acoplados não possui uma solução de forma fechada. Para colmatar este problema foram desenvolvidas técnicas de aproximação e discretização tais como o método criado por *Rayleigh-Ritz (1909)* [4], o método de limite do elemento ou o método dos elementos finitos. No caso deste último método, o espaço físico é decomposto em subdomínios descritos por funções de aproximação definidas por partes e em conjunto com o método de Schwarz [3], pode ser visto como uma técnica de decomposição de primeiro nível, como indicado na figura 1. Por fim, o MEF foi tomando um papel cada vez maior e, com a invenção do microprocessador, a análise de sistemas evoluiu rapidamente de modo a conseguir resolver problemas dinâmicos de maneira precisa e detalhada.

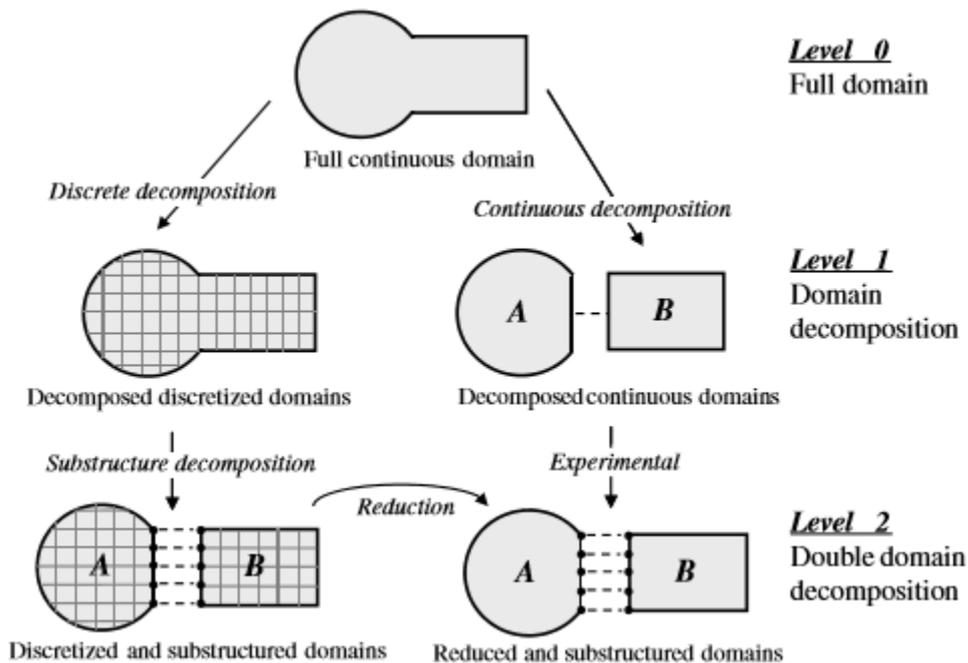


Figura 2 - A Subestruturação e o seu enquadramento na decomposição do domínio [2]

O desejo de conseguir resolver problemas cada vez maiores levou os investigadores a procurar aumentar o grau de eficácia dos seus cálculos. A década de 80 trouxe consigo um grande avanço

ao permitir realizar análises iterativas com recurso à computação em paralelo. As atuais técnicas de computação paralela dividem o problema em diferentes subdomínios que são analisados por diferentes processadores, sendo que o problema de ligação na interface é resolvido iterativamente com recurso às soluções locais. Tal pode ser considerado uma técnica de decomposição de segundo nível, tendo em conta que a discretização do problema ocorre no primeiro nível.

É possível aumentar ainda mais a eficiência da análise dinâmica ao reduzir a complexidade de cada subdomínio. Após a obtenção de soluções locais aproximadas os subdomínios podem ser acoplados. Se for esse o caso, os subdomínios (agora chamados de subestruturas no contexto dinâmico) são vistos como componentes de um sistema representados pelas respostas gerais e não pela sua discretização (representado pela seta de “redução” da figura). O chamado método dinâmico de subestruturação pode também ser aplicado por via experimental à caracterização do comportamento das subpartes. Tal é feito ao substituir a descrição matemática dos modelos por informação obtida experimentalmente. A este tipo de métodos dá-se o nome subestruturação experimental.

As primeiras ideias acerca do método de subestruturação foram desenvolvidas como técnicas de redução baseadas nos estudos de *Hurty (1960,1965)* [5-6], onde também foi proposto por *Gladwell (1964)* [7] um método de montagem de subestruturas. Estes métodos passaram a ser conhecidos como *acoplamento modal* e desencadearam uma enorme curiosidade pela análise de subestruturas por parte da comunidade científica. Os desenvolvimentos que se seguiram na década seguinte resultaram nos importantes métodos de *Craig e Bampton (1968)* [8], *Rubin (1975)* [9] e *MacNeal (1971)* [10], e no uso de informação modal obtida experimentalmente por *Klosterman (1971)* [11] para o acoplamento de subestruturas. Na década de noventa estas técnicas de acoplamento passaram a ser diretamente aplicadas nas Funções de Resposta em Frequências (FRF) medidas experimentalmente, e também foram diretamente aplicadas à Modificação Dinâmica Estrutural (MDE) que visava alterar o comportamento dinâmico da estrutura base ao acoplar massas e/ou molas).

As técnicas de modificação estrutural não são considerados métodos subestruturais, porém, os conceitos são idênticos, como é possível verificar em [12-14] Resumindo, a subestruturação é contextualizada na decomposição do domínio como uma decomposição de segundo grau, como se pode verificar na figura 2. A teoria dinâmica que a caracteriza pode ser usada para lidar com informação experimental ou numérica.

## 1.3 Objetivos e Estrutura

Este trabalho focar-se-á no método de subestruturação (*Substructuring*, em inglês) aplicado a um banco de ensaio de compressores com recurso ao software ANSYS. Este método visa reduzir o tempo e a capacidade de computação necessários à análise modal efetuada ao condensar o número total de graus de liberdade usados. O presente trabalho é composto por quatro capítulos:

**Capítulo 1 – Introdução.** O tema do trabalho é introduzido e contextualizado na disciplina de análise estrutural, e é feita uma breve revisão bibliográfica dos estudos teóricos que precederam e possibilitaram o uso do método de subestruturação.

**Capítulo 2 – Conceitos Teóricos.** Neste capítulo serão abordadas as noções teóricas por detrás da metodologia a aplicar, tais como:

**Conceitos Teóricos da Análise Modal.** Será feita uma revisão teórica para dar a entender quais os conceitos por detrás do estudo numérico a realizar;

**Subestruturação.** Levantamento da teoria adjacente aos métodos de redução empregues pelo ANSYS para a execução da análise com componentes subestruturados.

**Capítulo 3 – Aplicação do Método de Subestruturação.** O método de subestruturação será aplicado a dois modelos diferentes, que se diferenciam não só pela sua geometria como também pelos objetivos que visam cumprir:

**1º Caso de Estudo.** A título de demonstração das possibilidades do ANSYS, o primeiro estudo de caso incidirá sobre a metodologia criada para efetuar uma análise modal a uma geometria simples ao focar-se nos seguintes pontos:

- Ilustrar como se processa uma análise modal com partes subestruturadas recorrendo ao *software* ANSYS;
- Comparar os modos de vibração e as frequências naturais dos sistemas reduzido e completo.
- Verificar a influência da parametrização do método livre-livre na precisão dos valores de frequência obtidos.
- Verificar a viabilidade de uma segunda análise modal após a modificação de um superelemento.

**2º Caso de Estudo.** O segundo estudo de caso incide sobre a análise modal com componentes subestruturadas de um banco de ensaio de compressores constituída por 5 partes. Apesar de partir do método criado no estudo anterior, este estudo terá o seguinte propósito:

- Ilustrar como se processa a análise modal com partes subestruturadas recorrendo ao *software* ANSYS de um conjunto real com uma geometria complexa;
- Verificar a precisão dos modos de vibração e das frequências naturais do modelo reduzido com diferentes configurações de superelementos gerados.

**Capítulo 4 – Conclusões Finais e Trabalhos Futuros.** A metodologia utilizada e a eficácia do método em questão serão alvo de discussão. Serão feitos reparos finais e sugestões de trabalhos futuros.



## 2. Conceitos Teóricos

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma revisão dos conceitos teóricos relevantes para o desenvolvimento desta dissertação. É feita uma breve revisão da análise modal e das noções que a caracterizam, tais como *grau de liberdade*, *frequência natural* e *modo de vibração*, entre outros. De seguida é apresentado o método de subestruturação, onde são descritos os diferentes métodos de redução e as respetivas matrizes de transformação usadas para a criação das subestruturas.

### 2.2 Conceitos Teóricos da Análise Modal

O fenómeno vibratório resulta das oscilações verificadas em sistemas mecânicos dinâmicos. Quando sujeitos a uma análise dinâmica, estes sistemas podem ser caracterizados por elementos cuja função é armazenar energia potencial (mola), armazenar energia cinética (massa) ou até dissipar energia (amortecedor). O sistema vibra sempre que ocorrem transferências de energia cinética para energia potencial, ou vice-versa. Em sistemas amortecidos parte dessa energia é dissipada, sendo necessária a aplicação de uma força exterior para que a vibração seja constante [15-16]. Os dois tipos de vibrações existentes são:

**Vibração livre** - ocorre quando a posição de equilíbrio de um sistema dinâmico é perturbada e este vibra livremente.

**Vibração forçada** - ocorre quando o sistema é sujeito a uma força variável no tempo. Esta força pode ser periódica, constante, transiente ou aleatória. Ao ser excitado por uma força harmónica, um sistema dinâmico irá vibrar à mesma frequência que a força aplicada mas a amplitude da sua resposta dependerá das suas características intrínsecas.

#### 2.2.1 Sistema com 1 Grau de Liberdade

Um sistema dinâmico pode ser descrito segundo a sua massa  $m$ , a sua constante de rigidez  $k$  e a sua constante de amortecimento  $c$ , como se verifica na seguinte figura abaixo.

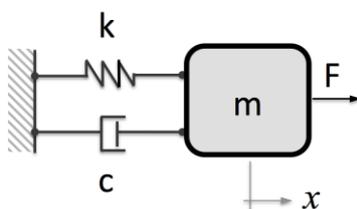


Figura 3 – Sistema Massa-Mola-Amortecedor com 1 GDL [19]

Este sistema pode mover-se apenas segundo uma direção, daí ser apelidado de sistema com 1 grau de liberdade. Analisando o sistema, é possível descrevê-lo ao reunir todas as forças em si resultantes na seguinte equação do movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

Onde  $\ddot{x}(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  e  $x(t)$  representam a aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente.  $f(t)$  representa a força ao longo do tempo.

Como referido anteriormente, este sistema pode vibrar livremente se a posição de equilíbrio da sua massa é perturbada, ou de maneira forçada se a massa é excitada por uma força externa. De seguida serão caracterizadas as vibrações livre e forçada para os sistemas amortecidos e não amortecidos.

### Resposta livre

**Sistema não amortecido** - A figura abaixo representa um sistema simples não amortecido constituído apenas por uma massa ligada a um suporte rígido por meio de uma mola.

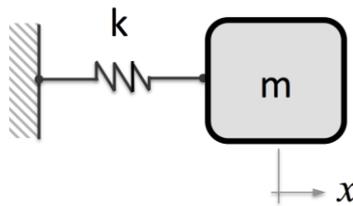


Figura 4 - Sistema Massa-Mola com 1 GDL [19]

Ao ter em conta a ausência de uma força externa aplicada e do elemento amortecedor, a equação (1) pode ser simplificada

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2)$$

Resolvendo a equação diferencial, obtém-se a seguinte solução:

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (3)$$

Onde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência natural não amortecida do sistema e os termos A e B são as condições iniciais do sistema, sendo que:

$$\begin{cases} C_1 = x(t_0) \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \end{cases} \quad (4)$$

Verifica-se então que o movimento do sistema advém diretamente das suas condições iniciais. Se o sistema se encontra em equilíbrio então não há movimento, logo  $x_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 = 0$ .

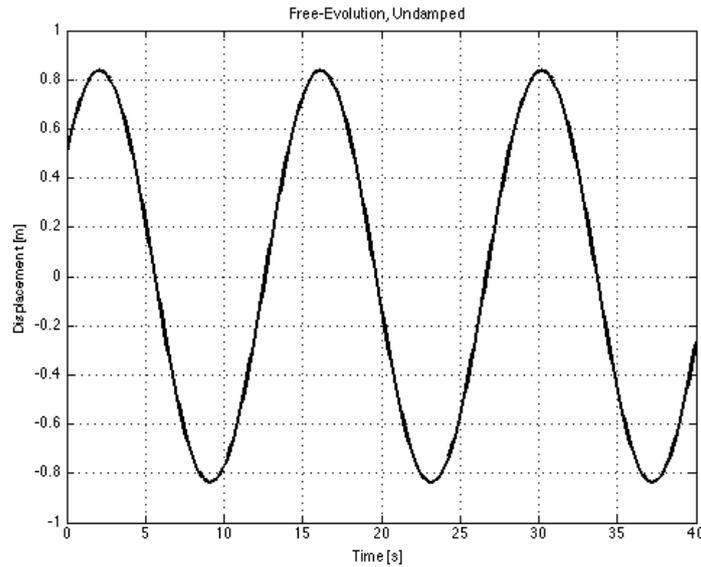


Figura 5 - Evolução de um sistema livre não amortecido ( $m = 100\text{kg}$ ,  $k = \text{Nm}$ ,  $x_0 = 0,5\text{m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ ,  $\omega_n = 0,4472\text{rad/s}$ ) [19]

**Sistema amortecido** - É possível descrever o amortecimento de um sistema dinâmico usando o seguinte modelo:

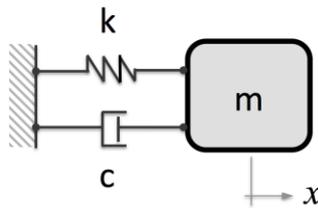


Figura 6 - Sistema Massa-Mola-Amortecedor com 1 GDL [19]

Para demonstrar o efeito do amortecimento numa situação de movimento livre, o amortecimento em questão é considerado viscoso, i.e. proporcional à velocidade do sistema. Na ausência de forças externas, a equação (1) resulta em:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (5)$$

Um dos parâmetros importantes do sistema amortecido é o coeficiente de amortecimento crítico caracterizado pela seguinte fórmula:

$$c_{crit} = 2\sqrt{km} \quad (6)$$

e que é possível relacionar com o verdadeiro amortecimento através do fator de amortecimento  $\zeta = \frac{c}{c_{crit}}$ . A equação do sistema amortecido livre varia consoante o valor de  $\zeta$ .

**Sistema sub-amortecido** - Se  $\zeta < 1$ , a solução da equação (5) será:

$$x(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}(C_1 \sin \omega_a t + C_2 \cos \omega_a t) \quad (7)$$

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{\dot{x} + \zeta\omega_n x_0}{\omega_a} \end{cases} \quad (8)$$

Em que  $\omega_a$  é a chamada frequência natural amortecida e encontra-se associada à frequência natural não amortecida pela seguinte equação:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

**Sistema criticamente amortecido** - Se  $\zeta = 1$ , a solução da equação (5) é:

$$x(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}(C_1 + C_2 t) \quad (10)$$

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0 \end{cases} \quad (11)$$

**Sistema super-amortecido** - Se  $\zeta > 1$ , a solução da equação (5) é:

$$x(t) = C_1 e^{\omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + C_2 e^{\omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (12)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{x_0 \omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ C_2 = \frac{-x_0 \omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{cases} \quad (13)$$

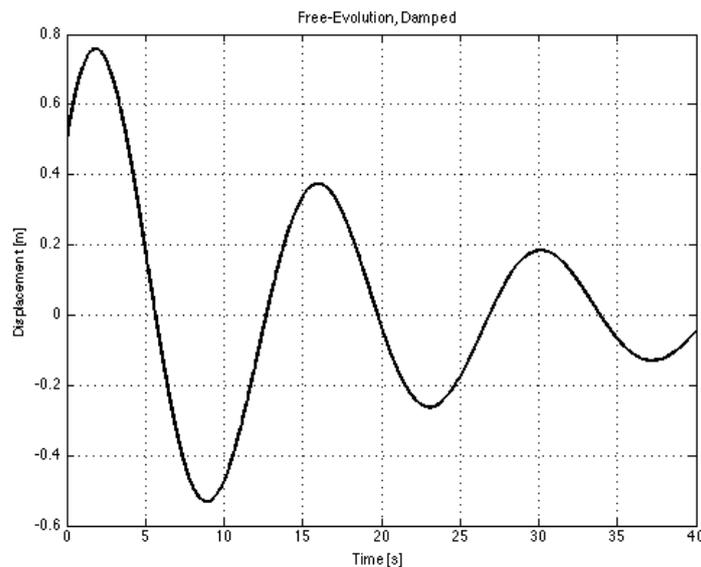


Figura 7 - Evolução de um sistema livre sub-amortecido ( $m = 100\text{kg}$ ,  $k = \text{Nm}$ ,  $x_0 = 0,5\text{m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ ,  $c = 10\text{m/s}$ ,  $\omega_n = 0,4472\text{rad/s}$ )  $\zeta = 0,11$  [19]

## Resposta forçada

Considerando a força harmônica  $F = F_0 \cos(\omega_0 t)$  o sistema abaixo representado representa a equação (1) simplificada:

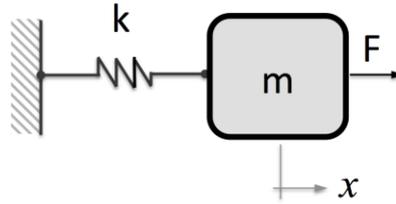


Figura 8 - Sistema Massa-Mola com 1 GDL excitado [19]

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad (14)$$

Analogamente à resposta livre, a solução da equação é composta por uma solução transiente e por uma oscilação estável à frequência forçada  $\omega_0$ .

$$x(t) = X_h + X_p = (C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t) + \frac{F_0(\cos \omega_0 t - \cos \omega_n t)}{m(\omega_n^2 - \omega_0^2)} \quad (15)$$

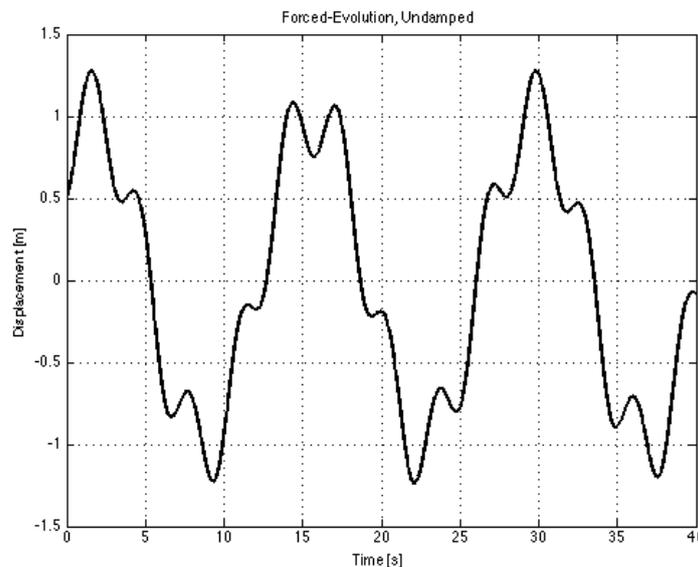


Figura 9 - Evolução de um sistema excitado não amortecido ( $m = 100\text{kg}$ ,  $k = \text{Nm}$ ,  $x_0 = 0,5\text{m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ ,  $\omega_n = 0,4472\text{rad/s}$ ,  $F = 100\cos(2t)$ ) [19]

**Sistema amortecido** - A solução da equação (5) obtida com a inclusão do amortecimento viscoso é descrita pela solução homogênea  $X_h$  (dependentes do fator de amortecimento) e pela solução particular  $X_p$  (resposta do sistema à força externa aplicada). Este último termo é descrito pela equação:

$$X_p = \frac{F_0}{(k - m\omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2} (k - m\omega_0^2) \cos \omega_0 t - c\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (16)$$

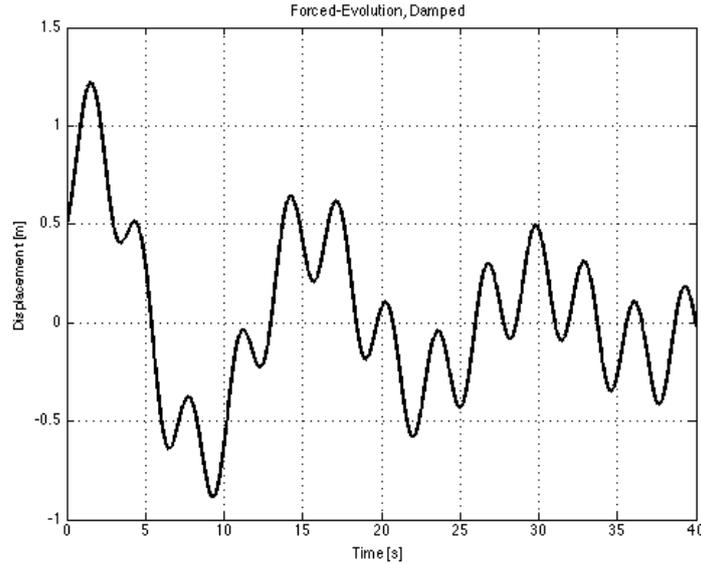


Figura 10 - Evolução de um sistema excitado, amortecido ( $m = 100\text{kg}$ ,  $k = \text{Nm}$ ,  $x_0 = 0,5\text{m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0,3\text{m/s}$ ,  $c = 10\text{m/s}$ ,  $\omega_n = 0,4472\text{rad/s}$ ,  $F = 100\cos(2t)$ ) [19]

**Função de Resposta em Frequência (FRF)** - A análise modal experimental permite recolher dados modais importantes sob a forma de funções de resposta em frequência, ou FRFs, que irão caracterizar o modelo de resposta. Este modelo pode ser descrito como uma estrutura genérica que possui *inputs* e *outputs*. Conhecendo as características dinâmicas do sistema é possível relacionar as forças  $\{f(t)\}$  a si aplicadas (*input*) com as respostas  $\{x(t)\}$  que ele dá (*output*). Um sistema linear excitado com forças harmónicas será caracterizado pela seguinte relação *input/output* escrita no domínio da frequência:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (17)$$

Ou

$$F(\omega) = Z(\omega)X(\omega) \quad (18)$$

Onde  $H(\omega)$  é a função de receptância e  $Z(\omega)$  a função de rigidez dinâmica, estando relacionadas entre si como  $Z(\omega) = H(\omega)^{-1}$ . Considerando o sistema representado na figura 8 constituído por um sistema massa-mola excitado por uma força harmónica, é possível derivar da equação (14) o valor numérico da função de resposta em receptância:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (19)$$

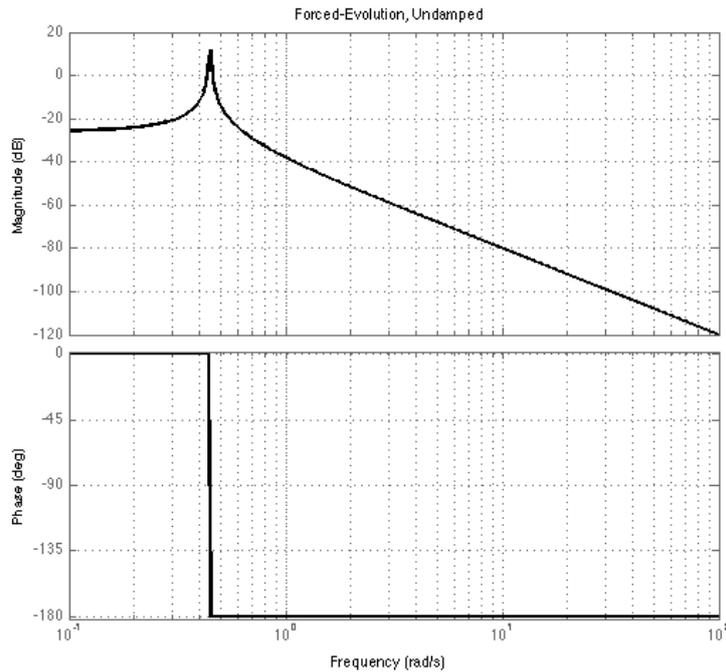


Figura 11 - Magnitude e fase ( $m = 10\text{kg}$ ,  $k = 20\text{Nm}$ ,  $\omega_n = 0,4472 \text{ rad/s}$ )

Ao analisar os gráficos acima é possível verificar que  $\omega = 0 \rightarrow H(\omega) = 1/k$  e que  $\omega = \infty \rightarrow H(\omega) = 0$ . Também é de notar que quando  $\omega = \omega_n$  a resposta é amplificada, ocorrendo o fenómeno conhecido como ressonância.

### 2.2.2 Análise Modal

No módulo anterior a solução relativa a um sistema dinâmico com um grau de liberdade foi obtida ao resolver diretamente a equação diferencial do movimento. No entanto, a maioria dos sistemas mecânicos em análise possui vários graus de liberdade e a resolução das várias equações que os caracterizam exige um esforço computacional bastante maior. Para facilitar este processo de análise das características dinâmicas do sistema é realizada uma análise modal. Este método é baseado no princípio da sobreposição, em que a resposta de um sistema com  $N$  graus de liberdade pode ser decomposta em  $N$  respostas modais, sendo que cada uma delas representa um único grau de liberdade.

Voltando à equação do movimento analisada no princípio do capítulo anterior, tem-se que:

$$[M]_{N \times N} \{\ddot{x}(t)\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \{\dot{x}(t)\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \{x(t)\}_{N \times 1} = \{f(t)\}_{N \times 1} \quad (20)$$

Composta por:

Matriz de massa  $[M]_{N \times N}$  permite definir as forças de inércia referentes a cada GDL quando é sujeito a uma aceleração

Matriz de rigidez  $[K]_{N \times N}$  caracteriza as forças de restituição inerentes ao deslocamento relativo em cada GDL

Matriz de amortecimento viscoso  $[C]_{N \times N}$  ou histérico  $[D]_{N \times N}$  traduz a proporção entre as forças dissipativas e as velocidades (no caso viscoso) ou os deslocamentos (no caso histérico) em cada GDL.

Tem-se que  $\{\ddot{x}(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$  e  $\{x(t)\}$  representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, respetivamente. O vetor  $\{f(t)\}$  caracteriza as forças externas aplicadas. O índice  $N$  representa o número de graus de liberdade do sistema, que se traduz na ordem das matrizes do que caracterizam o sistema.

### 2.2.3 Frequências naturais e modos de vibração

A obtenção das frequências e dos modos naturais de vibração está sujeita à resolução de um problema de valores e vetores próprios. Admitindo um sistema dinâmico com  $N$  graus de liberdade descrito pela equação do movimento nas condições de vibração não amortecida:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (21)$$

A solução do conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de coeficientes constantes é dada por:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} \cdot e^{i\omega t} \quad (12)$$

Nas condições descritas substitui-se a equação acima em (1) e reduz-se a:

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (23)$$

onde  $\{\bar{X}\}$  representa o vetor de amplitude complexa. Conclui-se que a equação (22) possui  $N$  soluções reais positivas do tipo  $\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \omega_N^2$ . A matriz que organiza estes valores próprios é uma matriz diagonal que contém as  $N$  frequências naturais de um dado sistema dinâmico com  $N$  graus de liberdade, sendo que a cada grau de liberdade encontra-se associada uma frequência natural. Representa-se da seguinte forma:

$$[\omega^2]_{N \times N} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Define-se então  $\omega^2$  como valor próprio do sistema não amortecido e  $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_N$  como frequências naturais do sistema. Ao substituir cada uma das  $N$  frequências naturais na equação (23) obtém-se um conjunto de equações que têm como incógnita o vetor  $\{\bar{X}\}$  e de onde é possível obter as  $N$  soluções vectoriais possíveis

$$[\Psi] = [\{\Psi_1\} \{\Psi_2\} \dots \{\Psi_N\}] \quad (25)$$

Define-se  $\{\Psi\}$  como vetor próprio do sistema não amortecido. Cada valor próprio tem um vetor próprio associado constituído por um par  $\omega_N$  e  $\{\Psi_N\}$ , que se designa por modo de vibração do sistema.

## 2.2.4 Sistema com N Graus de Liberdade

A complexidade do sistema dinâmico em análise irá agora aumentar para fornecer uma maior compreensão acerca dos conceitos que estão na base das frequências naturais, modos de vibração e função de resposta em frequência referidos anteriormente. Para efeitos de demonstração será analisado o seguinte sistema com  $n$  graus de liberdade composto por  $n$  massas (uma delas com apoio fixo) excitadas harmonicamente e  $n$  molas:

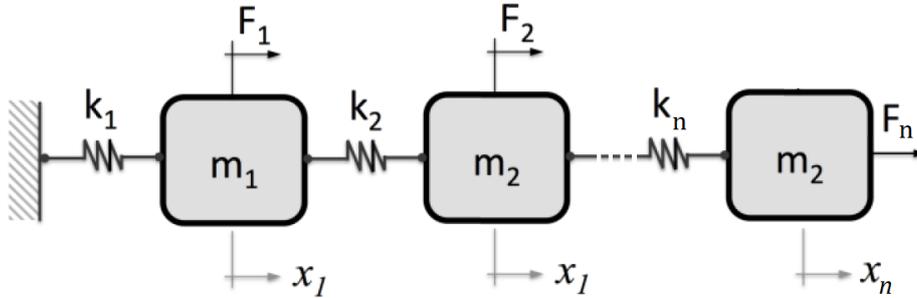


Figura 12 - Sistema Massa-Mola excitado com  $n$  GDL [19]

Apesar de cada massa possuir apenas um grau de liberdade, o comportamento de uma massa irá influenciar a outra, e vice-versa. O seguinte conjunto de equações do movimento descreve este tipo de sistemas:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = F_1 \cos \omega(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = F_2 \cos \omega(t) \\ \vdots \\ m_n \ddot{x}_n(t) - k_n x_{n-1}(t) + k_n x_n(t) = F_n \cos \omega(t) \end{cases} \quad (26)$$

Este sistema de equações pode ser reescrito em forma matricial, como demonstrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_n \\ 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \cos \omega(t) \\ F_2 \cos \omega(t) \\ \vdots \\ F_n \cos \omega(t) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

A influência recíproca que as massas do sistema têm sobre as outras resulta em matrizes de rigidez e massa não diagonais. Para torná-la diagonal é realizada uma análise modal que resolve o problema de valores e vetores próprios descrito pela equação 27 de modo a obter as frequências naturais  $[\omega_n^2]$  e os modos de vibração  $[\Psi]$  do sistema.

Aplicam-se as seguintes relações para um sistema não amortecido de modo obter as matrizes modais (ou generalizadas) de massa e rigidez:

$$[m_r]_{m \times m} = [\Psi]_{m \times N}^T [M]_{N \times N} [\Psi]_{N \times m} \quad (28)$$

$$[k_r]_{m \times m} = [\Psi]_{m \times N}^T [K]_{N \times N} [\Psi]_{N \times m} \quad (29)$$

Em que cada um dos seus elementos se encontra relacionado da seguinte forma:

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (30)$$

Onde  $\omega_r^2$  é a frequência natural associada ao modo de vibração  $r$ . Ao normalizar os modos de vibração com recurso à matriz de massa, um novo conjunto de matrizes ortogonais é obtido:

$$[\Phi]_{m \times N}^T [M]_{N \times N} [\Phi]_{N \times m} = [I]_{m \times m} \quad (31)$$

$$[\Phi]_{m \times N}^T [K]_{N \times N} [\Phi]_{N \times m} = [\omega_r^2]_{m \times m} \quad (32)$$

Em que  $[I]$  é a matriz identidade e  $[\Phi]$  a matriz modal normalizada em relação à matriz de massas obtida a partir dos vetores modais.

## 2.3 Subestruturação

### 2.3.1 Introdução

Os modelos de elementos finitos normalmente envolvem um número elevado de graus de liberdade (GDL), o que implica esforços computacionais consideráveis. Têm sido feitos estudos científicos para contribuir significativamente para a otimização dos recursos disponíveis para análises estruturais, e é nesta ótica que se enquadra o método de subestruturação. Este método implica a divisão de estruturas completas em subestruturas, que são analisadas individualmente para que todo o esforço computacional disponível se possa concentrar num único componente. O comportamento da estrutura será derivado a partir das várias análises feitas às partes que a constituem. Conclui-se que partição de um grande problema em pequenos problemas de ordem reduzida é a grande vantagem obtida nesta abordagem. Segundo *Seshu* (1997) [17], existem outros benefícios:

- Útil em fases de projeto; a título de exemplo, diferentes equipas de investigadores projetam diferentes componentes para reunir numa única estrutura. Qualquer modificação estrutural que venha a ser feita irá afetar apenas a parte em questão. A alteração de um único componente resulta na obtenção de novos dados que podem ser acoplados às restantes partes não modificadas, sem que seja necessária a análise da estrutura completa.
- O modelo de subestruturas não precisa de ser puramente matemático, pode conter também dados obtidos experimentalmente pela análise individual de todos os componentes. A informação obtida individualmente é mais fácil de manipular do que a informação referente ao sistema completo.
- Cada componente pode ser tratado como um modelo mais preciso e refinado. Quando a subestrutura é demasiado grande para ser testada experimentalmente (como é o caso da suspensão para simular a condição livre-livre) o método de subestruturação permite a sua subdivisão em componentes mais reduzidos, logo mais fáceis de medir.
- É possível o processamento paralelo de várias análises subestruturais relativas ao mesmo sistema. A data e o local para a análise pode variar ao longo da fase de projeto, sendo que diferentes organizações em diferentes locais podem analisar diferentes subsistemas.

A possibilidade de criar um subsistema que permite obter uma descrição mais precisa das propriedades dinâmicas do componente traduz-se numa exploração mais eficaz dos meios computacionais e experimentais existentes numa dada organização ou equipa. Contudo, nem toda a informação obtida por esta via é incorporada no modelo do sistema, caso contrário a diminuição do tamanho das matrizes requeridas para a formulação da equação final de equilíbrio da estrutura acoplada não se verificaria. É então necessária a redução ótima das matrizes ao subnível sem que se perca a descrição das suas propriedades dinâmicas. Uma formulação imprecisa do sistema reduzido irá afetar a previsão do comportamento dinâmico do sistema completo (*Maia et al.*, 1997, p. 267).

### 2.3.2 Equações Gerais

Na análise estrutural com recurso ao MEF é frequente a necessidade de reduzir a ordem dos sistemas acoplados para melhor aproveitar as capacidades computacionais disponíveis. Tal é possível quando a ordem  $N$  de cada subsistema é reduzida i.e., quando são analisadas apenas as coordenadas dos pontos de interesse, e/ou apenas certos modos. Estas necessidades levam à formulação de sistemas condensados, reduzidos ou incompletos.

### Modelo Espacial Reduzido

Ao projetar um sistema reduzido cabe ao utilizador a tarefa de identificar os pontos de interesse onde se encontram os possíveis graus de liberdade principais. Estes encontram-se principalmente nas interfaces entre o componente em questão e os restantes componentes, mas também são considerados relevantes os pontos de aplicação de forças ou momentos, caso existam. Portanto, é usada uma matriz de transformação que relaciona os graus de liberdade secundários (inativos) com os principais (ativos) a fim de reduzir a ordem do subsistema. A transformação feita ignora a contribuição das forças estáticas ou de inércia dos graus de liberdade inativos, sendo que o processo de redução gera as matrizes de massa  $[M^R]$  e rigidez  $[K^R]$  do sistema reduzido. A equação de equilíbrio para um sistema não amortecido cujas forças são aplicadas apenas nas coordenadas ativas pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} [M_{pp}] & [M_{ps}] \\ [M_{sp}] & [M_{ss}] \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{\{\ddot{x}_p\}\} \\ \{\{\ddot{x}_s\}\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{x_p\} \\ \{x_s\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (33)$$

Em que

$\begin{Bmatrix} \{x_p\} \\ \{x_s\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$  representa os vetores de deslocamento contendo os graus de liberdade principais e secundários;

$\begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_p\} \\ \{\ddot{x}_s\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$  representa os vetores de aceleração contendo os graus de liberdade principais e secundários;

$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$  representam os vetores de forças contendo os graus de liberdade principais e secundários.

Na análise de subestruturas, o vetor de deslocamento nodal da estrutura  $\{x\}$  é representado em termos de coordenadas reduzidas  $\{x_p\}$  pela seguinte transformação:

$$\{x\}_{N \times 1} = [T]_{N \times np} \{x_p\}_{np \times 1} \quad (34)$$

Sendo que a matriz de transformação  $[T]$  varia consoante o método de redução escolhido. Conhecendo a matriz de transformação é possível calcular as matrizes de massa  $[M^R]$  e rigidez  $[K^R]$  que descrevem o sistema reduzido:

$$[M^R]_{np \times np} = [T]_{np \times N} [M]_{N \times N} [T]_{N \times np} \quad (35)$$

$$[K^R]_{np \times np} = [T]_{np \times N} [K]_{N \times N} [T]_{N \times np} \quad (36)$$

Qualquer que seja método assumido, a redução dos graus de liberdade implica também a redução dos modos existentes. No programa de elementos finitos em uso (ANSYS) encontram-se disponíveis dois métodos de condensação:

**Método de Redução de Guyan.** Esta redução estática reduz as matrizes do sistema para um número reduzido de graus de liberdade nodais.

**Acoplamento Modal.** Reduz para um número inferior de graus de liberdade as matrizes do sistema, complementando-as com um conjunto de coordenadas generalizadas.

A validade do modelo reduzido irá depender dos valores de massa e rigidez associados às coordenadas inativas.

### Modelo Modal Reduzido

Os valores e vetores próprios característicos do modelo modal podem ser obtidos na sua configuração reduzida ao inserir as matrizes de massa e rigidez reduzida na seguinte expressão e resolver:

$$[[K^R] - \omega^2[M^R]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (37)$$

As frequências naturais (valores próprios) e modos de vibração (vetores próprios) do sistema reduzido são representados por  $[\omega_r^2]_{np \times np}$  e  $[\Psi]_{np \times m}$ , respetivamente.

### 2.3.3 Método de Redução de Guyan

O método de redução de Guyan (ou de condensação estática) é uma referência essencial não só no método de subestruturação como em todos os métodos de redução de sistemas dinâmicos (MRSD). A condensação estática que dá o nome ao método vem do facto de, numa análise estrutural, ser considerada apenas a matriz de rigidez, desprezando os efeitos produzidos pelas forças de inércia. A necessidade de reduzir a matriz de rigidez vem também associada a redução da matriz não diagonal de massa. Para que tal aconteça, é empregue o seguinte procedimento:

$$\begin{bmatrix} \{K_{pp}\} & \{K_{ps}\} \\ \{K_{sp}\} & \{K_{ss}\} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{x_p\} \\ \{x_s\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{f_p\} \\ \{f_s\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (38)$$

Como não existem forças aplicadas nas coordenadas inativas, o sistema é resolvido tendo em conta que  $\{f_s\} = 0$ . Obtém-se um sistema de duas equações e duas incógnitas, sendo que a expressão igualada a  $\{f_p\}$  se refere aos graus de liberdade principais e a igualada a 0 aos secundários:

$$[K_{pp}]\{x_p\} + [K_{ps}]\{x_s\} = \{f_p\} \quad (39)$$

$$[K_{sp}]\{x_p\} + [K_{ss}]\{x_s\} = \{0\} \quad (40)$$

Pondo  $\{x_s\}$  em evidência na equação 40 resulta na expressão

$$\{x_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}]\{x_p\} \quad (41)$$

Que é posteriormente substituída no vetor do deslocamento de modo a relacionar os graus de liberdade principais e secundários:

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{x_p\}_{np \times 1} \\ \{x_s\}_{ns \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{x_p\} \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}]\{x_p\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]_{np \times np} \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \end{bmatrix}_{ns \times np} \cdot \{x_p\} \quad (42)$$

Reescrevendo a equação na sua forma compacta resulta em:

$$\{x\}_{N \times 1} = [T]_G \cdot \{x_p\} \quad (43)$$

Onde a matriz  $[T]_G$  representa a transformação de Guyan descrita por:

$$[T]_G = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \end{bmatrix} \quad (44)$$

Esta matriz de transformação é aplicada às matrizes de massa e rigidez de modo a equacionar as suas formas reduzidas:

$$[\tilde{M}]_G = [T]_G^T [M] [T]_G \quad (45)$$

$$[\tilde{K}]_G = [T]_G^T [K] [T]_G \quad (46)$$

As matrizes de rigidez dinâmica  $[\tilde{Z}]_G$  e receptância  $[\tilde{H}]_G$  reduzidas tomam a seguinte forma:

$$[\tilde{Z}]_G = [\tilde{K}]_G - \omega^2 [\tilde{M}]_G \quad \omega = 0, 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

$$[\tilde{H}]_G = [\tilde{Z}]_G^{-1} \quad (48)$$

Apesar da sua fácil implementação, a natureza estática deste método confere-lhe uma certa imprecisão quando aplicado a análises dinâmicas pois não contabiliza os efeitos da inércia na sua matriz de transformação. Além disso, o seu resultado é completamente dependente dos graus de liberdade considerados importantes e preservados no sistema reduzido. No entanto, este método contribuirá para a aplicação do método de subestruturação aqui aplicado, em conjunto com o próximo método.

### 2.3.4 Acoplamento Modal

O método de acoplamento modal (conhecido como *Component Mode Synthesis* em inglês) recorre a certos modos para representar o comportamento dinâmico do sistema. Tal como no método de redução estática de Guyan descrito anteriormente, o CMS permite a condensação de componentes constituintes de um modelo a fim de reduzir a ordem das matrizes na equação do movimento do sistema completo. Mas, enquanto que o método de Guyan toma partido da redução do número de coordenadas, este método recorre a uma redução do número de modos que descrevem cada componente, ao mesmo tempo que contabilizam todos os graus de liberdade. Ao recorrer a uma transformação do tipo Ritz, o número reduzido de coordenadas principais é relacionado com o número de modos que contribuem para a estimação de parâmetros modais. Isto confere ao método CMS a possibilidade de reduzir o esforço de computação necessário para a análise do sistema, sendo que apenas necessária a medição de alguns dos modos característicos da estrutura.

O objetivo deste método é manter um certo nível de precisão na análise dinâmica recorrendo apenas aos modos de ordem inferior para reduzir o esforço computacional. É possível distinguir duas metodologias:

**Método de interface fixa (ou Craig-Brampton).** recorre a uma interface fixa e a modos de constrangimento;

**Método de interface livre (ou Craig-Chang).** recorre a uma interface livre e a modos do corpo rígido.

Este módulo pretende fazer a distinção entre os modos usados em cada método, como os obter e como calcular a matriz de redução que permite condensar o sistema.

### 2.3.4.1 Método de Interface Fixa

Para a aplicação deste método são tidos em conta os modos de vibração fixa e os modos de constrangimento [8]. Os modos de vibração fixa contêm a informação relativa à maneira como a estrutura vibra quando esta se encontra fixa, i.e. constrangida nos seus graus de liberdade principais. Para obter estes modos é necessário fazer a distinção entre graus de liberdade primários (nas ligações) e secundários (no seu interior):

$$\begin{bmatrix} [M_{ss}] & [M_{sp}] \\ [M_{sp}] & [M_{pp}] \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{\{\dot{x}_s\}\} \\ \{\{\dot{x}_p\}\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + \begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sp}] \\ [K_{sp}] & [K_{pp}] \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{x_s\} \\ \{x_p\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{f_s\} \\ \{f_p\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (49)$$

Em que

$\begin{Bmatrix} \{x_s\} \\ \{x_p\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$  representa os vetores de deslocamento contendo os graus de liberdade primários e secundários;

$\begin{Bmatrix} \{f_s\} \\ \{f_p\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$  representam os vetores de forças contendo os graus de liberdade primários e secundários.

#### Modos da Interface fixa

Assumindo que as coordenadas relativas aos graus de liberdade primários se encontram fixas, i.e.  $\{x_p\} = 0$ , e que não existem forças exteriores aplicadas nos graus de liberdade secundários, a equação do movimento passa a ter a seguinte forma:

$$[M_{ss}]\{\ddot{x}_s\} + [K_{ss}]\{x_s\} = 0 \quad (50)$$

A solução obtida é composta pelos valores e vetores próprios do sistema constrangido nos seus graus de liberdade principais. A matriz de vetores próprios  $[\Phi_{sm}]$  obtida representa os modos da interface fixa, e pode ser usada para obter o deslocamento das coordenadas que constituem as coordenadas secundárias, visto que

$$\{x_s\} = [\Phi_{sm}][p_m] \quad (51)$$

#### Modos Constrangidos

Para obter aproximações do valor dos deslocamentos nas coordenadas secundárias recorre-se também a outro tipo de modos chamados modos estáticos ou constrangidos. Estes modos são obtidos ao ignorar as propriedades mássicas de cada um dos graus de liberdade secundários, relaxando cada uma das coordenadas das ligações em questão. Expandindo a equação 49 e admitindo que não existem forças aplicadas nos graus de liberdade secundários, obtém-se a seguinte expressão:

$$[M_{ss}]\{\ddot{x}_s\} + [M_{sp}]\{\ddot{x}_p\} + [K_{ss}]\{x_s\} + [K_{sp}]\{x_p\} = 0 \quad (52)$$

Sendo necessário o cálculo da resposta estática, é possível negligenciar as forças de inércia e rearranjar os restantes termos da seguinte forma:

$$\{x_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}]\{x_p\} \quad (53)$$

Onde é possível distinguir a matriz dos modos estáticos

$$[\Phi_s^*] = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \quad (54)$$

### Matriz de Transformação

Os modos estáticos e constrangidos são as colunas da matriz de transformação de Guyan. Assim que os modos de constrangimento  $[\Phi_{sm}]$  e os modos estáticos  $[\Phi_s^*]$  forem calculados, procede-se ao cálculo da matriz de redução que reduz a estrutura. Voltando à equação 49 que divide o sistema em graus de liberdade primários e secundários, e considerando que as coordenadas ativas podem ser descritas em termos dos modos de interface fixa e modos estáticos:

$$\{x_s\} = [\Phi_{sm}]\{p_m\} + [\Phi_s^*]\{x_p\} \quad (55)$$

É agora possível escrever a matriz de redução

$$\begin{Bmatrix} \{x_s\} \\ \{x_p\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{sm}] & [\Phi_s^*] \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_m\} \\ \{x_p\} \end{Bmatrix} = [T]_{CB} \begin{Bmatrix} \{p_m\} \\ \{x_p\} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Esta matriz pode ser usada para reduzir as matrizes de massa e rigidez do sistema:

$$\begin{cases} [\tilde{M}]_{CB} = [T]_{CB}^T [M] [T]_{CB} \\ [\tilde{K}]_{CB} = [T]_{CB}^T [K] [T]_{CB} \end{cases} \quad (57)$$

O método de interface fixa adequa-se aos casos em que as propriedades dinâmicas do modelo são descritas pela sua massa e rigidez. Espera-se que a solução obtida por este método é precisa quando o sistema final permite que o componente em análise tenha pouco ou nenhum movimento junto dos graus de liberdade principais, ou quando um corpo flexível se encontra ligado a um corpo rígido.

#### 2.3.4.2 Método da Interface Livre

Este método parte do mesmo princípio que o método de interface fixa de Craig-Bampton mas recorre a outro tipo de matriz de transformação para realizar a condensação. Neste caso, os modos naturais incorporados na matriz são obtidos por meio de um subsistema que vibra quer na sua interface livre quer na condição livre-livre [18]. Contribuem para este método os modos do corpo rígido, os modos de alívio de inércia e os modos de interface livre, i.e., quando o componente é considerado livre nos graus de liberdade das suas interfaces.

### Modos da Interface Livre

Estes modos são intrínsecos à vibração da estrutura quando os seus graus de liberdade nas interfaces não se encontram sujeitos a qualquer tipo de constrangimento. Podem ser obtidos ao resolver o problema de valores próprios relativo às matrizes de massa e rigidez mencionado acima. Aplicando este caso à equação (23):

$$[[K] - \omega_f^2[M]]\{\Phi_f\} = 0 \quad (58)$$

Em que  $\{\Phi_f\}$  é o modo de vibração livre associado à frequência  $\omega_f^2$ . Estes modos contêm os dados relativos à vibração do sistema e serão referenciados com a notação  $[\Phi_f]$  para indicar que são os modos de vibração da interface livre.

### Modos do Corpo Rígido

Estes modos partem do princípio que não existem constrangimentos aplicados à estrutura e que esta vibra livremente e sem qualquer tipo de deformação. Dado que as frequências associadas a estes modos são normalmente zero, é possível introduzir  $\omega_f^2 = 0$  para obter a seguinte expressão:

$$[K][\Phi_r] = 0 \quad (59)$$

Em que  $[\Phi_r]$  representa os modos do corpo rígido.

### Modos de Alívio de Inércia

$$[\Phi_{am}] = [G]_{am}[F] \quad (60)$$

### Matriz de Transformação

O conjunto de graus de liberdade pode ser calculado como a soma das contribuições dos modos livres, rígidos e de ligação segundo a seguinte equação:

$$\{x_p\} = [\Phi_f]\{p_f\} + [\Phi_r]\{p_r\} + [\Phi_{am}]\{p_{am}\} \quad (61)$$

Por fim, a matriz de transformação de interface livre é conseguida ao juntar os diferentes conjuntos de modos numa só matriz:

$$\{x_p\} = [[\Phi_f] \quad [\Phi_r] \quad [\Phi_{am}]] \begin{bmatrix} \{p_f\} \\ \{p_r\} \\ \{p_{am}\} \end{bmatrix} = [T]_{CC} \begin{bmatrix} \{p_f\} \\ \{p_r\} \\ \{p_{am}\} \end{bmatrix} \quad (62)$$

A matriz  $[T]_{CC}$  é utilizada na redução das matrizes iniciais de massa e rigidez:

$$\begin{cases} [\tilde{M}]_{CC} = [T]_{CC}^T [M] [T]_{CC} \\ [\tilde{K}]_{CC} = [T]_{CC}^T [K] [T]_{CC} \end{cases} \quad (63)$$



## 3. Aplicação do Método de Subestruturação

### 3.1 1º Caso de Estudo

Neste primeiro estudo de caso serão aplicados os métodos de redução apresentados no capítulo 3 a um modelo relativamente simples. Este modelo é um paralelepípedo dividido em três partes, sendo que duas serão transformadas em superelementos para criar o sistema reduzido. Com este estudo pretende-se:

- Ilustrar como se processa uma análise de subestruturas recorrendo ao *software* ANSYS;
- Comparar os modos de vibração, as frequências naturais e os tempos de solução dos sistemas reduzido e completo.
- Verificar a influência da parametrização do método livre-livre na precisão dos valores de frequência obtidos.
- Verificar a viabilidade de uma segunda análise modal após a modificação de um superelemento

#### 3.1.1 Processo

Apesar de haver várias abordagens possíveis a um problema de subestruturação com recurso ao *software* ANSYS, a metodologia aqui apresentada foi criada tendo em conta a geometria a analisar e os recursos computacionais disponíveis. A realização de uma análise modal onde são condensados um ou mais componentes da estrutura em análise implica a realização de determinadas tarefas segundo a ordem abaixo estabelecida:

1. Criar a geometria
2. Gerar o modelo de elementos finitos
3. Preparar o modelo para a criação das subestruturas
4. Criar os superelementos (*Generation Pass*)
5. Usar os superelementos para criar o modelo reduzido (*Use Pass*)
6. Fazer a análise modal
7. Expandir as soluções nos elementos reduzidos (*Expansion Pass*)
8. Criar o ficheiro agregado de resultados
9. Pós-processar os resultados

É de notar que o processo de aplicação do método estrutural do ANSYS envolve três fases distintas, normalmente chamadas de *passes*. A figura seguinte ilustra o fluxo de dados associado a todo o método de subestruturação, assim como o tipo de ficheiros envolvido.

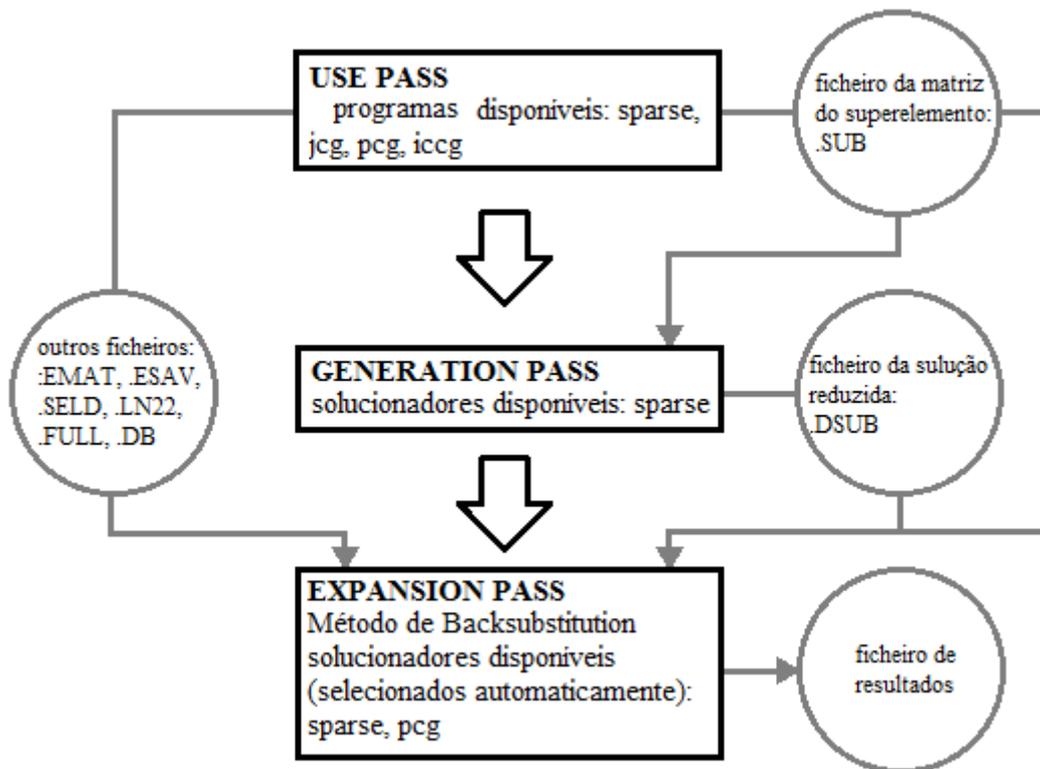


Figura 13 - Ficheiros criados e usado pelo ANSYS no método de subestruturação

## Geometria

A geometria analisada neste estudo foi criada com recurso ao SOLIDWORKS. Este *software* de *Computer Assisted Design* (ou CAD) é utilizado com alternativa ao *Design Modeller* incluído no ANSYS pois possui uma interface gráfica bastante mais intuitiva, permitindo o projeto de modelos com geometrias mais complexas e a fácil assemblagem de estruturas com vários componentes. O modelo projetado é um paralelepípedo retângulo dividido em três partes de alturas diferentes, como ilustrado na figura:

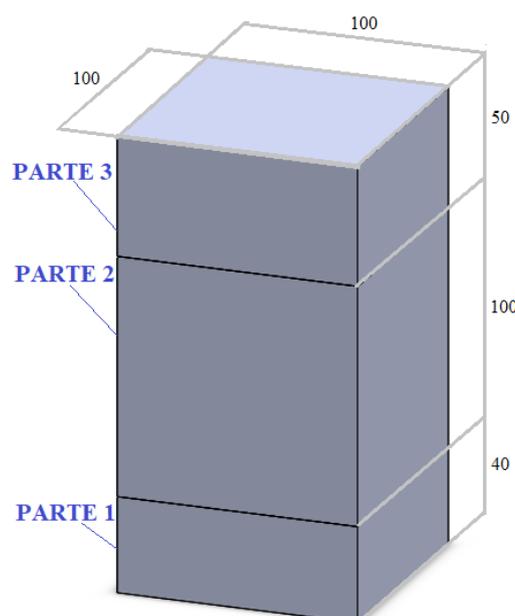


Figura 14 - dimensões gerais do Modelo CAD do 1º Caso de Estudo

A geometria simples do modelo servirá para demonstrar todo processo de análise estrutural de uma forma compreensível para que posteriormente possa ser aplicado a geometrias mais complexas. O formato *step* segundo o qual o ficheiro foi guardado permitir-lhe-á ser importado pelo ANSYS *Workbench* para se proceder ao próximo passo.

## Modelo de Elementos Finitos

O modelo de elementos finitos do caso em análise foi gerado com recurso ao ANSYS *Workbench*. Este programa permite:

- Escolher o tipo de elementos mais adequado e gerar a malha;
- Definir as propriedades materiais do modelo;
- Aplicar forças e/ou momentos;
- Selecionar e nomear pontos, vértices, faces e partes relevantes para que sejam chamados durante a análise.

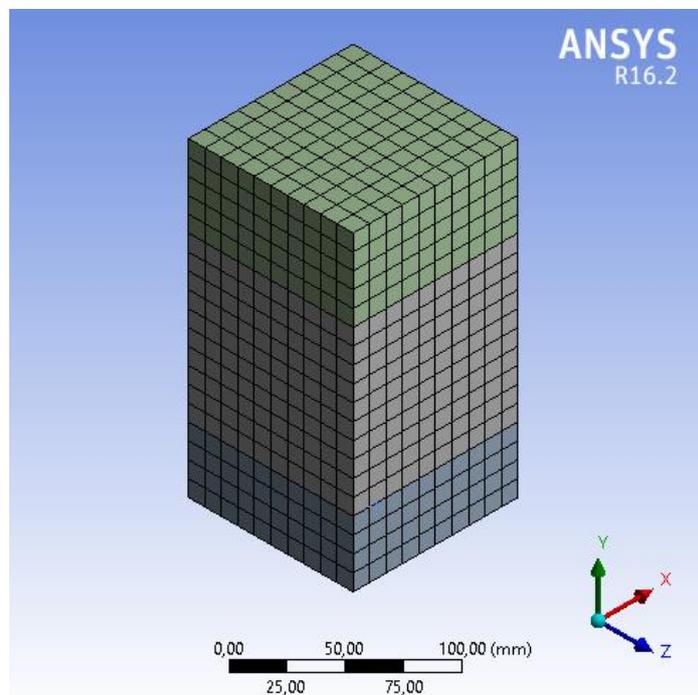


Figura 15 - Modelo de elementos finitos gerado no ANSYS *Workbench*

Tabela 1- Propriedades do aço estrutural usado

Propriedade	Simbologia	Valor
Densidade	$\rho$	7850
Módulo de Elasticidade	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3

O modelo de elementos finitos gerado possui 7260 graus de liberdade e encontra-se fixo ao chão pela superfície inferior da parte 1. Recorrendo à ferramenta *Named Selections* foram criadas entidades relativas às partes 1, 2 e 3 e as superfícies de interface f1, f2, f3, que serão utilizadas na aplicação do método de subestruturação.

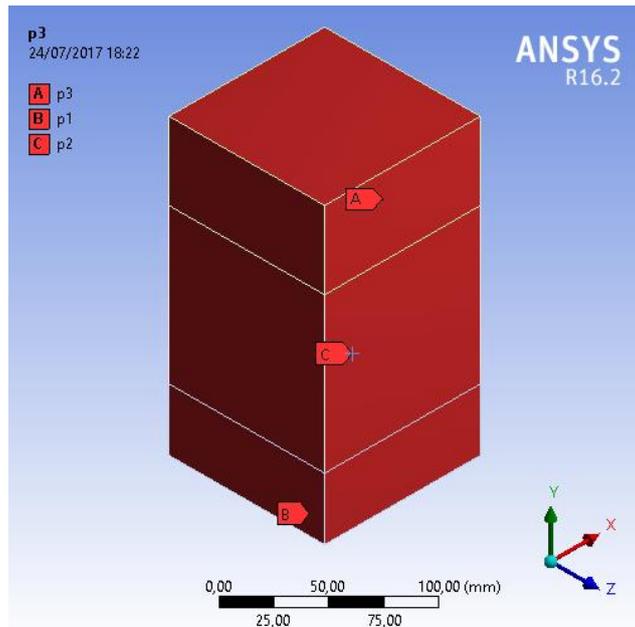


Figura 16 - Entidades nomeadas no ANSYS Workbench

O *Workbench* revela a sua importância na preparação de modelos com geometrias mais complexas dado que a sua interface gráfica 3D permite esconder/cortar partes mais facilmente relativamente ao *Mechanical APDL*. Finda a caracterização do modelo de elementos finitos, este é exportado com o formato *.dat* para ser lido no *Mechanical APDL*, criando assim um modelo completo a partir do qual irão ser gerados todos os superelementos.

### Preparação do Modelo

É criado um diretório específico para a análise a realizar. O modelo de elementos finitos gerado no *Workbench* é importado para o *Mechanical APDL*, onde é guardado com o nome “reduzido”. Este ficheiro será utilizado em todos os passos seguintes. Neste passo também podem ser criadas as entidades relativas às várias partes e/ou interfaces.

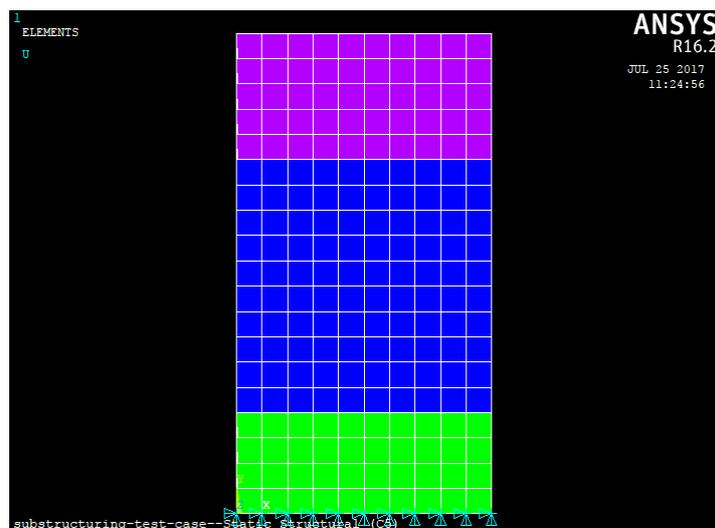


Figura 17 - Modelo de elementos finitos importado para o ANSYS Mechanical.

## Generation Pass

É neste passo que são condensados grupos de elementos finitos comuns para dar lugar a um único superelemento. Esta condensação é feita ao identificar os graus de liberdade principais. Na análise estrutural, definir os graus de liberdade principais serve três propósitos:

1. Definir a interface entre o superelemento e os restantes elementos;
2. Caracterizar o comportamento dinâmico da estrutura caso não seja aplicado o método CMS;
3. Definir os constrangimentos e as forças aplicadas nos componentes reduzidos aquando da análise do sistema reduzido.

Numa primeira instância, é necessário definir os parâmetros do método de redução escolhido (CMS). Como está em causa a análise modal de um sistema não amortecido, são geradas apenas as matrizes de massa e amortecimento para posteriormente serem reduzidas. Para escolher o tipo de interface entre elementos há que perceber qual o método mais adequado à análise em questão, tendo em conta os conceitos teóricos abordados no capítulo 3:

<b>Interface fixa</b>	<b>Interface livre</b>
Os nós da interface encontram-se constrangidos durante a geração do superelemento	Os nós da interface encontram-se livres durante a geração do superelemento
Não é necessário especificar os modos do corpo rígido	É necessário especificar os modos do corpo rígido
Adequado para a obtenção precisa de modos mais baixos	Adequado quando é necessário obter valores precisos em todos os modos

Para esta análise foi escolhido o método da interface livre para que na visualização dos modos de vibração os elementos não se encontrem constrangidos.

De seguida é necessário definir o intervalo de frequências a analisar e os modos a extrair. Esta escolha é inerente ao método da interface fixa sendo que, quanto maior é o número de modos extraídos, maior será a precisão dos seus valores mais baixos de frequência. Para efeitos de demonstração serão extraídas e analisadas as 30 primeiras frequências e os seus respetivos modos de vibração.

Finda a parametrização do método de redução, o último passo consiste na seleção dos graus de liberdade com base nos critérios acima mencionados. Foram selecionadas as entidades criadas no passo 2 (interfaces entre partes) a fim de definir os graus de liberdade principais. Após a criação do superelemento verifica-se que os seus graus de liberdade principais aparecem realçados a roxo na interface gráfica. Este processo foi repetido duas vezes por cada superelemento gerado (“corpo2” e “corpo3”).

## Resultados

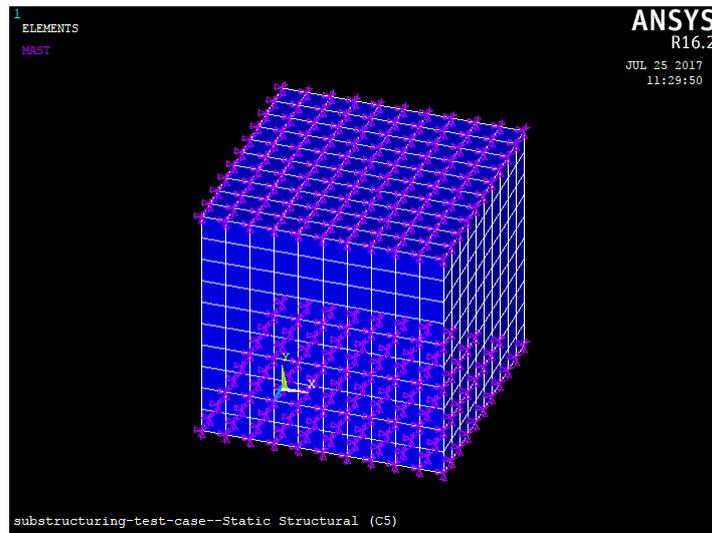


Figura 18 - Super elemento da parte 2

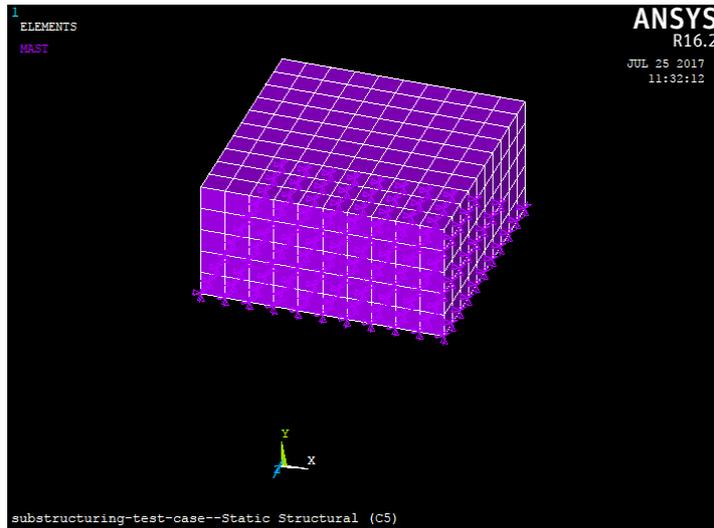


Figura 19 - Super elemento da parte 3

## Use Pass

Nesta fase os corpos flexíveis são substituídos pelos seus super elementos correspondentes, podendo proceder-se à análise modal do sistema reduzido. Para os super elementos presentes a solução obtida irá ser reduzida (solução apenas nos graus de liberdade principais), sendo completa para os restantes elementos (ditos comuns).

Para substituir os elementos comuns pelos respetivos super elementos, procede-se à seleção das matrizes de massa e rigidez criadas no passo anterior. Estas matrizes são lidas e os elementos contidos nos componentes reduzidos são substituídos pelo elemento MATRIX50 próprio para o efeito.

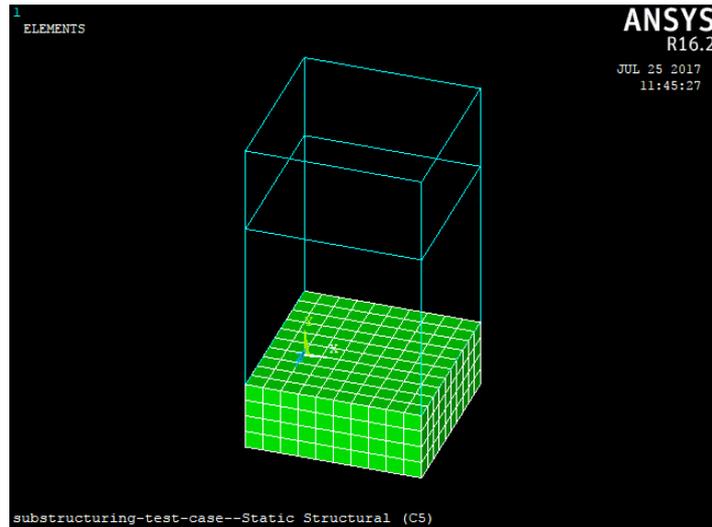


Figura 20 - Modelo reduzido

## Análise Modal

Substituídos os componentes e definido o sistema reduzido, a análise modal processa-se de maneira comum. Para o caso em estudo foi apenas definido que o número de frequências naturais a obter seria 30.

Tabela 2 - Modos extraídos e respectivas frequências

Modo n°	Frequência (Hz)	Modo n°	Frequência (Hz)
1	1937,9	16	20473
2	1937,9	17	21581
3	3834,2	18	21582
4	6727,1	19	22190
5	7148,3	20	23184
6	7148,3	21	23440
7	11512	22	23458
8	14862	23	23502
9	14862	24	24617
10	16895	25	25395
11	18594	26	25395
12	18595	27	25616
13	19219	28	26381
14	19234	29	26596
15	20098	30	26604

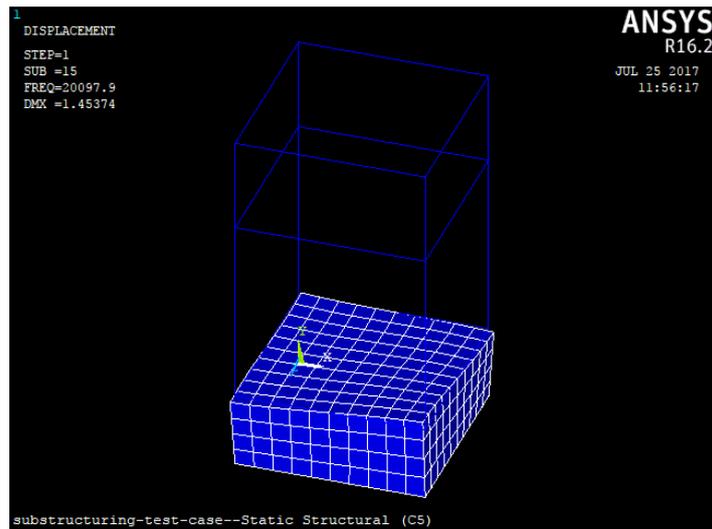


Figura 21 - 15º Modo de vibração do Modelo reduzido

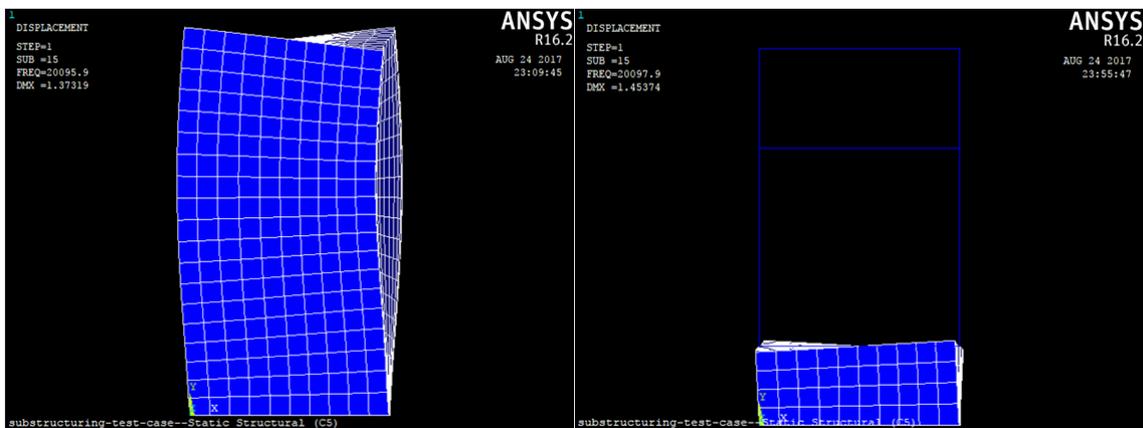


Figura 22 - Comparação do 15º modo de vibração entre os modelos reduzido e original

## Expansion Pass

A solução obtida para os graus de liberdade principais no passo anterior é aplicada ao cálculo dos resultados relativos ao superelemento em todos os seus graus de liberdade.

O ficheiro que contém o superelemento é novamente aberto e a solução reduzida obtida no *use pass* volta a ser substituída na matriz fatorizada do modelo condensado para que a solução completa possa ser calculada. Este processo é repetido para cada superelemento usado na análise do sistema reduzido.

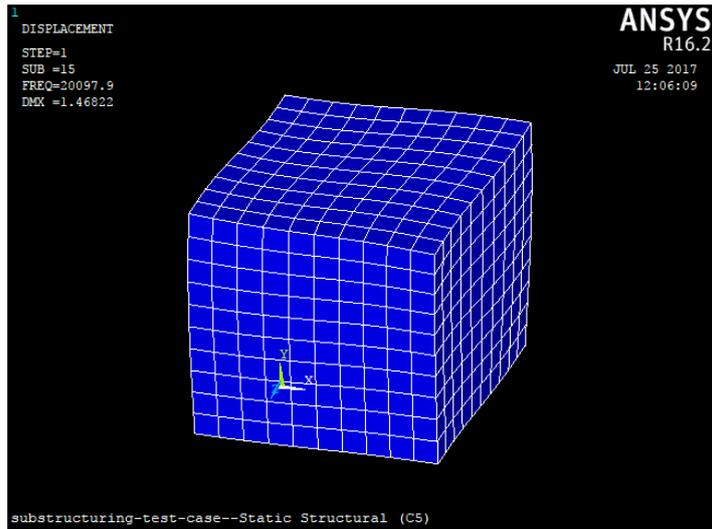


Figura 23 - 15º Modo de vibração da parte 2

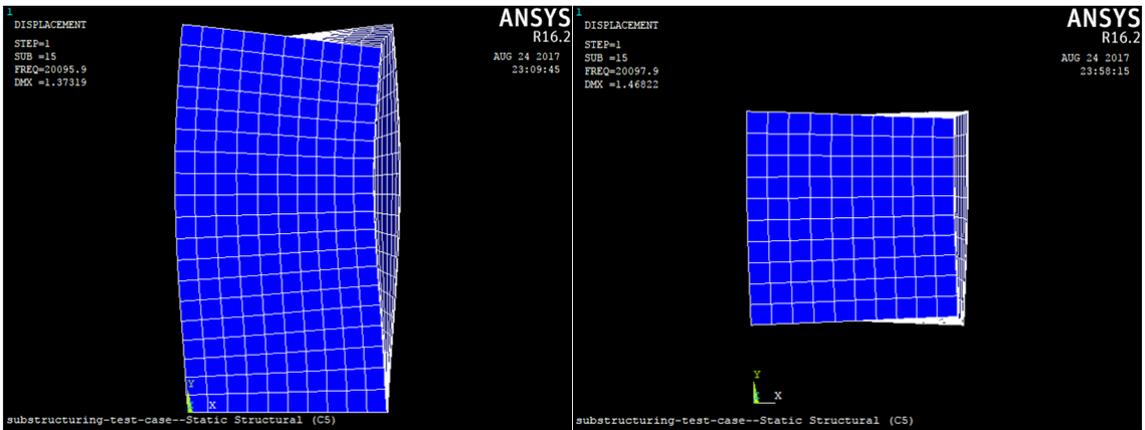


Figura 24 - Comparação do 15º modo de vibração entre a parte 2 reduzida e o modelo original

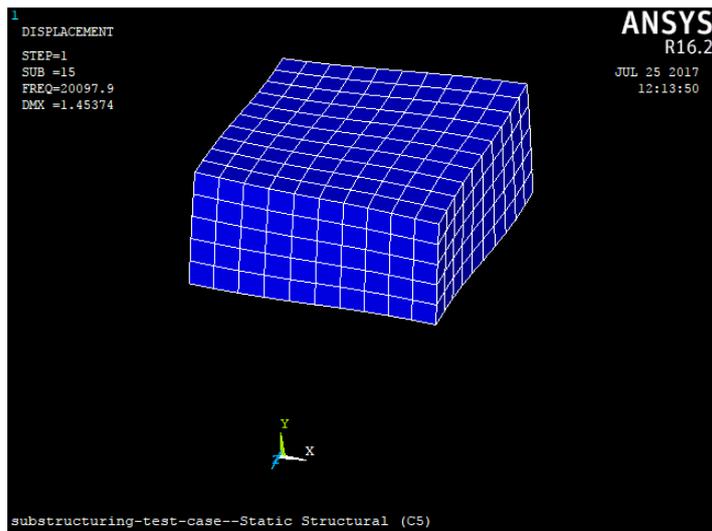


Figura 25 - 15º Modo de Vibração da parte 3

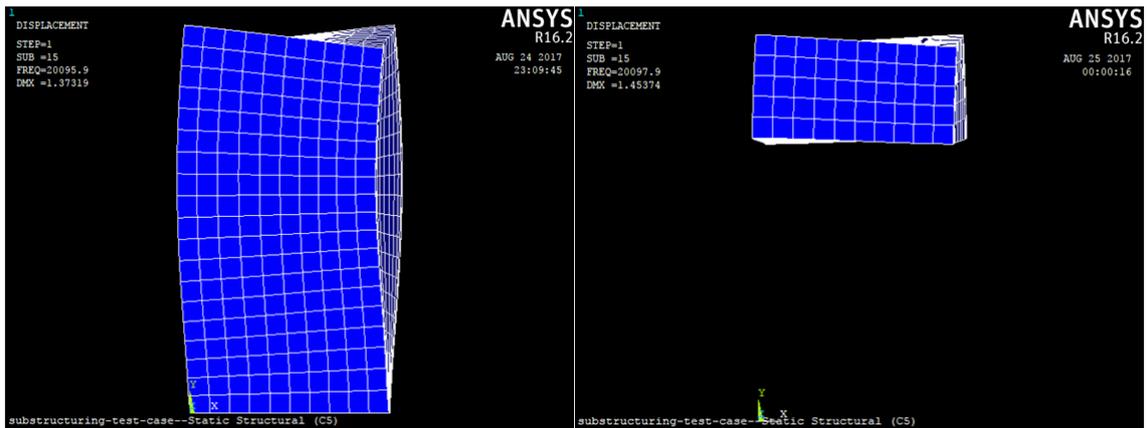


Figura 26 - Comparação do 15º modo de vibração entre a parte 3 reduzida e o modelo original

### Ficheiro Agregado de Resultados

Nesta análise foram gerados vários ficheiros de resultados - um ficheiro gerado no *use pass* e um ficheiro gerado por cada *expansion pass*. Estes ficheiros são reunidos para criar um ficheiro de resultados com toda a informação obtida do modelo completo que fornece a solução em todos os graus de liberdade do modelo. Para que tal aconteça o ficheiro “reduzido” criado no passo 3 é reaberto e são acrescentados um a um os resultados obtidos no *use pass* e em cada *expansion pass*. O que se obtém no final é um ficheiro de resultados do modelo completo tal como se a análise modal fosse realizada de maneira normal.

### Pós Processamento

A solução obtida na análise modal contém as frequências naturais e os respetivos modos de vibração. Apesar das diferentes soluções obtidas, os valores de frequência mantiveram-se constantes independentemente da parte ou modelo em análise. Já o mesmo não pode ser dito em relação aos modos de vibração, onde só era possível visualizar o modo de vibração correspondente à parte ou modelo em análise. Após a agregação dos dados no ficheiro completo é possível visualizar os modos de vibração da estrutura na sua totalidade.

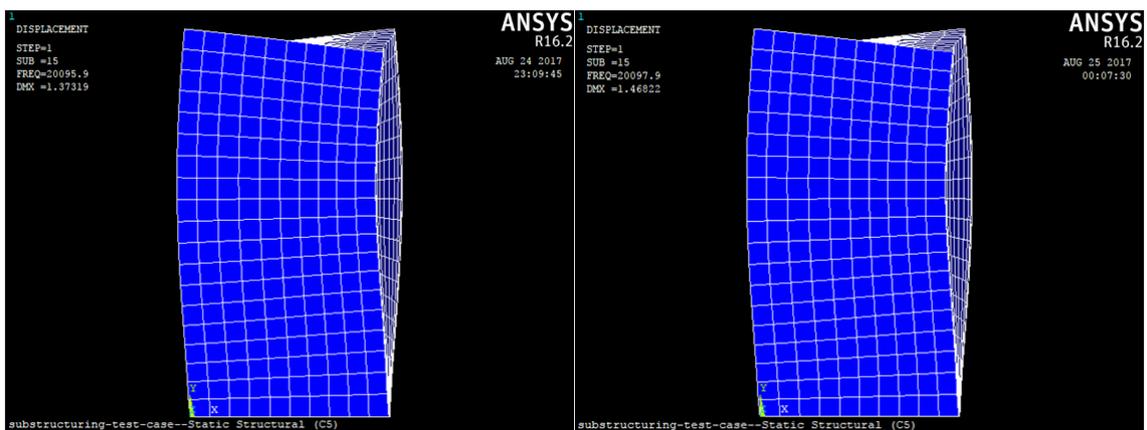


Figura 27 - Comparação do 15º modo de vibração entre os modelos agregado e original

## 3.1.2 Resultados e Discussão

### 3.1.2.1 Comparação com o Modelo Completo

O uso do método CMS de interface livre implica a seleção do número de frequências a extrair. Segundo o modelo teórico, esta escolha irá afetar a precisão dos valores obtidos. Os resultados obtidos na análise anteriormente descrita advêm da extração dos 30 primeiros modos (valor demonstrativo), mas várias análises foram realizadas com o intuito de verificar até que ponto o número de frequências extraídas é relevante para a obtenção de resultados próximos de uma análise modal comum.

#### Frequências

O gráfico abaixo representa a influência do número de frequências extraídas na precisão dos valores de frequência obtidos na análise modal realizada, recorrendo à seguinte fórmula para verificar o desvio do valor do modelo reduzido em relação ao valor do modelo completo:

$$Erro = \frac{|\omega_{completo} - \omega_{reduzido}|}{\omega_{completo}} \times 100 \quad (64)$$

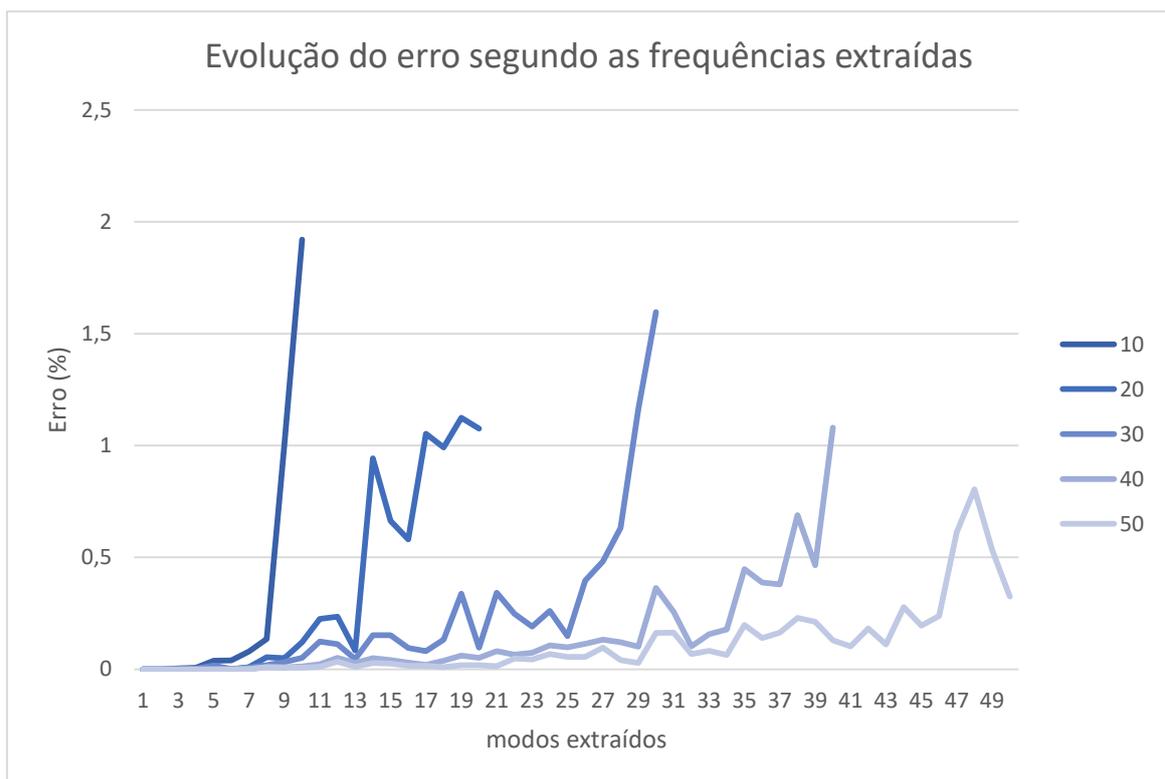


Figura 28 - Erro de cada frequência para 10, 20, 30, 40 e 50 modos extraídos

Ao analisar o gráfico é possível verificar que o erro máximo verificado ( $\approx 2\%$  para 10 modos extraídos) é bastante reduzido, sendo que o aumento do número de valores extraídos no processo de subestruturação resulta numa aproximação gradual dos valores obtidos aos valores reais, principalmente nas frequências mais baixas.

## Modos de Vibração

Ao realizar diferentes análises com um número cada vez maior de modos obtidos, foram escolhidos e processados os mesmos modos em cada uma das análises para que a maneira como vibram pudesse ser comparada ao modelo completo. De seguida encontram-se as representações gráficas dos modos número 10, 20, 30, 40 e 50 do modelo completo e das diferentes análises subestruturais realizadas.

### 10º MODO DE VIBRAÇÃO

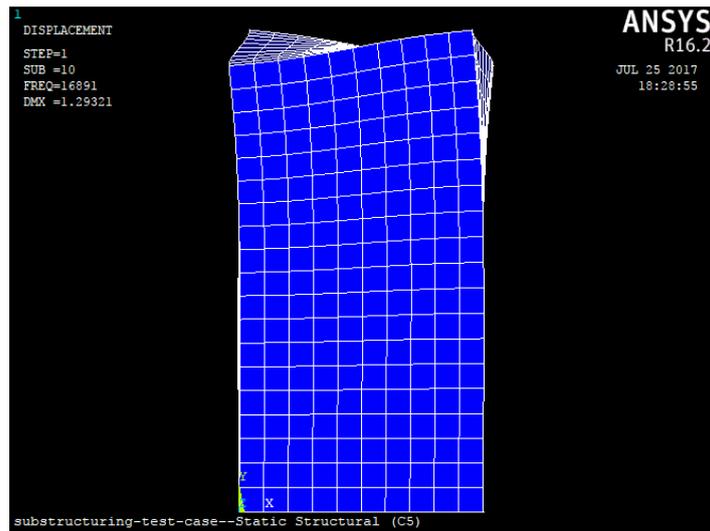


Figura 29 - Representação do 10 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos

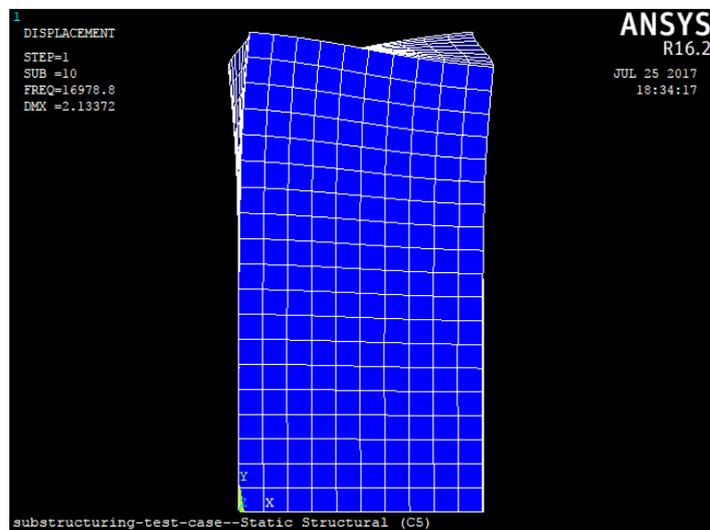


Figura 30 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 10 modos extraídos

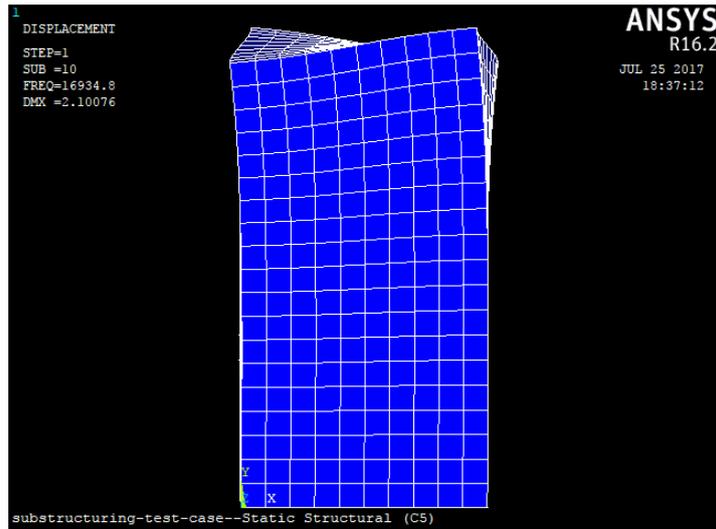


Figura 31- Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 20 modos extraídos

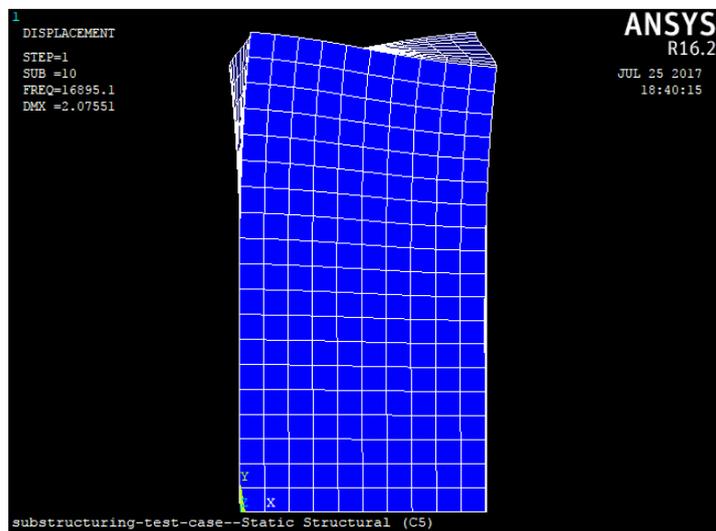


Figura 32 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos

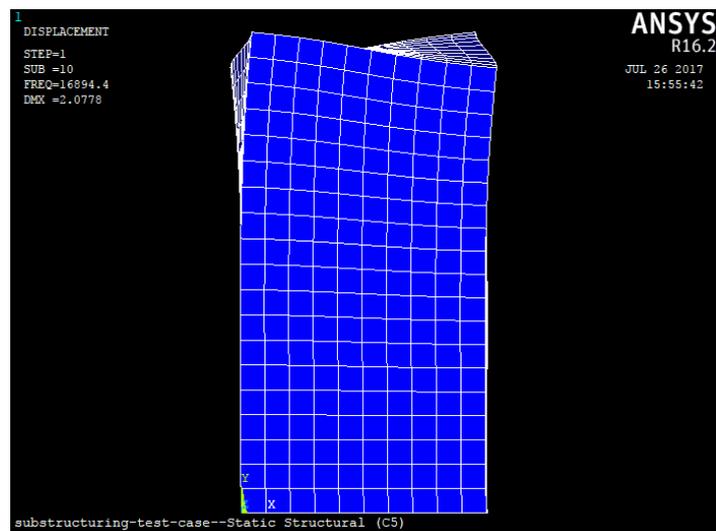


Figura 33 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos

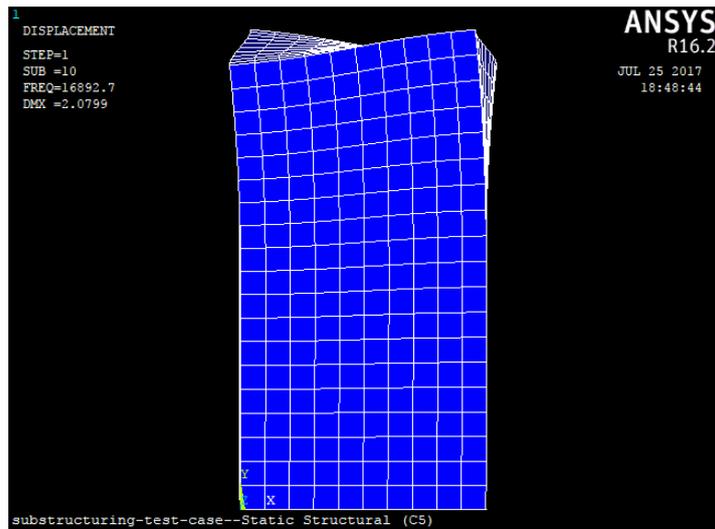


Figura 34 - Representação do 10 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos

### 20º MODO DE VIBRAÇÃO

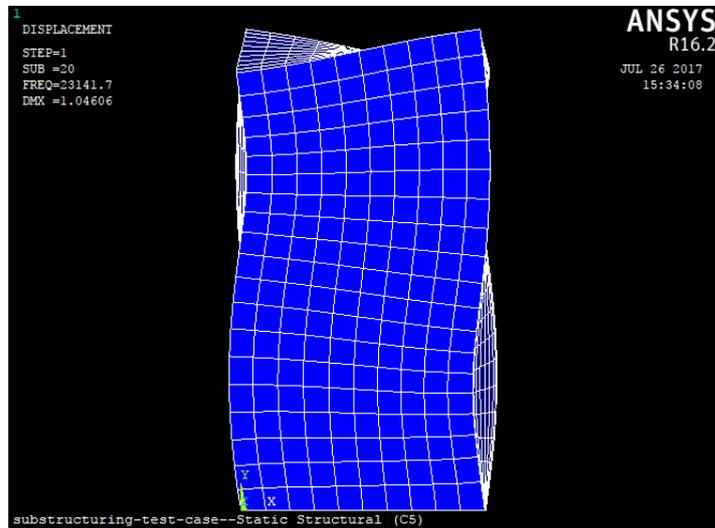


Figura 35 - Representação do 20 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos

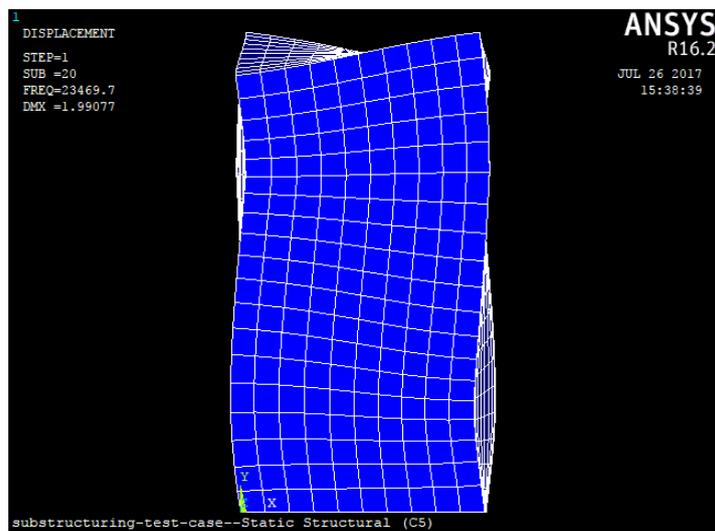


Figura 36 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 20 modos extraídos

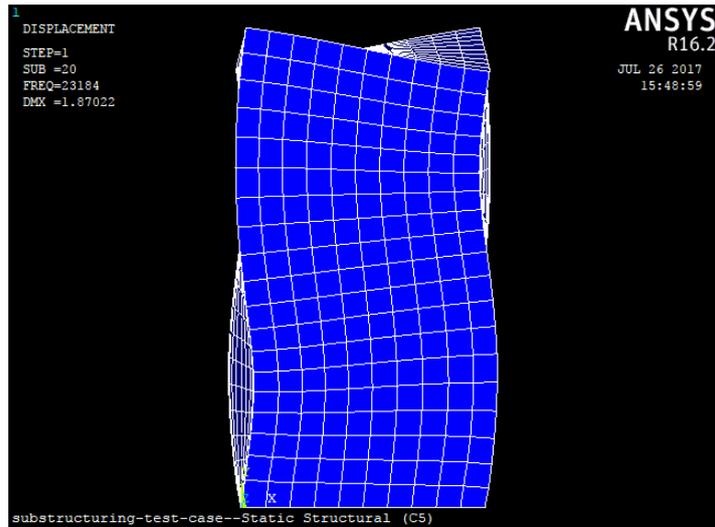


Figura 37- Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos

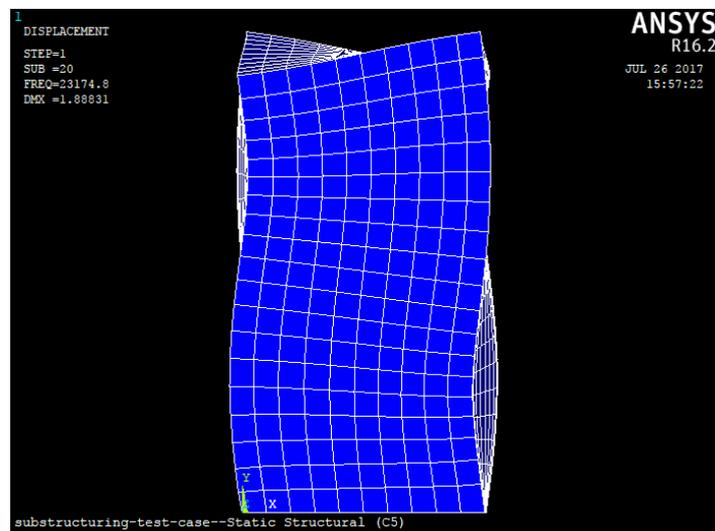


Figura 38 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos

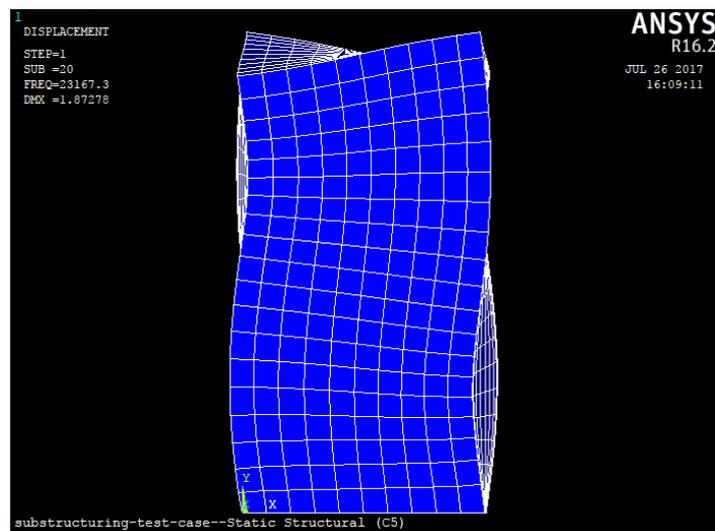


Figura 39 - Representação do 20 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos

### 30º MODO DE VIBRAÇÃO

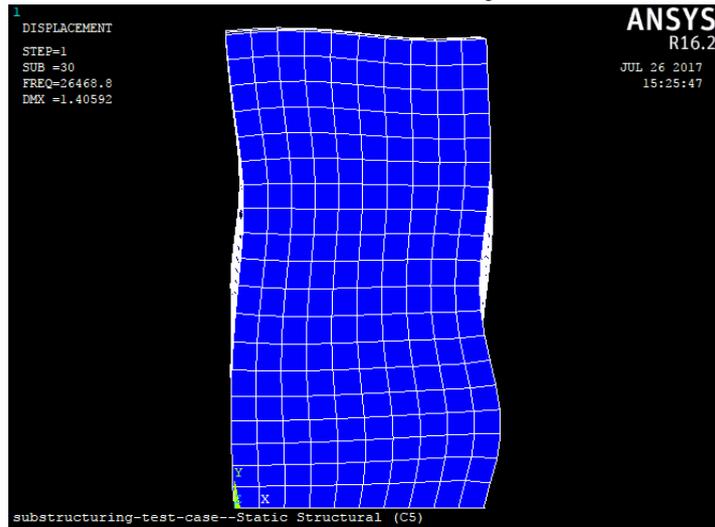


Figura 40 - Representação do 30 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos

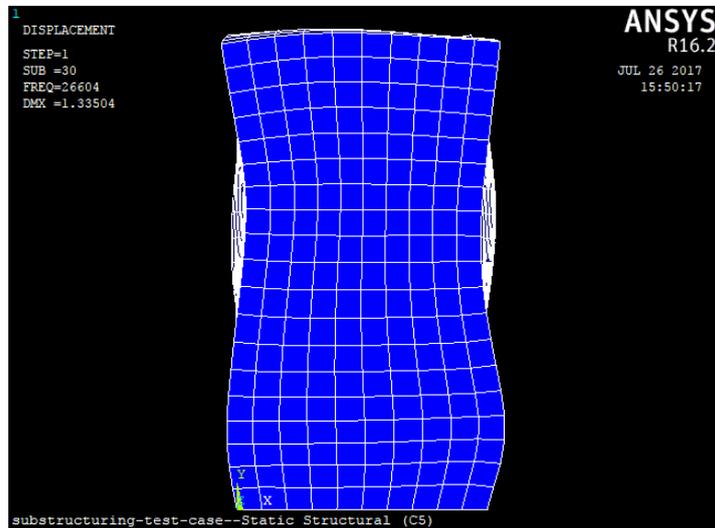


Figura 41 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 30 modos extraídos

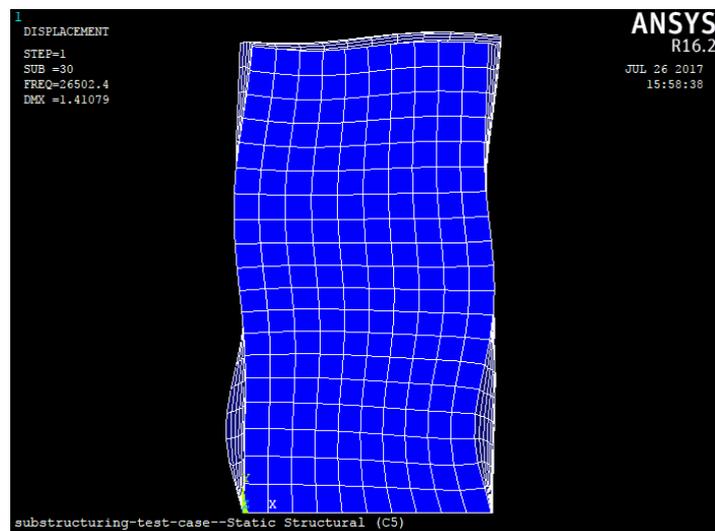


Figura 42 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos

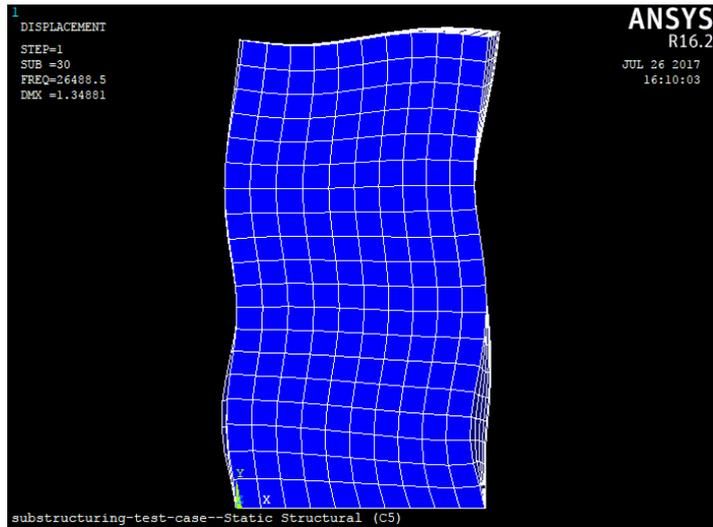


Figura 43 - Representação do 30 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos

### 40º MODO DE VIBRAÇÃO

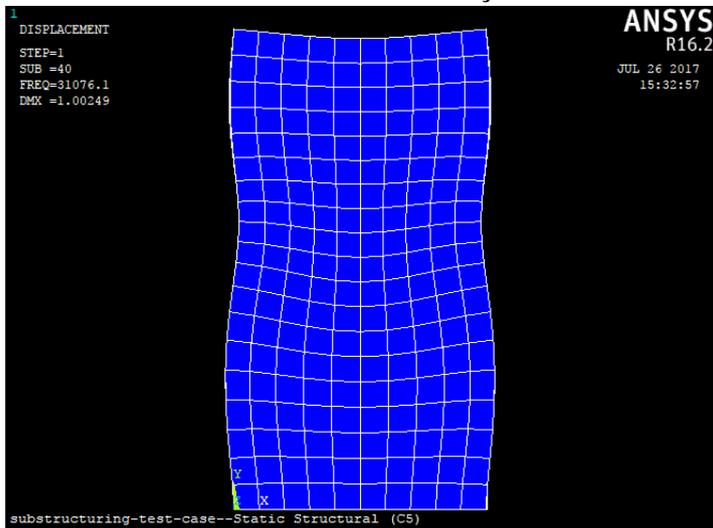


Figura 44 - Representação do 40 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos

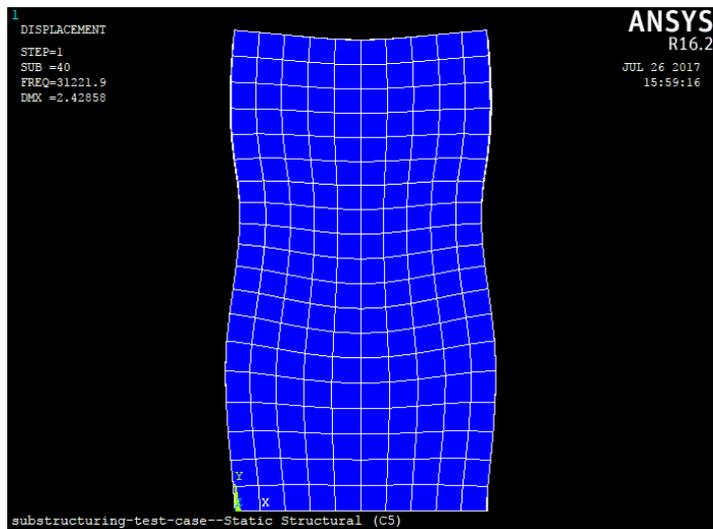


Figura 45 - Representação do 40 modo de vibração do modelo reduzido com 40 modos extraídos

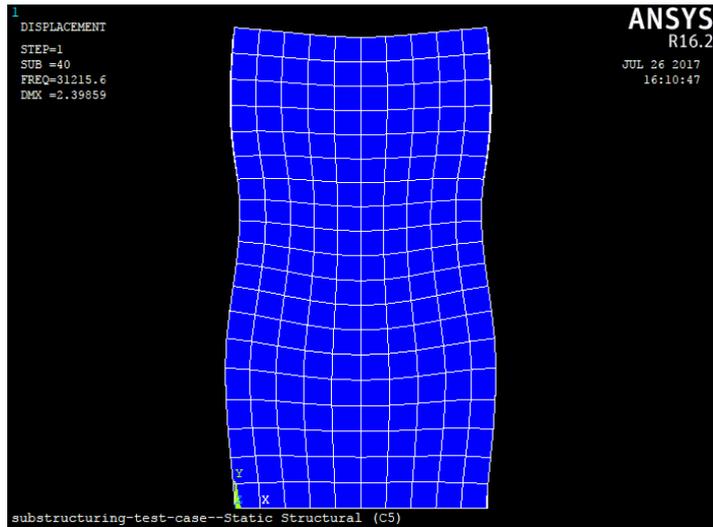


Figura 46 - Representação do 40 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos

### 50º MODO DE VIBRAÇÃO

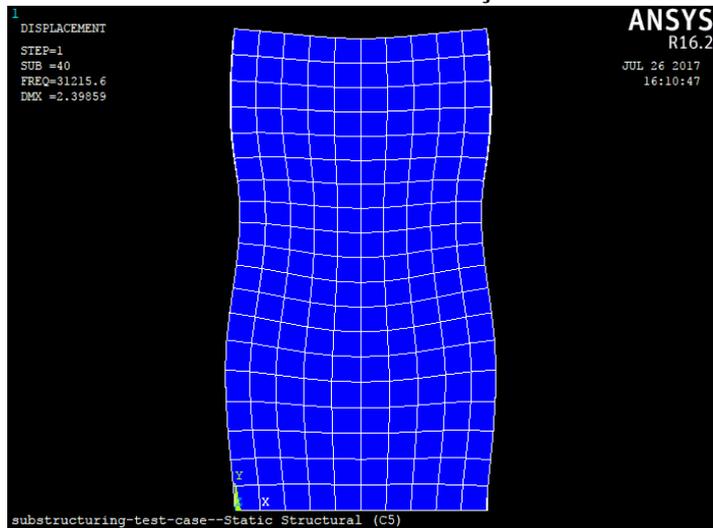


Figura 47 - Representação do 50 modo de vibração do modelo completo com 50 modos extraídos

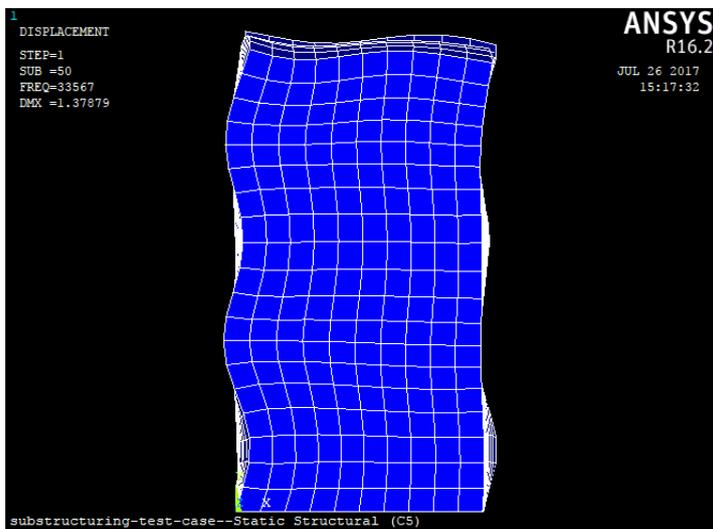


Figura 48 - Representação do 50 modo de vibração do modelo reduzido com 50 modos extraídos

### 3.1.2.2 Validação do Modelo Reduzido – MAC

A validação dos resultados obtidos no modelo reduzido implica o uso de um critério que permita correlacionar os resultados obtidos pelo modelo reduzido com os obtidos pelo modelo completo. O método de comparação mais comum para esse fim é o critério de correlação *Modal Assurance Criterion (MAC)*, definido pela seguinte expressão:

$$MAC(\phi_C, \phi_R) = \frac{|\{\phi_C\}_i^T \{\phi_R\}_j|^2}{(\{\phi_C\}_i^T \{\phi_C\}_j)(\{\phi_R\}_j^T \{\phi_R\}_j)} \quad (65)$$

Onde o vetor modal  $\{\phi_C\}_i$  refere-se ao modo  $i$  do sistema completo, e o vetor modal  $\{\phi_R\}_j$  representa o modo  $j$  do sistema reduzido. O *MAC* é definido por uma constante escalar que relaciona o grau de linearidade entre o vetor modal do modelo reduzido e o vetor modal do modelo completo. Este critério toma valores entre 0 (que representa a ausência de correspondência entre valores) e 1 (correspondendo à correspondência total). Deste modo, se os vetores modais em consideração exibirem um comportamento linear e consistente, o *MAC* tomará valores perto de 1. A seguinte tabela exemplifica a aplicação do *MAC* ao modelo reduzido com 10 modos extraídos:

Tabela 3 - Aplicação do *MAC* aos modos de vibração relativos ao modelo com 10 modos extraídos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,477	0,513	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,513	0,477	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,988

Ao analisar a diagonal da tabela é possível verificar que existem certos valores onde a correspondência entre modos é relativamente fraca (modos 8 e 9). Tal acontece devido ao facto de certos modos do modelo reduzido se assemelharem mais aos modos vizinhos do que ao respetivo modo do modelo completo, i.e., o modo n°8 do modelo reduzido apresenta maior correspondência com o modo n°9 do modelo completo. Tirando este desvio, os restantes modos apresenta correspondência total ou aproximada. Aos restantes modelos reduzidos foi também aplicado o critério, e os valores obtidos referentes à diagonal (onde se concentra a informação relevante ao critério) encontram-se organizados no seguinte gráfico:

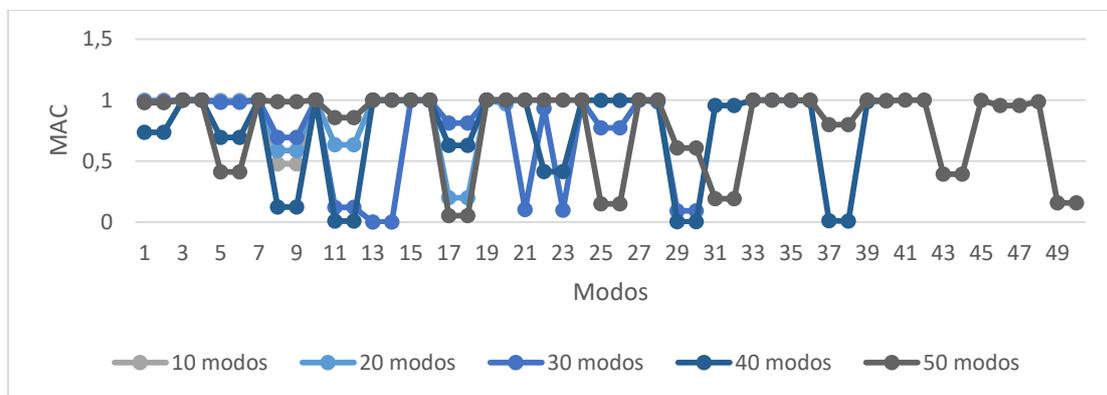


Figura 49 - Valores de correspondência obtidos na aplicação do *MAC* aos resultados obtidos nas várias análises realizadas

A dimensão dos vetores modais usados neste critério depende do número de graus de liberdade considerados principais no sistema reduzido. Como visto anteriormente, a criação do modelo reduzido envolve a nomeação de certas coordenadas como sendo secundárias, desconsiderando os graus de liberdade envolvidos de modo a reduzir o tamanho das matrizes usadas na equação do movimento. Esta redução estende-se à solução obtida, visto que a dimensão dos vetores modais obtidos é igual à dos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração. Tem-se então que o número de soluções obtidas encontra-se limitado pelo número de graus de liberdade envolvidos na análise modal. O modelo em questão possui 7260 graus de liberdade no total, mas após a substituição das partes 2 e 3 por superelementos o modelo reduzido fica com 1815 graus de liberdade, sendo esse o número de soluções que é possível obter com esta configuração do modelo.

### **3.1.2.3 Conclusões**

Ao comparar as frequências naturais dos vários modelos reduzidos e do modelo completo, conclui-se que a semelhança entre as frequências é maior quanto maior for o número de modos extraídos no processo de subestruturação. O mesmo se poderia concluir da visualização dos modos de vibração, contudo, a verificação do erro associado aos modos de vibração não pode ter apenas como base as diferenças visuais e os valores de deformação máxima entre os modelos completo e reduzido. A correta validação dos resultados obtidos no modelo reduzido implica o uso do MAC, permitindo assim correlacionar os resultados obtidos pelo modelo reduzido com os obtidos pelo modelo completo. A aplicação do MAC nas diferentes análises realizadas permite concluir que, tirando caso pontuais onde certos modos dos modelos reduzidos não correspondem totalmente aos respetivos modos do modelo completo, a grande maioria dos modos apresenta uma boa correspondência entre si para qualquer número de modos extraídos.

### **3.1.3 Modificação do Superelemento**

Na ótica da modificação estrutural, uma das vantagens que o método de subestruturação possui em relação a uma análise normal prende-se com o fato de poderem ser realizadas modificações no modelo sem que seja necessário visualizar a sua influência na estrutura total. A análise subestrutural anteriormente descrita teve como premissa a condensação dos componentes irrelevantes não só para reduzir o tempo computacional, mas também para concentrar a atenção na análise do componente não reduzido. Este componente poderia ser sujeito a qualquer tipo de força ou apoio sem que para isso fosse preciso utilizar a estrutura completa.

Na seguinte análise considera-se a possibilidade de, após a obtenção da solução do modelo reduzido, aplicar uma modificação a um elemento reduzido, voltar a reduzir esse componente e refazer o *use pass* para obter uma nova solução sem que seja necessário refazer todo o processo relativo à análise subestrutural. Este processo parte do princípio que já foi realizado o passo 5 e 6 (*use pass* e consequente análise modal) da análise subestrutural e que foi obtida e salva a solução reduzida do modelo.

#### **Novo Generation Pass**

O ficheiro criado anteriormente para condensar a parte 2 é novamente aberto. A modificação é imediatamente feita à geometria. Neste caso foram retirados 40 elementos da parte para abrir um rasgo de uma face a outra, como se pode observar na seguinte figura:

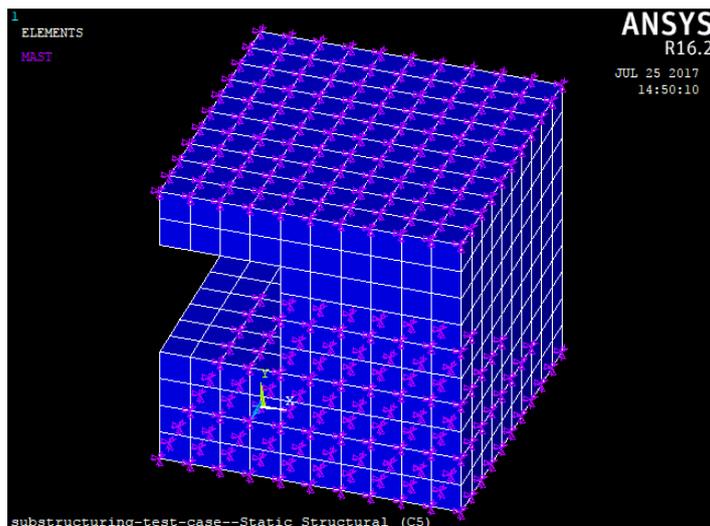


Figura 50 - Rasgo 40x40mm feito na parte 2

Posteriormente é feita uma nova análise subestrutural para gerar o novo superelemento. O processo mantém-se igual; o método CMS de interface livre é aplicado e são extraídas as primeiras 30 frequências. Dado que a alteração imposta não incide sobre as interfaces entre as partes, as entidades f1 e f2 são novamente selecionadas e os graus de liberdade principais mantêm-se.

### Novo Use Pass

Ao abrir o ficheiro utilizado para realizar o *Use pass* inicial é imediatamente possível visualizar a modificação feita no passo anterior. Visto que o novo superelemento criado já se encontra substituído no modelo, procede-se logo à análise modal.

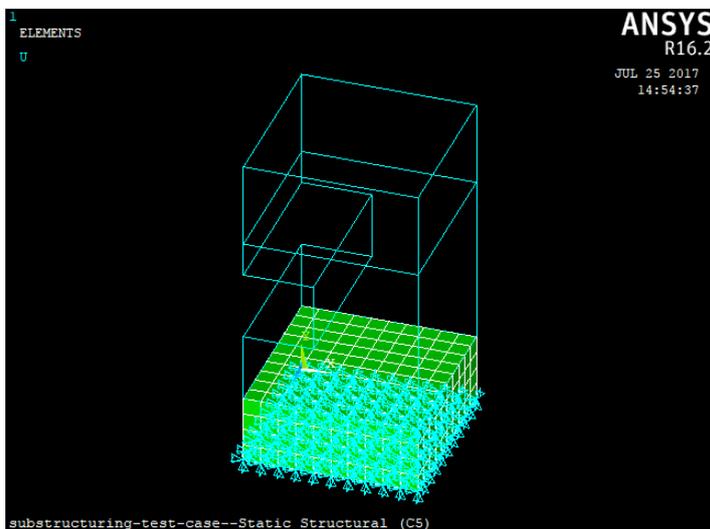


Figura 51 - Modelo reduzido modificado

### Análise Modal

Analogamente à análise anterior, foram extraídas as primeiras 30 frequências naturais.

Tabela 4 - Modos obtidos e respectivas frequências naturais

Modo n°	Frequência (Hz)	Modo n°	Frequência (Hz)
1	1506,6	16	20177
2	1739,8	17	20908
3	3205,9	18	21121
4	4441,1	19	21697
5	6519,6	20	21869
6	7143,2	21	22559
7	9544,2	22	23082
8	11097	23	23144
9	12232	24	23455
10	15684	25	23639
11	17852	26	23824
12	17944	27	25064
13	17990	28	25144
14	18375	29	25951
15	19784	30	26269

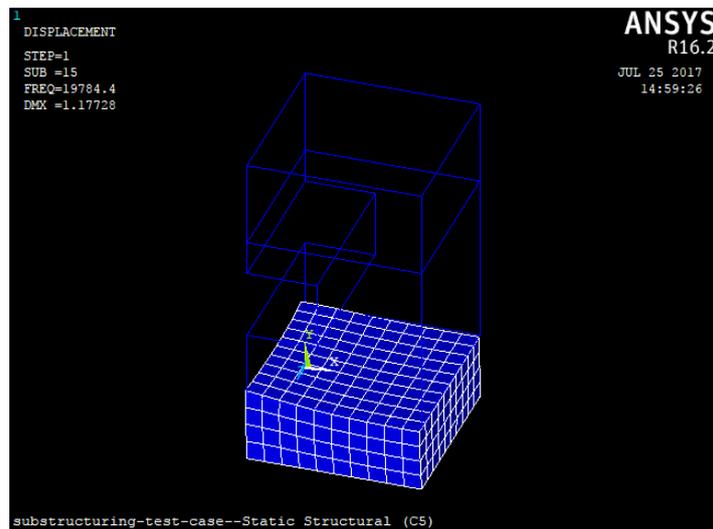


Figura 52 - 15° Modo de vibração do modelo modificado reduzido

## Expansion Pass

Tal como na análise subestrutural anterior, os ficheiros que contêm os superelementos (incluindo o superelemento modificado) são novamente abertos e a solução reduzida obtida no *use pass* volta a ser substituída na matriz fatorizada dos modelos condensados para que a solução completa possa ser calculada.

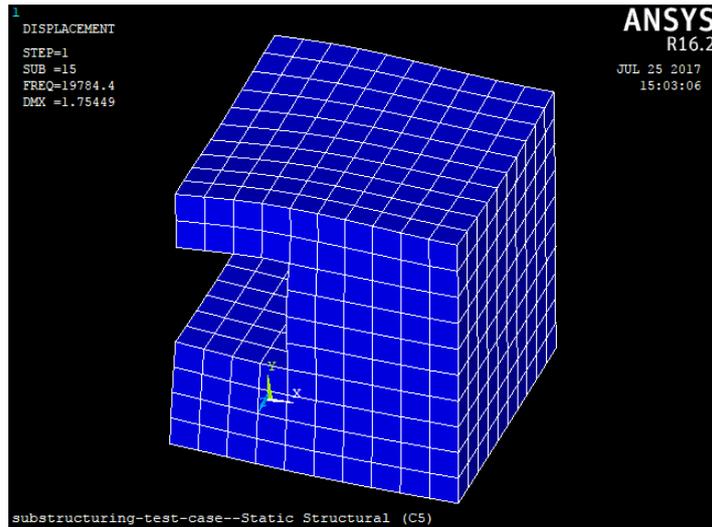


Figura 53 - 15º Modo de vibração da parte 2 modificada

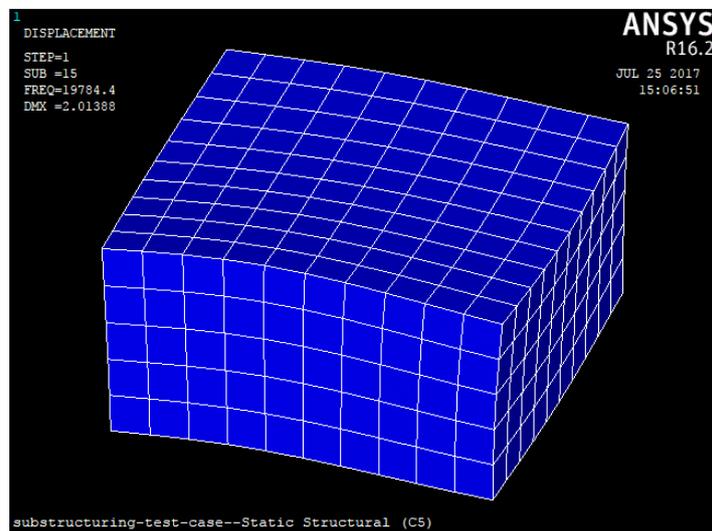
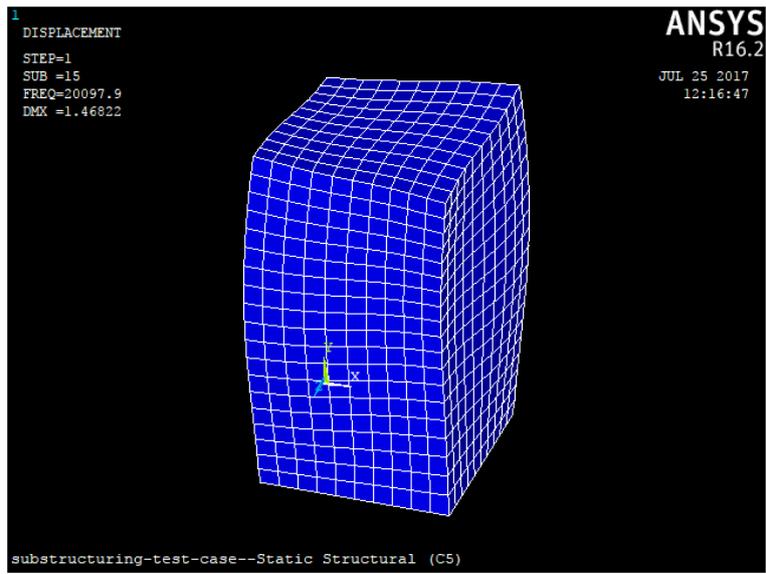


Figura 54 - 15º Modo de vibração da parte 3

## Ficheiro Agregado de Resultados

Como referido anteriormente, o processo que origina o ficheiro agregado de resultados advém da junção dos resultados obtidos no *use pass* e no *generation pass* ao modelo reduzido criado inicialmente. Dado que foi imposta uma modificação a um dos elementos, o ficheiro completo inicial já não representa a nova geometria da peça e portanto não pode ser usado para representar os modos de vibração do novo modelo analisado. Ao analisar a imagem abaixo verifica-se que o modelo relativo à solução agregada não reconhece a modificação imposta ao superelemento:



*Figura 55 - 15º Modo de vibração do modelo agregado*

## 3.2 2º Caso de Estudo

O seguinte estudo de caso irá incidir sobre a análise modal de um banco de ensaio de compressores constituído por 5 componentes. Dado que o foco da análise modal é o corpo principal, irão ser criados super elementos para todas as outras partes constituintes do modelo para criar o sistema reduzido. Apesar de partir do método criado pelo caso anterior, o propósito deste estudo será:

- Ilustrar como se processa a aplicação do método de subestruturação recorrendo ao *software* ANSYS de um conjunto real com uma geometria complexa;
- Verificar a precisão dos modos de vibração e das frequências naturais do modelo reduzido com diferentes configurações de super elementos gerados.

### 3.2.1 Processo

Analogamente ao caso anterior, a realização da análise modal onde são condensados um ou mais componentes da estrutura em análise implica a realização das tarefas segundo seguinte ordem:

1. Criar a geometria
2. Gerar o modelo de elementos finitos
3. Preparar o modelo para a criação das subestruturas
4. Criar os super elementos (*Generation Pass*)
5. Usar os super elementos para criar o modelo reduzido (*Use Pass*)
6. Fazer a análise modal
7. Expandir as soluções nos elementos reduzidos (*Expansion Pass*)
8. Criar o ficheiro agregado de resultados
9. Pós-processar os resultados

### Geometria

A geometria analisada neste estudo foi criada com recurso ao SOLIDWORKS. Este modelo é baseado num banco de ensaios utilizada pela Hanon Systems para a análise de vibrações e do ruído de compressores mecânicos e elétricos. É constituído por uma estrutura principal (parte 1), que alberga duas flanges, uma no exterior (parte 2) e outra no interior (parte 3) da estrutura que que por sua vez suportam dois veios unidos no interior da estrutura (parte 4 e parte 5) como indicado na figura 57:

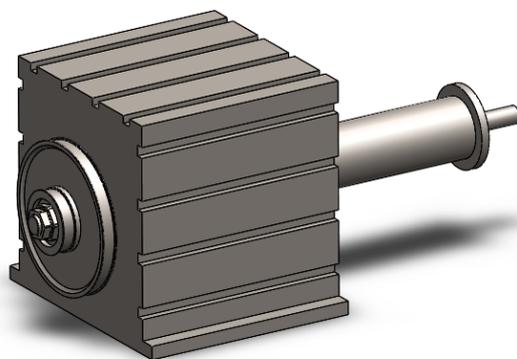


Figura 56 - Vista dimétrica do modelo CAD da bancada de ensaio

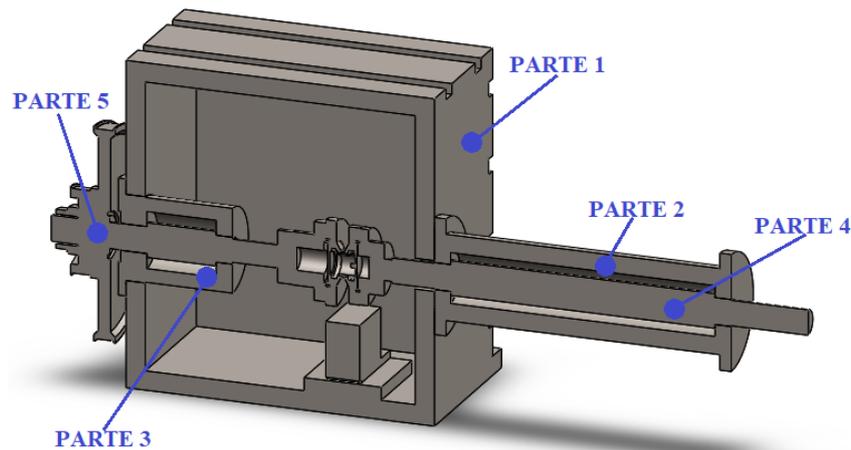


Figura 57 - Vista da secção do modelo CAD do banco de ensaio

Findo o projeto do modelo, este foi guardado em formato *.STEP*, permitindo a sua importação pelo ANSYS *Workbench* para se proceder ao próximo passo.

### Modelo de Elementos Finitos

O modelo de elementos finitos do caso em análise foi gerado com recurso ao ANSYS *Workbench*.

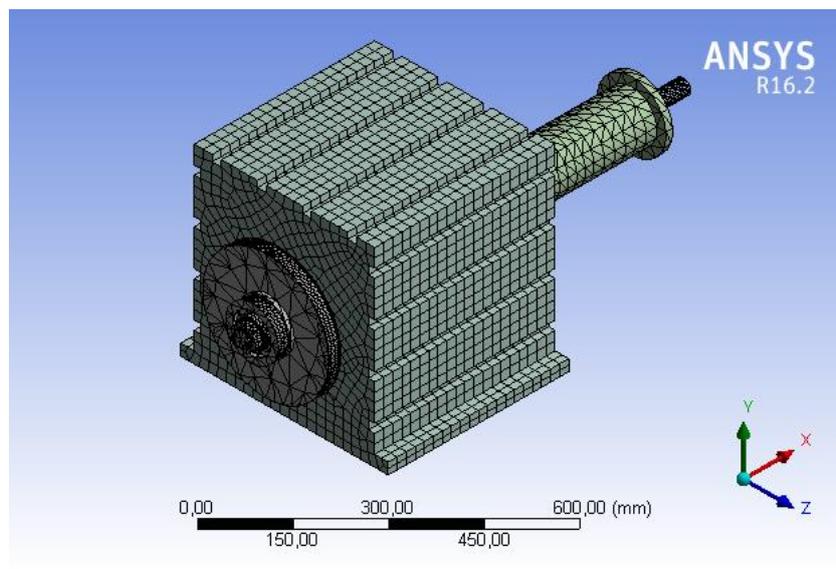


Figura 58 - Modelo de elementos finitos do banco de ensaio gerado no ANSYS *Workbench*

Tabela 5 - Propriedades do aço estrutural usado

Propriedade	Simbologia	valor
Densidade	$\rho$	7850
Módulo de Elasticidade	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3

Na criação do modelo de elementos finitos foram empregues várias ferramentas de malhagem disponíveis no *Workbench* (*method, sizing, face meshing*) de modo a atacar a complexidade da geometria em questão. Apesar da qualidade geral da malha gerada, verificou-se que o uso de

elementos relativamente grandes resulta em distorções na linearidade da malha no interior dos componentes. Contudo, estas interrupções não se revelam prejudiciais para a geração e consequente análise do modelo em questão. O modelo de elementos finitos gerado possui 237 696 graus de liberdade e encontra-se fixo pela base da parte 1.

Tal como no caso anterior, foi necessária a seleção e nomeação de entidades relevantes ao método de subestruturas a aplicar posteriormente. Contudo, a complexidade das partes constituintes deste modelo torna difícil a identificação e seleção das interfaces relevantes. Para verificar as interfaces reconhecidas pelo *Workbench* foi selecionada a opção *connections>contacts* na *Tree Outline* da interface gráfica. Destas interfaces e das partes constituintes foram criadas entidades com a ferramenta *Named Selections* (ver anexo V para a lista completa de entidades nomeadas).

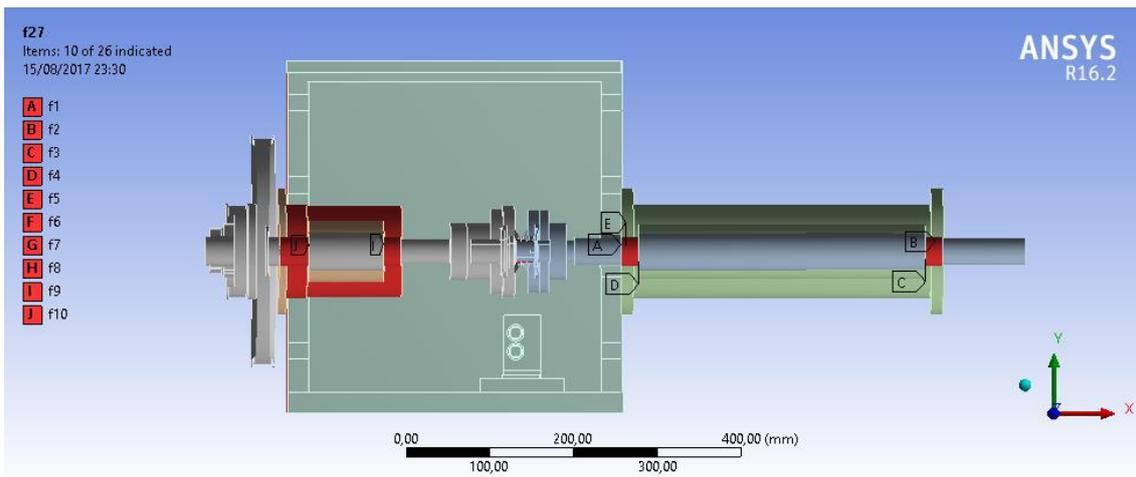


Figura 59 - Entidades nomeadas no ANSYS Workbench

## Preparação do Modelo

É criado um diretório específico para a análise a realizar. O modelo de elementos finitos gerado no *Workbench* é importado para o *Mechanical APDL*, onde é guardado com o nome “reduzido”.

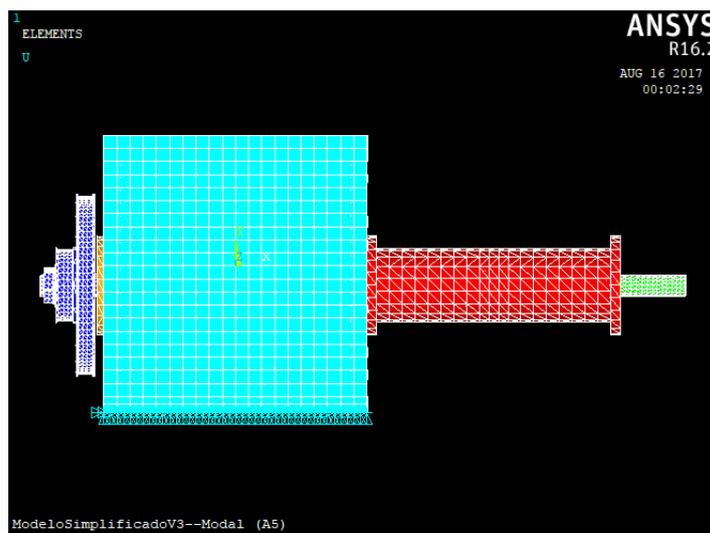


Figura 60 - Modelo importado para o ANSYS Mechanical APDL

## Generation Pass

Neste passo são condensados grupos de elementos finitos comuns para dar lugar a um único superelemento. Recorre-se ao método CMS de interface livre para criar as matrizes de massa e rigidez do componente e para extrair as primeiras 20 frequências. De seguida são seleccionadas as entidades criadas no passo a fim de definir os graus de liberdade principais. Estas entidades associam o componente que se quer reduzir às restantes partes constituintes do conjunto. Este processo foi repetido mais 3 vezes, gerando os superelementos “corpo2”, “corpo3”, “corpo4” e “corpo5”. Após a geração do superelemento, os graus de liberdade principais relativos às entidades aparecem realçados a roxo, como é possível verificar nas imagens abaixo relativas aos superelementos criados:

## Resultados

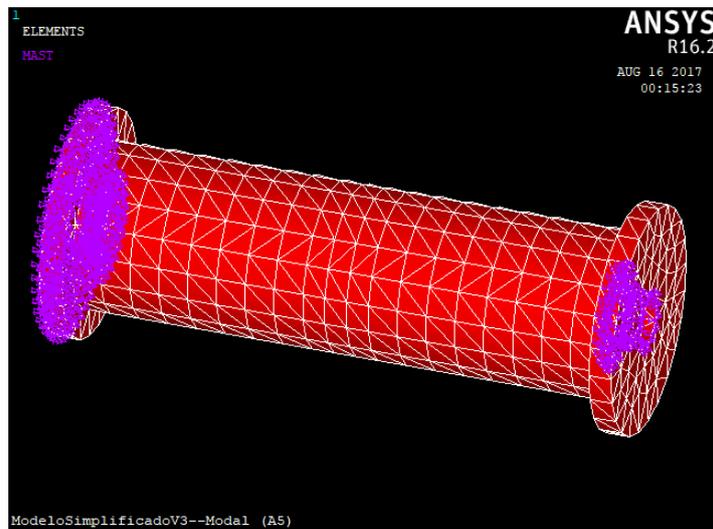


Figura 61 - Superelemento da parte 2

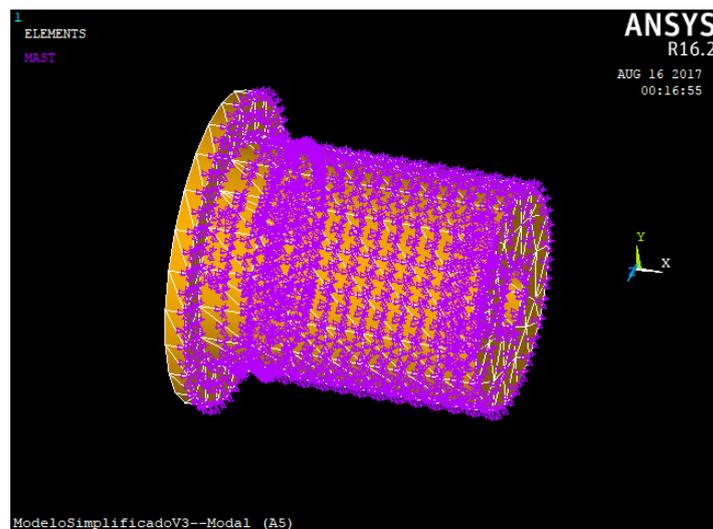


Figura 62 - Superelemento da parte 3

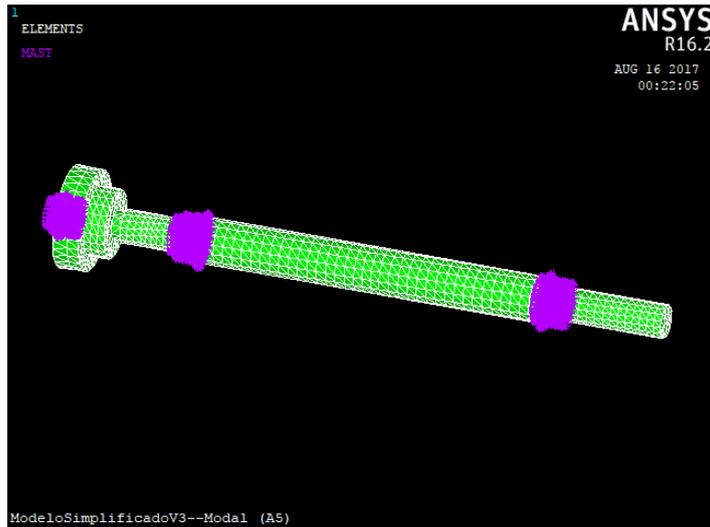


Figura 63 - Superelemento da parte 4

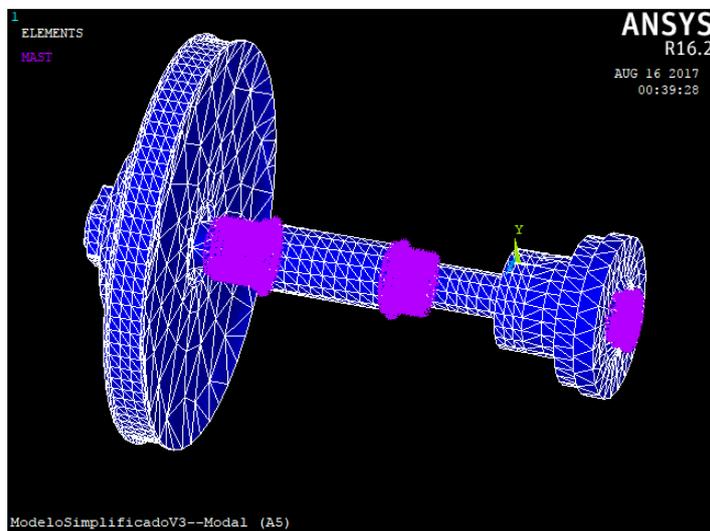


Figura 64 - Superelemento da parte 5

### Use Pass

Nesta fase os corpos flexíveis são substituídos pelos superelementos correspondentes. Para substituir os elementos comuns pelos respectivos superelementos, procede-se à seleção das matrizes de massa e rigidez criadas no passo anterior. Estas matrizes são lidas e os elementos contidos nos componentes reduzidos são substituídos pelo elemento MATRIX50 próprio para o efeito.

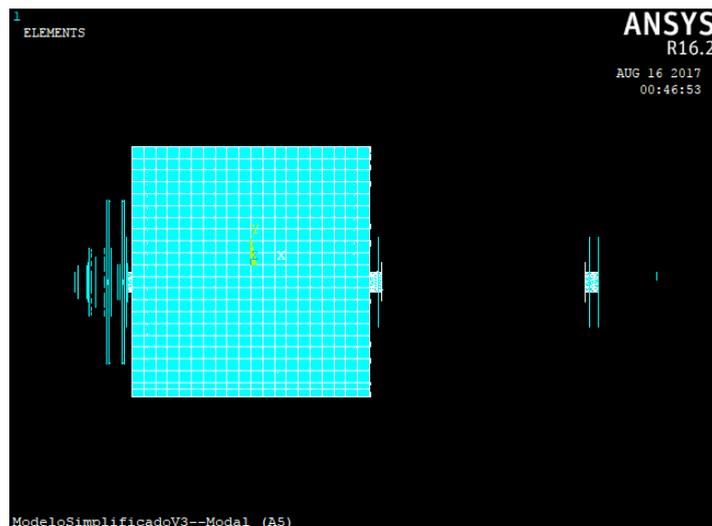


Figura 65 - Modelo reduzido

## Análise Modal

Substituídos os componentes e definido o sistema reduzido, a análise modal processa-se de maneira normal. Para o caso em estudo foi apenas definido que o número de frequências naturais a obter seria 20.

Tabela 6 - Modos extraídos e respectivas frequências

Modo n°	Frequência (Hz)	Modo n°	Frequência (Hz)
1	267,52	11	908,16
2	268,84	12	975,61
3	365,22	13	1006,7
4	442,93	14	1132,9
5	444,99	15	1153,3
6	590,07	16	1298,6
7	705,68	17	1389,9
8	723,9	18	1402,3
9	815,37	19	1416,6
10	907,22	20	1439,9

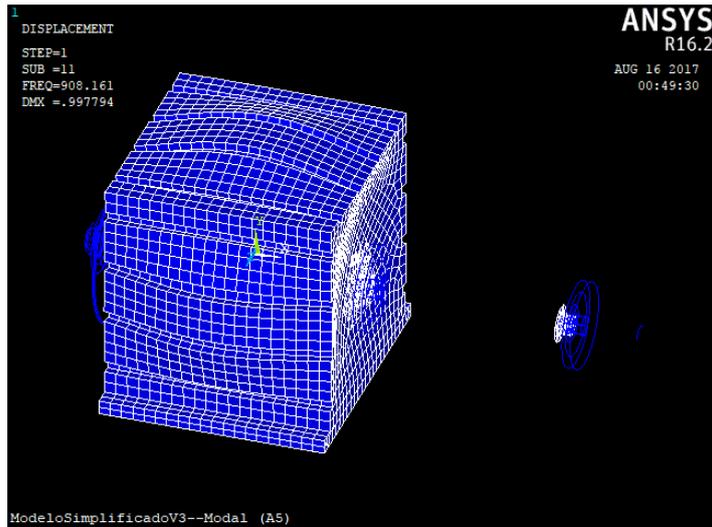


Figura 66 - 11º Modo de vibração do modelo reduzido

## Expansion Pass

A solução obtida para os graus de liberdade principais no passo anterior é aplicada ao cálculo dos resultados relativos ao superelemento em todos os seus graus de liberdade. O ficheiro que contém o superelemento é novamente aberto e a solução reduzida obtida no *use pass* é expandida na matriz fatorizada do modelo condensado para que a solução completa possa ser calculada.

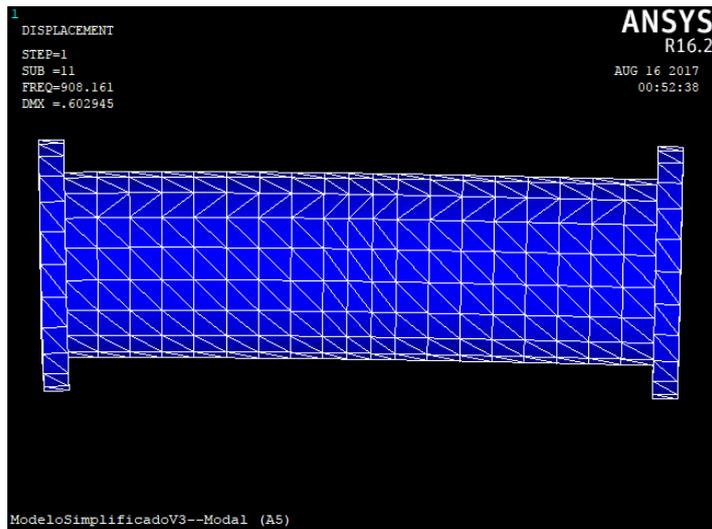


Figura 67 - 11º Modo de vibração da parte 2

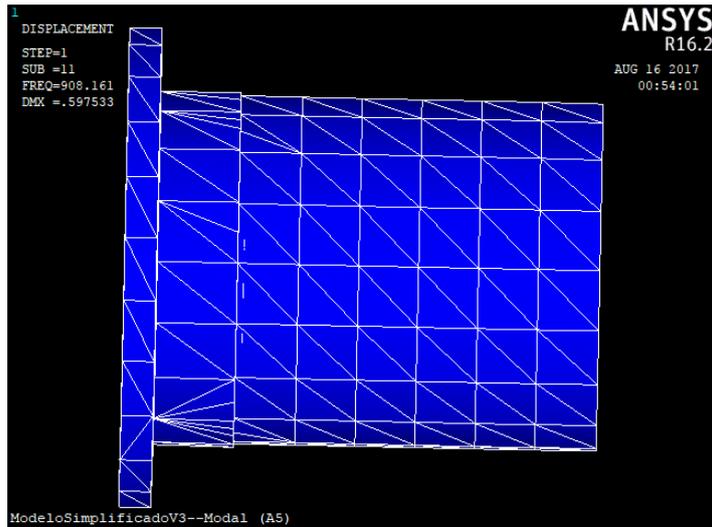


Figura 68 - 11º Modo de vibração da parte 3

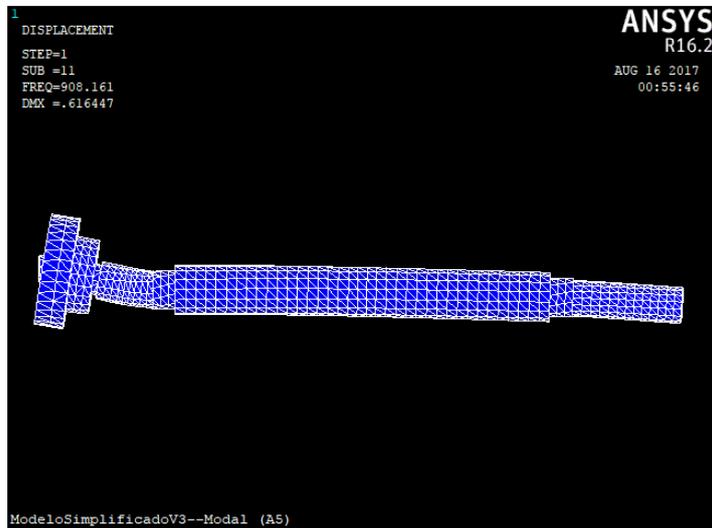


Figura 69 - 11º Modo de vibração da parte 4

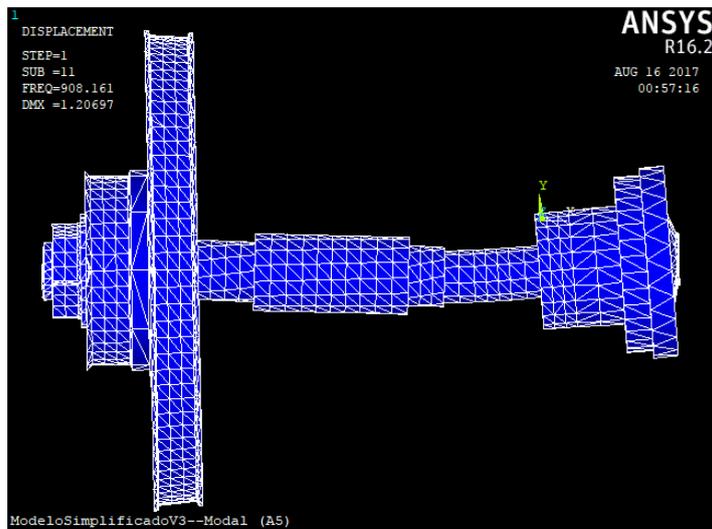


Figura 70 - 11º Modo de vibração da parte 5

## Ficheiro Agregado de Resultados

O ficheiro “reduzido” criado no passo 3 é reaberto e são acrescentados um a um os resultados obtidos no *use pass* e em cada *expansion pass* a fim de criar um ficheiro de resultados com a informação relativa a todos os graus de liberdade do modelo completo.

## Pós Processamento

Agora que os dados foram agregados no ficheiro completo é possível visualizar os modos de vibração da estrutura na sua totalidade.

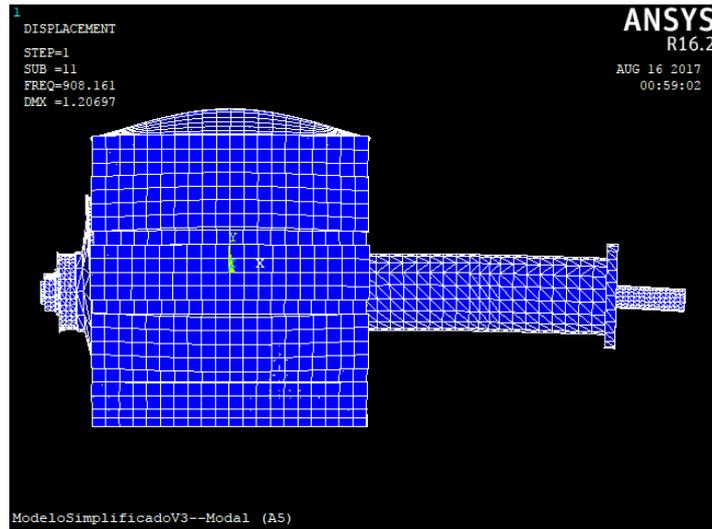


Figura 71 - 11º Modo de vibração do modelo agregado (vista 1)

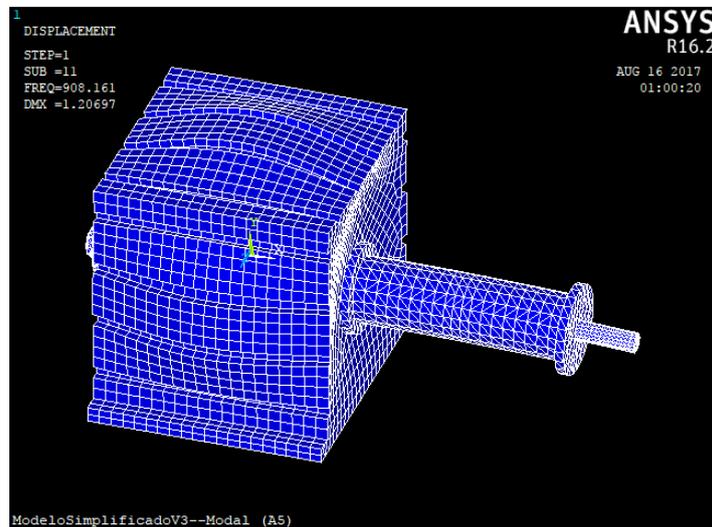


Figura 72 - 11º Modo de vibração do modelo agregado (vista 2)

## **3.2.2 Resultados e Discussão**

### **3.2.2.1 Comparação com o Modelo Completo**

No início deste caso de estudo real partiu-se do pressuposto que o foco da análise modal realizada seria a estrutura principal, e.i., a parte 1, sendo que os restantes componentes seriam transformados em superelementos. A análise do modelo reduzido permite assim poupar tempo computacional relativo à análise de partes tomadas como irrelevantes ou acabadas. Contudo, a criação de superelementos é um processo moroso e até mesmo desnecessário quando a análise a efetuar ao componente não reduzido é exígua.

Várias análises foram realizadas com o intuito de relacionar o número e a natureza dos superelementos presentes no modelo reduzido com a precisão das frequências obtidas nas análises modais realizadas

#### **Variação do Número de Superelementos Criados**

Foram feitos vários ensaios com diferentes configurações para aferir a influência do número de elementos presentes na precisão dos resultados obtidos. As seguintes configurações foram:

- com 1 superelemento
  - parte 2
  - parte 3
  - parte 4
  - parte 5
- com 2 superelementos
  - parte 2 e parte 4
  - parte 3 e parte 5
- com 3 superelementos
  - parte 2, parte 4 e parte 5
  - parte 3, parte 4 e parte 5
- com 4 superelementos
  - parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5

De notar que, na redução de 2 e de 3 elementos, apenas foram simuladas as configurações lógicas tendo em conta as peças em análise (ex. cada um dos veios com a flange que o suporta) e não todas as configurações possíveis.

As frequências obtidas em todos os ensaios foram organizadas para ser possível projetar o seguinte gráfico que relaciona o erro inerente a cada modo de vibração para vários números de superelementos criados.

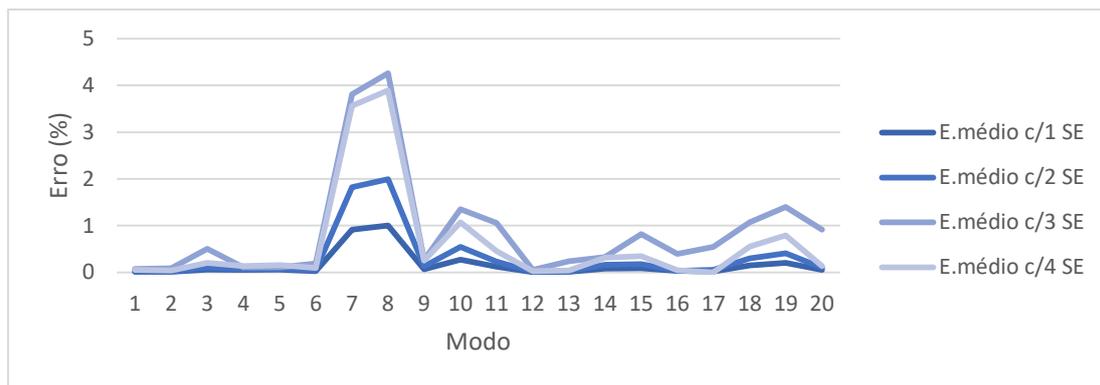


Figura 73 - Erro de cada frequência para análises com 1, 2, 3 e 4 super elementos gerados

### 3.2.2.2 Validação do Modelo Reduzido - MAC

À semelhança do 1º caso de estudo, o *Modal Assurance Criterion* é aplicado de modo a poder validar os resultados obtidos. Das várias análises modais feitas a este modelo foram obtidas tabelas (ver anexo IV) e os dados relevantes foram organizados no seguinte gráfico:

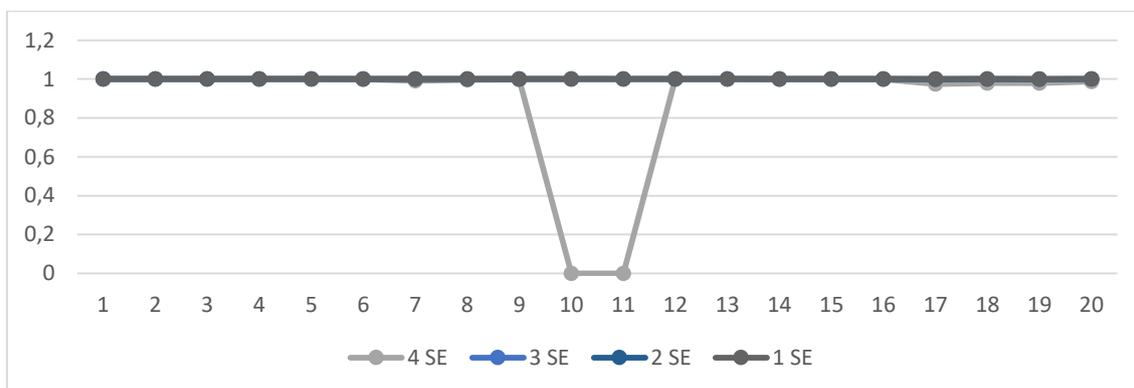


Figura 74 - Valores de correspondência obtidos na aplicação do MAC aos resultados obtidos nas várias análises realizadas

### 3.2.2.3 Conclusão

No gráfico da figura 73 é possível verificar que o erro médio em relação à frequência obtida para cada modo tende a aumentar com o aumento da quantidade de super elementos criados. Dado que a quantidade de graus de liberdade condensados é maior, o comportamento dinâmico da estrutura nos seus graus de liberdade secundários é uma aproximação sujeita a erros que, como foi possível concluir no caso de estudo anterior, podem ser mitigados com o aumento do número de modos a extrair no método de subestruturação. Neste caso em específico, as várias análises realizadas produziram valores com erros relativamente baixos, sendo que o maior desvio se verifica nos modos 7 e 8 (aproximadamente 4%). Os valores obtidos com o uso do MAC também se revelaram bastante satisfatórios, havendo correspondência total em praticamente todos os modos, excetuando os modos de vibração nº10 e nº11 do modelo com 4 super elementos gerados. Tal se deve ao facto do 10º modo do modelo reduzido corresponder ao 11º modo do modelo completo, e vice-versa.



## 4. Conclusão Final e Trabalhos Futuros

Na presente dissertação verificou-se ser possível analisar as características modais da bancada de ensaio ao selecionar certas partes e condensar os seus graus de liberdade para reduzir o tempo e esforço computacional intrínseco a análises do género. Ambos os estudos de caso realizados permitiram concluir que um método de subestruturação é viável quando parametrizada de maneira adequada aos resultados que se pretende obter. Podem ser feitos os seguintes reparos acerca dos processos implementados e dos resultados obtidos:

Quando o número de superelementos se mantém constante, a precisão das frequências naturais e dos modos de vibração está diretamente relacionada com o número de modos extraídos pelo método CMS. O aumento do número de modos faz com que os valores das frequências do modelo reduzido se assemelhem cada vez mais às do modelo completo, começando nos modos mais baixos. Visualmente, esta tendência aparenta verificar-se também em relação aos modos de vibração. Contudo, após a aplicação do MAC às diferentes análises realizadas, conclui-se que o número de modos de vibração em que existe perfeita correspondência não aumenta com o aumento do número de modos extraídos, mas mantém-se maioritário em relação ao número total de modos presentes na análise.

O método de subestruturação no ANSYS permite a modificação de superelementos e a execução de uma nova análise modal mas, apesar dos valores de frequência serem obtidos, o processo de subestruturação delineado pelo ANSYS não permite a visualização dos novos modos de vibração. Conclui-se que, apesar de serem conceptualmente semelhantes, a modificação estrutural e o método de subestruturação são processos diferentes. Caso haja a necessidade de uma modificação em algum componente do modelo, esta tem de ser executada no ficheiro inicial relativo ao modelo inteiro ou num componente não reduzido.

Se o grau de complexidade do modelo a analisar for considerável, este deve ser previamente preparado no Workbench antes de ser importado para o *Mechanical APDL*. Esta preparação permitirá não só nomear e categorizar as geometrias relativas às interfaces onde se encontram os graus de liberdade principais mas também aplicar cargas e definir apoios, entre outros.

O aumento do número de superelementos gerados supõe a redução de uma maior quantidade de graus de liberdade para aplicar o método de subestruturação, que por sua vez produz resultados com uma pequena percentagem de erro em relação ao modelo completo. A omissão das coordenadas secundárias nas matrizes que caracterizam o modelo irá reduzir a sua contribuição para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração, daí se considerar que, quanto maior a redução efetuada no modelo, maior será erro associado aos resultados obtidos. No 2º caso de estudo, as frequências naturais obtidas foram bastante semelhantes às do modelo completo, verificando-se um erro máximo de 4%. A aplicação do MAC pôde revelar que esse erro não se traduziu nos modos de vibração obtidos nas várias análises efetuadas, sendo que houve correspondência total em praticamente todos os modos obtidos.

O método de subestruturação é empregue de forma correta quando pretende analisar e, se necessário, modificar certos componentes de uma estrutura, considerando os restantes como acabados e reduzindo-os a superelementos. Sendo esta também uma análise modal, é importante conhecer (ou estimar) *A priori* qual a gama de frequências ou modos que se pretende analisar e extrair o número de modos conforme o grau de precisão requerido.



## Referências Bibliográficas

- [1] J. M. B. Cardoso, P. G. Coelho, "Apontamentos de Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica", Faculdade de Ciências e Tecnologia (DEMI-FCT) – Universidade Nova de Lisboa
- [2] D. de Klerk, D. J. Rixen, S. N. Voormeeren, "General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques", *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 5, May 2008, pp. 1169-1170.
- [3] H. A. Schwarz, "Gesammelte Mathematische Abhandlungen", Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1890, pp. 133-143.
- [4] W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations Probleme der Mathematischen Physik", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 135, 1909, pp. 1–61.
- [5] W. C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, 1965, pp. 678–685.
- [6] W. C. Hurty, "Vibrations of Structural Systems by Component Mode Synthesis", *Journal of Engineering Mechanics/American Society of Civil Engineers*, Vol. 86, No. 4, 1960, pp. 51–69.
- [7] G. Gladwell, "Branch Mode Analysis of Vibrating Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, No. 1, 1964, pp. 41–59.
- [8] R. Craig, M. Bampton, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313–1319.
- [9] S. Rubin, "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 8, 1975, pp. 995–1006.
- [10] R. MacNeal, "Hybrid Method of Component Mode Synthesis", *Computers and Structures*, Vol. 1, No. 4, 1971, pp. 581–601.
- [11] A. Klosterman, "On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics", Ph.D. Thesis, Univ. of Cincinnati, Dept. of Mechanical Engineering, Cincinnati, OH, 1971.
- [12] R. Craig, A. Hale, "Review of Time-Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 2, No. 2, 1987, pp. 59–72.
- [13] P. Avitabile, "Twenty Years of Structural Dynamic Modification: A Review", *Sound and Vibration*, Jan. 2003, pp. 14–25.
- [14] D'Ambrogio, W., and Sestieri, A., "Unified Approach to Substructuring and Structural Modification Problems", *Shock and Vibration*, Vol. 11, No. 3, Aug. 2004, pp. 295–309.

- [15] D. J. Ewins, “*Modal Testing: Theory, Practice, and Application*”, Research Studies Press 2nd Edition LTD, 2000.
- [16] N. Maia, J. Silva, J. He, N. Lieven, R. Lin, G. Skingle, W. To, A. Urgueira, “*Theoretical and Experimental Modal Analysis*”, Mechanical Engineering Series, Research Studies Press Limited, 1997.
- [17] P. Seshu, “*Substructuring and Component Mode Synthesis*”, Shock and Vibration, Vol. 4, No. 3, 1997, pp. 199-210.
- [18] R. Craig, C. Chang, “*Free-Interface Methods of Substructures Coupling for Dynamic Analysis*”, AIAA Journal, Vol. 14, No. 11, 1976, pp. 1633–1635.
- [19] S. Vizzini, “*CMS Methods in Complete NVH Analysis*”, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology

# Anexos

## Anexo I Resultados obtidos nas análises feitas no 1º Estudo de Caso

### Análise com extração de 10 modos

Modo	Mod. Completo Frequência (Hz)	Mod. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	1506,6	1937,9	0
2	1739,8	1937,9	0
3	3205,9	3834,2	0
4	4441	6729	0,029731
5	6518,5	7150	0,025181
6	7143,1	7152	0,05316
7	9543,5	11524	0,104239
8	11095	15099	1,635703
9	12228	15109	1,703016
10	15676	16979	0,520988

### Análise com extração de 20 modos

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	1937,9	1937,9	0	11	18560	18613	0,28556
2	1937,9	1937,9	0	12	18560	18613	0,28556
3	3834,2	3834,2	0	13	19198	19238	0,208355
4	6727	6727,2	0,002973	14	19212	19278	0,343535
5	7148,2	7148,3	0,001399	15	20096	20173	0,383161
6	7148,2	7148,3	0,001399	16	20442	20490	0,234811
7	11512	11519	0,060806	17	21578	21701	0,570025
8	14856	14863	0,047119	18	21578	21701	0,570025
9	14856	14863	0,047119	19	22176	22192	0,07215
10	16891	16935	0,260494	20	23142	23470	1,417336

### Análise com extração de 30 modos

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	1937,9	1937,9	0	16	20442	20473	0,151649
2	1937,9	1937,9	0	17	21578	21581	0,013903
3	3834,2	3834,2	0	18	21578	21582	0,018537
4	6727	6727,1	0,001487	19	22176	22190	0,063131
5	7148,2	7148,3	0,001399	20	23142	23184	0,181488
6	7148,2	7148,3	0,001399	21	23383	23440	0,243767
7	11512	11512	0	22	23387	23458	0,303587
8	14856	14862	0,040388	23	23387	23502	0,491726
9	14856	14862	0,040388	24	24498	24617	0,485754
10	16891	16895	0,023681	25	25161	25395	0,930011
11	18560	18594	0,18319	26	25161	25395	0,930011
12	18560	18595	0,188578	27	25544	25616	0,281867
13	19198	19219	0,109386	28	26235	26381	0,556508
14	19212	19234	0,114512	29	26469	26596	0,479807
15	20096	20098	0,009952	30	26469	26604	0,510031

### Análise com extração de 40 modos

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	1937,9	1937,9	0	21	23383	23390	0,029936
2	1937,9	1937,9	0	22	23387	23395	0,034207
3	3834,2	3834,2	0	23	23387	23412	0,106897
4	6727	6727	0	24	24498	24517	0,077557
5	7148,2	7148,3	0,001399	25	25161	25221	0,238464
6	7148,2	7148,3	0,001399	26	25161	25223	0,246413
7	11512	11512	0	27	25544	25615	0,277952
8	14856	14859	0,020194	28	26235	26241	0,02287
9	14856	14859	0,020194	29	26469	26497	0,105784
10	16891	16894	0,017761	30	26469	26502	0,124674
11	18560	18572	0,064655	31	26612	26664	0,195401
12	18560	18572	0,064655	32	26612	26666	0,202916
13	19198	19203	0,026044	33	26925	26968	0,159703
14	19212	19219	0,036436	34	27151	27188	0,136275
15	20096	20097	0,004976	35	27156	27263	0,39402
16	20442	20448	0,029351	36	28149	28221	0,255782
17	21578	21579	0,004634	37	29262	29342	0,273392
18	21578	21579	0,004634	38	29262	29470	0,710819
19	22176	22177	0,004509	39	30042	30338	0,985287
20	23142	23175	0,142598	40	31076	31222	0,469816

### Análise com extração de 50 modos

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	1937,9	1937,9	0	26	25161	25195	0,13513
2	1937,9	1937,9	0	27	25544	25584	0,156593
3	3834,2	3834,2	0	28	26235	26240	0,019059
4	6727	6727	0	29	26469	26488	0,071782
5	7148,2	7148,3	0,001399	30	26469	26488	0,071782
6	7148,2	7148,3	0,001399	31	26612	26637	0,093943
7	11512	11512	0	32	26612	26637	0,093943
8	14856	14858	0,013463	33	26925	26957	0,118849
9	14856	14858	0,013463	34	27151	27188	0,136275
10	16891	16893	0,011841	35	27156	27203	0,173074
11	18560	18566	0,032328	36	28149	28179	0,106576
12	18560	18566	0,032328	37	29262	29305	0,146948
13	19198	19203	0,026044	38	29262	29305	0,146948
14	19212	19218	0,03123	39	30042	30135	0,309567
15	20096	20097	0,004976	40	31076	31216	0,450508
16	20442	20445	0,014676	41	31428	31457	0,092274
17	21578	21579	0,004634	42	31967	32015	0,150155
18	21578	21579	0,004634	43	32158	32199	0,127495
19	22176	22177	0,004509	44	32158	32199	0,127495
20	23142	23167	0,108029	45	32243	32311	0,210898
21	23383	23387	0,017106	46	32405	32420	0,046289
22	23387	23393	0,025655	47	32405	32420	0,046289
23	23387	23393	0,025655	48	33248	33469	0,664702
24	24498	24517	0,077557	49	33567	33788	0,658385
25	25161	25195	0,13513	50	33567	33788	0,658385

## Anexo II Resultados obtidos nas análises feitas no 2º Estudo de Caso

### 1 Análises Modais com 1 Superelemento Presente

#### Superelemento Presente na Subestruturação - parte 2

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,38	0,0037401	11	904,06	904,02	0,0044245
2	268,73	268,74	0,0037212	12	975,36	975,36	0
3	365,97	365,97	0	13	1006,3	1006,3	0
4	443,52	443,52	0	14	1129,4	1129,4	0
5	445,68	445,68	0	15	1149,3	1149,3	0
6	589,52	589,53	0,0016963	16	1298	1298,8	0,0616333
7	681,4	681,3	0,0146757	17	1389,9	1390	0,0071948
8	696,75	696,65	0,0143524	18	1394,6	1394,3	0,0215115
9	813,31	813,3	0,0012295	19	1405,5	1405,3	0,0142298
10	897,61	897,6	0,0011141	20	1438	1437,4	0,0417246

#### Superelemento Presente na Subestruturação - parte 3

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,37	0	11	904,06	904,02	0,0044245
2	268,73	268,73	0	12	975,36	975,37	0,0010253
3	365,97	365,13	0,229527	13	1006,3	1006,3	0
4	443,52	442,74	0,1758658	14	1129,4	1129,4	0
5	445,68	444,79	0,1996948	15	1149,3	1149,3	0
6	589,52	589,5	0,0033926	16	1298	1297,9	0,0077042
7	681,4	681,35	0,0073378	17	1389,9	1389,9	0
8	696,75	696,7	0,0071762	18	1394,6	1394,7	0,0071705
9	813,31	813,32	0,0012295	19	1405,5	1405,6	0,0071149
10	897,61	897,59	0,0022281	20	1438	1438	0

#### Superelemento Presente na Subestruturação - parte 4

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,37	0	11	904,06	904,05	0,0011061
2	268,73	268,73	0	12	975,36	975,36	0
3	365,97	365,97	0	13	1006,3	1006,3	0
4	443,52	443,52	0	14	1129,4	1129,4	0
5	445,68	445,68	0	15	1149,3	1149,3	0
6	589,52	589,52	0	16	1298	1298	0
7	681,4	681,1	0,044027	17	1389,9	1390,1	0,0143895
8	696,75	696,41	0,048798	18	1394,6	1394,6	0
9	813,31	813,29	0,0024591	19	1405,5	1405,4	0,0071149
10	897,61	897,5	0,0122548	20	1438	1438,1	0,0069541

### Superelemento Presente na Subestruturação - parte 5

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,5	0,0486218	11	904,06	908,23	0,4612526
2	268,73	268,83	0,0372121	12	975,36	975,6	0,0246063
3	365,97	366,04	0,0191273	13	1006,3	1006,7	0,0397496
4	443,52	443,71	0,0428391	14	1129,4	1133	0,3187533
5	445,68	445,86	0,0403877	15	1149,3	1153,4	0,3567389
6	589,52	590,09	0,0966888	16	1298	1298,8	0,0616333
7	681,4	705,91	3,5970062	17	1389,9	1390,6	0,0503633
8	696,75	724,14	3,9311087	18	1394,6	1402,6	0,5736412
9	813,31	815,38	0,2545155	19	1405,5	1416,6	0,7897545
10	897,61	907,27	1,0761912	20	1438	1440,3	0,1599444

## 2 Análises Modais com 2 Superelementos Presentes

### Superelementos Presentes na Subestruturação - parte 2 e parte 4

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,38	0,0037401	11	904,06	904,03	0,0033184
2	268,73	268,74	0,0037212	12	975,36	975,36	0
3	365,97	365,97	0	13	1006,3	1006,3	0
4	443,52	443,52	0	14	1129,4	1129,4	0
5	445,68	445,68	0	15	1149,3	1149,3	0
6	589,52	589,52	0	16	1298	1297,9	0,0077042
7	681,4	681,01	0,0572351	17	1389,9	1389,2	0,0503633
8	696,75	696,33	0,0602799	18	1394,6	1394,3	0,0215115
9	813,31	813,29	0,0024591	19	1405,5	1405,2	0,0213447
10	897,61	897,49	0,0133688	20	1438	1437,5	0,0347705

### Superelementos Presentes na Subestruturação - parte 3 e parte 5

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,5	0,0486218	11	904,06	908,21	0,4590403
2	268,73	268,83	0,0372121	12	975,36	975,61	0,0256316
3	365,97	365,22	0,2049348	13	1006,3	1006,7	0,0397496
4	443,52	442,93	0,1330267	14	1129,4	1133	0,3187533
5	445,68	444,99	0,1548196	15	1149,3	1153,3	0,3480379
6	589,52	590,07	0,0932962	16	1298	1298,7	0,0539291
7	681,4	705,86	3,5896683	17	1389,9	1390,6	0,0503633
8	696,75	724,09	3,9239325	18	1394,6	1402,6	0,5736412
9	813,31	815,39	0,255745	19	1405,5	1416,7	0,7968694
10	897,61	907,23	1,0717349	20	1438	1440,3	0,1599444

### 3 Análises Modais com 3 Superelementos Presentes

#### Superelementos Presentes na Subestruturação - parte 2, parte 4 e parte 5

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	268,95	0,0818666	11	904,06	913,76	1,0729376
2	268,73	368,55	0,7049758	12	975,36	975,77	0,0420358
3	365,97	444,06	0,1217532	13	1006,3	1007,9	0,1589983
4	443,52	446,44	0,1705259	14	1129,4	1133,1	0,3276076
5	445,68	590,42	0,1526666	15	1149,3	1156,3	0,6090664
6	589,52	707,55	3,8376871	16	1298	1304,2	0,4776579
7	681,4	726,18	4,2238967	17	1389,9	1394,8	0,3525433
8	696,75	815,49	0,2680405	18	1394,6	1408,6	1,0038721
9	813,31	908,99	1,2678112	19	1405,5	1424,4	1,3447172
10	897,61	268,95	0,0818666	20	1438	1451,1	0,9109875

#### Superelementos Presentes na Subestruturação - parte 3, parte 4 e parte 5

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,61	0,0897632	11	904,06	913,48	1,0419662
2	268,73	268,98	0,0930302	12	975,36	975,93	0,05844
3	365,97	367,07	0,3005711	13	1006,3	1009,5	0,3179966
4	443,52	443,13	0,0879329	14	1129,4	1133,1	0,3276076
5	445,68	445,48	0,0448752	15	1149,3	1161,1	1,0267119
6	589,52	590,88	0,2306962	16	1298	1302	0,3081664
7	681,4	707,18	3,7833871	17	1389,9	1400,1	0,7338657
8	696,75	726,74	4,3042698	18	1394,6	1410,5	1,1401119
9	813,31	815,49	0,2680405	19	1405,5	1425,9	1,4514408
10	897,61	910,49	1,4349216	20	1438	1451,1	0,9109875

### 4 Análise Modal com 4 Superelementos Presentes

#### Superelementos Presentes na Subestruturação – parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5

Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)	Modo	M. Completo Frequência (Hz)	M. Reduzido Frequência (Hz)	Erro (%)
1	267,37	267,52	0,056102	11	904,06	908,16	0,4535097
2	268,73	268,84	0,0409333	12	975,36	975,61	0,0256316
3	365,97	365,22	0,2049348	13	1006,3	1006,7	0,0397496
4	443,52	442,93	0,1330267	14	1129,4	1132,9	0,3098991
5	445,68	444,99	0,1548196	15	1149,3	1153,3	0,3480379
6	589,52	590,07	0,0932962	16	1298	1298,6	0,046225
7	681,4	705,68	3,5632521	17	1389,9	1389,9	0
8	696,75	723,9	3,8966631	18	1394,6	1402,3	0,5521296
9	813,31	815,37	0,253286	19	1405,5	1416,6	0,7897545
10	897,61	907,22	1,0706209	20	1438	1439,9	0,132128

**Erro médio das frequências naturais segundo o número de Super elementos Presentes na Análise Modal**

Modo	E.med. c/1 SE	E.med. c/2 SE	E.med. c/3 SE	E.med. c/4 SE	Modo	E.med. c/1 SE	E.med. c/2 SE	E.med. c/3 SE	E.med. c/4 SE
<b>1</b>	0,013090	0,026180	0,076672	0,056102	<b>11</b>	0,117801	0,231179	1,057451	0,453509
<b>2</b>	0,010233	0,020466	0,087448	0,040933	<b>12</b>	0,006407	0,012815	0,050237	0,025631
<b>3</b>	0,062163	0,102467	0,502773	0,204934	<b>13</b>	0,009937	0,019874	0,238497	0,039749
<b>4</b>	0,054676	0,066513	0,104843	0,133026	<b>14</b>	0,079688	0,159376	0,327607	0,309899
<b>5</b>	0,060020	0,077409	0,107700	0,154819	<b>15</b>	0,089184	0,174019	0,817889	0,348037
<b>6</b>	0,025444	0,046648	0,191681	0,093296	<b>16</b>	0,032742	0,030816	0,392912	0,046225
<b>7</b>	0,915761	1,823451	3,810537	3,563252	<b>17</b>	0,017986	0,050363	0,543204	0
<b>8</b>	1,000358	1,992106	4,264083	3,896663	<b>18</b>	0,150580	0,297576	1,071992	0,552129
<b>9</b>	0,064858	0,129102	0,268040	0,253286	<b>19</b>	0,204553	0,409107	1,398079	0,789754
<b>10</b>	0,272947	0,542551	1,351366	1,070620	<b>20</b>	0,052155	0,097357	0,910987	0,132128

## Anexo III – Valores de correspondência obtidos pelo MAC relativamente ao 1º caso de estudo

### 1 Valores relativos à análise realizada com 10 modos extraídos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,477	0,513	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,513	0,477	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,988

### 2 Valores relativos à análise realizada com 20 modos extraídos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,984	0,016	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,016	0,984	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,989	0,011	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0,011	0,989	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,586	0,414	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,414	0,586	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,999
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,633	0,365	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,365	0,633	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0,998	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0	0,001
16	0	0	0	0	0	0,997	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0,2	0,784	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,784	0,2	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0,998	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,967

### 3 Valores relativos à análise realizada com 30 modos extraídos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,989	0,011	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,011	0,989	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,98	0,02	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0,02	0,98	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,692	0,308	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,308	0,692	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,121	0,879	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,879	0,121	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0,999	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0,81	0,189	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,189	0,81	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0,998	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,999
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0,103	0	0,888	0	0	0	0	0	0	0
22	0,06	0,93	0,007	0	0	0	0	0	0	0
23	0,834	0,066	0,098	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0,994	0	0	0	0	0	0
25	0,001	0	0	0	0,771	0,211	0	0	0	0,001
26	0	0	0	0	0,211	0,771	0	0	0	0,004
27	0	0	0	0	0	0	0,998	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0,984	0	0
29	0	0	0	0	0,001	0,008	0	0	0,091	0,852
30	0	0	0	0	0	0,001	0	0	0,834	0,093

#### 4 Valores relativos à análise realizada com 40 modos extraídos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,734	0,266	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,266	0,734	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,694	0,306	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0,306	0,694	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,122	0,878	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,878	0,122	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,007	0,993	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,993	0,007	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0,629	0,371	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,371	0,629	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,999
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0,413	0,587	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0,587	0,413	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0,997	0,002	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0,002	0,997	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0,998	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0,004	0,994
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0,994	0,004
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0,955	0,43	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0,043	0,954	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0,996	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0,001	0,996	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0,01	0,98	0	0

38	0	0	0	0	0	0	0,988	0,009	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0,987	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,993

**5 Valores relativos à análise realizada com 50 modos extraídos**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,978	0,022	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,022	0,978	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0,41	0,59	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0,59	0,41	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0,987	0,013	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0,013	0,987	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0,855	0,145	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,145	0,855	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0,052	0,948	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,948	0,052	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,999
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0,15	0,85	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0,85	0,15	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0,999	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0,608	0,389
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0,389	0,608
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0,002	0,002
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0,002	0,002
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0,192	0,805	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0,805	0,192	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0,999	0	0	0	0	0	0

35	0	0	0	0	0,998	0,001	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0,002	0,998	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0,799	0,2	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0,2	0,799	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0,998	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,994
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,002
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0,999	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0,998	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0,393	0,6	0	0	0,005	0	0	0
44	0	0	0,6	0,393	0	0,005	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0,996	0	0	0	0	0
46	0	0	0,003	0,001	0	0,955	0,04	0	0	0
47	0	0	0,001	0,003	0	0,04	0,955	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0,985	0	0

<b>49</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0,157	0,834
<b>50</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0,834	0,157

## Anexo IV – Valores de correspondência obtidos pelo MAC relativamente ao 2º caso de estudo

### 1 Valores relativos à análise realizada com 1 Superelemento presente (parte 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0,002	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0,001	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0,002	0	0	0	0
5	0	0	0,002	0,001	1	0,001	0	0	0	0
6	0,002	0	0	0	0,001	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,002
9	0	0,001	0	0	0	0	0,021	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0,003	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,002
13	0,003	0	0	0,002	0,001	0,052	0	0,001	0	0,002
14	0	0,001	0	0	0	0	0,004	0	0,001	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,096
16	0	0,001	0	0	0	0	0,001	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0,001	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0,004	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,003
20	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,003	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0,003	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0,002	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,002	0,052	0	0	0	0,001	0	0	0
7	0	0	0	0,004	0	0,001	0	0	0,001	0
8	0	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0	0,001
9	0,003	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0
10	0	0,002	0,002	0	0,096	0	0	0,004	0,003	0,003
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0,001	0	0,001	0	0	0	0,004	0
13	0	0,001	1	0	0,002	0	0,006	0	0,007	0
14	0	0	0	1	0	0,001	0	0,0021	0	0,019
15	0	0,001	0,002	0	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0,001	0	1	0	0,003	0	0,005
17	0	0	0,006	0	0	0	1	0	0	0
18	0	0	0	0,022	0	0,003	0	1	0	0,005
19	0	0,004	0,006	0	0,005	0	0,001	0	1	0
20	0	0	0	0,019	0	0,048	0	0,003	0	1

### 2 Valores relativos à análise realizada com 2 Superelementos presentes (parte 2 e parte 3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0,001	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0,002	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0,001	0	0	0	0
6	0,002	0	0	0	0	1	0	0,02	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0,021	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,002
9	0	0,001	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

13	0,003	0	0	0,002	0,001	0,052	0	0,001	0	0,002
14	0	0,001	0	0	0	0	0,004	0	0,001	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,096
16	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0,001	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0,004	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,003
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0,003	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0,003	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0,002	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,002	0,052	0	0	0	0,001	0	0,001	0
7	0	0	0	0,004	0	0,001	0	0	0	0,001
8	0	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0	0
9	0,003	0	0	0,001	0	0	0	0,004	0	0,003
10	0	0,002	0,002	0	0,096	0	0	0	0,003	0
11	1	0	0	0	0	0,006	0	0	0	0
12	0	1	0,001	0	0,001	0	0	0	0,004	0
13	0	0,001	1	0	0,002	0	0,006	0	0,007	0
14	0	0	0	1	0	0	0	0,021	0	0,019
15	0	0,001	0,002	0	1	0	0	0	0,005	0
16	0	0	0	0,001	0	1	0	0,003	0	0,049
17	0	0	0,006	0	0	0	0,999	0	0,007	0
18	0	0	0	0,002	0	0	0	1	0	0,006
19	0	0,004	0,006	0	0,005	0	0,001	0	0,999	0
20	0	0	0	0,018	0	0,048	0	0,003	0	1

### 3 Valores relativos à análise realizada com 3 Superelementos presentes (parte 2, parte 3 e parte 4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0,002	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0,001	0	0	0	0
6	0,002	0	0	0,001	0,001	1	0	0,002	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0,021	0
8	0	0	0	0	0	0,002	0	1	0	0,002
9	0	0,001	0	0	0	0	0,002	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0,002	0	0	0	0
13	0,003	0	0	0,002	0,001	0,052	0	0	0	0
14	0	0,001	0	0	0	0	0,004	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0,001	0	0	0	0	0,001	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,003	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0,003	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0,002	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,002	0,052	0	0	0	0,001	0	0	0
7	0	0	0	0,004	0	0,001	0	0	0	0,001
8	0	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0	0
9	0,003	0	0	0,001	0	0	0	0,004	0	0,003

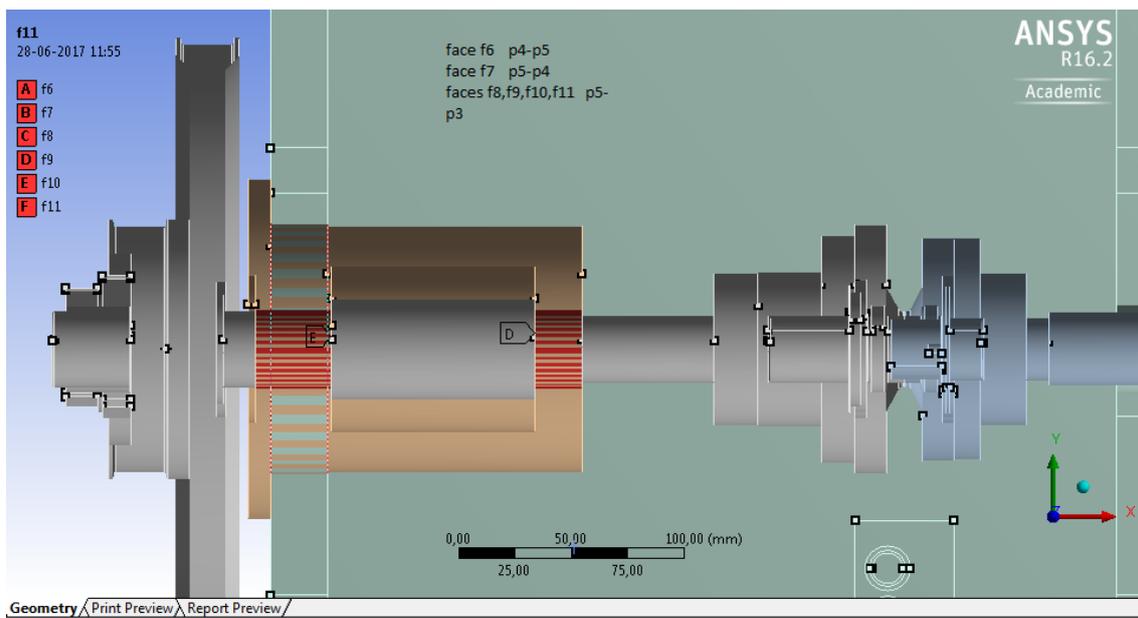
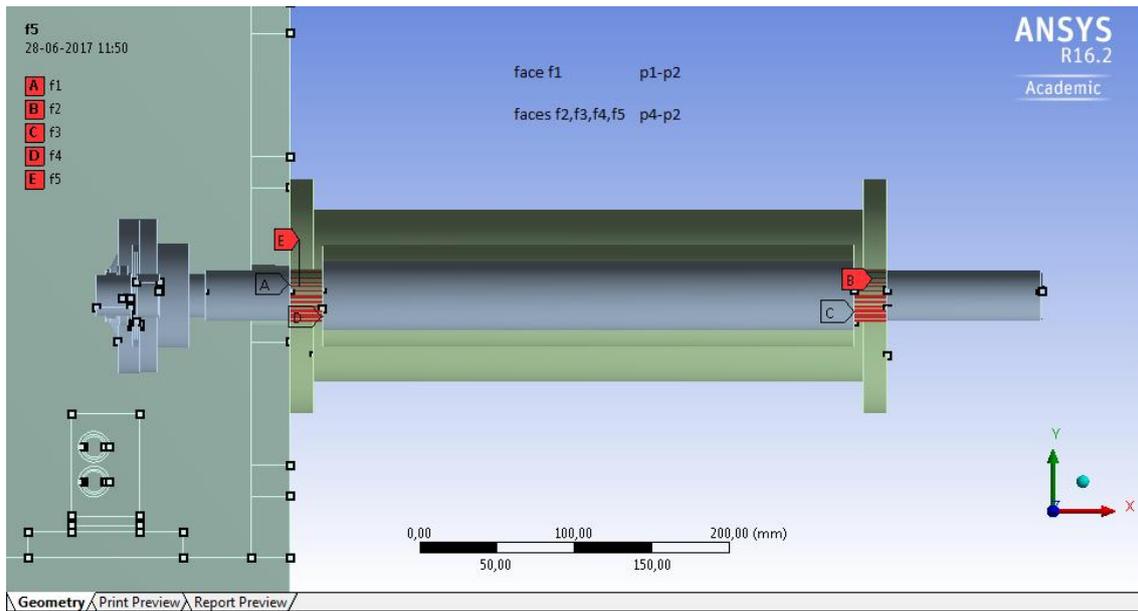
10	0	0,002	0,002	0	0,096	0	0	0	0,003	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0,001	0	0,001	0	0	0	0,004	0
13	0	0	1	0	0,002	0	0,006	0	0,006	0
14	0	0	0	1	0	0,001	0	0,021	0	0,019
15	0	0	0,002	0	1	0	0	0	0,005	0
16	0	0	0	0,001	0	1	0	0,003	0	0,049
17	0	0	0,006	0	0	0	1	0	0,006	0
18	0	0	0	0,022	0	0,003	0	1	0	0,005
19	0	0	0,006	0	0,005	0	0,002	0	1	0
20	0	0	0	0,018	0	0,049	0	0,003	0	1

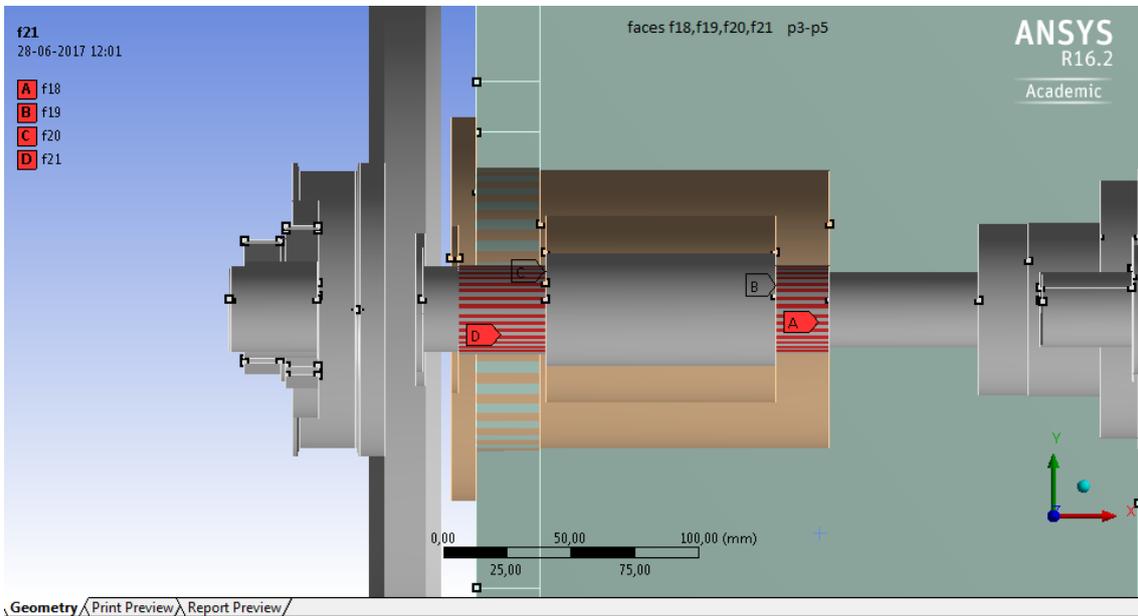
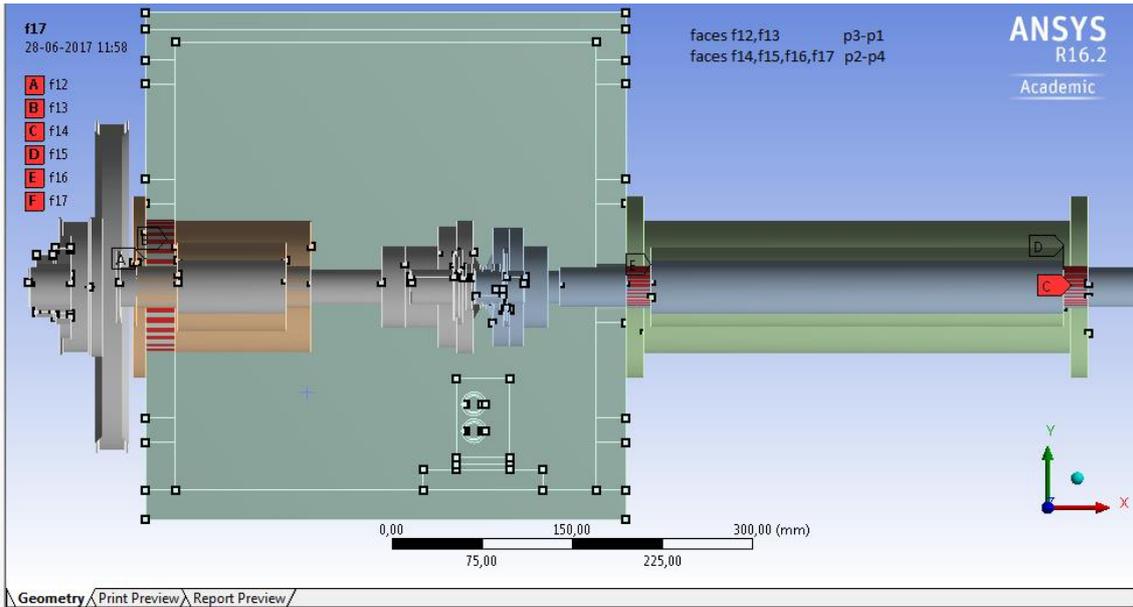
**4 Valores relativos à análise realizada com 4 Super elementos presentes (parte 2, parte 3, parte 4 e parte 5)**

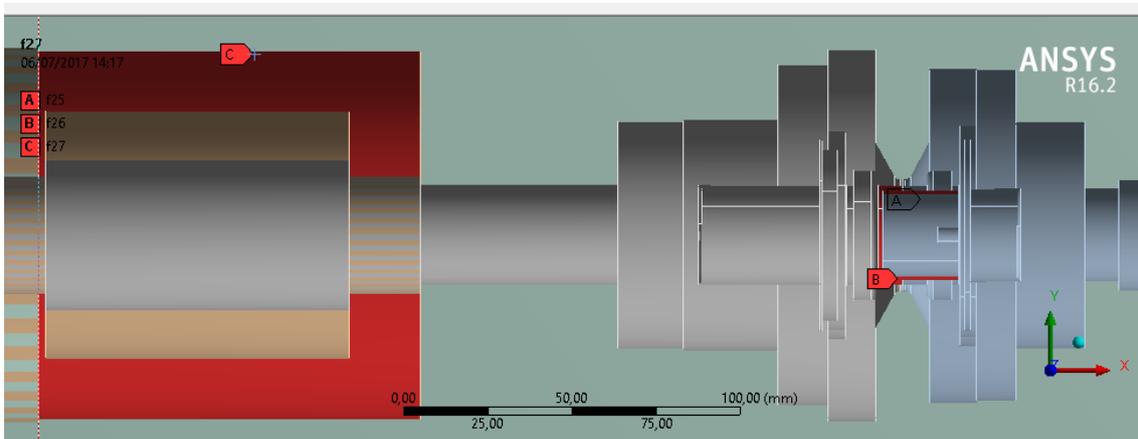
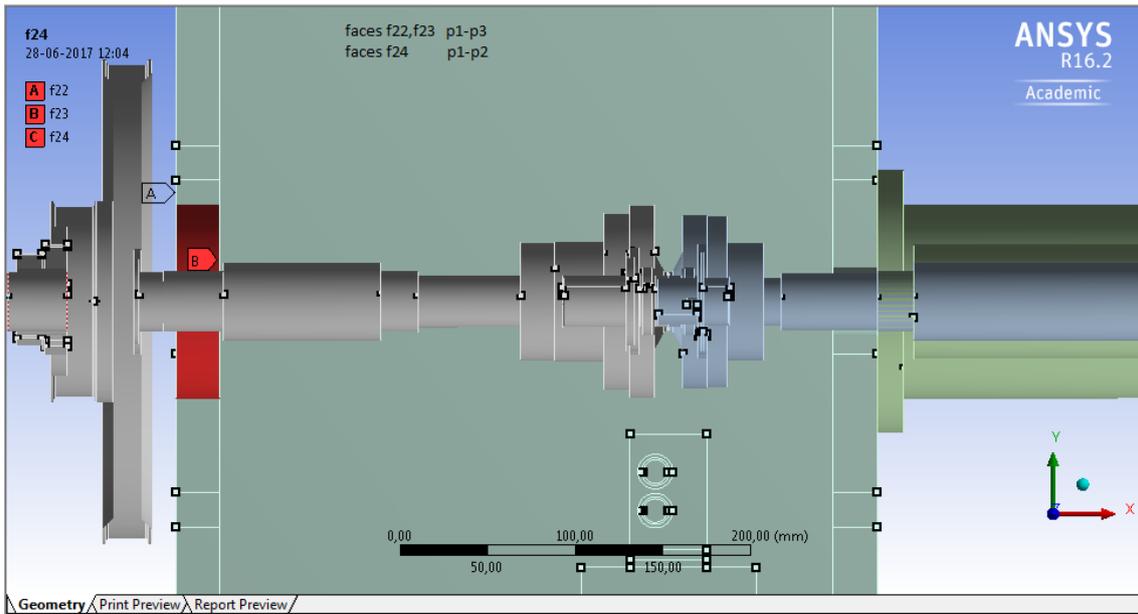
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0,001	0	0	0	0
6	0,002	0	0	0,001	0,001	0,999	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0,991	0,002	0,011	0
8	0	0	0	0	0	0	0,002	0,995	0	0
9	0	0,001	0	0	0	0	0,049	0	0,998	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0,005	0	0,001
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0,003	0,999
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0,003	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0,001	0	0	0	0	0,007	0	0,002	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0
16	0	0,001	0	0	0	0	0,001	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,004	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0,001	0	0,003	0

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0,003	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0,002	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,001	0,052	0	0	0	0,001	0	0,001	0
7	0	0	0	0,003	0	0	0	0	0	0,002
8	0,001	0	0,001	0	0,001	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0,001	0	0	0	0	0	0,002
10	0,998	0	0,002	0	0,083	0	0	0	0,003	0
11	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0,003	1	0	0	0,001	0	0	0	0,003	0
13	0,002	0,001	1	0	0,002	0	0,004	0	0,007	0
14	0	0	0	0,999	0	0	0	0,011	0	0,019
15	0,111	0,001	0,003	0,001	0,999	0	0	0	0,004	0
16	0	0	0	0,002	0	0,999	0	0,012	0	0,042
17	0	0	0,006	0	0	0	0,975	0	0,038	0
18	0	0	0	0,026	0	0,001	0	0,98	0	0,029
19	0,004	0,004	0,007	0	0,005	0	0,009	0	0,98	0
20	0	0	0	0,02	0	0,053	0	0,005	0	0,988

## Anexo V – Entidades Nomeadas no 2º Estudo de Caso







## Anexo VI – Scripts para o ANSYS Mechanical APDL

```
!-----1º ESTUDO DE CASO-----  
!  
!-----Análise modal do modelo completo-----  
  
!diretório para os ficheiros criados na análise  
/CWD,'C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1\Mechanical'  
  
/FILENAME,completo           !nome do ficheiro do modelo completo  
  
!Criação ou obtenção do modelo a analisar  
  
!nome, tipo de ficheiro e diretório do modelo criado anteriormente  
/INPUT,'casestudy1.1','dat','C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1',, 0  
  
EPLOT                        !Visualizar o modelo  
  
/SOLU  
ANTYPE,MODAL                !Definir a análise modal a realizar  
MODOPT,LANB,30,,,ON        !Definir o nr. de modos a calcular  
MXPAND,30                   !Definir o nr. de modos a extrair  
SOLVE                       !Executar a análise modal  
  
FINISH  
  
!-----  
!-----Análise modal do modelo reduzido-----  
!-----Preparação do modelo-----  
  
!diretório para os ficheiros criados na análise  
/CWD,'C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1\Mechanical'  
  
/FILENAME,reduzido          !nome do ficheiro do modelo a reduzir  
  
!Criação ou obtenção do modelo a analisar  
  
!nome, tipo de ficheiro e diretório do modelo criado anteriormente  
/INPUT,'casestudy1.1','dat','C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1',, 0  
  
EPLOT                        !Visualizar o modelo  
ALLSEL                       !Selecionar o modelo inteiro  
SAVE                         !Guardar o modelo  
  
FINISH  
  
!-----Generation Pass do corpo 2-----  
  
/CLEAR                       !Limpar a base de dados
```

```

/FILENAME,corpo2          !nome do ficheiro da parte 2
RESUME,reduzido.db        !Retomar o modelo a reduzir

/SOLU                     !Definir o tipo de análise
ANTYPE,SUBSTR

SEOPT,parte2se,2         !Definir o nome das matrizes reduzidas,
                          !extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,30           !Parameterizar o CMS, o tipo de
                          !interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p2                !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f2,NODE           !selecionar nós da interface p2-p1
CMSEL,A,f3,NODE           !selecionar nós da interface p2-p3
M,ALL,ALL                 !Criar gdl's principais em todos os nós
                          !selecionados
NSLE                      !Selecionar os nós relativos aos
                          !elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

SAVE                      !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE                     !Executar o Generation Pass
/REPLOT                   !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 3-----

/CLEAR                    !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3          !nomear o ficheiro da parte 3
RESUME,reduzido.db        !Retomar o modelo a reduzir

/SOLU                     !Definir o tipo de análise
ANTYPE,substr

SEOPT,parte3se,2         !Definir o nome das matrizes reduzidas,
                          !extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,30           !Parameterizar o CMS, o tipo de
                          !interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p3                !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f4,NODE           !selecionar nós da interface p3-p2
M,ALL,ALL                 !Criar gdl's principais em todos os nós
                          !selecionados
NSLE                      !Selecionar os nós relativos aos
                          !elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

```

```

SAVE                !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE              !Executar o Generation Pass
/REPLOT           !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Use Pass-----

/CLEAR             !Limpar a base de dados
/FILENAME,use     !Nomear o ficheiro Use Pass
RESUME,reduzido.db !Retomar o modelo a reduzir

/PREP7
CMSEL,U,p2       !Desmarcar as partes a substituir pelos
respetivos superelementos
CMSEL,U,p3

ET,50,MATRIX50   !Definir o tipo de elemento específico
                 !para Substructuring
TYPE,50

SE,parte2se      !Definir as matrizes do superelemento
                 !criadas no Generation Pass
SE,parte3se
/REPLOT          !Visualizar o modelo reduzido criado

/SOLU
ANTYPE,MODAL     !Definir a análise modal a realizar
MODOPT,LANB,30,,,ON !Definir o nr. de modos a calcular
MXPAND,30        !Definir o nr. de modos a extrair
SOLVE           !Executar a análise modal

/POST1
SET,LIST         !Listar os resultados (frequências
                 !naturais)

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 2-----

/CLEAR             !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2 !Retomar a parte 2
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON        !Especificar o Expansion Pass

```

```

SEEXP,parte2se,USE          !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL                  !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 3-----

/CLEAR                      !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3            !Retomar a parte 3
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON                   !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte3se,USE         !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL                  !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Criar o ficheiro agregado de resultados-----

/CLEAR                      !Limpar a base de dados

/FILENAME,reduzido          !Retomar o modelo a reduzir
RESUME

/POST1

*DO,J,1,30                  !Selecionar o modos extraído
FILE,use                    !Inserir o resultado obtido no Use Pass
SET,1,J
FILE,corpo2                 !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J                  !Expansion Pass do corpo 2
FILE,corpo3                 !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J                  !Expansion Pass do corpo 3
RESWRITE,reduzido           !Juntar os resultados e selecionar o
*ENDDO                      !próximo modo a extrair

FINISH

```

!-----Pós processar os resultados-----

/CLEAR                                   !Limpar a base de dados

/FILENAME, reduzido                   !Retomar o modelo reduzido  
RESUME

/POST1                                 !Pós processar o ficheiro agregado de  
                                      !resultados

RSTMAC, completo, 1, all, reduzido, 1, all, , , , 2

!-----1º Estudo de Caso - Modificação do corpo 2-----  
-----rasgo de 40x40x100a uma distancia de 40 da base da peça----  
!-----Preparação do modelo-----

!diretório para os ficheiros criados na análise  
/CWD,'C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1\Mechanical'

/FILENAME,reduzido !nome do ficheiro do modelo completo

!Criação ou obtenção do modelo a analisar

!nome, tipo de ficheiro e diretório do modelo criado anteriormente  
/INPUT,'casestudy1.1','dat','C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR1',, 0

ALLSEL !Selecionar o modelo inteiro  
SAVE !Guardar o modelo

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 2-----

/CLEAR !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2 !nome do ficheiro da parte 2  
RESUME,reduzido.db !Retomar o modelo completo

/SOLU !Definir o tipo de análise  
ANTYPE,SUBSTR

SEOPT,parte2se,2 !Definir o nome das matrizes reduzidas,  
extrair [K] e [M]  
CMSOPT,FREE,30 !Parameterizar o CMS, o tipo de  
!interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p2 !Selecionar o componente a reduzir  
CMSEL,S,f2,NODE !selecionar nós da interface p2-p1  
CMSEL,A,f3,NODE !selecionar nós da interface p2-p3  
M,ALL,ALL !Criar gdl's principais em todos os nós  
!selecionados

NSLE !Selecionar os nós relativos aos  
!elementos selecionados

SAVE !Guardar o modelo do superelemento  
SOLVE !Executar o Generation Pass

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 3-----

```
/CLEAR                                !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3                       !nomear o ficheiro da parte 3
RESUME,reduzido.db                     !Retomar o modelo completo

/SOLU                                   !Definir o tipo de análise
ANTYPE,substr

SEOPT,parte3se,2                       !Definir o nome das matrizes reduzidas,
extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,30                         !Parameterizar o CMS, o tipo de
!interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p3                             !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f4,NODE                         !selecionar nós da interface p3-p2
M,ALL,ALL                               !Criar gdl's principais em todos os nós
!selecionados

NSLE                                    !Selecionar os nós relativos aos
!elementos selecionados

SAVE                                    !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE                                  !Executar o Generation Pass

FINISH
```

!-----Use Pass-----

```
/CLEAR                                !Limpar a base de dados
/FILENAME,use                           !Nomear o ficheiro Use Pass
RESUME,reduzido.db                     !Retomar o modelo completo

/PREP7
CMSEL,U,p2                             !Desmarcar as partes a substituir pelos
respetivos superelementos
CMSEL,U,p3

ET,50,MATRIX50                         !Definir o tipo de elemento específico
!para Substructuring

TYPE,50

SE,parte2se                             !Definir as matrizes do superelemento
criadas no Generation Pass
SE,parte3se
/REPLOT                                 !Visualizar o modelo reduzido criado

/SOLU
ANTYPE,MODAL                           !Definir a análise modal a realizar
MODOPT,LANB,30,,,,ON                  !Definir o nr. de modos a calcular
```

```

MXPAND,30          !Definir o nr. de modos a extrair
SOLVE             !Executar a análise modal

/POST1
SET,LIST          !Listar os resultados (frequências
naturais)

!visualizar os modos de vibração se necessário

SAVE
FINISH

!-----Novo Generation Pass do corpo 2-----

/CLEAR            !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2  !Retomar a parte 2
RESUME

!aplicar modificação

/SOLU             !Definir o tipo de análise
ANTYPE,substr

SEOPT,parte3se,2  !Definir o nome das matrizes reduzidas,
extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,30    !Parameterizar o CMS, o tipo de
!interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p3        !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f4,NODE   !selecionar nós da interface p3-p2
M,ALL,ALL         !Criar gdl's principais em todos os nós
!selecionados
NSLE              !Selecionar os nós relativos aos
!elementos selecionados

SAVE              !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE             !Executar o Generation Pass

FINISH

!-----Novo Use Pass-----

/CLEAR            !Limpar a base de dados
/FILENAME,use     !Retomar o ficheiro completo
RESUME

/SOLU             !Definir a análise modal a realizar
ANTYPE,MODAL      !Definir o nr. de modos a calcular
MODOPT,LANB,30,,,ON

```

```

MXPAND,30          !Definir o nr. de modos a extrair
SOLVE             !Executar a análise modal

/POST1
SET,LIST          !Listar os resultados (frequências
naturais)

!visualizar os modos de vibração se necessário

SAVE
FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 2-----

/CLEAR            !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2  !Retomar a parte 2
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON         !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte2se,USE !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL        !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 3-----

/CLEAR            !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3  !Retomar a parte 3
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON         !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte3se,USE !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL        !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

```

```

!-----Criar o ficheiro agregado de resultados-----

/CLEAR                                !Limpar a base de dados

/FILENAME,completo                    !Retomar o modelo completo
RESUME

/POST1

*DO,J,1,30                             !Selecionar o modos extraído
FILE,use                               !Inserir o resultado obtido no Use Pass
SET,1,J
FILE,corpo2                            !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J                              !Expansion Pass do corpo 2
FILE,corpo3                            !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J                              !Expansion Pass do corpo 3
REWRITE,completo                       !Juntar os resultados e selecionar o
*ENDDO                                  !próximo modo a extrair

FINISH

!-----Pós processar os resultados-

/CLEAR                                !Limpar a base de dados

/FILENAME,completo                    !Retomar o modelo completo
RESUME

/POST1                                !Pós processar o ficheiro agregado de
!resultados

```

```

!-----2º ESTUDO DE CASO-----
!-----
!-----Análise modal do modelo completo-----

!diretório para os ficheiros criados na análise
/CWD,'C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR2\Mechanical'

/FILENAME,completo           !nome do ficheiro do modelo completo

!Criação ou obtenção do modelo a analisar

!nome, tipo de ficheiro e diretório do modelo criado anteriormente
/INPUT,'estruturaFIXED2','dat','C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR2',, 0

EPlot                        !Visualizar o modelo

/SOLU
ANTYPE,MODAL                 !Definir a análise modal a realizar
MODOPT,LANB,30,,,ON         !Definir o nr. de modos a calcular
MXPAND,30                    !Definir o nr. de modos a extrair
SOLVE                        !Executar a análise modal

FINISH

!-----
!-----Análise modal do modelo reduzido-----
!-----Preparação do modelo-----

CLEAR

/FILENAME,reduzido           !nome do ficheiro do modelo a reduzir

!nome, tipo de ficheiro e diretório do modelo criado anteriormente
/INPUT,'estruturaFIXED2','dat','C:\Users\jgcol\Desktop\SUBSTR2',, 0

EPlot                        !Visualizar o modelo
ALLSEL                       !Selecionar o modelo inteiro
SAVE                         !Guardar o modelo

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 2 (flange exterior)-----

/CLEAR                       !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2             !nome do ficheiro da parte 2
RESUME,reduzido.db           !Retomar o modelo reduzido

/SOLU                        !Definir o tipo de análise
ANTYPE,SUBSTR

```

```

SEOPT,parte2se,2          !Definir o nome das matrizes reduzidas,
                           !extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,20           !Parameterizar o CMS, o tipo de
                           !interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p2               !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f1,node          !selecionar nós da face p2-p1
CMSEL,A,f14,node         !selecionar nós da face p2-p4
CMSEL,A,f15,node         !selecionar nós da face p2-p4
CMSEL,A,f16,node         !selecionar nós da face p2-p4
CMSEL,A,f17,node         !selecionar nós da face p2-p4
M,ALL,ALL                !Criar gdl's principais em todos os nós
                           !selecionados
NSLE                     !Selecionar os nós relativos aos
                           !elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

SAVE                     !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE                    !Executar o Generation Pass
/REPLOT                  !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 3 (flange interior)-----

//CLEAR                  !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3         !Nome do ficheiro da parte 3
RESUME,reduzido.db       !Retomar o modelo completo

/SOLU                    !Definir o tipo de análise
ANTYPE,SUBSTR

SEOPT,parte3se,2        !Definir o nome das matrizes reduzidas,
                           !extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,20           !Parameterizar o CMS, o tipo de
                           !interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p3               !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f12,NODE         !Selecionar nós da face p3-p1
CMSEL,A,f13,NODE         !Selecionar nós da face p3-p1
CMSEL,A,f18,NODE         !Selecionar nós da face p3-p5
CMSEL,A,f19,NODE         !Selecionar nós da face p3-p5
CMSEL,A,f20,NODE         !Selecionar nós da face p3-p5
CMSEL,A,f21,NODE         !Selecionar nós da face p3-p5
CMSEL,A,f27,NODE         !Selecionar nós da face p3-p1

```

```

M,ALL,ALL          !Criar gdl's principais em todos os nós
                   !selecionados
NSLE               !Selecionar os nós relativos aos
                   !elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

SAVE              !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE            !Executar o Generation Pass
/REPLOT          !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 4 (veio)-----

/CLEAR            !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo4 !nome do ficheiro da parte 4
RESUME,reduzido.db !Retomar o modelo completo

/SOLU            !Definir o tipo de análise
ANTYPE,SUBSTR

SEOPT,parte4se,2 !Definir o nome das matrizes reduzidas,
                 !extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,20  !Parameterizar o CMS, o tipo de
                 !interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p4       !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f2,NODE  !Selecionar nós da face p4-p2
CMSEL,A,f3,NODE  !Selecionar nós da face p4-p2
CMSEL,A,f4,NODE  !Selecionar nós da face p4-p2
CMSEL,A,f5,NODE  !Selecionar nós da face p4-p2
CMSEL,A,f6,NODE  !Selecionar nós da face p4-p5
CMSEL,A,f25,NODE !Selecionar nós da face p4-p5
M,ALL,ALL        !Criar gdl's principais em todos os nós
                 !selecionados
NSLE             !Selecionar os nós relativos aos
                 !elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

SAVE              !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE            !Executar o Generation Pass
/REPLOT          !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Generation Pass do corpo 5 (veio com polia)-----

```

```

//CLEAR                                !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo5                        !nome do ficheiro da parte 5
RESUME,reduzido.db                      !Retomar o modelo completo

/SOLU                                    !Definir o tipo de análise
ANTYPE,SUBSTR

SEOPT,parte5se,2                        !Definir o nome das matrizes reduzidas,
extrair [K] e [M]
CMSOPT,FREE,20                          !Parameterizar o CMS, o tipo de
!interface, nr. de modos a extrair

CMSEL,S,p5                              !Selecionar o componente a reduzir
CMSEL,S,f7,NODE                          !seleciona nos da face p5-p4
CMSEL,A,f8,NODE                          !seleciona nos da face p5-p3
CMSEL,A,f9,NODE                          !seleciona nos da face p5-p3
CMSEL,A,f10,NODE                         !seleciona nos da face p5-p3
CMSEL,A,f11,NODE                        !seleciona nos da face p5-p3
CMSEL,A,f26,NODE                         !seleciona nos da face p5-p4
M,ALL,ALL                                !Criar gdl's principais em todos os nós
!selecionados

NSLE                                     !Selecionar os nós relativos aos
!elementos selecionados

!aplicar carga se necessário

SAVE                                    !Guardar o modelo do superelemento
SOLVE                                   !Executar o Generation Pass
/REPLOTT                                !Visualizar o superelemento criado

FINISH

!-----Use Pass-----

/CLEAR                                    !Limpar a base de dados
/FILENAME,use                            !Nomear o ficheiro Use Pass
RESUME,reduzido.db                      !Retomar o modelo completo

/PREP7
CMSEL,U,p2                              !Desmarcar as partes a substituir pelos
!respetivos superelementos

CMSEL,U,p3
CMSEL,U,p4
CMSEL,U,p5

```

```

ET,50,MATRIX50          !Definir o tipo de elemento específico
                        !para Substructuring

TYPE,50

SE,parte2se             !Definir as matrizes do superelemento
                        !criadas no Generation Pass

SE,parte3se
SE,parte4se
SE,parte5se
/REPLOTT                !Visualizar o modelo reduzido criado

/SOLU
ANTYPE,MODAL            !Definir a análise modal a realizar
MODOPT,LANB,20,,,,ON   !Definir o nr. de modos a calcular
MXPAND,20               !Definir o nr. de modos a extrair
SOLVE                  !Executar a análise modal

/POST1
SET,LIST                !Listar os resultados (frequências
                        !naturais)

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 2-----

/CLEAR                  !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo2       !Retomar a parte 2
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON              !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte2se,USE     !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL             !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 3-----

/CLEAR                  !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo3       !Retomar a parte 3

```

```

RESUME

/SOLU
EXPASS,ON                !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte3se,USE      !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL              !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 4-----

/CLEAR                    !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo4         !Retomar a parte 4
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON                !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte4se,USE      !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL              !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

FINISH

!-----Expansion Pass do corpo 5-----

/CLEAR                    !Limpar a base de dados

/FILENAME,corpo5         !Retomar a parte 5
RESUME

/SOLU
EXPASS,ON                !Especificar o Expansion Pass
SEEXP,parte5se,USE      !Especificar a subestrutura a expandir
NUMEXP,ALL              !Executar o Expansion Pass
SOLVE

/POST1

!visualizar os modos de vibração se necessário

```

FINISH

!-----Criar o ficheiro agregado de resultados-----

```
/CLEAR                !Limpar a base de dados

/FILENAME,reduzido    !Retomar o modelo completo
RESUME

/POST1

*DO,J,1,20            !Selecionar o modos extraído
FILE,use              !Inserir o resultado obtido no Use Pass
SET,1,J
FILE,corpo2           !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J            !Expansion Pass do corpo 2
FILE,corpo3           !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J            !Expansion Pass do corpo 3
FILE,corpo4           !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J            !Expansion Pass do corpo 4
FILE,corpo5           !Acrescentar o resultado obtido no
APPEND,1,J            !Expansion Pass do corpo 5
RESWRITE,reduzido    !Juntar os resultados e seleccionar o
*ENDDO                !próximo modo a extrair
```

FINISH

!-----Pós processar os resultados-----

```
/CLEAR                !Limpar a base de dados

/FILENAME,reduzido    !Retomar o modelo completo
RESUME

/POST1                !Pós processar o ficheiro agregado de
                      !resultados
```

RSTMAC,completo,1,all,reduzido,1,all,,,2