Ivo Sjekavica *

ISSN 0469-6255
(99 - 103)

ODREĐIVANJE POZICIJE BRODA
- Nove mogućnosti rješavanja metode dviju zvijezda -

UDK 527.5

Izvorni znanstveni rad

Sažetak

U članku su obrađene nove mogućnosti rješavanja metode dviju zvijezda koju je autor objavio u časopisu "Naše more", br. 1-2, 1993. Obrađena su tri nova rješenja: 1. na osnovi kosinusova poučka za sferni trokut, 2. na osnovi kotangensova poučka za sferni trokut i 3. na osnovi jednadžbe velike kružnice. Dodatno je obrađen i posebni slučaj u toj metodi kad je kut otklona ravnine dviju zvijezda jednak nuli.

UVOD

U prošlom broju časopisa "Naše more", br. 1-2/93., objavio sam novu astronomsku metodu koja je nazvana "Metoda dviju zvijezda". Prema toj metodi mjeri se kut između ravnine koja prolazi kroz dvije zvijezde i vertikalne ravnine što prolazi kroz jednu od tih zvijezda.

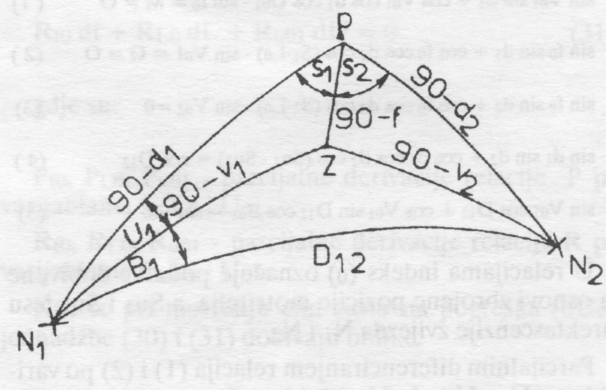
Taj kut je nazvan "vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda" ili, skraćeno, "vertikalni kut otklona".

U ovom članku pokazat će se neke nove mogućnosti rješavanja te metode. Dodatno će se obraditi i posebni slučaj u toj metodi kad je kut otklona ravnine dviju zvijezda jednak nuli.

U tom su slučaju azimuti obiju zvijezda jednaki, pa će se taj postupak nazvati "metoda jednakih azimuta".

NOVE MOGUĆNOSTI RJEŠAVANJA METODE DVIJU ZVIJEZDA

U prošlom broju "Našeg mora" pokazana je mogućnost rješavanja ove metode na osnovi matematičkih relacija koje se dobivaju iz sfernih trokuta na slici 1.



Slika 1.

Sad će se pokazati nove mogućnosti rješavanja iste metode izvođenjem matematičkih relacija iz sfernih trokuta (P,N$_1$,Z), P,Z,N$_2$), (P,N$_1$,N$_2$) i (Z,N$_1$,N$_2$) na dva načina. U prvom načinu rješenje će se izvesti na osnovi kosinusova, a u drugomu na osnovi kotangensova poučka za sferni trokut.

Dodatno će se još pokazati mogućnost rješavanja metode na osnovi jednadžbe velike kružnice, odnosno ortodrome koju je autor izveo u "Našem moru" br. 1-2/89. u članku "Jednadžba ortodrome i njezina moguća primjena u navigaciji" Kao posebni slučaj obradit će se i metoda kad su azimuti dviju zvijezda jednaki.

Veličine na slici 1. su:

Z zenit motritelja,
V_1 - visina zvijezde N_1,
V_2 - visina zvijezde N_2,
D_{12} - kutna udaljenost između zvijezda N_1 i N_2,
B_1 mjereni vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda (N_1, N_2) uz zvijezdu N_1,
U_1 - paralaktički kut uz zvijezdu N_1,

* dr. Ivo Sjekavica,
Pomorski fakultet Dubrovnik,
Dubrovnik

U_1 - paraliktički kut uz zvijezdu N_1,
P - nebeski pol,
d_1 - deklinacija zvijezde N_1,
d_2 - deklinacija zvijezde N_2,
f - geografska širina motritelja,
$s_1 =$ $(S_1\text{-}L)$ - mjesni satni kut zvijezde N_1,
$s_2 =$ $(S_2\text{-}L)$ - mjesni satni kut zvijezde N_2,
S_1 - satni kut Greenwicha zvijezda N_1,
S_2 - satni kut Greenwicha zvijezde N_2,
L - geografska duljina motritelja.
Satni kut i geografska duljina broje se preko zapada od 0^o do 360^o s oznakom (-).

1. Rješenje na osnovi kosinusova poučka

Iz sfernih trokuta (P,N_1,Z), (P,Z,N_2), (P,N_1,N_2) i (Z,N_1,N_2) dobivaju se kosinusovim poučkom za stranice ove relacije:

$$\sin V_{01} \sin d_1 + \cos V_{01} \cos d_1 \cos U_{01} - \sin f_0 = M = O \quad (1)$$

$$\sin f_0 \sin d_1 + \cos f_0 \cos d_1 \cos (S_1\text{-}L_0) - \sin V_{01} = G = O \quad (2)$$

$$\sin f_0 \sin d_2 + \cos f_0 \cos d_2 \cos (S_2\text{-}L_0) - \sin V_{02} = 0 \quad (3)$$

$$\sin d_1 \sin d_2 + \cos d_1 \cos d_2 \cos (Su_1 - Su_2) = \cos D_{12} \quad (4)$$

$$\sin V_{01} \cos D_{12} + \cos V_{01} \sin D_{12} \cos B_{01} = \sin V_{02} \quad (5)$$

U relacijama indeks (o) označuje podatke dobivene na osnovi zbrojene pozicije motritelja, a Su_1 i Su_2 jesu surektascenzije zvijezda N_1 i N_2.

Parcijalnim diferenciranjem relacija (1) i (2) po varijablama V_{01}, U_{01}, f_0, i L_0, dobiva se:

$$Mv_{01}\, dV_1 + Mu_{01}\, dU + M_{f0}\, df = 0 \quad (6)$$

$$Gv_{01}\, dV_1 + G_{f0}\, df + G_{L0}\, dL = 0 \quad (7)$$

gdje su:

Mv_{01}, Mu_{01}, M_{f0} - parcijalne derivacije relacije M po varijablama V_{01}, U_{01} i f_0,

Gv_{01}, G_{f0}, G_{L0} - parcijalne derivacije relacije G po varijablama V_{01}, f_0 i L_0.

Ako se iz relacije (7) eksplicitno izrazi veličina dV_1 i uvrsti u relaciju (6), nakon sređivanja, dobiva se:

$$\left(M_{f0} - M_{v01} \frac{G_{f0}}{G_{v01}}\right) df - M_{v01} \frac{G_{L0}}{G_{v01}} dL + M_{u01}\, dU = 0 \quad (8)$$

U jednadžbi (8) uzet će se da su:

$$\left(M_{f0} - M_{v01} \frac{G_{f0}}{G_{v01}}\right) = a_1 \quad (9)$$

$$-M_{v01} \frac{G_{L0}}{G_{v01}} = b_1 \quad (10)$$

$$M_{u01} = c_1 \quad (11)$$

pa njihovim uvrštavanjem u relaciju (8) nastaje jednadžba pravca položaja motritelja u sređenom obliku:

$$a_1\, df + b_1\, dL + c_1\, dU = 0 \quad (12)$$

Diferencijalne veličine df i dL razlike su između pravih i zbrojenih koordinata motritelja.

Veličina dU je razlika između pravoga paralaktičnog kuta (U_1) i paralaktičnog kuta (U_{01}) koji odgovara zbrojenoj poziciji (f_0,L_0) motritelja.

Razlika dU najjednostavnije se može odrediti relacijom:

$$dU = B_{01} - B_1 \quad (13)$$

gdje je B_{01} vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda koji odgovara zbrojenoj poziciji motritelja, a određuje se na osnovi relacije (5).

$$\cos B_{01} = \frac{\sin V_{02} - \sin V_{01} \cos D_{12}}{\cos V_{01} \sin D_{12}} \quad (14)$$

U postupku rješavanja prethodno je potrebno odrediti veličine V_{01}, V_{02} i D_{12} relacijama (2), (3) i (4). Kut B_1 je izmjereni vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda.

Ako se pretpostavi da se pri motrenju čini sustavna pogreška (dU_s), jednadžba (12) dobiva oblik:

$$a_1\, df + b_1\, dL + c_1\, dU_s + c_1\, dU = 0 \quad (15)$$

2. Rješenje na osnovi kotangensova poučka

Iz sfernog trokuta (P,N_1,Z) dobiva se na osnovi kotangensova poučka relacija:

$$\tan U_{01}\ ((\tan f_0 \cos d_1 - \sin d_1 \cos (S_1 - L_0)) - \sin (S_1 - L_0) = C = 0 \quad (16)$$

ili u recipročnom obliku:

$$\cot U_{01} \sin (S_1 - L_0) - \tan f_0 \cos d_1 + \sin d_1 \cos (S_1 - L_0) = E = 0 \quad (17)$$

Parcijalnim diferenciranjem relacija (16) i (17) po varijablama f_0, L_0 i U_{01}, izlazi:

$$C_{f0}\, df + C_{L0}\, dL + C_{u01}\, dU = 0 \qquad (18)$$

$$E_{f0}\, df + E_{L0}\, dL + E_{u01}\, dU = 0 \qquad (19)$$

gdje su:

C_{f0}, C_{L0}, C_{u01} - parcijalne derivacije relacije C po varijablama f_0, L_0 i U_{01},

E_{f0}, E_{L0}, E_{u01} - parcijalne derivacije relacije E po varijablama f_0, L_0 i U_{01}.

Ako se pri motrenju čini sustavna pogreška (dU_s), jednadžbe (18) i (19) dobivaju ove oblike:

$$C_{f0}\, df + C_{L0}\, dL + C_{u01}\, dU_s + C_{u01}\, dU = 0 \qquad (20)$$

$$E_{f0}\, df + E_{L0}\, dL + E_{u01}\, dU_s + E_{u01}\, dU = 0 \qquad (21)$$

Veličina dU može se i u ovom slučaju odrediti relacijom (13) s pomoću relacije (14).

Jednadžbe pravaca položaja (18) i (20) davat će točnije rezultate kad je paralaktični kut (U_1) manji od 45^o, a jednadžbe (19) i (21) kad je taj kut veći od 45^o s obzirom na funkciju tan U u relaciji (16) i cot U u relaciji (17).

3. Rješenje na osnovi jednadžbe velike kružnice

Jednadžba velike kružnice određena je koordinatama dviju točaka na površini Zemlje (f_1, L_1) i (f_2, L_2).

Analogno tome može se postaviti i jednadžba velike kružnice koja prolazi koordinatama projekcije nebeskog tijela na Zemljinoj površini (d_1, S_1) i koordinatama zbrojene pozicije motritelja (f_0, L_0).

Kad se uzme da su promjenljive koordinate velike kružnice (f,L), jednadžba glasi:

$$e \cos L + g \sin L - h \tan f = 0 \qquad (22)$$

a iz nje izvedena relacija za određivanje azimuta (A) u pojedinoj točki (f,L) velike kružnice je:

$$\tan A = \frac{h}{(e \cos L - g \sin L) \cos f} \qquad (23)$$

Ako se relacijom (23) određuje smjer velike kružnice (azimut) u točki $N_1(d_1, S_1)$, dobit će se paralaktični kut (U_{01}) i relacija će biti:

$$\tan U_{01} = \frac{h}{(e \cos S_1 - g \sin S_1) \cos d_1} \qquad (24)$$

gdje su:

$$e = \tan d_1 \sin L_0 - \tan f_0 \sin S_1 \qquad (25)$$

$$g = \tan f_0 \cos S_1 - \tan d_1 \cos L_0 \qquad (26)$$

$$h = \sin(L_0 - S_1) \qquad (27)$$

Relacija (24) napisat će se u obliku:

$$\tan U_{01}\, (e \cos S_1 - g \sin S_1) \cos d_1 - h = P = 0 \qquad (28)$$

a u recipročnom obliku će biti:

$$h \cot U_{01} - (e \cos S_1 - g \sin S_1) \cos d_1 = R = 0 \qquad (29)$$

Parcijalnim diferenciranjem relacija (28) i (29) po varijablama f_0, L_0, i U_{01}, dobiva se:

$$P_{f0}\, df + P_{L0}\, dL + P_{u01}\, dU = 0 \qquad (30)$$

$$R_{f0}\, df + R_{L0}\, dL + R_{u01}\, dU = 0 \qquad (31)$$

gdje su:

P_{f0}, P_{L0}, P_{u01} - parcijalne derivacije relacije P po varijablama f_0, L_0 i U_{01}.

R_{f0}, R_{L0}, R_{u01} - parcijalne derivacije relacije R po varijablama f_0, L_0 i U_{01}.

Kad se pri motrenju čini sustavna pogreška (dU_s), jednadžbe (30) i (31) dobivaju oblike:

$$P_{f0}\, df + P_{L0}\, dL + P_{u01}\, dU_s + P_{u01}\, dU = 0 \qquad (32)$$

$$R_{f0}\, df + R_{L0}\, dL + R_{u01}\, dU_s + R_{u01}\, dU = 0 \qquad (33)$$

I u tom slučaju veličina dU određuje se relacijom (13) s pomoću relacije (14).

Jednadžbe (30) i (32) upotrebljavaju se kad je paralaktični kut (U_1) manji od 45^o, a jednadžbe (31) i (33) kad je taj kut veći od 45^o.

Svođenje jednadžaba pravaca položaja na normalni oblik

Jednadžbe pravaca položaja u općem obliku (12), (15), (18), (19), (20), (21), (30), (32) i (33) svesti će se na normalni oblik u relativnomu koordinatnom sustavu (df, cos f dL) i u općem izgledu bit će:

$$\cos A\, df + \sin A \cos f_0\, dL = d \qquad (34)$$

$$\cos A\, df + \sin A \cos f_0\, dL + C\, dU_s = d \qquad (35)$$

U jednadžbama su:

$$\cos A = \frac{a}{\pm(a^2 + b^2/\cos^2 f_0)^{1/2}} \quad (36)$$

$$\sin A = \frac{b}{\pm(a^2 + b^2/\cos^2 f_0)^{1/2}} \quad (37)$$

$$C = \frac{c}{\pm(a^2 + b^2/\cos^2 f_0)^{1/2}} \quad (38)$$

$$d = \frac{c\,dU}{\pm(a^2 + b^2/\cos^2 f_0)^{1/2}} \quad (39)$$

Predznak ispred zagrada uzima se suprotan predznaku c dU. Argument A u funkcijama sin A i cos A je azimut normale (d) pravca položaja.

Pri svođenju jednadžaba pravaca položaja iz općega u normalni oblik, u relacijama (36), (37), (38) i (39) uzete su opće oznake za parcijalne derivacije, tako da su:

- parcijalne derivacije uz df označene s a;
- parcijalne derivacije uz dL označene s b;
- parcijalne derivacije uz dU označene s c.

Kad se izvode dva motrenja vertikalnog kuta otklona ravnine dviju zvijezda, postavlja se sustav jednadžaba tipa (34), a kad se obavlja tri ili više motrenja, postavlja se sustav jednadžaba tipa (35). Rješavanjem tih sustava dobivaju se razlike između pravih i zbrojenih koordinata motritelja (df, dL).

Prave koordinate određuju se relacijama:

$$f = f_0 + df \quad (40)$$

$$L = L_0 + dL \quad (41)$$

Metoda jednakih azimuta

Metoda jednakih azimuta poseban je oblik metode dviju zvijezda. Kod ove metode mjereni vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda (B_1) jednak je nuli. Obje zvijezde imaju jednake azimute i nalaze se na istoj velikoj kružnici na kojoj je i motritelj, a paralaktični kut (U_1) jednak je kutu u trokutu (P,N_1,N_2) uz vrh N_1.

Ovaj postupak izdvaja se u posebnu metodu jer se utvrđivanje trenutka vremena kad je vertikalni kut otklona ravnine dviju zvijezda jednak nuli može izvesti na poseban način i ima određene prednosti.

Primjena metode

Metoda se može uspješno primjenjivati za vrijeme cijele vedre noći. Kod toga mogu poslužiti parovi navigacijskih zvijezda za koje su dani dnevni ili samo mjesečni podaci. U Engleskom i Američkom nautičkom godišnjaku imaju 173 takve zvijezde, i od toga broja može se dobiti 14878 para zvijezda koje formiraju velike kružnice na nebeskoj sferi. Kad bi se uzelo da sve velike kružnice pojedinih parova prelaze preko pozicije motritelja, dobilo bi se oko 10 kružnica u jednoj minuti, što je relativno veliki broj.

Međutim, velike kružnice na kojima su maksimalne širine manje od geografske širine motritelja ne prelaze preko njegove pozicije i ne mogu se upotrebljavati u metodi jednakih azimuta. Jednako tako nisu prikladne ni kružnice na kojima su zvijezde na suprotnim stranama obzora. Ipak, ako se pretpostavi da je za motrenje prikladan samo jedan par zvijezda u nekoliko minuta, može se uzeti da je to dovoljno za primjenu u praksi.

Odabir pojedinih prikladnih parova zvijezda i utvrđivanje trenutka za početak njihova motrenja moglo bi se izvesti na osnovi odgovarajućeg programa s pomoću računala. Isto bi se moglo dobiti grafički s pomoću identifikatora zvijezda koji sadrži 173 navigacijske zvijezde, kao što je "Novi identifikator zvijezda" Stjepa Kotlarića.

Mjerenje vertikalnog kuta otklona

Mjerenje vertikalnog kuta otklona ravnine dviju zvijezda opisano je u navedenom članku u prošlom broju "Našeg mora". Mjeri se s nešto izmijenjenim sekstantom koji bi i dalje služio i za mjerenje visina nebeskih tijela.

Kad se mjeri vertikalni kut otklona u metodi jednakih azimuta, postavlja se na izmijenjeni sekstant vertikalni kut otklona 0^o i određuje se trenutak kad par zvijezda prolazi kroz istu vertikalnu ravninu.

Posebno jednostavni mogući način određivanja trenutka kad je vertikalni kut otklona jednak nuli, moglo bi se izvoditi s pomoću viska. Postupak se svodi na to da se odredi trenutak kad dvije zvijezde istodobno prolaze preko niti viska. Takav postupak mogao bi davati dovoljno točne rezultate na brodu pri relativno mirnomu moru, a na kopnu bi se potpuno uspješno primjenjivao.

Dodatna prednost ove metode je u tome što se kut otklona mjeri u vertikalnoj ravnini, a to se lakše izvodi nego kad su zvijezde u nekoj kosoj ravnini.

Postavljanje jednadžbe pravca položaja

Jednadžba pravca položaja u metodi jednakih azimuta postavlja se jednako kao u prethodnim rješenjima i na osnovi istih matematičkih relacija.

Jedina je razlika u tome što se sad razlika između prave veličine paralaktičnog (U_1) i kuta (U_{01}) izračunatoga na osnovi zbrojene pozicije, određuje relacijom:

$$dU = U_1 - U_{01} \tag{42}$$

Kut U_1 izračunava se iz trokuta (P,N_1N_2) relacijom:

$$\cos U_1 = \frac{\sin d_2 - \sin d_1 \cos D_{12}}{\cos d_1 \sin D_{12}} \tag{43}$$

a kut U_{01} prema relaciji (1):

$$\cos U_{01} = \frac{\sin f_0 - \sin V_{01} \sin d_1}{\cos V_{01} \cos d_1} \tag{44}$$

Rukopi primljen: 19. 4. 1993.

ZAKLJUČAK

U članku su obrađene nove mogućnosti rješavanja metode dviju zvijezda. Dodatnom analizom mogle bi se utvrditi prednosti i nedostaci pojedinih rješenja i primijenjenih matematičkih modela.

Očito je da se metoda može lakše i jednostavnije primjenjivati kad su manji vertikalni kutovi otklona ravnine dviju zvijezda.

Među obrađenim rješenjima posebno je zanimljiva metoda jednakih azimuta jer se mjerenje vertikalnog kuta otklona izvodi i jednostavno s pomoću jednog viska.

Može se očekivati da će biti i daljnjih prijedloga za rješavanje metode dviju zvijezda, a posebno za mjerenje vertikalnog kuta otklona.

LITERATURA

1. Ivo Sjekavica, Jednadžba ortodrome i njena moguća primjena u navigaciji, Naše more, 1-2, 1989.
2. Ivo Sjekavica, Određivanje pozicije broda - nova astronomska metoda, Naše more, 1-2, 1993.

NEW POSSIBILITIES OF SOLVING THE TWO STARS METHOD

Summary

New possibilities of solving the two stars method have been dealt in this article . The method was published in "Naše more" 1-2/93. by the same author. Three new solutions have been dealt: 1. on the basis of cosine law for a spherical triangle 2. on the basis of contangent law for a spherical triangle 3. on the basis of equation of great circle. A special case in that method, when the angle of decline of two stars plane equals zero, has been dealt here as well.