ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ С ВЫПУКЛЫМИ МОНОТОННЫМИ СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Богданова Н. С.
Кафедра информатики, Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Республика Беларусь
E-mail: natashait@gstu.by

Рассмотрена модельная задача о рюкзаке. Предложена схема решения задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями.

Введение

Задача одномерной оптимальной по стоимости упаковки более полувека не оставляет равнодушными алгоритмистов всего мира. Интерес к задаче о рюкзаке обусловлен в первую очередь многообразием практического приложения задачи. Помимо вопросов упаковки в явном виде (оптимальная загрузка судов, вагонов) задача одномерной упаковки применима к целому ряду финансово-экономических задач. Например, планирование инвестиций с максимальной выгодой. В то же время к задаче орюкзаке успешно сводится ряд задач логистики. Возросла актуальность применения и в технологических процессах — в настоящий момент поиск оптимальной упаковки является основой алгоритмов распределения дискового пространства и размещения элементов на микросхемах.

Можно выделить два основных семейства методов решения данной задачи – точные и эвристические. Точные методы позволяют гарантировать оптимальность найденного решения. К этому классу можно отнести различные варианты метода ветвей и границ, отсечений и др. Для точных методов характерна высокая трудоемкость, которая часто не позволяет применять их при решении реальных задач. Эвристические методы основаны на предположениях о свойствах оптимального решения. В отличие от точных, эвристические методы не гарантируют оптимальность найденного решения. Однако в условиях ограниченности вычислительных ресурсов эвристики зачастую являются единственным способом нахождения решения. Распространены и гибридные методы, при которых эвристические методы применяются для нахождения решения, а точные – для доказательства оптимальности.

Поскольку разработка эффективных точных алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации (ДО) общего вида, как отмечено выше, представляется сомнительной, то имеет смысл исследовать более узкие классы задач и строить более эффективные методы, основанные на изучении особенностей частных подклассов задач. Следует отметить, что успехи, достигнутые к настоящему времени в теории и практике ДО достаточно часто были связаны именно со специальной структурой задач ДО. Действительно, хорошие результаты получены при решении задач ДО, обладающих специальной структурой (так, методы отсечения успешно применялись при решении задач о покрытии, последовательностные схемы В. А. Емеличева особенно хорошо работают при решении задач о размещении, высокая эффективность метода ветвей и границ достигается при решении задач с ограничениями специального вида, например, многократного выбора [1]), градиентные алгоритмы хорошо работают на матроидах [2] и т. д.

I. Задача о рюкзаке

Одной из модельных задач дискретной оптимизации является задача о рюкзаке, которая в наиболее общей постановке имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \le \beta,$$
$$\alpha_i, \beta > 0; \quad (2)$$

$$0 \le x_i \le h_i; \alpha_i h_i \le \beta, \quad (3)$$

где x_i – целые, $f_i(0) = 0, f_i(x_i)$ – неубывающие функции. многими авторами исследовалась эффективность субоптимальных алгоритмов решения различных частных случаев задачи (1) – (3): линейной $f_i(x_i) = c_i x_i$, с фиксированными доплатами $f_i(x_i) = c_i' x_i + c_i'' signx$, выпуклой ($f_i(x_i)$ – дискретно-выпуклые) функции [3]. Актуальность исследования предопределена широкой распространенностью и важностью прикладных проблем, формулируемых в рамках задач ранцевого типа.

В настоящей работе рассматривается задача с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется выпуклой, если её область определения является выпуклым множеством и при всех x, $y \in dom f$ и $a \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f(ax + (1-a)y) \le af(x) + (1-a)f(y).$$

Будем считать, что $f_i(x_i)$ – порядково-выпуклые функции для $1 \le i \le n$.

Определение 2. Пусть H – упорядоченное множество (т.е. множество с заданным на нём частичным порядком), функция $f : H \to R$ называется порядково-выпуклой на H, если

$$f(y) \le \frac{f(x)+f(z)}{2} \forall x,y,z \in H, x<y<z.$$

При построении градиентного алгоритма использован следующий факт, справедливый для координатно-выпуклых функций. Пусть выбран произвольный вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и

$$A = \frac{\max(f_i(x_i)-f_i(x_i-1))}{a_i},$$

$$B = \frac{\min(f_i(x_i)-f_i(x_i-1))}{a_i}.$$

Тогда, если вектор x является допустимым для задачи (1) – (3), то существует такое допустимое решение градиентного типа x^g для задачи (1) – (3), координаты которого удовлетворяют условию $x_i^g \ge x_i^0$, для всех i, что $x_i^0 \le x_i$ и

$$\frac{(f_i(x_i^0)-f_i(x_i^0-1))}{a_i} \ge B.$$

Если вектор x является недопустимым, то существует такое допустимое решение градиентного типа x^g , координаты которого удовлетворяют условию $x_i^g \le x_i^0$, где

$$\frac{(f_i(x_i^0)-f_i(x_i^0-1))}{a_i} < A.$$

Определим для каждой переменной $x_i = 1,2,...,n$ различные возможные значения:

$$S_i^{k_i} = \{0, k_i=0; 2^{k_i-1}, k_i=1,2,...$$

$$..., [\log_2 h_i]; h_i, k_i \ge [\log_2 h_i]+1.\}.$$

Здесь $[\log_2 h_i]$ – наименьшее целое, не меньше $\log_2 h_i$.

Пусть x^* – оптимальное решение задачи (1) – (3). Определим для каждого i, $1 \le i \le m$ такое целое число p_i, что

$$S_i^{p_i-1} \le x_i^* \le S_i^{p_i}.$$

В случае $x_i'' = 0$ полагаем $p_i = 1$. Пусть

$$\Delta_i(y,x) = \frac{(f_i(y)-f_i(x))}{a_i(y-x)}.$$

Поскольку в задаче рассматриваются неубывающие функции, то полезно будет воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1. Для неубывающей функции $f_i(x_i$ и $x^* > 0$ справедливо соотношение

$$\Delta_i(S_i^{p_i},0) \ge \frac{\Delta_i(x^*,0)}{2}.$$

Лемма 2. Если a, b ,c, x, y – неотрицательные числа такие, что $\frac{x}{a} > \frac{y}{b}$ и $c < b$, то $x + \frac{yc}{b} \ge \frac{(x+y)(a+c)}{a+b}$.

Алгоритм:

1. Положить $x_i^0 = 0, x_i' = 0, x_i'' = 0, i = 1,2,...,n$.
2. Пока $\sum_{i=1}^n a_i(x_i^0) =$ [т.к. в нашем случае $a_i(x_i)$ – линейные функции] $= \sum_{i=1}^n a_i x_i^0 < b$, выполнять п. 3 – 5.

   Найти пару i_o, k_0, на которой достигается

$$\max_{i,k_i:x_i^o<S_i^{k_i}\le h_i} \Delta_i(S_i^{k_i}, x_i^o).$$

3. Положить $x_{i_0}' = x_{i_0}^0$.
4. Положить $x_{i_0}^0 = S_{i_o}^{k_{i_o}}$.
5. Найти $l_0 = arg \max f_i(h_i)$.
6. Положить $x_{l_0}'' = h_{l_0}$.

   Положить

$$x^A = arg \max \{f(x'), f(x'')\},$$

где x^A – искомое решение.

Трудоёмкость алгоритма $O((\sum_{i=1}^n [\log_2 h_i])^2)$.

Если рассматривать данную задачу на аппроксимационной решётке $Z(\alpha^i)$ [4], которая строится по формуле

$$\alpha_{i+1} = \max\{[\alpha \cdot a_i], a_i+1\},$$

то при $\alpha \le 1$ оценка точности погрешности градиентного алгоритма будет равна $\frac{1}{2}$ [5], если $\alpha > 1$, то оценка будет равна $\frac{1}{2\alpha}$ [6].

Из

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 > b \ge \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$$

Справедливо неравенство:

$$\sum_{i:x_i^0>x_i^*}^n a_i(x_i^0-x_i^*) \ge \sum_{i:x_i^*>x_i^0}^n a_i(x_i^*-x_i^0) \qquad (4)$$

Из леммы **1**, 2 и неравенства (4) следует справедливость неравенства:

$$f(x^0) \ge \frac{f(x^*)}{2}.$$

II. Список литературы

1. Береснев, В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.Экстремальные задачи стандартизации / В. Л. Береснев [и др.]. – Новосибирск.: Наука, 1978. – 333 с.
2. Емеличев, В. А., Ковалев М. М. Полиэдральные аспекты дискретной оптимизации / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев // Кибернетика. – 1982. – № 6. – С. 54 – 62.
3. Наумович, Н. А. //Вестн. Белорус. ун-та Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1986. – № 1. – С. 39.
4. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – С. 107 – 130.
5. Емельянченко, Н. С. Гарантированная оценка точности для модельной задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями // Информационные технологии и системы 2012 (ИТС 2012): И74 материалы международной научной конференции, БГУИР, Минск, Беларусь, 24 октября 2012 г. / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск: БГУИР, 2012. – 352 с.