

Un ejercicio de modelación matemática, aplicando los conceptos del álgebra lineal con estudiantes de la Facultad de Ingeniería y el programa de Economía de la Universidad Católica de Colombia

J. Fredy Morales García*, J. Manuel Currea Urcua**

Resumen

En el aula de clase encontramos estudiantes de ingeniería y economía que no reconocen la importancia de las matemáticas, además, las innovaciones tecnológicas en vez de mediar el proceso de enseñanza-aprendizaje plantean un obstáculo en su uso. Por otro lado, el estudiar las matemáticas fuera de su contexto de aplicación sugiere un desafío mayor y muchas veces el docente parece estar más alejado de su quehacer y se convierte en un limitante del proceso de aprendizaje. Por lo anterior, en este trabajo presentamos modelos en etapa de implementación que centran el proceso en la modelación matemática y pueden concebirse como una herramienta didáctica para la enseñanza en la formación de ingenieros y economistas. Se busca que los resultados obtenidos brinden una base teórica que permita reevaluar los planes de estudio de estos cursos y aproximar a los estudiantes al conocimiento propio de su disciplina.

Palabras clave: modelación matemática, álgebra lineal, ingeniería, economía, enseñanza-aprendizaje.

* Universidad Católica de Colombia y Corporación Universitaria Minuto de Dios. jfmorales@ucatolica.edu.co, jfmorales@uniminuto.edu.co

** Universidad Católica de Colombia, Universidad Santo Tomás y Fundación Universitaria Konrad Lorenz. jmcurrea@ucatolica.edu.co, jeffersoncurrea@usantotomas.edu.co, jeffersonm.curreau@konradlorenz.edu.co

An exercise in mathematical modeling, applying the concepts of linear algebra with students of the faculty of engineering and economics

Abstract

In the classroom there are students of engineering and economics who do not recognize the importance of mathematics, in addition to technological innovations instead of mediating the teaching-learning process pose an obstacle in their use, on the other hand studying mathematics outside of their Application context poses a major obstacle, many times the teacher seems to be further away from his work and becomes a limiting factor in the learning process. Therefore, in this paper we present models in the implementation stage that focus the process on mathematical modeling and can be conceived as a didactic tool for teaching in the training of engineers and economists, it is sought that the results obtained provide a theoretical basis that allows to re-evaluate the curriculum of these courses and to approach the students to the knowledge of their discipline.

Keywords: mathematical modeling, linear algebra, engineering, teaching-learning.

Contexto institucional

Los proyectos de investigación que buscan desarrollar modelos novedosos para la enseñanza de las matemáticas, se respaldan en diferentes tipos de teorías que son inherentes a la didáctica de esta ciencia. De acuerdo con estas condiciones, consideramos pertinente pensar e implementar una propuesta que en términos metodológicos, modifique los métodos tradicionales que se utilizan para la enseñanza del álgebra lineal en el Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia (UCdeC).

Con nuestra propuesta, pretendemos que la modelación matemática (MM) constituya un fundamento que ayude a reestructurar los Syllabus que en la actualidad soportan conceptualmente los cursos de álgebra lineal de la UCdeC. Entendiendo que la MM es un modelo de enseñanza revolucionario en nuestro contexto. Los resultados esperados implican reconocer a la MM como un instrumento eficaz que verdaderamente aproxima a los estudiantes de la UCdeC a los

objetos matemáticos que se estudian en las sesiones de clase, sin que aplique el no cumplimiento del Syllabus del curso. Es importante que las situaciones planteadas acerquen a los estudiantes a la mayor cantidad de aspectos disciplinares propios de su campo profesional.

Teniendo en cuenta las distintas posiciones que los profesores del Departamento de Ciencias Básicas de la UCdeC tienen en relación con la necesidad de modificar estructuralmente las prácticas profesionales y de enseñanza que hoy en día ejecuta la universidad, así como la consonancia de estas posturas respecto a las discusiones que posibilitaron las reuniones citadas por la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (Acofi) durante el año 2006 y que a la postre fueron inmortalizadas en el libro *El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación*, son definidas tres competencias que en esencia deben ser potenciadas durante los procesos formativos de los ingenieros en las universidades del país: (i) la capacidad para modelar fenómenos, (ii) la capacidad para que los futuros ingenieros de Colombia puedan resolver con eficiencia problemas a partir de la aplicación de su conocimiento de las ciencias naturales y la matemática y (iii) la excelente utilización del lenguaje simbólico, es decir, el tránsito entre los diferentes modelos de representación.

Las reflexiones y discusiones llevadas a cabo en los foros preparatorios y la XXVI Reunión Nacional, que contó con la participación de las facultades de ingeniería de las universidades colombianas y con invitados internacionales, condujeron al planteamiento de preguntas en torno a las competencias necesarias del ingeniero del 2020¹.

En el documento en mención, se concluye (entre otras cosas) que hay necesidad de revisar los currículos, de tal manera que la formación que los ingenieros tengan en cuanto a la matemática, sea sólida, ello, de la mano con el uso de las herramientas tecnológicas a las que hoy en día se tiene acceso.

Le apostamos a garantizar que la propuesta metodológica para la enseñanza del álgebra lineal aporte significativamente a la reformulación de los currículos con

1 Destacamos una postura que consideramos pertinente para nuestro objetivo: "no pierde actualidad la propuesta de incorporación de nuevos modelos pedagógicos centrados en el trabajo de los estudiantes, utilizando metodologías activas, de tal forma que se pueda intervenir en las decisiones que orienten una formación pertinente y efectiva. Se precisa una educación menos orientada a la información y más a la construcción de unos marcos conceptuales, con atributos como la fortaleza en ciencias básicas [...] (Quiroz y Castillo, 2007, p. 238).

los que ahora contamos, y que en últimas, aproxime a los ingenieros al perfil que Acofi proyecta para el 2020 en Colombia.

La modelación matemática concebida como una herramienta didáctica

La teoría sobre MM en América Latina y España es rica en contenido, cantidad y calidad. En un comienzo, al hacer la revisión bibliográfica en busca de la construcción de un marco teórico de referencia para nuestra propuesta, tuvimos posibilidad de estudiar a autores como Camarena (quien lidera el trabajo en MM en México) y Bassanezi, Biembengut y Hein, en Brasil. En Colombia, el Dr. Villa Ochoa así como la hace poco fundada Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática.

Tal revisión y estudio juicioso de los autores en mención nos permiten con total certeza entender la MM como *una herramienta didáctica*² para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, que para efectos de nuestra investigación, asociamos y referimos a la enseñanza del álgebra lineal.

En palabras de Bassanezi y Biembengut la MM es el “método de enseñanza-aprendizaje que utiliza procesos de modelización en cursos regulares” (1997, p. 14). Para Camarena “la modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto” (2011, p. 7); por su parte, el investigador Villa reconoce la importancia de la MM y manifiesta que:

[...] la modelación matemática, vista como *proceso*, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en la literatura como *ciclo de la modelación* (2009, p. 5).

2 Asumimos que una herramienta didáctica es un medio y tiene una intención, así la MM, afirma Biembengut y Hein, “puede representar un avance en la enseñanza de las matemáticas en clase, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga el modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento” (2004, p. 123).

Surgimiento de la propuesta

Terminando el tercer corte académico del segundo semestre del año 2016 (2016-II), fueron seleccionados varios grupos de estudiantes de los cursos de álgebra lineal de la Facultad de Ingeniería de la UCC, a los que se les pidió entregar como proyecto final un logotipo de las iniciales de su nombre en tres dimensiones³. Una de las condiciones de diseño del logotipo era el uso obligatorio de algún *software*⁴.

En el momento que los estudiantes hicieron entrega de sus productos finales y los profesores empezamos a evaluar los resultados obtenidos, se hicieron evidentes fuertes inconsistencias en un buen número de los aspectos vinculados con los conceptos y objetos matemáticos estudiados durante el periodo académico ordinario. Se debe aclarar que los alumnos seleccionados, así como aquellos que desarrollaron el curso con “normalidad”, permanentemente cuentan con una amplia franja de tutorías y atenciones en la modalidad virtual y presencial. Consideramos que las inconsistencias reportadas se deben en gran medida a la falta de oportunidad de los discentes para dar buena cuenta de la situación de modelación planteada a cada uno.

En este documento presentamos los avances asociados con los resultados obtenidos a la fecha. Somos conscientes de que los resultados que se alcanzaron son el soporte o punto de partida para replantear el proyecto de investigación.

Lo dicho, sustenta la necesidad de desarrollar una primera fase que llamamos “sensibilización de los estudiantes”, que se constituye en la génesis de nuestra propuesta metodológica.

Esta fase contempla cuatro modelos que, desde la perspectiva de los profesores que la implementaron, acercaron a los grupos de estudiantes escogidos a la MM. En este escenario Biembengut y Hein (1997) denominan a nuestra fase de sensibilización, “pre-modelación”. Este nombre, estructuralmente busca garantizar que se dé un desarrollo de varias estrategias dentro de las cuales estimamos relevantes aquellas que en la parcelación de nuestros cursos también son incluidas,

3 Véase Anexo 2.

4 Dentro del contenido programático que en la actualidad se desarrolla en la UCC, los estudiantes son formados en el uso del *software* GeoGebra. Esto hace que los profesores que imparten los cursos usen únicamente tal *software* para resolver tres laboratorios propuestos. Ocasionalmente, algunos docentes expanden el uso de GeoGebra para la resolución de problemas sugeridos dentro de las sesiones de clase.

como la socialización de los contenidos propios del curso, ello, partiendo de unos modelos conocidos, de tal manera que posteriormente se ejecuten proyectos establecidos por los profesores que dirigen los cursos. Lo que se pretende en esta etapa de pre-modelación es que los educandos al final del proceso, sean capaces de dar cuenta de los conceptos estudiados, mostrando ejemplos traídos de sus realidades profesionales particulares.

Propuesta metodológica de enseñanza-aprendizaje basada en modelación matemática

Como profesores universitarios, y con fundamento en nuestros años de experiencia en la enseñanza del álgebra lineal, somos conscientes de la necesidad imperante de formular, validar e institucionalizar nuevos modelos y métodos de enseñanza. Aceptamos la importancia que para ello tiene considerar los contextos profesionales de los estudiantes universitarios, de tal forma que tanto ingenieros como economistas sean capaces de reconocer en el estudio del álgebra lineal, algo más que un curso obligatorio de su ciclo de formación básica. Buscamos hacer que los profesionales en formación admitan y entiendan que el estudio de los conceptos contenidos en las parcelaciones y en los Syllabus de sus cursos, les son relevantes en todo su proceso formativo.

Sin embargo, sabemos que tal cambio no se da de un semestre al otro y que el camino del investigador cuenta con muchos más detractores que precursores; no obstante, con base en las experiencias de otros investigadores del mundo, juzgamos trascendental empezar a andar este camino.

La tabla 1 y los anexos de este documento ratifican los cuatro modelos que citamos líneas arriba. Estos anexos dan buena cuenta de que lo encontrado por Biembengut y Hein (1997), en lo que atañe a su implementación de MM, valida nuestra propuesta.

Tabla 1. Etapas de desarrollo del modelo y su respectiva asociación con las fases de la secuencia sugerida por Biembengut y Hein

Fases	Definición de las letras en \mathbb{R} ⁵ Vectorización ⁶ Definición del logo en GeoGebra ⁷ Construcción del sólido ⁸
Justificación del proceso	El proceso de inicio de cursos en la UCC plantea socializar el plan de estudios de las asignaturas, seguidamente se justifica y contextualiza la conveniencia de estudiar estos contenidos dentro de situaciones reales
Elección del tema⁹	El profesor guía la escogencia del tema a trabajar basado en los intereses de los estudiantes, asegurándose de que estos reconozcan el alcance y la aplicabilidad de los mismos; además de propender por ajustarse con suficiente “libertad y versatilidad” los contenidos programáticos con algún objeto que pudiera ser abordado y realizado en tiempo real
Desarrollo de contenido programático	En diferentes sesiones se abordan los conceptos necesarios para llevar a cabo el proyecto dentro del plan de estudios
Ejemplos análogos - fijación de conceptos	Con las sesiones previas al trabajo de construcción en MATLAB y GeoGebra, los estudiantes deben resolver situaciones en las cuales dado un modelo propuesto del libro deben contextualizar los conceptos matemáticos en los modelos dados ¹⁰

[Continúa](#) →

5 Véase Anexo 1.

6 Véase Anexo 2.

7 Véase Anexo 3.

8 Véase Anexo 4.

9 Como nuestros estudiantes no han sido formados en MM, en este primer “experimento” el tema fue elegido por los docentes, según las directrices del contenido programático, teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos previamente a lo largo del curso.

10 A modo de ejemplo, en el plan de estudios encontramos sesiones de clases dedicadas a revisar dominio, rango, inversa, intercepto con los ejes, máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento, entonces se decidió partir del modelo que el libro guía proporcionaba y previo a la explicación de los conceptos mencionados, se pidió plantear el modelo matemático que resuelve la situación, luego se realizó la gráfica en MATLAB y posteriormente, se interpretó y analizó a partir de esta, el significado de dichos conceptos en la situación real del problema; se hizo especial énfasis en la escritura de las respuestas no solo en notación matemática sino en frases con palabras propias que hicieran saber lo que significaban en el modelo real.

<p>Evaluación y convalidación de los resultados</p>	<p>Los resultados obtenidos se evalúan de la siguiente manera para cada uno de los grupos: primero se verifica que cada grupo tenga su objeto definido funcionalmente, después se comparan los resultados propios con los de otro grupo de compañeros. Por último, los estudiantes deben decidir cuál de los modelos está mejor desarrollado analizando las condiciones particulares de cada modelo. Específicamente verificar si los resultados alcanzados cumplen los contenidos programáticos, además, reconocer la aproximación a los objetos reales</p>
--	--

Fuente: sin datos.

Consideraciones finales

Con este trabajo queremos mostrar los avances y resultados de una primera etapa de sensibilización con docentes y estudiantes, es primordial resaltar que este espacio nos parece pertinente para abordar la importancia que tiene el uso de *software* (MATLAB y GeoGebra) en el desarrollo de la presente investigación. En este momento de la historia “la incorporación de las nuevas tecnologías electrónicas de la información y la comunicación, ya sea como una herramienta de trabajo, como apoyo en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje o como un medio por sí mismo” (Cabero, 2006, p. 168), median y regulan el proceso de enseñanza-aprendizaje. En nuestro caso, el objetivo es brindar herramientas al futuro ingeniero y economista para que se actualice en conocimiento y tecnologías modernas.

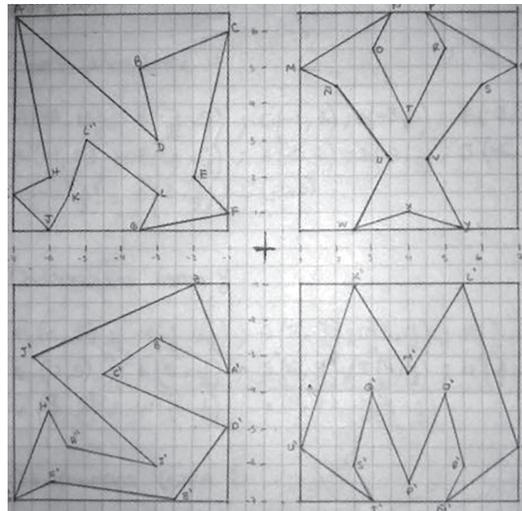
Estamos convencidos de que los modelos abordados fueron oportunos, ya que mantuvieron el interés de los estudiantes durante el tiempo de ejecución, además varios colegas que no forman parte de esta investigación, reconocieron su valor y manifestaron su deseo de vincularse (desde sus dominios disciplinares) al proyecto, para aportar de una manera eficaz al desarrollo de una propuesta metodológica para la enseñanza del álgebra lineal basada en la MM, para los programas de ingeniería y economía.

Referencias

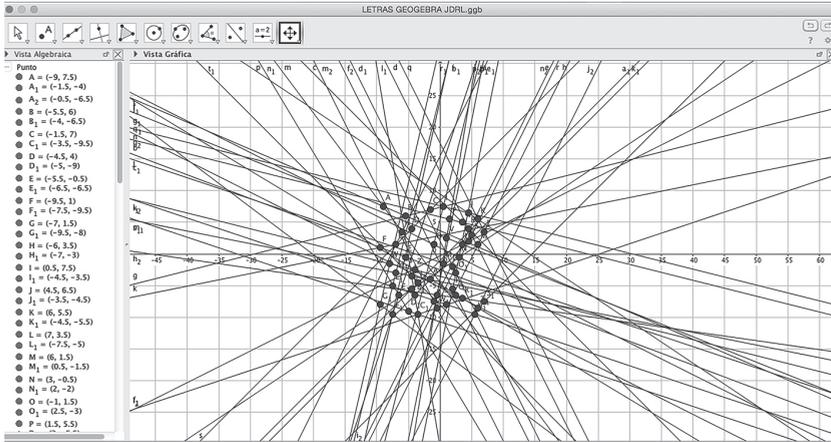
- Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería. (2007). El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación. Recuperado de: <https://www.acofi.edu.co/>
- Bassanezi, R. C. & Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13-25.
- Biembengut, M. S. & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=166725>
- Biembengut, M. S. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16, 105-125. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Camarena, P. (2011). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/10568/10005>
- Villa, J. A. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 27. Recuperado de: <http://revistavirtual.ucn.edu.co/>

Anexos

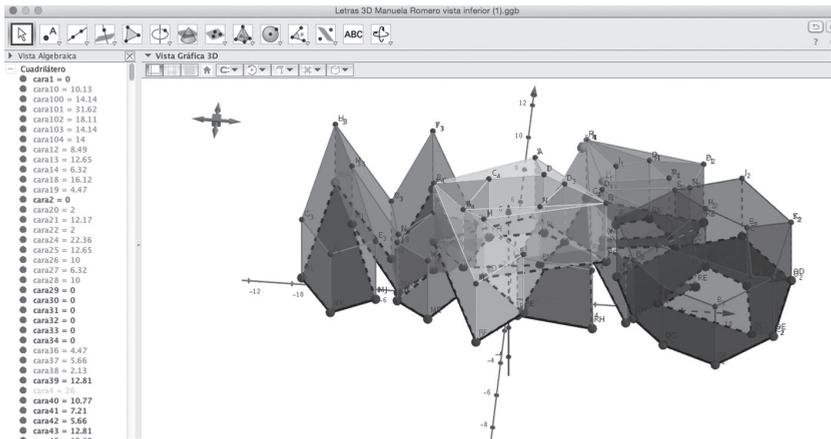
Anexo 1. Definición de las letras en \mathbb{R}^2



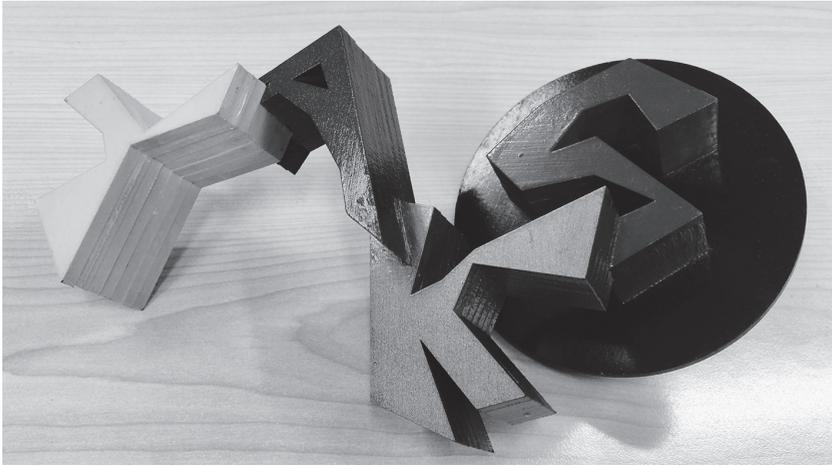
Anexo 2. Vectorización



Anexo 3. Definición del logo en GeoGebra



Anexo 4. Construcción del sólido



Anexo 5. Presentación del trabajo por parte de los estudiantes

UNIVERSIDAD CATÓLICA de Colombia

UN CATÓLICA

UN EJEMPLO DE MODELACION MATEMATICA APLICANDO LOS CONCEPTOS DEL ALGEBRA LINEAL

Autor: Heiber Sánchez Méndez
Docente: John Freddy Morales García

RESUMEN
En este trabajo se presenta de una manera clara los conceptos del álgebra lineal a través de diferentes aplicaciones, se puede observar cómo se relaciona la geometría con el álgebra lineal, se muestran ejemplos de aplicaciones de álgebra lineal en la vida cotidiana, se muestran ejemplos de aplicaciones de álgebra lineal en la vida cotidiana, se muestran ejemplos de aplicaciones de álgebra lineal en la vida cotidiana.

INTRODUCCION
Con el ejemplo de modelación matemática se pretende aplicar conceptos de geometría, matemáticas, álgebra lineal, matrices, vectores, grafos y Geogebra, demostrando cómo se relacionan y se aplican en la vida cotidiana de los conceptos en álgebra lineal.

DESARROLLO DEL PROYECTO
1. Se elige un 4 vértices de nuestro triángulo y se aplica para desarrollar el proyecto en este caso es... $(1, 1)$ y $(1, 2)$

2. Se toman dos rectas de cada lado para generar las ecuaciones de la recta por los diferentes métodos:
- Igualación
- Reducción
- Determinantes
- Grafos
- Geogebra

3. Utilizamos herramientas tecnológicas a través de Geogebra, para diseñar las letras en forma de coordenadas aplicando los mismos coordenadas en 2D.

4. Realizamos una proyección tridimensional de las 4 caras del objeto en 2D y 3D con sus respectivas coordenadas.

CONCLUSIONES
Los ejercicios realizados como plantea David C. Lay, en su libro Álgebra Lineal Y sus Aplicaciones, "los ejercicios se concentran en enseñar a razonar antes que en realizar cálculos mecánicos", y más aún cuando se aplica sobre modelación matemática, ya que ayuda a la comprensión de los temas vistos durante el curso de Álgebra Lineal.

BIBLIOGRAFIA
♦ Libro Álgebra Lineal, Stanley Grossman (2004)
♦ Libro Álgebra Lineal y sus aplicaciones, David C. Lay (2012)

UNIVERSIDAD CATÓLICA de Colombia