

Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, Ingo KOLLAR, München

Forschung zum Mathematischen Argumentieren – Ein deskriptiver Review von PME Beiträgen

Die Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft. Mathematisches Argumentieren und Beweisen (MA&B) sind zentrale Aktivitäten der Mathematik und gehören zu den wichtigsten zu erlernenden Fähigkeiten im schulischen und universitären Bereich (Brunner, 2014). Gerade in der Sekundarstufe wurde der Fokus auf Argumentieren in den letzten Jahren weltweit durch curriculare Änderungen verstärkt, entsprechend ist MA&B auch innerhalb der Didaktik der Mathematik wieder zunehmend in den Forschungsmittelpunkt gerückt. In diesem Beitrag wird Argumentieren im Sinne Toulmins relativ offen verstanden, insbesondere werden auch nicht deduktives Schlussfolgern und Beweisen als Spezialfälle des Argumentierens verstanden (Reiss & Ufer, 2009).

1. Forschungsperspektiven MA&B

Argumentations- und Beweisfähigkeiten werden aus verschiedenen Perspektiven untersucht. Einerseits werden intraindividuelle Voraussetzungen von Personen betrachtet, da MA&B eine komplexe Fähigkeit ist, welche die Integration verschiedener (Teil-)Fähigkeiten oder Wissensfacetten benötigt. Das Framework von Reiss & Ufer (2009) nennt sechs Voraussetzungen, die auch Prädiktoren genannt werden, da sie prädiktiv für MA&B Fähigkeiten sind. Bei den Prädiktoren des Frameworks (*mathematische Wissensbasis, Methodenwissen, mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösen, Beliefs* und *affektive Aspekte*) handelt es sich jeweils um Voraussetzungen, die in empirischen mathematikdidaktischen Studien bereits einen bedeutenden Einfluss auf MA&B gezeigt haben.

Neben den Voraussetzungen sind die Teilprozesse eines MA&B Prozesses ein Fokus der Forschung. Das Framework von Fischer et. al (2014), welches diese Teilprozesse aus einer interdisziplinären Sichtweise untersucht, schlägt acht sogenannte epistemische Aktivitäten (vgl. Tabelle 1) vor. Diese Aktivitäten werden als wesentliche Teile von Argumentationsprozessen gesehen, müssen jedoch nicht immer in allen MA&B Prozessen vorkommen.

Die dritte Perspektive auf MA&B widmet sich den Zielen, welche eine Person zu Argumentations-/Beweisprozessen veranlassen. Mejia-Ramos & Inglis (2009) beschreiben drei übergeordnete Zielbereiche, die *Konstruktion, Rezeption* und *Präsentation* von Beweisen, die wiederum jeweils einige Subziele enthalten.

Aktivität	Beschreibung
<i>Ein Problem identifizieren</i>	Ein kognitiver Konflikt wird wahrgenommen und eine erste Problemrepräsentation kreiert
<i>Fragen stellen</i>	Eine oder mehr initiale Fragen werden gestellt
<i>Hypothesen generieren</i>	Mögliche Antworten auf die Fragen werden basierend auf Beobachtungen, Modellen, Theorien, o.ä. erstellt
<i>Erstellen und Überarbeiten von Artefakten</i>	Ein prototypisches Objekt (z.B. DGS-Arbeitsblatt), axiomatisches System o.ä. wird entwickelt, um mit diesem an dem Problem zu arbeiten
<i>Evidenz generieren</i>	Evidenz für die Hypothese wird generiert
<i>Evidenz evaluieren</i>	Evidenz wird, bezugnehmend auf entsprechende Normen, evaluiert
<i>Schlussfolgern</i>	Verschiedene Beweisteile werden integriert. Die initiale Behauptung wird unter dem Licht der Evidenz neu bewertet
<i>Kommunizieren und Prüfen</i>	Individuelle Argumente und Beweise werden innerhalb einer Community geteilt und diskutiert

Tabelle 1: Überblick der epistemischen Aktivitäten (Fischer et al., 2014).

2. Fragestellungen

Im Rahmen dieses Reviews (siehe auch Sommerhoff, Ufer, & Kollar, eingereicht) wurde die Forschung im Bereich MA&B der letzten fünf Jahre unter Berücksichtigung der verschiedenen Blickwinkel systematisch analysiert. Dabei sollte insbesondere untersucht werden, inwiefern die Forschung zu mathematischem Argumentieren und Beweisen die verschiedenen Prädiktoren, Teilprozesse und Ziele von MA&B-Prozessen untersucht. Weiter sollte geklärt werden, welche Kombinationen von Prädiktoren und epistemischen Aktivitäten in der Forschung zu MA&B betrachtet werden.

3. Methodik

Die Datenbasis für den Review bilden die Research Reports (RR) der Konferenzen der „International Group for the Psychology of Mathematics Education“ von 2009 bis 2014. Aus den insgesamt 782 RRs wurden nach einer initialen Kodierung durch zwei Reviewer 129 RRs (16,5% der RRs) ausgewählt, die sich mit dem Thema MA&B im Sekundar- oder Tertiärbereich befassen. Beiträge aus dem Primärbereich wurden ausgeschlossen, da hier häufig eher allgemeines Begründen anstatt MA&B betrachtet wird und Argumentieren in vielen Forschungsprojekten auch implizit enthalten ist. Die

verbliebenen 129 RRs wurden anschließend hinsichtlich der untersuchten Prädiktoren, Prozesse und Ziele kodiert, wobei jeweils der gesamte RR als Basis für die Kodierung verwendet wurde. Die Interraterreliabilität erreichte mit einem mittleren Wert $\kappa_{\text{Mean}} = 0,77$ (SD = 0,15) ein gutes Niveau.

4. Ergebnisse

Bei der Analyse der betrachteten Prädiktoren zeigten sich deutliche Ungleichgewichte. Im Vordergrund der Forschung stand der Prädiktor *Mathematische Wissensbasis* (47% der RRs) gefolgt von *Problemlösefähigkeiten* (18%) und *Methodenwissen* (17%). Die anderen Prädiktoren wurden hingegen kaum untersucht (siehe Abbildung 1, links). Bei nur 22% der RRs standen mehrere Prädiktoren im Forschungsmittelpunkt, wobei maximal zwei Prädiktoren gleichzeitig betrachtet wurden und es sich jeweils um eine Kombination mit *Mathematische Wissensbasis* handelte.

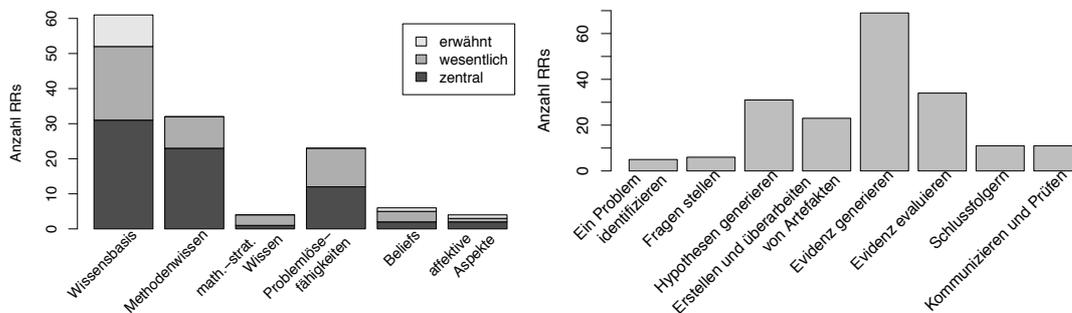


Abbildung 1: Verteilung der untersuchten Prädiktoren (links) und Teilprozesse (rechts)

Ein ähnliches Bild ergab sich auch bei den Teilprozessen von MA&B (siehe Abbildung 1, rechts). Von den insgesamt acht epistemischen Aktivitäten wurden primär die Prozesse *Hypothesen generieren* (24% der RRs), *Erstellen und überarbeiten von Artefakten* (18%), *Evidenz generieren* (53%) und *Evidenz evaluieren* (26%) untersucht. Insbesondere die zu Beginn eines MA&B-Prozesses vorkommenden Aktivitäten wie *Ein Problem identifizieren* und *Fragen stellen* wurden kaum untersucht. Unter allen epistemischen Aktivitäten nimmt *Evidenz generieren* eine herausragende Position ein, da diese in über 50% der RRs im Forschungsfokus lag. Dieser Schwerpunkt spiegelt sich auch in den untersuchten Zielen von MA&B-Prozessen wider. Hier war das überragende Ziel in den RRs die *Konstruktion von Argumenten* (57% der RRs); *Präsentation* (1%) und *Rezeption* (7%) wurden hingegen kaum untersucht (siehe Abbildung 2, links). Immerhin 7% der RRs hatten mehr als eine Zielperspektive. 29% der RRs konnte jedoch keine Zielperspektive zugewiesen werden, da es sich um theoretische RRs handelte oder die Beschreibung der konkreten Aktivitäten nicht detailliert genug dargestellt war.

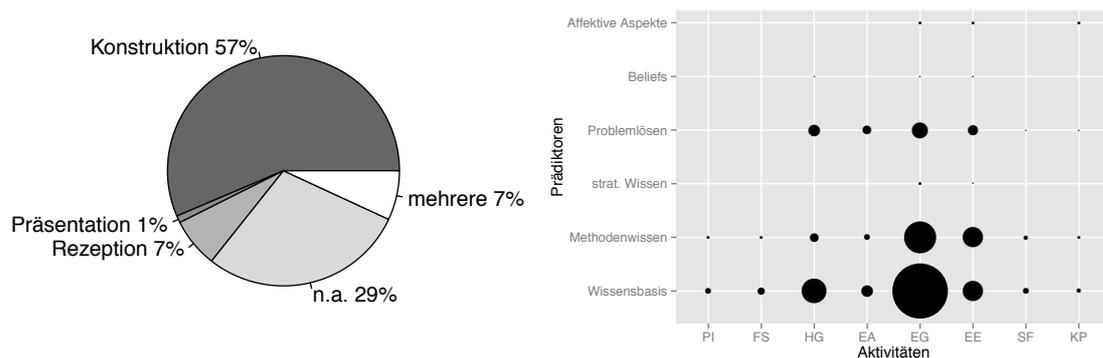


Abbildung 2: Anteil der Ziele (links) und Kombinationen epist. Aktivitäten & Prädiktoren (rechts)

Auffallend ist, dass die einzelnen Prädiktoren und Teilprozesse in den RRs nur in wenigen Kombinationen betrachtet wurden. Im Blasendiagramm (siehe Abbildung 2, rechts) ist deutlich zu erkennen, dass viele Kombinationen durch die RRs gar nicht abgedeckt wurden.

Mit 20% machen RRs zum Thema MA&B einen signifikanten Anteil der mathematikdidaktischen Forschung der letzten fünf Jahre aus. Die systematische Analyse dieses Reviews zeigt jedoch eine deutliche Konzentration auf einzelne Bereiche, die viel untersucht wurden. Ist das Ziel mathematikdidaktischer Forschung ein integriertes Modell von MA&B, welches über spezifische Situationen und Anforderungen hinausgeht, so tragen die untersuchten RRs sowohl in Bezug auf die einzelnen Voraussetzungen, Prozesse und Ziele als auch deren Interaktion nur wenig bei. Gerade das Verständnis dieser Interaktionen ist jedoch nicht nur aus theoretischer Sicht von Interesse, sondern kann eine effektive und langfristige Förderung von MA&B unterstützen.

Literatur

- Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 229–249.
- Fischer, F., Kollar, I., Ufer, S., Sodian, B., Hussmann, H., Pekrun, R., ... Eberle, J. (2014). Scientific reasoning and argumentation: Advancing an interdisciplinary research agenda. *Frontline Learning Research*, 4, 28–45.
- Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93). Taipei, Taiwan
- Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus?. *Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111(4), 155–177.
- Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (eingereicht). Research on mathematical argumentation: a descriptive review of PME proceedings. Manuskript eingereicht zur Publikation in *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tasmania, Hobart: PME.