Ueber einige allgemeine Theoreme aus der neueren Algebra.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Die grosse Analogie, die zwischen der Theorie der binären biquadratischen und ternären cubischen Formen besteht, hat ihren Grund in einigen allgemeinen Sätzen, die hier entwickelt werden sollen.

Es sei

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^p=ax_1^p+pbx_1^{p-1}x_2+\binom{p}{2}cx_1^{p-2}x_2^2+\cdots$$

eine beliebig gegebene Grundform p^{ten} Grades von irgend einer Anzahl Variabeln und

$$\Delta=\alpha x_1^p+p\beta x_1^{p-2}x_2+\binom{p}{2}\gamma x_1^{p-2}x_2^2+\cdots$$

eine Covariante derselben von gleichem Grade und von der Ordnung m in den Coefficienten. Ferner bestehe die Relation

$$(1)\qquad \delta\Delta=\frac{\partial\Delta}{\partial a}\alpha+\frac{\partial\Delta}{\partial b}\beta+\frac{\partial\Delta}{\partial c}\gamma+\cdots=mSf,$$

mit S eine gewisse Invariante von f bezeichnet.

Das erste der oben erwähnten Theoreme sagt dann aus, dass

$$(2)\qquad \Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}f+\frac{\partial G}{\partial\varkappa}\Delta\right),$$

worin G eine rationale ganze Function $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades der beliebigen Constanten $\varkappa$ und λ bedeutet.

Beweis. Enthält irgend eine Form φ die Coefficienten von f in der Ordnung q, und setzt man

$$(3)\quad \varphi_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\varphi(\varkappa\lambda)=\varkappa^q\varphi-q\varkappa^{q-1}\lambda\varphi'+\binom{q}{2}\varkappa^{q-2}\lambda^2\varphi''-\cdots,$$

so sind je drei aufeinanderfolgende $\varphi^{(i)}$ nach ihrem bekannten Bildungsgesetz und nach (1) durch die Recursionsformel verbunden

$$(4)\qquad (q-k)\varphi^{(k+1)}=\delta\varphi^{(k)}-mkS\varphi^{(k-1)}\ \text{*)}.$$

Für $\varphi=\Delta$ ergiebt sich hiernach sofort, dass $\Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ von der Gestalt:

$$(5)\qquad \Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}=Bf+A\Delta.$$

*) Für $k=0$ und $k=q$ hat man also

$$\delta\varphi=q\varphi'\qquad\text{und}\qquad\delta\varphi^{(q)}=mqS\varphi^{(q-1)}.$$

In bekannter Weise leitet man aus dieser Gleichung die weitere ab:

(6) $$(\delta\varphi)_{\varkappa f - \lambda\Delta} = B\frac{\partial\varphi(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial\varphi(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}.$$

Setzt man hierin $\varphi = \Delta$, so folgt wegen (1) und (5):

(7) $$mS(\varkappa\lambda)(\varkappa f - \lambda\Delta) = f\left(B\frac{\partial B}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right) + \Delta\left(B\frac{\partial A}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial A}{\partial\lambda}\right).$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten von f und Δ auf beiden Seiten bekommt man dann:

$$mS(\varkappa\lambda)\varkappa = B\frac{\partial B}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial B}{\partial\lambda},$$
$$-mS(\varkappa\lambda)\lambda = B\frac{\partial A}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial A}{\partial\lambda},$$

und durch Elimination von $S(\varkappa\lambda)$:

$$B\left(\frac{\partial A}{\partial\varkappa}\varkappa + \frac{\partial B}{\partial\varkappa}\lambda\right) - A\left(\frac{\partial A}{\partial\lambda}\varkappa + \frac{\partial B}{\partial\lambda}\lambda\right) = 0.$$

Diese Relation kann, $\varkappa A + \lambda B$ durch G bezeichnet, auch geschrieben werden:

$$B\frac{\partial G}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial G}{\partial\lambda} = 0.$$

Da überdiess

$$\varkappa\frac{\partial G}{\partial\varkappa} + \lambda\frac{\partial G}{\partial\lambda} = (m+1)\,G,$$

so erhalten wir durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen nach $\frac{\partial G}{\partial\varkappa}$ und $\frac{\partial G}{\partial\lambda}$ die zu erweisenden Ausdrücke

$$B = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G}{\partial\lambda} = G_2 \qquad A = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G}{\partial\varkappa} = G_1.$$

An die Existenz der Function $G(\varkappa\lambda)$ lassen sich weitere Schlüsse in ganz derselben Weise knüpfen, wie dies bereits in der Theorie der binären biquadratischen und ternären cubischen Formen geschehen ist.

Zunächst folgt mit Benutzung der Werthe von B und A aus (7)

(8) $$S(\varkappa\lambda) = -(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)$$

und aus (6)

$$\varphi'_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \varphi_1(\varkappa\lambda)\,G_2 - \varphi_2(\varkappa\lambda)\,G_1.$$

Die letzte Formel lässt sich in folgender Weise erweitern. Sind μ und ν beliebige Constanten, so hat man wie in (3):

(9) $$\varphi_{\mu f - \nu\Delta} = \varphi(\mu\nu) = \mu^q\varphi - q\mu^{q-1}\nu\varphi' + \binom{q}{2}\mu^{q-2}\nu^2\varphi'' - \cdots$$

Wir führen in dieser Gleichung für die Veränderlichen μ und ν zwei neue ϱ und σ durch die linearen Substitutionen ein:

(10) $$\mu = \varrho\varkappa - G_2\sigma$$
$$\nu = \varrho\lambda + G_1\sigma.$$

Da $\mu f - \nu\Delta = \varrho(\varkappa f - \lambda\Delta) - \sigma\Delta_{\varkappa f - \lambda\Delta}$, so wird durch diese Transformation $\varphi_{\mu f - \nu\Delta}$ gleich dem Werthe von $\varphi_{\varrho f - \sigma\Delta}$, wenn dann die Coefficienten von $\varkappa f - \lambda\Delta$ an die Stelle derer von f treten, d. h. $\varphi(\mu\nu)$ geht über in den Ausdruck

(11) $\varrho^q \varphi_{\varkappa f-\lambda\Delta} - q\varrho^{q-1}\sigma\varphi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} + \binom{q}{2}\varrho^{q-2}\sigma^2\varphi''_{\varkappa f-\lambda\Delta} - \binom{q}{3}\varrho^{q-3}\sigma^3\varphi'''_{\varkappa f-\lambda\Delta} \cdots$

Die rechte Seite der Gleichung (9) dagegen wird identisch mit

(12) $\varrho^q\varphi(\varkappa\lambda) - q\varrho^{q-1}\sigma\varphi'(\varkappa\lambda) + \binom{q}{2}\varrho^{q-2}\sigma^2\varphi''(\varkappa\lambda) - \binom{q}{3}\varrho^{q-3}\sigma^3\varphi'''(\varkappa\lambda) + \cdots,$

wofern wir der Kürze wegen setzen:

$$\begin{aligned}
&\varphi'(\varkappa\lambda) = \varphi_1(\varkappa\lambda)\,G_2 - \varphi_2(\varkappa\lambda)\,G_1,\\
(13)\qquad &\varphi''(\varkappa\lambda) = \varphi_{11}(\varkappa\lambda)\,G_2^2 - 2\varphi_{12}(\varkappa\lambda)\,G_2G_1 + \varphi_{22}(\varkappa\lambda)\,G_1^2,\\
&\varphi'''(\varkappa\lambda) = \varphi_{111}(\varkappa\lambda)\,G_2^3 - 3\varphi_{112}(\varkappa\lambda)\,G_2^2G_1 + 3\varphi_{122}(\varkappa\lambda)\,G_2G_1^2 - \varphi_{222}(\varkappa\lambda)\,G_1^3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Vergleicht man jetzt die Coefficienten der für alle Werthe von ϱ und σ identischen Functionen (11) und (12), so zeigt sich, dass $\varphi'(\varkappa\lambda)$, $\varphi''(\varkappa\lambda)$, $\varphi'''(\varkappa\lambda)$ ... in den Gleichungen (12) dieselbe Bedeutung wie $\varphi'_{\varkappa f-\lambda\Delta}$, $\varphi''_{\varkappa f-\lambda\Delta}$, $\varphi'''_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ ... haben.

Wenn insbesondere φ', d. h. $\delta\varphi$ verschwindet, so muss nach der ersten der Relationen (13) φ selbst von der Gestalt sein:

(14) $$\varphi(\varkappa\lambda) = \varphi\,.\,G^n.$$

Diese Gleichung dient wieder ihrerseits dazu, das System (3) und (14) zu verallgemeinern.

Es seien nämlich Φ, Φ', Φ'' ... $\Phi^{(q)}$ eine Anzahl Formen von f, die zu je dreien durch dieselbe Recursionsformel (4) verbunden sein mögen, wie φ, φ', φ'' ... $\varphi^{(q)}$*). Setzen wir

$$\Phi\varphi^{(q)} - q\Phi'\varphi^{(q-1)} + \binom{q}{2}\Phi''\varphi^{(q-2)} \cdots + (-1)^q\,\Phi^{(q)}\varphi = X,$$

so ist offenbar

$$\delta X = 0,$$

und daher nach (14)

(15) $$X_{\varkappa f-\lambda\Delta} = X\,.\,G^{r+1},$$

wenn $(m+1)(r+1) - mq$ die Ordnung von Φ bedeutet.

Eine zweite Gleichung für X ergiebt sich aus der Erwägung, dass X eine simultane Invariante von $\varphi(\mu,\nu)$ in (9) und von dem Ausdruck

$$\Phi(\mu\nu) = \mu^q\Phi - q\mu^{q-1}\nu\,\Phi' + \binom{q}{2}\mu^{q-2}\nu^2\Phi'' - \cdots$$

ist. Transformiren wir die Functionen $\varphi(\mu,\nu)$ und $\Phi(\mu,\nu)$ durch die Substitutionen (10), so ist also nach der Fundamentaleigenschaft der Invarianten:

*) Φ braucht nicht von der Ordnung q zu sein, wie wir dies von φ ausdrücklich voraussetzten und der Einfachheit halber fernerhin voraussetzen wollen.

$$(16)\quad \Phi(\varkappa\lambda)\varphi^{(q)}(\varkappa\lambda)-q\Phi'(\varkappa\lambda)\varphi^{(q-1)}(\varkappa\lambda)+\binom{q}{2}\Phi''(\varkappa\lambda)\varphi^{(q-2)}(\varkappa\lambda)\cdots=X.G^q,$$

wenn $\Phi'(\varkappa\lambda)$, $\Phi''(\varkappa\lambda)$ etc. die Bedeutung haben:

$$(17)\quad \begin{aligned} \Phi'(\varkappa\lambda) &= \Phi_1(\varkappa\lambda)\,G_2-\Phi_2(\varkappa\lambda)\,G_1 \\ \Phi''(\varkappa\lambda) &= \Phi_{11}(\varkappa\lambda)\,G_2^2-2\,\Phi_{12}(\varkappa\lambda)\,G_2G_1+\Phi_{22}(\varkappa\lambda)\,G_1^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Combination der Formeln (15) und (16) folgt nunmehr:

$$(20)\quad \begin{aligned} &\left(\Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}.\Phi(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q)}(\varkappa\lambda)-q\left(\Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}.\Phi'(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q-1)}(\varkappa\lambda) \\ &+\binom{q}{2}\left(\Phi''_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}.\Phi''(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q-2)}(\varkappa\lambda)-\cdots=0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist φ eine beliebige ganze homogene Function q^{ter} Ordnung der Coefficienten von f, während φ', φ'', φ''' u. s. w. ihre Definition durch die Identität (3) finden. Ersetzt man φ successive durch $(q+1)$ verschiedene solche Ausdrücke, so gehen aus (20) eben so viele Gleichungen hervor, die in Bezug auf die Grössen

$$\Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}\,\Phi(\varkappa\lambda),\ \Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}\,\Phi'(\varkappa\lambda),\ ..\,\Phi^{(q)}_{\varkappa f-\lambda\Delta}-G^{r+1-q}\,\Phi^{(q)}(\varkappa\lambda)$$

linear und homogen sind. Da man offenbar $(q+1)$ Functionen φ so wählen kann, dass die Determinante dieser linearen Gleichungen nicht verschwindet*), so müssen die Unbekannten derselben gleich Null sein, d. h. es müssen die Relationen bestehen:

$$(21)\quad \begin{aligned} \Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi(\varkappa\lambda) \\ \Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi'(\varkappa\lambda) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi^{(q)}_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi^{(q)}(\varkappa\lambda). \end{aligned}$$

Im speciellen Falle zweier Functionen Φ, Φ' geben die Recursionsformeln (4)

*) Für die $(q+1)$ verschiedenen Functionen φ kann man z. B.

$$f^q(y_1,\,y_2\cdots y_n)\quad,\quad f^q(z_1,\,z_2\cdots z_n)\quad,\quad f^q(t_1,\,t_2\cdots t_n)\cdots,$$

d. h. die Ausdrücke nehmen, die sich ergeben, wenn man in der q^{ten} Potenz von f das System der Variabeln x_i durch irgend $(q+1)$ von einander verschiedene y_i, z_i, t_i u. s. w. ersetzt. Damit die oben erwähnte Determinante nicht verschwinde, genügt es die ganz willkürlichen y_i, z_i, $t_i\cdots$ so zu bestimmen, dass die Determinante $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\begin{vmatrix} f^q(y) & f^{q-1}(y)\,\Delta(y) & \cdots & \Delta^q(y) \\ f^q(z) & f^{q-1}(z)\,\Delta(z) & \cdots & \Delta^q(z) \\ f^q(t) & f^{q-1}(t)\,\Delta(t) & \cdots & \Delta^q(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$=\left(f(y)\,\Delta(z)-f(z)\,\Delta(y)\right)\left(f(z)\,\Delta(t)-f(t)\,\Delta(z)\right)\left(f(t)\,\Delta(y)-f(y)\,\Delta(t)\right)\cdots$$

von Null verschieden ist.

$$\delta\Phi = \Phi' \qquad \delta\Phi' = mS\Phi \tag{22}$$

und die Gleichungen (21)

$$\begin{aligned} \Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^r(\varkappa\Phi - \lambda\Phi') \\ \Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^r(G_1\Phi' + G_2\Phi)\,, \end{aligned} \tag{22$_a$}$$

wenn Φ die Coefficienten von f in der Ordnung $(m+1)r+1$ enthält. Für ternäre cubische Formen sind die Relationen (22_a) bereits von den Herren Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen, Seite 60 Anmerkung, ausgesprochen worden.

Die lineare Substitution (10) dient auch noch zum Beweise vieler anderer Theoreme. Beispielsweise möge hier vermittelst derselben zum Schlusse ein Satz abgeleitet werden, der als die wahre Quelle der in § 3. der vorhergehenden Abhandlung gegebenen Formeln anzusehen ist.

Es sei χ eine beliebige ganze homogene Function n^{ter} Ordnung der Coefficienten von f, und man setze nach Analogie des Früheren:

$$\chi_{\mu f-\nu\Delta} = \chi(\mu\nu) = \mu^n\chi - n\mu^{n-1}\nu\chi' + \binom{n}{2}\mu^{n-2}\nu^2\chi'' - \cdots \tag{23}$$

Wendet man auf $\varphi(\mu\nu)$ in (9) und auf $\chi(\mu\nu)$ die Transformation (10) an, so geht $\varphi(\mu\nu)$ in den Ausdruck (11) und $\chi(\mu\nu)$ in

$$[\chi(\varrho,\sigma)]_{\varkappa f-\lambda\Delta} = \varrho^n\chi_{\varkappa f-\lambda\Delta} - n\varrho^{n-1}\sigma\chi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} + \binom{n}{2}\varrho^{n-2}\sigma^2\chi''_{\varkappa f-\lambda\Delta} - \cdots$$

über. Für die simultane Covariante $(\varphi(\mu\nu),\ \chi(\mu\nu))^s$ *) hat man daher

$$(\varphi(\mu\nu),\ \chi(\mu\nu))^s\, G^s(\varkappa\lambda) = ([\varphi(\varrho,\ \sigma)]_{\varkappa f-\lambda\Delta},\ [\chi(\varrho\sigma)]_{\varkappa f-\lambda\Delta})^s,$$

wo die Uebereinanderschiebung rechts in Bezug auf die Variabeln ϱ und σ zu bilden ist. Durch die Annahme $\varrho = 1$, $\sigma = 0$ wird die linke Seite der letzten Gleichung identisch mit $(\varphi(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda))^s$, während die rechte Seite den Werth $[(\varphi(\varrho,\sigma),\ \chi(\varrho,\sigma))^s_{\varrho=1,\,\sigma=0}]_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ annimmt.

In Worten:

Die Function $(\varphi(\varrho,\ \sigma),\ \chi(\varrho,\ \sigma))^s_{\varrho=1,\,\sigma=0}$, gebildet für $\varkappa f - \lambda\Delta$, stimmt mit $(\varphi(\varkappa\lambda),\ \chi(\varkappa\lambda))^s \cdot G^s(\varkappa\lambda)$ überein.

---

*) Es ist darunter im Gordan'schen Sinn die s^{te} Uebereinanderschiebung der binären Formen $\varphi(\mu\nu)$ und $\chi(\mu\nu)$ verstanden; s kann natürlich jede ganze Zahl sein, welche die kleinere der beiden Zahlen p und q nicht übersteigt.

Tübingen, im April 1871.