

Primljen: 1.4.2019.

Šifra rada: Stručni rad

Prihvaćen: 10. 5. 2019.

UDK: 519.2:794.9

Vjerojatnosti kod igara na sreću

Probability at lottery games

¹Tibor Rodiger, ²Matija Zebec

¹Međimursko veleučilište u Čakovcu, Bana Josipa Jelačića 22a, Čakovec, Hrvatska

²student Međimurskog veleučilišta u Čakovcu

E-mail: ¹trodiger@mev.hr, ²matija.zebec@student.mev.hr

Sažetak: *U radu se objašnjava i pobliže dotiče sama vjerojatnost te se prema tome izračunava, analizira i proučava vjerojatnost izvlačenja određene i pojedine kombinacije za određeni loto, u ovom slučaju Loto 7/39. Izračunava se vjerojatnost izvlačenja od nula pogodaka pa do izvlačenja sedmice odnosno sedam pogodaka. Zanimljivo je vidjeti što se događa u slučaju velikog broja izvlačenja igre loto, te postoji li podjednaka vjerojatnost da svi brojevi budu izvučeni.*

Ključne riječi: *igre na sreću, izračun vjerojatnosti, loto, vjerojatnost*

Abstract: *The paper explains and deals with probability itself more precisely. Probability enables calculating, analyzing and studying the likelihood of drawing a specific and individual combination for a particular lotus, in this case Lotto 7/39. The probability of drawing from zero hits is calculated, up to the draw of seven hits. It is interesting to see what happens in case of a large number of draws in the lottery and whether it is equally probable that all numbers will be drawn.*

Keywords: *lottery, lottery games, probability, probability calculation*

1. Uvod

Svi smo mi promatrali nekoga od obitelji, prijatelja kako ispunjava listiće lota. Neki su možda i sami birali brojeve između 1 i 39. Cilj ove igre je pogoditi što više od 7 izvučenih brojeva. Isprva se čini kako takvo nešto ne bi trebalo biti teško pogoditi, međutim kada probamo predvidjeti koje će kuglice biti izbačene iz bubnja, najčešće pogodimo samo jedan ili dva broja. Zašto je toliko teško učiniti nešto što nam se na prvi pogled čini vrlo jednostavnim: od 39 ponuđenih brojeva potrebno je zaokružiti i pogoditi 7 pravih? Neki od odgovora prikazat će se u tekstu koji slijedi, izračunati će se vjerojatnosti za sve mogućnosti, te vjerojatnosti ukoliko imamo više listića.

Klasičan način računanja vjerojatnosti:

Pretpostavke na pokus: konačan prostor elementarnih događaja, svi su ishodi pokusa jednako mogući

Događaj $A \subseteq \Omega$

Vjerojatnost događaja A je kvocijent broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$$

(Benšić, Čuvak 2014.)

Vjerojatnost je preslikavanje $\mathcal{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ definirano na algebri događaja \mathcal{F} na prostoru elementarnih događaja Ω , koja ima svojstva:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1, \mathcal{P}(\emptyset) = 0$
2. Ako je $A \subset B$, onda vrijedi $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
3. Ako su A i B disjunktni događaji, onda je $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

Vjerojatnosni prostor Ω , koji posjeduje samo konačno mnogo elementarnih događaja nazivamo konačni vjerojatnosni prostor. (Elezović 2013)

Kombinacija k -tog razreda bez ponavljanja od n elemenata je svaki k -teročlani skup sastavljen od elemenata n -tereročlanog skupa, gdje je $k < n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

2. Kardinalni brojevi događaja

Ponajprije, određuje se broj ukupnih mogućnosti, tj veličina prostora elementarnih događaja. Od 39 brojeva biramo njih 7. Znači, radi se o kombinaciji bez ponavljanja, jer se svaki broj može izvući samo jedamput.

$$\binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 15\,380\,937$$

Broj ukupnih mogućnosti iznosi 15 380 937, tj

$$k(\Omega) = 15380937$$

Definiraju se događaji:

$(A = k) : \{\text{pogođeno je } k \text{ brojeva}\}$, gdje je $k = 0, 1, \dots, 7$

Određuju se kardinalni brojevi pojedinih događaja:

Za pogodak svih 7 brojeva postoji samo jedna mogućnost:

$$k(A = 7) = \binom{7}{7} = 1$$

Kod točno 6 pogodaka broj povoljnih događaja računa se na slijedeći način:

Od 7 mogućih, bira se 6:

$$\binom{7}{6} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{5040}{720} = 7$$

Za broj koji nije pogođen, postoji $39-7=32$ mogućnosti:

$$\binom{39-7}{7-6} = \binom{32}{1} = 32$$

Nakon množenja, dobije se broj povoljnih događaja za 6 pogodaka:

$$k(A = 6) = \binom{7}{6} \cdot \binom{39-7}{7-6} = \binom{7}{6} \cdot \binom{32}{1} = 7 \cdot 32 = 224$$

Na isti način računaju se kardinalni brojevi ostalih događaja:

$$k(A = 5) = \binom{7}{5} \cdot \binom{39-7}{7-5} = \binom{7}{5} \cdot \binom{32}{2} = 21 \cdot 496 = 10416$$

$$k(A = 4) = \binom{7}{4} \cdot \binom{39-7}{7-4} = \binom{7}{4} \cdot \binom{32}{3} = 35 \cdot 4960 = 173600$$

$$k(A = 3) = \binom{7}{3} \cdot \binom{39-7}{7-3} = \binom{7}{3} \cdot \binom{32}{4} = 35 \cdot 35960 = 1258600$$

$$k(A = 2) = \binom{7}{2} \cdot \binom{39-7}{7-2} = \binom{7}{2} \cdot \binom{32}{5} = 21 \cdot 201376 = 4228896$$

$$k(A = 1) = \binom{7}{1} \cdot \binom{39-7}{7-1} = \binom{7}{1} \cdot \binom{32}{6} = 7 \cdot 906192 = 6343344$$

$$k(A = 0) = \binom{7}{0} \cdot \binom{39-7}{7-0} = \binom{7}{0} \cdot \binom{32}{7} = 1 \cdot 3365856 = 3365856$$

3. Vjerojatnosti

Vjerojatnost za pojedini događaja računa se tako da se kardinalni broj povoljnog događaja podijeli s kardinalnim brojem potpunog događaja.

$$\mathcal{P}(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$$

Vjerojatnost za pogodak svih 7 brojeva računa se:

$$\mathcal{P}(A = 7) = \frac{k(A = 7)}{k(\Omega)} = \frac{1}{15380937} = 6.5016 \cdot 10^{-8} = 6.5016 \cdot 10^{-6} \%$$

Na isti načina računaju se i ostale vjerojatnosti:

$$\mathcal{P}(A = 6) = \frac{k(A = 6)}{k(\Omega)} = \frac{224}{15380937} = 1.4563 \cdot 10^{-5} = 1.4563 \cdot 10^{-3} \%$$

$$\mathcal{P}(A = 5) = \frac{k(A = 5)}{k(\Omega)} = \frac{10416}{15380937} = 6.772 \cdot 10^{-4} = 0.06772 \%$$

$$\mathcal{P}(A = 4) = \frac{k(A = 4)}{k(\Omega)} = \frac{173600}{15380937} = 0.011287 = 1.12867 \%$$

$$\mathcal{P}(A = 3) = \frac{k(A = 3)}{k(\Omega)} = \frac{1258600}{15380937} = 0.081829 = 8.1829 \%$$

$$\mathcal{P}(A = 2) = \frac{k(A = 2)}{k(\Omega)} = \frac{4228896}{15380937} = 0.274944 = 27.4944 \%$$

$$\mathcal{P}(A = 1) = \frac{k(A = 1)}{k(\Omega)} = \frac{6343344}{15380937} = 0.412416 = 41.2416 \%$$

$$\mathcal{P}(A = 0) = \frac{k(A = 0)}{k(\Omega)} = \frac{3365856}{15380937} = 0.21883 = 21.883 \%$$

4. Vjerojatnost pogotka kod većeg broja listića

U dosadašnjem dijelu ovog rada prikazane su vjerojatnosti svakog pogotka ali kod jednog listića, odnosno jedne ispunjene kombinacije. U ovom poglavlju izračunat će se vjerojatnosti barem jednog pogotka ukoliko je ispunjeno 10, 100, 10000 i 100000 listića.

Vjerojatnost barem jednog uspjeha s n listića računa se po slijedećoj formuli:

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \left(\frac{\text{ukupan broj mogućnosti} - \text{broj mogućnosti kombinacije}}{\text{ukupan broj mogućnosti}} \right)^{\text{broj listića}}$$

4.1. Vjerojatnosti pogotka kod 10 listića

Vjerojatnost pogađanja sedmice (7 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-1}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{15\,380\,936}{15\,380\,937} \right)^{10} = 6,501553 \cdot 10^{-7} = 0,00006501553 \%$$

Vjerojatnost pogađanja šestice (6 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-224}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{15\,380\,713}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,00014564 = 0,0146 \%$$

Vjerojatnost pogađanja petice (5 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-10\,416}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{15\,370\,521}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,006751 = 0,6751 \%$$

Vjerojatnost pogađanja četvorke (4 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-173\,600}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{15\,207\,337}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,107304 = 10,7304 \%$$

Vjerojatnost pogađanja trojke (3 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-1\,258\,600}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{14\,122\,337}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,574169 = 57,4169 \%$$

Vjerojatnost pogađanja dvojke (2 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937-4\,228\,896}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{11\,152\,041}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,959847 = 95,9847 \%$$

Vjerojatnost pogađanja jedinice (1 pogodak):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 6\,343\,344}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{9\,037\,593}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,995094 = 99,5094 \%$$

Vjerojatnost pogađanja nule (0 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 3\,365\,856}{15\,380\,937} \right)^{10} = 1 - \left(\frac{12\,015\,081}{15\,380\,937} \right)^{10} = 0,915386 = 91,5386 \%$$

4.2. Vjerojatnosti pogotka kod 100 listića

Vjerojatnost pogađanja sedmice (7 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{15\,380\,936}{15\,380\,937} \right)^{100} = 6,501534 \cdot 10^{-6} = 0,0006502 \%$$

Vjerojatnost pogađanja šestice (6 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 224}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{15\,380\,713}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,0014553 = 0,14533 \%$$

Vjerojatnost pogađanja petice (5 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 10\,416}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{15\,370\,521}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,065499 = 6,5499 \%$$

Vjerojatnost pogađanja četvorke (4 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 173\,600}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{15\,207\,337}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,678606 = 67,8606 \%$$

Vjerojatnost pogađanja trojke (3 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1\,258\,600}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{14\,122\,337}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,999804 = 99,9804 \%$$

Vjerojatnost pogađanja dvojke (2 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 4\,228\,896}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{11\,152\,041}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja jedinice (1 pogodak):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 6\,343\,344}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{9\,037\,593}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja nule (0 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 3\,365\,856}{15\,380\,937} \right)^{100} = 1 - \left(\frac{12\,015\,081}{15\,380\,937} \right)^{100} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

4.3. Vjerojatnosti pogotka kod 10 000 listića

Vjerojatnost pogađanja sedmice (7 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{15\,380\,936}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,0006499 = 0,06499 \%$$

Vjerojatnost pogađanja šestice (6 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 224}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{15\,380\,713}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,135528 = 13,5528 \%$$

Vjerojatnost pogađanja petice (5 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 10\,416}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{15\,370\,521}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,998857 = 99,8857 \%$$

Vjerojatnost pogađanja četvorke (4 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 173\,600}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{15\,207\,337}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja trojke (3 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1\,258\,600}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{14\,122\,337}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja dvojke (2 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 4\,228\,896}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{11\,152\,041}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja jedinice (1 pogodak):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 6\,343\,344}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{9\,037\,593}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja nule (0 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 3\,365\,856}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 1 - \left(\frac{12\,015\,081}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

4.4. Vjerojatnosti pogotka kod 100 000 listića

Vjerojatnost pogađanja sedmice (7 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{15\,380\,936}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,006480 = 0,6480 \%$$

Vjerojatnost pogađanja šestice (6 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 224}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{15\,380\,713}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,766917 = 76,6917 \%$$

Vjerojatnost pogađanja petice (5 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 10\,416}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{15\,370\,521}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja četvorke (4 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 173\,600}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{15\,207\,337}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja trojke (3 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1\,258\,600}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{14\,122\,337}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja dvojke (2 pogotka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 4\,228\,896}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{11\,152\,041}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja jedinice (1 pogodak):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 6\,343\,344}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{9\,037\,593}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

Vjerojatnost pogađanja nule (0 pogodaka):

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 3\,365\,856}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 1 - \left(\frac{12\,015\,081}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,999999 = 99,9999 \%$$

	10 listića	100 listića	10 000 listića	100 000 listića
7 pogodaka	0,00006501553%	0,0006502 %	0,06499 %	0,6480 %
6 pogodaka	0,0146 %	0,14553 %	13,5528 %	76,6917 %
5 pogodaka	0,6751 %	6,5499 %	99,8857 %	99,9999 %
4 pogotka	10,7304 %	67,8606 %	99,9999 %	99,9999 %
3 pogotka	57,4169 %	99,9804 %	99,9999 %	99,9999 %
2 pogotka	95,9847 %	99,9999 %	99,9999 %	99,9999 %
1 pogodak	99,5094 %	99,9999 %	99,9999 %	99,9999 %
0 pogodaka	91,5386 %	99,9999 %	99,9999 %	99,9999 %

Tablica 1. Vjerojatnosti dobitaka kod većeg broja listića

5. Vjerojatnost pogotka sedmice

U prethodnom su poglavlju prikazane vjerojatnosti do 100000 listića. Vidi se da je vjerojatnost pogotka sedmice izuzetno mala. U ovom poglavlju biti će prikazane vjerojatnosti pogotka sedmice kod određenih brojeva listića.

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod jednog listića:

$$\frac{1}{15380937} = 6.5016 \cdot 10^{-8} = 6.5016 \cdot 10^{-6} \%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 10 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{10} = 6,501553 \cdot 10^{-7} = 0,00006501553 \%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 100 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{100} = 6,501534 \cdot 10^{-6} = 0,0006502 \%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 10000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{10\,000} = 0,0006499 = 0,06499 \%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 100000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{100\,000} = 0,006480 = 0,6480 \%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 500000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{500\,000} = 0.031985 = 3.1985\%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 1000000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{1\,000\,000} = 0.062947 = 6.2947\%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 2000000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{2\,000\,000} = 0.121932 = 12.1932\%$$

Vjerojatnosti pogotka sedmice kod 4000000 listića:

$$1 - \left(\frac{15\,380\,937 - 1}{15\,380\,937} \right)^{4\,000\,000} = 0.228996 = 22.8996\%$$

6. Zaključak

Kroz ovaj rad i nekoliko primjera očita je nevjerojatna doza sreće koja je potrebna kod velikih pogodaka koji se ponekad događaju u svijetu igara na sreću. Kada čujemo da treba pogoditi 5, 6 ili 7 brojeva na lotu za lijepu svotu dobitka, na prvu nam se to čini veoma jednostavno, međutim kada se upustimo u matematički pogled na vjerojatnost

dobitaka i izvlačenja određenih brojeva, odmah nam postaje jasno koliko je teško i ponekad ljudima nemoguće odigrati dobitnu kombinaciju određenog lota. U prikazanim primjerima računali smo vjerojatnost izvlačenja pogođenog određenog broja pogodaka , a sve nam postaje jasnije kada je mogućnost za pogađanjem sedmice jednaka 6 mizernih 0,0000065 %. Pokazano je koliko su vjerojatnosti i kod pogađanja dok imamo više sudionika, a posebno kolika je vjerojatnost dobitka sedmice kod velikog broja sudionika. Izračuni vrlo jasno pokazuju koliko je isplativo igrati loto, ali i pokazuju isplativost postojanja tvrki koje se bave igrama na sreću.

Literatura

1. Bahovec, V. i dr. (2015.) Statistika 5.izd. Zagreb, Element, str.179-182.
2. Benšić M., Šuvak N. (2014). Uvod u vjerojatnost i statistiku. Osijek, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku.
3. Elezović N. (2013). Vjerojatnost i statistika, Diskretna vjerojatnost. 3. Izdanje, Zagreb, Element.
4. Horvat, J.; Mijoč, J.(2012.) Osnove statistike. Zagreb, Ljevak, str.204-215.
5. Glasnik: glasilo hrvatske lutrije, broj 633, godina XII, Hrvatska lutrija, Zagreb, 2006.