Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UN RECIPROCO DE UN TEOREMA DE A. WILANSKY

Miguel A. Canela

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Barcelona

ABSTRACT: In this paper, we try to state a reciprocal of a result of A. Wilansky: The dual of a Mazur space, provided with the topology of convergence on null sequences, is complete. Until now, we have proved this converse when the space is complete with respect to Mackey-convergence. To do this, we use a characterization of this type of completeness given by P. Dierolf.

En (6), A. Wilansky introduce el concepto de espacio localmente convexo (e.l.c.) de Mazur del siguiente modo: Un e.l.c. separado E es de Mazur si toda forma lineal sobre E, sucesionalmente continua, es continua. De otro modo, si E'contiene todas las formas lineales que transforman sucesiones convergentes a cero de E en sucesiones convergentes a cero en el cuerpo correspondiente.

En (2), se da el siguiente resultado: si E es un espacio de Mazur, E' es fuertemente completo. La demostración puede hacerse siguiendo el guión de la demostración clásica de que el dual fuerte de un e.l.c. metrizable es completo. Esta demostración puede adaptarse para probar que el dual de un espacio de Mazur provisto de la topología de la convergencia sobre las sucesiones nulas de dicho espacio, es completo. Este resultado se prueba también, aunque de forma indirecta, en (5).

Esta condición necesaria para que un e.l.c. sea de Mazur guarda un gran paralelismo con la caracterización de G. Köthe de los e.l.c. semibornológicos (véase (4)): E es semibornológico si y solamente si E' provisto de la topología de la convergencia sobre las sucesiones Mackey-nulas de E es completo. No obstante, ni la demostración de Köthe, ni la más sencilla dada por H. Hogbe-Nlend en (3), parecen poder adaptarse a esta situación. Debe notarse además, que mientras el carácter semibornológico, es un invariante dual, no sucede lo mismo con la propiedad de ser un espacio de Mazur, como se deduce del hecho de que la topología $\sigma(l^1,c_0)$ sea de Mazur, y en cambio no lo sea la topología de Mackey de este par. Daremos aquí un recíproco en el caso en que E es completo en el sentido de Mackey.

<u>Teorema</u>: Sea E un e.l.c. Mackey-completo, tal que su dual E' dotado de la topología de la convergencia sobre las sucesiones nulas de E sea completo. Entonces E es de Mazur.

Resumen de la demostración: La envoltura absolutamente convexa cerrada de una sucesión nula de E es compacta (ver (1)), y la topología de la convergencia sobre estas sucesiones es compatible con la dualidad $\langle E',E\rangle$. Si u es sucesionalmente continua sobre E, nos basta ver, por el teorema de Grothendieck, que u es débilmente continua sobre las envolturas absolutamente convexas cerradas de las sucesiones nulas de E, lo que resulta al analizar la estructura de dichas envolturas.

BIBLIOGRAFIA.-

(1) P. DIEROLF: Une caractérisation des espaces vectoriels topologiques complets au sens de Mackey. C. R. Acad. Sci. Paris t. 283 (1976), pp. A245-A248.

(2) J. K. HAMPSON and A. WILANSKY: Sequences in locally convex spaces. Studia Math. 45 (1973), pp. 221-223.

(3) H. HOGBE-NLEND: Techniques de bornologie en Théorie des espaces vectoriels topologiques et des espaces nucléaires. Summer School in Topological Vector Spaces, Springer Lecture Notes 331 (1973).

(4) G. KOTHE: Une caractérisation des espaces bornologiques. Colloque sur l'analyse fonctionnelle, Louvain, C.B.R.M. (1961), pp. 39-41.

(5) J. H. WEBB: Sequential convergence in locally convex spaces. Proc. Camb. Phil. Soc. 64 (1968), pp. 361-364.

(6) A. WILANSKY: Topics in Functional Analysis. Springer Lecture Notes 45 (1967).