Dr. Miljenko Crnjac ; Dominika Crnjac, dipl. ing. matematike: Stohastički modeli kamatnih stopa
Ekonomski vjesnik, br. 1 i 2 (12) : 63 - 65, 1999.

UDK 519.8;336.78
Prethodno priopćenje

Prof. dr. sc. Miljenko Crnjac*
Dominika Crnjac, dipl.ing matematike**

STOHASTIČKI MODELI KAMATNIH STOPA

1. UVOD

U financijskim poslovima ugovori su često dugoročni, pa pri sklapanju ugovora postoji izvjesna nesigurnost u svezi s gospodarskim i ulagačkim uvjetima koji će prevladavati kroz vrijeme trajanja ugovora.

Ako se želi odrediti obrok premije na bazi fiksne kamatne stope, potrebito je procijeniti kamatnu stopu koja će se koristiti pri računanju. Jedan su od pristupa koji uključuje nesigurnost stohastički modeli kamatnih stopa.

U ovim modelima teorija vjerojatnosti omogućava variranje kamatnih stopa. Primjerice, kamatna stopa svake godine može biti nezavisna od kamatnih stopa svih prethodnih godina ili kamatna stopa može poprimiti vrijednosti iz unaprijed zadanog intervala, tako da je stvarna vrijednost za zadanu godinu određena nekom funkcijom gustoće vjerojatnosti.

2. NEZAVISNE GODIŠNJE STOPE

Pretpostavimo li da će svake godine prinos biti između 2% i 6% s jednakom vjerojatnošću, pa funkcija je gustoće za „i" uniformna na intervalu [0,02, 0,06].

Promotrimo vremenski interval [0, n] podijeljen u vremenske intervale [0, 1], [1, 2],.., [n-1, n].

Neka je i_t prinos tijekom t-te godine, tj. u intervalu [t-1, t],, za t = 1,2,…, n. Pretpostavimo da se kapital ulaže samo na početku godine.

Označimo li sa F_t akumulirani iznos u trenutku t cjelokupne investicije do trenutka t i neka je P_t iznos investicije u trenutku t, tada je

$$F_t = (1+i_t)\,(F_{t-1} + P_{t-1}),\ t = 1,2,\ldots \qquad (2.1.)$$

Jednadžba (2.1.) kaže da će za jediničnu investiciju 1 u trenutku 0, akumulirani iznos u trenutku n biti

$$S_n = (1+ i_1)\,(1+ i_2)\,\ldots\,(1+ i_n) \qquad (2.2.)$$

Analogno prethodnom, za niz godišnjih ulaganja, svaki u jediničnom iznosu 1 u vremenima 0, 1, 2, …, n-1 do trenutka n akumulirani iznos bit će

*Ekonomski fakultet u Osijeku
** Osijek

$$\begin{aligned} A_n = {} & (1+i1)\,(1+i_2)\,(1+i_3)\,(1+i_4)\dots(1+i_n) \\ & + (1+i_2)\,(1+i_3)\,(1+i_4)\dots(1+i_n) \\ & + (1+i_3)\,(1+i_4)\dots(1+i_n) \qquad (2.3.) \\ & + \;.\;.\;. \\ & \;.\;.\;. \\ & \;.\;.\;. \\ & + (1+i_{n-1})\,(1+i_n) \\ & + (1+i_n) \end{aligned}$$

Nije teško uočiti da su S_n i A_n slučajne varijable, svaka sa svojom funkcijom distribucije.

Uz pretpostavku da je slučajna varijabla log $(1+i_t)$ normalno distribuirana, sa srednjom vrijednosti μ i varijancom s^2, kažemo da je varijabla $(1+i_t)$ log-normalno distribuirana s parametrima μ i s^2.

Lako uočavamo da je jednadžba (2.2.) ekvivalentna jednadžbi

$$\log S_n = \sum_{t=1}^{n} \log(1+i_t) \qquad (2.4.).$$

Budući da je suma nezavisnih normalnih slučajnih varijabli normalna slučajna varijabla, zaključujemo sljedeće: ako su slučajne varijable $(1+i_t)$, $t \geq 1$ nezavisne i svaka log-normalno distribuirana s parametrima μ i s^2, slučajna je varijabla S_n jlog-normalna s parametrima n μ i ns^2.

Napomenimo da je teoretska analiza funkcije distribucije za S_n i A_n vrlo teška, pa se koriste tehnike simulacijskog modeliranja za rješavanje praktičnih problema.

Zanimljivo je primijetiti da momente slučajnih varijabli S_n i A_n možemo pronaći pomoću momenata distribucije prinosa u svakoj godini.

Krenimo redom:

Momenti od S_n

Iz jednadžbe (2.2.) imamo: $(S_n)^k = \prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^k$,

pa je matematičko očekivanje

$$E\left[S_n^k\right] = E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^k\right] = \prod_{t=1}^{n} E\left[(1+i_t)^k\right] \qquad (2.5.)$$

Po pretopostavci su $i_1, i_2, \dots, i_n$ nezavisni, pa koristeći izraz (2.5.) i zadane momente distribucije godišnjih prinosa nalazimo momente za S_n.

Primjera radi, pretpostavimo da prinos svake godine ima srednju vrijednost j i varijancu s^2.

Iz jednadžbe (2.5.) za k=1 dobivamo

$$E[S_n] = \prod_{t=1}^{n} E[1+i_t] = \prod_{t=1}^{n}\left(1+E[i_t]\right) = (1+j)^n \qquad (2.6.)$$

pri čemu je $E=[i_t]=j$ za svako t.

Ako je k = 2 iz jednadžbe (2.5.) imamo

$$E\left[S_n^2\right] = \prod_{t=1}^{n} E\left[1+2i_t+i_t^2\right] = \prod_{t=1}^{n}\left(1+2E[i_t]\right) +$$

$$E\left[i_t^2\right] = \left(1+2j+j^2+s^2\right)^n \quad (2.7.), \text{ jer je}$$

$$E\left[i_t^2\right] = \left(E[i_t]\right)^2 + Var[i_t] = j^2 + s^2.$$

Iz prethodnog nalazimo varijancu slučajne varijable S_n

$$Var[S_n] = E\left[S_n^2\right] - \left(E[S_n]\right)^2 =$$

$$\left(1+2j+j^2+s^2\right)^n - (1+j)^{2n} \qquad (2.8.).$$

Nije teško uočiti da prethodni postupak možemo primijeniti za iznalaženje viših momenata od slučajne varijable S_n u ovisnosti o višim momentima distribucije godišnje kamatne stope.

Momenti od A_n

Iz jednadžbe (2.1.) ili jednadžbe (2.3.) nije teško zaključiti da vrijedi;

$$A_n = (1+i_n)\,(1+A_{n-1}) \text{ za } n \geq 2 \qquad (2.9.)$$

Prethodna jednadžba omogućava izvođenje rekurzije jer A_{n-1} ovisi samo o vrijednostima $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, slučajne su varijable i_n i A_{n-1} nezavisne, a po pretpostavci su prinosi svake godine međusobno nezavisni. Nadalje, iz jednadžbe (2.9.) možemo naći momente od A_n.

Pokažimo taj postupak na primjeru srednje vrijednosti i varijance od A^{n}.
Pretpostavimo da je $\mu_n = E[A_n]$ i $m_n = E\left[A_n^2\right]$. Budući da je $A_1 = 1+i_1$, to je $\mu_1 = 1+j$ (2.10.) i $m_1 = 1+2j+j^2+s^2$ (2.11.) pri čemu su j srednja vrijednost i s^2 varijanca prinosa svake godine.

Izračunavanjem očekivanja iz jednadžbe (2.9.) dobivamo
$\mu_n = (1+j)\,(1+\mu_{-1})$ za $n \geq 2$ (2.12.), uz napomenu da su i_n i A_{n-1} nezavisni.

Dakle, očekivana je vrijednost A_n jednostavno akumulacija izračunata uz srednju kamatnu stopu.

Budući da je

$A_n^2 = \left(1 + 2i_n + i_n^2\right)\left(1 + 2A_{n-1} + A_{n-1}^2\right)$, nalaženjem očekivane vrijednosti za $n \geq 2$ dobivamo $m_n=(1+j+j^2+s^2)\ (1+\mu_{n-1}+m_{n-1})$ (2.13.).

Prethodna formula daje rekurzivni izraz za izračunavanje $m_2, m_3, m_4, \ldots$.

Nije teško uočiti da se varijanca od A_n može izračunati na sljedeći način

$$\mathrm{Var}\left[A_n\right] = E\left[A_n^2\right] - \left(E\left[A_n\right]\right)^2 = m_n - \mu_n^2 \qquad (2.14.).$$

U principu, prethodno razmatranje možemo proširiti na rekurzivne izraze za više momente.

ZAKLJUČAK

U radu je opisan pojam stohastičkog modela kamatnih stopa. Algebarski su izvedeni izrazi za srednju vrijednost i varijancu kumulativnog iznosa za model u kojem su godišnje kamatne stope neovisne i jednako distribuirane.

Izvedene su rekurzivne formule koje omogućavaju izračunavanje srednje vrijednosti i varijance kumulativnog iznosa premija.

Izvedena je funkcija distribucije za kumulativni iznos jednokratne premije i za vrijednost dospjelih iznosa u bilo kojem budućem trenutku, uz pretpostavku da je svake godine slučajna varijabla (1+i) log-normalno distribuirana.

LITERATURA:

1. Crnjac, M.: Teorijska statistika za ekonomiste, Osijek (1996)

2. Crnjac, M.; Jukić, D. i Scitovski, R.: Matematika, Osijek (1994)

3. Vranjković, P.: Zbirka zadataka iz vjerojatnosti i statistike, Školska knjiga, Zagreb (1992)

4. Elezović, N.: Teorija vjerojatnosti, Element, Zagreb (1995)

5. Kmenta, I.: Počela ekonometrije, Mate, Zagreb (1997)