Interpretacija pojma integrala za studente elektrotehnike

DAVOR ŠTERC[1], RENI BANOV[2], MARCO RICCI[2]

Sažetak

Kolegiji Osnove elektrotehnike 1 i 2 temeljni su kolegiji stručnog studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu. Izvode se tijekom prva dva semestra s ciljem stjecanja osnovnih znanja iz elektromagnetizma, teorije električnih krugova i metoda za rješavanje električnih mreža. Za razumijevanje ovih tema potrebna su određena matematička znanja – između ostalog razumijevanje diferencijalnog i integralnog računa. Premda se studenti s osnovama infinitezimalnog računa susreću u završnom razredu srednjih škola, naše iskustvo pokazuje da je njihovo razumijevanje i znanje na početku studija, prije odslušanih matematičkih kolegija, nedovoljno i neujednačeno. Osobit je problem integralni račun s kojim se većina zapravo nije upoznala. Radi bolje ilustracije problema, navodimo primjer Gaussova zakona za električni tok kroz zatvorenu plohu S

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

koji se uvodi u drugom tjednu nastave prvog semestra.

Problem na koji nailazimo u nastavi jest kako studentima koji nisu upoznati s matematičkim osnovama konceptualno objasniti pojam integrala a da ne ulazimo u stroge definicije. Članak opisuje vlastitu nastavnu praksu koja se oslanja na intuitivno shvaćanje srednje vrijednosti funkcije te donosi nekoliko primjera takvog pristupa za objašnjenje dijela integrala koji se javljaju u nastavi Osnova elektrotehnike.

Uvod

Osnovna pretpostavka pristupa jest da su studenti tijekom školovanja upoznali pojam srednje vrijednosti (aritmetičke, geometrijske...), da intuitivno poimaju nizove brojeva i vrijednosti funkcije koje se mogu odrediti usrednjavanjem. Primjerice,

[1]Davor Šterc, Tehničko veleučilište u Zagrebu

[2]Reni Banov, Tehničko veleučilište u Zagrebu

[3]Marco Ricci, student Specijalističkog studija elektrotehnike, Tehničko veleučilište u Zagrebu

ako funkcija v opisuje brzinu kojom se gibamo u trenutku $t \in [0,T]$, studentima je jasno da tada postoji srednja, prosječna brzina u navedenom vremenskom periodu.

Koristimo intuiciju za srednju vrijednost kako bismo uveli pojam integrala. Strogo gledano, za neprekidnu funkciju f na segmentu $[a,b]$ definira se njena srednja vrijednost $\overline{f}$ pomoću integrala

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Međutim, naš je redoslijed obrnut; polazimo od pojma srednje vrijednosti funkcije $\overline{f}$ koji ne definiramo, na njega se intuitivno oslanjamo i pomoću njega uvodimo određeni integral

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{f}\cdot(b-a).$$

U našim oznakama, Newton-Leibnizov teorem glasi

$$\overline{f} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a},$$

gdje je $F' = f$.

Uzmemo li za primjer da funkcija f opisuje brzinu v gibanja u trenutku $t \in [0,T]$, studenti dobro znaju da funkcija F opisuje prijeđeni put s.

Uobičajeno formuliran Newton-Leibnizov teorem jest

$$\int_0^T v(t)dt = s(T)-s(0).$$

U našim oznakama, teorem glasi

$$\overline{v} = \frac{s(T)-s(0)}{T}.$$

Vjerujemo da je ova druga formulacija pri prvom čitanju ipak prirodnija.

U nastavku članka ističemo primjere načina korištenja ovog pristupa kako bismo studentima objasnili integrale bitne u nastavi. Dakako, ne radi se o formalno strogom izračunu srednje vrijednosti, već o nastojanju izbjegavanja davanja gotovih formula.

Potencija x^n, $n \in \mathbb{N}$

Za potencije s eksponentom iz skupa prirodnih brojeva na zatvorenom intervalu $[a,b], 0 < a < b$ možemo odrediti srednju vrijednost funkcije korištenjem aritmetičke sredine za vrijednosti funkcije na točkama unutar intervala, uključujući rubne točke.

Primjer 1. Za funkciju $f(x)=x$ na zadanom intervalu intuitivno je jasno da srednja vrijednost funkcije predstavlja aritmetičku sredinu vrijednosti funkcije u rubovima intervala.

$$\overline{f}=\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Iz definicije srednje vrijednosti funkcije znamo da ona predstavlja srednju visinu pravokutnika na intervalu $[a,b]$ čija je površina jednaka određenom integralu funkcije na tom intervalu. Jasno je da za funkciju $f(x)=x$ srednju visinu možemo jednostavno naći pomoću aritmetičke sredine u rubovima intervala, budući da funkcija na zadanom intervalu linearno raste. Za kvadratnu funkciju to naravno ne vrijedi, što znači da, ukoliko želimo izračunati srednju vrijednost za kvadratnu funkciju, trebat će nam više točaka osim rubova intervala.

Primjer 2. Funkcija $f(x)=x^2$ na intervalu $[a,b], 0<a<b$

Zbog toga pokušajmo naći još jednu točku unutar zadanog intervala pomoću koje možemo odrediti srednju vrijednost kao aritmetičku sredinu od tri točke.

$$\overline{f}=\frac{f(a)+f(c)+f(b)}{3}$$

Točku *c* tražimo iz uvjeta da bude sačuvan omjer vrijednosti funkcije u toj točki spram vrijednosti u rubovima intervala, drugim riječima da bude sačuvan koeficijent rasta funkcije na tom intervalu.

$$\frac{f(a)}{f(c)}=\frac{f(c)}{f(b)}$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{c^2}{b^2}$$

Nadalje, jednostavnim postupkom dobivamo da je *c* geometrijska sredina rubnih točaka intervala. Dakle, za točku $c=\sqrt{ab}$ vrijedi da je vrijednost funkcije $f(c)=ab$. Uvrštavanjem dobijemo da je srednja vrijednost funkcije aritmetička sredina triju vrijednosti

$$\overline{f}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Jednostavnom se primjenom istog postupka može naći srednja vrijednost za potencije s eksponentom iz skupa prirodnih brojeva.

Primjer 3. Funkcije $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$, na intervalu $[a,b], 0<a<b$

Tražimo *n-1* točaka $x_i \in \langle a,b\rangle, i=1,\ldots,n-1$ unutar intervala $[a,b], 0<a<b$ tako da vrijedi

$$\overline{f}=\frac{1}{n+1}\left[f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]$$

Točke možemo tražiti na sličan način kao u primjeru 2, koristeći uvjet da bude sačuvan koeficijent rasta funkcije između susjednih točaka, tj. rješavanjem sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\frac{f(a)}{f(x_1)}=\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\ldots=\frac{f(x_{n-2})}{f(x_{n-1})}=\frac{f(x_{n-1})}{f(b)}$$

Traženo rješenje sustava su točke oblika $x_i=\sqrt[n]{a^{n-i}b^i}$ za koje funkcija poprima vrijednosti

$$f(x_i)=a^{n-i}b^i.$$

Uvrštavanjem dobivamo da je, uz primjenu konvencije $x_0=a, x_n=b$, nakon sređivanja indeksa srednja vrijednost funkcije jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}a^{n-i}b^i.$$

Korištenjem dobivenih srednjih vrijednosti iz $\int_a^b f(x)dx=\overline{f}\cdot(b-a)$ možemo izračunati vrijednost integrala za funkcije ovog oblika bez potrebe za računanjem integrala. Za prethodne primjere iznosimo rezultate:

- $\int_a^b x\,dx=\frac{(a+b)}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2}$
- $\int_a^b x^2\,dx=\frac{(a^2+ab+b^2)}{3}(b-a)=\frac{b^3-a^3}{3}$
- $\int_a^b x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}a^ib^{n-i}(b-a)=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

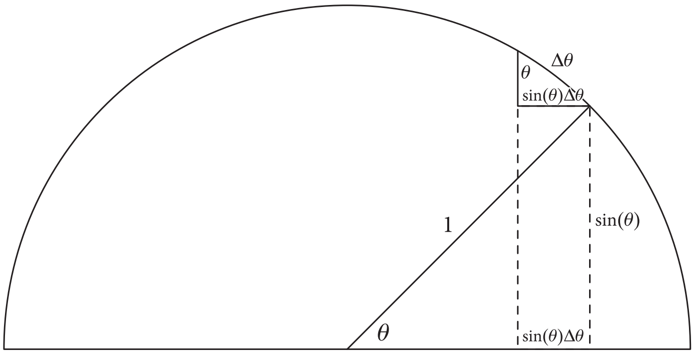
koje možemo iskoristiti za objašnjenje pojma određenog integrala na općim potencijama i polinomima. Tehniku određivanja srednje vrijednosti funkcije na intervalu možemo primijeniti na druge funkcije, premda rezultati nisu na prvi pogled uočljivi kao na primjerima opće potencije.

Srednja vrijednost trigonometrijskih funkcija na intervalu

Trigonometrijske funkcije izuzetno su važne u nastavi Osnova elektrotehnike. Određivanje vrijednosti nekih trigonometrijskih funkcija na intervalu može biti poticaj za naprednije učenike da, uz malo kreativnosti, sličnom tehnikom odrede srednje vrijednosti za druge trigonometrijske funkcije.

Primjer 4. Funkcija $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$ na intervalu $\left[0,\pi\right]$

Prema definiciji trigonometrijskih funkcija na jediničnoj kružnici sinus je ordinata kuta, a kosinus apscisa kuta. Promatramo li infinitezimalni pomak točke za $\Delta\theta$ na gornjoj polovini kružnice, tada možemo smatrati da je dio luka kružnice pravac na tom dijelu. Iz sličnosti trokuta vidimo da je promjena horizontalne koordinate točke jednaka $\sin\left(\theta\right)\Delta\theta$, kako je prikazano na Slici 1.



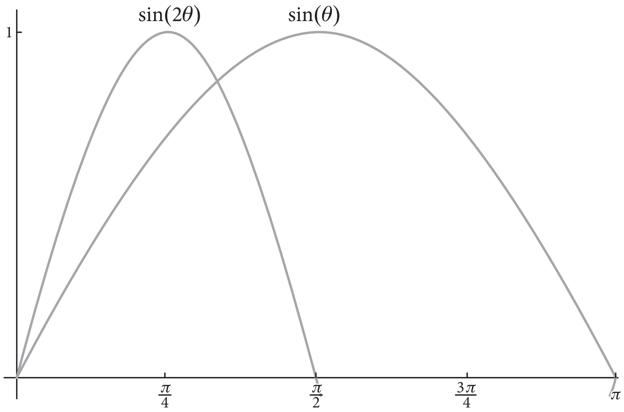
Slika 1. Promjena apscise točke na kružnici

S obzirom da je $\theta\in\left[0,\pi\right]$, tada ukupni horizontalni pomak točke po luku jedinične kružnice odgovara promjeru jedinične kružnice. Drugim riječima, možemo zaključiti da je zbroj svih malih horizontalnih pomaka točke na jediničnoj kružnici jednak 2.

$$\sum_{\theta\in\left[0,\pi\right]}\sin\left(\theta\right)\cdot\Delta\theta=2$$

Odavde dobijemo da je srednja vrijednost od $\sin\left(\theta\right)$ na intervalu $\left[0,\pi\right]$ jednaka $\dfrac{2}{\pi}$.

Također, za funkciju $\sin\left(2\theta\right)$ možemo zaključiti da njena srednja vrijednost iznosi $\dfrac{2}{\pi}$, ali na dvostruko kraćem intervalu $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, budući da je $\sin\left(2\theta\right)$ „stisnuti" $\sin\left(\theta\right)$ iz intervala $\left[0,\pi\right]$, a kako prikazuje Slika 2.



Slika 2. Graf funkcije sin(θ) i sin(2θ)

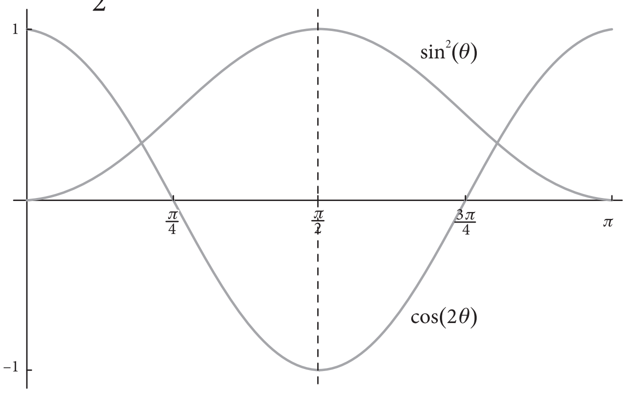
Na sličan način za vježbu možemo naći srednje vrijednosti funkcija oblika $\sin(n\theta)$, $n\in\mathbb{N}$.

Primjer 5. Funkcija $f(x)=\sin^2(x)$ na intervalu $[0,\pi]$
Dobro je poznato da vrijedi

$$\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

iz čega neposredno slijedi da na intervalu $[0,\pi]$ funkcije $\sin^2(x)$ i $\cos^2(x)$ imaju jednaku srednju vrijednost. Sada iz jednakosti $sin^2(x)+cos^2(x)=1$ dobivamo da ta srednja vrijednost iznosi $\frac{1}{2}$.

Primijetimo da smo srednju vrijednost $\sin^2(x)$ mogli odrediti grafički (slika 3) koristeći jednakost $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, uočavajući da je funkcija $cos 2x$ simetrična u odnosu na pravac $x=\frac{\pi}{2}$ te ima srednju vrijednost 0 na intervalu $[0,\pi]$.



Slika 3. Graf funkcije sin²(θ) i cos(2θ)

Kao u primjerima opće potencije, srednja vrijednost trigonometrijskih funkcija na intervalu omogućava nam izračunavanje određenog integrala na tom intervalu.

- $\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}(\pi - 0) = 2$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1$
- $\int_0^{\pi} sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi}{2}$

Analogno se može odrediti srednja vrijednost za druge trigonometrijske funkcije. Primjena postupka određivanja srednje vrijednosti prikladna je za primjenu u geometriji na problemima određivanja površina likova te površina i volumena geometrijskih tijela.

Primjena u geometriji

Primjer 6. Površina kruga

Polazeći od poznate formule za opseg kružnice, u ovom ćemo primjeru pokazati kako možemo „izvesti" formulu za površinu kruga. Promotrimo krug polumjera *R*, koji možemo „prekriti" upisanim koncentričnim kružnicama polumjera $r \in [0, R]$ koje crtamo linijom debljine Δr. Površinu kruga dobivamo „zbrajanjem" svih opsega $O(r) = 2\pi r$ upisanih kružnica, a intuitivno je jasno da je taj „zbroj" jednak umnošku srednje vrijednosti opsega i duljine intervala. Srednju vrijednost opsega za $\leq r \leq R$ možemo izračunati slično kao u primjeru 1:

$$\overline{O} = 2\pi\overline{r} = 2\pi \cdot \frac{0+R}{2} = \pi R,$$

pa dobivamo

$$P = R \cdot \overline{O} = \pi R^2.$$

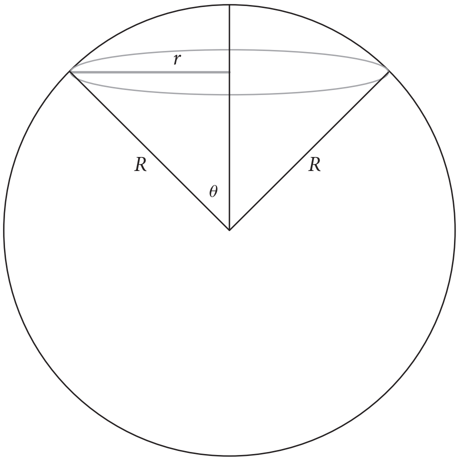
Ovo intuitivno objašnjenje ima i matematičko uporište jer postupak prekrivanja koncentričnim kružnicama zapravo znači integriranje svih opsega unutar kruga polumjera *R*, a znamo da je integral jednak umnošku srednje vrijednosti i duljine intervala. Drugim riječima, naš intuitivni izračun površine kruga dobiven je na sljedeći način:

$$P = \int_0^R O(r)dr = (R - 0) \cdot \overline{O} = \pi R^2.$$

Analognom primjenom rezultata iz primjera 2. i 4. možemo odrediti površinu i volumen kugle.

Primjer 7. Površina oplošja kugle (sfere)

Na kugli promatramo kružnice od sjevernog do južnog pola kao na sljedećoj slici.



Slika 4. Kružnice na sferi

Polumjer svake kružnice dan je izrazom

$$r = R \cdot \sin(\theta),\ \theta \in [0,\pi],$$

gdje je θ kut koji zatvara os kugle sa spojnicom kružnice i središtem kugle. Duljina luka od sjevernog do južnog pola kružnice iznosi $l = R\pi$.

Korištenjem rezultata iz primjera 4. možemo izračunati površinu kugle na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P &= l \cdot \overline{O(r)_{[0,\pi]}} = \pi R \cdot \overline{\left(2\pi R sin(\theta)\right)_{[0,\pi]}} \\ &= 2\pi^2 R^2 \overline{\sin(\theta)_{[0,\pi]}} = 2\pi^2 R^2 \frac{2}{\pi} \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Na sličan način možemo odrediti volumen kugle.

Primjer 8. Volumen kugle

Promotrimo površine sfera unutar kugle radijusa R. Volumen možemo računati primjenom srednje vrijednosti funkcije $f(x) = x^2$ na površinu kugle za radijus iz intervala $[0,R]$.

$$V = R \cdot \overline{P(r)}_{[0,R]} = 4R\pi \cdot \overline{r^2}_{[0,R]}$$
$$= 4R\pi \cdot \frac{(0 + 0 \cdot R + R^2)}{3}$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

Vidimo da se korištenjem srednje vrijednosti funkcija mogu jednostavno dobiti dobro poznati rezultati.

Primjena u osnovama elektrotehnike

Primjer 9. Gaussov zakon na sferi

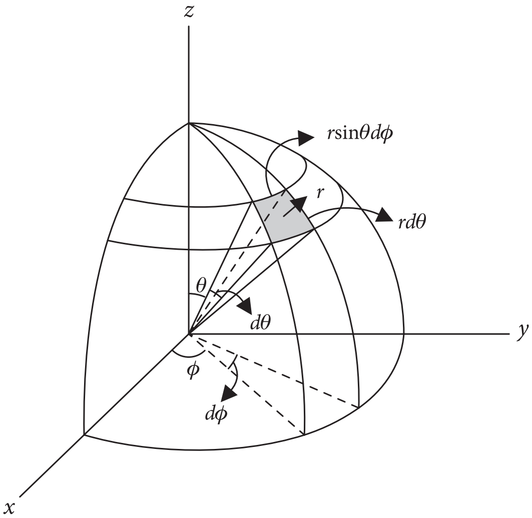
Promotrimo pozitivan naboj Q u središtu kugle polumjera r. Električno polje od naboja Q na udaljenosti r od središta kugle iznosi

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

radijalno u smjeru vektora $\vec{r}$. U sfernim koordinatama infinitezimalni površinski element na kugli iznosi

$$d\vec{A} = r^2 sin\theta\, d\theta d\phi\, \vec{r}\ ,$$

kako je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 5. Infinitezimalni element na sferi

Tok električnog polja kroz taj površinski element dan je izrazom

$$
\begin{aligned}
d\Phi_E &= \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot dA \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\left(r^2 sin\theta\, d\theta d\phi\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(sin\theta\, d\theta\, d\phi\right)
\end{aligned}
$$

Odavde imamo da je ukupan tok električnog polja na sferi

$$
\begin{aligned}
\Phi_E &= \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\overline{\sin(\theta)_{[0,\pi]}}\cdot\pi\right)\cdot\left(\overline{1_{[0,2\pi]}}\cdot 2\pi\right) \\
&= \frac{Q}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoristili rezultat iz primjera 4. za određeni integral i srednju vrijednost konstante 1 na intervalu $\left[0,2\pi\right]$. Time smo dobili Gaussov zakon za ukupan tok električnog polja na sferi.

Zaključak

U članku smo opisali pokušaj intuitivnog približavanja pojma integrala studentima elektrotehnike u trenutku dok još nemaju potrebna matematička znanja. U našem pristupu pretpostavljamo da studenti temeljem ranije stečenih znanja o srednjim vrijednostima brojeva imaju intuitivnu predodžbu o srednjoj vrijednosti funkcije na intervalu. Na nekoliko primjera pokazali smo kako se uz ovakav pristup mogu „izračunati" neki važni integrali koji nam se javljaju u nastavi, primjerice Gaussov zakon na sferi. Prema našim iskustvima, studentima je ovakav pristup daleko prihvatljiviji od varijante „na brzinu ćemo objasniti integrale" ili „koristit ćemo gotove formule koje će vam biti jasnije kad svladate potrebnu matematiku".

Razumljivo, ovakav matematički neprecizan koncept sam po sebi nije dovoljan. Uvjerili smo se da, iako izračune nekih integrala ovim pristupom možemo prilično lako opravdati, integral sinusne funkcije po polovici perioda iziskivat će pozamašnu kreativnost i snalažljivost. U tom smislu znatno nam je lakše izvoditi nastavu na osnovama elektrotehnike nakon što studenti na matematičkim kolegijima steknu znanja iz infinitezimalnog računa. Za kraj bismo htjeli istaknuti da, temeljem stečenih iskustava, studentima ovakav intuitivni pristup, kao i matematički precizan pristup, ne ostaju kao dvije nepovezane slike, već da bez poteškoća povezuju oba koncepta.