

ЭНЕРГЕТИКА И ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА

УДК 681.51

МНОГОМЕРНО-ВРЕМЕННОЙ ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕМЕНТОВ САУ

А.В. КОЗЛОВ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого»,
Республика Беларусь*

1. Основы многомерно-временного операторного метода анализа и синтеза элементов САУ

В отличие от традиционных методов анализа и синтеза элементов САУ с модуляцией или переменными параметрами, базирующихся на представлении произведений функций с помощью одномерного преобразования Лапласа, можно использовать многомерное преобразование Лапласа [5] и его модификацию по Луковникову [2], что позволяет устранить необходимость определения интеграла свертки и связанные с этим неудобства.

Научная идея данного многомерно-временного метода заключается в переходе от естественной одномерной временной области с переменной t к искусственной многомерной временной области с независимыми временными переменными t_1, t_2, \dots, t_n , принадлежащими к различным сомножителям, и в последующем изображении полученной функции по модифицированному многомерному преобразованию Лапласа [2].

1.1. Многомерно-временная модификация интегрального преобразования по Лапласу

В работе [5] изложены основные понятия, определения, леммы и теоремы, обобщающие известное интегральное преобразование Лапласа на функцию многих переменных $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, удовлетворяющую условиям кусочной дифференцируемости, предельного возрастания и равенства нулю при отрицательных значениях независимых переменных.

Применим это преобразование к случаю произведения функций отдельных переменных

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n f_k(t_k), \quad (1.1)$$

причем учтем, что комплексные операторы $p_k = \alpha_k \cdot 1_k + \beta_k \cdot i_k$ имеют различные вещественные 1_k и мнимые i_k единицы.

Изображением по Лапласу функции-оригинала (1.1) назовем функцию комплексных переменных p_k :

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, \dots, p_n) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{k=1}^n f_k(t_k) \cdot \exp \left[- \sum_{k=1}^n p_k \cdot t_k \right] \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_n = \\ &= \prod_{k=1}^n F_k(p_k), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $F_k(p_k)$ – изображение по Лапласу одномерной функции $f_k(t_k)$.

Обратным преобразованием (обращением) по Лапласу изображения (1.2) к оригиналу (1.1) будет равенство

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n f_k(t_k) = \left[\prod_{k=1}^n (2 \cdot \pi)^n \cdot i_k \right]^{-1} \cdot \int_{i_1-1-i_1 \cdot \infty}^{i_1-1+i_1 \cdot \infty} \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \int_{i_n-1-i_n \cdot \infty}^{i_n-1+i_n \cdot \infty} \prod_{k=1}^n F_k(p_k) \cdot \exp \left[- \sum_{k=1}^n p_k \cdot t_k \right] \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdot \dots \cdot dp_n. \quad (1.3)$$

Итак, из (1.2) и (1.3) следует, что многомерное преобразование по Лапласу многомерной функции, равной произведению одномерных функций, определяется через произведение их одномерных преобразований. Кратко это будем записывать следующим образом:

$$\prod_{k=1}^n f_k(t_k) \bullet = \bullet \prod_{k=1}^n F_k(p_k) \text{ или } \prod_{k=1}^n F_k(p_k) \bullet = \bullet \prod_{k=1}^n f_k(t_k). \quad (1.4)$$

Основные свойства многомерно-временного операторного преобразования приведены в [2].

1.2. Типовые многомерные динамические звенья без модуляции

Под многомерным звеном без модуляции понимается звено, входной и выходной сигналы которого имеют одинаковую размерность. Например, если на входе такого звена имеется двумерный сигнал $X_{\text{вх}}(p_1, p_2)$, то на его выходе будет также двумерный сигнал $X_{\text{вых}}(p_1, p_2)$.

На примере форсирующего звена первого порядка покажем, как, используя свойства многомерно-временного операторного метода (МВОМ), можно получать передаточные функции типовых многомерных динамических звеньев без модуляции.

Известно, что форсирующее звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$x_{\text{вых}}(t) = T \frac{d x_{\text{вх}}(t)}{dt} + x_{\text{вх}}(t), \quad (1.5)$$

где T – постоянная времени.

Если входной сигнал представлен в многомерном временном виде $x_{\text{вх}}(t) = \prod_{k=1}^n x_{\text{вх}k}(t_k)$, то уравнение (1.5) можно записать в многомерном операторном виде, следуя [3], как

$$X_{\text{вых}}(p_1, p_2, \dots, p_n) = T \sum_{k=1}^n p_k \cdot \sum_{k=1}^n X_{\text{вх}k}(p_k) + \prod_{k=1}^n X_{\text{вх}k}(p_k),$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – операторы.

Отсюда видно, что передаточная функция форсирующего звена первого порядка будет определяться следующим соотношением

$$W(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{X_{\text{вых}}(p_1, p_2, \dots, p_n)}{X_{\text{вх}}(p_1, p_2, \dots, p_n)} = T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1. \quad (1.6)$$

Полученные подобным (1.6) образом передаточные функции типовых звеньев без модуляции сведены в табл. 1.1, где через K обозначен коэффициент передачи, а через ξ – коэффициент затухания.

Передаточные функции типовых многомерных звеньев без модуляции

1) 2) 3) 4) Размерность звеньев Тип звеньев	5) Одномерные	6) Многомерные	7) двумерные	8) N-мерные
Безинерционное	K	K	K	K
Идеальное дифференцирующее	$T \cdot p$	$T(p_1 + p_2)$	$T(p_1 + p_2)$	$T \sum_{k=1}^n p_k$
Форсирующее первого порядка	$T \cdot p + 1$	$T(p_1 + p_2) + 1$	$T(p_1 + p_2) + 1$	$T \sum_{k=1}^n p_k + 1$
Форсирующее второго порядка	$T^2 \cdot p^2 + 2 \times \xi \cdot T \cdot p + 1$	$T^2(p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \times (p_1 + p_2) + 1$	$T^2(p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \times (p_1 + p_2) + 1$	$T^2 \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1$
Идеальное интегрирующее	$(T \cdot p)^{-1}$	$(T(p_1 + p_2))^{-1}$	$(T(p_1 + p_2))^{-1}$	$\left(T \sum_{k=1}^n p_k \right)^{-1}$
Апериодическое первого порядка	$(T \cdot p + 1)^{-1}$	$(T(p_1 + p_2) + 1)^{-1}$	$(T(p_1 + p_2) + 1)^{-1}$	$\left(T \sum_{k=1}^n p_k + 1 \right)^{-1}$
Апериодическое второго порядка	$(T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \times p + 1)^{-1}$	$(T^2(p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \times (p_1 + p_2) + 1)^{-1}$	$(T^2(p_1 + p_2)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \times (p_1 + p_2) + 1)^{-1}$	$\left(T^2 \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \sum_{k=1}^n p_k + 1 \right)^{-1}$

1.3. Типовые многомерные звенья с модуляцией

Под многомерным звеном с модуляцией понимается звено, входной и выходной сигналы которого имеют разную размерность. Например, если на входе такого звена имеется одномерный сигнал $X_{\text{вх}}(p_1)$, то на его выходе сигнал будет, по меньшей мере, двумерным $X_{\text{вых}}(p_1, p_2)$.

Такого рода звеньями, например, в системах автоматического регулирования на несущей переменного тока, являются модуляторы и их последовательное соединение через пассивные четырехполюсники [3].

Будем рассматривать амплитудную модуляцию в предположении, что модулятор и демодулятор представляют собой идеальные балансные устройства, перемножающие входные и опорные сигналы. Тогда в одномерной временной области t выходной сигнал $x_{\text{вых}}(t)$ последовательного соединения «модулятор – четырехполюсник – демодулятор» можно записать через входной сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t) \cdot x_{\text{ом}}(t) \cdot f(t) \cdot x_{\text{од}}(t), \quad (1.7)$$

где $x_{\text{ом}}(t), x_{\text{од}}(t)$ – опорные временные сигналы модулятора и демодулятора, соответственно, а $f(t)$ – временная передаточная функция четырехполюсника.

Введем искусственное независимое трехмерное временное пространство, так что выражение (1.7) примет вид

$$x_{\text{ВЫХ}}(t_1, t_2, t_3) = x_{\text{ВХ}}(t_1) \cdot x_{\text{ОМ}}(t_2) \cdot f(t_1, t_2) \cdot x_{\text{ОД}}(t_3). \quad (1.8)$$

Тогда трехмерное изображение выходного сигнала (1.8) по Лапласу согласно [2] можно представить как

$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2, p_3) = X_{\text{ВХ}}(p_1) \cdot X_{\text{ОМ}}(p_2) \cdot F(p_1, p_2) \cdot X_{\text{ОД}}(p_3).$$

Отсюда легко получить передаточную функцию рассматриваемого последовательного соединения

$$W(p_1, p_2, p_3) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2, p_3)}{X_{\text{ВХ}}(p_1, p_2, p_3)} = X_{\text{ОМ}}(p_2) \cdot F(p_1, p_2) \cdot X_{\text{ОД}}(p_3). \quad (1.9)$$

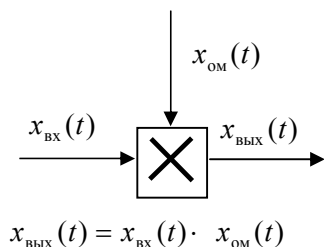
Полученные подобным (1.9) образом изображения выходных сигналов и передаточные функции типовых многомерных звеньев с модуляцией сведены в табл. 1.2, где также представлены их функциональные схемы.

Таблица 1.2

Передаточные функции типовых многомерных звеньев с модуляцией

9) Тип звена с модуляцией
Идеальный модулятор (демодулятор)

10) Функциональная схема



11) Изображение выходного сигнала и передаточная функция

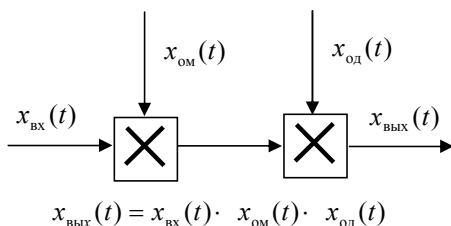
$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2) = X_{\text{ВХ}}(p_1) \times X_{\text{ОМ}}(p_2)$$

$$W(p_2) = X_{\text{ОМ}}(p_2)$$

Окончание табл. 1.2

12) Тип звена с модуляцией
Модулятор–демодулятор

13) Функциональная схема

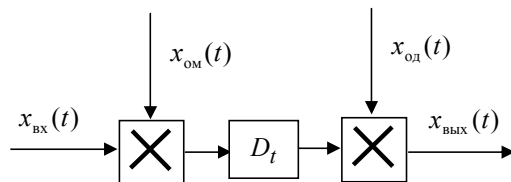


14) Изображение выходного сигнала и передаточная функция

$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2, p_3) = X_{\text{ВХ}}(p_1) \times X_{\text{ОМ}}(p_2) \cdot X_{\text{ОД}}(p_3)$$

$$W(p_2, p_3) = X_{\text{ОМ}}(p_2) \times X_{\text{ОД}}(p_3)$$

Модулятор – пассивный четырехполюсник – демодулятор



$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2, p_3) = X_{\text{ВХ}}(p_1) \times X_{\text{ОМ}}(p_2) \cdot W(p_1, p_2) \times X_{\text{ОД}}(p_3)$$

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = D_t [x_{\text{ВХ}}(t) \cdot x_{\text{ОМ}}(t)] \times \\ \times x_{\text{ОД}}(t)$$

$$W(p_1, p_2, p_3) = X_{\text{ОМ}}(p_2) \times \\ \times W(p_1, p_2) \cdot X_{\text{ОД}}(p_3)$$

1.4. Правила преобразований многомерных структурных схем

При получении многомерных передаточных функций типовых динамических звеньев использовались линейные математические операции в многомерной операторной области.

Это позволяет модифицировать известные для линейных САУ правила преобразований структурных одномерных схем на многомерные схемы с целью получения в дальнейшем общей передаточной функции всей системы.

Важно отметить, что получение передаточных функций звеньев или их соединений без обратных связей принципиально отличается от случая наличия обратных связей. Рассмотрим правила структурных преобразований для этих двух классов соединений раздельно.

1.4.1. Структурные преобразования соединений динамических звеньев без обратных связей

Последовательное соединение звеньев

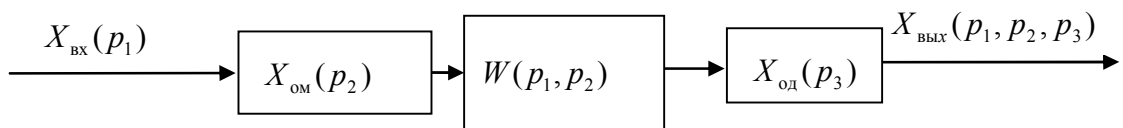
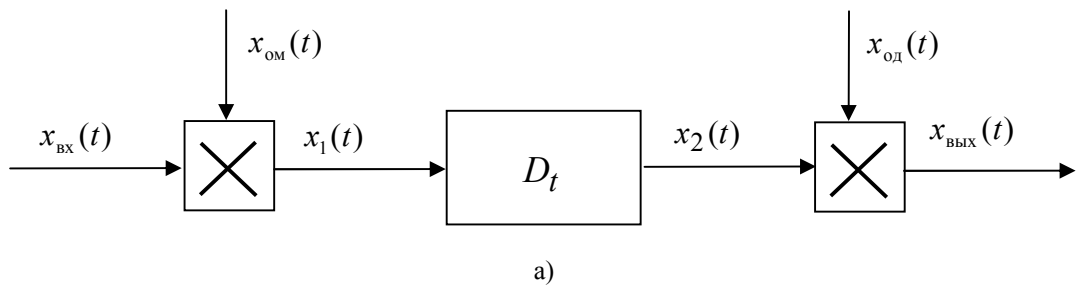
Итак, будем представлять звено «модулятор – линейный четырехполюсник – демодулятор» в виде структурных схем, представленных на рис. 1.1, где $W(p_1, p_2, p_3) = X_{\text{ОМ}}(p_2) \cdot W(p_1, p_2) \cdot X_{\text{ОД}}(p_3)$.

При последовательном соединении звеньев без модуляции число искусственных независимых переменных не добавляется и тогда согласно уравнениям для случая на рис. 1.2, а

$$X_{\text{ВЫХ1}}(p_1, p_2) = X_{\text{ВХ}}(p_1, p_2) \cdot W_1(p_1, p_2),$$

$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2) = X_{\text{ВЫХ1}}(p_1, p_2) \cdot W_2(p_1, p_2),$$

$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2) = X_{\text{ВХ}}(p_1, p_2) \cdot W_1(p_1, p_2) \cdot W_2(p_1, p_2).$$



ИЛИ

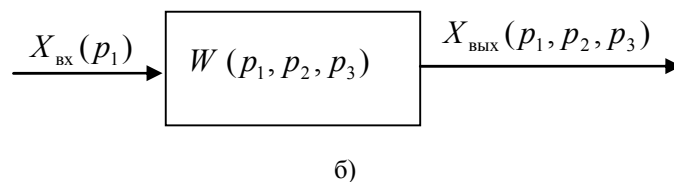


Рис. 1.1. Структурные схемы САУ «модулятор – линейный четырехполюсник – демодулятор» в мгновенных значениях (а) и в операторном (б) виде

Получен такой же, как и для линейных одномерных САУ, результат. При последовательном соединении звеньев передаточные функции перемножаются.

$$W(p_1, p_2) = W_1(p_1, p_2) \cdot W_2(p_1, p_2).$$

При последовательном соединении модулирующее-демодулирующих звеньев (динамических звеньев с модуляцией) результат оказывается тот же, но увеличивается число независимых переменных. Так, например, для случая, показанного на рис. 1.2, б,

$$W(p_1, p_2, \dots, p_5) = W_1(p_1, p_2, p_3) \cdot W_2(p_1, p_2, \dots, p_5).$$

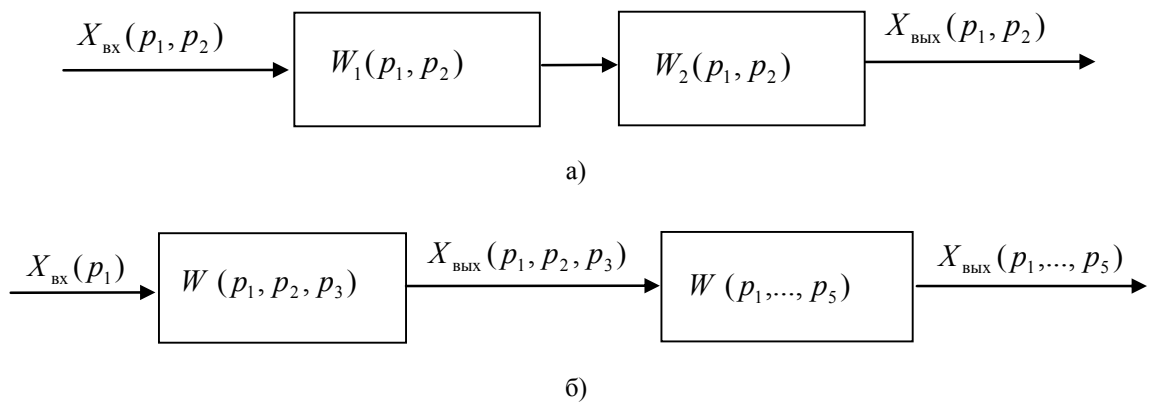


Рис. 1.2. Последовательное соединение динамических звеньев без модуляции (а) и с модуляцией (б)

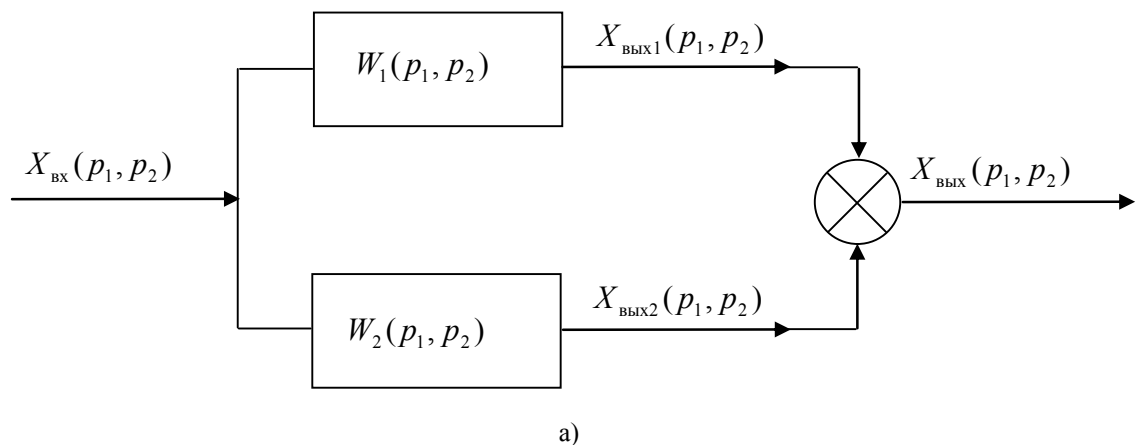
Параллельное соединение звеньев

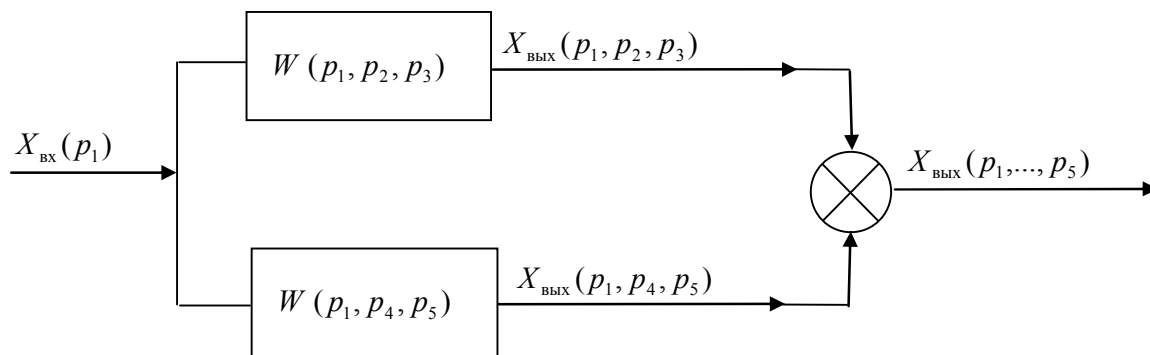
Аналогичным образом можно показать, что передаточные функции при параллельном соединении складываются, причем для четырехполюсников без модуляции (рис. 1.3, а) число переменных сохраняется

$$W(p_1, p_2) = W_1(p_1, p_2) + W_2(p_1, p_2),$$

а для четырехполюсников с модуляцией сигналов увеличивается (рис. 1.3, б)

$$W(p_1, p_2, \dots, p_5) = W_1(p_1, p_2, p_3) + W_2(p_1, p_2, \dots, p_5).$$





б)

Рис. 1.3. Параллельное соединение динамических звеньев без модуляции (а) и с модуляцией (б)

1.4.2. Структурные преобразования соединений звеньев с обратными связями

Структурная схема динамического звена без модуляции, охваченного обратной связью, представлена на рис. 1.4.

Для этого соединения можно записать временные выражения для выходного сигнала в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = (x_{\text{вх}}(t) \pm x_{\text{вых}}(t) \cdot D_{2t}) \cdot D_{1t},$$

или

$$x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t) \cdot \frac{D_{1t}}{1 \pm D_{1t} \cdot D_{2t}}. \quad (1.10)$$

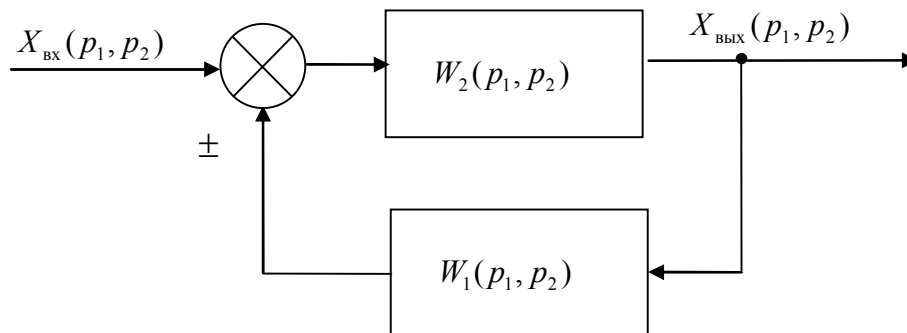


Рис. 1.4. Звено с обратной связью без модуляции

Сомножитель, стоящий при входном сигнале $x_{\text{вх}}(t)$, представляет собой некоторую временную передаточную функцию.

При преобразовании по Лапласу временных передаточных функций алгебраические операции сохраняются.

Например, для последовательного соединения $L\{D_{1t} \cdot D_{2t}\} = W_1(p) \cdot W_2(p)$ интеграл свертки не требуется.

Следовательно, результат (1.10), например, в двумерной операторной области, может быть записан как правило структурного преобразования в виде

$$W(p_1, p_2) = \frac{W_1(p_1, p_2)}{1 \pm W_1(p_1, p_2) \cdot W_2(p_1, p_2)}.$$

Для многомерных звеньев с модуляцией, охваченных обратными связями, структурные преобразования, такие как для многомерных звеньев без модуляции, не подходят.

Рассмотрим одиночный модулирующе-демодулирующий четырехполюсник с единичной обратной связью (рис. 1.5, а). Для него в одномерной временной области можно записать выражение для выходного сигнала в виде

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВХ}}(t) \cdot \frac{f(t)}{1 \pm f(t)} = x_{\text{ВХ}}(t) \cdot \varphi(t).$$

Если перемножение сигналов осуществляется в канале обратной связи (рис. 1.5, б), то выходной сигнал можно определить в виде

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВХ}}(t) \cdot \frac{1}{1 \pm f(t)} = x_{\text{ВХ}}(t) \cdot \varphi(t).$$

Теперь видно, что введение обратной связи просто преобразует исходный блок перемножения в новый блок перемножения без обратной связи, но с другой опорной временной функцией.

В искусственной двумерной временной области тогда можно записать

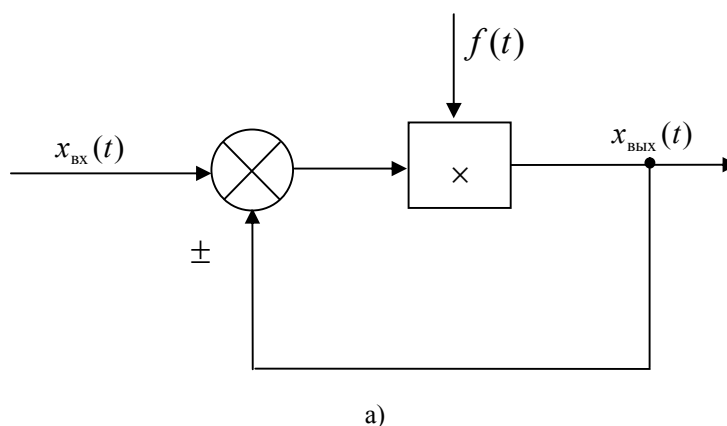
$$x_{\text{ВЫХ}}(t_1, t_2) = x_{\text{ВХ}}(t_1) \cdot \varphi(t_2).$$

В двумерной операторной области это соотношение запишется обычным образом:

$$X_{\text{ВЫХ}}(p_1, p_2) = X_{\text{ВХ}}(p_1) \cdot F(p_2), \quad (1.11)$$

где $F(p_2) = L\{\varphi(t_2)\} = L\left\{\frac{f(t_2)}{1 \pm f(t_2)}\right\}$.

Выражение (1.11) соответствует структурной схеме представленной на рис. 1.5, а, где четырехполюсник с модуляцией заменен на четырехполюсник без модуляции с передаточной функцией $F(p_2)$.



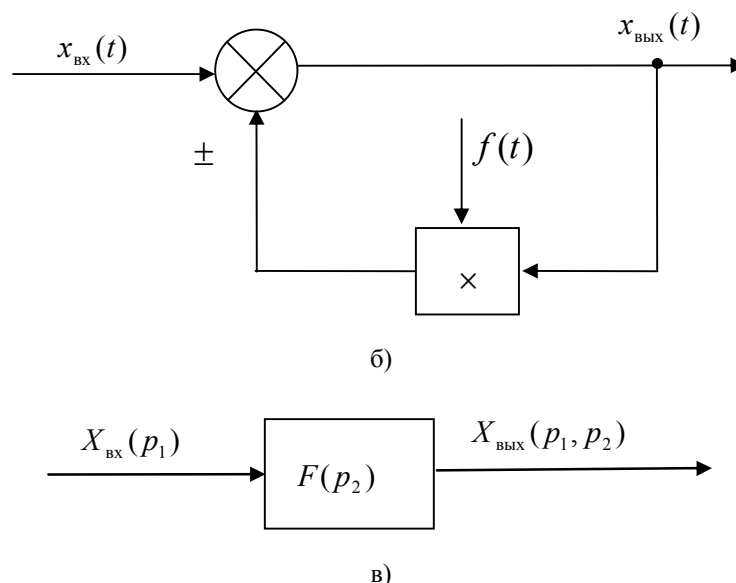


Рис. 1.5. Звено с обратной связью с модуляцией для временной области (а, б) и для многомерной операторной области (в)

Выражение (1.11) можно использовать и для других схем многомерных звеньев с модуляцией, например содержащих в прямом канале и канале обратной связи динамические звенья.

2. Применение многомерно-временного операторного метода к исследованию структуры двухфазного АД

В работе [4] получено уравнение движения ротора двухфазного асинхронного электродвигателя (АД) в следующем виде

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \left[u_{\beta} \cdot \int u_{\alpha} \cdot dt - u_{\alpha} \cdot \int u_{\beta} \cdot dt - \omega \cdot \left(\int u_{\beta} \cdot dt \right)^2 \right], \quad (2.1)$$

где u_{α} , u_{β} – напряжения на обмотках управления и возбуждения; ω – скорость вращения двигателя; J – момент инерции двигателя; R – приведенное сопротивление обмотки ротора.

По уравнению (2.1), в качестве примера, построим структурную схему двухфазного АД в одномерной временной области (рис. 2.1), например, при амплитудной модуляции напряжения управления

$$u_{\alpha} = m \cdot u_y = \Omega \cdot t \cdot U_{ym} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t),$$

где напряжение возбуждения $u_{\beta} = U_{vm} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$, а через $K = \frac{1}{R \cdot J}$ – обозначен коэффициент передачи электродвигателя.

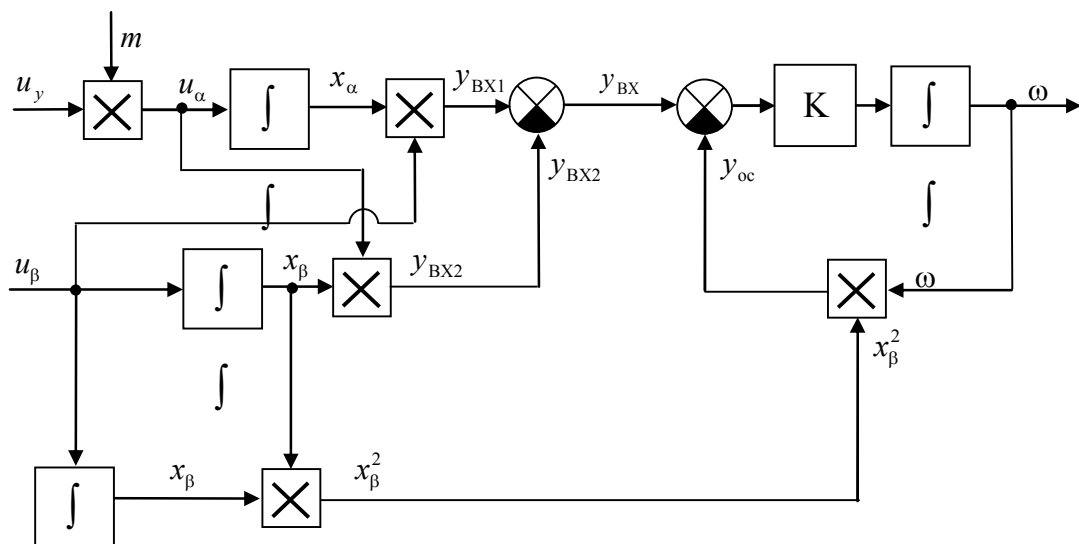


Рис. 2.1. Структурная схема двухфазного АД во временной области

Так как структурная схема двухфазного АД содержит много блоков перемножения, то для расчета угловой скорости вращения двигателя ω целесообразно применить многомерно-временной операторный метод. Для этого изобразим структурную схему в многомерной операторной области в виде, представленном на рис. 2.2.

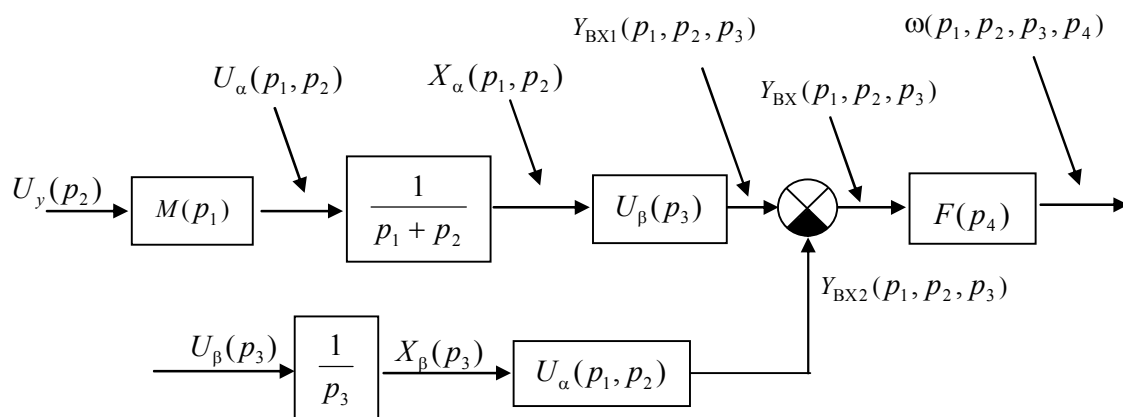


Рис. 2.2. Структура двухфазного асинхронного двигателя в многомерной операторной области

Запишем изображения сигналов u_α , u_β в многомерной области

$$U_\alpha(p_1, p_2) = M(p_1) \cdot U_y(p_2) = \frac{\Omega}{p_1^2} \cdot \frac{U_{ym} \cdot p_2}{p_2^2 + \omega_0^2}, \quad U_\beta(p_3) = U_{vm} \cdot \frac{\omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2}.$$

В многомерной операторной области входной сигнал $Y_{BX}(p_1, p_2, p_3)$ будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned} Y_{BX}(p_1, p_2, p_3) &= Y_{BX1}(p_1, p_2, p_3) - Y_{BX2}(p_1, p_2, p_3) = \\ &= A(p_1, p_2) \cdot \frac{U_{vm} \cdot \omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2} - B(p_3) \cdot \frac{\Omega}{p_1^2} \cdot \frac{U_{ym} \cdot p_2}{p_2^2 + \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$A(p_1, p_2) = \frac{\Omega}{p_1^2} \cdot \frac{U_{ym} \cdot p_2}{p_2^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p_1 + p_2}, \quad B(p_3) = \frac{U_{vm} \cdot \omega_0}{p_3^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p_3}.$$

Постепенно, сначала по оператору p_1 , потом по p_2 и, наконец, по оператору p_3 , перейдем во временную область и получим выражение:

$$\begin{aligned} y_{вх} &= \frac{U_{ym} \cdot U_{vm} \cdot \Omega}{\omega_0} \cdot t \left(\sin^2(\omega_0 \cdot t) + \cos^2(\omega_0 \cdot t) \right) + \frac{U_{ym} \cdot U_{vm} \cdot \Omega}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\ &= \frac{U_{ym} \cdot U_{vm} \cdot \Omega}{\omega_0^2} \cdot \left(\omega_0 \cdot t + \frac{\sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{2} \right). \end{aligned}$$

Согласно (1.11), многомерное изображение сигнала угловой скорости вращения $\omega(p_1, p_2, p_3, p_4)$ можно определить в виде

$$\omega(p_1, p_2, p_3, p_4) = Y_{вх}(p_1, p_2, p_3) \cdot F(p_4) \quad (2.3)$$

где $F(p_4) = \frac{\omega(p_1, p_2, p_3, p_4)}{Y_{вх}(p_1, p_2, p_3)} = L\{\varphi(t_4)\}$ – многомерная передаточная функция опорной временной функции $\varphi(t_4)$, которая определяется из решения дифференциального уравнения (2.4), которое получено при $t = t_1 = t_2 = t_3 = t_4$:

$$y_{вх} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \cdot \left(\frac{dy_{вх}}{dt} + K \cdot x_{\beta}^2 \cdot y_{вх} \right) = K \cdot y_{вх}. \quad (2.4)$$

Таким образом, уравнения (2.2), (2.3), (2.4) полностью определяют угловую скорость вращения двухфазного АД в многомерной операторной области.

Из структурной схемы (рис. 2.1) видно, что x_{β}^2 – это гармоническая функция, поэтому приходится иметь дело с дифференциальным уравнением с переменными параметрами, получение точного решения которого представляется довольно затруднительным.

Решим поставленную задачу, имея в виду тот факт, что электродвигатель представляет собой фильтр низких частот [1]. Из-за этого колебания с частотами, близкими к несущей, сильно ослабляются. Следовательно, сигналы $y_{вх}$ и x_{β}^2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{вх} &= \frac{U_{ym} \cdot U_{vm} \cdot \Omega}{\omega_0^2} \cdot \left(\omega_0 \cdot t + \frac{\sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{2} \right) \approx \frac{U_{ym} \cdot U_{vm} \cdot \Omega}{\omega_0} \cdot t. \\ x_{\beta}^2 &= \frac{U_{vm}^2}{\omega_0^2} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{U_{vm}^2}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \right) \approx \frac{U_{vm}^2}{2 \cdot \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя структурную схему (рис. 2.1), можно получить дифференциальное уравнение для нахождения скорости вращения двухфазного АД:

$$\frac{d\omega}{dt} + x_{\beta}^2 \cdot \omega = K \cdot y_{вх} \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{U_{vm}^2 \cdot K}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega = \frac{K \cdot U_{vm} \cdot U_{ym} \cdot \Omega}{\omega_0} \cdot t.$$

Решая это неоднородное линейное уравнение первого порядка для нулевого начального условия $\omega(0) = 0$, получим

$$\omega = 2 \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0}{U_{vm}} \cdot t - 4 \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0^3}{U_{vm}^3 \cdot K} + 4 \frac{U_{ym} \cdot \Omega \cdot \omega_0^3}{U_{vm}^3 \cdot K} \cdot e^{-\frac{U_{vm}^2 \cdot K}{2 \cdot \omega_0^2} t}.$$

Этот результат совпадает с известным результатом плавного пуска двухфазного АД, что подтверждает правомерность применения многомерно-временного операторного метода анализа и синтеза элементов САУ.

Заключение

Одномерный операторный метод на основе одномерного преобразования Лапласа неудобен для тех классов САУ, где имеются элементы, сигналы которых представляются в виде произведения по меньшей мере двух временных функций.

Предлагаемый многомерно-временной метод позволяет упростить математическую базу анализа и синтеза подобных САУ.

Литература

1. Власов Н. П. Теория линейных следящих систем, работающих на переменном токе / Н. П. Власов. – М. : Энергия, 1964. – С. 103–128.
2. Луковников В. И. Многомерный операторный метод анализа систем с модуляцией // Вестник КГТУ, посвящ. 65-летию проф. Соустина Б. П. / В. И. Луковников. – Красноярск : Изд. КГТУ, 1998. – С. 102–110.
3. Луковников В. И. Типовые многомерные динамические звенья / В. И. Луковников, А. В. Козлов // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – Гомель 2000. – № 2. – С. 47–54.
4. Луковников В. И. Электропривод колебательного движения / В. И. Луковников. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – С. 91–96.
5. Смышляева Л. Г. Преобразование Лапласа функций многих переменных / Л. Г. Смышляева. – Л. : Изд. ЛГУ, 1981. – 132 с.

Получено 20.06.2005 г.