Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Л. Великович, Ю. Д. Черниченко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплинам
«Высшая математика» и «Математика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
В27

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 9 от 25.04.2011 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Великович, Л. Л.
В27 Функции нескольких переменных : учеб.-метод. пособие по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / Л. Л. Великович, Ю. Д. Черниченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 95 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит основные понятия, определения, свойства, формулы и доказательства наиболее важных теорем. Материалы параграфов сопровождаются решением типовых задач.
Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Переход от изучения функций одного переменного (одномерный анализ) к изучению функций многих переменных (многомерный анализ) создает для студента первого курса технического университета определенные трудности.

Во-первых, многие первокурсники, не имея достаточной подготовки из школы, не успели еще как следует «вжиться» в одномерный анализ, как на них уже «накатывает» его многомерный «братан».

Во-вторых, «бьет по мозгам» слабо подготовленных слушателей «проклятье размерности», сопровождающееся потерей геометрической наглядности.

В-третьих, анализ функций многих переменных, несмотря на внешнее сходство построения с одномерным вариантом, таит в себе превеликое множество «подводных камней», для обнаружения и понимания которых необходима достаточно высокая математическая культура.

В известной нам литературе отсутствуют книги, специально посвященные анализу функций многих переменных (конечно, отдельные главы в учебниках на эту тему есть). Это и «подвигло» авторов к написанию данного пособия. Подчеркнем, что в курсе математики технического университета, курсе общей физики, химии и специальных дисциплинах нет ни одного раздела, где бы мы не сталкивались с функциями многих переменных. Поэтому знание основных фактов и наличие соответствующих навыков решения задач по данной тематике, безусловно будет способствовать успеху в обучении по многим дисциплинам.

Чтобы убедиться в важности данной тематики для приложений достаточно, скажем, обратиться к курсу «Методы оптимизации», который, в частности, включает в себя такие разделы как линейное и нелинейное программирование.

Настоящее пособие содержит достаточно подробное изложение основ анализа функций многих переменных, не отягощенное однако излишними подробностями доказательств, и решение основных типов задач по указанной тематике. Оно будет также полезно студентам физико-математических специальностей классических университетов.

1. Основные понятия, определения и факты

1.1. Функция точки

В естествознании постоянно встречаются такие зависимости между несколькими переменными величинами, когда значения одной из этих переменных полностью определяются значениями остальных переменных.

Пример. Возмущение нормального состояния некоторой среды (скажем, быстрое изменение давления в газе) распространяется в ней по закону, описываемому функцией четырех переменных $u = u(x, y, z, t)$ – координат точки $M(x, y, z)$ и времени t. Можно доказать, что распространение возмущения должно удовлетворять волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

(Это уравнение в частных производных второго порядка).

Не останавливаясь на других примерах, подчеркнем, что функции многих переменных являются одним из основных инструментов математического моделирования реальных процессов, что и послужило одной из причин детальной разработки их теории.

Напомним *определение* функции одной переменной.
Говорят, что на множестве D вещественных чисел (т.е. $D \subset \mathrm{P}$) задана (определена) функция $u = f(x)$ со значениями во множестве $U \subset \mathrm{P}$, если указано правило f, по которому каждому элементу $x \in D$ ставится в соответствие (сопоставляется) единственное число $u \in U$.

Примечание 1.1. (интерпретация на языке маленьких человечков). Если каждое число $x \in D$ считать маленьким человечком, а каждое число $u \in U$ считать миниатюрным креслицем, то функциональное соответствие $f : D - U$ является гуманным с точки зрения маленьких человечков, ибо при транспортировке не разрывает их на части (см. рисунки).

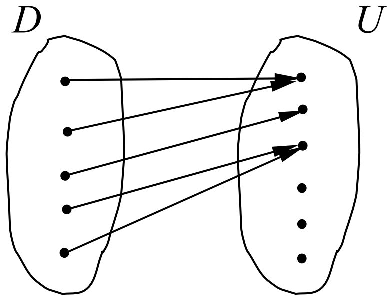

Рис. 1.1.

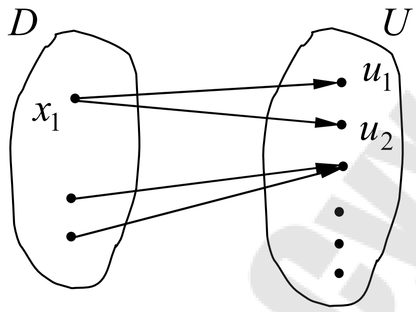

Рис. 1.2.

На рис. 1.1 изображена функция, а соответствие на рис. 1.2 уже не является функциональным: функциональность нарушается в точке x_1.

(Метод маленьких человечков используется в теории решения изобретательских задач (ТРИЗ)).

Вернемся к определению функции и добавим, что множество D, на котором действует функция f, называют ее *областью определения* и пишут $D = D(f)$, а совокупность всех таких $u \in U$, для которых в D существует прообраз x (т.е. такой элемент $x \in D$, что $f(x) = u$) называют *областью* (*множеством*) *значений* f и обозначают через $E(f)$.

Используя геометрическую терминологию, можно следующим образом переформулировать понятие функции одной переменной.

Определение 1.1. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек координатной прямой ставится в соответствие по закону f единственное число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

Теперь уже очевидно как распространить этот подход на функции многих переменных.

Определение 1.2. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек координатной плоскости ставится в соответствие по закону f единственное число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

Подчеркнем, что отличие *определения 1.2* от *определения 1.1* лишь в том, что вместо термина «координатная прямая» в нем используется термин «координатная плоскость».

Определение 1.3. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек координатного пространства ставится в соответствие по закону f единственное число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

Поскольку точка M плоскости определяется двумя координатами (x, y), а точка M пространства – тремя координатами (x, y, z), то будем использовать записи: $u = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$ соответственно для двух и трех переменных.

Чтобы двигаться дальше нам потребуются следующие два понятия.

Определение 1.4. Множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *n-мерным координатным пространством* и обозначают A^n, а каждый упорядоченный набор – точкой этого пространства.

Будем использовать привычную запись $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, где числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – координаты точки M.

Определение 1.5. Координатное пространство A^n называют *n-мерным евклидовым пространством* E^n, если между любыми двумя его точками $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', ..., x_n'')$ определено расстояние $\rho(M', M'')$ по формуле

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + ... + (x_n'' - x_n')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2}\ .$$

Теперь мы уже в состоянии ввести понятие функции n переменных.

Определение 1.6. Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек n-мерного евклидового пространства E^n ставится в соответствие по закону f единственное число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

Множество $\{M\} = D(f)$ называют областью определения (задания) функции $u = f(M)$.

Число u, соответствующее фиксированной точке M из множества $\{M\}$, будем называть *частным значением функции* в точке M. Совокупность $\{u\}$ всех частных значений $u = f(M)$ называют *обла-*

стью (множеством) значений этой функции и обозначают через $E(f)$.

Поскольку положение точки M в пространстве E^n определяется ее координатами $x_1, x_2, ..., x_n$, то для функции $u = f(M)$ естественно писать $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Итак, мы достаточно долго говорили об абстрактных вещах. Поэтому весьма полезно рассмотреть их на конкретны примерах (ведь еще И.Ньютон утверждал: «Ничто так не поучает, как пример»).

Пример 1.1. Найти область определения и область значений функции $u = \sqrt[10]{1-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)}$.

Решение. Выражение, стоящее под знаком корня четной степени, должно быть неотрицательным. Поэтому имеем:

$$1-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1.$$

Значит, областью определения данной функции служит множество точек n-мерного шара радиуса 1 с центром в начале координат $O(0,0,...,0)$.

Напомним, что в более привычном трехмерном пространстве E^3 сфера с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиуса R задается уравнением $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, а соответствующий шар – неравенством $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq R^2$.

Покажем, что областью значений рассматриваемой функции является отрезок $[0;1]$. В самом деле,

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \geq 0 \Rightarrow -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \leq 0 \Rightarrow$$

$$1-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \leq 1 \Rightarrow \sqrt[10]{1-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)} \leq 1.$$

Но с другой стороны, корень четной степени неотрицателен по определению (ведь это арифметический корень). Поэтому $u \in [0;1]$

Пример 1.2. Найти области определения и значений функции

$$u = \frac{1}{\ln(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2})}.$$

Решение. Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным. Поэтому имеем:

$$1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2} > 0 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1.$$

Кроме того, поскольку делить на ноль нельзя, то

$$1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} \neq 0.$$

А это в свою очередь, означает, что $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0,0,...,0)$.

Итак, мы установили, что областью определения рассматриваемой функции является множество всех внутренних точек n-мерного эллипсоида, отличных от начала координат. (Напомним, что уравнение трехмерного эллипсоида, который изучается в аналитической геометрии, имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$).

Найдем теперь область значений нашей функции. Прежде всего обратим внимание на следующее:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} \geq 0 \Rightarrow -\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2}\right) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2}\right) \leq \ln 1 \Rightarrow$$

$$\ln\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2}\right) \leq 0.$$

(Здесь мы воспользовались монотонностью функции $y = \ln x$).

Но, как уже отмечалось, $\ln\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2}\right) \neq 0$.

Значит, $\ln\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2}\right) < 0$.

Следовательно, $u = \dfrac{1}{\ln(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2})} < 0$.

Учитывая теперь предельное поведение функции $\ln\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2}\right)$ при $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \to 1$ и при $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \to 0$, заключаем, что $E(u) = (-\infty; 0)$.

Пример 1.3. Найти области определения и значений функции

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}.$$

Решение. Как уже отмечалось в Примере 1.1, выражение, стоящее под знаком корня четной степени должно быть неотрицательным. Кроме того, делить на нуль нельзя. Учитывая сказанное, приходим к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + y^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 \leq 0 \\ x^2 - 2x + y^2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Покажем, что вторая из них несовместна. Поскольку неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, то получаем

$$2(x^2+y^2)\le 0 \Rightarrow x^2+y^2\le 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Но тогда во втором неравенстве имеем: $0<0$. А это невозможно. Итак, остается решить первую систему

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2\ge 0 \\ x^2-2x+y^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+2x+1)+y^2\ge 1 \\ (x^2-2x+1)+y^2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2\ge 1 \\ (x-1)^2+y^2>1. \end{cases}$$

Уравнение $(x+1)^2+y^2=1$ задает окружность с центром в точке $(-1;0)$ и радиуса 1, а неравенство $(x+1)^2+y^2\ge 1$ – внешность соответствующего круга, включая, конечно, саму окружность. Аналогично нетрудно разобраться и с неравенством $(x-1)^2+y^2>1$.

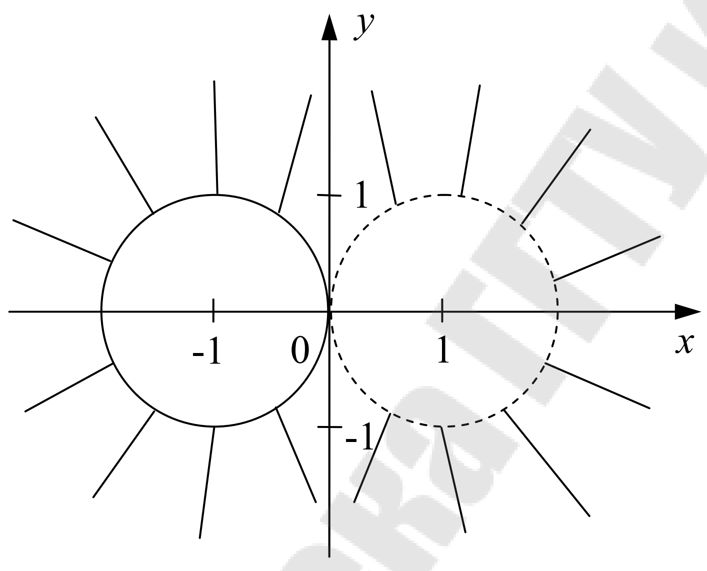

Рис. 1.3.

Окончательно заключаем, что область определения данной функции есть часть плоскости, лежащая вне окружностей радиусов, равных единице, с центрами в точках $(-1;0)$ и $(1;0)$. Точки первой окружности, за исключением точки $(0;0)$, принадлежат области, а точки второй – не принадлежат этому множеству.

Займемся теперь областью значений. Очевидно, $z\ge 0$, причем $z(-1;1)=0$. Далее, поскольку $z(1;1)=+\infty$, то $E(z)=[0;+\infty)$.

Пример 1.4. Найти области определения и значений функции $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

Решение. Из определения функции $y=\arcsin x$ вытекает, что $|2y(1+x^2)-1|\le 1$. Последовательно имеем:

$$-1 \le 2y(1+x^2)-1 \le 1 \Rightarrow 0 \le 2y(1+x^2) \le 2 \Rightarrow 0 \le y(1+x^2) \le 1 \Rightarrow$$

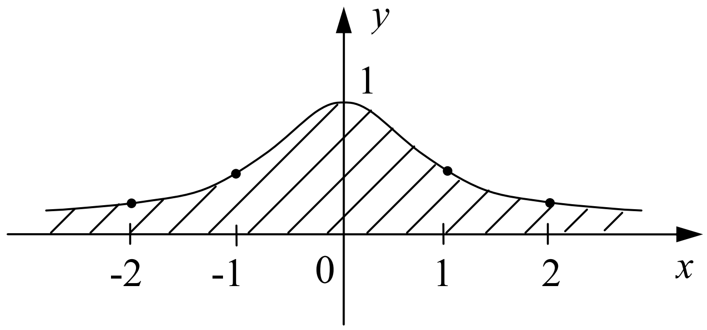

Рис. 1.4.

$\Rightarrow 0 \le y \le \dfrac{1}{1+x^2}$. Итак, область определения понятна – это часть плоскости, заключенная между кривой $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и ее горизонтальной асимптотой $y=0$. Эту кривую, называемую локоном Аньези, кстати, легко построить чисто элементарными приемами (в школьной математике она называется так: единица, деленная на квадратный трехчлен). Действительно, прежде всего отметим, что функция $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ – четная и, значит, ее график симметричен относительно оси $0y$. Далее имеем: $x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+1 \ge 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$. Но, с другой стороны, $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$. Поэтому $E(y)=(0;1]$, причем, очевидно, наибольшее значение функции достигается при $x=0$.

Область значений исходной функции тоже находится без особых усилий: достаточно вспомнить, что $E(\arcsin)=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. И нам остается показать, что в нашем случае эти границы действительно реализуются. Имеем: $z(0;0)=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$; $z(0;1)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $E(z)=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Замечание 1.1. Существуют пять запретов на математические операции, с помощью которых находят область определения функции. Вот они:

1) Делить на ноль нельзя, т.е. в дроби $\dfrac{a}{b}$ знаменатель должен быть отличен от нуля: $b \ne 0$.

2) Нельзя извлекать корень четной степени из отрицательного выражения, т.е. в записи $\sqrt[2k]{x}$ под корнем должно находиться неотрицательное выражение: $x \geq 0$.

3) В выражении $\log_a x$ должно быть x положительным: $x > 0$. Кроме того, имеются и ограничения на параметр a: $a \in (0;1) \bigcup (1;+\infty)$.

4), 5) Нельзя вычислять арксинусы и арккосинусы от чисел, модуль которых больше единицы, т.е. в записях $\arcsin x$, $\arccos x$ должно выполняться $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$.

1.2. Структура области определения функции точки

Рассмотрим функции одного и двух переменных: $u = f(x)$; $u = f(x, y)$.

Внешнее отличие сразу бросается в глаза: в первой из них переменная u будет изменяться с изменением только одной независимой переменной x; во второй функции тип зависимости значительно сложнее, ибо теперь на переменную u влияет изменение сразу двух независимых переменных x, y.

Чтобы разобраться в более тонких (внутренних) отличиях, нам придется изучить структуру множеств точек координатной плоскости.

Введем ряд понятий.

Определение 1.7. r-окрестностью $O(M_0, r)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ назовем множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, т.е. это множество точек круга с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r без ограничивающей его окружности.

Определение 1.8. Проколотой r-окрестностью $\dot{O}(M_0, r)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ будем называть такую r-окрестность, из корой удален («выколот») центр M_0.

Определение 1.9. Точка M_0 называется внутренней точкой множества D, если она принадлежит D вместе с некоторой своей окрестностью.

Определение 1.10. Множество D называется открытым, если каждая его точка внутренняя.

Примерами открытых множеств могут служить $O(M_0, r)$ и $\dot{O}(M_0, r)$.

Определение 1.11. Множество D называется связным, если любые две его точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат только множеству D.

Теперь мы уже готовы ввести в рассмотрение основной вид множеств, используемых в качестве областей определения функций двух (и большего числа) переменных.

Определение 1.12. Областью называется открытое связное множество точек плоскости.

Примерами множеств, являющихся областями, могут служить окрестности $O(M_0, r)$, $\dot{O}(M_0, r)$.

Множество из Примера 1.3. (см. Рис. 1.3) областью не является, так как для него не выполняются оба требования из определения 1.12. В самом деле, точки левой окружности (за исключением т. (0;0)) принадлежит множеству, а значит, оно не является открытым, и поскольку точка (0;0) не принадлежит множеству, то оно не является связным: из одного круга в другой «проход закрыт», ибо эти два круга имеют единственную общую точку (0;0), но не принадлежащую данному множеству.

Определение 1.13. Точка M_1 называется граничной точкой множества D, если в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие ему.

Определение 1.14. Совокупность всех граничных точек множества D называются его границей. Границу множества будем обозначать буквой Γ.

Определение 1.15. Область D вместе с ее границей Γ называется замкнутой областью и обозначается $\overline{D}$. Итак, $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$.

Примером замкнутой области может служить множество точек из Примера 1.4 (см. Рис. 1.4). Еще одним примером множества данного типа является множество точек круга: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$.

Примечание 1.2. Интервал (a, b) является открытым связным множеством точек координатной прямой, а отрезок $[a; b]$ является замкнутым связным множеством. Поэтому эти множества точек можно рассматривать как область и замкнутую область (соответственно), но уже для прямой.

В поисках более точной аналогии на плоскости для интервала (a, b) приходим к открытому прямоугольнику

$$\begin{cases} a < x < b \\ c < y < d \end{cases},$$

стороны которого параллельны осям координат, а для отрезка $[a;b]$ – к замкнутому прямоугольнику

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}.$$

<u>Определение 1.16.</u> Предельной точкой множества D называется такая точка P, в любой окрестности которой имеется хотя бы одна точка из D, отличная от P.

Из данного определения сразу вытекают два полезных факта:

<u>Факт 1.</u> В каждой окрестности точки P содержится бесконечное множество точек из D.

<u>Факт 2.</u> Каждая предельная точка множества D является либо его внутренней точкой, либо его граничной точкой.

Лирическое отступление. Прежде всего завершим классификацию точек.

<u>Определение 1.17.</u> Точка M_2 называется внешней (или изолированной) точкой множества D, если существует такая ее окрестность, в которой нет ни одной точки из D (см. Рис. 1.5). Итак, теперь все ясно, просто и понятно, и любой здравомыслящий человек легко ответит на вопрос, какая точка называется внутренней, граничной или внешней для заданного множества. Но если этот же вопрос задать, не сообщив предварительно информацию из определений 1.9, 1.13, 1.17, то каждый почувствует наличие настоящей проблемы, а именно: на интуитивном уровне вполне понятно, когда точка лежит внутри множества, а когда нет, но как это формализовать, предоставив точные определения?

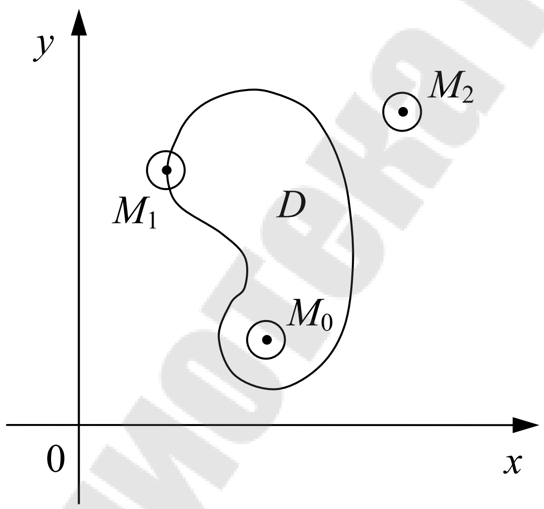

Рис. 1.5.

У математиков нет в обиходе романтического термина «изобретение» (в отличие от представителей технических наук), но в нарушение этой терминологии, позволим себе отметить следующее: при построении величественного здания под названием «Математика» его творцы сделали десятки и сотни тысяч изобретений от самых маленьких (об одном из них шла речь) до трудно обозримых, и этими достижениями человеческого ума по праву можно гордиться!

Вопрос

Итак, в чем же главное отличие множеств точек координатной прямой от множеств точек координатной плоскости, на которых и будут определяться функции двух переменных?

Ответ

Множество всех точек координатной прямой E_1 является вполне упорядоченным: из любых двух различных точек координатной прямой одна лежит правее (соответствующее ей действительное число считается большим), а для множества всех точек плоскости E_2 упорядоченность отсутствует. В этом и состоит одна из главных причин отличия свойств функций одной и двух переменных.

Остается только добавить, что множество всех точек пространства E_n $(n \geq 3)$ тоже не обладает свойством упорядоченности и, значит, принципиальным моментом является переход от $n = 1$ к $n = 2$.

1.3. Геометрическое изображение функций

Английская пословица утверждает: «Одна картинка ценнее десяти тысяч слов». По-видимому, для реальных (материальных) объектов это высказывание сильно преувеличено, но что касается абстрактного мира математических объектов, то с утверждением нельзя не согласиться. (Кстати, всемирно известный профессор математики Мичиганского государственного университета Ф.Харари тоже придерживается этой доктрины).

Итак, рассмотрим приемы, с помощью которых математики пытаются «увидеть» функции многих переменных (в науке попытка графического представления объекта называется визуализацией).

А) Начнем, понятно, со случая наименьшей размерности, а именно: рассмотрим способы изображения функций двух переменных.

Способ № 1: с помощью поверхности. Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$ с областью определения D, где D – некоторое множество точек координатной плоскости $x0y$. Любой точке $M_0(x_0, y_0)$ области D может быть поставлена в соответствии точка P пространства E_3 с теми же абсциссой и ординатой и с аппликатой $z_0 = u_0 = f(x_0, y_0)$. Таким образом, мы получим бесконечное множество точек в пространстве, расположенных по определенному закону. Этот геометрический образ естественно считать геометрическим изображением (графиком) функции $f(x, y)$. Итак, в самом общем случае функция $f(x, y)$ геометрически изображается каким-то множеством точек пространства E_3. Для многих функций, рассматриваемых в математическом анализе, точки этого множества лежат на некоторой поверхности. Поэтому в анализе принято всякий геометрический образ, изображающий функцию $f(x, y)$, называть поверхностью, несмотря на то, что по своей форме он может очень отличаться от того, что мы называем поверхностью в обычном смысле слова.

Примеры (см. курс аналитической геометрии)

1. Линейная функция $u = ax + by + c$ изображается плоскостью.

2. Функция $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ изображается эллиптическим параболоидом.

В частности, функции $u = x^2 + y^2$ соответствует параболоид вращения – это поверхность, описываемая параболой $u = x^2$ при ее вращении вокруг оси $u \equiv z$.

3. Функция $u = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ изображается гиперболическим параболоидом («седло»).

В частности, функции $u = x^2 - y^2$ соответствует гиперболический параболоид (Рис. 1.6), функции $u = xy$ – гиперболический параболоид, получающийся из предыдущего, поворотом вокруг оси $0z$ на 45° и сокращением в 2 раза всех размеров, параллельных оси $0z$ (Рис. 1.7).

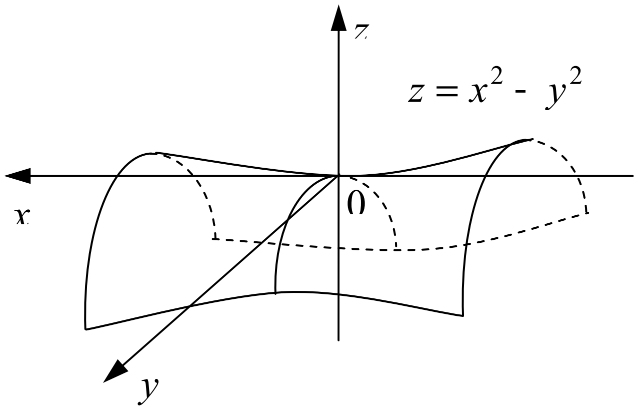

Рис. 1.6.

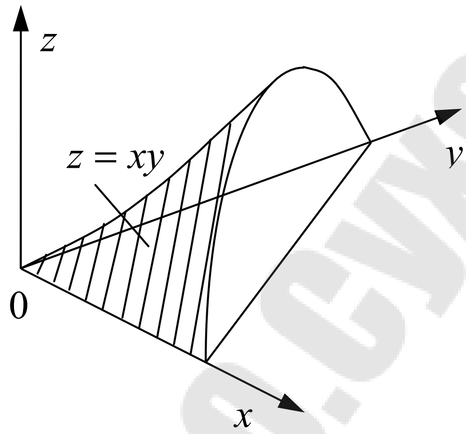

Рис. 1.7.

4. Функция $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ изображается верхней половиной сферы ($u \geq 0$) радиуса R с центром в начале координат.

5. Если в выражении функции $u=f(x,u)$ отсутствует одна из независимых переменных, например x, так, что u зависит только от y: $u=\varphi(y)$, то изображением такой функции в пространстве E_3 является цилиндрическая поверхность, получающаяся, если провести прямые, параллельные оси $0x$, через все точки кривой $u=\varphi(y)$, лежащей в плоскости $z0y$.

Замечание 1.2. Рассмотренные только что нами примеры 1 – 5 являют собой образцы «достаточно хороших» функций – типичных персонажей математического анализа. Для сравнения приведем два примера функций, для которых $D(f)$ и $E(f)$ являются дискретными множествами точек.

6. Функция $u=u(n,m)=C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ называется так: число сочетаний из n элементов по m, где n, m – произвольные целые неотрицательные числа, причем $0 \leq m \leq n$.

Областью определения этой функции служит множество точек $M(n,m)$ (см. Рис. 1.8), а областью значений – множество всех натуральных чисел.

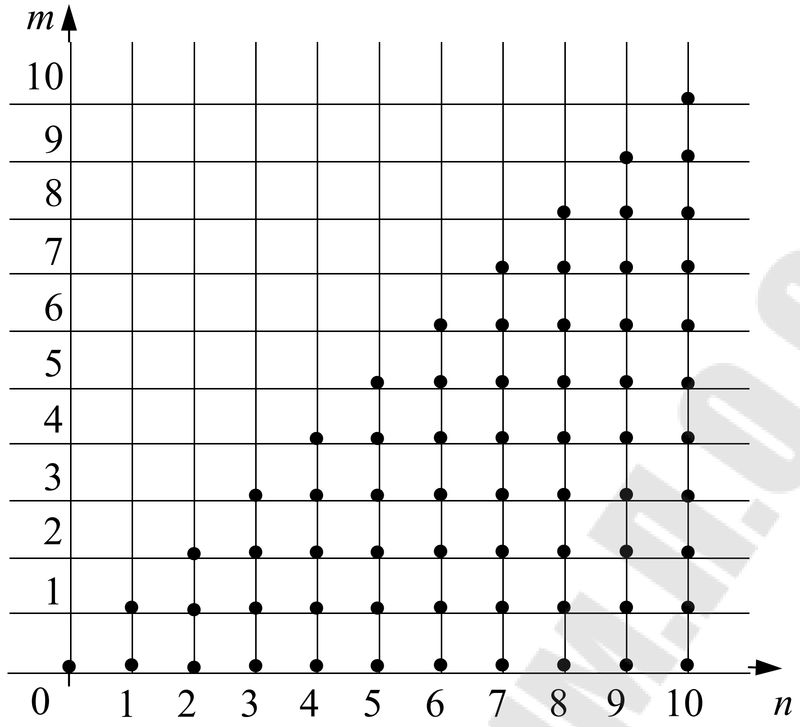

Рис. 1.8.

7. Обозначим через R^* множество рациональных точек плоскости $Q\left(\frac{m}{p},\frac{n}{q}\right)$, где $\frac{m}{p},\frac{n}{q}$ – несократимые дроби с положительными знаменателями. Наименьшее общее кратное чисел p,q есть функция $\varphi(Q)$, определенная на множестве R^*. В частности, $\varphi\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)=6$; $\varphi\left(\frac{2}{3};\frac{3}{7}\right)=21$; $\varphi\left(-2;\frac{1}{5}\right)=5$ и т.д. Очевидно, $E(\varphi)=\{1,2,3,\ldots\}$ – множество всех натуральных чисел.

<u>Способ № 2</u>: с помощью линий уровня. Поскольку построения в пространстве E_3 весьма проблематичны, то даже в случае двух независимых переменных предпочтительнее проводить исследование поведения функции, оставаясь в плоскости $x0y$: ведь на плоскости можно реально осуществлять построения с помощью линейки и циркуля.

Способ геометрического изображения функции, который мы сейчас приведем, основан на возможности истолковать равенство $u=f(x,y)$ как уравнение некоторого семейства линий на плоскости $x0y$. Предположим, что функция $u=z=f(x,y)$ изображена некоторой поверхностью c . Различные точки этой поверхности находятся на различных расстояниях от плоскости $x0y$. Рассмотрим точки поверхности c , находящиеся на одном и том же расстоянии h от плоскости $x0y$, т.е. точки с аппликатой $z = h$. Эти точки лежат на линии пересечения поверхности c с плоскостью $z = h$. Обозначим эту линию через C', а ее проекцию на плоскость $x0y$ – через C. Так как для всех точек линии C аппликата z имеет одно и то же значение h, то уравнение этой линии C на плоскости $x0y$ есть $f(x, y) = h$. Линию C называют линией уровня поверхности c или функции $f(x, y)$.

Система этих линий уровня, снабженных пометками соответствующих значений $h_1, h_2, h_3,...$ уровня (высоты) h, дает представление о ходе изменения функции. Обычно уровню h дают последовательно значения, составляющие арифметическую прогрессию, например, $h = nd$, где $n = 1,2,3....$ Тогда расстояние между линиями уровня с соседними номерами n позволяет судить о крутизне поверхности $u = f(x, y)$, ибо между двумя соседними линиями значение функции изменяется на одну и ту же величину. Поэтому там, где линии уровня подходят близко друг к другу, функция круто поднимается или падает; там же, где расстояние между линиями уровня с соседними номерами n велико, поверхность носит пологий характер. Именно по этому принципу строятся карты рельефа геологического или топологического образца.

Примеры.

1. Для функции $u = ax + bx + c$ линии уровня $ax + by = h - c$ образуют семейство параллельных прямых.

2. Для функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ линии уровня $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = h$ ($h > 0$) образуют семейство концентрических эллипсов: $\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{h}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{h}\right)^2} = 1.$

3. Функция $u = x^2 - y^2$ изображается системой линий уровня, состоящей из равносторонних гипербол $x^2 - y^2 = h$, $h \neq 0$ (см. Рис. 1.9).

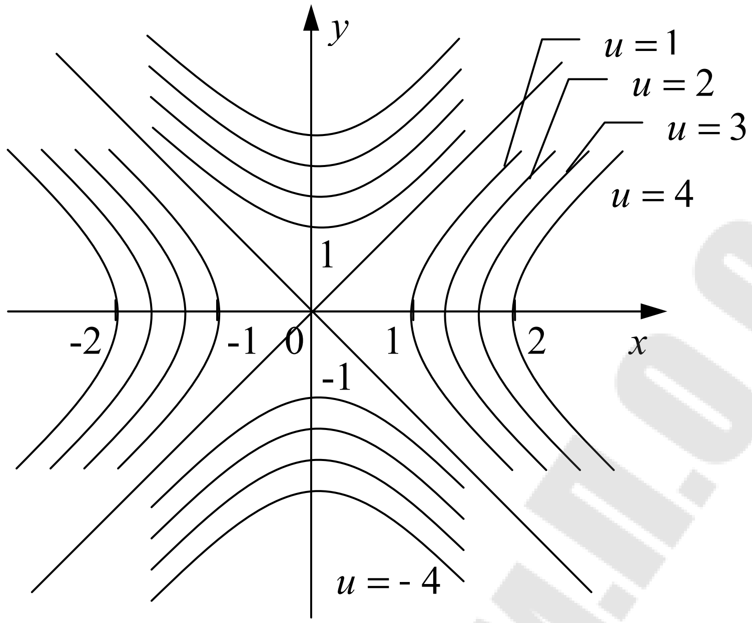

Рис. 1.9.

Замечание 1.3. Метод изоклин, используемый для приближенного построения интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ (*), по сути опирается на графическое представление функции двух переменных линиями уровня.

Напомним, что график решения уравнения (*) называется интегральной кривой, а геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одно и то же направление - изоклиной уравнения. Семейство изоклин уравнения (*) определяется уравнением: $f(x, y) = C$, где $C = const$. Значит, изоклины уравнения (*) есть линии уровня функции f, стоящей в его правой части.

Замечание 1.4. Идея изображения функции двух переменных линиями уровня легко переносится на функции трех переменных $u = f(x, y, z)$. В этом случае постоянным значением функции u соответствуют в пространстве E_3 поверхности, называемые поверхностями уровня. Например, функция $u = x^2 + y^2 + z^2$ изображается системой поверхностей уровня, состоящей из концентрических шаровых поверхностей с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Замечание 1.5. Скалярным полем называется часть пространства, каждой точке которой поставлено в соответствие число. Очевидно, что с логической точки зрения понятие скалярного поля ничем не отличается от понятия скалярной функции (но в теории поля эти функции изучаются в специальном физическом аспекте). Поэтому для изображения скалярных полей используют поверхности уровня (или линии уровня, если поле плоское: $u = f(x, y)$).

Б) Итак, с сожалением придется констатировать, что возможности графического изображения функций многих переменных, по-видимому, исчерпаны, ибо уже для функции $u = f(x, y, z)$ ни один из рассмотренных ранее способов не применим. Это обстоятельство побудило одного из авторов (Л.Л. Великовича) предложить способ частичного графического представления, пригодный для функций любого числа переменных. Начнем издалека.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ одного независимого переменного. Для нее, как известно, существует удобный способ графического изображения на плоскости $x0y$ – график функции, т.е. множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$.

Далее поступим так: «разорвем» систему координат $x0y$ на две части (точнее две оси: $0x$ и $0y = 0u$) (см. Рис. 1.10). Тогда функция f каждую точку $x \in D(f)$ отображает в некоторую точку $f(x)$ оси $0y = 0u$, т.е. $E(f) \subset 0u$.

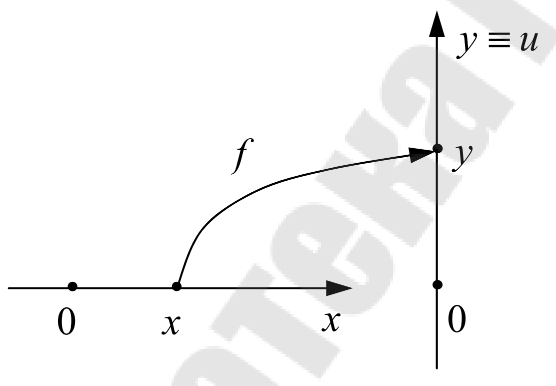

Рис. 1.10

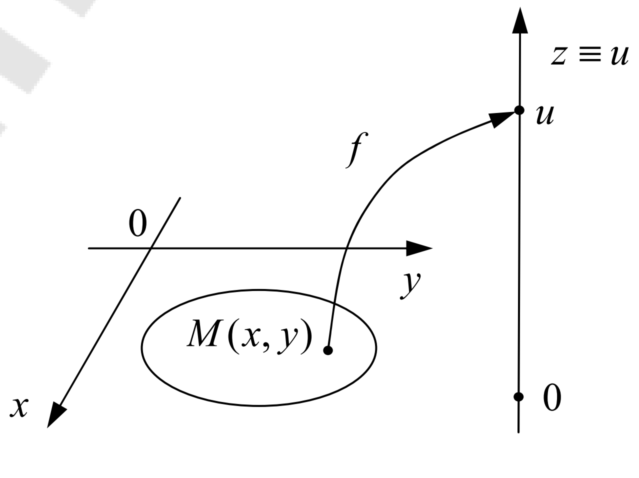

Рис. 1.11

Рассмотрим теперь функцию двух переменных $u = f(x, y)$ и для ее изображения «разорвем» систему координат $0xyz$ на две части: плоскость $0xy$ и ось $0z = 0u$ (см. Рис. 1.11). Тогда функция f каждую точку $M(x, y) \in D(f)$ отображает в некоторую точку $f(M) = f(x, y)$ оси $0z = 0u$, $E(f) \subset 0u$.

Аналогично поступим и с функцией $u = f(x, y, z)$. Правда, здесь, конечно, ничего не придется разрывать, а к системе координат $0xyz$ придется добавить еще одну новую ось $0u$ (см. Рис. 1.12): $E(f) \subset 0u$.

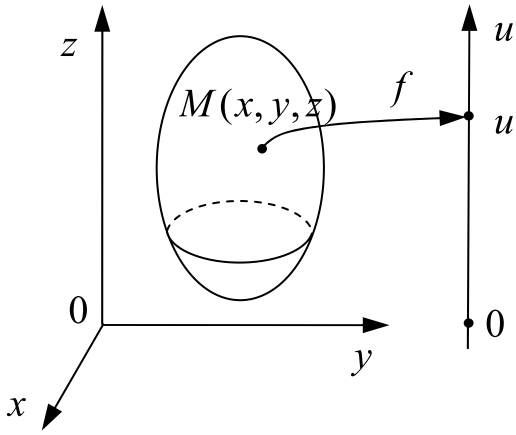

Рис. 1.12.

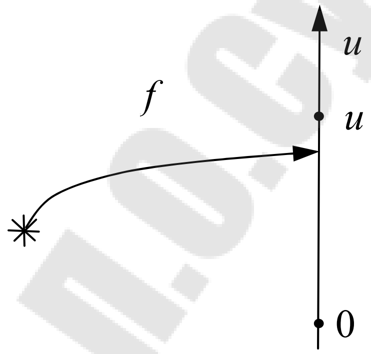

Рис. 1.13.

Теперь уже понятно как поступить с функцией $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $n \geq 4$. Ясно, что ее область определения мы увидеть не сможем («проклятие размерности» увы не преодолеть!). Но, по крайней мере, область ее значений доступна нашему взору (см. Рис. 1.13).

1.4. Операция предельного перехода

Математический анализ функций многих переменных осуществляется по тому же сценарию, что и анализ функций одного переменного. В его основе лежит операция предельного перехода. (Для упрощения записей в дальнейшем, если не оговорено противное, речь будет идти о функциях двух переменных).

Определение 1.18. Пусть функция $u = f(M) = f(x, y)$ определена в области D и M_0 – предельная точка множества D. Число b называется пределом, или предельным значением, функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия

$$0 < \rho(M_0, M) < \delta \qquad (1.1)$$

следует неравенство

$$|f(M)-b|<\varepsilon \tag{1.2}$$

Этот факт записывают символически так:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=b \tag{1.3}$$

или

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b \tag{1.3$'$}$$

<u>Примечание 1.3.</u> ε – «первично», т.е. задается первым, δ – «вторично», ибо оно отыскивается по заданному ε. Именно это обстоятельство в определении 1.18 отображается записью $\delta(\varepsilon)$.

Дадим <u>геометрическую интерпретацию понятия предела.</u>

Прежде всего отметим, что условие (1.1) означает, что точка M принадлежит проколотой δ-окрестности точки M_0: $M\in\dot{O}(M_0,\delta)$. Далее, расписывая неравенство (1.2), получаем $|f(M)-b|<\varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\varepsilon<f(M)-b<\varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon<f(M)<b+\varepsilon \Rightarrow f(M)\in(b-\varepsilon;b+\varepsilon)$.

Итак, налицо причинно-следственная связь:

$$M\in\dot{O}(M_0,\delta) \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \quad f(M)\in(b-\varepsilon;b+\varepsilon) \tag{1.5}$$

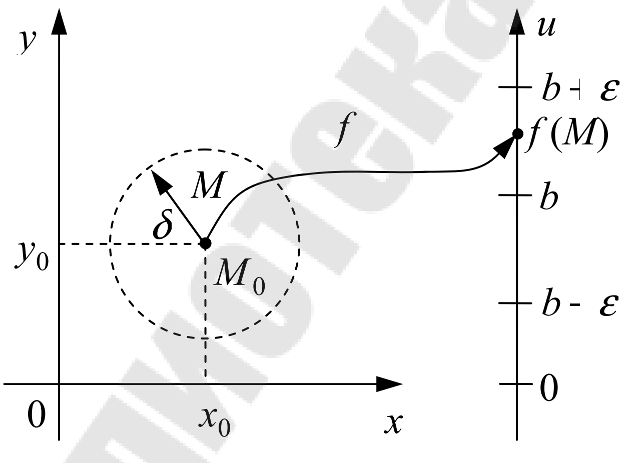

Рис. 1.14.

Остается ее сформулировать и изобразить (см. Рис. 1.14).

Число b является пределом функции $u=f(M)$ в точке M_0, если, и только если, какова бы ни была ε-окрестность точки b оси $0u$, найдется такая проколотая δ-окрестность точки M_0 в плоскости $x0y$, что как только точка M попадет в эту окрестность , соответствующее значения функции $f(M)$ попадет в ε-окрестность точки b.

Дадим интерпретацию понятия предела на языке маленьких человечков (МЧ).

Предположим, что на оси $0u$ находятся ворота в некоторый город N, причем центр ворот в точке b, а их ширина 2ε (см. Рис. 1.14), а также – что в плоскости $x0y$ в окрестности точки M_0 находится отряд диверсантов, цель которых проникнуть в город N. Когда наступает ночь по особой команде два отряда маленьких человечков (стражей ворот) одновременно начинают сдвигать створки ворот $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ к центру b. У диверсантов имеется наблюдатель, который сообщает им, с какой скоростью закрываются ворота. Теперь их задача найти такое δ, что если из точки $M \in \dot{O}(M_0, \delta)$ запустить диверсанта (скажем, на дельтаплане), то он успеет проскочить через закрывающиеся ворота в город N, а ночью, усыпив стражу, впустить весь отряд в город. Если диверсантам удается осуществить свой план, то предельное значение функции $u = f(M)$ в точке M_0 существует.

Из свойств операции предельного перехода прежде всего необходимо отметить ее однозначность.

Теорема 1.1. Если функция $u = f(M)$ в точке M_0 имеет предел, то он единственный (Доказательство теоремы легко осуществить методом от противного, опираясь на определение предела).

Теорема 1.2. Для того, чтобы функция $u = f(M)$ имела предел в точке M_0, равный b, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$, имеющей пределом M_0, существовал $\lim\limits_{k \to \infty} f(M_k) = b$.

Примечание 1.4. Говорят, что точка $M_0(x_0, y_0)$ есть предел последовательности точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_k(x_k, y_k), \ldots$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число N, что для всех $k > N$ будет выполняться неравенство $\rho(M_0, M_k) < \varepsilon$, т.е. все точки нашей последовательности, начиная с точки под номером $N+1$, будут содержаться внутри круга радиуса ε, описанного около точки M_0.

Теорема 1.2, которую можно было принять за еще одно определение предела, дает реальный инструмент для исследования функций на предмет существования предела.

Пример 1.5. Доказать, что предел функции

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$$

в начале координат равен нулю.

Доказательство. Составим разность

$$|f(x,y)-b| = \left|x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right| \le$$

$$\le \left|x\sin\frac{1}{y}\right| + \left|y\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| + |y|,$$

ибо $|\sin\alpha| \le 1$ при любом α. Теперь понятно, что для произвольного ε из условий $0 < |x| < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ и $0 < |y| < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ следует, что $|f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ч.т.д.

<u>Примечание 1.5.</u> При решении примера 1.5. мы «незаметно подменили» круговую окрестность точки $O(0,0)$ на квадратную. Законность этого поступка вытекает из следующего очевидного утверждения.

<u>Лемма</u>. Для каждой квадратной (круговой) окрестности данной точки найдется круговая (квадратная) окрестность этой точки, содержащаяся в данной квадратной (круговой) окрестности.

Пример 1.6. Доказать, что функция f в начале координат не имеет предела, где $f = f(x,y,z) = \frac{xy+z}{xy-z}$, причем $x^2 + y^2 \neq 0$ и $xy - z \neq 0$.

Доказательство. 1) Предположим, что мы приближаемся к точке $O(0,0,0)$ по некоторому прямолинейному пути, не лежащему в плоскости $x0y$. Пусть, скажем, $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, где $c \neq 0$. На этой прямой имеет место:

$$f(x,y,z) = \frac{abt^2 + ct}{abt^2 - ct} = \frac{abt + c}{abt - c},$$

т.е. наша функция превращается в функцию одного переменного $\varphi(t)=\dfrac{abt+c}{abt-c}$ и $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=\dfrac{c}{-c}=-1$.

2) Возьмем теперь любую последовательность точек, лежащих в плоскости $x0y$. Тогда предел $f(x,y,z)$ на этой последовательности будет равен $+1$, ибо для всех точек последовательности $z=0$ и

$$f(x,y,z)=\left.\frac{xy+z}{xy-z}\right|_{z=0}=\frac{xy}{xy}=1.$$

Остается воспользоваться теоремой 1.2.

Пример 1.7. Доказать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ в начале координат не существует.

Доказательство. 1) Будем приближаться к началу координат по любому прямолинейному пути $x=at$, $y=bt$. Тогда $f(x,y)=$ $=f(at,bt)=\dfrac{a^2t^2\cdot b\cdot t}{a^4t^4+b^2t^2}=\dfrac{a^2bt}{a^4t^2+b^2}\to 0$ при $t\to 0$, т.е. предел нашей функции в этом случае существует и равен нулю.

2) Теперь рассмотрим поведение нашей функции для последовательности точек, сходящейся к началу координат по параболе $y=x^2$. Имеем:

$$f(x,y)=f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

и, значит, предел в этом случае равен $\dfrac{1}{2}$. Остается воспользоваться теоремой 1.2.

Возможности вычисления пределов значительно расширятся, если к рассмотренным фактам присовокупить следующее утверждение.

Теорема 1.3. (арифметические операции над пределами)

Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и пусть $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=c$. Тогда:

$$\lim_{M \to M_0} \left(f(M) \pm g(M) \right) = b \pm c\,;$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) g(M) = bc\,;$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{b}{c} \text{ при условии } c \neq 0\,.$$

Доказательство этой и многих других теорем о свойствах пределов становятся существенно проще, если воспользоваться аппаратом бесконечно малых величин.

<u>*Определение 1.19.*</u> Функция $u = \alpha(M)$ называется бесконечно малой при M – M_0 (в точке M_0), если $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$.

Нетрудно передоказать обычные свойства бесконечно малых функций.

P1 Сумма конечного (т.е. фиксированного) числа функций, бесконечно малых в точке M_0, также есть функция, бесконечно малая в этой точке.

P2 Произведение бесконечно малой функции в точке M_0 на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция в точке M_0.

Кроме того, перечисленные свойства бесконечно малых хорошо работают при вычислении конкретных пределов. Вернемся, для иллюстрации сказанного, к примеру 1.5:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} \right) = 0\,.$$

Теперь это утверждение установить достаточно легко. Поскольку x – 0, y – 0, то x, y – бесконечно малые величины, а $\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq 1$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ суть ограниченные функции. Поэтому $x \sin\frac{1}{y}$, $y \sin\frac{1}{x}$ – бесконечно малые функции и их сумма тоже есть бесконечно малая функция, и, значит, ее предел равен нулю.

Пусть $\alpha(M)$, $\beta(M)$ – бесконечно малые функции в точке M_0. Если

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = C \tag{1.6}$$

причем $C \neq 0$, то говорят, что функции $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ одного порядка малости. В частности, при $C = 1$ бесконечно малые $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ называются эквивалентными. Если же

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0, \tag{1.7}$$

то говорят, что функция $\alpha(M)$ является бесконечно малой более высокого порядка, и пишут $\alpha = o(\beta)$ (читается так: o – малое).

До сих пор речь шла о предельных значениях функций в точках с конечными координатами. Пусть теперь функция $u = f(M)$ определена на множестве D, которое содержит точки, сколь угодно удаленные от точки $O(0;0)$.

<u>*Определение 1.20.*</u> Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M - \propto$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists R > 0$ такое, что для любой точки M, удовлетворяющей условиям $M \in D$, $\rho(O, M) > R$, выполняется неравенство $\left| f(M) - b \right| < \varepsilon$.

Используются обозначения:

$$\lim_{M \to \infty} f(M) = b \text{ или } \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = b \tag{1.8}$$

И в заключение этого пункта рассмотрим еще один тип пределов, имеющий смысл только для функций нескольких переменных - *повторные пределы*. Сама идея повторного предела вполне понятна – изучать предел функции при изменении только одной независимой переменной и фиксированных значениях остальных, а затем осуществлять предельный переход по другой переменной и т.д.

Покажем как она реализуется.

Пусть функция $u = f(M) = f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$Q = \{(x, y) : | x - x_0 | < d_1,\ | y - y_0 | < d_2\},$$

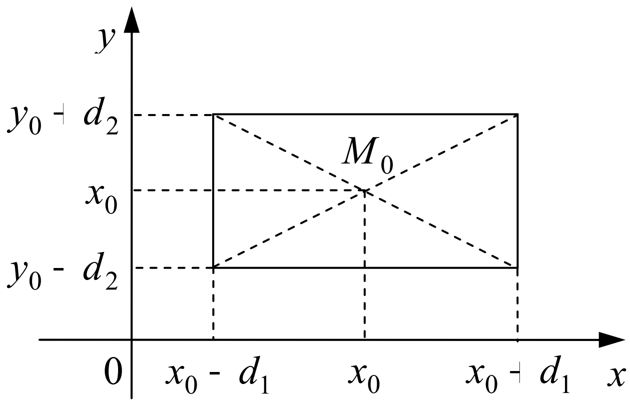

Рис. 1.15.

кроме, быть может, отрезков прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. При фиксированном значении переменной y функция $f(x, y)$ становится функцией одной переменной x. Пусть для любого фиксированного значения y, удовлетворяющего условию $0 < | y - y_0 | < d_2$, существует предел функции $f(x, y)$ при $x - x_0$ (этот предел зависит, разумеется, от y):

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y - \text{фикс.} \\ 0 < | y - y_0 | < d_2}} f(x, y) = \varphi(y). \tag{1.9}$$

Пусть, далее, предел функции $\varphi(y)$ при $y - y_0$ существует и равен b:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b. \tag{1.10}$$

Тогда говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует повторный предел функции $f(x, y)$ и пишут:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{}_{yx} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b. \tag{1.11}$$

При этом предел (1.9) называется внутренним пределом в повторном.

Аналогично определяется другой повторный предел:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{}_{xy} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \tag{1.12}$$

в котором внутренним является

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x-\text{фикс.} \\ 0<|x-x_0|<d_1}} f(x, y). \tag{1.13}$$

<u>Примечание 1.6.</u> Понятие повторных пределов функции можно ввести и для того случая, когда точка $M_0 - \infty$ (по одной или обеим координатам).

Пример 1.8. Как мы уже доказали $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$. Однако у рассматриваемой функции не существует ни один из повторных пределов. В самом деле, начнем с очевидного наблюдения: так как функция $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ симметрична относительно x и y, то достаточно доказать декларированное утверждение только для одного из повторных пределов.

Имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{}_{yx} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right).$$

Но $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=0$, а $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ не существует. Следовательно, не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{}_{yx} f(x,y)$.

<u>Примечание 1.7.</u> Этот пример показывает, что может существовать предел функции $f(x,y)$, хотя ни один из повторных пределов не существует.

Пример 1.9. Как мы уже доказали для функции $f=f(x,y,z)=\frac{xy+z}{xy-z}$, где $x^2+y^2\neq 0$, $xy-z\neq 0$, в начале координат предел не существует. Тем не менее, все повторные тройные пределы существуют и равны либо $+1$, либо -1. Например,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}{}_{xyz} \frac{xy+z}{xy-z} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0}\frac{xy+z}{xy-z} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0\left(\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}\right)}\frac{xy}{xy} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}{}_{xzy} \frac{xy+z}{xy-z} = \lim_{x\to 0}\lim_{z\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy+z}{xy-z} = \lim_{x\to 0}\lim_{z\to 0(z\neq 0)}\frac{z}{-z} = \lim_{x\to 0}\lim_{z\to 0}(-1) = -1.$$

Пример 1.10. Докажем, что функция $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ($x^2+y^2\neq 0$) не имеет предела в начале координат.

Имеем:

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{}_{xy} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{}_{yx} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

Значит, оба повторных предела существуют и равны между собой.

2) Теперь будем подходить к началу координат по прямой $y=x$. Тогда $f(x,y)=f(x,x)=\dfrac{xy}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\dfrac{1}{2}$.

Остается воспользоваться теоремой 1.2.

Примечание 1.8. Факт несуществования предела функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ легко установить и без использования повторных пределов. Действительно, предположим, что точка $M(x,y)$ стремится к началу координат по прямой $y=kx$ (Рис. 1.16). При этом условии будем иметь:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

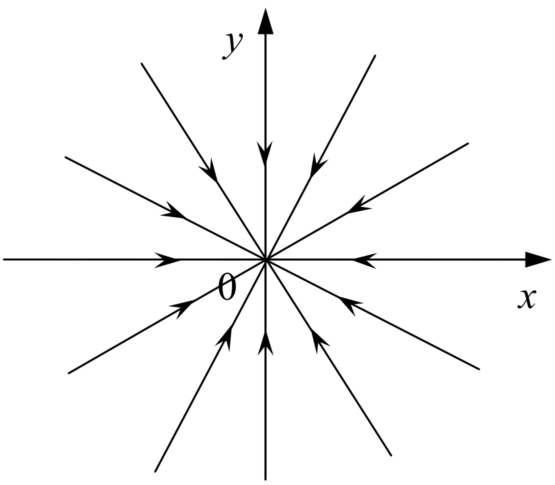

Рис. 1.16.

Итак, приближаясь к началу координат по различным прямым, соответствующим разным значениям k, получаем разные предельные значения. Остается опереться на теорему 1.2.

Пример 1.11. Вычислить повторные пределы функции

$$f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy}\ (c\neq 0,\ d\neq 0)$$

в начале координат.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{ax+by}{cx+dy}=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фикс.}\\ x\neq 0}}\frac{ax+by}{cx+dy}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фикс.}\\ x\neq 0}}\frac{a+b\dfrac{y}{x}}{c+d\dfrac{y}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a}{c}=\frac{a}{c}.$$

Аналогично $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\dfrac{b}{d}$.

Теорема 1.4. (связь между повторными пределами функции и пределом функции)

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ существует предел функции $f(x,y)$, равный b, а также внутренние пределы в двух повторных пределах этой функции, а именно: $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$. Тогда существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$, причем каждый из них равен b.

<u>Замечание 1.6.</u> Приведем упрощенную формулировку этой теоремы:

Теорема 1.4′. Если все повторные пределы существуют и предел функции существует, то все эти пределы между собой совпадают.

1.5. Непрерывность функций

Сама по себе идея непрерывности (точнее, непрерывного изменения некоторой величины) значительно проще для восприятия, чем идея предельного значения функции, ибо у каждого человека, по крайней мере на интуитивном уровне, есть знание о непрерывном или скачкообразном (катастрофическом) изменении внешней среды. Математически формализуют эту идею следующим образом.

<u>*Определение 1.21.*</u> Пусть функция $u = f(M) = f(x, y)$ определена на множестве D и пусть $M_0(x_0, y_0)$ – предельная точка D, принадлежащая этому множеству.

Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, т.е. предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

Развернем это определение следующим образом:

<u>*Определение 1.21′.*</u> Приращением (точнее, полным приращением) функции $u = f(M)$ в точке M_0 называется функция $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, где $M \in D$.

На координатном уровне: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y \Rightarrow \Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Вполне понятно, что условие непрерывности функции $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ эквивалентно условию

$$\lim_{M \to M_0} \Delta u = 0, \text{ или } \lim_{\rho \to 0} \Delta u = 0 \qquad (1.14)$$

где $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками M_0, M. Последнее условие читается так: бесконечно малому расстоянию между точками соответствует бесконечно малое приращение функции и называется *разностной формой условия непрерывности*. На координатном уровне это выглядит так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta u = 0. \qquad (1.15)$$

Пример 1.12. Покажем, что функция $u = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке плоскости.

Рассмотрим приращение Δu нашей функции в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$

$$= 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Очевидно, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Ч.т.д.

<u>*Определение 1.23.*</u> Предельные точки области определения функции $u = f(M)$, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва этой функции.

<u>Замечание 1.7.</u> Структура множества точек разрыва для случая функции нескольких переменных может быть весьма разнообразной. В случае функции двух переменных они могут образовывать некоторые линии – линии разрыва; для случая трех переменных точки разрыва могут заполнять поверхности, которые называются поверхностями разрыва.

Пример 1.13. Функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$ имеет линию разрыва $y = -x$.

Пример 1.14. Точки разрыва функции $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ заполняют плоскость $x + y + z = 0$, которая проходит через начало координат.

Для функций нескольких переменных существует еще один тип непрерывности – непрерывность по одной переменной.

<u>*Определение 1.24.*</u> Функция $u = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, где $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ есть частное приращение функции $f(x, y)$ по переменной x.

Аналогично определяется непрерывность функции по переменной y: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta_y u = 0$, где $\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ есть частное приращение функции по переменной y.

Можно дать другое, эквивалентное, определение непрерывности по отдельной переменной.

<u>*Определение 1.24´.*</u> Функция $u = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x, если функция $f(x, y_0)$ одной переменной x непрерывна в точке $x = x_0$.

Примечание 1.9. В отличие от непрерывности по отдельным переменным обычную непрерывность функции (*Определение 1.21.*) называют непрерывностью по совокупности переменных.

Теорема 1.5. Если функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна в самой точке M_0, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных.

Замечание 1.8. Обратное утверждение неверно. Это показывает следующий пример.

Пример 1.15. Доказать, что функция

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в начале координат по каждой переменной x, y, но не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

Доказательство. Рассмотрим частное приращение нашей функции в точке $O(0,0)$ по переменной x:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(\Delta x, 0) - f(0,0) =$$
$$= f(\Delta x, 0) = \frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} = 0.$$

Значит, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$. Аналогично, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta_y u = 0$. Следовательно, наша функция непрерывна по каждой из переменных. Однако, как показано в **Примере 1.10**, предел функции $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ в начале координат не существует. Отсюда вытекает, что функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$.

Перечислим основные свойства непрерывных функций.

Теорема 1.6. (об арифметических операциях над непрерывными функциями).

Если функции $f(M)$, $g(M)$ определены на множестве D и непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$, то функции $f(M) \pm g(M)$,

$f(M)g(M)$ и $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (частное при условии $g(M_0) \neq 0$) непрерывны в точке M_0.

<u>*Определение 1.25.*</u> Пусть функции $x = x(t, z)$, $y = y(t, z)$ определены на множестве $\Delta = \{(t, z)\}$ плоскости $0tz$, Тогда каждой точке $N(t, z) \in \Delta$ ставится в соответствие точка $M(x, y)$ плоскости $0xy$.

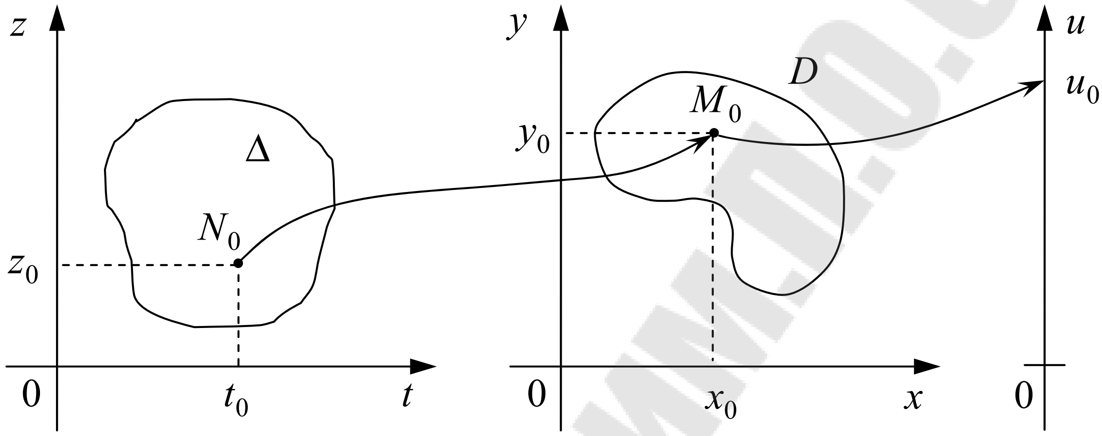

Рис. 1.17.

Множество всех таких точек M обозначим $\{M\} = D$. Пусть на множестве D определена функция $u = f(x, y)$. Тогда будем говорить, что на множестве Δ определена сложная функция $u = f(x(t, z), y(t, z))$. (Переменные x, y называют промежуточными аргументами).

Теорема 1.7. (о непрерывности сложной функции)

Если функции $x = x(t, z)$, $y = y(t, z)$ непрерывны в точке $N_0(t_0, z_0)$, а функция $u = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = x(t_0, z_0)$, $y_0 = y(t_0, z_0)$, то сложная функция $u = f(x(t, z), y(t, z))$ непрерывна в точке N_0 (Рис. 1.17).

В заключение этого пункта рассмотрим *непрерывность функции на множестве*.

<u>*Определение 1.26.*</u> Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Непрерывность функции в замкнутой области $\overline{D}$ означает, что она непрерывна в области D, а в точках границы этой области имеет место непрерывность при дополнительном условии, что точка $M - M_0$, оставаясь внутри области D.

<u>*Определение 1.27.*</u> Множество точек пространства E_n называется ограниченным, если оно содержится в некотором гипершаре:

$$(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \ldots + (x_n - x_n^{(0)})^2 \le R^2 .$$

Функции, непрерывные в ограниченной замкнутой области, обладают теми же (удобными для эксплуатации) свойствами, что и функции одной переменной, непрерывные на отрезке.

Теорема 1.8. (о наибольшем и наименьшем значениях)

Если в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ функция $u = f(M)$ непрерывна, то она достигает в $\overline{D}$ своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. в $\overline{D}$ существуют точки M_1, M_2, такие, что для любой точки $M \in D$ имеют место неравенства: $f(M_1) \le f(M) \le f(M_2)$.

Теорема 1.9. (о промежуточном значении)

Непрерывная в области $\overline{D}$ функция $u = f(M)$, переходя от одного своего значения к другому, необходимо проходит каждое промежуточное значение, т.е. если $M_1, M_2 \in \overline{D}$, то $\forall C \in [f(M_k), f(M_p)]$, где $\{k, p\} = \{1,2\}$, $\exists M_C \in \overline{D}$, для которой $f(M_C) = C$.

<u>Примечание 1.10.</u> Эта теорема сохраняет силу и для открытых областей.

1.6. Операция дифференцирования

Пусть $M(x, y)$ внутренняя точка области определения функции $u = f(M) = f(x, y)$. Мы уже не раз сталкивались с идеей изучения зависимости u только от одной из переменных x, y. Дальнейшим развитием этой идеи является частное дифференцирование.

Рассмотрим частное приращение нашей функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Отношение $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}$ является функцией одного аргумента Δx (разумеется, при фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$).

<u>*Определение 1.28.*</u> Частной производной функции $u = f(x, y)$ по аргументу x в точке M_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \qquad (1.16)$$

(если он существует). Эта частная производная обозначается одним из символов:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, u_x(M_0), f_x(M_0).$$

Возможен другой (эквивалентный) подход. А именно: при фиксированном y (скажем, $y = y_0$) функция $u = f(x, y)$ становится функцией одной переменной: $u = f(x, y_0)$. Производная этой функции одной переменной и есть частная производная функции $f(x, y)$ по аргументу x. Поэтому вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Пример 1.16. Рассмотрим уравнение Менделеева-Клайперона $\frac{pV}{T} = const$, описывающее состояние идеального газа: для данного количества (данной массы) идеального газа отношение произведения давления на объем к абсолютной температуре есть постоянная величина.

Поскольку величина постоянной пропорциональна массе данного газа, то окончательно имеем: $\frac{pV}{T} = mR$, где R – газовая постоянная, зависящая от природы газа. Очевидно, это уравнение позволяет определить одну из величин p, V, T если известны две другие, причем эти последние должны уже считаться независимыми переменными (см. таблицу)

Независимые переменные	***T, p***	***T,V***	***p,V***
Функции	$V = \frac{mRT}{p}$	$p = \frac{mRT}{V}$	$T = \frac{pV}{mR}$

Частные производные	$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{mR}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{mRT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{mR}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{mRT}{V^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{mR}$; $\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{mR}$

Из таблицы подмечаем, что

$$\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial V}=\frac{mR}{p}\cdot\frac{V}{mR}\cdot\left(-\frac{mRT}{V^2}\right)=-\frac{mRT}{pV}=-\frac{mR}{1}\cdot\frac{T}{pV}=-\frac{mR}{mR}=-1.$$

Если бы в левой части равенства мы произвели формальное сокращение, то получили бы не (-1), а $(+1)$.

Этот факт показывает, что запись $\frac{\partial f}{\partial x}$ для частной производной есть цельный символ, а не дробь как это было в случае функции одной переменной, где $\frac{df}{dx}$ означала частное двух дифференциалов.

Из определения вытекает *геометрический смысл частных производных*. Пусть $u=z=f(x,y)$ есть непрерывная функция двух переменных, графиком которой является некоторая поверхность c. Придадим переменным x, y определенные значения $x=x_0$, $y=y_0$; им на поверхности c соответствует точка $N(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. При нахождении частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ предполагается, что функция u является функцией только переменной x, тогда как переменное y сохраняет постоянное значение $y=y_0$, т.е. $u=f(x,y_0)=f_1(x)$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=f'_x(x_0,y_0)=f'_1(x_0). \qquad (1.17)$$

Функция $z=f_1(x)$ геометрически изображается кривой DNG, по которой поверхность c пересекается плоскостью π_1, проходящей через точку N и параллельной плоскости $z0x$. Учитывая геометрический смысл производной одного переменного, заключаем, что $f'_1(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha=\angle KSN$ есть угол наклона касательной NS к кривой DNG в точке N к прямой $y = y_0$, $z = 0$, параллельной оси $0x$. Таким образом, $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, т.е. частная производная функции $u = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ геометрически изображается тангенсом угла α между осью $0x$ и касательной к кривой, полученной от сечения поверхности c , являющейся геометрическим образом данной функции, плоскостью, параллельной плоскости $x0z$ и проходящей через точку $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, в точке N.

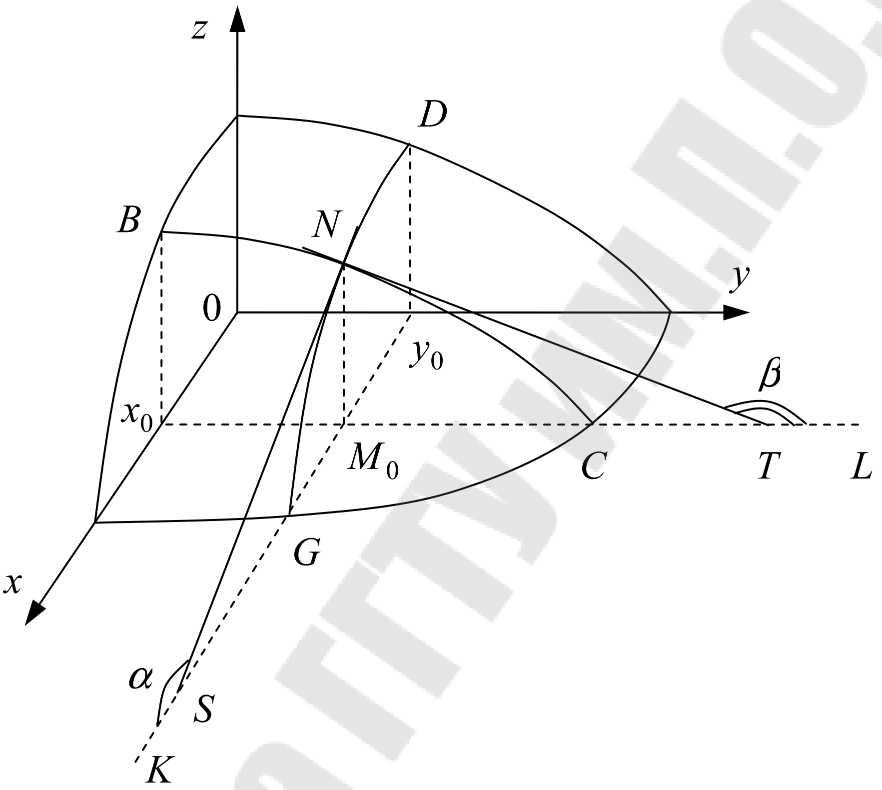

Рис. 1.18.

Предполагая теперь, что $x = x_0$, а y есть переменная величина, получим $u = z = f(x_0, y) = f_2(y)$. Отсюда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f'_y(x_0, y_0) = f'_2(y). \tag{1.18}$$

Геометрически функция $z = f_2(y)$ изображается кривой BNC, по которой поверхность c пересекается плоскостью π_2, проходящей через точку N и параллельной плоскости $y0z$ (Рис. 1.18). Обозначая через $\beta = \angle LTN$ угол между касательной NT к кривой BNC в точке N и прямой: $x = x_0$, $z = 0$, параллельной оси $0y$, аналогично предыдущему, получим: $f_2'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, т.е. $f_y'(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Физический смысл частных производных: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$ – это скорость изменения функции в точке M_0 в направлении оси $0x$. Аналогично $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$ это скорость изменения функции в точке M_0 в направлении оси $0y$.

Для дальнейшего нам потребуется формула, выражающая приращение функции через частные производные.

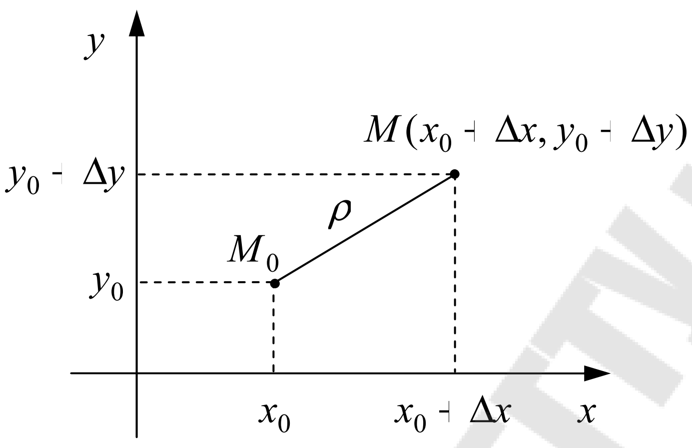

Рис. 1.19.

Теорема 1.10. Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $u = f(x, y)$ обладает первыми частными производными и эти производные непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \qquad (1.19)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\rho \to 0$, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между исходной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и сдвинутой точкой $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (см. Рис. 1.19).

Доказательство этой теоремы опирается на обобщенную формулу конечных приращений Лагранжа:

$$\Delta u = f_x'(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y'(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y,$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

Равенство (1.19) можно переписать в следующем более удобном виде:

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma\rho, \qquad (1.19')$$

где γ – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Следствие 1.1. Функция, обладающая непрерывными частными производными в точке M_0, и сама непрерывна в этой точке.

Действительно, из равенства (1.19′) сразу следует $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta u = 0$, что и говорит о непрерывности функции.

Замечание 1.9. Если частные производные разрывны, то заключение следствия теряет силу.

В самом деле, рассмотрим уже встречавшуюся нам функцию

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Эта функция всюду обладает частными производными:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

и, тем не менее, она разрывна в точке $(0,0)$ как было ранее показано (см. Пример 1.15).

Замечание 1.10. Теорема 1.10 является аналогом соответствующей теоремы из одномерного анализа, согласно которой приращение функции, имеющей производную в точке x_0, представимо в виде: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Аналогия, увы, не совсем полная, т.к. в Теореме 1.10 требуется не только существование конечных частных производных, но и их непрерывность в рассматриваемой точке.

Определение 1.29. Функция $u = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее приращение может быть представлено в виде (1.19) или в эквивалентной форме (1.19′).

Из данного определения вытекает

Следствие 1.2. Функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, непрерывна в этой точке (ибо $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$).

Разумеется обратное утверждение неверно. Например, функция

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой, но ее приращение не может быть представлено в виде (1.19) или (1.19′) в начале координат и, значит, функция не дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Из определения 1.2 очевидно, что дифференцируемая функция всегда обладает в соответствующей точке конечными первыми частными производными.

Обратное, опять-таки, неверно (см. Пример 1.15).

Замечание-предупреждение

Нельзя смешивать понятие дифференцируемости с фактом существования конечных частных производных. Здесь – различие со случаем функции одной переменной, поскольку там дифференцируемость и наличие конечной производной – одно и то же.

Из теоремы 1.10 вытекает

Теорема 1.11. Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $u = f(x, y)$ обладает первыми частными производными, непрерывными в точке M_0, то $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Определение 1.30. Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда выражение

$$du = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{1.20}$$

называют полным дифференциалом первого порядка (или первым полным дифференциалом) функции $u = f(x, y)$ в точке M_0.

Поскольку $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ (ведь дифференциал независимой переменной совпадает с её приращением), то формуле (1.20) можно придать более однородный вид:

$$du = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy \qquad (1.20')$$

или еще так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \qquad (1.20'')$$

Итак, мы видим, что полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов.

Пример 1.17. Найдем полный дифференциал функции $u = \sqrt[3]{x^2 + y}$.

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y\right)^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y\right)^2}}$, причем в любой точке, отличной от начала координат, эти частные производные непрерывны, а, значит, функция дифференцируема и

$$du = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y\right)^2}}dx + \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y\right)^2}}dy.$$

В точке $O(0,0)$ функция, очевидно, непрерывна. Однако, она не дифференцируема. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \infty;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta y}}{\Delta y} = \infty.$$

Отметим две характерные особенности полного дифференциала:

1) полный дифференциал линеен относительно Δx; Δy;

2) он отличается от приращения функции на величину $\gamma\rho$, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Поэтому дифференциал называют главной линейной частью приращения функции.

1.7. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y). Найдем ее полное приращение в этой точке:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Отсюда следует

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta u,$$

где согласно выражениям (1.19′) и (1.20)

$$\Delta u = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \gamma\rho \approx du = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

поскольку $\gamma \to 0$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ ($\Delta x, \Delta y \to 0$).

Таким образом, мы имеем приближенную формулу

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &\approx f(x, y) + du = \\ &= f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y, \end{aligned} \qquad (1.20''')$$

верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx и Δy.

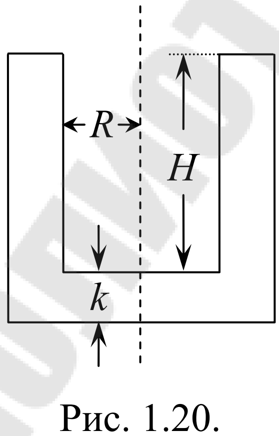

Рис. 1.20.

В качестве примера применения формулы (1.20‴) рассмотрим следующую задачу.

Задача. Вычислить объем материала, необходимого для изготовления цилиндрического стакана с внутренним радиусом *R*, глубиной *H* и толщиной стенок *k* (Рис. 1.20).

Решение. Для иллюстрации эффективности применения формулы (1.20‴) рассмотрим точное и приближенное решение этой задачи.

а) *Точное решение*. Искомый объем V, очевидно, будет равен разности объемов внешнего и внутреннего цилиндров:

$$V_{внешн} = \pi(R+k)^2(H+k),\ \ V_{внутр} = \pi R^2 H,$$

откуда следует

$$V = V_{внешн} - V_{внутр} = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H$$

или

$$V = \pi\left[(2RH + R^2)k + (H+2R)k^2 + k^3\right].\ (*)$$

б) *Приближенное решение*. Рассмотрим функцию двух переменных $f(R,H) \equiv V_{внутр} = \pi R^2 H$. Переменным R и H дадим приращения $\Delta R = \Delta H = k$. Тогда функция $f(R,H)$ получит приращение Δf, равное искомому объему V, т.е. $V = \Delta f$. Отсюда на основании соотношения (1.20‴) имеем приближенное равенство

$$V = \Delta f \approx df,$$

или

$$V \approx \frac{\partial f(R,H)}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f(R,H)}{\partial H}\Delta H.$$

Но поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH,\ \ \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2,\ \ \Delta R = \Delta H = k,$$

то получим

$$V \approx \pi(2RH + R^2)k.\ \ (**)$$

Сравнивая результаты $(*)$ и $(**)$, видим, что они отличаются на величину $\pi\left[(H+2R)k^2 + k^3\right]$, состоящую из членов второго и третьего порядка малости относительно *k*.

1.8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Рассмотрим непрерывную функцию двух переменных $u = f(x, y)$, где $(x, y) \in D$. График этой функции, т.е. множество точек $Q = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$,представляет собой поверхность в пространстве E_3. Пусть плоскость π проходит через точку $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ поверхности Q; $N(x, y, f(x, y))$ – произвольная точка на поверхности Q; N_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость π, т.е. N_1 – проекция точки N на плоскость π.

<u>*Определение 1.31.*</u> Плоскость π, проходящая через точку N_0 поверхности Q, называется касательной плоскостью к поверхности Q в этой точке, если при $N -$ N_0 ($N \in Q$) величина $\rho(N, N_1)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho(N, N_0)$, т.е.

$$\lim_{\substack{N \to N_0 \\ N \in Q}} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0 \quad (1.21)$$

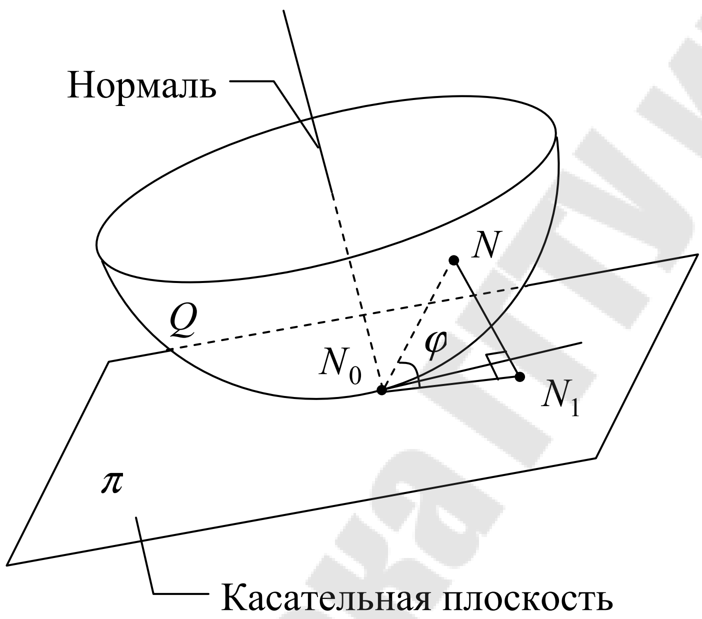

Рис.1.20а

<u>Примечание 1.11.</u> Требование (1.21) равносильно следующему: угол между секущей NN_0 и касательной плоскостью стремится к нулю, когда $\rho -$ 0, по какому бы закону точка N, оставаясь на поверхности Q, ни приближалась к N_0.

Это утверждение сразу следует из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{NN_1}{NN_0}, \quad (1.22)$$

где φ – угол между секущей NN_0 и плоскостью π (см. прямоугольный треугольник NN_1N_0, Рис. 1.20а).

Предположим теперь, что функция $u = z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда $\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma\rho$, где $\lim\limits_{\rho \to 0} \gamma = 0$, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, или в других обозначениях:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \gamma\rho. \qquad (1.23)$$

Оказывается, что если в равенстве (1.23) пренебречь числом $\gamma\rho$, бесконечно малым более высокого порядка малости, чем ρ, то мы получим уравнение касательной плоскости к поверхности Q в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Развивая эту идею, приходим к утверждению

Теорема 1.12. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то поверхность Q, заданная уравнением $z = f(x, y)$, заведомо имеет касательную плоскость в этой точке, уравнение которой

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (1.24)$$

<u>Замечание 1.11.</u> Слева в формуле (1.24) стоит приращение аппликаты касательной плоскости при переходе от точки N_0 к точке N, справа – дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Значит, полный дифференциал функции двух переменных совпадает с приращением аппликаты касательной плоскости.

<u>Замечание 1.12.</u> Уравнение (1.24) показывает, что в нашем случае касательная плоскость не перпендикулярна к плоскости $x0y$. Справедливо и обратное утверждение: если в точке N_0 поверхности Q, заданной уравнением $z = f(x, y)$, существует касательная плоскость, не перпендикулярная к плоскости $x0y$, то $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Замечание 1.13.</u> Нормалью к поверхности Q в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости.

Зная уравнение (1.24) касательной плоскости, нетрудно записать уравнение нормали. Действительно, перепишем уравнение (1.24) в виде:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (1.25)$$

Значит, координаты нормального вектора плоскости (1.25) суть

$$f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1.$$

С другой стороны, уравнение любой прямой, проходящей через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (1.26)$$

где m, n, p – координаты направляющего вектора прямой (т.е. вектора, коллинеарного прямой). Остается положить в (1.26)

$$m = f'_x(x_0, y_0), \;\; n = f'_y(x_0, y_0), \quad p = -1.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (1.27)$$

Пример 1.18. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^4 + y^4$ в точке $M_0(1;1;2)$.

Решение. Находим частные производные и вычисляем их значения в заданной точке: $z'_x = 4x^3\Big|_{M_0} = 4$; $z'_y = 4y^3\Big|_{M_0} = 4$. Согласно уравнению касательной плоскости (1.24) имеем:

$$z - 2 = 4(x - 1) + 4(y - 1) \text{ или } 4x + 4y - z - 6 = 0. \qquad (1.28)$$

Из (1.27) с учетом (1.28) записываем уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-1}.$$

1.9. Дифференцирование сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции

<u>*Определение 1.32.*</u> Функцию нескольких переменных назовем непрерывно дифференцируемой в области D, если существуют и непрерывны в D ее частные производные по каждой из независимых переменных.

Рассмотрим сложную функцию двух независимых переменных (см. п.1.1.5, Определение 1.25). Пусть

1) функция $u=f(x,y)$ непрерывно дифференцируема в области D плоскости $x0y$;

2) функции $x=x(t,z)$, $y=y(t,z)$ непрерывно дифференцируемы в области Δ плоскости $0tz$;

3) области Δ и D согласованы, т.е. если точка $(t,z)\in\Delta$, то соответствующая точка $(x,y)\in D$.

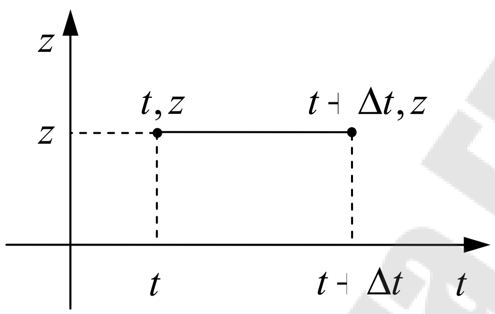

Рис. 1.21.

Предположим, что нам требуется найти частную производную данной сложной функции по переменной t. Рассмотрим в области Δ две точки (t,z) и $(t+\Delta t,z)$ (см. Рис. 1.21). Соответствующие частные приращения функций $x(t,z)$, $y(t,z)$ и $f(x,y)$ будут

$\Delta_t x = x(t+\Delta t,z)-x(t,z)$;

$\Delta_t y = y(t+\Delta t,z)-y(t,z)$;

$\Delta_t u = f(x+\Delta_t x, y+\Delta_t y)-f(x,y)$.

Преобразуем $\Delta_t u$ по обобщенной формуле конечных приращений и, разделив на Δt, получим:

$$\frac{\Delta_t u}{\Delta t}=f'_x(x+\theta\Delta_t x, y+\Delta_t y)\frac{\Delta_t x}{\Delta t}+f'_y(x, y+\theta_1\Delta_t y)\frac{\Delta_t y}{\Delta t}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta t\to 0$ в силу непрерывности f'_x и f'_y, получим:

$$u'_t = f'_x(x, y)x'_t(t, z) + f'_y(x, y)y'_t(t, z) \tag{1.29}$$

или в других обозначениях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.30}$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}. \tag{1.31}$$

Пример 1.19. Найти частные производные сложной функции $u = \ln(x^2 + y)$, где $x = e^{t+z^2}$, $y = t^2 + z$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y}(x^2 + y)'_x = \frac{2x}{x^2 + y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y}(x^2 + y)'_y = \frac{1}{x^2 + y};$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = e^{t+z^2}(t + z^2)'_t = e^{t+z^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = e^{t+z^2}(t + z^2)'_z = 2ze^{t+z^2};$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 1.$$

Используя формулы (1.30) и (1.31), находим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2x}{x^2 + y}e^{t+z^2} + \frac{1}{x^2 + y}2t = \frac{2(xe^{t+z^2} + t)}{x^2 + y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2x}{x^2 + y}2ze^{t+z^2} + \frac{1}{x^2 + y}\cdot 1 = \frac{4xze^{t+z^2} + 1}{x^2 + y}.$$

В последних выражениях необходимо вместо функций x и y подставить их выражения: $x = e^{t+z^2}$, $y = t^2 + z$.

Для случая большего числа переменных формулы (1.30) и (1.31) обобщаются естественным образом. Например, если $a = f(u, v, z)$ есть функция трех аргументов *u*, *v*, *z*, причем каждый из них зависит от независимых переменных *x* и *y*, то формулы (1.30) и (1.31) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial x} &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.31а)$$

Введем понятие полной производной. Пусть задана функция $u = f(x, y, z)$, где переменные *x*, *y*, *z* в свою очередь зависят от одного аргумента *t*:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

По сути дела, *u* является функцией только одного переменного *t* и, значит, можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{du}{dt}$. Эту производную и называют полной производной, которая вычисляется по первой из формул (1.31а):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

где *x*, *y*, *z* – функции только одной переменной *t*. Следовательно, частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$ обращаются в обыкновенные, а $\frac{\partial t}{\partial t} = 1$. Поэтому полная производная $\frac{du}{dt}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$) принимает вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (1.31б)$$

Найдем выражение для полного дифференциала сложной функции $u = f(x, y)$, $x = x(t, z)$, $y = y(t, z)$. Для этого подставляем выражения (1.30) и (1.31) в формулу полного дифференциала (см. формулу (1.20″))

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \tag{1.31в}$$

Тогда получим:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \right) dz.$$

Выполним следующие преобразования в правой части:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial z} dz \right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial z} dz \right). \tag{*}$$

Но по определению полного дифференциала функции

$$\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial z} dz = dx, \ \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial z} dz = dy.$$

Тогда вместо $(*)$ получим:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \tag{1.31г}$$

Из уравнений (1.31в) и (1.31г) следует, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) сохраняет прежний вид, т.е. форма первого дифференциала инвариантна, независимо от того являются ли x, y независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пример 1.20. Найти полный дифференциал сложной функции $u = x^2 y^3$, $x = t^2 \sin z$, $y = t^3 e^z$.

Решение. По формуле (1.31г) находим:

$$du = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy = 2xy^3 (2t \sin z dt + t^2 \cos z dz) +$$

$$+3x^2y^2(3t^2e^z dt + t^3e^z dz).$$

Последнее выражение можно представить и так:

$$du = (2xy^3 \cdot 2t\sin z + 3x^2y^2 \cdot 3t^2e^z)dt +$$

$$+(2xy^3 \cdot t^2\cos z + 3x^2y^2 \cdot t^3e^z)dz = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

1.10. Производная от функции, заданной неявно

Пусть значения трех переменных *x*, *y*, *z* связаны между собой уравнением, которое, если все его члены перенести налево, в общем случае имеет вид

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1.32)$$

где $F(x, y, z)$ есть функция трех переменных, заданная в некоторой пространственной области *V*.

Если функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области *D* на плоскости $x0y$ такова, что уравнение (1.32) при подстановке в него вместо *z* выражения $f(x, y)$ обращается в тождество относительно *x*, *y*, то говорят, что функция $z = f(x, y)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1.32). Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad (1.32a)$$

разрешенное относительно *z*, неявно определяет следующие элементарные функции

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

поскольку подстановка в уравнение (1.32а) этих значений дает тождество

$$x^2 + y^2 + (R^2 - x^2 - y^2) - R^2 \equiv 0.$$

Но не всякую неявно заданную функцию можно представить явно, т.е. в виде $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – элементарная функция. Так, например, функция, заданная уравнением

$$z - x - ye^z = 0,$$

не выражается через элементарную функцию, т.е. это уравнение нельзя разрешить относительно *x*, *y*. Вопрос о существовании однозначной и непрерывной неявной функции будет рассмотрен в 1.12.

Отметим, что термин «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ ее задания. Так, каждая явная функция $z = f(x, y)$ может быть представлена и как неявная в виде $z - f(x, y) = 0$.

Для нахождения частных производных неявной функции можно, не преобразовывая ее в явную, т.е. не представляя ее в виде $z = f(x, y)$, продифференцировать уравнение $F(x, y, z) = 0$ по переменной *x*, считая $y = const$ (или по переменной *y*, считая $x = const$), применяя правила дифференцирования, таблицу производных элементарных функций и считая переменную *z* функцией от *x* (или функцией от *y*).

Пример 1.21. Найти частные производные функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $z - x - ye^z = 0$.

Решение. Дифференцируем уравнение по переменной *x*, считая $y = const$ (фиксировано), а *z* есть функция от *x*. Тогда получим:

$$z'_x - 1 - ye^z \cdot z'_x = 0.$$

Отсюда находим частную производную:

$$z'_x = \frac{1}{1 - ye^z}.$$

Аналогично, продифференцируем уравнение по переменной *y*, считая теперь, что $x = const$, а *z* – функция от *y*

$$z'_y - e^z - ye^z \cdot z'_y = 0,$$

откуда следует выражение для z'_y:

$$z'_y = \frac{e^z}{1 - ye^z}.$$

Оба выражения для z'_x и z'_y имеют смысл в тех точках (*x*;*y*), в которых $1 - ye^z \neq 0$. Так же мы видим, что для нахождения значения частных производных неявной функции при данных значениях ее аргументов *x*, *y* необходимо знать и значение функции *z* при данном значении *x*, *y*.

Покажем, что частные производные неявной функции (1.32) можно также найти по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \tag{1.32б}$$

где $F'_z \neq 0$ в точках $(x;y)$.

Действительно, пусть непрерывная функция $z = f(x,y)$ задается неявно уравнением (1.32), причем $F(x,y,z)$, $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ и $F'_z(x,y,z)$ – непрерывные функции в некоторой пространственной области V, содержащей точку $(x;y;z)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.32), т.е. $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$. Кроме того в точке $(x;y)$ имеет место $F'_z(x,y,f(x,y)) \neq 0$. Пусть y – фиксировано, а x получит приращение Δx. Тогда функция $z = f(x,y)$ получит приращение $(\Delta z)_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Но поскольку $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$ и $F(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)) \equiv 0$ (точки $(x;y;z = f(x,y))$ и $(x+\Delta x; y; z+(\Delta z)_x = f(x+\Delta x, y))$ должны удовлетворять уравнению (1.32)), то отсюда находим

$$\Delta F = F(x+\Delta x, y, z+(\Delta z)_x) - F(x,y,z) = 0$$

или в силу представления (1.19′) имеем

$$\Delta F = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}(\Delta z)_x + \gamma\rho = 0, \tag{1.32в}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\gamma = 0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + ((\Delta z)_x)^2} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, поскольку из дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta z)_x = 0$.

Тогда из (1.32в) находим, что

$$z'_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta z)_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{F'_x(x,y,z)\Delta x + \gamma\rho}{F'_z(x,y,z)\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(x,y,z) + \gamma\rho / \Delta x}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

при условии, что $F'_z(x,y,z) \neq 0$ в точках $(x; y)$, где, очевидно, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma\rho}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \gamma \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho}{\Delta x} = 0 .$$

Аналогично, считая, что x фиксировано, а y получает приращение Δy, и повторяя предыдущие рассуждения, приходим ко второй формуле в (1.32б).

Таким образом, частные производные в примере (1.21) можно вычислить с помощью формул (1.32б), где $F(x,y,z) = z - x - ye^z$. Для этого находим

$$F'_x = -1, \;\; F'_y = -e^z, \;\; F'_z = 1 - ye^z .$$

Отсюда следует

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-1}{1-ye^z} = \frac{1}{1-ye^z}, \quad z'_y = -\frac{-e^z}{1-ye^z} = \frac{e^z}{1-ye^z} .$$

1.11. Производная по направлению. Градиент

Понятие частной производной (как производной вдоль координатной оси) допускает естественное обобщение, рассматриваемое в теории скалярного поля. Напомним, что скалярным полем называют часть пространства, каждой точке которой поставлено в соответствие число (см. п.1.1.3, Замечание 1.5). Пусть в некоторой области V задано скалярное поле $u = \varphi(M) = \varphi(x,y,z)$. Зафиксируем в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поля некоторый единичный вектор $\vec{e}^{\,o} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и возьмем на направлении l этого вектора точку $M(x,y,z)$, отстоящую от M_0 на расстоянии Δl. Разность

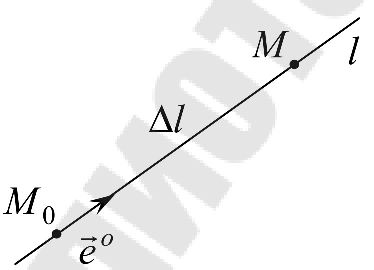

Рис. 1.22.

$$\Delta\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0)$$

определяет изменение (или приращение) поля при переходе от точки M_0 к точке M, а отношение

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l} \tag{1.33}$$

определяет среднюю скорость изменения поля φ на участке Δl.

Определение 1.33. Предел отношения (1.33) при $\Delta l \to 0$ называется производной поля $\varphi(M)$ в точке M_0 по данному направлению l и обозначается символом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}. \tag{1.34}$$

Очевидно, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ как предел средней скорости изменения поля определяет скорость изменения поля в данной точке M_0 в направлении $\vec{e}^{\,o}$. Установим формулу для ее вычисления в предположении, что в точке M_0 существуют $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$. Так как прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$, то ее каноническое уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}. \tag{1.35}$$

Обозначая, как обычно, величину отношения через t:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} = t, \tag{1.36}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha \\ y &= y_0 + t\cos\beta \\ z &= z_0 + t\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Покажем, что $t=\Delta l$ – длина отрезка M_0M. Действительно, из (1.37) вытекает:

$$\frac{(x-x_0)^2}{t^2}+\frac{(y-y_0)^2}{t^2}+\frac{(z-z_0)^2}{t^2}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=t^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta l=M_0M=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\sqrt{t^2}=t. \qquad (1.38)$$

Примечание 1.12. При выводе мы опирались на известное из аналитической геометрии свойство направляющих косинусов вектора: сумма их квадратов равна единице.

В точках $M(x,y,z)$, лежащих на l, функция $\varphi(x,y,z)$ является функцией одной переменной t:

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x(t),y(t),z(t))=\psi(t). \qquad (1.39)$$

Покажем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{d\psi(t)}{dt}. \qquad (1.40)$$

Действительно, по определению $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ с учетом (1.37) и (1.38) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial l}&=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0)}{\Delta l}=\\&=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-\varphi(x_0,y_0,z_0)}{\Delta l}=\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}=\frac{d\psi(t)}{dt}\end{aligned} \qquad (1.41)$$

Применяя теперь формулу дифференцирования сложной функции, находим:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (1.42)$$

Но из (1.37) следует $\quad \frac{dx}{dt} = \cos\alpha; \quad \frac{dy}{dt} = \cos\beta; \quad \frac{dz}{dt} = \cos\gamma \qquad (1.43)$

(ибо величины x_0, y_0, z_0, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ не зависят от переменной t). Подставляя (1.43) в (1.42), окончательно получаем:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (1.44)$$

Пример 1.22. Найти производную функции $u = xyz$ по направлению l от точки $M_0(1,1,1)$ к точке $M(2,2,2)$.

Решение.

Шаг 1. Находим частные производные данной функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\big|_{M_0} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz\big|_{M_0} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy\big|_{M_0} = 1.$$

Шаг 2. Находим координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (1;1;1)$.

Шаг 3. Находим длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Шаг 4. Нормируем вектор $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\vec{e}^{\,o} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Шаг 5. Применяя формулу (1.44), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Замечание1.14. В случае плоского поля $\varphi = \varphi(x, y)$ имеет место: $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$. Поэтому формула (1.44) принимает следующий вид:

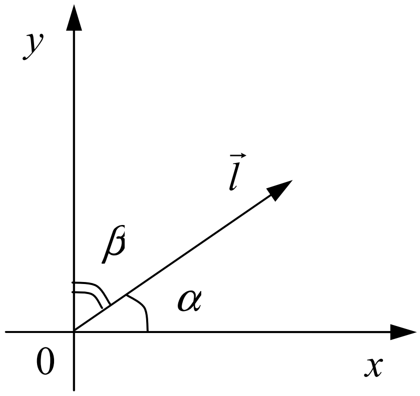

Рис. 1.23.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (1.45)$$

Рассмотрим еще одну (уже векторную) характеристику скалярного поля. Пусть дано скалярное поле $u = \varphi(x, y, z)$, причем функция φ имеет частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ в точке $M(x, y, z)$.

Определение 1.34. Вектор $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$ называется градиентом скалярного поля φ (градиентом функции φ) и обозначается символом

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}. \qquad (1.46)$$

Направляющие косинусы градиента определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'_x}{|\operatorname{grad}\varphi|};\ \cos\beta = \frac{\varphi'_y}{|\operatorname{grad}\varphi|};\ \cos\gamma = \frac{\varphi'_z}{|\operatorname{grad}\varphi|}, \qquad (1.47)$$

где

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2} \qquad (1.48)$$

Говорят, что скалярным полем φ порождается векторное поле градиента φ.

Установим связь между градиентом и производной по направлению, и выясним физический смысл градиента.

Возьмем в поле $\varphi = \varphi(M)$ точку M и найдем $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Проведем через точку M некоторое направление l, образующее с осями координат углы α, β, γ. Пусть $\vec{e}^{\,o} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – единичный вектор направления l. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{e}^{o}$ и $\operatorname{grad}\varphi(M)$:

$$\vec{e}^{o}\cdot\operatorname{grad}\varphi(M)=\cos\alpha\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\beta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\cos\gamma\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (1.49)$$

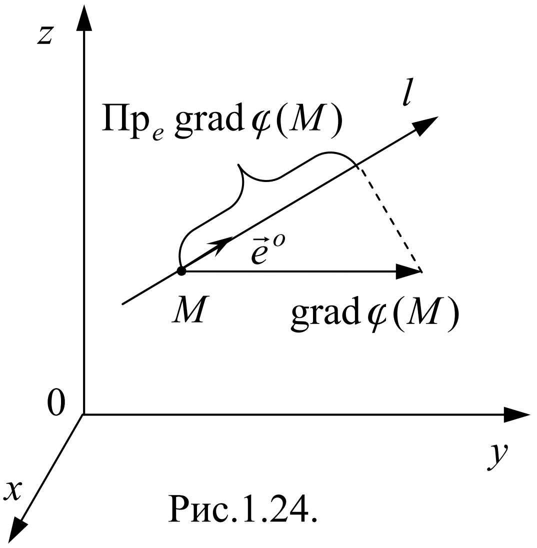

Рис.1.24.

Напомним, что скалярное произведение некоторого вектора на какой-нибудь единичный вектор равно проекции данного вектора на этот единичный вектор. Таким образом, левая часть полученного равенства представляет собой проекцию $\operatorname{grad}\varphi(M)$ на l:

$$\text{Пр}_e\operatorname{grad}\varphi(M)=\vec{e}^{o}\cdot\operatorname{grad}\varphi(M) \qquad (1.50)$$

Правая же часть равна $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$. Значит,

$$\text{Пр}_e\operatorname{grad}\varphi(M)=\frac{\partial\varphi}{\partial l} \qquad (1.51)$$

При изменении направления l изменяется и проекция $\text{Пр}_e\operatorname{grad}\varphi$. Очевидно, эта проекция будет иметь наибольшее положительное значение в том случае, когда направление l совпадает с вектором $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Учитывая физический смысл производной по направлению и формулу (1.51), убеждаемся в том, что вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)$ по величине и направлению есть наибольшая скорость возрастания функции $\varphi(M)$ в данной точке.

В этом и состоит физический смысл градиента. На указанном свойстве градиента основано его широкое применение как в математике так и в других науках. В частности, в электрическом поле градиент есть наибольшая скорость возрастания потенциала.

Покажем, что вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)$ направлен по нормали к поверхности уровня скалярного поля $\varphi(M)$, проходящей через точку M.

Уравнение поверхности уровня имеет вид: $\varphi(x,y,z)=C$. Уравнение нормали к этой поверхности:

$$\frac{X-x}{\varphi'_x}=\frac{Y-y}{\varphi'_z}=\frac{Z-z}{\varphi'_z} \tag{1.52}$$

(Здесь X, Y, Z – координаты текущей точки нормали; x, y, z – координаты точки поверхности, в которой проведена нормаль). Сравнивая формулы (1.46) и (1.52), замечаем, что проекции направляющего вектора нормали (т.е. вектора, коллинеарного нормали) к поверхности уровня в точке $M(x,y,z)$ являются проекциями вектора $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Следовательно, вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)$ направлен по нормали к этой поверхности. Отсюда, например, вытекает, что градиент электрического потенциала всюду направлен по нормали (внутренней) к эквипотенциальной поверхности.

<u>Замечание 1.15.</u> В случае плоского поля $\varphi=\varphi(x,y)$ вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}$ направлен по нормали к линии уровня этого поля, проходящей через точку $M(x,y)$.

Пример 1.23. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точке $M(1,1,1)$.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{grad}u=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k},$$

$$\operatorname{grad}u(1,1,1)=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\ |\operatorname{grad}u(1,1,1)|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}.$$

Значит, $u_{\max}=2\sqrt{3}$. Поверхность уровня, проходящая через точку $M(1,1,1)$ – сфера $x^2+y^2+z^2=3$. Наибольшая скорость возрастания функции u будет в направлении радиуса этой сферы, проходящего через точку $M(1,1,1)$.

В заключение этого пункта перечислим <u>дифференциальные свойства градиента</u>, которые вытекают из определения градиента и известных правил дифференцирования.

1. $\operatorname{grad}(\varphi_1\pm\varphi_2)=\operatorname{grad}\varphi_1\pm\operatorname{grad}\varphi_2$.

2. $\operatorname{grad}(C\varphi) = C \operatorname{grad}\varphi$, где $C = const$.
3. $\operatorname{grad}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2 \operatorname{grad}\varphi_1 + \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2$.
4. $\operatorname{grad}\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{\varphi_2 \operatorname{grad}\varphi_1 - \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2}{\varphi_2^2}$ $(\varphi_2 \neq 0)$
5. $\operatorname{grad} F(\varphi) = \dfrac{dF}{d\varphi} \cdot grad\varphi$.

1.12. Отображение плоских областей. Определитель Якоби

Тематика, которую мы обсудим в настоящем пункте, является обобщением параграфа 1.10, посвященного неявной функции, и находит свое применение при вычислении двойных (и сводящихся к ним) интегралов методом замены переменных.

А) Аффинное отображение.

Разберем предварительно один частный случай общей задачи, которую мы изучим далее.

Рассмотрим две плоскости, на одной из которых введем прямоугольные координаты (u, v), а на другой прямоугольные координаты (x, y). Связь между плоскостями зададим с помощью уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v \\ y &= a_{21}u + a_{22}v \end{aligned}\right\}, \tag{1.53}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – любые действительные числа. Очевидно, плоскость (u, v) при помощи системы уравнений (1.53) отображается на плоскость (x, y) (или ее часть).

Определение 1.35. Отображение определяемое уравнениями (1.53), назовем аффинным.

Возникает вопрос: при каких условиях уравнения (1.53) задают отображение плоскости (u, v) на всю плоскость (x, y)?

Очевидно, эта проблема эквивалентна следующей: при каких условиях система (1.53) разрешима относительно переменных u, v?

Поскольку (1.53) можно рассматривать как систему двух линейных алгебраических уравнений с неизвестными u, v и свободными членами x, y, то согласно правилу Крамера, достаточно потребовать, чтобы главный определитель системы

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,.$$

Итак, если $I \neq 0$, то система (1.53) дает взаимно однозначное отображение плоскости (u, v) на плоскость (x, y), т.е. каждой точке (u, v) сопоставляется единственная точка (x, y) и обратно.

Если же $I = 0$, то приходим к совсем другой ситуации. Разберем возможные случаи.

Пусть $I = 0$, и хотя бы один из миноров матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ не равен нулю, скажем $a_{11} \neq 0$. Тогда из (1.53) находим:

$$u = \frac{x - a_{12}v}{a_{11}}$$

$$y = a_{21}u + a_{22}v = a_{21} \cdot \frac{x - a_{12}v}{a_{11}} + a_{22}v = \frac{a_{21}x - (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})v}{a_{11}} =$$

$$= \frac{a_{21}x + I \cdot v}{a_{11}} = \frac{a_{21}x + 0 \cdot v}{a_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}x.$$

Следовательно, вся плоскость (u, v) отображается в плоскости (x, y) на прямую $y = \frac{a_{21}}{a_{11}}x$, проходящую через начало координат. Значит, в рассматриваемом случае отображение (1.53) переводит открытое множество, коим является вся плоскость, в прямую, т.е. во множество, вовсе не содержащее внутренних точек (сколь бы малую окружность мы ни описали около некоторой точки, она будет содержать, помимо точек, принадлежащих прямой, и другие точки). Очевидно, это отображение не является взаимно однозначным. Например, точке (0,0) на плоскости (x, y) соответствует на плоскости (u, v) целая прямая: $a_{11}u + a_{12}v = 0$ (или, что тоже, $a_{21}u + a_{22}v = 0$).

Пусть теперь $I=0$ и все миноры матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равны нулю, т.е. $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$. Тогда очевидно, что все точки плоскости (u,v) отображаются на одну единственную точку $x=y=0$.

Вывод: если $I=0$, то уравнения (1.53) отображают всю плоскость (u,v) или на прямую, или на точку, т.е. на геометрические образы меньшего числа измерений (такого рода отображение называют вырожденным).

<u>Замечание 1.16.</u> Двум случаям $I\neq 0$ и $I=0$ можно дать следующую (функциональную) интерпретацию, а именно: x, также как и y, есть функция двух независимых переменных. Если $I\neq 0$, то эти две функции независимы, т.е. каждой из них можно придать любые значения вне зависимости от значения другой. Если же $I=0$, то эти две функции зависимы, так как, задав значение одной из них, мы получим для другой вполне определенное значение.

<u>Замечание 1.17.</u> Из (1.53) вытекает $\frac{\partial x}{\partial u}=a_{11}$; $\frac{\partial x}{\partial v}=a_{12}$; $\frac{\partial y}{\partial u}=a_{21}$; $\frac{\partial y}{\partial v}=a_{22}$. Значит,

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Такие определители в математике называют определителями Якоби (Карл Густав Якоби (1804 – 1851) – немецкий математик) или функциональными определителями.

Пример 1.24. Пусть $\left.\begin{array}{l} x=2u-4v \\ y=u-2v \end{array}\right\}$. Здесь $I=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$. Умножая второе уравнение системы на 2, заключаем, что $x=2y\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$, т.е. вся плоскость (u,v) отображается на прямую $y=\frac{1}{2}x$.

Б) <u>Функции, определяемые системой уравнений (неявные функции).</u>

Для дальнейшего нам достаточно ограничиться следующим специальным случаем.

Пусть даны два уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z,t)=0,\\ \varphi(x,y,z,t)=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

где за независимые переменные мы принимаем x, y. Установим условия, при которых система (1.54) разрешима относительно переменных z, t. Пусть функции f, φ имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам и пусть

$$\left.\begin{aligned} f(a,b,m,n)=0,\\ \varphi(a,b,m,n)=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

Для того, чтобы первое уравнение из (1.54) можно было бы разрешить относительно z в некоторой окрестности точки (a,b,m,n), достаточно, чтобы

$$f_z'(a,b,m,n)\neq 0\,. \tag{1.56}$$

Допустим, что это условие выполнено. Тогда мы можем из первого уравнения системы (1.54) найти

$$z=\varphi_1(x,y,t) \tag{1.57}$$

и подставить во второе:

$$\varphi(x,y,\varphi_1(x,y,t),t)=0\,. \tag{1.58}$$

Для того, чтобы полученное уравнение можно было бы разрешить относительно t, достаточно, чтобы в точке (a,b,m,n) выполнялось условие:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{dt}\neq 0\,. \tag{1.59}$$

Но по правилу дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{1.60}$$

Поэтому условие (1.59) перепишется так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) \neq 0. \tag{1.61}$$

Откуда

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \neq 0. \tag{1.62}$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, то из (1.62) заключаем: в точке (a, b, m, n) должно иметь место соотношение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \tag{1.63}$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.64}$$

Определение 1.36. Определитель, стоящий в левой части соотношения (1.64), называется определителем Якоби функций φ, f по переменным t, z и обозначается следующим образом:

$$\frac{D(\varphi, f)}{D(t, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (1.65)$$

Примечание 1.13. Определитель Якоби называют также якобианом, или еще – функциональным определителем.

Итак, имеет место

Теорема 1.13. Для того, чтобы система уравнений (1.54) была разрешима в некоторой окрестности начальной точки (a, b, m, n) относительно переменных z, t, достаточно, чтобы:

1) данные уравнения удовлетворялись координатами начальной точки, т.е. выполнялась система равенств (1.55);
2) левые части равенств (1.54) были непрерывными функциями и имели бы непрерывные частные производные в рассматриваемой окрестности;
3) определитель Якоби $\dfrac{D(\varphi, f)}{D(t, z)}$, взятый от левых частей уравнений по этим переменным, не равнялся нулю в начальной точке.

В) Примеры отображения плоских областей. Локально однозначная обратимость.

Пусть даны две функции

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \end{aligned}\right\} \qquad (1.66)$$

определенные в области Δ плоскости (u, v). Предположим, что в этой области функции φ и ψ непрерывны и имеют непрерывные частые производные по обеим переменным. Если ввести в рассмотрение плоскость (x, y), то можно сказать, что система уравнений (1.66) отображает область Δ в плоскость (x, y), т.е. на плоскость (x, y) или ее часть.

Определение 1.37. Совокупность D всех полученных точек (x, y) будем называть образом области Δ, саму область Δ – прообразом множества D.

Определение 1.38. Если каждой точке $(u,v)\in\Delta$ соответствует единственная точка $(x,y)\in D$ и обратно, то отображение (1.66) называется взаимно однозначным.

Примечание 1.14. Именно взаимно однозначные отображения областей потребуются нам при вычислении двойных интегралов. Но, вполне понятно, что большинство отображений не будет обладать этим свойством.

Пример 1.25. Рассмотрим область Δ, определяемую неравенствами: $\begin{matrix} 0<u<2\pi \\ 0<v<2\pi \end{matrix}$. (см. Рис. 1.25)

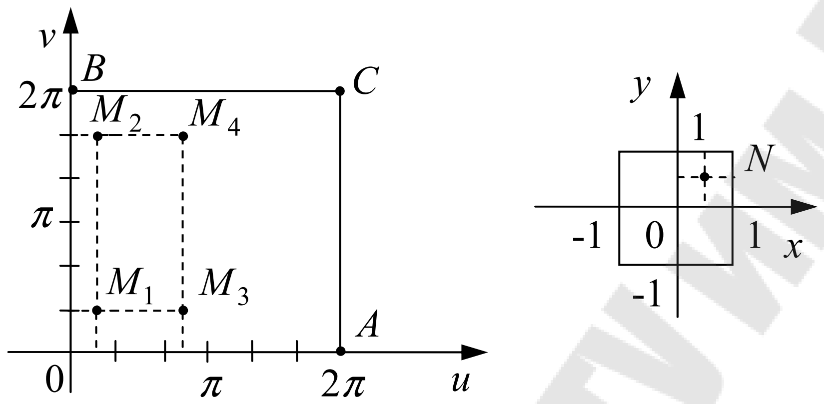

Рис. 1.25

(т.е. Δ – это внутренность квадрата $OACB$)

Пусть в области Δ определены функции $\begin{cases} x=\sin u \\ y=\cos v \end{cases}$.

Очевидно, точки (x,y) заполняют внутренность квадрата D: $-1<x<1$, $-1<y<1$.

В самом деле, достаточно рассмотреть два графика (см. Рис. 1.26).

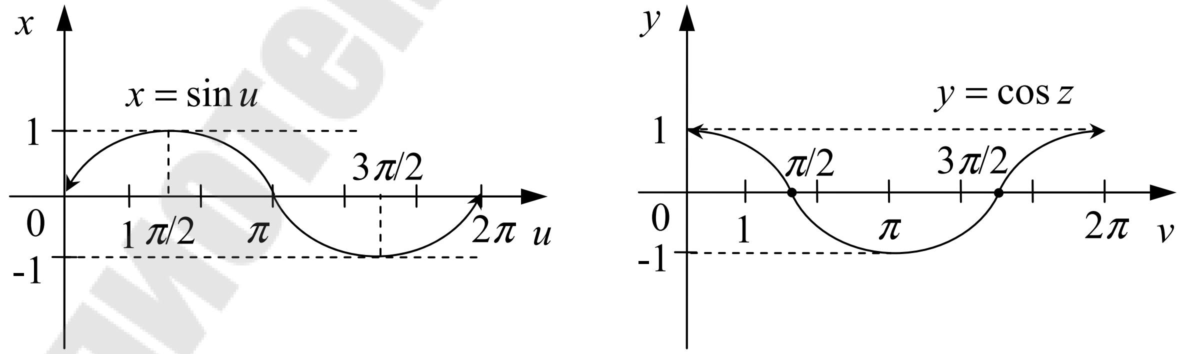

Рис. 1.26.

Глядя на Рис. 1.26, подмечаем даже больше: внутренность квадрата $OACB$ отображается почти на весь квадрат D, включая отрезки границы: $x = \pm 1$, $y = -1$; исключением является только отрезок: $y = 1$. Т.е. образом Δ при нашем отображении служит множество точек, определяемых системой неравенств: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y < 1$.

Легко видеть, что отображение $\Delta - D$ не взаимно однозначное. Например, точки $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$, $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$ квадрата $OACB$ переходят в одну и ту же точку $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ квадрата D. В свете ранее сказанного (см. Примечание 1.14) попробуем сузить рассматриваемое отображение до взаимно однозначного.

В самом деле, рассмотрим область Δ': $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$ в плоскости (u, v). Очевидно (см. Рис.1.25), эта область взаимно однозначно отобразится (при нашем соответствии) на внутренность квадрата D': $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ (см. Рис. 1.27).

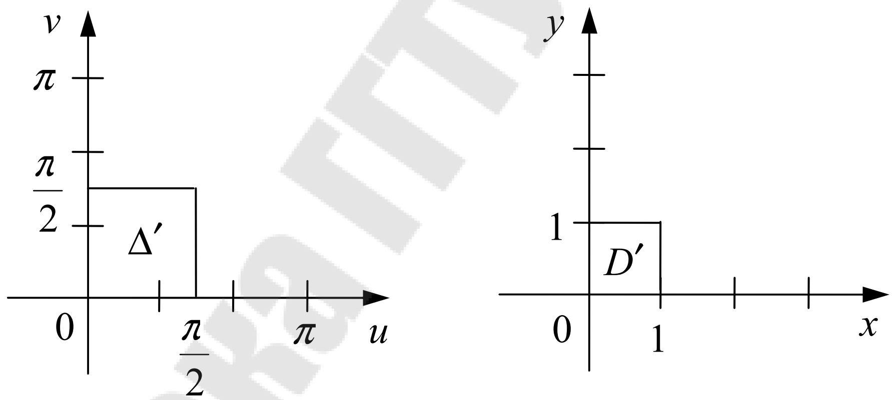

Рис. 1.27.

<u>Замечание 1.18.</u> Ситуация, с которой мы столкнулись в примере 1.25, оказывается достаточно типичной. Именно, пусть (u_0, v_0) некоторая точка области Δ, в которой определены функции (1.66), и пусть, кроме того, якобиан функций φ, ψ :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

не равен нулю в точке (u_0, v_0), т.е.

$$J(u_0, v_0) \neq 0. \qquad (1.67)$$

Если обозначить $\varphi(u_0, v_0) = x_0$, $\psi(u_0, v_0) = y_0$, то как было показано в подпункте Б) данного пункта 1.1.10 (см. теорему 1.13) уравнения (1.66): $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ разрешимы относительно переменных u, v и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) определяют u, v как функции x, y:

$$u = \overline{\varphi}(x, y),\ v = \overline{\psi}(x, y), \qquad (1.68)$$

причем $u_0 = \overline{\varphi}(x_0, y_0)$, $v_0 = \overline{\psi}(x_0, y_0)$ и функции $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ непрерывны в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0).

Итак, при соблюдении указанных условий отображение (1.66) взаимно однозначно отображает некоторую окрестность Δ_1 точки (u_0, v_0) на окрестность D_1 точки (x_0, y_0) (Рис. 1.28).

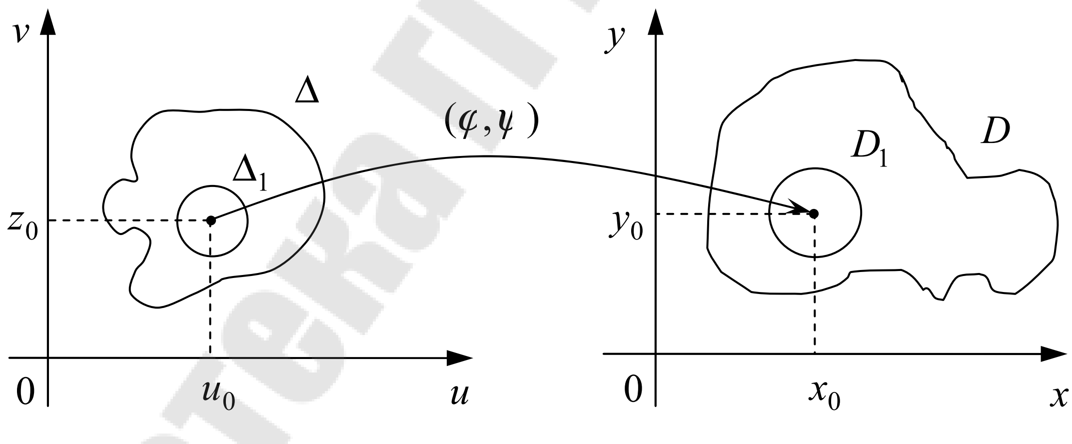

Рис. 1.28

Определение 1.39. Если описанная ситуация имеет место в каждой точке некоторой области Δ плоскости (u, v), то будем говорить, что соответствующее отображение *локально однозначно обратимо*.

Сейчас мы приведем пример, из которого будет видно, что из локальной однозначной обратимости, вообще говоря, не следует взаимная однозначность отображения во всей Δ.

Пример 1.26. Рассмотрим функции

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}, \tag{1.69}$$

определенные в области Δ: $1 < u < 2$; $0 < v < 3\pi$, представляющей собой внутренность прямоугольника (Рис. 1.29).

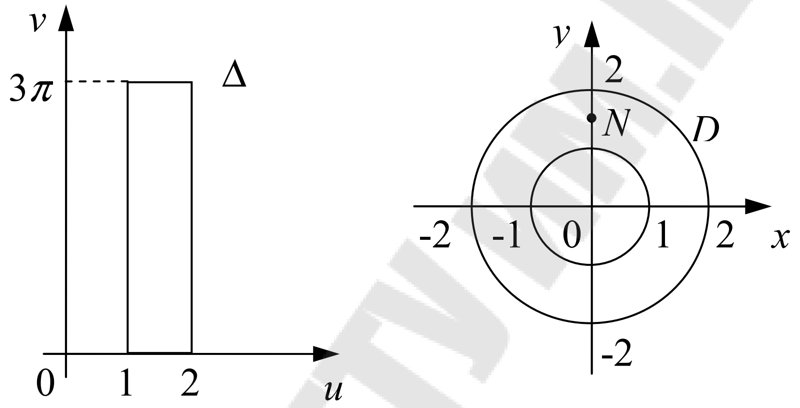

Рис. 1.29.

Функции x, y непрерывны и имеют непрерывные частные производные $x'_u = \cos v$; $x'_z = -u\sin v$; $y'_u = \sin v$; $y'_z = u\cos v$, причем в области Δ якобиан $I(x,y) = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u(\cos^2 v + \sin^2 v) = u \neq 0$. Значит, в области Δ рассматриваемое отображение локально однозначно обратимо.

Нетрудно видеть, что образом прямоугольника Δ в плоскости (x, y) является кольцо D (см. Рис. 1.29): $1 < x^2 + y^2 < 4$. (Действительно, из равенств (1.69) вытекает: $x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2$. Но по условию $1 < u < 2 =$ $1 < u^2 < 4$. Значит, $1 < x^2 + y^2 < 4$).

Увы, отображение (1.69) не является взаимно однозначным. В самом деле, возьмем в кольце D точку $N(0;\frac{3}{2})$ и найдем соответствующие u, v из уравнений:

$$\begin{cases} 0 = u\cos v \\ \dfrac{3}{2} = u\sin v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos v \\ \dfrac{3}{2} = u\sin v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin v = 1 \\ u = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{\pi}{2} \\ v = \dfrac{5\pi}{2} \end{array} \right. \\ u = \dfrac{3}{2} \end{array} \right. .$$

В итоге получаем две точки из области Δ: $M_1\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Далее мы рассмотрим примеры, в которых якобиан может обращаться в нуль.

Пример 1.27. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{array}{l} x = u^3 \\ y = v^3 \end{array}\right\} \tag{1.70}$$

в области Δ: $u^2 + v^2 < 1$. (Очевидно, область Δ состоит из внутренних точек единичного круга с центром в начале координат). Имеем:

$$x'_u = 3u^2;\ x'_v = 0;\ y'_u = 0;\ x'_v = 3v^2.\ J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2.$$

При $u = 0$ или $v = 0$ якобиан J обращается в ноль. Однако, уравнения (1.70) можно разрешить относительно u, v:

$$u = \sqrt[3]{x},\ v = \sqrt[3]{y}. \tag{1.71}$$

Легко видеть, что система функций (1.71) дает отображение области Δ на область D, ограниченную астроидой:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

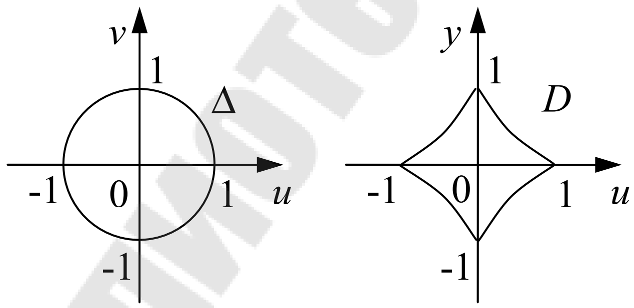

Рис. 1.30.

Действительно, границей области Δ служит окружность $u^2 + v^2 = 1$. Поэтому возводя равенства (1.71) в квадрат и складывая полученные результаты, будем иметь (см. Рис. 1.30):

$$1 = u^2 + v^2 = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

В этом примере отображение взаимно однозначное, несмотря на то, что якобиан обращается в нуль внутри области.

Пример 1.28. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \end{aligned}\right\} \qquad (1.72)$$

в области Δ: $u^2 + v^2 < 1$ (см. предыдущий пример). Эта система функций дает отображение области Δ на область D: $x^2 + y^2 < 1$.

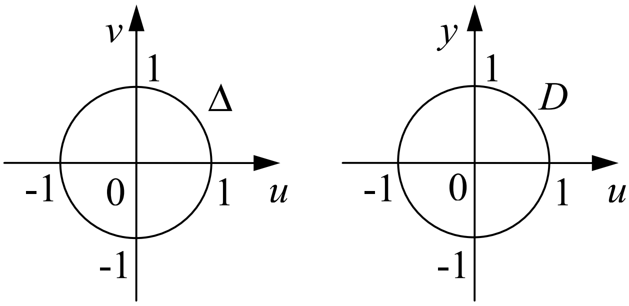

Рис. 1.31.

В самом деле, проверим соответствие границ. Область Δ ограничена единичной окружностью с центром в начале координат: $u^2 + v^2 = 1$. Из (1.72) вытекает:

$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = \\ = \left(u^2 + v^2\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Якобиан $J = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2$ обращается в нуль лишь при $u = v = 0$.

Согласно ранее доказанному преобразование (1.72) локально однозначно обратимо в области $\dot{\Delta}$, полученной из Δ удалением начала координат.

Что касается начала координат, то какую бы малую окрестность этой точки мы ни взяли, обратное отображение будет двузначным. Действительно, если при некоторых значениях x, y координаты точки (u_1, v_1) удовлетворяют уравнениям (1.72), то и координаты точки $(-u_1, -v_1)$ также удовлетворяют им.

Резюмируя примеры 1.24 и 1.25 можно сказать, что если якобиан обращается в ноль (но не тождественно), то отображение может быть как вырожденным, так и не вырожденным.

Если же якобиан тождественно равен нулю в некоторой (открытой) области Δ, то верна

Теорема 1.14. Пусть функции (1.66) $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в (открытой) области Δ плоскости (u,v). Если якобиан

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}\equiv 0$$

(тождественно равен нулю) в Δ, в то время как хотя бы одна частная производная в некоторой точке (u_0, v_0) не равна нулю, то тогда можно найти окрестность этой точки такую, что отображение этой окрестности будет вырожденным, именно ее образ будет линия: $y=\lambda(x)$.

Пример 1.29. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin u(\sin v + \cos v)\\ y &= \sin^2 u(1+\sin 2v)\end{aligned}\right\}, \qquad (1.73)$$

определенные в области Δ: $0<u<\dfrac{\pi}{2}$; $0<v<\dfrac{\pi}{2}$. Найдем их якобиан:

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\cos u(\sin v + \cos v) & \sin u(\cos v - \sin v)\\ 2\sin u\cos u(1+\sin 2v) & 2\sin^2 u\cos 2v\end{vmatrix}\equiv 0,$$

ибо его строки пропорциональны. В самом деле:

$$\frac{\cos u(\sin v + \cos v)}{2\sin u\cos u(1+\sin 2v)}=\frac{\sin v + \cos v}{2\sin u(\sin v+\cos v)^2}=\frac{1}{2\sin u(\cos v+\sin v)}, \qquad (1.74)$$

а

$$\frac{\sin u(\cos v - \sin v)}{2\sin^2 u\cos 2v}=\frac{\cos v - \sin v}{2\sin u(\cos^2 v-\sin^2 v)}=\frac{1}{2\sin u(\cos v+\sin v)}. \qquad (1.75)$$

Правые части равенств (1.74) и (1.75) равны, значит, равны и их левые части.

На основании Теоремы 1.14 можно утверждать, что образом области Δ при отображении (1.73) будет или линия, или точка.

Так как $x'_u=\cos u(\sin v + \cos v)$ не тождественно нулю, то должна получиться линия. Действительно,

$$\sin u=\frac{x}{\sin v+\cos v}\Rightarrow y=\frac{x^2}{(\sin v+\cos v)^2}\cdot(\sin v+\cos v)^2=x^2,$$

т.е. $y=x^2$. Следовательно, область Δ (квадрат) отображается на линию (параболу).

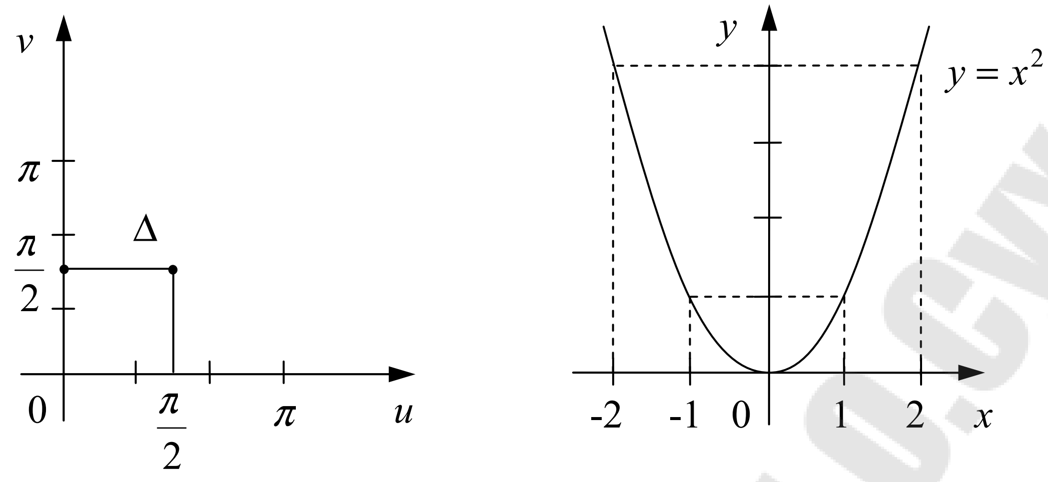

Рис. 1.32.

1.13. Производные и дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$.

Пусть частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y)$ существуют. Понятно, что они являются функциями переменных x и y. Если существуют частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, то их называют частными производными второго порядка и обозначают так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y) = \left(f'_x(x, y)\right)'_x, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y) = \left(f'_y(x, y)\right)'_x, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y) = \left(f'_x(x, y)\right)'_y, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y) = \left(f'_y(x, y)\right)'_y. \end{cases} \tag{1.76}$$

Очевидно, частные производные второго порядка в равенствах (1.76) можно снова дифференцировать по x и y (при условии, что они существуют). Тогда получим производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

В общем случае частная производная n-го порядка есть первая производная от производной $(n-1)$-го порядка по соответствующим переменным, например, $\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$.

Для функций любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 1.30. Вычислить частные производные второго порядка от функции $u = x^3 y + y^2$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2y,\ \frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(3x^2 y\right)'_x = 6xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(x^3 + 2y\right)'_x = 3x^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(3x^2 y\right)'_y = 3x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(x^3 + 2y\right)'_y = 2.$$

Пример 1.31. Вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$, если $u = y^3 e^{-x} + x^3 y^2 + 3$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(y^3 e^{-x} + x^3 y^2 + 3\right)'_x = y^3 e^{-x}(-x)'_x + y^2 3x^2 = -y^3 e^{-x} + 3x^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(-y^3 e^{-x} + 3x^2 y^2\right)'_x = -y^3 e^{-x}(-1) + 6xy^2 = y^3 e^{-x} + 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) = \left(y^3 e^{-x} + 6xy^2\right)'_y = 3y^2 e^{-x} + 12xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(y^3 e^{-x} + x^3 y^2 + 3\right)'_y = 3y^2 e^{-x} + 2yx^3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(3y^2 e^{-x} + 2yx^3\right)'_x = -3y^2 e^{-x} + 6yx^2,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \left(-3y^2 e^{-x} + 6yx^2\right)'_x = 3y^2 e^{-x} + 12xy.$$

Из рассмотренных примеров видно, что результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным не зависит:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 3x^2 \text{ и } \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 3y^2 e^{-x} + 12xy.$$

Этот результат вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.15. Если функция $u = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x; y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ \left(f''_{yx} = f''_{xy}\right). \tag{1.77}$$

Аналогичная теорема имеет место и для смешанных частных производных n-го порядка, например,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}, \tag{1.78}$$

а также и для функции любого числа переменных.

Введем дифференциалы высших порядков. Пусть в области D на плоскости $x0y$ задана функция $u = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка в этой области. Тогда в соответствии с формулой (1.20′) ее полный дифференциал du дается выражением

$$du = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \tag{1.79}$$

где dx, dy – произвольные приращения независимых переменных x, y.

Из выражения (1.79) видим, что полный дифференциал du также является функцией от x, y. Предположим, что существуют непрерывные частные производные второго порядка для функции u. Тогда можно говорить о полном дифференциале от дифференциала du, который и называют вторым дифференциалом от функции u и обозначают d^2u.

Подчеркнем, что приращения dx и dy при этом рассматриваются как постоянные числа и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала du к другому d^2u.

Таким образом, используя определение второго дифференциала как $d^2u = d(du)$, формулы (1.79), (1.77) и правила дифференцирования, будем иметь

$$\begin{aligned} d^2u = d(du) = d\left(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right) = \\ = d\left(f'_x(x,y)\right)dx + d\left(f'_y(x,y)\right)dy = \\ = \left(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy\right)dx + \left(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy\right)dy = \\ = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)(dy)^2 \end{aligned} \tag{1.80}$$

или, используя формально квадрат суммы выражения $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, в символическом виде

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y). \tag{1.80а}$$

В общем случае, дифференциал n-го порядка $d^n u$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции u, т.е.

$$d^n u = d(d^{n-1}u) \tag{1.80б}$$

или в символическом виде

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y), \tag{1.80в}$$

где x, y – независимые переменные.

1.14. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция двух переменных $u = f(x, y)$ непрерывна вместе со всеми своими частными производными до $(n+1)$-порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Дадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы промежуточный отрезок, соединяющий точки $(x_0; y_0)$ и $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки $(x_0; y_0)$. Тогда, аналогично случаю функции одного переменного, формула Тейлора для функции $u = f(x, y)$ двух переменных имеет вид

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1, \tag{1.81}$$

причем фигурирующие справа в формуле (1.81) в различных степенях дифференциалы dx и dy равны именно тем приращениям Δx и Δy независимых переменных, которые входят в аргументы функции слева.

Заметим, что, хотя в дифференциальной форме формула Тейлора (1.81) для случая функции двух переменных имеет такой же простой вид, как и для случая функции одной переменной, но в развернутом виде, заменяя дифференциалы $df(x_0, y_0)$, $d^2 f(x_0, y_0)$ и т.д. их выражениями (1.80а), (1.80б), она принимает существенно более сложный вид:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y\right] +$$
$$\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\right] + \ldots \tag{1.81a}$$

2. Приложения дифференциального исчисления функции нескольких переменных

2.1. Локальный экстремум функции нескольких переменных

<u>*Определение 2.1.*</u> Функция $u = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что

для всех точек $M(x;y)$, из рассматриваемой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, отличных от нее ($x \neq x_0, y \neq y_0$), выполняется неравенство (Рис.2.1.):

$$f(x_0, y_0) > f(x, y). \qquad (2.1)$$

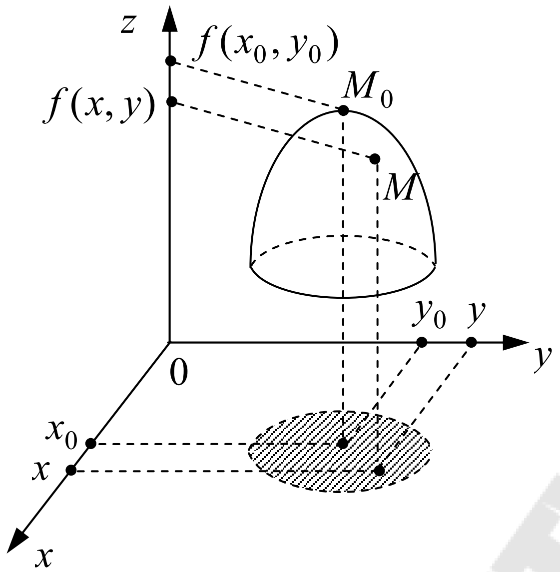

Рис. 2.1.

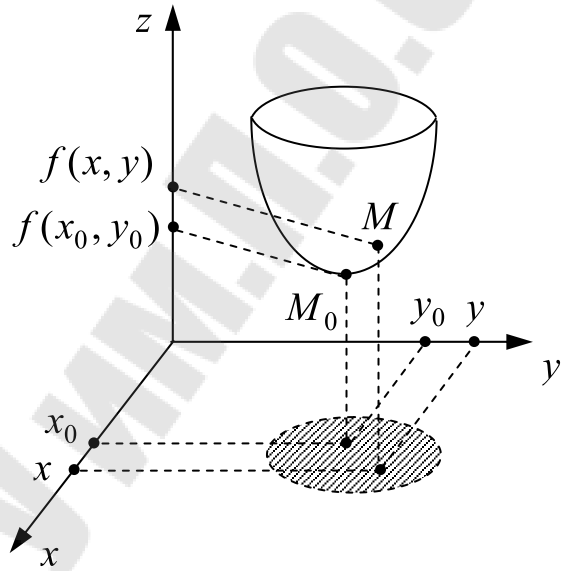

Рис. 2.2.

<u>*Определение 2.2.*</u> Функция $u = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ минимум, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что для всех точек $M(x;y)$, из рассматриваемой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, отличных от нее ($x \neq x_0,\ y \neq y_0$), выполняется неравенство (Рис. 2.2.)

$$f(x_0, y_0) < f(x, y). \qquad (2.2)$$

<u>Замечание 2.1.</u> Данные определения максимума и минимума функции можно перефразировать следующим образом.

Положим $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$. Тогда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f,$$

и, следовательно, вместо (2.1) и (2.2) получим:

1) если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях $\Delta x, \Delta y \neq 0$, то функция $f(x, y)$ достигает максимума в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях $\Delta x, \Delta y \neq 0$, то функция $f(x, y)$ достигает минимума в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Определения 2.1 и 2.2, а также замечание 2.1, без труда переносятся и на функции любого числа переменных.

Точки максимума и минимума функции называют точками ее локального экстремума (или просто экстремума). Для точек экстремума функции справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. (<u>*необходимое условие экстремума*</u>). Если функция $u = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке либо равны нулю, либо не существуют, т.е.

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ или } \nexists, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ или } \nexists. \end{cases} \tag{2.3}$$

Справедливость этого утверждения вытекает из необходимого условия экстремума функции одного переменного. Действительно, пусть $y = y_0$. Тогда $f(x, y_0)$ – функция одного переменного *x*. Так как при $x = x_0$ функция $f(x, y_0)$ имеет экстремум (максимум или минимум), то, следовательно, $f'_x(x, y_0)\big|_{x=x_0} \equiv f'_x(x_0, y_0)$ или равно нулю, или не существует. Аналогично, полагая $x = x_0$, видим, что функция $f(x_0, y)$ – функция одного переменного *y*. Но поскольку при $y = y_0$ функция $f(x_0, y)$ имеет экстремум, то $f'_y(x_0, y)\big|_{y=y_0} \equiv f'_y(x_0, y_0) = 0$ или не существует.

Теорема 2.1 не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, а позволяет находить лишь критические точки (т.е. точки возможного экстремума) из системы уравнений (2.3).

Для исследования функции в критических точках используют достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Теорема 2.2. (<u>*достаточное условие экстремума*</u>). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, функция $u = f(x, y)$

имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, причем точка $M_0(x_0; y_0)$ – критическая точка функции $f(x, y)$, т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } f'_y(x_0, y_0) = 0 \ (du(x_0, y_0) = 0).$$

Тогда при $x = x_0$, $y = y_0$:

1) функция $f(x, y)$ имеет максимум, если

$$\Delta_2 = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0 \text{ и}$$

$$\Delta_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ (или } \Delta_1 = f''_{yy}(x_0, y_0) < 0\text{), т.е. } d^2u(x_0, y_0) < 0;$$

2) функция $f(x, y)$ имеет минимум, если

$$\Delta_2 > 0 \text{ и } \Delta_1 > 0, \text{ т.е. } d^2u(x_0, y_0) > 0;$$

3) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума, если

$$\Delta_2 < 0, \text{ т.е. } d^2u(x_0, y_0) \text{ не имеет определенного знака;}$$

4) если $\Delta_2 = 0$ т.е. $d^2u(x_0, y_0) = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ (формулы (1.81) и (1.81а)) в точке $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\right] + \quad (2.4)$$
$$+ \alpha((\Delta\rho)^3),$$

где

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ а } \lim_{\Delta\rho \to 0} \alpha((\Delta\rho)^3) = 0. \quad (2.5)$$

Но по условию

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Следовательно, выражение (2.3) принимает вид

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\right] + \quad (2.6)$$

$$+\alpha((\Delta\rho)^3).$$

Преобразуем второй дифференциал в правой части выражения (2.6), выделяя полный квадрат:

$$d^2u = f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 =$$

$$= \frac{1}{f''_{xx}(x_0, y_0)}\left[\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2\right)(\Delta y)^2\right]$$

или (в принятых в формулировке теоремы обозначениях)

$$d^2u = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\right)^2 + \Delta_2(\Delta y)^2\right]. \quad (2.7)$$

Таким образом, выражение (2.6) принимает вид

$$\Delta f = \frac{1}{2!}d^2u + \alpha\left((\Delta\rho)^3\right). \quad (2.8.)$$

Тогда, принимая во внимание замечание 2.1, из выражений (2.7) и (2.8) следует:

1) если $\Delta_2 > 0$, а $\Delta_1 < 0$, то для любых достаточно малых значений приращений Δx и Δy, одновременно неравных нулю, второй дифференциал $d^2u < 0$ и, следовательно, $\Delta f < 0$; значит в точке $M(x_0; y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет максимум;

2) если $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_1 > 0$, то при таких же достаточно малых значениях приращений Δx и Δy (и также одновременно неравных нулю) теперь второй дифференциал $d^2u > 0$ и, следовательно, $\Delta f > 0$; значит теперь функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет минимум;

3) если же $\Delta_2 < 0$, то второй дифференциал d^2u при фиксированном знаке Δ_1 может иметь любой знак, например, $d^2u > 0$ при $\Delta y = 0$ и любом $\Delta x \neq 0$ и $d^2u < 0$ при $\Delta y \neq 0$, а $f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta y = 0$; значит, в этом случае, т.е. при $\Delta_2 < 0$, полное приращение также не имеет определенного знака и, следовательно, функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$;

4) если же $\Delta_2 = 0$, то второй дифференциал опять таки можно сделать равным нулю, полагая $f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta y = 0$, а, следовательно, знак приращения Δf будет теперь определяться знаком $\alpha\left((\Delta\rho)^3\right)$; значит, в этом случае ($\Delta_2 = 0$) требуется специальное дальнейшее исследование (например, с помощью формулы Тейлора, содержащей дифференциалы более высокого порядка).

Пример 2.1. Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + 1$.

Решение. Находим критические точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \\ f'_y = 2y = 0, \end{cases}$$

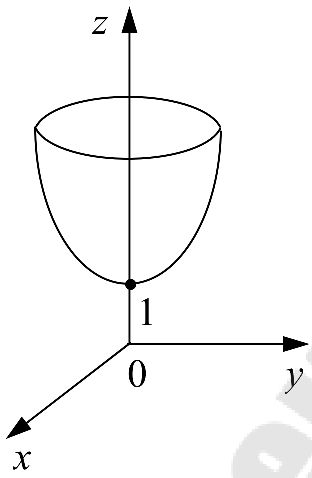

Рис. 2.3.

откуда следует, что точка (0;0) – критическая точка.

Находим частные производные второго порядка в критической точке:

$$f''_{xx} = 2,\quad f''_{xy} = 0,\quad f''_{yy} = 2.$$

Определяем характер критической точки:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0.$$

Следовательно, в точке (0;0) данная функция (эллиптический параболоид) имеет минимум, а именно (Рис. 2.3):

$$u_{\min} = 1.$$

Пример 2.2. Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 - y^2$.

Решение. Критические точки находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \\ f'_y = -2y = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что точка (0;0) – критическая точка.

Находим частные производные второго порядка в критической точке:

$$f''_{xx} = 2\,,\ \ f''_{xy} = 0\,,\ \ f''_{yy} = -\,2\,.$$

Устанавливаем характер критической точки:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0\,,\ \ \Delta_2 = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0\,.$$

Поскольку $\Delta_2 = -\,4 < 0$, то в точке (0;0) данная функция экстремума не имеет. Это седловая точка, а поверхность, определяемая функцией $u = x^2 - y^2$, называется гиперболическим параболоидом (другое название – «седло») (Рис. 2.4.).

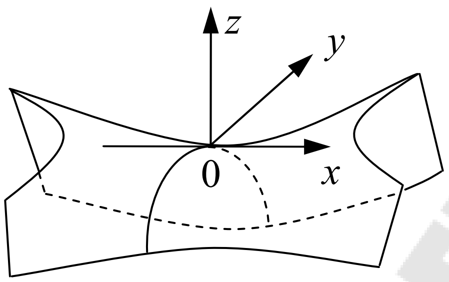

Рис. 2.4.

Замечание 2.2. Необходимо различать понятие экстремума функции с понятиями наибольшего и наименьшего значений функции.

Подчеркнем, что многие задачи (как из области математики, так и из других областей науки и техники) приводят к вопросу о нахождении наибольшего и наименьшего значений некоторой функции. Так функция двух переменных $u = f(x, y)$, определенная и непрерывная в некоторой замкнутой ограниченной области *D* на плоскости $x0y$, и имеющая в этой области конечные частные производные, достигает своего наибольшего или наименьшего значений либо в точках экстремума, либо на границе области *D*. Поэтому, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции $u = f(x, y)$ в области *D*, необходимо определить все ее критические точки (точки возможного экстремума), вычислить значение функции в этих точках и затем сравнить эти значения со значениями функции в граничных точках области *D*. Наибольшее и наименьшее из этих значений и будет являться наибольшим и наименьшим значением функции в замкнутой области *D*.

Пример 2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Находим частные производные

$$u'_x = 2x - 2(x^2 + y^2)\cdot 2x,\ u'_y = 2y - 2(x^2 + y^2)\cdot 2y.$$

Приравняв частные производные u'_x и u'_y нулю, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x(1 - 2(x^2 + y^2)) = 0, \\ 2y(1 - 2(x^2 + y^2)) = 0, \end{cases}$$

откуда определяем точки, в которых u'_x и u'_y обращаются в нуль:

$$x_1 = y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3 = 0.$$

Вычисляем значения функции в точках $(x_i; y_i)$ $(i = 1,2,3)$:

$$u(0,0) = 0,\ u\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4},\ u\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \frac{1}{4}.$$

Теперь исследуем поведение функции на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Подставляя $x^2 + y^2 = 1$ в выражение для u, получим $u = 0$.

Итак, необходимо сравнить значения

$$u = 0;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4};$$

из них наименьшим будет 0, которое достигается в точках $(0;0)$ и на границе области $x^2 + y^2 \le 1$, а наибольшим будет $\frac{1}{4}$, которое достигается в точках $\left(0; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

2.2. Условный экстремум функции нескольких переменных

Решение многих задач из области математики и задач практического характера из различных областей науки и техники сводится к нахождению экстремумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми дополнительными условиями, например, удовлетворяют данным уравнениям. Задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, удовлетворяющих дополнительным условиям, называют задачей на условный экстремум.

Пусть требуется найти экстремум функции $u = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2.9}$$

Поскольку переменные x и y связаны между собой уравнением (2.9), то только одна из них, например, x, будет независимой, а вторая переменная y определяется из равенства (2.9) как функция от x, т.е. $y = y(x)$, и, следовательно, $\varphi(x, y(x)) \equiv 0$.

Предположим, что мы разрешили уравнение (2.9) относительно y так, что $y = y(x)$ – его решение ($\varphi(x, y(x)) \equiv 0$). Тогда функция $u = f(x, y(x))$ является функцией одного независимого переменного x, а, значит, мы свели исходную задачу на условный экстремум к задаче на локальный экстремум функции одного независимого переменного x.

Очевидно, такой подход применим только в случае, когда уравнение (2.9) можно разрешить относительно одной из переменных.

Поставленную задачу на условный экстремум можно решить, не прибегая к разрешению уравнения (2.9) относительно переменных x или y. Пусть функция u имеет экстремум при тех значениях x и y, при которых выполняется условие (2.9). Следовательно, в точках экстремума полная производная $\frac{du}{dx}$ должна обращаться в нуль:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.10}$$

При этом в этих же точках экстремума должно выполняться условие (2.9). Значит, из (2.9) находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.11}$$

которое выполняется для всех x и y, удовлетворяющих условию (2.9).

Умножим равенство (2.11) на неопределенный пока коэффициент λ и сложим его с равенством (2.10). Тогда получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (2.12)$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума. Выберем множитель λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих условному экстремуму функции u при условии (2.9), вторая скобка в равенстве (2.12) обратилась в нуль

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0, \qquad (2.13)$$

где для определенности мы считаем, что в критических точках $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0$.

Но тогда при этих значениях x и y из равенства (2.12) следует

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0. \qquad (2.14)$$

Таким образом, объединяя равенства (2.9), (2.13) и (2.14), получаем, что в точках условного экстремума должна иметь решения система уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \qquad (2.15)$$

с тремя неизвестными x, y, λ. Из этих уравнений определяются x, y и λ, причем λ играет лишь вспомогательную роль.

Из проведенных рассуждений следует, что система уравнений (2.15) является необходимым условием существования условного экстремума, т.е. в точках условного экстремума уравнения системы (2.15) удовлетворяются. Но не при всех значениях x, y и λ, удовлетворяющих уравнениям системы (2.15), функция $u = f(x, y)$ при условии (2.9) будет иметь условный экстремум. Как и в случае локального экстремума функции нескольких переменных, требуется дополнительное исследование характера найденных критических точек.

В изложенном выше способе нахождения условного экстремума функции двух переменных нарушается симметрия в отношении переменных: одна из них трактуется как независимая, а другая – как зависимая. В некоторых случаях такой подход ведет к усложнению выкладок. Лагранж (Жозеф Луи Лагранж, 1736-1813, великий французский математик и механик) предложил метод, при котором все переменные играют одинаковую роль. Для этого рассмотрим функцию трех переменных

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{2.16}$$

которую называют функцией Лагранжа.

Очевидно, что в точках x, y, в которых выполняется условие связи (2.9), функция Лагранжа совпадает со значением функции в этих точках: $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$ при $\varphi(x.y) = 0$. Более того, рассматривая функцию $L(x, y, \lambda)$ как функцию трех переменных x, y и λ, видим, что ее критические точки (точки ее возможного экстремума) определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

которая фактически совпадает с системой (2.15), служащей для нахождения точек условного экстремума функции $u = f(x, y)$ при условии (2.9).

Таким образом, для того чтобы найти значения x и y, удовлетворяющие условию (2.9), при которых функция $u = f(x, y)$ может иметь условный экстремум, необходимо составить функцию Лагранжа (2.16), приравнять нулю ее частные производные по x, y и λ, что приводит к системе уравнений (2.17), решая которую определяют искомые значения x, y и вспомогательную переменную λ (множитель Лагранжа). Исследование характера найденных критических точек осуществляют с помощью достаточных условий экстремума функции нескольких переменных. Для простоты приведем формулировку достаточного условия экстремума функции трех переменных, обобщающую теорему 2.2.

Теорема 2.3. Пусть в некоторой пространственной области, содержащей точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, функция $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, причем точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – критическая точка функции $u = f(x, y, z)$, т.е.

$$\begin{aligned} &f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ &f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ &f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0, \ (du(x_0, y_0, z_0) = 0). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Тогда при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$:

1) функция $f(x, y, z)$ имеет максимум, если

$$\begin{cases} \Delta_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{xz}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) & f''_{yz}(x_0, y_0) \\ f''_{zx}(x_0, y_0) & f''_{zy}(x_0, y_0) & f''_{zz}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0 \quad (d^2u(x_0, y_0, z_0) < 0); \end{cases} \tag{2.19}$$

2) функция $f(x, y, z)$ имеет минимум, если

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0\ \ (d^2u(x_0, y_0, z_0) < 0); \qquad (2.20)$$

3) функция $f(x, y, z)$ не имеет экстремума, если

$\Delta_2 < 0$ $(d^2u(x_0, y_0, z_0)$ не имеет определенного знака);

4) если $\Delta_2 = 0$ $(d^2u(x_0, y_0, z_0) = 0)$, то экстремум может быть, а может и не быть и в этом случае требуется дальнейшее исследование.

Замечание 2.3. Определители Δ_2 и Δ_3 в выражении (2.19) содержат смешанные производные второго порядка $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, $f''_{xz}(x_0, y_0) = f''_{zx}(x_0, y_0)$ и $f''_{yz}(x_0, y_0) = f''_{zy}(x_0, y_0)$ в соответствии с теоремой 1.15.

Пример 2.4. Из данного куска жести площадью $2s$ необходимо изготовить закрытую коробку в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту коробки через *x*, *y*, *z*. Задача сводится к нахождению максимума функции

$$v = xyz \qquad (2.21)$$

при условии, что полная поверхность коробки равна $2s$, т.е.

$$2(xy + xz + yz) = 2s. \qquad (2.22)$$

Таким образом, имеем задачу на условный экстремум: найти максимум функции (2.21) при условии (2.22).

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - s). \qquad (2.23)$$

Найдем ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda(y+z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda(x+z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda(x+y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = xy + xz + yz - s) = 0. \end{cases} \qquad (2.24)$$

Для решения системы (2.24) умножим первое из уравнений этой системы на x, второе – на y, третье – на z и сложим их. Тогда получим:

$$3xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) = 0.$$

Теперь, принимая во внимание последнее уравнение системы (2.24), имеем

$$3xyz + 2\lambda s = 0,$$

откуда находим переменную Лагранжа $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2s}$. Подставляя найденное значение переменной Лагранжа в первые три уравнения системы (2.24), получим:

$$\begin{cases} yz\left[1 - \dfrac{3x}{2s}(y+z)\right] = 0, \\ xz\left[1 - \dfrac{3y}{2s}(x+z)\right] = 0, \\ xy\left[1 - \dfrac{3z}{2s}(x+y)\right] = 0. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Поскольку x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, то из уравнений системы (2.26) имеем:

$$\frac{3x}{2s}(y+z) = 1,\ \frac{3y}{2s}(x+z) = 1,\ \frac{3z}{2s}(x+y) = 1. \qquad (2.27)$$

Из первых двух уравнений в (2.27) находим $x = y$, из второго и третьего уравнений имеем $y = z$. Но тогда из условия (2.22) получаем

$$x = y = z = \sqrt{s/3}.$$

Используя теорему 2.3, можно доказать, что полученное решение $x = y = z = \sqrt{s/3}$ дает максимум. Но поскольку в условиях данной задачи из геометрических соображений объем коробки должен быть конечным и отличным от нуля, то, следовательно, при найденных значениях $x = y = z = \sqrt{s/3}$ объем коробки будет наибольшим.

Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна иметь форму куба, ребро которого равно $\sqrt{s/3}$.

Замечание 2.4. При решении конкретных задач иногда можно установить характер критической точки на основании существа данной задачи, например, как это было сделано в примере 2.3.

Литература

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф.Бермант, И.Г.Араманович. – Москва: Наука, 1971. – 736 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т1 / Н.С.Пискунов. – Москва: Наука, 1966. – 552 с.
3. Ильин, В.А. Математический анализ. / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. – Москва: Наука, 1979. – 720 с.
4. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец. – Москва: Высш. шк., 1966. – 461 с.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч1 / П.Е.Данко, А.Г.Попов. – Москва: Высш. шк., 1980. – 320 с.
6. Дюбюк, П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. П.Е.Дюбюка и Г.И.Кручковича. – Москва: Высш. шк., 1965. – 592 с.
7. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2ч. Ч1 / под общ. ред. Е.И.Гурского. – Минск: Выш. шк., 1989. – 349 с.
8. Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Е.Баумана, 2002. – 408 с.
9. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие / В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин; Под ред. В.Ф.Бутузова. – 4-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 480 с.

Великович Лев Липович
Черниченко Юрий Дмитриевич

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Учебно-методическое пособие
по дисциплинам
«Высшая математика» и «Математика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 28.09.11.
Рег. № 36Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by