UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

CURSO 1975 - 1976

CICLO DE CONFERENCIAS

5 de Febrero : "La fundamentación del Análisis de Fourier"
por J.L. Cerdá (Universidad Autónoma de Barcelona).

19 de Febrero: "Superficies de Riemann"
por J. Cufí (Universidad Autónoma de Barcelona).

4 de Marzo : "Integración en grupos"
por J. Vaquer (Universidad de Barcelona)
(No editada).

18 de Marzo : "El problema de n cuerpos"
por C. Simó (Universidad de Zaragoza).

1 de Abril : "Equacions diferencials amb retard"
por C. Perelló (Universidad Autónoma de Barcelona).

13 de Mayo : "H-espais"
por M. Castellet (Universidad Autónoma de Barcelona).

20 de Mayo : "El teorema de Fermat"
por P. Báyer (Universidad Autónoma de Barcelona).

I N D I C E

LA FUNDAMENTACION DEL ANALISIS DE FOURIER

J.L. Cerdá

1.- Los siglos XVIII y XIX : convergencia puntual

El análisis de Fourier tiene que ver con cuestiones como las de representar funciones periódicas de variable real, o sea funciones sobre $\mathbb{R}/_{2\pi Z} \simeq T$ (supondremos que el período es 2π), por medio de series trigonométricas.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{iks}$$

Este estudio tiene sus precedentes en el s. XVIII en relación con la consideración de fenómenos físicos de tipo periódico, especialmente con problemas de interpolación en Astronomía y con la resolución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Así el primer éxito real que se obtuvo en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales se alcanzó con el problema de la cuerda vibrante, que motivó una gran controversia entre d'Alembert, que después de establecer la ecuación de las cuerdas vibrantes como una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (u = u(x,t)),$$

en 1746 se propuso demostrar que además de la curva sinusoidal existe una infinidad de modos de vibrar y procedió según su método en el que aparecen series trigonométricas y que aun hoy se sigue en los cursos sobre ecuaciones diferenciales, Euler que estudió el mismo problema y contribuyó con la nueva idea de admitir funciones que hoy llamaríamos continuas y analíticas a trozos (llamadas por él "discontinuas") y Daniel Bernouilli que abordó esta cuestión por medio de razonamientos de tipo físico y cuya idea fundamental es el llamado principio de superposición según el que pueden existir simultáneamente muchos modos de vibrar.

Las controversias del s. XVIII, cuya raíz estaba en la falta de claridad sobre el concepto de función, paralizarían el estudio de las series trigonométricas que surgían en la resolución de problemas como el anterior hasta que a principios del s. XIX Fourier lo reemprendería con motivo de sus trabajos sobre la propagación del calor. El primero de ellos, que recibiría críticas por falta de rigor, lo presentó en la Academia de Ciencias de Paris en 1807 y continuaría trabajando intensamente en el tema, aunque su famosa obra "Théorie analytique de la chaleur" no sería publicada hasta 1822.

A partir de consideraciones físicas estableció la ecuación diferencial de la temperatura v en el interior de un cuerpo, que en el caso de una barra cilíndrica (caso unidimensional de un intervalo $[0,\pi]$) es del tipo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}$$

y siguiendo el método de d'Alembert llegaría a la obtención de soluciones de la forma

$$v(x,t)=b_k\ e^{-k^2 t}\operatorname{sen} k x$$

y, por linealidad, sumas de expresiones de este tipo al variar $k\in\mathbb{N}$

Ante el problema de imponer unas condiciones iniciales

$$v(x,0)=f(x)\quad \text{sobre } [0,\pi]$$

y entrando de nuevo en los problemas que habían enfrentado a los matemáticos del siglo anterior, Fourier admite funciones f arbitrarias que deberían ser

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k x)\qquad \text{sobre } [0,\pi]$$

con sumas infinitas con lo que consideraba se podía suponer la mencionada arbitrariedad de f gracias a la existencia de una infinidad de constantes b_k a determinar. Esta determinación la efectuó en numerosos casos particulares y ejemplos.

Fourier, mediante una descomposición en parte par y parte impar y los correspondientes desarrollos en serie de senos y de cosenos respectivamente (en el caso anterior la función se prolonga a una función impar sobre $[-\pi,\pi]$), llegaría a la representación de funciones arbitrarias f en series trigonométricas

$$S[f]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\ e^{iks}$$

llegando a las expresiones llamadas fórmulas de Fourier, aunque en realidad ya habían sido obtenidas por Euler, para los coeficientes:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-iks}\, \frac{ds}{2\pi}$$

Fourier nunca estableció condiciones generales de integrabilidad ni de desarrollabilidad en serie trigonométrica, admitiendo implícitamente la convergencia puntual hacía cualquier función f de la sucesión de sumas finitas

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{iks},$$

sumas parciales simétricas de $S[f]$, así como la posibilidad de integrar término a término.

Respecto del rigor se podrían hacer las mismas observaciones en lo que se refiere a la integral de Fourier

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy} dx$$

de una función f sobre la recta y que Fourier (y también Cauchy y Poisson) consideraría al estudiar la propagación del calor en dominios ilimitados en una dirección (la semirecta no negativa), de modo que la temperatura inicial f estaría definida sobre $x \geq 0$, sería nula en $x = 0$ y la considería prolongada por todo por medio de $f(-x) = f(x)$.

Procedería considerando que inicialmente la temperatura sobre una de sus partes $[a,b]$ estaba descrita por f y que fuera de $[a,b]$ era nula, reduciéndose así al caso de un intervalo y luego, median te un paso al límite, obtendría soluciones bajo la forma

$$v(x,t) = \int_0^\infty B(y)\, e^{-y^2 t} \cos(yx)\, dy$$

en donde B(y) provenía de los coeficientes de Fourier del caso aco tado.

De esta forma, si $t=0$, necesariamente

$$f(x) = \int_0^\infty B(y) \cos(yx)\, dy$$

y mediante un proceso de "desarrollo del signo integral" deducía

$$B(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \cos(ys)\, ds$$

O sea, obtenía la transformada de Fourier y su inversa para fun ciones pares y con ello la solución buscada venía dada por

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y^2 t} dy \int_0^\infty f(s) \cos(yx) \cos(ys)\, ds$$

que para $t=0$ no es más que la fórmula de inversión.

Con la ampliación del concepto de función que contiene la obra de Fourier, se planteaba automáticamente cuál era el significado que había que dar a este mismo concepto y a las nociones de conti nuidad, derivabilidad, integrabilidad para estas funciones que ya no eran necesariamente algebráicas o trascendentes elementales.

De este modo el proceso de rigorización del Análisis que se ini cia en el s. XIX está estrechamente vinculado con el análisis de Fourier y las necesidades de éste serán el motivo de numerosos procesos fundamentales, como sería la definición definitiva en 1837 por Di richlet de la noción de función, la construcción por Riemann de su integral en 1854, la iniciación en 1877 por Cantor de la teoría de de Conjuntos, etc.

En un trabajo de 1829, en que estudiaba la integral según el método de Cauchy de aproximación por sumas finitas, Dirichlet fué el primero en abordar con rigor el problema de la convergencia puntual de $S[f]$ hacía f a partir de unas expresiones integrales de las sumas parciales:

$$S_n(f,t) = \sum_{-n}^{n} e^{ikt} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{iks} \frac{ds}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, D_n(t-s) \frac{ds}{2\pi}$$

para

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} ,$$

sucesión funcional llamada <u>núcleo de Dirichlet</u>.

La expresión de más arriba no es más que un producto de convolución

$$S_n(f,t) = (f * D_n)\ (t) = \int_T f(s) D_n(t-s)\, dm(s)$$

y en su trabajo, que constituye el primero sobre regularización, Dirichlet procedió siguiendo las ideas de Fourier pero limitando convenientemente la clase de funciones periódicas f que debían ser continuas, salvo a lo sumo con un número finito de saltos, y monótonas a trozos, obteniendo así que

$$\lim S_n(f,t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Este <u>criterio de Dirichlet-Jordan</u> (Jordan introduciría más tarde, en 1881, la noción de función de variación acotada y demostraría la validez del teorema para tales funciones) se puede deducir hoy de un criterio más fuerte que Féjer obtuvo en 1904 y al que nos referiremos más adelante.

En 1854 Riemann reemprende el estudio de la integral con la construcción de la que lleva su nombre con motivo de sus estudios sobre series de Fourier, respecto de las que obtuvo resultados básicos co mo son el llamado lema de Riemann-Lebesque según el que para toda f periódica integrable Riemann se cumple

$$\left|\hat{f}(k)\right| \xrightarrow[|k| \to \infty]{} 0$$

o sea, $\hat{f} \in C_0$, y el teorema de localización según el que las series de Fourier de dos funciones idénticas en un entorno de un punto tienen un mismo comportamiento respecto de la convergencia en el punto, con una manifiesta diferencia entre series de potencias y series trigonométricas.

Precisamente Riemann es quien inagura la teoría general de las series trigonométricas, con sus sutiles diferencias con la de las series de Fourier. Así se tienen series trigonométricas como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \operatorname{sen}(nx)$$

que son convergentes en todo punto, incluso con coeficientes de C_0, pero no son series de Fourier de ninguna función periódica integrable. En relación con esta teoría pronto se planteó el problema de unicidad de series trigonométricas convergentes a una misma función, especialmente desde los trabajos de Heine y Cantor. Así este último demostró primero (1870) que si f es suma puntual de una serie trigonométrica, ésta es única, en 1871 que el resultado subsistía aun con un conjunto excepcional finito para convergencia y en 1872, en un artículo en que se inaugura la teoría de conjuntos, la misma conclusión si el conjunto excepcional poseía derivado n-esímo finito.

2.- La noción de "representación" por medio de una serie trigonométrica

Desde Fourier, y aun antes, el problema que estamos considerando consistió esencialmente en representar funciones periódicas más o menos generales por medio de series trigonométricas y siempre se había considerado que la representación debía efectuarse por medio de una serie puntualmente convergente hacía la función.

Pero con resultados como los de Cantor se observa cómo para funciones muy generales se obtienen conjuntos excepcionales en la convergencia puntual. En 1873, por otra parte, Du Bois- Reymond construyó una función continua periódica con serie de Fourier divergente en un punto prefijado e incluso una con serie de Fourier con conjunto excepcional denso, con lo que terminaba con la creencia generalizada de que la serie de Fourier de una función periódica continua era puntualmente convergente hacia la función. A partir de entonces son numerosos los trabajos en que se estudian condiciones que aseguran la convergencia puntual y entre ellos se encuentra el ya mencionado de Jordan, en 1881.

Además con el cambio de siglo se produciría la aparición de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue que permitiría el establecimiento de unas bases sólidas para la teoría de funciones y con ello llegar a la aclaración definitiva de las cuestiones que tratamos.

El propio Lebesgue utilizaría enseguida su teoría en aplicaciones a la de las series de Fourier en sus "Leçons sur les séries trigonométriques" de 1906 y aun antes. Así en 1903 extendería a funciones integrables (de $L^1(T)$) el lema de Riemann-Lebesgue ya citado y también observaría como para funciones acotadas la única serie trigonométrica para la que se puede obtener representación puntual es la de Fourier.

Progresivamente, debido a la poca utilidad de la convergencia puntual y a resultados como los de existencia de conjuntos excepcionales y a la ausencia de sentido de la convergencia puntual cuando se identifican funciones que coinciden c.p.t., identificación necesaria si se quiere conseguir la inyectabilidad de

$$f \in L^1(T) \to \hat{f} \in C_0 ,$$

fue poniéndose de manifiesto la necesidad de asignar nuevos significados a la palabra "representar" y al concepto de convergencia de una serie de Fourier:

I.- Se tiene así que adquiere interés el estudio de funciones $f \in L^1(T)$ cuya serie de Fourier es <u>convergente c.p.t.</u> hacia f.

Si se consideran funciones de $C(T)$ se pueden precisar los resultados de Du Bois-Reymond y resulta que para cada punto existe un G_δ-denso de $C(T)$ de funciones con series de Fourier divergentes en el punto y de un G_δ-denso de $C(T)$ con series de Fourier cuyos conjuntos excepcionales tienen intersección conteniendo a un G_δ-denso de T.

A pesar de ello en 1915 Lusin establecía la conjetura de que para toda $f \in L^2(T)$ se cumple que la serie de Fourier es convergente c.p.t. hacia f, lo que cerraría en lo esencial el problema de este tipo de convergencia. Esta conjetura sería resuelta afirmativamente pero para ello había que esperar a 1966 en que Carleson demostró el siguiente resultado:

<u>Teorema</u>(de Carleson).- (a) Si $f\,(\log^+|f|)^{1+\delta} \in L^1(T)$ para un $\delta > 0$, entonces $S_n(f,t) = o(\log\log n)$ c.p.t.

(b) Si $f \in L^p(T)$, $1 < p < 2$, entonces

$$S_n(f,t) = o(\log\log\log n) \text{ c.p.t.}$$

(c) Si $f \in L^2(T)$, entonces $S_n(f,t)$ es convergente c.p.t.

Este resultado, cuya demostración requiere la utilización de las técnicas más finas de la teoría con la consideración de métodos funciones (teoremas de interpolación) e integrales singulares, fue completado al año siguiente por Hunt, quien demostró que

$S_n(f,t) \underset{n}{\to} f(t)$ c.p.t. si $f \in L^p(T)$ para $p > 1$. El resultado es falso si $p = 1$ ya que Kolmogorov, que en 1925 ya había demostrado la existencia de sucesiones de índices (n_k) para las que

$$S_{n_k}(f,t) \underset{n}{\not\to} f(t) \qquad \text{c.p.t.}$$

cualquiera que sea $f \notin L^2(T)$, en 1926 comprobó la existencia de series de Fourier de funciones integrables que son divergentes en todo punto.

II. El verbo "representar" aplicado a la serie de Fourier de una función periódica integrable f se ha aplicado también a la sumabilidad y sumabilidad c.p.t. hacia f respecto de diversos métodos de sumación.

A este respecto es fundamental el resultado de Fejer de 1904 en relación con la sumabilidad Cesaro o convergencia de la sucesión de medias aritméticas

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}$$

de las sumas de Fourier y que obtuvo siguiendo el método de Dirichlet de considerar expresiones integrales de las mismas

$$\sigma_n(f,t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t-s) \frac{ds}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) K_n(t-s) \frac{ds}{2\pi}$$

es decir

$$\sigma_n(f) = f * K_n$$

siendo (K_n) sucesión de funciones periódicas (son polinomios trigonométricos) llamada núcleo de Fejer que tiene notables ventajas respecto del Dirichlet como consecuencia de que, además de ser $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$, se cumplen las propiedades $K_n \geq 0$ y

$$\int_{|x| \geq \delta} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow[n]{} 0 \quad \text{si } \delta > 0$$ y de las que resultan por

ejemplo: $f * K_n \xrightarrow[n]{} f$ en media y c.p.t. si $f \in L^1(T)$

$f * K_n \xrightarrow[n]{} f$ uniformemente si $f \in C(T)$, propiedades estas que se conocen con el nombre de teorema de Fejer.

La consideración del núcleo de Poisson $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ (para $r \to 1$) con

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} e^{ikt}$$

y que goza de propiedades análogas a las citadas del núcleo de Fejer do modo que se obtiene el mismo comportamiento respecto de la convergencia para $r \to 1$ de

$$P_r(f) = f * P_r \quad ,$$

proviene de la consideración del método de sumación de Abel (de convergencia de series de potencias $\Sigma\, a_n r^n$ de radio de convergencia ≥ 1, para $r \to 1$) debido a que es

$$P_r(f)\ (t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\ e^{ikt} r^{|k|}$$

Su especial interés estriba en que constituye el elemento de enlace entre variable real y variable compleja, entre series de Fourier y funciones armónicas en el disco, al permitir asignar a cada $f \in L^1(T)$ una función $P[f]$ sobre el disco unidad U, que es armónica, por medio de

$$P[f]\ (re^{it}) = P_r(f)(t)$$

Los teoremas de convergencia de $P_r(f)$ para $r \to 1$ son así teoremas de convergencia radial de $P[f](z)$, que iniciados por Fatou en su tesis (1906) constituyeron un importante éxito de la entonces reciente teoría de la integral de Lebesgue.

III.- Con la iniciación del análisis funcional se llegó a la consideración de series de Fourier representando a algunos tipos de funciones por medio de <u>convergencia en norma</u>. De esta índole son los teoremas que aseguran p.e. que

$$S_n(f) - f \underset{n}{\to} 0 \quad \text{o que} \quad \sigma_n(f) - f \underset{n}{\to} 0$$

en un espacio de Banach B de funciones integrables sobre T, respecto de una norma más fina que la inducida por $L^1(T)$, como son $C(T)$ con la convergencia en media de orden p.

Además de los resultados sobre convergencia uniforme, el antecedente más notable de estos modos de representación está en los estudios que entre 1860 y 1880 se realizaron sobre los coeficientes de Fourier y en particular el teorema de Parseval (éste lo había establecido de manera puramente formal en 1799) según el que si f, f^2 son integrables Riemann se cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Este teorema fue extendido para funciones $f \in L^2(T)$ por Lebesgue en su obra de 1906 y en este mismo año Fatou establecía que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

Estas propiedades condujeron a Fischer y a F. Reisz a demostrar, independientemente el uno del otro en febrero de 1907, el teorema que sirve de billete de ida y vuelta entre $L^2(T)$ (o cualquier espacio de Hilbert con una sucesión ortogonal total, base hilbertiana) y $l^2 = \{(a_n)_{-\infty}^{+\infty} : \Sigma |a_n|^2 < \infty\}$ ya que por medio de los coeficientes de Fourier establece una isometría biyectiva $f \to \hat{f}$ entre ambos espacios, y es $S_n(f) \underset{n}{\to} f$ en $L^2(T)$.

Este resultado, falso si $B = L^1(T)$, se mantiene para todo $L^p(T)$ con $1 < p < \infty$ aunque si $p \neq 2$ su demostración es sensiblemente más delicada. En ella se utilizan técnicas como las de las funciones armónicas en el disco que se han mencionado.

IV.- Por último citemos la forma más débil de representación de f por $S[f]$. Se trata de la que se obtiene para funciones f con $S_n(f)$ convergente hacia f en el sentido de distribuciones de Schwartz

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) S_n(f,t) \frac{dt}{2\pi} \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(t) \frac{dt}{2\pi}$$

que resulta de considerar a S_n y f como formas lineales sobre el espacio $\mathcal{E}(T)$ de las funciones periódicas de clase C^∞ por medio de la integral.

En general una distribución sobre T es una forma lineal continua $T: \mathcal{E}(T) \to \mathbb{C}$ respecto de la convergencia uniforme de las funciones y de las derivadas, a toda medida μ sobre T (y a toda función integrable) se le asocia una distribución T_μ por medio de $T_\mu(g) = \int_T g(s)\,d\mu(s)$, y se define la serie de Fourier de T como

$$S[T] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(k) e_k \quad \text{si } e_k \text{ es } e^{ikx}$$

con

$$\hat{T}(k) = T(e_{-k})$$

Este tipo de representación se ha desarrollado desde los años 50 y con él no sólo se obtiene una mayor comodidad en la utilización de las operaciones fundamentales del Análisis como son los pasos al límite, derivación, convolución, etc. sino que con ella desaparecen las diferencias sutiles entre series de Fourier y series trigonométricas.

En todo caso, si $f \in L^1(T)$, es $S_n(f) \to f$ en el sentido de las distribuciones (como funciones que aparecen multiplicando a otras bajo el signo integral), de mucha más utilidad que la convergencia puntual, y además toda serie trigonométrica

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ink}$$

con coeficients tales que $c_k = O(|k|^n)$ para algún n es la serie de Fourier de una única distribución T, para la que se tendrá $S_n(T) \to T$ en el sentido de las distribuciones.

En suma, el análisis de Fourier consiste en considerar, en el caso de funciones f sobre T, el modo como f esta representada por la familia de sus componentes o "armónicos" $\hat{f}(k)$ respecto del sistema trigonométrico.

Naturalmente surge la cuestión de cuales son las razones profundas por la que de manera espontánea ha surgido históricamente en las aplicaciones el sistema trigonométrico como base del análisis de Fourier sobre T.

Ello sin duda es debido a que de T es fundamental su estructura de grupo a la que va vinculada las transformaciones de T definidas por sus elementos $\alpha \in T$ como traslaciones.

La traslación definida por α actúa sobre las funciones por $U(\alpha)f\,(s) = f(s \dotplus \alpha)$ con lo que $U(\alpha \dotplus \beta) = U(\alpha)\,U(\beta)$.

En general el comportamiento de los $U(\alpha)$ sobre espacios de funcio nes con C(T) será de difícil descripción, lo que conduse al estudio de subespacios F invariantes frente a todos los $U(\alpha)$. Los más senci llos serán los unidimensionales $F = [\chi]$ y como consecuencia de ser $\alpha \to U(\alpha)$ morfismo resulta que la función continua $\chi : T \to \mathbb{C}$ ha de cum plir $\chi(\alpha \dotplus \beta) = \chi(\alpha)\,\chi(\beta)$ y $\chi = 1$ con lo que necesariamente es $\chi(\alpha) = e^{ik\alpha}$ $(\chi = e_k)$ para $k \in \mathbb{Z}$ (salvo en un factor constante).

Si se designa $H_k = [e_k]$, con el análisis de Fourier sobre C(T) se representan las $f \in C(T)$ por sus armónicos o colección de "componentes" en los diversos H_k, invariantes frente a los $U(\alpha)$, y sobre los que $U_k(\alpha) = U(\alpha)|H_k$ consiste en multiplicar por $e^{ik\alpha}$.

3. El análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos

La representación de Fourier sobre $T \approx \mathbb{R}/_{2\pi}$ asigna a cada $f \in L^1(T)$ la función $\hat{f}$ sobre

$$\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} \overset{\text{df}}{=} \int_T f\,\bar{e}_k\,dm$$

en donde e_k es $t \to e^{ikt}$ como función sobre T y $dm = \frac{dt}{2\pi}$ (dm medida de Lebesgue sobre T normalizada).

Sobre $\mathbb{R}$ se define también asignando a cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ la función

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,\frac{dy}{a} = \int_{\mathbb{R}} f\,\bar{e}_y\,dm$$

para una constante $a > 0$, que se toma de modo que resulte una forma sencilla para el teorema de inversión (p.e. $a = \sqrt{2\pi}$), y $e_y: x \to e^{ixy}$.

Análogamente para $f = L^1(\mathbb{Z}) = l^1$ (la medida sobre $\mathbb{Z}$ es la de contar de modo que $\int_{\mathbb{Z}} f(k)\,dm(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k)$) se define

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-ik\alpha} = \int_{\mathbb{Z}} f\,\bar{e}_\alpha\,dm$$

función suma de una serie trigonométrica absolutamente convergente, definida sobre T.

Todas estas nociones se extienden sin dificultad a funciones de varias variables (sobre T^n, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{Z}^n$ respectivamente) y en cualquier caso conducen a una correspondencia $f \to \hat{f}$ de funciones f sobre un grupo abeliano localmente compacto G ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, T grupos aditivos con la topología usual) que son integrables respecto de una medida dm sobre G positiva e invariante por traslaciones

$$\int f(s+t)\,dm(s) = \int f(s)\,dm(s),$$

en funciones $\hat{f}$ sobre un grupo análogo (=T , $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente) con numerosas propiedades comunes. Así se tiene que $f \to \hat{f}$ es continua nula en el infinito(lema de Riemann-Lebesgue).

El análisis de Fourier es el estudio de las transformaciones de Fourier (o familias de "armónicos") de funciones u objetos análogos (p.e. medidas o distribuciones) definidos en espacios como los ya citados.

Por obra de Haar(1933), Von Neumann(1934) y A. Weil (1940 con su obra "L'Integration dans les Groupes Topologiques et Ses Applications") se establecería que sobre G grupo abeliano localmente compacto cualquiera (e incluso para grupos no conmutativos) existe una medida positiva invariante por traslaciones ds (llamada medida de Haar), única salvo múltiplos positivos a ds $(a>0)$, y por lo tanto análoga a la de los ejemplos considerados.

Por otra parte Pontryagin estableció la teoría de dualidad para grupos como G según la cual $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G,T)$ (morfismos continuos) dotado de la topología de convergencia uniforme sobre cada compacto es un grupo abeliano localmente compacto y de modo que $\hat{\hat{G}} = G$ (Pontryagin, Ann. of Math. 1934) y en los ejemplos la correspondencia $\tau \to e_\tau$ permite identificar como grupos topológicos $\mathbb{Z} \approx \hat{T}$, $\mathbb{R} \simeq \hat{\mathbb{R}}$, $T \simeq \hat{\mathbb{Z}}$.

Ello conduce a definir, para cada $f \in L^1(G)$, la función sobre $\hat{G}$

$$\hat{f}(\alpha) = \int_G f(s)\,\overline{\alpha(s)}\,ds$$

obteniendose de esta forma la <u>transformación de Fourier sobre G</u>

$$\mathcal{F} : f \in L^1(G) \to \hat{f} \in C(\hat{G}),$$

base del llamado análisis armónico conmutativo abstracto. Naturalmente la consideración del signo de conjugación en la definición de $\hat{f}$ tiene tan solo motivaciones de tipo histórico y si se suprime se obtiene la llamada <u>cotransformación de Fourier</u> $\overline{\mathcal{F}} : f \to \check{f}$, que es totalmente análoga.

A esta situación general se extienden resultados clásicos de las integrales y series de Fourier y se cumplen:

(a) Toda $\hat{f}$ es nula en el infinito (lema de Riemann-Lebesgue) de modo que se obtiene $\mathcal{F} : L^1(G) \to C_0(\hat{G})$ lineal continua. Es más, $L^1(G)$ es algebra de Banach conmutativa si se lo provee del producto de convolución

$$(f * g)(s) = \int f(s-t)\,g(t)\,dt,$$

$C_0(\hat{G})$ es algebra de Banach de multiplicación (con la norma del supremo) y $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$.

(b) El álgebra imagen $A(\hat{G}) = \mathrm{Im}\,\mathcal{F}$ es uniformemente densa en $C_0(\hat{G})$ (teorema de Stone-Weierstrass).

(c) $\mathcal{F}$ es inyectiva (teorema de unicidad).

No obstante, para obtener un teorema de inversión de Fourier, al igual que en el caso clásico, es preciso limitar la clase de funciones que se considera. Ello se consigue con la consideración de unas funciones de tipo $P(G)$ descritas por Bochner de las cuales las que son de $L^1(G)$ dan lugar a una clase $P^1(G)$ que es álgebra de multiplicación y de convolución a la vez. $P^1(G)$ contiene a las $f \in L^1(G)$ tales que $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ y se cumple:

(d) Sobre $\hat{G}$ se puede determinar una medida de Haar $d\alpha$, llamada armonizada de ds, para la que $\mathfrak{F}$es isomorfismo de $P^1(G)$ sobre $P^1(\hat{G})$ cuyo inverso es $\bar{\mathfrak{F}}$ y que cambia convolución y multiplicación (teorema de inversión).

En el caso $G=T$ se tiene a $\mathfrak{F}$ definida sobre $L^2(G)$ pues éste está contenido en $L^1(G)$ pero esto no ocurre p.e. si $G=\mathbb{R}$. No obstante en cualquier caso se cumple:

(e) $L^{1,2}(G) = L^1(G) \cap L^2(G)$ es denso en $L^2(G)$ como espacio de Hilbert y sobre él $\mathfrak{F}$ es isometría hilbertiana de $L^{1,2}(G)$ en $L^2(\hat{G})$ que se prolonga univocamente a una isometría biyectiva $\mathfrak{F}\mathcal{P} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ llamada transformación de Fourier-Plancherel (t. de Plancherel), cuya inversa es la correspondiente cotransformación de Fourier-Plancherel.

Todo ello no tiene solamente valor de una generalización sino que permite abordar situaciones nuevas (p.e. el análisis de Fourier en T^{ω}) y poner de manifiesto la naturaleza de los problemas en las diversas situaciones.

A este respecto fue especialmente esclarecedora la aplicación por Gelfand y Raikov en los años 40 de la teoría de las álgebras de Banach conmutativas, A, fundada en 1939 por el propio Gelfand.

Según ella $\mathrm{Sp}\, A = \{\chi \in A : \chi(a\, b) = \chi(a)\chi(b),\ \chi \neq 0\}$ constituye un subconjunto de $B' = \{\omega \in A' : \|\omega\| \leq 1\}$ que es localmente compacto para la topología débil de A', compacto si A es unitaria, y considerando a cada $x \in A$ como función sobre A' por restricción da lugar a una función $\hat{x}: \mathrm{Sp}\, A \to \mathbb{C}$ continua que resulta ser nula en el infinito.

Ello da lugar a un morfismo continuo de álgebras de Banach

$$G : x \in A \to \hat{x} \in C_0(\mathrm{Sp}\, A)$$

llamado representación de Gelfand.

Pues bien, $A = L^1(G)$ se llama álgebra del grupo G y es no unitaria si G no es discreto, aunque la ausencia de la unidad es suplida en parte por la existencia de unidades aproximadas o nucleos con propiedades como las de (K_n) y (P_r) en $L^1(T)$. Se identifican como espacios topológicos $\hat{G}$ y Sp $L^1(G)$ por medio de la correspondencia $\alpha \to \chi_\alpha$ tal que $\chi_\alpha(f) = (\mathfrak{F} f)(\alpha)$ (o sea, $\chi_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ \mathfrak{F}$) de manera que por definición

$$(\mathfrak{F} f)(\alpha) = (G\ f)(\chi_\alpha), \text{ es decir } \mathfrak{F} f = G\ f \text{ y } \mathfrak{F} = G.$$

Este hecho permite aplicar las técnicas y resultados de la teoría de Gelfand al análisis de Fourier y fue en éste donde aquella tuvo las primeras aplicaciones más brillantes, concretamente en relación con unos teoremas de Wiener de los años 30 sobre el álgebra $A(T) = A(\hat{Z})$ y sobre $L^1(\mathbb{R})$, como son:

(1) Si $f \in A(T)$ no se anula en ningún punto entonces $\frac{1}{f} \in A(T)$. Este resultado se extiende a otra de Levy según el que si F es holomorfa en un entorno de la imagen de una $f \in A(T)$, también es $F \circ f \in A(T)$, y se trata este hecho del punto de partida del llamado cálculo funcional analítico para álgebras de Banach conmutativas.

(2) Es fácil hallar funciones $f \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\hat{f}$ no se anula en ningún punto (p.e. $f(t) = e^{-|x|}$, para la que $\hat{f}$ es del tipo $\frac{1}{1+y^2}$) En tal caso toda función de $L^1(\mathbb{R})$ es límite de combinaciones lineales $\sum a_k f_{t_k}$ de trasladadas de f y lo mismo sucede en el caso general $L^1(G)$.

Su demostración se basa en el hecho de que, para cualquer $f \in L^1(G)$, la adherencia $I(f)$ de la envoltura lineal de las trasladadas $f_t (t \in G)$ constituye un ideal de $L^1(G)$ y que todo ideal cerrado propio está contenido en un ideal maximal regular (núcleo de un $\chi \in$ Sp$L^1(G)$).

(3) Si f es función sobre T tal que para todo $t_0 \in T$ existe una $f_0 \in A(T)$ (o de un ideal cerrado I de $A(T)$) que coincide con f en un entorno de t_0, entonces f también es de $A(T)$ (del ideal I).

Estos resultados sobre ideales se situan dentro de aquellos para los que más efectiva se ha manifestado la teoría de las álgebras de Banach conmutativas, entre las que forman una clase destacada precisamente las que, como cualquier $L^1(G)$, cumplen (3) y reciben el nombre de algebras regulares.

En ellas se establece el llamado problema de síntesis espectral consistente en averiguar para qué funciones f del álgebra la intersección de ideales maximales que contienen a I(f) coincide con I(f), lo que equivale a que se puede asegurar que es de I(f) toda función g del álgebra que $\hat{g}$ se anula sobre los χ en los que $\hat{f}$ se anula. Si G es compacto, en $L^1(G)$ siempre hay síntesis espectral pero en 1959 Malliavin demostró que ello no es cierto para ningún G no compacto. En general, como ya hemos indicado, se llaman propiedades de síntesis espectral o síntesis armónica a propiedades consistentes en la caracterización de funciones g a partir de sus armónicos $\hat{g}(\alpha)$.

4.- Representaciones de grupos

Si G no es conmutativo, para efectuar una construcción análoga a la que precede, resulta insuficiente la consideración de funciones numéricas U sobre G tales que

$$U(st) = U(s)\ U(t) \qquad (1)$$

debido a que no distinguen el orden de los factores: $U(st)=U(t)U(s)=$ $=U(ts)$.

Por ello se consideran funciones continuas

$$U : s \in G \to U(s) \in L(H)$$

con valores operadores inversibles U(s) de un espacio vectorial de dimensión finita H, o incluso un espacio de Hilbert con una base (hilbertiana) numerable (e_k). Es decir, representaciones continuas U del grupo, pues se impondrá que cumplan (1).

La consideración de tales representaciones aparece p.e. con el estudio de operadores A sobre espacios de funciones invariantes frente a un grupo G de transformaciones s de su dominio. Así el operador de

Laplace Δ es invariante frente a los desplazamientos del plano y el operador de ondas $\Box$ lo es frente a las transformaciones del grupo de Lorentz. Este hecho es útil para la determinación de funciones propias pues si f es propia de valor propio λ, también lo será toda $U(s)f$ transformada de f por cualquier $s \in G$ (es $U(s)f(x) = f(xs)$ si $s : x \to xs$).

Observar que la correspondencia $s \to U(s)$ da lugar a una representación de G, si se consideran funciones f de un espacio vectorial H de funciones sobre el dominio considerado, pues $U(st)f(x) = f(xst) = U(s)U(t)f(x)$.

El estudio de una representación U se procura simplificar mediante la determinación de subespacios cerrados minimales no triviales $H_k \subset H$ que son invariantes frente a todos los $U(s)$; por restricción U da lugar a nuevas representaciones más sencillas $U_k : s \in G \to U_k(s) \in L(H_k)$.

Si el grupo G es compacto se obtienen reducciones de espacios H a descomposiciones del tipo $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots$, suma directa octogonal de tales espacios H_k, que en el caso abeliano son unidimensionales, y conduce a escribir

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \text{ y } U(s) = U_1(s) \oplus U_2(s) \oplus \ldots$$

pues si $f = \sum f_k \quad (f_k \in H_k)$ se tiene $U(s)f = \sum U_k(s) f_k$.

Así en el ejemplo T de las rotaciones sobre T y $H = L^2(T)$, en que se tiene

$$U : \alpha \in T \to U(\alpha) \in L(H)$$

con $U(\alpha)f(s) = f(s + \alpha)$ se tiene que los espacios $H_k = [e_k]$ son invariantes ($U(\alpha)\, e_k(s) = e^{ik(s+\alpha)} = e^{ik\alpha}\, e_k(s)$, de modo que e_k es $U(\alpha)$-propio de valor propio $e^{ik\alpha}$), es

$$U_k : \alpha \in T \to U_k(\alpha) \in L(H_k)$$

con $U_k(\alpha)$ "multiplicar por $e^{ik\alpha}$",

$$H = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} H_k \quad \text{y} \quad U(\alpha) = \oplus\, U_k(\alpha)$$

que se puede considerar de matriz diagonal doblemente infinita, diagonal constituida por los términos $e^{ik\alpha}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Si G es conmutativo no compacto se presentan descomposiciones de H en "suma directa continua" de espacios unidimensionales. Así, si $G = \mathbb{R}$, las funciones $f \in H = L^2(\mathbb{R})$ se expresan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

en el sentido del teorema de inversión de la transformación de Fourier-Plancherel y, para los diversos $x \in \mathbb{R}$, los $e^{i\alpha x}$ constituyen los términos de la diagonal de la "matriz diagonal continua" que representa a $\alpha \to U(\alpha)$ en el sentido de ser los $H_x = [e_x]$ invariantes y $U_x(\alpha)$ multiplicar por $e^{i\alpha x}$.

Si G es no compacto y no conmutativo la situación es mucho más compleja y aparecen descomposiciones "continuas" en subespacios de dimensión finita.

En general el análisis armónico no conmutativo se considera como el estudio de representaciones $U : s \to U(s)$ de grupos localmente compactos no conmutativos G en espacios H. Si H es un espacio de funciones sobre un conjunto en el que actúa G, se llama análisis armónico de H al problema de descomponerlo en subespacios invariantes minimales.

En Análisis se acostumbra a proceder mediante la elección de bases, de modo que cada U(s) es una matriz $(u_{ij}(s))$ de funciones complejas continuas de $s \in G$. Además los elementos de G vienen definidos por parámetros numéricos de modo que los u_{ij} se pueden considerar como funciones numéricas de varias variables, definidas por

$$u_{ij}(s) = (U(s)e_i | e_j) \qquad (2)$$

si (e_i) es base ortogonal. Se procura utilizar el menor número de parámetros para describir a los $s \in G$, a ser posible una sola variable. Entonces las u_{ij} se expresan utilizando solamente la función exponencial y las llamadas funciones especiales de Física.

Así las funciones de Bessel están asociadas a las representaciones del grupo de los desplazamientos del plano y las de Legendre y de Jacobi a las del grupo de rotaciones del espacio.

Esta presentación de las funciones especiales conduce a una presentación natural de sus propiedades básicas, como los distintos teoremas de adición, relaciones de recurrencia, expresiones integrales, etc,a partir de propiedades como (1) y (2) expresadas en términos de las u_{ij} :

$$u_{ij}(st)=\sum_{k} u_{ik}(s)u_{kj}(t) \qquad u_{ij}(s) = \int U(s)e_i(x)\overline{e_j(x)}\,dx$$

Para terminar indiquemos unas pocas referencias en la que se desarrolla lo expuesto y otras cuestiones del análisis de Fourier y en las que se puede encontrar una extensa bibliografía.

Para una referencia histórica y una panorámica del tema:

KLINE,M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford U. P.,1972.

WEISS,G. Armonic Analysis en Studies in Mathematics,Vol.3, Prentice-Hall,1965.

Para series e integrales de Fourier y el Análisis armónico clásico:

ZYGMUND,A. Trigonometrical Series I y II. Cambridge U.P., 1959.

KATZNELSON,Y. An introduction to Harmonic Analysis, Wiley, 1968.

EDWARDS, R.E. Fourier Series, a Modern Introduction. I y II, Holt, Rinehart & Winston,1967.

STEIN,E. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.Princeton U.P., 1970.

STEIN-WEISS Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton U.P., 1971.

Para el análisis de Fourier en distribuciones y sus aplicaciones:

GELFAND, I. y colaboradores Les distributions Dunod, 1962

DUISTERMAAT, J. Fourier integral operators Mimeogr., Courant Institut, N.Y.U., 1973

Para el análisis de Fourier en grupos:

GELFAND-RAIKOV-CHILOV Les Anneaux Normés Commutatifs. Gauthier-Villars 1964.

HEWITT-ROSS Abstract Harmonic Analysis I y II Springer-Verlag, 1963-1970.

RUDIN, W. Fourier Analysis on Groups. Interscience, 1962.

VILENKIN, N. Ja. Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des groupes. Dunod, 1969.