

**UNTERSUCHUNGEN ZUR DYNAMISCHEN
STRUKTUR DES WIENER AKTIENMARKTS**

Gerhard RÜNSTLER ¹

Forschungsbericht /
Research Memorandum No. 292

Jänner 1992

¹Scholar an der Abteilung "Mathematische Methoden und Computerverfahren"

Die in diesem Forschungsbericht getroffenen Aussagen liegen im Verantwortungsbereich des Autors/der Autorin (der Autoren/Autorinnen) und sollen daher nicht als Aussagen des Instituts für Höhere Studien wiedergegeben werden. Nachdruck nur auszugsweise und mit genauer Quellenangabe gestattet.

All contributions are to be regarded as preliminary and should not be quoted without consent of the respective author(s). All contributions are personal and any opinions expressed should never be regarded as opinion of the Institute for Advanced Studies.

This series contains investigations by the members of the Institute's staff, visiting professors, and others working in collaboration with our departments.

Zusammenfassung

Anhand von 12 ausgewählten Aktien der Wiener Börse wird untersucht, inwieweit sich die bedingten Erwartungswerte der Returns und Volatilitäten einzelner Aktien auf einen gemeinsamen Marktfaktor zurückführen lassen.

Die bedingten Volatilitäten der Aktien werden zunächst durch univariate GARCH(1,1)-Modelle geschätzt. Diese werden im folgenden mit Varianten des Faktor-ARCH-Modells (ENGLE, NG & ROTHSCILD, 1990) verglichen. Es wird gezeigt, daß ein erweitertes Ein-Faktor-Modell, das einen kurzfristigen Einfluß von aktienspezifischen Schocks enthält, den univariaten Schätzungen mindestens ebenbürtig ist.

Weiters werden auf der Grundlage eines VAR(1)-Prozesses unter Verwendung von Weighted Least Squares die bedingten Erwartungswerte der Returns geschätzt und einer kanonischen Analyse (BOX & TIAO, 1977) unterzogen. Die Ergebnisse dieser Schätzungen sind in hohem Maß von der Gewichtung der hoch volatilen Perioden abhängig.

Summary

The present paper investigates whether the conditional expectations of returns and volatilities of selected stocks traded on the Vienna stock exchange can be explained by a common market factor.

Univariate GARCH(1,1)-estimates of conditional volatilities are compared with several modifications of the factor-ARCH-model (ENGLE, NG & ROTHSCILD, 1990). It is shown that an extended one-factor-model allowing for a short-term memory of stock-specific shocks fits the data as well as univariate estimates.

Secondly, conditional expectations are estimated on the basis of a VAR(1)-process. In order to account for the heteroscedasticity of the returns WLS-estimators are used. Subsequently, the most predictable portfolio is constructed by a canonical analysis (BOX & TIAO, 1977) of the VAR(1). The results depend strongly on the weights given to high volatile periods.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. ARCH-Modelle	2
2.1 Das GARCH(1,1)-Modell	2
2.2 GARCH-Mean	4
2.3 Faktor-ARCH	6
3. Faktor-ARCH-Modelle der Wiener Börse	10
3.1 Hauptkomponentenanalyse	11
3.2 GARCH-Effekte im WBK-Index	12
3.3 Garch-Mean-Modelle der Faktoren	14
3.4 Ein Faktormodell der bedingten Volatilitäten	15
3.5 Faktor-ARCH mit Risikoprämie	26
4. Ein Strukturmodell der bedingten Returns	31
4.1 Die kanonische Analyse eines VAR(1)	31
4.2 Weighted Least Squares-Schätzung eines VAR(1)	32
4.3 VAR(1)-Schätzung der Returns	35
4.4 Kanonische Analyse der Returns	40
Literaturverzeichnis	45

1 Einleitung

Die Analyse der Volatilitäten von Aktienreturns hat im letzten Jahrzehnt in der Finanzliteratur besondere Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Zu den meistbeachteten Ansätzen hierzu zählen das ARCH-Modell (ENGLE, 1982) und dessen Modifikation, das GARCH(1,1)-Modell (BOLLERSLEV, 1986). Diese Zeitreihenmodelle fassen die Volatilitäten der Returns als autoregressiven Prozeß auf.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit befaßt sich mit einer multivariaten Verallgemeinerung des GARCH(1,1), dem Faktor-ARCH-Modell (ENGLE, NG & ROTHSCILD, 1990). In einer Analyse der Tagesschlußkurse von 12 Wiener Aktien im Zeitraum vom Jänner 1987 bis August 1989 wird zunächst die Frage behandelt, inwieweit die Volatilitäten der einzelnen Aktien durch einen gemeinsamen Faktor beschrieben werden können. Darüber hinaus wird auch überprüft, ob die durch die Arbitrage Pricing Theory (APT) implizierte Risikoprämie am Wiener Markt vorzufinden ist.

Aus dem Arbitrageargument der APT folgt, daß der bedingte Erwartungswert der die Aktienreturns bestimmenden Faktoren gleich Null sein muß (ROLL & ROSS, 1980). Dementgegen weist aber die Mehrzahl der Aktien für den betrachteten Zeitraum beträchtliche Autokorrelationen erster Ordnung auf. Darüber hinaus liegt die Autokorrelation des WBK-Index wesentlich über derjenigen der einzelnen Aktien. Das weist auf verzögerte Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Aktien hin.

Ein möglicher Ansatz zur Bestimmung der Struktur derartiger verzögerter Abhängigkeiten ist die kanonische Analyse eines vektorautoregressiven Prozesses (BOX & TIAO, 1977). Dabei werden orthogonale Linearkombinationen der betrachteten Zeitreihen gesucht, die sukzessive maximale erklärte Varianz aufweisen. Eine solche kanonische Analyse wurde für die 12 Wiener Aktien durchgeführt. Wegen der Heteroskedastie der Returns wurden die Gleichungen mittels Weighted Least Squares geschätzt.

2 Arch-Modelle

Als einer der erfolgreichsten Ansätze zur Modellierung zeitvariierender Varianzen im Finanzbereich hat sich im letzten Jahrzehnt die Klasse der ARCH-Modelle (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) etabliert.

Vorgestellt wurde das ARCH(p)-Modell von ENGLE (1982). Die Zeitreihen y_t werden durch ein lineares Modell beschrieben. Die bedingte Varianz $h_t = E_{t|t-1}e_t^2$ des Fehlers e_t folgt dabei einem 'autoregressiven' Prozeß:

$$\begin{aligned}y_t &= \alpha' z_t + e_t, \quad e_t \sim N(0, h_t) \\h_t &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^p \gamma_i e_{t-i}^2,\end{aligned}\tag{1}$$

wobei z_t einen Vektor exogener Variablen darstellt.

Zahlreiche Studien der letzten Jahre haben gezeigt, daß sich die Volatilitätsschwankungen von Aktienreturns recht gut durch ARCH-Modelle beschreiben lassen (AKGYRAI, 1989; CHOU, 1988; FRENCH, SCHWERT & STAMBAUGH, 1987). Auch auf andere Finanzdaten wie Zinssätze (ENGLE, LILIEN & ROBINS, 1987), Wechselkurse (DIEBOLD & NERLOVE, 1986; ENGLE, ITO & LIN, 1989) wurden ARCH-Modelle mit gutem Erfolg angewandt.

2.1 Das GARCH(1,1)-Modell

BOLLERSLEV (1986) entwickelte eine Verallgemeinerung des Modells, dessen einfachste Variante, das GARCH(1,1)-Modell, seither in den empirischen Arbeiten hauptsächlich verwendet wird. Das allgemeine GARCH(p,q)-Modell hat die Form:

$$\begin{aligned}y_t &= \alpha' z_t + e_t, \quad e_t \sim N(0, h_t) \\h_t &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^p \gamma_{1,i} h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \gamma_{2,j} e_{t-j}^2,\end{aligned}\tag{2}$$

Im folgenden seien einige Eigenschaften des GARCH(1,1) dargestellt.

Mit $\nu_t = E_t e_t^2 - E_{t-1} e_t^2 = e_t^2 - h_t$ erhält man durch rekursives Ersetzen der h_{t-s} (vgl. ENGLE & MUSTAFA, 1989)

$$\begin{aligned}h_t &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 e_{t-1}^2 \\&= \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_2) h_{t-1} + \gamma_2 \nu_{t-1} \\&= \gamma_0 \sum_{i=0}^s (\gamma_1 + \gamma_2)^i + \gamma_2 \sum_{i=0}^s (\gamma_1 + \gamma_2)^i \nu_{t-i} \\&\quad + (\gamma_1 + \gamma_2)^{s+1} h_{t-s-1}\end{aligned}$$

Für $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ ergibt sich damit

- $h_t = \gamma_0 (1 - (\gamma_1 + \gamma_2))^{-1} + \gamma_2 \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma_1 + \gamma_2)^i \nu_{t-i}$.
- Die unbedingte Varianz existiert und ist gegeben durch

$$\sigma^2 = \gamma_0 (1 - (\gamma_1 + \gamma_2))^{-1}.$$

- $\nu_t = e_t^2 - h_t$ kann als Schock auf die Varianz betrachtet werden. Mit der Darstellung

$$h_t = \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \nu_{t-i} \quad (3)$$

ist die Persistenz eines Schocks ν_t zum Zeitpunkt $t+i$

$$E_t e_{t+i} - E_{t-1} e_{t+i} = \theta_i \nu_t \text{ durch } \theta_i = \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2)^i \text{ bestimmt.}^1$$

$\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + 3\gamma_2^2 < 1$ ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Kurtosis. Der Wert der Excess Kurtosis beträgt $6\gamma_2(1 - \gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_2^2)^{-1}$ und ist somit größer als Null. Damit ist die unbedingte Verteilung der Residuen leptokurtisch. Diese generelle Eigenschaft der ARCH-Modelle, die hohe Kurtosis der unbedingten Verteilung als Mischung von bedingten Verteilungen mit unterschiedlichen Varianzen zu erklären, hat u. a. ihre Attraktivität in der Finanzliteratur begründet.

Die Schätzung der Modelle erfolgt über Maximierung der Loglikelihoodfunktion

$$\begin{aligned} L(y_1, \dots, y_T) &= \sum_{t=1}^T L(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1), \text{ mit} \\ L(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) &= -1/2 (\ln h_t + e_t^2/h_t). \end{aligned} \quad (4)$$

Der LM-Test auf ARCH(p)-Effekte kann einfach mittels einer Regression der e_t^2 auf $e_{t-1}^2, \dots, e_{t-p}^2$ durchgeführt werden (ENGLE, 1982).

Die Parameter des Modells $h_t = z_t' \omega$ seien $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Die LM-Statistik für die Hypothese $H_0 : \omega_2 = 0$ hat dann die Form

$$\begin{aligned} \xi_{LM}^* &= \frac{1}{2} f_0' Z_0 (Z_0' Z_0)^{-1} Z_0' f_0, \\ \text{mit} \quad f_0 &= (e_1^2 h_1^{-1} - 1, \dots, e_T^2 h_T^{-1} - 1)' \\ Z_0 &= (h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \omega}, \dots, h_T \frac{\partial h_T}{\partial \omega})', \end{aligned} \quad (5)$$

¹Der Fall $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ hat als 'Integrated GARCH' besondere Aufmerksamkeit auf sich gezogen (vgl. ENGLE & BOLLERSLEV, 1986). In diesem Fall gilt für alle i : $\theta_i = \gamma_2$, dh. der Einfluß eines Schock ν_t schwächt sich mit fortlaufender Dauer nicht ab. Die unbedingte Varianz existiert nicht, der Prozeß ist aber dennoch stationär (vgl. ENGLE & MUSTAFA, 1989). Tatsächlich liegen Schätzungen der bedingten Volatilitäten von Aktienreturns oft nahe bei einem integrierten GARCH(1,1)-Prozeß (vgl. CHOU, 1988; AKGIRAY, 1989).

wobei f_0 und Z_0 unter H_0 berechnet werden (BOLLERSLEV, 1986).

ξ_{LM}^* kann weiters durch TR^2 , wobei R^2 den multiplen Korrelationskoeffizienten der OLS-Regression der f_0 auf Z_0 darstellt, konsistent geschätzt werden. Die Statistik ist χ^2 -verteilt. Die Anzahl der Freiheitsgrade entspricht der Anzahl der durch H_0 restringierten Parameter (ENGLE, 1982).²

Schließlich ist die Ljung-Box-Statistik $QS(p) = n(n+2) \sum_{i=1}^p (n-i)^{-1} \rho_i^2$ (LJUNG & BOX, 1988) der Autokorrelationen ρ_i in den e_t^2 ein Indikator für das Vorliegen von ARCH-Effekten. Diese Statistik ist χ_p^2 -verteilt.

2.2 GARCH-MEAN

ENGLE, LILIEN & ROBINS (1987) stellten eine Erweiterung des ARCH, das ARCH-Mean-Modell vor. Die Aufnahme einer zeitvariierenden, von der bedingten Varianz des Assets abhängigen Risikoprämie in die Mean-Gleichung ermöglicht Tests des Capital-Asset-Pricing Modells (CAPM).

Das Verhältnis zwischen dem Risiko und dem Return von Assets ist eines der zentralen Ergebnisse des CAPM: Unter der Annahme normalverteilter Returns hängt die Nutzenfunktion U der Investoren nur vom Mittelwert und der Standardabweichung der Verteilung ab, also $U = U(\mu, \sigma)$. Ein Nutzenmaximierungskalkül führt zu der bekannten Gleichgewichtsbeziehung zwischen dem erwarteten Return und der Varianz des Marktportfolios:

$$\mu^M - r = \delta \sigma^M,$$

wobei r den risikolosen Zinssatz bezeichnet und δ die Risikoaversion der Investoren abbildet.

In einer intertemporalen Betrachtungsweise läßt sich – unter der Annahme einer konstanten Risikoaversion – dementsprechend zeigen (MERTON, 1973)

$$\mu_t^M - r = \delta h_t^M$$

Die Aufnahme der dadurch gegebenen Risikoprämie in die Mean-Gleichung des GARCH(1,1) führt zum GARCH(1,1)-Mean-Modell:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \delta h_t + e_t, \quad e_t \sim N(0, h_t) \\ h_t &= \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 e_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Durch die Persistenz der Volatilitäten $h_t = E_{t-1} e_t^2$ ergibt sich damit ein variierender bedingter Erwartungswert $E_{t-1} y_t = \mu + \delta E_{t-1} e_t^2$ für die Returns y_t .

²Dieser Test kann nicht auf GARCH(1,1) erweitert werden. BOLLERSLEV (1986) zeigt, daß im Test auf GARCH(p,q)-Effekte, die Matrix $Z_0' Z_0$ singular wird, sobald $p > 0$ und $q > 0$ sind.

Beobachtungszeitraum	γ_0	γ_1	γ_2	μ	δ
Jul 62 – Dec 85	.00001 (2.38)	.835 (38.85)	.151 (7.17)	.0012 (1.49)	4.50 (1.94)
Jul 62 – Dec 85	.00001 (2.38)	.834 (38.64)	.151 (7.15)	—	4.56 (3.28)
Jul 62 – Dec 73	.00001 (2.18)	.778 (24.13)	.217 (6.12)	.0016 (1.85)	5.05 (1.78)
Jul 74 – Dec 85	.00002 (2.03)	.882 (23.67)	.084 (3.14)	.0008 (.04)	6.15 (1.32)

Tab. 2.1.: GARCH(1,1)-Mean-Schätzungen für den NYSE (CHOU, 1988)

Die Ergebnisse einer Studie von CHOU (1988) über die Risikoprämie der wöchentlichen Returns des NYSE-Index im Zeitraum von 1962 – 1985 sind in Tab. 2.1 dargestellt. Für den gesamten Zeitraum nimmt die Risikoprämie einen Wert von $\delta = 4.50$ an. Sie ist aber nur signifikant, wenn der konstante Term in der Mean-Gleichung entfernt wird. Beachtenswert ist weiters die hohe Persistenz der GARCH-Effekte.³

2.3 Faktor-ARCH

BOLLERSLEV, ENGLE & WOOLDRIDGE (1988) stellten eine multivariate Verallgemeinerung des GARCH-Modells vor, bei der – in dessen einfachster Form mit der Restriktion diagonalen Koeffizientenmatrizen – die bedingten Varianzen und Kovarianzen $h_{ij,t}$ der Matrix H_t zwischen den Returns $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})'$ der Assets univariat als GARCH-Prozesse modelliert werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \sim N(0, H_t) \\
 \text{vech}(H_t) &= \boldsymbol{\gamma}_0 + \Gamma_1 \text{vech}(H_{t-1}) + \Gamma_2 \text{vech}(\mathbf{e}_{t-1}\mathbf{e}_{t-1}') \\
 \text{oder} & \\
 h_{ij,t} &= \gamma_{0,ij} + \gamma_{1,ij} h_{ij,t-1} + \gamma_{2,ij} e_{i,t-1}e_{j,t-1}, \quad i, j = 1 \dots N,
 \end{aligned} \tag{7}$$

mit den Diagonalmatrizen Γ_1 und Γ_2 . $\text{vech}(X)$ bedeutet dabei den Vektor der übereinander gestellten Spalten des unteren Dreiecks der symmetrischen Matrix X .

Dieses Modell wirft neben der Vielzahl der zu schätzenden Parameter die

³vgl. auch FRENCH, SCHWERT & STAMBAUGH (1987) zur Anwendung von GARCH(1,1)-Mean-Modellen auf den S & P-Index.

Schwierigkeit auf, daß die bedingte Varianz-Kovarianz-Matrix nicht notwendigerweise immer positiv semidefinit ist. Eine zweite mögliche Restriktion, die die positive Semidefinitheit der bedingten Varianzen garantiert, ist aber das folgende Faktorenmodell

$$H_t = \sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i' \lambda_{i,t} + \Omega, \quad k < N, \quad (8)$$

wobei die Faktorladungen β_i linear unabhängige $(N \times 1)$ -Vektoren und Ω eine positiv semidefinite $(N \times N)$ -Matrix darstellt. Die $\lambda_{i,t}$ bezeichnen die bedingten Varianzen der einzelnen Faktoren.

ENGLE, NG & ROTHSCILD (1990) zeigen folgende Eigenschaften dieser Spezifikation:

- Wegen

$$\mathbf{x}' \left(\sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i' \right) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}' \beta_i \beta_i' \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k (\beta_i' \mathbf{x})' (\beta_i' \mathbf{x})$$

ist H_t positiv semidefinit.

- Portfolios mit konstanten bedingten Varianzen können jederzeit konstruiert werden.

Wegen $k < N$ gibt es einen Vektor α_0 mit $\alpha_0' (\beta_1, \dots, \beta_k) = \mathbf{0}$. Für die bedingte Varianz des Portfolios mit den Gewichten α_0 gilt dann $\alpha_0' H_t \alpha_0 = \alpha_0' \Omega \alpha_0$.

- Es können jederzeit faktorrepräsentierende Portfolios α_i konstruiert werden, deren bedingte Varianz $\theta_{i,t}$ den $\lambda_{i,t}$ entspricht, dh.

$$H_t = \sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i' \theta_{i,t} + \Omega^*$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der β_i existiert nämlich für alle $i = 1, \dots, K$ ein α_i mit $\alpha_i' \beta_j = 0$, $i \neq j$ und $\alpha_i' \beta_i = 1$. Das Portfolio mit den Gewichten α_i hat dann die bedingte Varianz

$$\theta_{i,t} = \alpha_i' H_t \alpha_i = \lambda_{i,t} + \alpha_i' \Omega \alpha_i$$

Die bedingte Varianz H_t kann daher wegen

$$H_t = \sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i' \theta_{i,t} + [\Omega - \sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i \alpha_i' \Omega \alpha_i] = \sum_{i=1}^k \beta_i \beta_i' \theta_{i,t} + \Omega^*$$

auch anhand der faktorrepräsentierenden Portfolios dargestellt werden.

Die Kovarianzstruktur (8) steht nun in engem Zusammenhang mit dem Faktorenmodell der Arbitrage Pricing Theorie (ROSS, 1976), wonach die Returns eines Assets durch mehrere Faktoren bestimmt sind.

$$\mathbf{y}_t = \mu_t + \sum_{i=1}^k \mathbf{g}_{i,t} f_{i,t} + \nu_t \quad (9)$$

mit $E_{t-1}(f_{i,t}) = E_{t-1}(f_{i,t}f_{j,t}) = 0$, $E_{t-1}(\nu_t) = \mathbf{0}$, $E_{t-1}(\nu_t\nu_t') = \Omega$.

Die obige Kovarianzstruktur kann in diesem Kontext als dynamisches Faktormodell interpretiert werden, wobei die Faktorladungen $\mathbf{g}_{i,t} = \beta_i$ konstant bleiben und die Faktoren $f_{i,t}$ ARCH-Prozessen mit der bedingten Varianz $\text{var}(f_{i,t}) = \lambda_{i,t}$ folgen.

In Analogie zum CAPM leiten die Autoren für den Vektor μ_t die Preisformel

$$\mu_t = \sum_{i=1}^k \beta_i \pi_{i,t}, \quad (10)$$

ab, wobei $\pi_{i,t}$ die Risikoprämie des faktorrepräsentierenden Portfolios α_i darstellt. Mit der Spezifikation $\pi_{i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}\theta_{i,t}$ und der zusätzlichen Voraussetzung orthogonaler β -Gewichte folgt aus (8) und (9) – wegen $E_{t-1}f_{i,t} = 0$ – für die Risikoprämien und Varianzen der Assets y_j , $j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} y_{j,t} &= \mu_{0,j} + \sum_{i=1}^k \beta_{i,j} \pi_{i,t} \\ h_{j,t} &= \gamma_{0,j} + \sum_{i=1}^k \beta_{i,j}^2 \theta_{i,t} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Bestimmung der Faktorenstruktur unter den obigen Annahmen ist ein offenes Problem. Bislang existiert kein Verfahren, anhand dessen die Faktoren, die β_i und die GARCH-Effekte in den einzelnen Faktoren simultan bestimmt werden könnten. Die Faktoren müssen daher vorweg mittels der unbedingten Verteilung der Assets extrahiert werden.⁴

Zur Schätzung der GARCH-Parameter und der β_i schlagen ENGLE, NG & ROTHSCILD (1990) ein zweistufiges Verfahren vor.

⁴Die Korrelationen zwischen den Assets sind i. a. nicht konstant. Wegen (8) und (9) gilt allgemein:

$$E_{t-1} \text{cov}(y_{r,t}, y_{s,t}) = \sum_{i=1}^k (\beta_{i,r} \beta_{i,s} \lambda_{i,t}) + \omega_{rs}$$

Das CAPM impliziert ein Ein-Faktor-Modell mit der Nullmatrix Ω . Daraus folgt dann die Konstanz der Korrelationen (vgl. SCHWERT & SEGUIN, 1990). Unter diesen Annahmen vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$E_{t-1} \text{cov}(y_{r,t}, y_{s,t}) = \beta_r \beta_s \lambda_t.$$

Wegen $E\Sigma_t = AEA_tA' = A\Lambda A = \Sigma$ liefert aber die Eigenwertzerlegung der empirischen Varianz-Kovarianzmatrix (Hauptkomponentenanalyse) auch bei Heteroskedastie konsistente Schätzungen der Faktorgewichte (vgl. KARYA, 1987)

1. Univariate Schätzung der GARCH-Effekte in den einzelnen Faktoren,
2. Univariate Schätzung der β_i mit den bedingten Varianzen und Risikoprämien der Faktoren als exogenen Variablen.

Das Schätzverfahren ist nur unter Restriktionen auf die wechselseitigen Abhängigkeiten der bedingten Varianzen $\theta_{i,t}$, $i = 1, \dots, k$ konsistent. Die einfachste Restriktion besteht in der Annahme, daß die einzelnen Faktoren univariaten GARCH-Prozessen folgen:⁵

$$\begin{aligned}\pi_{i,t} &= \mu_i + \delta_i \theta_{i,t} + u_{i,t} \\ \theta_{i,t} &= \gamma_{0,i} + \gamma_{1,i} \theta_{i,t-1} + \gamma_{2,i} u_{i,t-1}^2\end{aligned}\tag{12}$$

Zwei neuere Arbeiten von NG, ENGLE & ROTHSCILD (1991) und SCHWERT & SEGUIN (1990) beschäftigen sich mit der Frage, inwieweit sich die Schwankungen der bedingten Varianzen einzelner Aktien auf einen gemeinsamen Faktor zurückführen läßt.

NG, ENGLE & ROTHSCILD (1991) betrachteten die monatlichen Returns von zehn der Firmengröße nach geordneten Portfolios. Als Näherung für den Marktfaktor wurde das wertgewichtete Marktportfolio der untersuchten Aktien verwendet.

Für die zehn Portfolios wurde zunächst das Einfaktormodell (11) geschätzt. Die Ergebnisse unterstützen das CAPM: die konstanten Terme μ_i und $\gamma_{0,i}$ waren in allen Gleichungen insignifikant. Bemerkenswert ist weiters, daß Portfolios, die aus den Aktien kleinerer Firmen zusammengesetzt sind, ausgesprochen hohe β -Gewichte aufweisen.

Ausgehend von diesem Marktmodell bestimmten die Autoren mittels einer Hauptkomponentenanalyse weitere Faktoren, die orthogonal zu den durch das Einfaktormodell gegebenen β -Gewichten waren. Für zwei der restlichen neun Faktoren fanden sie GARCH-Effekte und gelangten zu der Schlußfolgerung, daß ein einziger dynamischer Faktor zur Beschreibung der bedingten Volatilitäten der Portfolios nicht ausreicht. Allerdings ist festzuhalten, daß die GARCH-Effekte in den weiteren Faktoren im Vergleich zum Marktportfolio eher gering ausfielen und daher ein Großteil der bedingten Volatilitäten durch den Marktfaktor erklärt wird.

SCHWERT & SEGUIN (1990) überprüften die Annahme konstanter Korrelationen zwischen fünf – wiederum der Firmengröße nach geordneten – Portfolios. Die *monatlichen* Kovarianzen und Varianzen $s_{ij,t}$ der Portfolios und die Varianz $s_{M,t}$ wurden aus den täglichen Returns geschätzt. Anhand von Weighted Least Squares-Schätzern untersuchten die Autoren, inwieweit sich

⁵sog. univariate Portfoliorepräsentation; für weitere Spezifikationen siehe ENGLE, NG & ROTHSCILD, 1990

die (monatlichen) Kovarianzen $s_{ij,t}$ durch die bedingte Varianz des Marktportfolios $\hat{s}_{M,t}$ erklären lassen. Die bedingte Varianz des Marktportfolios wurde durch

$$\begin{aligned}\hat{s}_{M,t} &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^{12} \gamma_i s_{M,t-i} + u_t \\ |\hat{u}_t| &= \xi_0 + \xi_1 \hat{s}_{M,t} + e_t\end{aligned}$$

bestimmt. Die bedingten Kovarianzen ließen sich nun durch die WLS-Schätzung

$$\begin{aligned}s_{ij,t} &= \omega_{i,j} + \beta_{ij} \hat{s}_{M,t} + u_{ij,t} \\ \hat{u}_{ij,t}^2 &= \xi_{0,ij} + \xi_{1,ij} \hat{s}_{M,t}^2\end{aligned}$$

gut vorhersagen. Der Anteil der erklärten Varianz lag bei den meisten Gleichungen um $R^2 \approx .25$. Der Test des CAPM ($H_0 : \omega_{ij} = 0$)⁶ führte nur beim Portfolio der kleinen Firmen zu Ablehnungen der Nullhypothese. Weiters führte ein multivariates GARCH(1,1) der Form (7) unter der Restriktion konstanter Korrelationen $h_{ij,t} = \rho_{ij} h_{i,t} h_{j,t}$ im Vergleich mit univariaten GARCH(1,1)-Schätzern zu befriedigenden Ergebnissen⁷.

Eine Arbeit über ARCH-Effekte am Wiener Aktienmarkt stammt von GEYER & HAUER (1991). Die Autoren betrachteten 18 Aktien im Zeitraum von 1986 – 1988. Sie verglichen die durch das einfache Regressionsmodell $y_t = \alpha + \beta Y_t^M + e_t$ geschätzten β -Gewichte mit den durch GARCH(1,1)-Modelle der Form (2) gegebenen Werten, und stellten fest, daß die einfache Regression die β -Gewichte durchwegs überschätzte. Auf die Frage der Adäquatheit des 1-Faktor-Modells wird nicht eingegangen.

⁶ vgl. Fußnote 4

⁷ vgl. zu einem Test des CAPM mit ähnlicher Methodik auch NG(1991)

3 Faktor-ARCH-Modelle der Wiener Börse

Für die vorliegende Studie wurden die täglichen Returns $y_t = \ln(p_t/p_{t-1})$, von 12 Wiener Aktien vom 2. Jänner 1987 bis 31. August 1989 herangezogen. Dieser Zeitraum entspricht in etwa der Periode des 'Höhenflugs' der Wiener Börse. Die Returns wurden anhand der Tagesschlußkurse p_t bestimmt. Falls im betrachteten Zeitraum kursrelevante Kapitalmaßnahmen vorgenommen worden waren, wurden die Werte nach den Kursberichtigungsfaktoren der Wiener Börsenkammer korrigiert. Dividendenzahlungen wurden nicht berücksichtigt.

Bei der Auswahl der Aktien wurde eine breite Streuung über die Branchen angestrebt. Abgesehen von der 'Montana' sind alle Aktien im CA-Index⁸ enthalten. Darüber hinaus ist aus jedem der acht Branchenindizes der CA mindestens eine Aktie im Portfolio der untersuchten Aktien.

Tabelle 3.1 enthält einige Verteilungskennzahlen für die Returns $\ln(p_t/p_{t-1})$ des WBK und der Aktien.

	Returns						Returns ²	
	$X \cdot 10^4$	Stddv	Skew	Kurto	ρ_1	Q12	ρ_1	QS12
WBK	8.391	.0071	-.378	10.83	.536	319.03	.533	643.12
CA Vz	9.591	.0120	1.705	18.66	.288	75.67	.492	291.52
Constantia	4.493	.0134	.025	6.10	.264	62.22	.431	385.83
Interunfall	6.343	.0107	1.139	11.30	.384	62.22	.431	385.83
Lenzing	7.908	.0176	-.122	4.45	.198	42.94	.451	961.71
Leykam	11.187	.0166	-.207	4.96	.344	86.62	.489	979.61
Montana	19.383	.0151	.899	7.70	.398	196.70	.416	430.66
Reininghaus	9.984	.0152	.595	9.10	.175	30.27	.493	415.36
Semperit	2.796	.0216	.169	4.01	.150	45.87	.538	961.88
Steyr	0.965	.0225	-.066	6.50	.190	48.52	.423	682.66
Universale	37.467	.0212	.570	4.85	.394	139.38	.507	697.03
Veitscher	-1.269	.0178	.129	6.36	.121	26.98	.461	615.97
Wienerberger	19.940	.0193	.012	6.05	.258	81.90	.472	530.72

Tab. 3.1: Unbedingte Verteilung der Returns⁹

Die hohe Kurtosis des WBK-Index entspricht weitgehend den bekannten Werten aus den in Abschnitt 2 zitierten Studien. Im einzelnen betrachtet sind die hohen Unterschiede in der Schiefe und Kurtosis der Returns augenfällig. Insbesondere die CA Vz und die Interunfall weisen in beiden

⁸vgl. Wiener Börse 1990, Creditanstalt-Bankverein, 1991

Kennzahlen extrem hohe Werte auf. Die Kurtosis der meisten Aktien ist jedoch weitaus geringer als die des Index.

Alle Aktien besitzen signifikante Autokorrelationen erster Ordnung. Bei vier der Aktien liegt diese sogar über 0.3. Diese hohen Autokorrelationen der täglichen Returns werden auch von FRENCH, SCHWERT & STAMBAUGH (1987) für den S&P-Index¹⁰ und AKGIRAY (1989) für den NYSE-Index¹¹ berichtet. Die ausgesprochen hohen Ljung-Box-Statistiken¹² der u_t^2 zeigen starke ARCH-Effekte an.

3.1 Hauptkomponentenanalyse

Die Hauptkomponentenanalyse¹³ (vgl. Tab. 3.2) der Returns liefert einen dominanten Marktfaktor, der 29,6 % der Gesamtvarianz erklärt. Abgesehen von Steyr und Universale, sekundär Semperit und Interunfall weisen alle Aktien hohe Ladungszahlen auf diesem Faktor auf.

Linearkombinationen dieser vier Aktien formen im wesentlichen die Faktoren 2 bis 4. Auf Faktor 2 laden primär die Aktien Steyr und Universale, beide mit positivem Vorzeichen.

Die weiteren Faktoren bilden Restvarianzen einzelner Aktien oder Differenzen zwischen zwei oder mehreren Aktien ab. Es ist festzuhalten, daß der kleinste Eigenwert mit $\lambda_{12} = .553$ relativ groß ist. Das bedeutet, daß jede Aktie eine eigenständige, durch die restlichen Aktien nicht erklärte Varianz besitzt und daß also keine Multikollinearität der Aktien vorliegt.

Kennzahlen der unbedingten Verteilungen der Faktoren enthält Tabelle 3.3. Faktor 1 weist eine höhere Kurtosis und Autokorrelation erster Ordnung auf als die weiteren Faktoren. Die Korrelation mit dem WBK-Index beträgt $r = .91$. Die Autokorrelation der $f_{i,t}^2$ und die QS12-Statistik weist auch bei den weiteren Faktoren auf ARCH-Effekte hin. Diese sind offensichtlich nicht unbedingt beim Faktor 1 am stärksten ausgeprägt.

¹⁰ $\rho_1 = .62$ (1953 - 1984)

¹¹ $\rho_1 = .23$ (1962 - 1985)

¹² Q12 und QS12 sind nach χ_{12}^2 verteilt. Die Signifikanzgrenzen liegen bei $\alpha_{.05} = 21.02$ und $\alpha_{.01} = 26.21$.

¹³ Die Datenreihen x_i seien mit $\bar{x}_i = 0$ und $\text{var}(x_i) = 1$ standardisiert, $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Anhand der Eigenwertzerlegung der empirischen Korrelationsmatrix

$$X'X = A' \Lambda A' = A \Lambda^{1/2} (A \Lambda^{1/2})'$$

transformiert das Verfahren die Ausgangsdaten X in paarweise orthogonale Faktoren $F = X A \Lambda^{1/2}$, die sukzessive maximale gemeinsame Varianz der x_i erklären. Die Hauptkomponentenanalyse ist in diesem Sinne kein statistisches Verfahren. Sie führt lediglich eine lineare Transformation der Ausgangsdaten durch. Für eine ausführliche Darstellung siehe z.B. FAHRMEIR & HAMERLE (1983).

	F a k t o r e n					
	1	2	3	4	5	6
Eigenwert	3.548	1.062	.943	.927	.889	.751
Varianzanteil	29.6	8.9	7.9	7.7	7.4	6.3
CA Vz	.617	-.036	-.220	.105	-.081	-.022
Constantia	.628	-.135	-.061	.275	-.271	.049
Interunfall	.459	.130	-.530	-.329	-.414	.129
Lenzing	.678	.039	.104	-.122	-.072	-.405
Leykam	.654	-.120	.043	.033	-.149	-.257
Montana	.554	-.132	-.208	-.262	.212	.260
Reininghaus	.522	-.370	.219	.263	.158	.439
Semperit	.429	.298	-.228	-.138	.691	-.165
Steyr	.240	.750	-.084	.509	-.028	.217
Universale	.345	.437	.612	-.396	-.188	.111
Veitscher	.597	-.084	.187	.310	.072	-.301
Wienerberger	.613	-.068	.189	-.211	.143	.249

Tab. 3.2: Hauptkomponentenanalyse

3.2 GARCH-Effekte im WBK-Index

Die folgenden GARCH(1,1)-Modelle wurden mit dem Programm EZARCH (NG, 1991a) geschätzt. Das Programm erlaubt u. a. die Aufnahme zusätzlicher exogener Variablen in das Modell. Diese Option ermöglicht es, die durch die Autokorrelation der Returns y_t gegebene Misspezifikation der GARCH(1,1)-Modelle zu beseitigen, indem y_{t-1} in die Mean-Gleichung aufgenommen wird. Wie aus Tab. 3.4 hervorgeht, verändert das die Parameterschätzungen für den WBK-Index nicht unwesentlich. Die Schätzung mit

Faktor	Skew	Kurto	Returns		Returns ²	
			ρ_1	Q12	ρ_1	QS12
1	-.378	9.24	.469	225.36	.497	636.56
2	.205	4.28	.202	40.62	.365	807.37
3	-.441	4.70	.295	91.85	.494	599.33
4	-.497	4.73	.216	53.39	.387	514.74
5	-.220	4.08	.195	41.30	.395	646.49
6	.142	3.48	.113	19.04	.452	862.03

Tab. 3.3: Verteilungskennzahlen und Autokorrelation der Faktoren

dem verzögerten Term in der Mean-Gleichung liefert einen niedrigeren Koeffizienten für e_{t-1}^2 und insgesamt eine geringere Persistenz der bedingten Varianz.

Besonders kraß ändert sich die Schätzung der Risikoprämie. Sie ist zwar in beiden Fällen nicht signifikant. Während sie aber im einfachen Modell einigermaßen den aus der Literatur bekannten Werten entspricht (vgl. Tab. 2.1), wird sie im erweiterten Modell sogar leicht negativ.¹⁴ Damit scheidet der WBK-Index als Basis für das Faktor-ARCH-Modell mit Risikoprämie (11) aus.

GARCH	$y_t = .0004311 + e_t$ (2.34)			
	$h_t = .0000043 + .4150 h_{t-1} + .5544 e_{t-1}^2$ (6.72) (9.70) (8.60)			
GARCH-M	$y_t = .0002754 + 5.7834 h_t + e_t$ (1.31) (1.05)			
	$h_t = .0000043 + .4010 h_{t-1} + .5637 e_{t-1}^2$ (6.66) (9.39) (8.39)			
GARCH-AR(1)	$y_t = .0002681 + .47768 y_{t-1} + e_t$ (1.60) (13.95)			
	$h_t = .0000030 + .5531 h_{t-1} + .3857 e_{t-1}^2$ (5.19) (10.81) (8.02)			
GARCH-M-AR(1)	$y_t = .0002855 - 1.0703 h_t + .4793 y_{t-1} + e_t$ (1.31) (-.13) (13.91)			
	$h_t = .0000030 + .5517 h_{t-1} + .3285 e_{t-1}^2$ (5.04) (10.63) (7.96)			

Tab. 3.4: GARCH-Modelle für den WBK-Index

Tabelle 3.5 enthält die Diagnostik des Modells. Der Lagrange-Multiplier-Test $LM_{e_{t-2}^2}$ auf die Aufnahme von e_{t-2}^2 in die Residuengleichung¹⁵ und die Ljung-Box-Statistik QS12 der normalisierten Residuen $e_t^0 = e_t/\sqrt{h_t}$ überprüfen die Existenz von ARCH-Effekten in den Residuen.

Der Likelihood-Ratio-Test LR_c vergleicht das Modell mit dem entsprechenden Modell mit konstanter Varianz:

$$y_t = \mu + e_t, e_t \sim N(0, \sigma^2), \text{ bzw.}$$

$$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + e_t, e_t \sim N(0, \sigma^2)$$

¹⁴auch NG, ENGLE & ROTHSCILD(1991) erhalten keinen signifikanten Koeffizienten für die Risikoprämie des Marktfaktors ($\delta = .196, t = 1.58$). Das hindert sie aber nicht daran, die geschätzte Prämie als exogene Variable für die nachfolgende Faktor-ARCH-Schätzung der einzelnen Aktien zu verwenden.

¹⁵ $LM_{e_{t-2}^2}$ ist χ_1^2 -verteilt (vgl. Abs. 2.1). Die kritischen Werte betragen $\alpha_{.05} = 3.84$ und $\alpha_{.01} = 5.02$

	ln L	$LM_{e^2_{t-2}}$	LR_c	Residuen			
				Skew	Kurto	Q12	QS12
GARCH	2519.5	1.17	391.8	-.392	4.82	212.81	5.51
GARCH-AR(1)	2580.0	1.94	296.6	-.392	4.77	34.94	8.28
GARCH-M	2523.7	.99	393.1	-.390	4.83	213.19	5.53
GARCH-M-AR(1)	2580.0	1.97	296.6	-.399	4.76	34.68	8.43

Tab. 3.5: GARCH-Modelle für den WBK-Index

Die Ljung-Box-Statistik Q12 der normalisierten Residuen zeigt auch noch in der GARCH(1,1)-AR(1)-Schätzung signifikante Autokorrelationen an. Weder der autoregressive Term zweiter Ordnung noch ein Moving-Average Term in der Mean-Gleichung sind allerdings signifikant bzw. führen zu einer Reduktion von Q12. ARCH-Effekte werden durch das GARCH(1,1)-Modell offensichtlich ausreichend erfaßt.

3.3 GARCH-Modelle der Faktoren

In Tab. 3.6 sind die Schätzungen von GARCH(1,1)-M-Modellen der ersten vier Faktoren der Hauptkomponentenanalyse dargestellt.¹⁶

Bei allen Faktoren liegen signifikante ARCH-Effekte vor. Die Ergebnisse sind aber für die einzelnen Faktoren recht unterschiedlich.

Die Schätzung der Varianzgleichung des Faktors 1 liegt erwartungsgemäß nahe bei den Werten des WBK-Index. Die Risikoprämie ist nur bei Faktor 2 signifikant. Der t-Wert der Risikoprämie des Faktors 1 ist aber wesentlich höher als beim WBK-Index, und – folgt man der Arbeit von NG, ENGLE & ROTHSCHILD (1991), möglicherweise ausreichend für ein nachfolgendes Faktor-ARCH. Auf jeden Fall ist die Zuverlässigkeit der Schätzung, gerade im Hinblick auf die Ergebnisse für den WBK-Index fraglich.

Die Tests und die Analyse der Residuen liefern wiederum keine Hinweise auf eine Misspezifikation der Gleichungen. Die Abbildungen 3.1 bis 3.4 zeigen die Returns und Volatilitätschätzungen der ersten beiden Faktoren.

¹⁶Die Aufnahme der Risikoprämie in das Modell hat nahezu keinen Einfluß auf die Schätzung der Parameter in der Varianzgleichung. Die GARCH(1,1)-Schätzungen werden deshalb nicht dargestellt.

Faktor 1	$y_t =$	-.062998 (-1.63)	+	.0754 h_t (1.15)	+	.4278 y_{t-1} (10.08)	+	e_t
	$h_t =$	-.0813059 (5.39)	+	.5841 h_{t-1} (11.71)	+	.3033 e_{t-1}^2 (6.32)		
Faktor 2	$y_t =$	-.30068 (-2.61)	+	.3345 h_t (2.53)	+	.1835 y_{t-1} (4.63)	+	e_t
	$h_t =$.05209 (2.78)	+	.8691 h_{t-1} (26.04)	+	.0738 e_{t-1}^2 (3.41)		
Faktor 3	$y_t =$	-.011463 (-.13)	+	.0223 h_t (.21)	+	.2200 y_{t-1} (5.18)	+	e_t
	$h_t =$.19782 (4.86)	+	.5708 h_{t-1} (8.19)	+	.2131 e_{t-1}^2 (5.27)		
Faktor 4	$y_t =$.02266 (.20)	-	.0269 h_t (-.22)	+	.1851 y_{t-1} (4.72)	+	e_t
	$h_t =$.07178 (2.10)	+	.8140 h_{t-1} (13.92)	+	.1151 e_{t-1}^2 (3.41)		

Tab. 3.6: GARCH(1,1)-M-Modelle der Faktoren

	Residuen					
	$LM_{e_{t-2}^2}$	LR_c	Skew	Kurto	Q12	QS12
Faktor 1	.79	255.6	-.711	8.08	30.47	2.59
Faktor 2	1.01	61.2	.031	3.63	17.90	4.09
Faktor 3	2.36	44.8	-.338	4.82	20.59	6.38
Faktor 4	5.88	45.6	-.273	3.33	17.86	12.77

Tab. 3.7: GARCH(1,1)-M-Modelle der Faktoren

3.4 Ein Faktormodell der bedingten Volatilitäten

Inwieweit können nun die Volatilitäten der Aktien durch den Marktfaktor beschrieben werden?

Bevor auf die Faktor-ARCH-Schätzungen eingegangen wird, sollen die univariaten GARCH(1,1)-Schätzungen der Aktien dargestellt werden (Tab. 3.8) Es wurde wiederum ein verzögerter Term in die Mean-Gleichung aufgenommen.¹⁷

Die Parameter der Varianzgleichungen sind für die einzelnen Aktien recht

¹⁷Für Lenzing und Leykam konnte bei Inklusion des verzögerten Terms keine Konvergenz erreicht werden. Deshalb wurden für diese beiden Aktien durchgehend die Schätzgleichung $y_t = \mu + e_t$ verwendet.

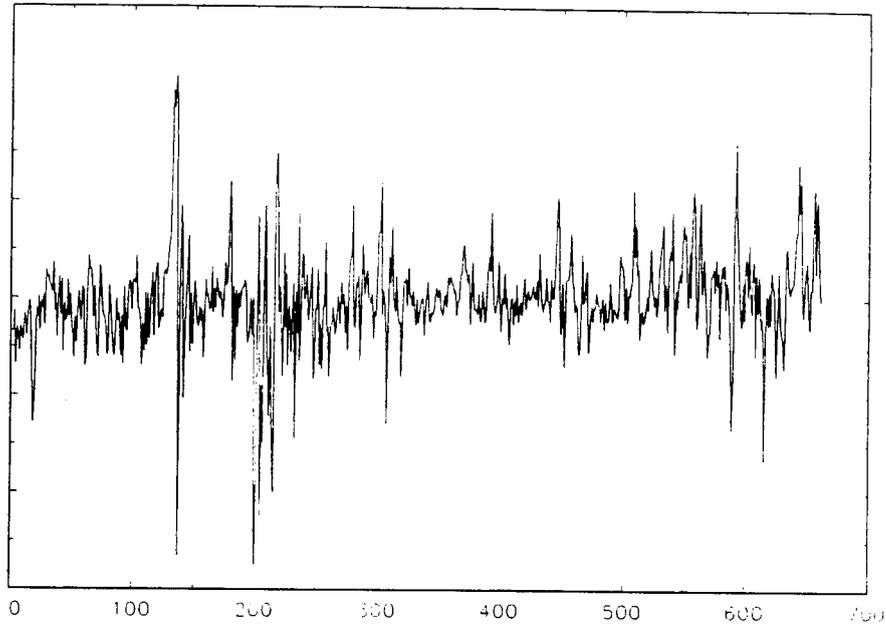


Abb. 3.1: Returns des Faktors 1

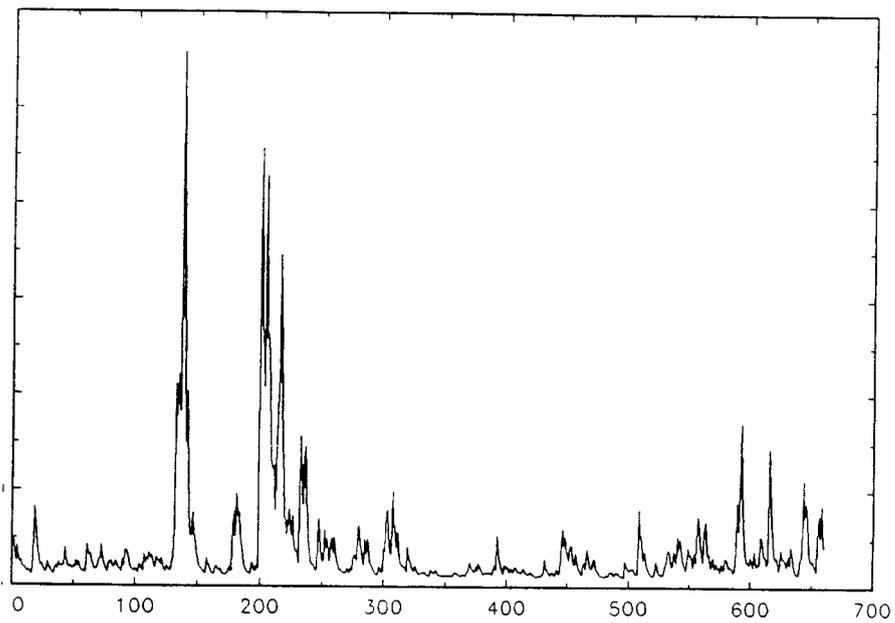


Abb. 3.2: Volatilität des Faktors 1

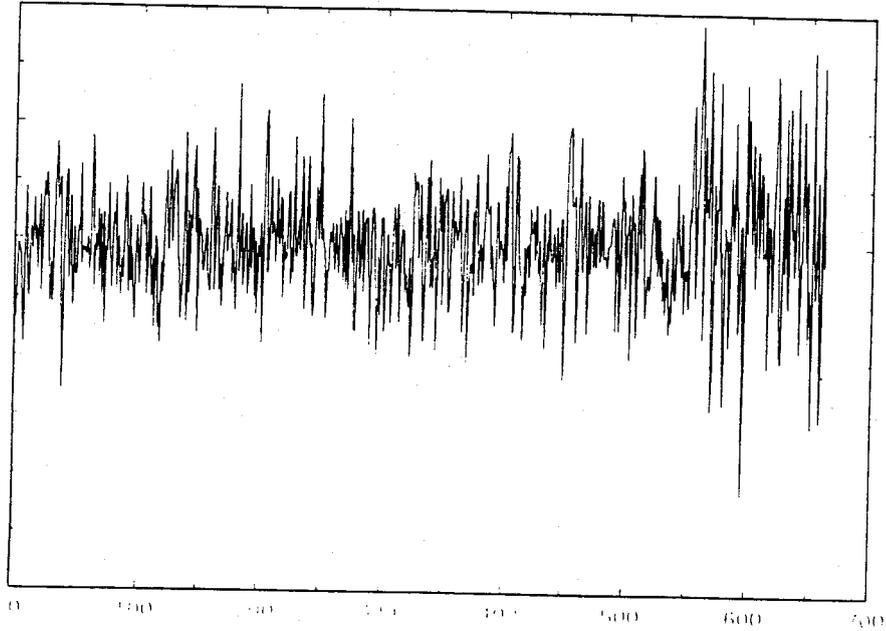


Abb. 3.3: Returns des Faktors 2

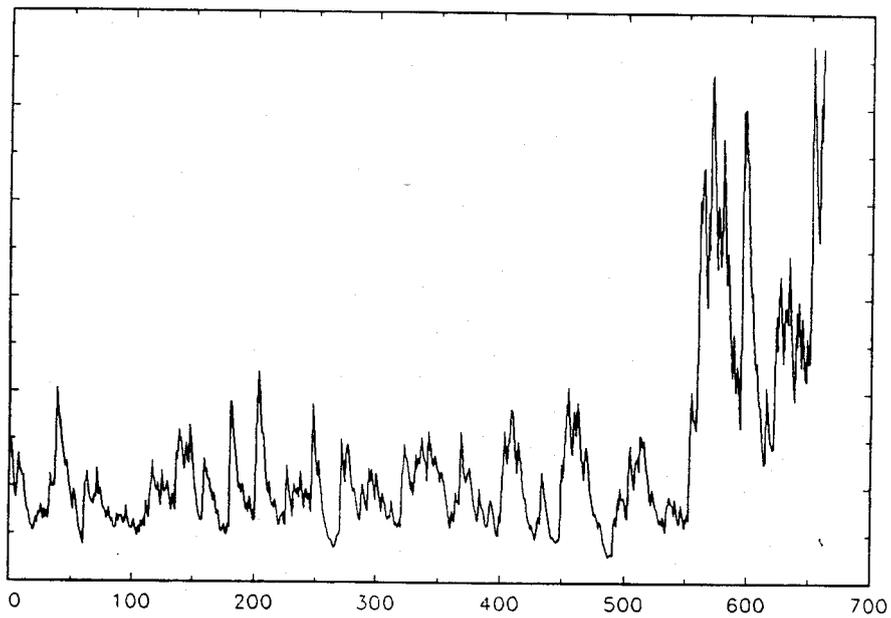


Abb. 3.4: Volatilität des Faktors 2

CA Vz	$y_t = .0004729 + .1218 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000039 + .6989 h_{t-1} + .3283 e_{t-1}^2$
	(2.37) (2.63) (9.05) (56.37) (18.66)
Constantia	$y_t = -.0000644 + .2145 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000515 + .4260 h_{t-1} + .2548 e_{t-1}^2$
	(-.131) (4.488) (7.03) (6.01) (4.53)
Interunfall	$y_t = -.0003793 + .2149 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000076 + .5450 h_{t-1} + .6726 e_{t-1}^2$
	(-2.71) (5.37) (14.87) (41.43) (16.55)
Lenzing	$y_t = .0006419 + e_t$
	$h_t = .0000470 + .5105 h_{t-1} + .3727 e_{t-1}^2$
	(1.13) (7.13) (30.63) (14.37)
Leykam	$y_t = .0008311 + e_t$
	$h_t = .0000122 + .7826 h_{t-1} + .1759 e_{t-1}^2$
	(1.54) (6.50) (40.23) (7.81)
Montana	$y_t = .0001599 + .3913 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000434 + .5598 h_{t-1} + .3534 e_{t-1}^2$
	(.30) (9.39) (8.36) (13.67) (7.24)
Reininghaus	$y_t = -.0002554 - .0302 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000076 + .7057 h_{t-1} + .3225 e_{t-1}^2$
	(-.73) (-.71) (6.62) (41.30) (9.97)
Semperit	$y_t = -.0006569 + .0328 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0001329 + .3177 h_{t-1} + .4176 e_{t-1}^2$
	(-.98) (.69) (6.89) (5.13) (6.38)
Steyr	$y_t = -.0013872 + .0789 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000358 + .6217 h_{t-1} + .3427 e_{t-1}^2$
	(-2.30) (1.84) (6.71) (24.31) (8.43)
Universale	$y_t = .0014118 + .2772 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000528 + .5961 h_{t-1} + .2901 e_{t-1}^2$
	(2.51) (7.07) (5.79) (12.74) (6.60)
Veitscher	$y_t = -.0001393 + .1410 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000626 + .4343 h_{t-1} + .3702 e_{t-1}^2$
	(-.29) (3.20) (8.30) (8.54) (6.13)
Wienerberger	$y_t = .0008106 + .2046 y_{t-1} + e_t$
	$h_t = .0000517 + .5236 h_{t-1} + .3531 e_{t-1}^2$
	(1.39) (5.07) (8.14) (13.14) (7.05)

Tab. 3.8: Univariate GARCH(1,1)-Modelle

	ln L	LM $_{e^2_{t-2}}$	LR $_c$	Residuen			
				Skew	Kurto	Q12	QS12
CA Vz	2227.4	11.33	435.6	.835	9.56	15.05	11.50
Constantia	1965.4	1.72	65.7	-.024	6.80	16.65	6.62
Interunfall	2195.8	2.96	173.3	.427	18.44	18.68	5.07
Lenzing	1791.3	17.51	120.4	-.133	4.98	42.14	7.00
Leykam	1849.7	3.76	161.4	-.147	6.99	78.88	10.82
Montana	1865.8	1.06	135.6	1.190	11.76	23.51	12.01
Reininghaus	1967.7	2.29	272.3	-.1478	6.99	8.65	8.60
Semperit	1650.1	.88	97.3	.055	3.78	29.52	13.27
Steyr	1673.8	8.65	191.2	-3.78	5.04	17.45	9.94
Universale	1704.5	.66	86.7	.197	4.70	23.46	6.29
Veitscher	1806.6	2.18	160.3	-.046	6.06	21.63	10.83
Wienerberger	1751.3	2.90	121.8	-.493	11.25	17.55	1.94

Tab. 3.9: Univariate GARCH(1,1)-Modelle

unterschiedlich. Die Summe der beiden Parameter $\gamma_1 + \gamma_2$ als Maß der Persistenz der Volatilitäten (vgl. Abs. 2.1) liegt zwischen .68 (Constantia) und 1.22 (Interunfall). Für drei Aktien¹⁸ wird die Persistenz größer als 1 geschätzt (siehe dazu Fußnote 1). Tab. 3.9 zeigt, daß in den meisten Fällen keine Hinweise auf eine Misspezifikation vorliegen. Bei drei Aktien¹⁹ weist der LM $_{e^2_{t-2}}$ -Test allerdings auf zusätzliche ARCH-Effekte in den Residuen hin. Die Kurtosis der normalisierten Residuen ist überraschenderweise einige Male höher als diejenige der unbedingten Verteilung der Returns.

Für die folgenden Schätzungen mehrerer Faktor-ARCH-Varianten wurden die durch das GARCH(1,1)-AR(1)-Modell des Faktors 1 geschätzten Volatilitäten h_t^{F1} als exogene Variable in die Varianzgleichungen der einzelnen Aktien aufgenommen. Die Verwendung des Faktors 1 hat gegenüber dem WBK-Index den Vorteil, daß eventuell weitere Faktoren in das Modell einbezogen werden können. Da die Varianz der Faktoren grundsätzlich unbestimmt bzw. mit $\sigma^2 = 1$ festgelegt ist, wurden die Koeffizienten standardisiert.

Die Diagnostik des einfachen Faktormodells

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_i + \rho_i y_{i,t-1} + e_{i,t} \\ h_{i,t} &= \gamma_{0,i} + \beta_i^2 h_t^{F1} \end{aligned} \quad (13)$$

zeigt, daß diese Spezifikation, auch wenn der LR-Test hochsignifikante Abweichungen von der Nullhypothese $h_{i,t} = \gamma_{i,0}$ anzeigt, nicht dazu geeignet ist,

¹⁸ Interunfall, Semperit, Reininghaus

¹⁹ CA, Lenzing, Steyr

	ln L	LR _c	LM _{e_{t-1}²}	Residuen			
				Skew	Kurto	Q12	QS12
CA Vz	2095.2	227.2	4.88	1.451	15.82	15.12	90.61
Constantia	1947.7	77.4	10.32	.151	5.82	12.31	43.36
Interunfall	2141.8	65.2	11.25	1.042	11.22	9.23	89.24
Lenzing	1780.4	104.9	13.25	-.263	4.49	37.75	23.76
Leykam	1790.4	48.9	21.74	-.088	5.20	83.07	146.87
Montana	1841.7	87.4	16.30	.975	9.85	14.86	26.06
Reininghaus	1884.9	106.6	10.74	.526	11.28	12.51	77.69
Semperit	1616.9	30.8	8.76	.139	4.28	25.25	113.31
Steyr	1578.7	.8	5.67	-.126	6.74	26.55	158.34
Universale	1664.7	7.2	11.80	.368	4.34	25.24	85.06
Veitscher	1769.9	87.0	16.97	-.039	5.29	28.36	96.40
Wienerberger	1712.1	43.4	14.39	-.167	7.78	20.09	26.93

Tab. 3.10: Faktor-ARCH-Modell (13)

die ARCH-Effekte in den einzelnen Aktien ausreichend abzubilden. Bei allen Aktien sind noch hohe Autokorrelationen in den Quadraten der Residuen vorhanden. Darüber hinaus liegt die Loglikelihood beträchtlich unter den Werten der univariaten Schätzungen (vgl. Tab. 3.9 und 3.10). Die Korrelationen der durch (13) gegebenen Schätzungen der Volatilitäten $\widehat{h}_{i,t}$ mit den univariaten Schätzungen liegen zwischen .03 und .67.

Die nächstliegende Erweiterung der obigen Gleichung ist die Aufnahme des Terms $e_{i,t-1}^2$ in die Varianzgleichung. Damit wird die Annahme einer stabilen Beziehung zwischen der Volatilität des Faktors und der Aktie aufgegeben. Stattdessen enthält das Modell nun aktienspezifische ARCH(1)-Effekte. Die Frage ist hier also, ob die bedingte Volatilität einer Aktie durch die Volatilität des Marktfaktors und den aktienspezifischen Schock $e_{i,t-1}$ hinreichend beschrieben werden kann, bzw. ob die aktienspezifische Volatilität $h_{i,t-1}$ im univariaten GARCH(1,1)-Modell ohne Informationsverlust durch die bedingte Volatilität des Faktors h_t^{F1} ersetzt werden kann. Aktienspezifische Schocks haben damit nur einen kurzzeitige Effekte auf die Volatilität. "long-term-memory"

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_i + \rho_i y_{i,t-1} + e_{i,t} \\ h_{i,t} &= \gamma_{0,i} + \beta_i^2 h_t^{F1} + \gamma_{2,t} e_{i,t-1}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Dieses Modell scheint ganz gut geeignet zu sein, die ARCH-Effekte in den Aktien zu beschreiben. Bei der Hälfte der Aktien sind zwar ARCH-Effekte nicht vollständig erfaßt: Der LM-Test auf die Aufnahme von $e_{i,t-2}^2$ lehnt die Nullhypothese in 5 von 12 Fällen ab. Weiters ist die Ljung-Box-Statistik QS12 in 6 Fällen signifikant. Bei drei dieser Aktien war das aber auch bei

CA Vz	$y_t =$.00927 (.48)	+	.2142 y_{t-1} (9.89)	+	e_t
	$h_t =$.0159 (.94)	+	.5471 h_t^{F1} (11.39)	+	.7633 e_{t-1}^2 (11.65)
Constantia	$y_t =$.00237 (.07)	+	.2068 y_{t-1} (4.56)	+	e_t
	$h_t =$.4188 (10.24)	+	.2961 h_t^{F1} (3.82)	+	.2943 e_{t-1}^2 (4.37)
Interunfall	$y_t =$	-.02927 (-3.82)	+	.0878 y_{t-1} (7.60)	+	e_t
	$h_t =$.0100 (.60)	+	.4971 h_t^{F1} (12.66)	+	1.5713 e_{t-1}^2 (19.21)
Lenzing	$y_t =$.0191 (.64)	+	e_t		
	$h_t =$.1076 (1.91)	+	.8544 h_t^{F1} (6.34)	+	.3977 e_{t-1}^2 (5.52)
Leykam	$y_t =$.0173 (.64)	+	e_t		
	$h_t =$.3795 (9.41)	+	.3339 h_t^{F1} (3.60)	+	.4121 e_{t-1}^2 (5.24)
Montana	$y_t =$	-.01687 (-.74)	+	.3037 y_{t-1} (11.82)	+	e_t
	$h_t =$.1694 (10.98)	+	.3143 h_t^{F1} (9.05)	+	.7834 e_{t-1}^2 (11.22)
Reininghaus	$y_t =$.0027 (.11)	-	.0345 y_{t-1} (-.81)	+	e_t
	$h_t =$.0780 (2.68)	+	.6927 h_t^{F1} (8.01)	+	.434 e_{t-1}^2 (8.11)
Semperit	$y_t =$	-.0046 (-1.40)	+	.0607 y_{t-1} (1.51)	+	e_t
	$h_t =$.3687 (5.71)	+	.3480 h_t^{F1} (2.73)	+	.3687 e_{t-1}^2 (5.65)
Steyr	$y_t =$	-.0220 (-.73)	-	.0271 y_{t-1} (-.838)	+	e_t
	$h_t =$.4805 (16.13)	-	.0215 h_t^{F1} (-.87)	+	.6591 e_{t-1}^2 (7.91)
Universale	$y_t =$.0724 (2.43)	+	.2881 y_{t-1} (9.93)	+	e_t
	$h_t =$.4371 (10.32)	+	.1279 h_t^{F1} (2.20)	+	.4193 e_{t-1}^2 (5.78)
Veitscher	$y_t =$	-.0378 (-1.27)	+	.1275 y_{t-1} (3.03)	+	e_t
	$h_t =$.3358 (8.43)	+	.3973 h_t^{F1} (3.91)	+	.3626 e_{t-1}^2 (4.80)
Wienerberger	$y_t =$.0390 (1.34)	+	.1963 y_{t-1} (5.02)	+	e_t
	$h_t =$.3050 (8.53)	+	.2792 h_t^{F1} (3.19)	+	.4628 e_{t-1}^2 (6.69)

Tab. 3.11: Erweitertes Faktor-ARCH-Modell (14)

	ln L	LR _c	LM _{e²_{t-2}}	Residuen			
				Skew	Kurto	Q12	QS12
CA Vz	2170.1	321.0	7.84	.834	13.76	7.81	10.97
Constantia	1970.3	75.6	.65	-.0663	6.57	15.53	5.70
Interunfall	2210.9	203.4	2.56	.472	12.23	23.46	30.01
Lenzing	1798.9	141.7	.69	-.313	4.64	32.49	8.23
Leykam	1831.9	131.9	3.66	-.303	6.30	59.47	36.10
Montana	1877.7	159.4	6.45	.988	10.80	22.89	24.35
Reininghaus	1945.1	227.0	1.41	-.427	8.08	10.28	13.15
Semperit	1647.8	92.6	2.04	-.155	4.37	31.16	21.81
Steyr	1641.4	126.2	6.59	-.220	5.41	36.40	63.63
Universale	1698.1	74.0	8.72	.352	4.66	26.53	23.57
Veitscher	1808.2	163.4	4.41	-.072	5.64	23.14	15.39
Wienerberger	1751.1	121.4	1.05	-.528	10.30	18.32	1.79

Tab. 3.12: Erweitertes Faktor-ARCH-Modell (14)

der univariaten Schätzung der Fall. Die Korrelationen zwischen den durch das univariate und das Faktormodell (14) geschätzten Volatilitäten liegen zwischen .76 und .90 (vgl. Tab. 3.12). In den Abbildungen 3.5 bis 3.8 sind die univariaten und Faktorschätzungen einander gegenübergestellt. Sie veranschaulichen die gute Übereinstimmung zwischen den beiden Modellen.

Ein Vergleich der beiden Modelle mittels eines Likelihood-Ratio-Tests ist nicht möglich, da kein Modell das andere umfaßt. Für die Bewertung derartiger 'non-nested'-Modelle können aber Informationskriterien (vgl. AKAIKE, 1981) herangezogen werden. Da die Anzahl der Parameter in (14) und den univariaten Schätzungen identisch ist, stimmen die verschiedenen aus der Literatur bekannten Kriterien überein, und die Werte der Loglikelihood-funktionen können direkt miteinander verglichen werden.

Bei fünf Aktien ist nun die Likelihood des Faktor-ARCH-Modells (14) höher als die der univariaten Schätzung²⁰, bei sechs Aktien ist der Wert geringer²¹ (vgl. Tab. 3.9 und 3.12). Die Summe der Likelihoodfunktionen der 12 Aktien beträgt für die univariaten Schätzungen $L_u = 22449.5$, für das Faktormodell $L_{14} = 22351.5$. Die Differenz von $d = 97.9$ ist aber zum größten Teil auf zwei Aktien, nämlich CA ($d = 57.3$) und Steyr ($d = 32.4$) zurückzuführen.²²

²⁰ Constantia, Interunfall, Lenzing, Montana, Veitscher

²¹ CA, Leykam, Reininghaus, Steyr, Semperit, Universale

²² Die univariate Schätzung der CA ergibt eine Phase ausgesprochen hoher Volatilitäten für die Beobachtungen 560 - 580, die im Marktfaktor nicht aufscheint. 'Steyr' und 'Universale', die sich durch niedrige Koeffizienten für h_t^{F1} auszeichnen, weisen auch auf Faktor 1 selbst niedrige Ladungszahlen auf. Die Aufnahme der Volatilitätsschätzung des Faktors

Gemessen an den Werten der Likelihoodfunktion ist also Modell (14) den univariaten Schätzungen in etwa gleichwertig.

Weitere Aufschlüsse liefert die Betrachtung des erweiterten Modells

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_i + \rho_i y_{i,t-1} + e_{i,t} \\ h_{i,t} &= \gamma_{0,i} + \gamma_{1,i} h_{i,t-1} + \gamma_{2,i} e_{i,t-1}^2 + \beta_i^2 h_i^{F1} \end{aligned} \quad (15)$$

Damit können die beiden folgenden LR-Tests durchgeführt werden:

- Aufnahme von h_i^{F1} als zusätzliche erklärende Variable in die univariate Schätzung,
- Aufnahme von $h_{i,t-1}$ als zusätzliche erklärende Variable in das Faktor-ARCH-Modell (14).

	$\rho_{u,13}$	$\rho_{u,14}$	$\ln L_{15}$	LR_{15}^u	LR_{15}^{14}
CA Vz	.39	.84	2240.3	25.8	140.6
Constantia	.49	.89	1970.9	11.0	1.2
Interunfall	.40	.87	2221.2	50.8	20.6
Lenzing	.68	.87	1799.7	16.8	1.6
Leykam	.61	.76	1851.0	2.6	19.1
Montana	.37	.85	1880.4	29.2	5.4
Reininghaus	.40	.78	1971.4	7.4	26.3
Semperit	.36	.88	1654.3	8.4	13.0
Steyr	.03	.82	1678.4	9.2	74.0
Universale	.18	.82	1707.9	6.8	19.6
Veitscher	.50	.89	1812.9	12.6	9.4
Wienerberger	.56	.89	1753.0	3.4	3.8

Tab. 3.13: Vergleich des univariaten und der Faktormodelle

Tab. 3.13 enthält die Korrelationen $\rho_{u,13}$ und $\rho_{u,14}$ zwischen den Volatilitäts-schätzungen des univariaten Modells U und der Faktormodelle (13) und (14), die Likelihood des Modells (15) und die beiden beschriebenen LR-Tests LR_{15}^u und LR_{15}^{14} . Die Inklusion der Volatilität des Marktfaktors als exogene Variable in die univariaten GARCH(1,1)-Schätzungen erhöht demnach in fast allen Fällen den Erklärungswert des Modells. Das ist auch bei den Aktien der Fall, für die die univariate Schätzung eine höhere Likelihood besitzt als das Faktormodell (14). Dasselbe gilt mit umgekehrten Vorzeichen für das Faktormodell.

² h_i^{F2} als exogene Variable in das Modell (14) führt bei diesen beiden Aktien dann auch zu einer signifikant höheren Likelihood.

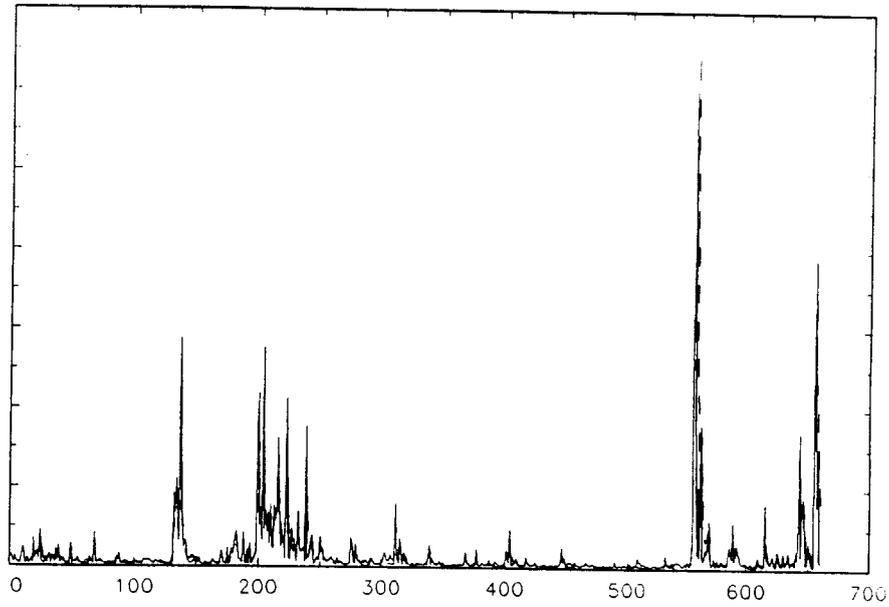


Abb. 3.5: Volatilitäten: univariates und Faktormodell (CA)

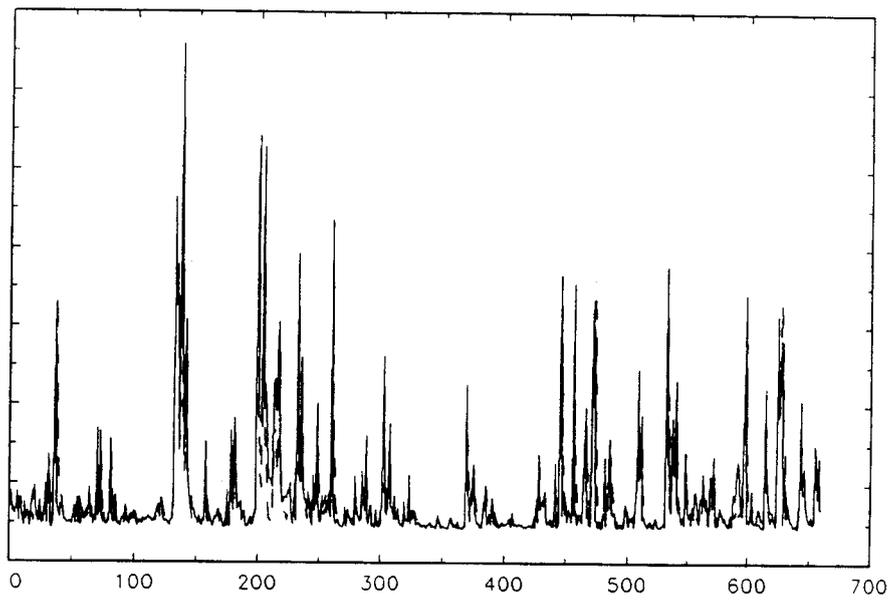


Abb. 3.6: Volatilitäten: univariates und Faktormodell (Constantia)

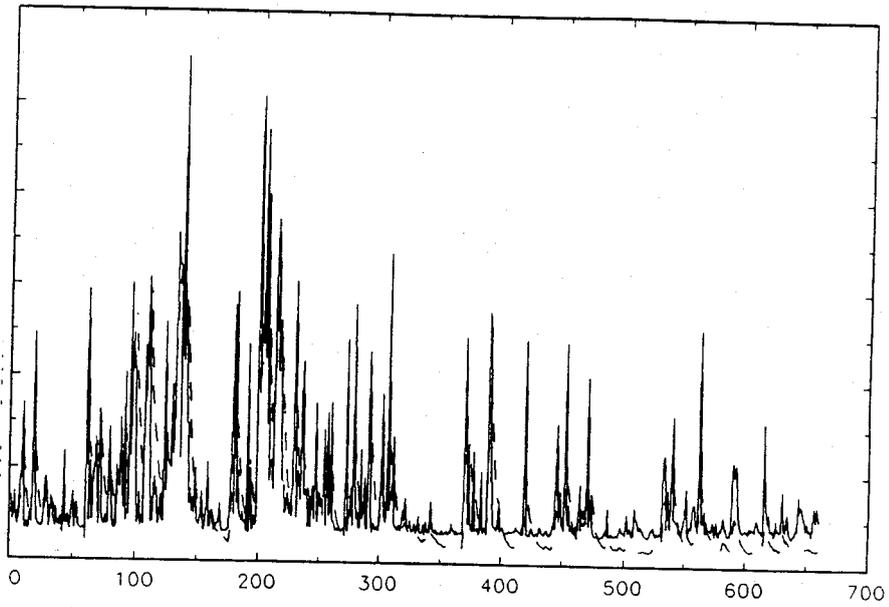


Abb. 3.7: Volatilitäten: univariates und Faktormodell (Leykam)

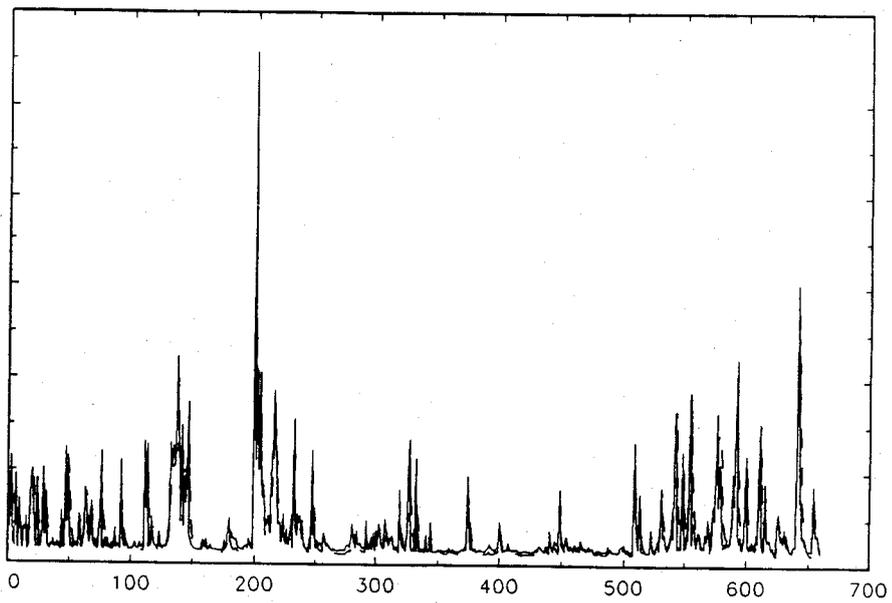


Abb. 3.8: Volatilitäten: univariates und Faktormodell (Wienerberger)

Beim Vergleich der Ergebnisse mit der Studie von SCHWERT & SEGUIN (1990) ist zu beachten, daß die Autoren nicht die Returns einzelner Aktien, sondern ganzer Portfolios verwenden. Bewegungen einzelner Aktien fallen damit nicht mehr ins Gewicht. Es ist offensichtlich, daß in diesem Fall ein Einfaktormodell eine bessere Beschreibung der Volatilitäten liefern kann als bei einzelnen Aktien.

3.5 Faktor-ARCH mit Risikoprämie

Univariate GARCH-Mean-Schätzungen (Tab. 3.15) ergeben bei zwei Aktien²³ eine signifikante Risikoprämie. Bei fünf weiteren Aktien²⁴ liegt der t-Wert über 1. Zeitvariierende Risikoprämien der einzelnen Aktien können also mittels des GARCH(1,1)-Mean ansatzweise extrahiert werden. Die Parameterschätzungen der Varianzgleichung ändern sich dabei nur geringfügig.²⁵

	ln L	LR _c	LM _{e_t²_{t-1}}	Residuen			
				Skew	Kurto	Q12	QS12
CA Vz	2227.4	435.6	11.51	.831	9.53	14.44	9.29
Constantia	1968.2	71.8	1.75	-.055	6.78	16.81	7.29
Interunfall	2197.6	177.0	3.11	.425	18.29	17.839	5.11
Lenzing	1788.3	120.6	3.76	-.138	4.98	41.56	7.03
Leykam	1847.1	162.4	17.51	-.140	6.97	80.35	11.25
Montana	1866.5	136.0	.61	1.195	12.72	23.32	11.63
Reininghaus	1969.8	276.4	2.20	-.145	6.99	9.59	8.35
Semperit	1654.1	105.2	.68	-.014	3.78	27.81	11.35
Steyr	1675.6	194.8	7.99	-.370	5.00	17.76	10.05
Universale	1708.6	94.8	.68	.223	4.77	21.57	6.57
Veitscher	1806.9	161.0	2.12	-.042	6.05	22.21	11.35
Wienerberger	1752.0	123.2	2.86	-.488	11.25	18.11	1.97

Tab. 3.14: Univariate GARCH(1,1)-Mean-Modelle

In die Faktor-ARCH-Gleichungen mit Risikoprämie

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_i + \beta_i \pi_t^{F_1} \\ h_{i,t} &= \gamma_{0,i} + \beta_i^2 h_t^{F_1} \end{aligned} \quad (16)$$

gehen wieder die Schätzungen der Volatilität $h_t^{F_1}$ und der Risikoprämie $\pi_t^{F_1} = -.0629 + .0754 h_t^{F_1}$ der GARCH(1,1)-M-Schätzung des Faktors 1 (vgl. Abs. 3.3) als exogene Variable ein.

²³ Semperit und Universale

²⁴ Constantia, Interunfall, Montana, Reininghaus, Steyr

²⁵ abgesehen von der CA

CA Vz	$y_t = .000334$ (1.67)	+	$1.0934 h_t$ (.46)	+	$.0687 y_{t-1}$ (1.59)	+	e_t
	$h_t = .0000064$ (10.80)	+	$.5347 h_{t-1}$ (36.37)	+	$.5755 e_{t-1}^2$ (15.30)		
Constantia	$y_t = -.001806$ (-1.75)	+	$12.5952 h_t$ (1.87)	+	$.2050 y_{t-1}$ (4.11)	+	e_t
	$h_t = .0000570$ (7.19)	+	$.3856 h_{t-1}$ (5.18)	+	$.2697 e_{t-1}^2$ (4.45)		
Interunfall	$y_t = -.000052$ (-3.00)	+	$3.4875 h_t$ (1.03)	+	$.2121 y_{t-1}$ (5.23)	+	e_t
	$h_t = .0000080$ (14.46)	+	$.5358 h_{t-1}$ (37.65)	+	$.6876 e_{t-1}^2$ (16.30)		
Lenzing	$y_t = .000594$ (.66)	+	$.1616 h_t$ (.05)	+	e_t		
	$h_t = .0000483$ (6.15)	+	$.4964 h_{t-1}$ (10.27)	+	$.3829 e_{t-1}^2$ (6.78)		
Leykam	$y_t = .0003127$ (.39)	+	$2.9717 h_t$ (.83)	+	e_t		
	$h_t = .000012$ (6.58)	+	$.7839 h_{t-1}$ (40.84)	+	$.1753 e_{t-1}^2$ (7.74)		
Montana	$y_t = -.000716$ (-1.10)	+	$3.9779 h_t$ (1.27)	+	$.3471 y_{t-1}$ (8.85)	+	e_t
	$h_t = .0000464$ (10.21)	+	$.4009 h_{t-1}$ (8.636)	+	$.5358 e_{t-1}^2$ (7.72)		
Reininghaus	$y_t = -.0007921$ (-1.75)	+	$5.6104 h_t$ (1.78)	-	$.0405 y_{t-1}$ (-.95)	+	e_t
	$h_t = .0000073$ (5.63)	+	$.7064 h_{t-1}$ (39.80)	+	$.3290 e_{t-1}^2$ (9.93)		
Semperit	$y_t = -.0039517$ (-3.27)	+	$9.3675 h_t$ (3.55)	+	$.0279 y_{t-1}$ (.62)	+	e_t
	$h_t = .0001483$ (6.16)	+	$.2589 h_{t-1}$ (4.36)	+	$.4450 e_{t-1}^2$ (6.16)		
Steyr	$y_t = -.002458$ (-2.91)	+	$4.1086 h_t$ (1.88)	+	$.0804 y_{t-1}$ (1.88)	+	e_t
	$h_t = .0000361$ (6.53)	+	$.6181 h_{t-1}$ (22.53)	+	$.3477 e_{t-1}^2$ (8.26)		
Universale	$y_t = -.000822$ (-.79)	+	$8.7663 h_t$ (2.50)	+	$.2772 y_{t-1}$ (6.51)	+	e_t
	$h_t = .0000493$ (5.87)	+	$.6002 h_{t-1}$ (13.16)	+	$.2944 e_{t-1}^2$ (6.67)		
Veitscher	$y_t = -.000585$ (-.77)	+	$2.1908 h_t$ (.69)	+	$.1391 y_{t-1}$ (3.16)	+	e_t
	$h_t = .0000632$ (8.33)	+	$.4286 h_{t-1}$ (8.32)	+	$.3758 e_{t-1}^2$ (6.05)		
Wienerberger	$y_t = .000142$ (.15)	+	$3.0191 h_t$ (.956)	+	$.1996 y_{t-1}$ (4.73)	+	e_t
	$h_t = .0000539$ (8.31)	+	$.5123 h_{t-1}$ (12.71)	+	$.3576 e_{t-1}^2$ (7.08)		

Tab. 3.15: Univariate GARCH-M-Modelle

CA Vz	$y_t = \begin{matrix} .7151 \\ (2.63) \end{matrix} + \begin{matrix} 1.3134 \pi_t^{F1} \\ (50.60) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} -.2111 \\ (-7.15) \end{matrix} + 1.3134^2 h_t^{F1}$
Constantia	$y_t = \begin{matrix} .0479 \\ (1.31) \end{matrix} + \begin{matrix} .6857 \pi_t^{F1} \\ (9.10) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .6202 \\ (10.64) \end{matrix} + .6857^2 h_t^{F1}$
Interunfall	$y_t = \begin{matrix} .0182 \\ (.50) \end{matrix} - \begin{matrix} .9497 \pi_t^{F1} \\ (-20.13) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .2925 \\ (7.63) \end{matrix} + .9490^2 h_t^{F1}$
Lenzing	$y_t = \begin{matrix} .0829 \\ (2.55) \end{matrix} + \begin{matrix} 1.077 \pi_t^{F1} \\ (14.58) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .1703 \\ (2.63) \end{matrix} + 1.077^2 h_t^{F1}$
Leykam	$y_t = \begin{matrix} .0632 \\ (1.80) \end{matrix} - \begin{matrix} .7522 \pi_t^{F1} \\ (-8.93) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .5399 \\ (8.83) \end{matrix} + .7522^2 h_t^{F1}$
Montana	$y_t = \begin{matrix} .0548 \\ (1.59) \end{matrix} - \begin{matrix} 1.0429 \pi_t^{F1} \\ (-21.11) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .1836 \\ (5.26) \end{matrix} + 1.0429^2 h_t^{F1}$
Reininghaus	$y_t = \begin{matrix} -.0002 \\ (.22) \end{matrix} - \begin{matrix} 1.2441 \pi_t^{F1} \\ (-25.21) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} -.00486 \\ (1.08) \end{matrix} + 1.2441^2 h_t^{F1}$
Semperit	$y_t = \begin{matrix} -.0006 \\ (-.23) \end{matrix} - \begin{matrix} .7057 \pi_t^{F1} \\ (-5.69) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .5981 \\ (6.91) \end{matrix} + .7057^2 h_t^{F1}$
Steyr	$y_t = \begin{matrix} .00812 \\ (.22) \end{matrix} + \begin{matrix} .2865 \pi_t^{F1} \\ (3.06) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .8679 \\ (18.26) \end{matrix} + .2865^2 h_t^{F1}$
Universale	$y_t = \begin{matrix} .1555 \\ (3.98) \end{matrix} - \begin{matrix} .5193 \pi_t^{F1} \\ (5.06) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .7661 \\ (11.08) \end{matrix} + .5193^2 h_t^{F1}$
Veitscher	$y_t = \begin{matrix} .0001 \\ (.00) \end{matrix} + \begin{matrix} .9184 \pi_t^{F1} \\ (14.02) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .3581 \\ (6.60) \end{matrix} + .9184^2 h_t^{F1}$
Wienerberger	$y_t = \begin{matrix} .1187 \\ (3.57) \end{matrix} + \begin{matrix} .9821 \pi_t^{F1} \\ (11.69) \end{matrix} + e_t$ $h_t = \begin{matrix} .2965 \\ (4.52) \end{matrix} + .9821^2 h_t^{F1}$

Tab. 3.16: Faktor-ARCH mit Risikoprämie (17)

Die Ergebnisse sind eher enttäuschend. Bei 6 Aktien²⁶ liefert die Schätzung ein völlig unplausibles, negatives β_i für die Risikoprämie. Das Faktor-ARCH-Modell (17) ist also nicht geeignet, die Entwicklung der Returns und Volatilitäten der einzelnen Aktien zu beschreiben.

Der Lagrange-Multiplier-Test LM_F überprüft die Restriktion, daß die beiden Parameter für die Risikoprämie $\pi_t^{F_1}$ und die Volatilität $h_t^{F_1}$ tatsächlich einander entsprechen. Er vergleicht (16) mit dem Modell

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_i + (\beta_i + d_i)\pi_t^{F_1} \\ h_{i,t} &= \gamma_{i,0} + \beta_i^2 h_t^{F_1} \end{aligned}$$

mit der Nullhypothese $H_{i0} d_i = 0$. Es ist etwas überraschend, daß dieser Test trotz der negativen β -Werte die Restriktion nur in zwei Fällen ablehnt. Das ist diesem Fall wohl weniger ein Indiz für die Korrektheit des Modells, sondern legt eher Vermutung nahe, daß die Risikoprämie $\pi_t^{F_1}$ nur wenig zur Likelihood-Schätzung der β_i beiträgt. Die Schätzung der Risikoprämie des Faktors 1 dürfte daher unzureichend sein.

	L	LR _c	LM _F	LM _{e_{t-1}²}	Q12	QS12
CA Vz	2083.9	204.6	.63	10.09	48.61	118.86
Constantia	1930.4	42.8	1.26	16.15	51.55	49.37
Interunfall	2095.3	76.1	2.65	23.46	115.77	139.49
Lenzing	1779.7	103.3	2.06	16.59	37.81	24.39
Leykam	1791.2	50.4	.31	24.13	81.75	147.54
Montana	1789.7	96.8	6.38	96.82	132.65	31.35
Reininghaus	1880.2	115.1	4.72	20.02	22.64	78.07
Semperit	1610.4	32.4	1.98	17.15	36.01	125.45
Steyr	1566.3	.5	.67	14.86	48.52	245.96
Universale	1609.7	9.1	1.60	16.75	135.52	207.88
Veitscher	1769.8	96.5	.45	23.85	30.06	88.99
Wienerberger	1679.1	58.5	1.21	13.20	60.83	40.71

Tab. 3.17: Faktor-ARCH mit Risikoprämie (17)

Bei näherer Betrachtung zeigt sich eine weitere mögliche Ursache für das Versagen des Modells. Die APT, die als Ausgangspunkt des Faktor-ARCH dient, setzt voraus, daß $E_{t-1}F_{1,t} = 0$. Der Faktor 1 ist jedoch hoch autokorreliert. Unter $E_{t-1}F_{1,t} = \rho F_{1,t-1}$ gilt dann (vgl. (9)):

$$\begin{aligned} E_{t-1}y_{i,t} &= \beta_i \pi_t^{F_1} + \beta_i E_{t-1}F_{1,t} \\ &= \beta_i (\pi_t^{F_1} + \rho F_{1,t-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

²⁶Interunfall, Leykam, Montana, Reininghaus, Semperit, Universale

Die Risikoprämie $\pi_t^{F_1}$ weist dabei im Vergleich zu den Returns F_1 relativ geringe Werte auf. (vgl. Tab. 3.6). Bei Betafaktoren, die nahe um 1 liegen, bedeutet das, daß die Autokorrelation der y_i in etwa gleich groß angenommen wird wie diejenige des Faktors 1. Sie ist tatsächlich aber beträchtlich höher. Daher bietet sich neben (17) wiederum die Inklusion eines verzögerten Terms in die Mean-Gleichung an.

$$y_{i,t} = \beta_i \pi_t^{F_1} + \rho_i y_{i,t-1} \quad (18)$$

Keine der beiden Varianten führt aber zu verbesserten Resultaten. Die Ergebnisse sind nicht dargestellt.

Beim Vergleich der Ergebnisse mit den in Abschnitt 2 zitierten Studien (CHOU, 1988; NG, ENGLE & ROTHSCILD, 1991) muß wiederum auf die unterschiedliche Qualität der Daten hingewiesen werden. NG, ENGLE & ROTHSCILD (1991) verwendeten die monatlichen Returns von zehn Portfolios, die aus jeweils 30 Aktien zusammengesetzt waren. Zum einen sind monatliche Returns nur mehr schwach autokorreliert. Zum anderen tritt in Portfolios dieser Größenordnung die individuelle Kursentwicklung der Aktien nicht mehr als Störfaktor in Erscheinung. Schließlich stellt sich angesichts der Enge und geringen Effizienz des Wiener Markts die Frage, ob hier eine derartige Risikoprämie überhaupt vorzufinden ist.

4 Ein Faktormodell der bedingten Returns

Als Erklärung für die hohe Autokorrelation von Aktienindizes wird üblicherweise die unterschiedliche Verzögerung einzelner Aktien in ihrer Anpassung an den Marktfaktor angeführt (FRENCH, SCHWERT & STAMBAUGH, 1987). Die hohe Autokorrelation des Marktfaktors ist tatsächlich ein Indiz dafür, daß verzögerte Abhängigkeiten zwischen den Returns einzelner Aktien vorliegen. Damit stellt sich die Frage nach der Struktur dieser Abhängigkeiten.²⁷

Sie legt eine dynamische Betrachtungsweise der Faktorenstruktur von Aktienmärkten nahe: im folgenden wird mit der kanonischen Analyse eines vektorautoregressiven Prozesses (BOX & TIAO, 1977) ein Verfahren behandelt, anhand dessen die Struktur etwaiger verzögerter Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Aktien geschätzt werden kann. Durch die Verwendung von Weighted-Least-Squares-Schätzern (WLS) kann dabei der Heteroskedastizität der Returns Rechnung getragen werden.

Die Ergebnisse zweier kanonischer Analysen der 12 Wiener Aktien unter Verwendung von OLS- und WLS-Schätzern werden abschließend dargestellt.

4.1 Die kanonische Analyse eines VAR(1)

y_t sei ein k -dimensionaler VAR(1)-Prozeß

$$y_t = \Phi y_{t-1} + u_t, \quad E y_t = 0 \quad (19)$$

mit der Varianzzerlegung

$$\Sigma_y = \Sigma_{\hat{y}} + \Sigma_{\hat{u}}, \quad \Sigma_{\hat{y}} = \Phi \Sigma_y \Phi' \quad (20)$$

$z_t = m' y_t$ sei eine beliebige Linearkombination der y_t . Der Anteil der erklärten Varianz an der Gesamtvarianz ist für z_t gegeben durch

$$\lambda = \sigma_z^2 / \sigma_y^2 = m' \Sigma_{\hat{y}} m / m' \Sigma_y m \quad (21)$$

²⁷ Man betrachte die Hauptkomponentenanalyse: Die Returns $y_i, i = 1, \dots, N$ sind mit Mittelwert 0 und Varianz 1 standardisiert. Für die Autokovarianz des Faktors $F_t = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_{i,t}$ gilt:

$$\text{cov}(F_t, F_{t-1}) = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i y_{i,t}, \sum_{i=1}^N \alpha_i y_{i,t-1} \right)$$

Unter der Annahme, daß $E y_{i,t} y_{j,t-1} = 0$ für $i \neq j$ ergibt sich damit:

$$\text{cov}(F_t, F_{t-1}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \text{cov}(y_{i,t}, y_{i,t-1}) < \max_{i=1}^N \text{cov}(y_{i,t}, y_{i,t-1}) \sum_{i=1}^N \alpha_i^2$$

Aus Fußnote 12 ist nun ersichtlich, daß $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = \text{var}(F_t) = \lambda$. Damit folgt: $\text{cov}(F_t, F_{t-1}) / \text{var}(F_t) < \max_{i=1}^N \text{cov}(y_{i,t}, y_{i,t-1})$. Die Autokorrelation des Faktors sollte also geringer sein als das Maximum der Autokorrelationen der einzelnen Assets.

Es kann nun gezeigt werden, daß die Linearkombination $\mathbf{z}_{1,t}$ mit maximaler erklärter Varianz durch den zum größten Eigenwert λ_1 gehörigen Eigenvektor \mathbf{m}_1 der Matrix $\Sigma_y^{-1}\Sigma_{\hat{y}}$ bestimmt ist. Die weiteren Eigenvektoren $\mathbf{m}_i, i = 2, \dots, K$ liefern sukzessive diejenigen Linearkombinationen $\mathbf{z}_{i,t} = \mathbf{m}_i' \mathbf{y}_t$, die orthogonal zu $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{i-1}$ sind und unter dieser Nebenbedingung maximale Varianz erklären.

Mittels der Eigenwertzerlegung $\Sigma_y^{-1}\Sigma_{\hat{y}} = M\Lambda M'$ erhält man also einen transformierten VAR(1)-Prozeß $\mathbf{z}_t = M' \mathbf{y}_t$ mit den folgenden Eigenschaften (vgl. BOX & TIAO, 1977):

- $0 \leq \lambda_K \leq \lambda_{K-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 1$
- $\mathbf{z}_t = \Psi \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{v}_t$, mit $\Psi = M' \Phi M$
und den diagonalen Kovarianzmatrizen
 $\Sigma_z = M' \Sigma_y M, \Sigma_{\hat{z}} = M' \Sigma_{\hat{y}} M, \Sigma_v = M' \Sigma_u M$
- Die \mathbf{z}_t sind nach ihrer Vorhersagbarkeit, dh. nach dem Anteil der erklärten Varianz an der Gesamtvarianz geordnet. Der durch $\mathbf{z}_{i,t}$ erklärte Varianzanteil ist durch den zugehörigen Eigenwert λ_i gegeben.

Dieses Verfahren kann in gewissem Sinne als das bedingte Äquivalent der Hauptkomponentenanalyse angesehen werden. Die Hauptkomponentenanalyse transformiert die Ausgangsdaten anhand der Varianz-Kovarianzmatrix Σ_y in orthogonale Faktoren mit sukzessive maximalem multiplen R^2 des Faktors mit den Ausgangsdaten (vgl. FAHRMEIR & HAMERLE, 1983). Die kanonische Analyse eines VAR leistet dasselbe für die bedingten Erwartungswerte von Zeitreihen. Sie erzeugt orthogonale Komponenten, die sukzessive maximales R^2 mit den Werten zum Zeitpunkt $t - 1$ aufweisen.

4.2 Weighted Least Squares-Schätzung eines VAR(1)

Die Schätzung eines VAR(1)-Prozesses $\mathbf{y}_t = \Phi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$ kann (unter der Annahme zeitkonstanter Fehlervarianzen $\mathbf{u}_t \sim N(0, \Sigma_u)$) effizient durch die separate Schätzung der einzelnen Gleichungen

$$\mathbf{y}_i = X \phi_i' + \mathbf{u}_i \quad (22)$$

mittels OLS erfolgen (vgl. JUDGE et. al., 1987), wobei $\Phi' = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ und X die Matrix der verzögerten $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$ bezeichnet. Der Grund für die Effizienz der separaten Schätzung liegt darin, daß das allgemeine Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \vdots \\ \phi_N' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix} \quad (23)$$

wegen $X_1 = X_2 = \dots = X_N = X$ in die Form $\tilde{\mathbf{y}} = (I_K \otimes X)\tilde{\phi} + \tilde{\mathbf{u}}$ gebracht werden kann. Diese Bedingung ist aber nicht mehr erfüllt, wenn die einzelnen Gleichungen mit Weighted-Least-Squares geschätzt werden.

Der GLS-Schätzer $\hat{\phi}_i = (X'H_i^{-1}X)^{-1}X'H_i^{-1}\mathbf{y}_i$ mit der Diagonalmatrix $H = \text{diag}(h_{i,t})$, die die Varianzen $h_{i,t} = E y_i^2$ in der Hauptdiagonale enthält, ist äquivalent mit der OLS-Schätzung der Gleichung

$$H_i^{-1/2}\mathbf{y}_i = H_i^{-1/2}X\phi_i' + \mathbf{v}_t, \quad (24)$$

weswegen in (23) $X_i = H_i^{-1/2}X$ (und entsprechend $\mathbf{y}_i = H_i^{-1/2}\mathbf{y}_i$) gilt.

In diesem Fall steht also dem Effizienzgewinn durch die Verwendung von WLS-Schätzern im allgemeinen ein durch die separate Schätzung der Gleichungen bedingter Effizienzverlust gegenüber. Es kann aber gezeigt werden, daß die obige Bedingung noch gilt, wenn die Gewichtungsmatrizen H_i proportional zueinander sind, also wenn $H_i = \gamma_i H$.

Das Modell kann dann in die Form

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\Gamma \otimes \tilde{X})\tilde{\phi} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad (25)$$

mit $\tilde{\mathbf{y}} = (\gamma_1 H \mathbf{y}_1, \dots, \gamma_N H \mathbf{y}_N)$, $\tilde{X} = H X$ gebracht werden. Γ ist dabei die $(N \times N)$ -Diagonalmatrix mit den Elementen γ_i in der Hauptdiagonale.

Eine leichte Modifikation der Ableitung aus JUDGE et. al. (1988) zeigt die Effizienz des OLS-Schätzers.

Der GLS-Schätzer $\hat{\phi}$ für $\tilde{\phi}$ hat dann nämlich die Form

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= [(\Gamma \otimes X')(\Sigma_v^{-1} \otimes I_T)(\Gamma \otimes X)]^{-1}(\Gamma \otimes X')(\Sigma_v^{-1} \otimes I_T)\tilde{\mathbf{y}} \\ &= [(\Gamma \Sigma_v^{-1} \Gamma \otimes X'X)]^{-1}(\Gamma \Sigma_v^{-1} \otimes X')\tilde{\mathbf{y}} \\ &= [(\Gamma^{-1} \Sigma_v \Gamma^{-1} \otimes (X'X)^{-1})(\Gamma \Sigma_v^{-1} \otimes X')]\tilde{\mathbf{y}} \\ &= [(\Gamma^{-1} \otimes (X'X)^{-1} X')]\tilde{\mathbf{y}} \\ &= [(\Gamma \otimes X')(\Gamma \otimes X)]^{-1}(\Gamma \otimes X')\tilde{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

und ist also mit dem OLS-Schätzer äquivalent. Weiters ist leicht zu sehen, daß die OLS-Schätzung des gesamten Modells mit der separaten OLS-Schätzung der einzelnen Gleichungen identisch ist.

Mit der Spezifikation der Varianzen $h_{i,t} = Eu_{i,t}^2$ als lineare Funktion exogener Variablen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= X\phi_i' + \mathbf{u}_i \\ E(\mathbf{u}_i^2) &= Z_i\gamma_i + \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (26)$$

wobei $Z_i = (\mathbf{z}_{i1}, \dots, \mathbf{z}_{in})$ eine Matrix exogener Variablen darstellt, ist die Bedingung $H_i = \gamma_i H$ genau dann erfüllt, wenn eine homogene Gleichung mit einer einzigen exogenen Variablen verwendet wird.

Zur Schätzung des Modells (26) empfehlen JUDGE et. al. (1987) folgende Vorgehensweise.

- Die OLS-Schätzung von ϕ_i' liefert die Residuen $\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{0})$.
- Die OLS-Schätzung der Residuen Gleichung $\hat{\gamma}_i = (Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{0})^2$ liefert die Gewichtungsmatrix $\hat{H}_i = Z_i\hat{\gamma}_i$. Dieser Schätzer ist aber nicht erwartungstreu. Einen konsistenten Schätzer für γ_i erhält man mit

$$\hat{\gamma}_i = (Z_i'\hat{H}_i^{-2}Z_i)^{-1}\hat{H}_i^{-2}Z_i'\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{0})^2.$$

- Daraus ergibt sich die Gewichtungsmatrix $\hat{H}_i = Z_i\hat{\gamma}_i$ und damit der WLS-Schätzer

$$\hat{\phi}_i = (Z_i'\hat{H}_i^{-1}Z_i)^{-1}\hat{H}_i^{-1}Z_i'\mathbf{y}_i,$$

mit den Residuen $\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{1})$.

Ausgehend von $\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{1})$ können nun die Schritte (2) - (3) iterativ wiederholt werden. DAVADIAN & CARROLL (1987) empfehlen dazu drei Iterationen.

4.3 VAR(1)-Schätzung der Returns

Um in der kanonischen Transformation standardisierte Koeffizienten zu erhalten, wurden die Returns mit $\mu_i = 0$ und $\sigma_i = 1$ standardisiert.

Neben der OLS-Schätzung des VAR(1) wurden WLS-Schätzungen mit den folgenden drei Spezifikationen der Residuen Gleichung versucht:

$$\text{WLS1: } u_{i,t}^2 = \gamma_1 h_t^{WBK} + e_{i,t}, \quad (27)$$

$$\text{WLS2: } u_{i,t}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 h_t^{WBK} + ep_{i,t}, \quad (28)$$

$$\text{WLS3: } u_{i,t}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 h_t^{WBK} + \gamma_2 y_{t-1}^2 + e_{i,t}. \quad (29)$$

Dabei bezeichnet h_t^{WBK} die Schätzung der bedingten Varianz des Index durch das in Abschnitt 3.2 dargestellte GARCH(1,1)-AR-Modell.

	OLS			WLS1			WLS2		
	R_y^2	F	QS12	R_y^2	F	QS12	R_y^2	F	QS12
Ca Vz	.109	6.62	318.3	.092	5.45	196.5	.081	4.73	294.2
Constantia	.099	5.96	424.8	.087	5.14	276.1	.092	5.49	380.4
Interunfall	.208	14.16	290.7	.167	10.83	176.6	.161	10.36	205.4
Lenzing	.089	5.25	909.6	.060	3.47	443.7	.077	4.52	785.8
Leykam	.172	11.21	777.4	.131	8.13	355.9	.155	9.88	660.7
Montana	.211	14.49	349.2	.157	10.02	103.1	.186	12.33	264.0
Reininghaus	.076	4.44	344.9	.041	2.30	172.4	.059	3.38	309.3
Semperit	.095	5.69	876.3	.038	2.15	580.9	.084	4.94	835.5
Steyr	.079	4.62	516.0	.049	2.80	578.4	.067	3.88	568.9
Universale	.179	11.79	657.9	.143	9.01	482.1	.158	10.11	653.9
Veitscher	.058	3.31	703.8	.049	2.77	392.3	.055	3.13	647.4
Wienerberger	.112	6.81	653.1	.058	3.29	331.1	.095	5.67	272.9

Tab. 4.1: VAR (1)-Schätzungen der Returns

Der homogene Schätzer WLS1 garantiert die asymptotische Effizienz der separaten Schätzung der VAR-Gleichungen. Um die Korrektheit der homogenen Spezifikation zu überprüfen, wurde weiters die inhomogene Gleichung WLS2 geschätzt. WLS3 ist schließlich dem Faktormodell (14) nachempfunden. Da die Residuengleichung nur exogene Variablen des VAR enthalten kann, wurde y_{t-1}^2 an Stelle der Residuen u_{t-1}^2 als Näherung verwendet.²⁸

Einen ersten Vergleich der OLS- und WLS-Schätzer liefert Tabelle 4.1. Sie enthält für OLS, WLS1 und WLS2 das Bestimmtheitsmaß R_y^2 sowie – wiederum als Indikator für die in den Residuen verbliebenen ARCH-Effekte – die Ljung-Box-Statistik QS12 der Quadrate der Residuen. Die Werte für WLS3 weichen nur geringfügig von WLS2 ab. Auf ihre Darstellung wird daher verzichtet.

In den Residuen $\hat{u}_{i,t}$ selbst liegen keine Anzeichen für Autokorrelationen vor: Die Durbin-Watson-Statistik nimmt Werte zwischen 1.941 und 2.022 an. Auch die Ljung-Box-Statistik Q12 ist in keinem Fall signifikant. Weiters stellt das Ausmaß der Multikollinearität der Returns für die Schätzung kein Problem dar. Das Verhältnis der Wurzel des größten und kleinsten Eigenwerts der Korrelationsmatrix der y_i beträgt $r = \sqrt{\lambda_1/\lambda_K} = 2.53$ (vgl. Abs. 3.1). Erst ab einem Wert von $r > 30$ sind stärkere Einflüsse der Multikollinearität auf die Schätzergebnisse zu erwarten (JUDGE et. al., 1987).

Die erklärten Varianzen der VAR-Gleichungen liegen bei der OLS-Schätzung zwischen .058 und .211. Für die WLS-Schätzer nimmt das R^2 etwas geringere Werte an. Weiters führen die WLS-Schätzer, und insbesondere die homogene Residuengleichung WLS1 zu einer starken Reduktion der Ljung-Box-Statistik. Die Spezifikation der homogenen Gleichung ist aber insofern

²⁸ Man beachte, daß $E y_t = 0$.

nicht korrekt, als der konstante Term in WLS2 in allen Fällen signifikant von Null verschieden ist. Tab. 4.2 zeigt die Regressionskoeffizienten der Residuen im einzelnen.

	WLS1	WLS2		WLS3		
	γ_1	γ_0	γ_1	γ_0	γ_1	γ_2
Ca Vz	.563 (6.90)	.349 (2.21)	.821 (3.27)	.171 (1.78)	.569 (4.72)	.412 (2.81)
Constantia	.494 (9.82)	.692 (7.56)	.291 (2.38)	.520 (6.18)	.205 (2.10)	.246 (2.72)
Interunfall	.543 (8.87)	.492 (4.50)	.413 (2.23)	.325 (3.32)	.328 (2.05)	.288 (3.49)
Lenzing	.605 (13.18)	.492 (6.44)	.608 (4.92)	.396 (5.61)	.409 (3.36)	.258 (3.87)
Leykam	.461 (10.22)	.619 (7.75)	.290 (2.69)	.426 (5.75)	.253 (2.49)	.239 (3.25)
Montana	.482 (9.07)	.498 (5.23)	.418 (2.94)	.346 (4.05)	.268 (2.09)	.299 (3.30)
Reininghaus	.504 (7.48)	.538 (4.26)	.562 (3.19)	.324 (4.47)	.348 (3.71)	.364 (3.39)
Semperit	.431 (9.76)	.757 (10.35)	.198 (2.44)	.566 (8.30)	-.007 (-.16)	.338 (9.96)
Steyr	.323 (5.91)	.874 (8.97)	.061 (0.79)	5.27 (7.79)	-.022 (-.48)	.467 (6.21)
Universale	.344 (8.06)	.738 (10.77)	.114 (1.76)	.511 (4.94)	.081 (2.36)	.270 (4.50)
Veitscher	.691 (14.24)	.477 (5.67)	.655 (4.41)	.358 (4.94)	.319 (2.36)	.362 (4.50)
Wienerberger	.527 (9.95)	.677 (5.77)	.281 (3.31)	.360 (4.05)	.305 (2.22)	.354 (3.68)

Tab. 4.2: Koeffizienten der Residuengleichungen

WLS1 ist am besten dazu geeignet, die Heteroskedastie der Residuen zu vermindern. Durch die homogene Spezifikation wird vor allem das Gewicht der hoch volatilen Perioden verringert. Die VAR(1)-Schätzungen unter Verwendung der Residuengleichungen WLS2 und WLS3 unterscheiden sich außerdem von der OLS-Schätzung nur wenig. Daher wird in den folgenden kanonischen Analysen OLS mit WLS1 verglichen.

Die Koeffizientenmatrizen der OLS- und WLS1-Schätzung des VAR(1) sind in Tab. 4.3 und 4.4 dargestellt. Entsprechend dem geringeren R^2 sind die t-Werte der WLS1-Koeffizienten durchwegs geringer als bei der OLS-Schätzung. In beiden Schätzungen liegen die höchsten Koeffizienten mit wenigen Ausnahmen jeweils in der Hauptdiagonale. Die Aktien hängen sind also am besten durch die eigene Vergangenheit prognostizierbar. Darüber

hinaus liegen aber auch einige signifikante wechselseitige Abhängigkeiten zwischen den Aktien vor. Bei der OLS-Schätzung sind immerhin 27 der 132 Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale signifikant, bei der WLS1-Schätzung sind es 17. Auffällig ist etwa, wie oft die Constantia als signifikanter Prädiktor anderer Aktien auftritt.

4.4 Kanonische Analyse

Die Schätzung des VAR(1) hat eine Reihe von verzögerten Abhängigkeiten aufgezeigt. Aufschlüsse über die Struktur dieser Abhängigkeiten kann nun die kanonische Analyse liefern. Es stellt sich vor allem die Frage, ob sich in den verzögerten Abhängigkeiten ein Äquivalent zum Marktfaktor finden läßt und wodurch er, falls vorhanden, am besten prognostizierbar ist.

Tab. 4.5 zeigt die Eigenwerte von $\Sigma_y^{-1}\Sigma_{\hat{y}}$ für die beiden Schätzer OLS und WLS1. Die Tabellen 4.4 bis 4.7 enthalten die beiden Transformations- und Koeffizientenmatrizen Φ und M' der Faktoren.

Übereinstimmend findet sich bei beiden Analysen ein erster Faktor mit einer erklärten Varianz von 29 %. Die Aktien besitzen durchgehend positive Ladungszahlen, wobei sich die hoch autokorrelierten Aktien²⁹ durch vergleichsweise hohe Ladungszahlen auszeichnen. Bei der WLS1-Schätzung ist dieser Effekt besonders stark ausgeprägt, so daß hier der Faktor fast ausschließlich aus den hoch autokorrelierten Aktien besteht. Die folgenden Faktoren sind im wesentlichen aus den Differenzen zweier oder mehrerer hoch autokorrelierter Aktien zusammengesetzt. Diese Differenzen sind noch in überraschend hohem Ausmaß prognostizierbar. So beträgt der Anteil der erklärten Varianz des Faktor 2 18 %, der des Faktors 4 noch 12 % (vgl. Tab. 4.5).

Etwas enttäuschend ist, daß sich die Ladungszahlen der Faktoren für die OLS- und WLS1-Schätzer in einigen Punkten voneinander unterscheiden. Der Faktor 2 der OLS-Schätzung besteht im wesentlichen aus der Differenz zwischen Montana und Universale. Für den WLS1-Schätzer ergibt sich dagegen eine Differenz der Montana mit Interunfall und Leykam. Eine gute Entsprechung der beiden Schätzer liegt bei Faktor 3 vor: in beiden Fällen besteht er im wesentlichen aus der Differenz der Montana mit Leykam und Universale. Auch bei den weiteren Faktoren ist die Übereinstimmung eher gering. Jedenfalls ist die Tatsache, daß Differenzen zwischen Aktien gefunden werden können, die einen derart hohen Anteil an erklärter Varianz aufweisen, für sich bemerkenswert.

Aus den transformierten Koeffizientenmatrizen der Faktoren (Tab. 4.8 und 4.9) geht schließlich hervor, daß zwischen den einzelnen Faktoren keine nen-

²⁹Interunfall, Leykam, Montana, Universale

	CA	CON	INT	LEN	LEY	MON	REI	SEM	STE	UNI	VEI	WIE
CA_VZ	.296 (5.72)	.038 (1.06)	-.015 (0.33)	.057 (1.54)	-.026 (0.80)	-.055 (1.84)	-.005 (0.93)	-.022 (0.81)	.003 (0.08)	-.014 (1.00)	.015 (0.80)	.070 (2.42)
CONSTANTIA	.051 (1.07)	.199 (4.54)	-.031 (0.62)	.059 (1.69)	.034 (0.94)	-.016 (0.50)	.035 (0.98)	-.058 (2.34)	-.026 (1.11)	.002 (0.09)	.018 (0.57)	.045 (1.49)
INTERUNFALL	.094 (2.61)	.091 (2.76)	.306 (8.08)	.061 (2.32)	-.044 (1.64)	-.020 (0.83)	-.019 (0.71)	.005 (0.27)	-.038 (2.20)	.002 (0.11)	.001 (0.05)	.004 (0.17)
LENZING	.066 (1.03)	.110 (1.88)	.021 (0.32)	.067 (1.45)	-.009 (0.18)	-.016 (0.39)	.037 (0.77)	.006 (0.21)	-.019 (0.62)	.021 (0.64)	.111 (2.60)	.104 (2.61)
LEYKAM	-.022 (0.39)	.126 (2.42)	-.062 (1.04)	.147 (3.53)	.232 (5.43)	-.084 (2.19)	.038 (0.87)	.021 (0.73)	-.021 (0.76)	-.026 (0.89)	.404 (1.05)	.072 (2.00)
MONTANA	.015 (0.23)	.056 (1.07)	.058 (0.96)	.071 (1.69)	.064 (1.49)	.321 (8.23)	-.011 (0.24)	-.046 (1.55)	.058 (2.10)	.008 (0.28)	.090 (2.30)	.059 (1.63)
REININGHAUS	.131 (2.34)	.128 (2.53)	-.036 (.62)	.003 (.09)	.024 (0.66)	-.031 (0.69)	.083 (1.98)	.006 (0.22)	.007 (0.28)	-.028 (0.99)	.039 (1.03)	.069 (1.98)
SEMPERIT	.063 (0.82)	.279 (3.94)	-.111 (1.36)	.109 (1.93)	-.069 (1.20)	-.062 (1.19)	-.058 (0.99)	.099 (2.50)	.006 (0.18)	-.037 (0.83)	.096 (1.74)	.134 (2.76)
STEYR	.082 (2.20)	.225 (3.02)	.059 (0.68)	-.029 (0.49)	-.067 (1.11)	-.139 (2.53)	-.029 (0.48)	.011 (0.27)	.161 (4.11)	-.032 (0.77)	.055 (1.00)	.093 (1.83)
UNIVERSALE	.126 (1.73)	-.002 (0.04)	.079 (0.94)	-.009 (0.19)	.004 (0.09)	-.104 (2.20)	.094 (1.72)	-.013 (0.38)	.021 (0.62)	.372 (9.98)	.003 (0.06)	.078 (1.71)
VEITSCHER	-.067 (1.03)	.125 (2.09)	-.011 (0.16)	.066 (1.38)	.045 (0.94)	.007 (0.18)	.061 (1.23)	.027 (0.82)	-.009 (0.29)	-.034 (1.00)	.025 (0.57)	.091 (2.23)
WIENERBERGER	.135 (1.97)	.162 (2.58)	-.135 (1.87)	.002 (0.05)	.043 (0.84)	-.008 (0.19)	-.046 (0.86)	-.046 (1.31)	-.027 (0.83)	.084 (2.39)	.074 (1.60)	.196 (4.55)

Tab. 4.3: Koeffizientenmatrix der OLS-Schätzung

	CA	CON	INT	LEN	LEY	MON	REI	SEM	STE	UNI	VEI	WIE
CA_VZ	.277 (6.48)	.027 (0.73)	.011 (0.32)	.064 (1.65)	-.035 (0.96)	-.016 (0.42)	-.050 (1.33)	-.017 (0.48)	.060 (1.80)	.001 (0.04)	-.002 (0.05)	.054 (1.43)
CONSTANTIA	.081 (1.60)	.249 (5.70)	-.037 (0.86)	.065 (1.42)	-.032 (0.75)	.042 (0.94)	.039 (0.89)	-.056 (1.39)	-.075 (1.94)	.056 (1.48)	-.002 (0.44)	-.009 (0.21)
INTERUNFALL	.105 (2.31)	.056 (1.41)	.351 (9.03)	.142 (3.42)	.047 (1.21)	-.015 (0.36)	-.044 (1.11)	.041 (1.14)	-.036 (1.03)	.009 (0.27)	-.043 (1.02)	-.025 (0.62)
LENZING	.007 (0.16)	.090 (2.20)	.014 (0.34)	.122 (2.83)	.001 (0.02)	.060 (1.44)	.090 (2.19)	.044 (1.17)	.017 (0.47)	.002 (0.06)	.040 (0.93)	.049 (1.19)
LEYKAM	-.031 (0.63)	.102 (2.45)	.002 (0.06)	.155 (3.50)	.258 (6.20)	-.051 (1.19)	-.051 (1.22)	.093 (2.43)	-.012 (0.32)	-.018 (0.49)	-.012 (0.28)	.059 (1.39)
MONTANA	.050 (1.07)	.042 (1.05)	-.015 (0.38)	.062 (1.47)	.049 (1.23)	.377 (9.15)	-.020 (0.49)	-.054 (1.47)	.051 (1.43)	.075 (2.13)	.013 (0.30)	-.015 (0.36)
REININGHAUS	.044 (0.92)	.045 (1.07)	.028 (0.68)	.001 (.02)	.034 (0.82)	-.016 (0.36)	.123 (2.94)	.049 (1.28)	-.023 (0.60)	-.014 (0.40)	.008 (0.18)	.102 (2.43)
SEMPERIT	.010 (0.20)	.117 (2.67)	-.075 (1.73)	.063 (1.37)	-.012 (0.27)	-.031 (0.69)	-.046 (1.06)	.070 (1.74)	.019 (0.48)	.033 (0.88)	.061 (1.29)	.061 (1.38)
STEYR	.077 (1.47)	.120 (2.65)	.002 (0.06)	-.029 (0.61)	-.037 (0.82)	-.114 (2.45)	-.049 (1.07)	.023 (0.54)	.135 (3.32)	-.014 (0.35)	.056 (1.16)	.067 (1.46)
UNIVERSALE	.025 (0.51)	.053 (1.23)	.021 (0.51)	.015 (0.32)	.018 (0.43)	-.012 (0.26)	.067 (1.54)	.046 (1.18)	.062 (1.60)	.338 (8.98)	-.059 (1.29)	.050 (1.15)
VEITSCHER	-.023 (0.47)	.084 (2.04)	.034 (0.85)	.088 (2.03)	.049 (1.21)	.059 (1.39)	.065 (1.58)	.085 (2.26)	-.025 (0.68)	.002 (0.06)	-.051 (1.18)	.043 (1.03)
WIENERBERGER	.072 (1.51)	.056 (1.37)	-.016 (0.38)	-.012 (0.27)	.064 (1.58)	.034 (0.81)	-.004 (0.10)	-.033 (0.86)	-.001 (0.00)	.070 (1.96)	.013 (0.29)	.163 (3.91)

Tab. 4.4: Koeffizientenmatrix der WLS1-Schätzung

Faktor	OLS	WLS1	Faktor	OLS	WLS1
1	.2976	.2986	7	.0357	.0409
2	.1740	.1888	8	.0267	.0282
3	.1597	.1385	9	.0155	.0234
4	.1285	.1289	10	.0083	.0091
5	.0984	.1031	11	.0057	.0056
6	.0421	.0552	12	.0024	.0013

Tab. 4.5: Eigenwerte der kanonischen Analysen

nenswerten wechselseitigen verzögerten Abhängigkeiten bestehen. Die Faktoren sind zum Großteil aus der eigenen Vergangenheit heraus prognostizierbar. Für den Faktor 1 sind beispielsweise 89 % der erklärten Varianz auf den eigenen Wert zum Zeitpunkt $t - 1$ rückführbar.³⁰

Einiges spricht dafür, daß die Unterschiede zwischen den OLS- und WLS-Schätzungen tatsächlich durch die Reduktion der Heteroskedastie zustande kommen und nicht einfach auf Schätzungenauigkeiten beruhen. Grundsätzlich vermindert die WLS-Schätzung das Gewicht der hoch volatilen Perioden. Es ist zunächst einmal offensichtlich, daß gerade in diesen Perioden starke gemeinsame Marktbewegungen vorliegen: Die Berücksichtigung der Heteroskedastie führt bei der WLS-Schätzung zu geringeren Autokorrelationen der Aktien. Man vergleiche auch die Autokorrelation der Aktien in der unbedingten Verteilung (Tab. 3.1) mit den GARCH(1,1)-Schätzungen: Die durch das GARCH(1,1)-Modell geschätzten Autokorrelationen sind durchwegs geringer. Dieser Effekt scheint nun bei den einzelnen Aktien unterschiedlich stark ausgeprägt zu sein, wodurch es zu einer Verschiebung des ersten – und wegen der Orthogonalitätsrestriktion – auch der weiteren Faktoren der kanonischen Analyse kommt.

Schon aus den Schätzungen des Faktor-ARCH-Modells (14) geht hervor, daß die Struktur der Korrelationen und Autokorrelationen eines Aktienmarkts durchaus nicht konstant, sondern mindestens von der Volatilität des Markts abhängig ist (vgl. Fußnote 4). Auch GEYER & HAUER (1991) fanden, daß sich die Schätzwerte der β -Gewichte verringern, sobald die Heteroskedastizität des Markts berücksichtigt wird. Bei Untersuchungen zur Faktorenstruktur von Aktienmärkten sollte daher Verfahren, die zeitvariierende Varianzen und Kovarianzen erlauben, verstärktes Augenmerk geschenkt werden.

³⁰ man beachte, daß die durch den Faktor j erklärte Varianz des Faktors i gleich dem Quadrat des Koeffizienten (i,j) der Transformationsmatrix ist.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor 1	.461	-.032	-.016	-.123	.061	.174	-.004	.001	-.037	-.051	-.149	-.089
Faktor 2	.008	.403	.052	-.019	.014	-.005	-.044	-.039	-.010	.014	-.023	-.061
Faktor 3	.052	-.040	.342	-.010	-.004	-.136	.047	-.063	-.074	-.015	-.039	.076
Faktor 4	.139	.018	-.009	.287	-.006	-.086	.042	.050	.063	-.014	.094	-.034
Faktor 5	-.021	-.019	.027	-.031	.271	-.019	-.035	.013	-.014	-.042	.115	-.074
Faktor 6	-.045	.011	.051	.054	.017	.148	.102	.016	-.025	-.024	-.002	-.000
Faktor 7	.012	.020	-.039	-.061	-.009	-.068	.138	.052	-.040	-.001	.026	-.020
Faktor 8	-.001	.007	.032	-.009	-.010	.009	-.004	.147	-.013	.008	-.002	.017
Faktor 9	-.015	.007	.015	-.006	-.019	-.008	-.000	.007	.033	-.051	-.017	-.057
Faktor 10	-.011	-.009	.010	.009	.029	-.009	.021	.010	.039	.085	-.057	-.036
Faktor 11	.000	.005	-.005	-.000	.015	-.005	.008	.004	.023	-.017	-.018	.029
Faktor 12	.011	.002	.016	-.024	-.012	.014	.007	-.001	.048	.015	.041	.007

Tab. 4.6: Transformationsmatrix der OLS-Schätzung

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faktor 1	.516	.031	-.096	-.023	.139	.062	.008	.057	-.023	.073	-.100	-.014
Faktor 2	.044	.371	-.015	-.022	-.043	-.084	.007	-.034	.018	-.157	.109	.004
Faktor 3	.061	.007	.342	-.004	.021	-.062	-.075	.017	.077	.007	-.034	.026
Faktor 4	-.003	.048	-.002	.347	.008	.010	-.017	.008	-.029	.014	-.051	.050
Faktor 5	-.045	.010	.036	.024	.258	.031	.079	-.023	-.006	.004	.118	-.082
Faktor 6	-.007	.027	.032	.002	-.040	.169	.115	.000	.102	-.038	-.050	-.010
Faktor 7	.001	-.001	.015	-.014	.008	-.068	.137	-.033	-.037	.002	-.030	.103
Faktor 8	-.017	.027	.020	-.018	.000	.052	-.001	.129	-.075	.017	.030	.050
Faktor 9	-.016	-.006	-.034	.001	.035	-.052	.004	.078	.083	-.026	-.030	.016
Faktor 10	-.013	.033	.001	-.002	-.012	-.016	.016	.014	.005	.069	-.021	-.046
Faktor 11	-.015	.021	-.009	-.013	.024	.018	-.029	-.021	.104	.022	-.019	.034
Faktor 12	.005	-.003	-.002	.003	-.007	.001	.001	-.001	.016	.015	.025	.010

Tab. 4.7: Transformationsmatrix der WLS1-Schätzung

	CA	CON	INT	LEN	LEY	MON	REI	SEM	STE	UNI	VEI	WIE
Faktor 1	.010	.048	.436	.020	.282	.317	.134	.143	.148	.212	-.026	.084
Faktor 2	-.219	-.019	-.162	.045	.219	.593	-.005	.100	-.012	-.804	.164	-.148
Faktor 3	-.128	.004	-.588	.008	-.026	.723	-.125	-.139	-.094	.452	-.106	.228
Faktor 4	-.392	-.119	.686	-.089	-.037	.316	-.207	-.340	-.348	.171	.110	-.282
Faktor 5	-.477	.080	-.239	-.162	.827	-.302	-.179	.089	-.364	.175	.272	.115
Faktor 6	.270	.628	.035	.034	-.286	-.130	.089	-.230	-.641	-.176	-.176	.352
Faktor 7	.689	-.495	-.168	-.154	.589	.185	.162	-.513	-.058	.059	-.217	-.283
Faktor 8	.305	-.612	.051	.339	-.133	-.082	-.136	.528	-.543	.007	.161	.031
Faktor 9	.281	.522	-.106	-.159	.115	.142	-.499	.466	-.117	.144	-.426	-.501
Faktor 10	.069	-.233	.167	-.386	.226	.004	-.519	-.025	-.144	-.235	-.321	.841
Faktor 11	-.376	-.153	.050	.091	.118	.049	.687	.241	-.082	-.003	-.809	-.025
Faktor 12	.139	-.024	.078	.978	-.127	.079	.294	.306	-.159	.157	.409	.070

Tab. 4.8: Koeffizientenmatrix der Faktoren (OLS-Schätzung)

	CA	CON	INT	LEN	LEY	MON	REI	SEM	STE	UNI	VEI	WIE
Faktor 1	-.015	-.001	-.515	-.020	-.358	-.286	-.062	.056	.018	-.340	-.116	.036
Faktor 2	-.012	-.280	.591	-.110	.400	-.807	.152	-.001	.102	-.272	.145	-.084
Faktor 3	.028	.129	-.058	-.017	.403	-.483	.110	.310	.213	.414	-.089	.171
Faktor 4	.670	-.024	.239	-.171	-.646	-.201	.023	-.057	.255	.420	-.253	.127
Faktor 5	-.523	-.118	.213	-.284	-.037	-.106	-.127	-.055	-.354	.703	.229	-.033
Faktor 6	.192	-.99	-.171	.170	.230	.273	.228	-.104	.149	.056	.036	.006
Faktor 7	-.312	.074	.158	-.155	.181	.251	-.537	.395	.596	-.055	-.160	-.052
Faktor 8	.195	-.039	-.015	-.765	.472	.091	-.226	-.281	-.114	-.107	-.225	.702
Faktor 9	-.601	-.033	.172	.076	-.427	-.053	.417	.031	.271	-.168	.084	.729
Faktor 10	-.203	.147	-.097	-.015	.182	.184	.318	-.757	.564	.102	-.150	-.322
Faktor 11	-.156	.012	.089	.718	.109	-.064	-.017	-.104	-.154	.031	.932	.103
Faktor 12	.077	-.016	-.099	.452	-.049	-.022	-.715	-.447	.091	-.033	.442	.376

Tab. 4.9: Koeffizientenmatrix der Faktoren (WLS1-Schätzung)

Literaturverzeichnis

- AKAIKE, H. (1981): Likelihood of a Model and Information Criteria, *Journal of Econometrics* 16, 3-14
- AKGIRAY, V. (1989): Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts, *Journal of Business*, 62(1), 55-81
- BOLLERSLEV, T. (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327
- BOLLERSLEV, T. ENGLE, R. & WOOLDRIDGE, J. (1988): A Capital Asset Pricing Model With Time-Varying Covariances, *Journal of Political Economy* 96(1), 116-131
- BOX, G. & TIAO, C. (1977): A Canonical Analysis in Multiple Time Series, *Biometrika*, 64, 355-365
- BROWN(1989): The Number of Factors in Security Returns, *The Journal of Finance* 44(5), 1247-1262
- CHOU, R. (1988): Volatility Persistence and Stock Evaluations, *Journal of Applied Econometrics* 3, 278-305
- CHOW, G. (1983): *Econometrics*, McGraw-Hill, Auckland
- DAVADIAN, M. & CARROLL, R. (1987): Variance Function Estimation, *Journal of the Amer. Stat. Assoc.* 65, 1079-1091
- DIEBOLD, F. & NERLOVE, M. (1989): The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor Model, *Journal of Applied Econometrics* 4, 1-21
- ENGLE, R.(1982): Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987-1007
- ENGLE, P. & BOLLERSLEV, T. (1986): Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews* 5(1), 1-50
- ENGLE, R., ITO, T. & LIN, W. (1990): Meteor Showers or Heat Waves? Intradaily Volatility in the Foreign Exchange Market, *Econometrica* 58(3), 525-542

- ENGLE, LILIEEN & ROBINS (1987): Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, *Econometrica* 55, 391-407
- ENGLE, R. & MUSTAFA, C. (1989): Implied ARCH Models from Options Prices, Univ. Calif. San Diego Discussion Paper, Department of Economics
- ENGLE, R., NG, V. & ROTHSCCHILD, M. (1990): Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure, *Journal of Econometrics* 45, 213-237
- FAHRMEIR, J. & HAMERLE, A. (1983): *Multivariate Statistik*, deGruyter,
- FRENCH, K., SCHWERT, F. & STAMBAUGH, F. (1987): Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics* 19, 3-29
- GEYER, A. & HAUER, S (1991): ARCH-Modelle zur Messung des Marktrisikos, *Zeitschrift für betriebswirtschaftl. Forschung* 43(1), 65-74
- JUDGE, G. et. al. (1987): *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley, N.Y.
- JUDGE, G. et. al. (1988): *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley, N.Y.
- KARYA, T. (1987): MTV Model and its Application to Prediction of Stock Prices, Proc. 2nd International Tampere Conference in Statistics, University of Tampere, 161-176
- LJUNG, G. & BOX, G. (1988): On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika* 66, 297-303
- MERTON, R. (1973): An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 41, 876-887
- NG, L. (1991): Tests of the CAPM with Time-Varying Covariances, *Journal of Finance* 46(3), 1507-1521
- NG, V. (1991a): EZARCH, Univ. Calif. San Diego, Department of Economics
- NG, V., ENGLE, R. & ROTHSCCHILD, M. (1991): A Multi-dynamic Factor Model for Stock Returns, Univ. Calif. San Diego Discussion Paper, Department of Economics
- ROSS, S. (1976): The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory* 13, 314-360
- SCHWERT, P. & SEGUIN, P.(1990): Heteroskedasticity in Stock Returns, *The Journal of Finance* 45(4), 1129-1155