Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

PROBABILITÀ E INTUIZIONE
Un'indagine nella Scuola Secondaria di Secondo Grado

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Arianna Benincà

III Sessione
Anno Accademico 2017-2018

Al Nonno Gigio

"Non tutti possono
tendendo le braccia
afferrare la sorte
e schiaffeggiarle la faccia."
CCCP - Fedeli alla Linea

Indice

Introduzione

> *"Si esporranno infine i principi del calcolo delle probabilità. In tempi in cui tutti i cittadini sono chiamati a decidere delle loro sorti e di quelle dei loro simili, è per loro importante conoscere i principi di una scienza che fa apprezzare, nel modo più esatto possibile, la probabilità delle scelte e quella dei fatti. È importante soprattutto imparare a non fidarsi delle intuizioni, anche delle più verosimili. A questo scopo non c'è nulla di più adatto della teoria delle probabilità, dove spesso i risultati rigorosi contraddicono le intuizioni. D'altra parte, le numerose applicazioni di questa teoria, alla natalità e alla mortalità, alle elezioni e alle assicurazioni, che occorre perfezionare ed estendere ad altri aspetti della società, la rendono una delle parti più utili delle conoscenze umane."*
> [5]

Con queste parole, il 20 gennaio del 1795, Pierre Simon Laplace concludeva, affiancato da Joseph Louis Lagrange, la lezione inaugurale del primo corso di matematica dell'École Normale di Parigi.
L'intervento di Laplace, tuttora attuale e condivisibile, da un lato presenta la teoria della probabilità come una disciplina applicabile a disparati aspetti del vivere comune; dall'altro, non manca di sottolineare come essa rappresenti una fonte di luce (e di razionalità) all'interno dell'insidioso mondo dell'intuizione che permea, più che mai, il dominio della probabilità.
Queste due peculiarità rappresentano i punti cardine attorno ai quali si è sviluppato questo lavoro di tesi.

Nei giudizi in condizioni di incertezza si riscontra, come osserva Laplace stesso, una forte componente intuitiva che può indurre in errori di valutazione. Tale componente, non a priori negativa ma anzi costitutiva e fondamentale del ragionamento razionale, può derivare dall'esperienza o da forme ingenue di conoscenza pregressa, e in tal caso prende il nome di "intuizione primaria" [7]. Numerosi sono i libri e gli articoli di ricerca che indagano l'influenza di questa facoltà nel processo di insegnamento e apprendimento della teoria della probabilità, in particolare mettono in risalto come il suo esercizio (inconsciamente) inappropriato comporti la formazione di misconcezioni e procedimenti euristici inesatti. I bias intuitivi che ne derivano possono sopravvivere ad un processo di istruzione compromettendo, così, la formazione di quella che Fischbein ha definito "intuizione secondaria", la quale nasce dall'integrazione della primaria (o dal suo superamento) con i concetti formali e il modus operandi propri della teoria, attraverso un lungo lavoro di pratica che conduca all'appropriazione del modello probabilistico e al suo successivo impiego.
Partendo dalla consapevolezza che il campo della probabilità non fosse totalmente sconosciuto ai ragazzi, anche per chi non lo avesse mai affrontato direttamente, ma pullulasse di immagini provenienti da ragionamenti intuitivi, esperienze personali o dal "sapere collettivo", si è voluto andare ad indagare che cosa popolasse tale terreno non ancora coltivato dall'educazione scolastica. L'idea che ha mosso tale intento è quella, sostenuta anche da Fischbein in [10], per cui alla base dell'introduzione curricolare di un nuovo argomento, così pervaso da numerosi aspetti derivanti dalla conoscenza di senso comune come è la probabilità, sia necessaria un'operazione preliminare di indagine da parte dell'insegnante al il fine di prendere atto di "quello che c'è già". Tale constatazione può rappresentare un supporto alla progettazione didattica del docente dandogli l'opportunità di integrarla con le concezioni primitive dei suoi studenti, confutandole o utilizzandole per sostenere il suo discorso. In questo modo è possibile prendere di mira apertamente le misconcezioni auspicando alla non formazione di quelli che vengono chiamati

"modelli parassiti" [2, p. 45].
Con questa intenzione è stato costruito un questionario somministrato, poi, a tre classi di scuola secondaria di secondo grado (una seconda ed una quarta liceo scientifico, una quarta liceo classico) che non avevano ancora affrontato la teoria della probabilità in tale ciclo scolastico. I quesiti presenti all'interno del test avevano una natura qualitativa e informale essendo volti a rilevare le strutture argomentative sottostanti le risposte, piuttosto che le capacità risolutive e di calcolo, facendo riferimento anche ad ambienti familiari agli studenti in modo da cercare di scardinare la probabilità dal solo ambito di lanci di dadi o di monete.
Dall'analisi dei risultati ottenuti, si è potuta tracciare una mappa delle conoscenze primitive inerenti alla materia grazie alla quale sono stati organizzati due percorsi didattici all'interno delle due classi del liceo scientifico. Nelle due classi la probabilità è stata affrontata in maniera diversa (soprattutto per necessità di tempo e di indicazioni ministeriali) anche se l'atteggiamento era il medesimo e verteva su tre punti fondamentali (ripresi da [19]):

- "La motivazione a capire le radici dei misconcetti, e non solo ad eliminarli";
- "Lo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto";
- "L'accettazione della ragionevolezza dei misconcetti e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come prerequisito per modificarli".

Parimenti, ad accomunare i due percorsi vi era l'orizzonte ovvero la volontà di creare ambienti di lavoro informali, grazie allo svolgimento di attività in piccoli gruppi, in cui gli allievi potessero cooperare e dibattere tra loro su eventuali incongruenze che potevano emergere nel corso della risoluzione dei problemi somministrati, derivanti da intuizioni e ragionamenti diversi. In questo modo gli studenti erano spronati ad esplicitare ai loro compagni le loro supposizioni implicite (senza il timore di essere giudicati dall'insegnante),

a discuterne ed, eventualmente, a rivedere il proprio punto di vista.
Tanto le risposte dei questionari, quanto lo svolgimento delle attività, hanno rappresentato, pertanto, l'occasione per trattare in maniera diretta con i ragazzi le misconcezioni e i ragionamenti intuitivi inadatti emersi, abbracciando l'ottica promossa, ancora una volta, da Fischbein [8]:

> *"Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. A nostro parere, così come avviene nei processi psicoanalitici, lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti. Ciò può essere fatto discutendo con gli studenti gli errori dovuti specificatamente all'intuizione e cercando insieme a loro l'origine di questi errori. In ogni caso, questo processo di chiarificazione verbale non è sufficiente. Gli studenti devono sviluppare la capacità di analizzare le loro risposte, di rendere esplicite il più possibile le loro supposizioni implicite, di usare le strategie formali per verificare tali supposizioni."*

Ad alcuni mesi di distanza dalla fine delle lezioni, è stato somministrato un secondo questionario costruito sulla falsa riga del primo, per verificare se si riscontrassero cambiamenti nelle tipologie di risposte (imputabili ad una sorta di reindirizzamento dell'intuizione primaria verso un modello più consistente) o se, al contrario, fossero sopravvissute delle rappresentazioni mentali intuitive fuorvianti.

All'interno dei percorsi, particolare attenzione è stata riservata al ruolo dell'informazione nella determinazione della probabilità degli eventi. Nella fattispecie, si è sottolineato come l'acquisizione di talune informazioni possa modificare la valutazione fatta riguardo alla realizzazione di un evento. Nel fare ciò si è seguito l'illuminante pensiero di de Finetti che, attraverso la sua "visione soggettivista", denota i contorni della probabilità come strumento (per non dire modello) proprio dell'osservatore mediante il quale egli assegna un valore al grado di fiducia che ripone nel verificarsi di un'ipotesi, sottoli-

neandone il carattere relativo e "personalistico" [4, p. 260].
Lo stesso approccio è stato utilizzato anche con gli studenti nell'introdurre la nozione di probabilità, rimarcando come il suo valore venisse a dipendere univocamente dallo stato delle conoscenze del singolo individuo relative ad un certo fenomeno (in un dato momento) o, per dirlo con le parole di de Finetti:

> *"Come disse (se non confondo) Poincaré, ≪la probabilità dipende in parte dalla nostra conoscenza e in parte dalla nostra ignoranza: da ciò che sappiamo e da ciò che non sappiamo≫."* ([4, p. 261])

Struttura della tesi

Questo lavoro di tesi si apre con una panoramica su alcune ricerche in didattica della matematica e psicologia inerenti al ruolo dell'intuizione nell'ambito della teoria della probabilità, assumendo la distinzione (non sempre netta) operata da Fischbein tra "intuizione primaria" e "secondaria". In particolare, nel Capitolo 1, vengono presi in esame alcuni dei principali bias riportati negli articoli di ricerca dovuti a ragionamenti puramente intuitivi e particolarmente resistenti. La selezione delle misconcezioni è stata condotta sulla base dei principali aspetti che si volevano andare ad indagare negli studenti, prima e dopo la trattazione dell'argomento, utilizzando le ricerche citate come guida nell'analisi.
Viene, inoltre, esposto il pensiero di de Finetti che, come già anticipato, rappresenterà il filo conduttore della presentazione della probabilità in aula.

Constatando come la probabilità sia una competenza fondamentale nella formazione di una cittadinanza che guardi al mondo con occhi razionali e consapevoli, nel Capitolo 2 si prendono in analisi le Indicazioni Nazionali attualmente vigenti, a partire dalla scuola primaria sino alle diverse scuole secondarie di secondo grado, andando ad osservare lo spazio riservatogli nella teorica programmazione scolastica.

Successivamente, si fa riferimento alle prove INVALSI e all'esame di Stato del Liceo Scientifico nonché ai relativi quadri di riferimento in cui la probabilità compare con un ruolo da protagonista, al pari delle altre branche della matematica.

Nel Capitolo 3 si descrivono i percorsi svolti in due classi differenti del Comune di Bologna: nella II A del Liceo Scientifico Malpighi e nella IV B del Liceo Scientifico A. B. Sabin. Sono messe in evidenza le differenze dei due percorsi (dettate, in primo luogo, dalle tempistiche e dalle Indicazioni Nazionali) e le caratteristiche comuni. In particolare, si fa riferimento al modo in cui sono stati introdotti i concetti e le nozioni base della probabilità e vengono descritte le attività di gruppo orchestrate per favorire lo scambio di idee tra pari e l'esplicitazione di ragionamenti impliciti. Si conclude con una breve analisi sullo svolgimento dei lavori di gruppo e sulle difficoltà emerse.

Le attività di cui si parla nel terzo capitolo nascono dall'analisi dei risultati del questionario somministrato agli stessi studenti prima di affrontare la teoria della probabilità. La struttura e le finalità del questionario sono il tema centrale del Capitolo 4, nel quale vengono descritti i singoli quesiti spiegando le motivazioni che hanno portato alla loro formulazione, facendone una breve analisi a priori prima di passare all'esame dei risultati ottenuti. Le risposte degli studenti sono suddivise in categorie a seconda delle argomentazioni e del tipo di ragionamento che sembra trapelare cercando, come sottolineato in precedenza, di assumere il punto di vista dello studente e non riducendo le lenti dell'analisi alla mera ricerca della risposta corretta. A fare da guida in questa operazione sono gli articoli di ricerca presentati nel Capitolo 1.
Viene presentato poi, in maniera analoga al precedente, il secondo questionario successivo alla fine delle lezioni. L'analisi delle risposte di quest'ultimo è condotta considerando solamente gli studenti che hanno svolto entrambi i test, facendo un confronto fra le risposte (e le categorie a cui sono ricondotte) di quesiti corrispondenti tra questionario iniziale e finale.

Il Capitolo 5 rappresenta il capitolo conclusivo in cui vengono messi in evidenza ulteriori aspetti riscontrati nell'andamento generale delle risposte degli allievi, in particolare legati all'abuso della definizione classica di probabilità e al considerare non calcolabili le probabilità di certi eventi (nel momento in cui questi vengono percepiti come "distanti dal mondo matematico"). Ciò permette di ampliare il discorso con delle considerazioni riguardo alla formazione di un appropriato modello probabilistico, sfruttando tre interviste (posteriori all'ultimo questionario) fatte ad altrettanti studenti del Liceo Malpighi che avevano mostrato, nelle loro risposte, dei fattori discordanti tra "quello che accade nella realtà" e "quello che predice il modello". Il capitolo e la tesi terminano con delle valutazioni a carattere personale.

In Appendice sono riportate le trascrizioni dei due questionari e la copia integrale delle verifica a valenza sommativa somministrata agli studenti del Sabin, progettata in collaborazione con il docente.

Capitolo 1

Lenti teoriche a supporto dell'indagine

Il presente capitolo si apre con una panoramica su alcune ricerche in didattica della matematica e psicologia inerenti al ruolo dell'intuizione nell'ambito della teoria della probabilità, assumendo la distinzione (non sempre netta) operata da Fischbein tra "intuizione primaria" e "secondaria". In particolare vengono presi in esame alcuni dei principali bias riporatati negli articoli di ricerca dovuti a ragionamenti puramente intuitivi e particolarmente resistenti. La selezione delle misconcezioni è stata condotta sulla base dei principali aspetti che si volevano andare ad indagare negli studenti, prima e dopo la trattazione dell'argomento, utilizzando le ricerche citate come guida nell'analisi.
Viene, inoltre, esposto il pensiero di de Finetti che, come già anticipato, rappresenterà il filo conduttore della presentazione della probabilità in aula.

1.1 Probabilità e intuizione

Il concetto di probabilità è di fondamentale importanza all'interno del pensiero scientifico. Negli ultimi 350 anni, a partire dalla famosa corrispondenza tra Pascal e Fermat nel 1654 sul gioco d'azzardo, la teoria della proba-

bilità è diventata un'importante branca della matematica con numerosissime ripercussioni anche su diverse altre discipline, scientifiche e non.
Da quando l'insegnamento della teoria della probabilità è stato introdotto a scuola, si sono aperte importanti questioni di carattere didattico; non ultima quella riguardante il ruolo dell'intuizione nel processo di insegnamento/apprendimento di tale materia.
Non esiste una definizione univoca di cosa sia l'intuizione: nella sua accezione più generale, denota conoscenza immediata o, parafrasando lo psicologo J. S. Bruner, essa implica l'atto di afferrare il significato della struttura di un problema senza una dipendenza esplicita dall'apparato analitico [3, pp. 102-105].
Analoga è la visione di E. Berne, psicologo canadese secondo cui l'intuizione è conoscenza basata sull'esperienza e acquisita attraverso il contatto sensoriale con l'oggetto (di indagine), senza che il soggetto che ha avuto l'intuizione sia in grado di formulare, a sé stesso o ad altri, come sia giunto a tali conclusioni [1, pp. 203-226].
Va da sé che la componente intuitiva, più o meno presente e sviluppata in ciascuno di noi, è un fattore da non ignorare o sottovalutare nel processo di insegnamento e apprendimento, potendo essere da essa favorito od ostacolato a causa della presenza di bias intuitivi, pre-esistenti nella mente degli studenti. Con il termine "bias intuitivo" si intende un giudizio (o pregiudizio) o una credenza sviluppati dall'individuo sulla base di processi cognitivi legati all'intuizione e, pertanto, ritenuti da egli veritieri ma che, di fatto, possono portare ad errori.
L'intuizione, infatti, può interagire in vari modi con l'apprendimento di un nuovo concetto:

(a) L'informazione trasmessa dall'insegnante incontra un background intuitivo che favorisce la sua accettazione e il suo apprendimento (per esempio: "la distanza più breve tra due punti è la linea retta");

(b) L'intuizione si oppone: è presente un bias intuitivo non compatibile, il quale va in contraddizione con una verità oggettiva e dimostrabile (per esempio: "l'insieme dei numeri razionali è equipotente all'insieme dei numeri naturali");

(c) Non è presente nessun tipo di pregiudizio intuitivo relativo a ciò che viene insegnato (per esempio: "le mediane di un triangolo si intersecano nello stesso punto").

Nel processo di insegnamento la componente intuitiva presente negli studenti non deve perciò essere ignorata. A tal proposito, E. Fischbein (psicologo ed insegnante di matematica) suggerisce in un articolo come all'inizio dell'insegnamento di un dato argomento sia opportuna un'indagine da parte dell'insegnante per sondare il "terreno intuitivo" presente nei suoi studenti, così come la costruzione di un edificio è preceduta dall'analisi della natura e della potenziale resistenza del terreno su cui si è intenzionati a costruire [10]. A differenza del suolo, però, nel processo di insegnamento il docente non deve ritenere data ed immutabile la base intuitiva su cui desidera costruire un particolare sistema concettuale, ma può intervenire per modellare e correggere gli eventuali bias.

Fischbein chiama "intuizione primaria" tale substrato intuitivo derivante dalle esperienze dell'individuo, precedente ad ogni intenzionale processo di insegnamento sistematico, e da esso indipendente.

Individua, poi, la cosiddetta "intuizione secondaria" come l'insieme di acquisizioni ottenute in seguito ad un processo di istruzione e che permettono all'individuo di trascendere le acquisizioni cognitive primarie [7, p. 9]. Questo tipo di intuizione si forma attraverso l'educazione scientifica, soprattutto scolastica, ma non può essere ridotto semplicemente all'ascolto della spiegazione dell'insegnante e all'apprendimento meccanico. Affinché acquisizioni di nuovi concetti o meccanismi possano essere ritenute intuizioni, c'è bisogno innanzitutto di tempo: i nuovi concetti devono essere consolidati ed integrati coerentemente con il modo di ragionare sviluppato fino a quel momento, devono diventare stabili e assumere le caratteristiche di immediatezza, spontaneità e convinzione tipiche dell'intuizione stessa. Ciò presuppone, dunque, grande pratica e senso di familiarità.

Talvolta, quindi, o non è presente nessun tipo di intuizione primaria riguardo ad un dato argomento, oppure ciò che essa suggerisce è errato e va pertanto reindirizzata dal docente verso la giusta direzione affinché non ostacoli la costruzione di una corretta intuizione secondaria.

Tutto quanto detto trova piena applicazione nell'ambito dell'insegnamento della probabilità:

"In no mathematical domain is blind faith in techniques more often denounced than in probability; in no domain is critical thought more often required" [11, p. 167]

questo affermava H. Freudenthal nella sua opera parlando della teoria della probabilità.
La teoria della probabilità, infatti, richiede delle attitudini cognitive che (forse più che in altre branche della matematica) Fischbein non esita a definire "innaturali" [7, p. 16]. Il fatto è che, continua l'autore, possediamo solamente un magro substrato intuitivo (i.e. intuizione primaria) riguardante la probabilità rispetto, per esempio, a quanto concerne la geometria in cui, fin dalla prima infanzia, sviluppiamo intuizioni spaziali.
In una ricerca da lui svolta e pubblicata sempre in [7, da p. 117], Fischbein mostra come l'intuizione di caso, frequenza relativa e probabilità vengano sviluppati con l'età a partire dal cosiddetto "periodo delle operazioni concrete" (che corrisponde ai sette anni circa), in funzione dello sviluppo intellettuale e dell'esperienza quotidiana del bambino.
Dopo una prima fase in cui casuale e determinato sono visti come assolutamente contrapposti, l'allievo comincia a raggruppare le relazioni fra fenomeni casuali attraverso degli schemi operazionali. Si tratta del "periodo delle operazioni formali" che riguarda i ragazzi dagli 11-12 anni, i quali iniziano a relazionarsi col concetto di caso che diventa così intellegibile: la sintesi tra la dimensione della casualità e la dimensione delle operazioni porta lo studente al concetto di probabilità. Tale sintesi, tuttavia, non avviene spontaneamente e non è completata in questa fascia d'età: la fusione tra interpretazione probabilistica e interpretazione deterministica è instabile e questa condizio-

ne è favorita, secondo l'autore, dal sistema educativo che tende a coltivare solo una delle due interpretazioni. I due schemi continuano a coesistere nella mente del ragazzo anche senza fondersi del tutto: nella ricerca condotta da Fischbein emerge che l'allievo è alla ricerca di dipendenze casuali che riducano il grado di incertezza del problema, anche in situazioni in cui tali dipendenze non sussistono.

Questo tipo di atteggiamento rientra nella tendenza verso un'interpretazione deterministica ed univoca dei fenomeni. L'autore accusa l'educazione a lui contemporanea, quella degli anni '70, (ma, per certi versi, il discorso può essere esteso anche ad oggi) di ipersemplificare l'interpretazione scientifica e razionale dei fenomeni rappresentandola come una ricerca di dipendenze univoche, causali o logiche. Tutto ciò che non risulta conforme ad uno stretto determinismo, tutto ciò che è associato all'incertezza, alla sorpresa o alla casualità è visto come fuori dalla possibilità di una spiegazione consistente, razionale e scientifica. Il risultato è che quella che l'autore chiama "*intuition of chance*" risulta inconciliabile con la struttura del pensiero logico ed è relegata ad uno status inferiore di metodo interpretativo inadeguato e lontano dagli standard scientifici. Il pensiero logico-scientifico dell'adolescente è così costruito trascurando questo tipo di intuizione e, dunque, senza tutte le strutture formali capaci di tradurre il possibile in termini di costrutti razionali.

A risentirne è sia l'intuizione primaria che viene, in un certo senso, abbandonata a sé stessa sia quella secondaria che tenta di instaurarsi praticamente ex novo durante l'introduzione della teoria della probabilità.

Fischbein riporta [7, da p. 129] degli esempi di problemi somministrati a ragazzi tra i 13 e i 17 anni (i quali già possiedono le conoscenze e competenze necessarie a risolverli), che mettono in evidenza un conflitto tra la comprensione della soluzione corretta dell'esercizio e ciò che invece suggerisce l'intuizione. Nei casi riportati, una volta che la corretta costruzione logica del problema viene spiegata agli allievi, essa risulta perfettamente chiara. Tuttavia l'intuizione non la accetta: ciò che manca è il sentimento di "auto-evidenza".

L'intuizione rimane distinta dal ragionamento corretto. Quando ai soggetti viene chiesto di risolvere un problema di tal genere, questi semplicemente applicano, in maniera inappropriata, schemi e procedure logico-matematici che hanno acquisito in maniera naturale e attraverso l'istruzione scolastica. Il risultato è una soluzione scorretta che apparentemente è in accordo sia con il ragionamento deduttivo sia con l'intuizione. Questo accade perché la base intuitiva (primaria e, soprattutto, secondaria) non è sufficientemente sviluppata e, perciò, non è in grado di seguire le procedure di un ragionamento sofisticato, né di guidare la selezione di tali procedure o di valutare la plausibilità del risultato ottenuto.

1.2 Misconcezioni e bias intuitivi

Nei casi di decisioni in condizioni di incertezza, l'approccio alla soluzione del problema può non seguire un percorso chiaro ma basarsi sull'intuito, attenendosi ad un procedimento euristico difficilmente formalizzabile. Questo modo di ragionare, fortemente fondato sull'intuizione, può indurre in errore a causa della presenza di misconcezioni e bias che lo studente sfrutta inconsapevolmente. Tali misconcezioni possono coesistere pacificamente con i concetti corretti ed interferire con l'abilità degli allievi di applicare tali concetti in maniera consistente e con fiducia [16], [14]. Sebbene gli studenti possano apprendere regole e procedure della probabilità e siano in grado di risolvere correttamente gli esercizi, gli stessi studenti fraintendono le idee e i concetti base e spesso ignorano le regole nel momento in cui esprimono il loro giudizio riguardo eventi incerti [12], [13], lasciandosi piuttosto guidare dalla loro intuizione (con bias annessi).
Questo, come asserito precedentemente, è da imputare anche al fatto che non c'è corrispondenza diretta e automatica tra il comprendere un argomento e il crederci; in altre parole, acquisire le conoscenze e le competenze relative ad un dato tema (come la probabilità) non implica l'annetterlo al proprio modo di pensare e ragionare, ampliando il dominio della intuizione secondaria.

Un modo suggerito e sperimentato da due ricercatori [15, p. 32] per rendere coscienti i ragazzi della presenza di tali misconcezioni e per tentare di eliminarle è quello di innescare (e poi risolvere) un conflitto cognitivo mettendo in risalto, attraverso delle attività, le eventuali contraddizioni nascenti dall'uso errato dell'intuizione. Tuttavia, non è garantita la buona riuscita di tale metodo: questi tipi di preconcetti non sono errori isolati dovuti, per esempio, ad una incomprensione delle informazioni; costituiscono, piuttosto, parte integrante del modo di pensare, profondamente radicato in molte persone.
Sono elencati di seguito alcuni bias intuitivi che entrano in gioco nel momento dell'assegnazione di una probabilità e che corrispondono a quelli che si sono voluti indagare in questo lavoro di tesi. Tali bias sono stati ampiamente studiati in numerose ricerche; fra queste, si farà riferimento principalmente (per le sezioni relative a rappresentatività e disponibilità) a quella condotta da due psicologi cognitivi, A. Tversky e D. Kahneman [18].

Rappresentatività

Molti dei problemi di natura probabilistica possono essere ricondotti a questioni del tipo: "Qual è la probabilità che l'oggetto A appartenga alla classe B?", oppure "Qual è la probabilità che l'evento A abbia origine dal processo B?". Nel rispondere a queste domande, si fa spesso appello all'euristica della rappresentatività, così chiamata poiché fa sì che la probabilità di A sia valutata in base a quanto A sia rappresentativo di B, in base al grado in cui A assomigli a B. In questo modo, se per esempio A è ritenuto essere altamente rappresentativo di B, la probabilità che A abbia origine da B è giudicata molto alta.
A titolo esemplificativo, si consideri un individuo descritto come segue:

"Steve è molto timido ed introverso, veramente disponibile, ma con poco interesse verso le persone o verso il mondo reale. Un'anima mite e precisa, che ha bisogno di ordine e struttura ed ha la passione per i dettagli."

Nel valutare la probabilità che Steve svolga una determinata professione (per esempio contadino, commesso, pilota di aerei, libraio o fisico) seguendo la logica della rappresentatività, si tiene conto di quanto la descrizione fatta di Steve assecondi lo stereotipo di ciascuna delle occupazioni elencate. Ricerche con problemi di questo genere hanno mostrato come le professioni date venissero ordinate nello stesso modo a seconda che il criterio fosse la probabilità (che l'individuo di cui era descritto il carattere svolgesse un dato impiego) o la somiglianza (con lo stereotipo).
Questo approccio nel valutare la probabilità può portare a seri errori in quanto la somiglianza, o rappresentatività, non è necessariamente influenzata dagli stessi fattori che invece interessano l'assegnazione di una probabilità.
Vediamo, ora, come si possono declinare i vari bias intuitivi legati a questa euristica.

Insensibilità alla probabilità a priori Uno degli effetti che si evidenziano nella valutazione della probabilità per rappresentatività è il non tener conto delle frequenze o della cosiddetta probabilità a priori. Nel caso sopra citato, per esempio, il fatto che ci siano molti più contadini che librai nella popolazione dovrebbe essere tenuto in considerazione in una stima ragionevole della probabilità che Steve svolga una o l'altra professione. Al contrario, questo tipo di considerazioni non intacca la vicinanza di Steve allo stereotipo dei librai o dei contadini che però, a causa di questo bias, diventa il criterio per l'assegnazione della probabilità.

Insensibilità alla grandezza del campione Nel valutare la probabilità di ottenere un particolare risultato per un campione estratto da una specifica popolazione, si fa uso sovente dell'euristica della rappresentatività. Questa induce a trascurare la grandezza del campione nel momento in cui si intende assegnare la probabilità che esso presenti determinate caratteristiche (per esempio rispetto ad un parametro caratteristico della popolazione originale): la similarità di una statistica

rispetto alla popolazione viene considerata indipendente dalle dimensioni del campione, perciò a campioni di grandezze diverse viene assegnata la stessa distribuzione di probabilità.
Si consideri il seguente esempio che mette in evidenza quanto sopra riportato:

"In una certa città ci sono due ospedali. In quello più grande nascono circa 45 bambini ogni giorno mentre in quello più piccolo circa 15. Come è risaputo, all'incirca il 50% di tutti i bambini sono maschi. Tuttavia, la percentuale esatta varia di giorno in giorno: a volte è più alta del 50%, a volte è più bassa.
Per un anno, ogni ospedale registra i giorni in cui più del 60% dei bambini nati sono maschi. Quale ospedale ritieni che abbia riportato più giorni di questo tipo?

- L'ospedale maggiore
- L'ospedale minore
- Circa lo stesso numero di giorni per entrambi gli ospedali"

Più della metà (53%) degli studenti universitari a cui è stata rivolta questa domanda ha risposto che il numero di giorni segnati non sarebbe variato a seconda della dimensione della struttura. Questo perché i due campioni sono ritenuti ugualmente rappresentativi della popolazione, non tenendo conto del fatto che più il campione è grande, meno è probabile allontanarsi dal valore 50%.
Evidentemente questa fondamentale nozione di statistica non appartiene al repertorio intuitivo.

Misconcezioni del caso Talvolta ci si aspetta che una qualsiasi sequenza di eventi (anche molto breve) generata da un processo casuale sia rappresentativa del processo intero e ne riporti i caratteri essenziali.
Per esempio, considerando dei lanci ripetuti di una moneta, si tende a considerare più probabile la sequenza T-C-T-C-C-T rispetto a T-

T-T-C-C-C, in quanto la prima risulta "più casuale" della seconda; la prima sequenza è vista come più probabile anche di T-T-T-T-C-T, la quale non sembra rappresentare l'equità della moneta. Aspettarsi che le caratteristiche essenziali del processo (in questo caso "casualità" ed equiprobabilità dei risultati possibili) si debbano ritrovare non solo globalmente ma anche localmente è uno degli effetti negativi della rappresentatività.
Un'altra conseguenza di questa rappresentatività locale è la "gambler's fallacy", o fallacia dello scommettitore, che consiste nell'errata convinzione che eventi occorsi nel passato influiscano su eventi futuri nell'ambito di attività governate dal caso, quali ad esempio molti giochi d'azzardo (si vedano i "numeri ritardatari" nel gioco del Lotto[1]). Stando a questa logica, il caso è visto come un processo auto-correggente in cui una deviazione in una direzione induce una deviazione nella direzione opposta per ristabilire l'equilibrio ("negative recency effect" [7, p. 29]). Ne consegue che anche dei piccoli campioni dovrebbero risultare altamente rappresentativi della popolazione da cui sono stati estratti, in accordo a quella che è stata definita "Legge dei piccoli numeri".

Va però tenuto presente che "il caso non ha memoria", ovvero in un processo casuale il realizzarsi (piuttosto che la ricorrenza o la non ricorrenza) di un evento non influenza la probabilità del verificarsi di eventi successivi (prendendo ancora come esempio il gioco del Lotto, il fatto che in una estrazione sia stato pescato il numero 9, non modifica in alcun modo la probabilità di estrarre lo stesso numero all'estrazione successiva).
Un'altra manifestazione della fallacia dello scommettitore è il "positive recency effect", individuato ancora da Fischbein [7, p. 29]. A differen-

[1] I "numeri ritardatari" sono quei numeri che non vengono sorteggiati da diverse estrazioni e, per questo motivo, è ritenuto erroneamente che la loro probabilità di uscita nelle estrazioni successive aumenti. Questa convinzione sbagliata è sfruttata addirittura dagli organizzatori del gioco del Lotto, che pubblicano tabelle aggiornate con tali numeri `https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/statistiche/numeri-ritardatari`.

za del "negative recency" il cui effetto, dato un fenomeno aleatorio con esiti equiprobabili, può essere sintetizzato con "un evento casuale ha più possibilità di verificarsi perché non si verifica da molto tempo", il "positive recency effect" si può tradurre in "un evento casuale ha meno possibilità di verificarsi perché non si verifica da molto tempo". La logica del "positive recency" è però differente e forse più ingenua: non presuppone il persistere dell'equilibrio di cui sopra, ma si basa sulla credenza che il caso abbia come una predilezione per alcuni risultati mentre mostri una sorta di antipatia per altri (per cui, se nel gioco del Lotto il numero 9 non esce da diverse estrazioni, non si è portati a giocarlo).

Disponibilità

La facilità con cui si ricordano certi tipi di eventi può influenzare la probabilità che si assegna al loro realizzarsi. Per esempio, la probabilità che si verifichi un attacco di cuore fra le persone di mezza età può essere condizionata dal fatto che ciò sia accaduto ad un conoscente: di conseguenza, chi nella propria vita ha conosciuto più volte questo genere di fenomeno tenderà a sovrastimare la probabilità che ciò accada. Questo tipo di euristica è chiamata disponibilità.
Come nel caso della rappresentatività, anche la disponibilità è affetta da una serie di fattori che non alterano invece la probabilità e può, dunque, indurre a compiere una serie di errori sistematici.

Errori dovuti alla recuperabilità degli esempi Nel giudicare la dimensione di una classe per disponibilità, essa sarà ritenuta tanto più grande quanto più numerosi saranno gli elementi facilmente richiamabili alla memoria ad essa appartenenti.
In un esperimento riportato in [18], a dei soggetti venivano elencati una serie di nomi di personalità celebri di entrambi i sessi; successivamente veniva chiesto agli stessi soggetti di dire se l'elenco contenesse

più nomi maschili o femminili. Liste differenti sono state presentate a gruppi differenti: in alcune di queste, gli uomini erano relativamente più famosi delle donne, mentre in altre accadeva il contrario. Ciò che è emerso è che ciascun gruppo riteneva più numerosa la classe (maschile o femminile) che conteneva un più alto numero di nomi celebri.
Oltre alla familiarità, ci sono altri fattori che influiscono sulla facilità con cui certi eventi vengono in mente come la salienza o la vicinanza temporale. È chiaro che questi, in generale, non influenzano invece la probabilità.

Errori dovuti all'efficacia della ricerca È più probabile che una parola inizi con la lettera "r" o che la sua terza lettera sia una "r"? Per risolvere questo problema si cerca di ricordare tutte le possibili parole che verificano i due casi, attribuendo probabilità maggiore alla classe più numerosa di parole che vengono in mente. Normalmente, è più facile pensare alle parole che cominciano per una certa lettera piuttosto che a quelle che ce l'hanno in un'altra posizione e perciò, affidandosi all'euristica della disponibilità, si è portati a ritenere le prime più numerose delle seconde e quindi la probabilità di incapparvici più alta.

Equiprobabilità

L'equiprobabilità degli eventi elementari che compongono uno spazio campionario è una condizione necessaria che permette l'applicazione della definizione classica di probabilità. Abitualmente, nei libri di testo scolastici questa assume la seguente formulazione:

Sia E un evento relativo ad uno spazio campionario (finito) Ω in cui tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità di verificarsi. Si supponga che E sia formato da k eventi elementari (detti "casi favorevoli") e lo spazio campionario Ω da n eventi elementari (detti "casi possibili"). Si definisce probabilità dell'evento E il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili. (Ripresa, non integralmente, da [17, p. 628])

Solitamente questo è l'approccio che rimane più impresso nella mente degli studenti e, pertanto, capita non di rado che sia applicato in maniera errata o a situazioni non trattabili con tale modello, attribuendo più o meno consciamente la stessa probabilità ad eventi differenti trascurando la loro reale probabilità.

La chiave di volta nella risoluzione dei problemi più elementari che si trovano nei libri di testo è, tendenzialmente, lo scrivere nella maniera più opportuna lo spazio campionario corrispondente all'esperimento aleatorio trattato. La scrittura dell'insieme degli esiti possibili non è unica e, per poter calcolare la probabilità di un evento applicando la definizione classica, è necessario che si trovi quella per cui tutti i suoi elementi sono equiprobabili. Una volta fatto ciò, il calcolo della probabilità si riduce ad un esercizio di conteggio.
Ci sono casi che, però, possono trarre in inganno uno studente disattento portandolo a conteggiare i cosiddetti "casi favorevoli" anche quando questi non sono tutti equiprobabili.
Si consideri a titolo di esempio il seguente problema:

Qual è la probabilità che lanciando due dadi regolari ciascuno con le facce numerate da 1 a 6, la somma delle facce risultanti sia 7?

Considerando $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ come insieme di tutti i possibili esiti, la tentazione è quella di affermare che la probabilità dell'evento *"La somma delle facce è 7"* sia $\frac{1}{11}$ data da 1 caso favorevole (corrispondente all'evento elementare $\{7\}$ stesso) su un totale di 11 possibili esiti.
In questo modo si trascura il "peso" di ciascun elemento di Ω che non è costante: mentre al 2 come somma corrisponde una sola coppia di risultati (l'uscita di 1 sia sul primo sia sul secondo dado), al 7 ne corrispondono molte di più (scrivendole come coppie ordinate: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ e $(6, 1)$); non è, dunque, ragionevole attribuire ai due eventi elementari la

stessa probabilità ma lo sarebbe, invece, ritenere che la probabilità di $\{7\}$ sia sei volte superiore a quella di $\{2\}$.
In questo caso è possibile aggirare l'intoppo considerando lo spazio campionario formato dalle 36 coppie ordinate rappresentanti tutte le possibili combinazioni delle facce dei due dadi le quali, assumendo i dadi regolari, hanno tutte la stessa probabilità di manifestarsi.

Un altro esempio di abuso dell'equiprobabilità è quello in cui, volendo calcolare la probabilità di un certo evento E dato un esperimento aleatorio, si considerino solamente due alternative: il verificarsi di E e il suo non verificarsi. In questa maniera lo spazio campionario che ne deriva risulta costituito da due eventi elementari E e *non* E, generalmente indicato con $\overline{E}$, e, sfruttando scorrettamente la formulazione classica, la probabilità che si realizzi E risulta essere $\frac{1}{2}$ data da un caso favorevole su due possibili alternative. In generale, però, E e $\overline{E}$ sono tutt'altro che equiprobabili.
Ad esempio, valutare la probabilità che un tale domani vinca alla lotteria come $\frac{1}{2}$: la possibilità che ciò avvenga è una fra due alternative $E =$ *"domani vince alla lotteria"* e $\overline{E} =$ *"domani non vince alla lotteria"*, considerate erroneamente equiprobabili.

1.3 Probabilità e informazione

Bruno de Finetti è stato un grande matematico del secolo scorso, promotore di una precisa idea di probabilità tradotta nella dicitura di "concezione soggettiva della probabilità" secondo la quale la probabilità di un evento misura il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, in base alle informazioni possedute, al verificarsi di tale evento.
Da questa formulazione emerge immediatamente l'idea che de Finetti vuole trasmettere, secondo cui la probabilità di un evento sia relativa allo stato di informazioni posseduto dall'osservatore nel momento in cui egli intende valutarla.
In questa sezione, si ripercorrà brevemente il pensiero di de Finetti facendo

riferimento al suo articolo "La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni!" [4].

"PROBABILITY DOES NOT EXIST" [4, p. 258]

Con questa drastica sentenza l'autore sintetizza il suo pensiero riguardo l'essenza della probabilità: "pensare alla Probabilità (con la P maiuscola) come ad una entità metafisica esistente in astratto equivarrebbe a ritener possibile (senza essere Alice nel Paese delle meraviglie) che ≪il sorriso di un gatto'≫ possa permanere e continuare ad esser visibile dopo che il gatto se ne è andato via" [4, p. 258]. La probabilità, dunque, non è qualcosa che esiste di per sé, ma prende forma soltanto nell'ambito delle valutazioni che se ne fanno.
Un'asserzione, o proposizione, (o evento) è tale se esprime qualcosa di suscettibile solo di due alternative: vero (sì) o falso (no). Non è detto tuttavia che si sappia (con certezza) la risposta ed allora i casi sono tre: certo (se si sa che la risposta è sì), impossibile (se si sa che la risposta è no), incerto (se non si conosce la risposta). È in quest'ultimo contesto che entra in gioco la probabilità, come strumento per muoversi all'interno del dominio dell'incertezza.

"La probabilità è la nostra guida nel pensare e nell'agire in condizioni di incertezza, e l'incertezza è dovunque" [4, p. 273]

L'incertezza, a detta di de Finetti, viene da molti intesa in vari modi:

- "Personalistico": l'incertezza su di un evento cessa, per un dato individuo, soltanto quando egli ne riceve notizie sicure; è fino ad allora che egli, momento per momento, vi attribuirà una certa probabilità. Poiché la memoria non è indelebile, l'incertezza potrà riapparire appena la notizia sarà dimenticata o sarà divenuta confusa o incerta.

- "Empiristico": l'incertezza ha termine ("oggettivamente") nel momento in cui il fatto in questione si avvera nel modo asserito oppure altrimenti;

ed è fino a quel momento, secondo tale punto di vista, che chiunque potrà attribuirgli la probabilità corrispondente al proprio giudizio.

- "Deterministico": l'incertezza non esiste o comunque cessa nel momento in cui l'evento risulti "determinato" nel senso che il fenomeno da cui esso dipende si svolge secondo leggi strettamente deterministiche (ad esempio fisiche) senza possibilità di influssi perturbatori di altro tipo (per esempio umano).

Dal punto di vista dell'autore, tuttavia, l'incertezza va intesa in un unico senso corrispondente a quello "personalistico": "si può scommettere, a testa o croce, mentre la moneta, già lanciata, è in aria, e il suo movimento è perfettamente determinato, e si può anche scommettere dopo che è caduta, sotto la sola condizione di non vedere su quale faccia riposi", afferma citando Borel.

Non esiste quindi una incertezza oggettiva, ma solo relativa allo stato delle conoscenze dell'osservatore. Non ha senso, perciò, neanche alcuna distinzione temporale tra passato e futuro, tra eventi già accaduti ed eventi che invece devono ancora accadere: quello che ha importanza ed è rilevante ai fini di una valutazione della probabilità è la quantità (e qualità) di informazioni possedute relativamente ad un preciso evento, che è suscettibile di arricchimenti col flusso di nuove informazioni.

In conclusione, la probabilità di un evento non è una grandezza oggettiva che rimane indissolubilmente attaccata all'evento, ma varia al variare del (a volte sottointeso) stato di informazione posseduto dal soggetto, che è ciò che ne determina il valore.

Capitolo 2

L'insegnamento della probabilità in Italia

Constatando come la probabilità sia una competenza fondamentale nella formazione di una cittadinanza che guardi al mondo con occhi razionali e consapevoli, in questo capitolo si prendono in analisi le Indicazioni Nazionali attualmente vigenti, a partire dalla scuola primaria sino alle diverse scuole secondarie di secondo grado, andando ad osservare lo spazio riservatogli nella teorica programmazione scolastica.
Successivamente, si fa riferimento alle prove INVALSI e all'esame di Stato del Liceo Scientifico nonché ai relativi quadri di riferimento in cui la probabilità compare con un ruolo da protagonista, al pari delle altre branche della matematica.

2.1 Le Indicazioni Nazionali per la scuola primaria e secondaria

Il contesto in cui la scuola odierna risulta inserita è suscettibile di continui e rapidi cambiamenti che portano anche a mettere in discussione il ruolo della stessa. L'edificio scolastico non rappresenta più l'unico luogo di apprendimento, di formazione e di sviluppo di conoscenze e competenze, ma

condivide questo fine con tutta una serie di altri contesti (formali e non) con cui l'allievo entra in contatto e da cui riceve innumerevoli stimoli diversi.
In questo scenario articolato ed eterogeneo, la scuola è chiamata a mettere le basi di un percorso formativo inteso in un senso più ampio, di formazione di un "cittadino del mondo" che quindi necessita di strumenti e competenze adatti a comprendere, interagire ed evolversi in tale mondo.
Ciò trova voce nel preambolo delle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo scolastico (comprensivo della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado) in cui, tra le finalità della scuola, si legge:

"[...] far sì che gli studenti acquisiscano gli strumenti di pensiero necessari per apprendere a selezionare le informazioni; promuovere negli studenti la capacità di elaborare metodi e categorie che siano in grado di fare da bussola negli itinerari personali; favorire l'autonomia di pensiero degli studenti."

E ancora:

"Promuovere i saperi propri di un nuovo umanesimo: la capacità di cogliere gli aspetti essenziali dei problemi; la capacità di comprendere le implicazioni, per la condizione umana, degli inediti sviluppi delle scienze e delle tecnologie; la capacità di valutare i limiti e le possibilità delle conoscenze; la capacità di vivere e di agire in un mondo in continuo cambiamento."

Le Indicazioni Nazionali rappresentano un documento ministeriale entrato in vigore a partire dall'anno 2012 di riferimento per la progettazione curricolare affidata alle scuole con cui si intende fissare "gli obiettivi generali, gli obiettivi di apprendimento e i relativi traguardi per lo sviluppo delle competenze dei bambini e ragazzi per ciascuna disciplina o campo di esperienza".
"Sono un testo aperto, che la comunità professionale è chiamata ad assumere e a contestualizzare, elaborando specifiche scelte relative a contenuti, metodi, organizzazione e valutazione coerenti con i traguardi formativi previsti

dal documento nazionale" (*Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*).
Fra le competenze indispensabili a questa moderna cittadinanza vi sono senza dubbio quelle matematiche che favoriscono lo sviluppo di un modo di pensare coerente e razionale, di un individuo capace di interagire con l'ambiente circostante sapendo valutare cause ed effetti delle proprie ed altrui azioni:

"Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri." (*Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*)

Un'adeguata formazione matematica e, più in generale, tecnologico-scientifica permette di "analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri; il possesso di un pensiero razionale consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche."
Nell'esaminare gli svariati aspetti inerenti al mondo reale, fondamentale è la padronanza di un corretto modello probabilistico: nelle situazioni quotidiane siamo chiamati a compiere delle scelte, a valutare delle decisioni, ad avere a che fare con circostanze non determinate; l'incertezza domina il mondo, come sosteneva de Finetti, e noi esseri umani abbiamo bisogno della probabilità per poterla comprendere e dominare. Il pensare in maniera probabilistica rientra appieno, insomma, nella classe di competenze che la scuola deve garantire per una corretta lettura di quanto ci circonda e lo dimostra la presenza della

probabilità fra gli *Obiettivi di apprendimento* di tutti i livelli scolastici.

2.1.1 Scuola primaria e scuola secondaria di primo grado

Scuola primaria

Fin dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo del primo ciclo scolastico* si trovano riferimenti espliciti alla probabilità. In particolare, fra i *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* matematiche che l'allievo è portato a raggiungere al termine della scuola primaria di primo grado si legge:

"Riconoscere e quantificare, in casi semplici, situazioni di incertezza".

Nello specifico, andando ad osservare fra gli *Obiettivi di apprendimento* nella categoria *Relazioni, dati e previsioni* si trova:

"In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili."

Scuola secondaria di primo grado

Nella scuola secondaria di primo grado, è previsto un approccio alla probabilità più diretto: l'allievo "si orienta con valutazioni di probabilità in situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...)" e, fra gli *Obiettivi di apprendimento* figurano:

- "In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti";
- "Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti".

Inoltre viene sottolineato come sia auspicabile che lo studente sviluppi, nei confronti della matematica nella sua generalità e a maggior ragione della probabilità, un atteggiamento positivo, attraverso esperienze significative, che gli facciano intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà.

2.1.2 Scuola secondaria di secondo grado

Verranno analizzate in prima istanza le Indicazioni Nazionali concernenti i Licei, per poi passare velocemente in rassegna quelle relative ad Istituti tecnici e professionali.

Licei

Uno dei fili conduttori presenti all'interno delle indicazioni ministeriali di tutti i livelli è, come già ripetuto, l'importanza data alla funzione "modellizzante" della matematica, che permette di comprendere aspetti profondi della realtà e prevederne i possibili sviluppi.
Ciò è particolarmente accentuato nelle Indicazioni Nazionali per i Licei dove, nel *Profilo generale* dello studente che riporta le competenze da estendere nel suddetto ciclo, si legge fin dalle primissime righe:

"Al termine del percorso liceale lo studente dovrà padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico",

nonché riconoscere

"il concetto di modello matematico e la specificità del rapporto che esso istituisce tra matematica e realtà rispetto al rapporto tra matematica e fisica classica".

Fra i "principali concetti e metodi" sopra citati che l'allievo deve saper padroneggiare si trova "la conoscenza elementare di alcuni sviluppi caratteristici della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica", le quali costituiscono campo di maturazione e pratica di componenti fondamentali alla creazione o all'integrazione di certi modelli.

L'introduzione formale alla probabilità è prevista al secondo anno, come riportato nella categoria *Dati e previsioni* degli *Obiettivi specifici di apprendimento*, accompagnata da esempi entro un contesto classico, anche se, di fatto, lo studio più approfondito di tale branca della matematica avviene al quarto anno in cui è previsto che vengano trattati:

- Probabilità condizionata e composta;
- Formula di Bayes e sue applicazioni;
- Elementi di base del calcolo combinatorio (solamente per il Liceo Scientifico).

"Nell'anno finale sarà approfondita la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica": la sistemazione assiomatica della probabilità operata da Kolmogorov negli anni '30 del 1900 si presta benissimo a fare da esempio e a mettere in evidenza la necessità e l'efficacia di un tale approccio alla disciplina.
Infine "saranno studiate le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson)".

Istituti tecnici e professionali

Anche nelle *Linee guida per l'istruzione tecnico-professionale* si trovano riferimenti espliciti all'insegnamento della probabilità e alla sua necessità per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate. In particolare, le conoscenze da acquisire nel percorso quinquennale, tecnico o professionale, sono:

- Significato della probabilità e sue applicazioni;
- Semplici spazi discreti di probabilità;
- Eventi disgiunti;
- Probabilità composta;
- Eventi indipendenti;

per quanto riguarda il biennio, mentre nel triennio:

- Probabilità condizionata;
- Probabilità totale;
- Formula di Bayes;
- Distribuzioni di probabilità (binomiale e gaussiana) con applicazioni negli specifici campi professionali di riferimento e per il controllo di qualità.

La probabilità come requisito fondamentale

È da notare come le conoscenze e le abilità relative al campo della probabilità siano presenti in tutti i curricoli a prescindere dal tipo di scuola ad ulteriore conferma del suo ruolo imprescindibile sia come parte integrante della formazione di una visione il più possibile completa sullo sviluppo scientifico, sia come strumento da applicare nello studio di altre discipline.
Costituiscono, infatti, dei prerequisiti fondamentali per la costruzione di un bagaglio di competenze matematiche più approfondito e più avanzato, necessario anche allo studio di discipline in cui la matematica svolge un ruolo strumentale.
A tal proposito, la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (brevemente, CIIM) ha redatto nel 2006 un documento[2] che facesse da

[2]La CIIM è un organo istituito dall'Unione Matematica Italiana (UMI) con il compito di esaminare i problemi riguardanti l'insegnamento matematico in

quadro di riferimento per quei corsi di laurea in cui la matematica non costituisce un insegnamento caratterizzante ma ricopre un ruolo funzionale allo studio di un'altra materia (come Statistica, Informatica, Fisica, Ingegneria, Economia, Biologia, Medicina, Architettura, ma anche Archeologia e Scienze Giuridiche, ed altre). In tale testo, in cui sono state raggruppate tutte le competenze ritenute essenziali al fine sopra dichiarato, la probabilità (tanto nel discreto, quanto nel continuo) ricopre una posizione di primo piano:

"I concetti e gli strumenti del Calcolo delle probabilità, insieme a quelli strettamente collegati dell'inferenza statistica, sono di grandissima e crescente importanza nella modellizzazione scientifica e sono destinati ad influenzare profondamente la matematica e la scienza dei prossimi decenni. [...] Nelle più diverse situazioni di molteplici ambiti disciplinari è richiesto di saper:

- Riconoscere le possibilità di utilizzare modelli probabilistici e statistici continui [e discreti];
- Usare modelli di approssimazione e di simulazione;
- Effettuare stime di tipo inferenziale."

Italia, a tutti i livelli e proporre possibili soluzioni. Fra le sue mansioni vi è quella di "tenere i rapporti con il mondo della scuola e dell'università, per promuovere una didattica della matematica sempre più efficace, per la formazione iniziale e in servizio dei docenti". Il documento citato, e consultabile al sito `http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf`, non è un testo ufficiale ma vuole rappresentare una sorta di mappa delle principali conoscenze e competenze matematiche che possono essere oggetto di studi universitari, rispetto alla quale ciascun docente può determinare la propria posizione. Può, inoltre, fungere da riferimento utile agli studenti e agli insegnanti delle scuole secondarie di secondo grado per collocarsi e orientarsi in questa articolata situazione.

2.2 I test INVALSI e l'esame di maturità

Saranno riportati successivamente degli esempi di quesiti riguardanti la probabilità tratti dalle prove INVALSI e dagli esami di maturità, a testimonianza dell'importanza attribuita a tale disciplina e per fornire un'idea della tipologia di esercizi che gli studenti dovrebbero essere in grado di risolvere.

2.2.1 La probabilità nei test INVALSI

I test INVALSI sono delle prove su scala nazionale che hanno lo scopo di valutare i livelli di apprendimento degli studenti in italiano, inglese e matematica, in modo da raccogliere dei dati generali sull'efficienza del sistema formativo italiano ed indicare eventuali criticità. Vengono somministrate annualmente agli allievi delle classi seconda e quinta di scuola primaria, della classe terza di scuola secondaria di primo grado e delle classi seconda e quinta della secondaria di secondo grado (corrispondenti, rispettivamente, ai livelli scolastici: 2, 5, 8, 10, 13).
Le INVALSI poggiano su un Quadro di Riferimento[3] ad hoc, redatto a partire dalle Indicazioni Nazionali riprendendone, in particolare, gli ambiti di contenuto e i traguardi di competenza.
Per quanto riguarda la matematica, gli ambiti di contenuto attorno ai quali si sviluppano e si suddividono le domande sono quattro: *Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni.* I quesiti attinenti alla probabilità rientrano nell'ultimo ambito tematico nella cui descrizione, alla voce *Oggetti di valutazione*, si trova:

- Evento certo, possibile e impossibile;
- Campione estratto da una popolazione: casuale e non casuale;
- Probabilità di un evento: valutazione della probabilità di eventi elementari ed equiprobabili;

[3]Consultabile al sito `https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf`
.

- Semplici valutazioni di probabilità di un evento a partire da dati statistici.

All'interno del Quadro di Riferimento, i traguardi per lo sviluppo delle competenze per il primo ciclo inerenti alla probabilità (così come per tutte le altre aree) sono richiamati integralmente dalle indicazioni di legge, mentre quelli relativi alla scuola secondaria di secondo grado, non essendo previsti dalla normativa vigente, sono individuati dal gruppo di lavoro INVALSI (sempre basandosi sulle Indicazioni Nazionali) e recitano:

"Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari."

Sono riportati di seguito alcuni esempi di quesiti INVALSI dei livelli 5, 8 e 10 tratti dall'archivio online[4], con una brevissima analisi che non vuole avere carattere generale ma solo relativo al quesito in questione. Non sono presenti quesiti di probabilità dei livelli 2 e 13: l'anno corrente sarà la prima volta in cui i ragazzi dell'ultimo anno di scuola secondaria si vedranno somministrare tali prove, mentre per i bambini del secondo anno di scuola primaria non sono previste domande espressamente di natura probabilistica, coerentemente con le Indicazioni Nazionali.

Esempio 2.1. La domanda di Figura 2.1, posta agli allievi al quinto anno di scuola primaria, si propone di valutare i seguenti:

1. *Traguardi: Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza;*

[4] `www.gestinv.it` tale archivio rappresenta un servizio a disposizione di insegnanti, scuole, studenti e famiglie, in quanto raccoglie e organizza i materiali delle prove INVALSI dal 2008 ad oggi illustrandone i risultati e le analisi statistiche. L'obiettivo dichiarato è quello di "fornire strumenti per utilizzare al meglio, in classe, la grande mole di informazioni che le Rilevazioni Nazionali forniscono sugli apprendimenti degli studenti italiani".

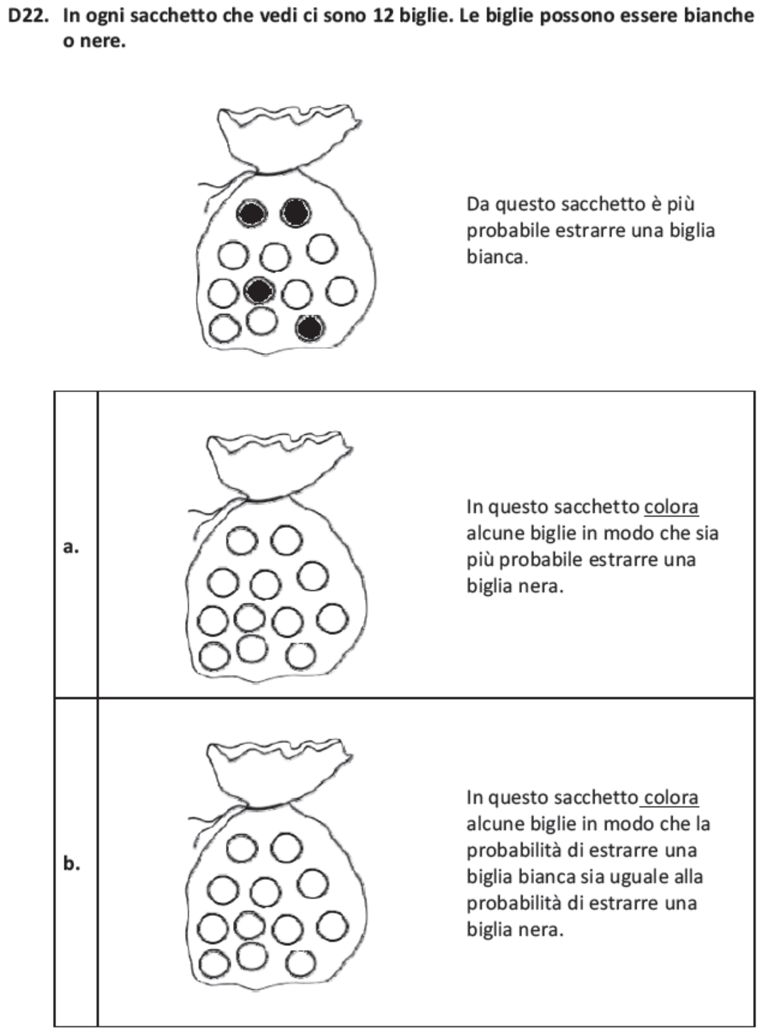


Figura 2.1: Livello 5, Anno 2017, Domanda 22.

2. *Obiettivi: In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili.*

I risultati, consultabili al sito di cui sopra, sono molto positivi (81.4% di risposte corrette relative all'item (a), in cui vengono colorate, cioè, almeno 7 biglie; 85.2% di risposte corrette relative all'item (b)) e dimostrano il fatto che, attraverso ragionamenti sulla proporzionalità, a quest'età i bambini posseggono già un'idea di probabilità e riescono a ricreare, se aiutati con l'esempio fornito dal testo, situazioni di equiprobabilità o di probabilità "sbilanciata" a favore di uno dei due eventi.

Nel gioco del superenalotto ogni giocatore sceglie almeno sei numeri interi compresi tra 1 e 90. Gli organizzatori estraggono a caso sei numeri, sempre compresi tra 1 e 90. Vincono i giocatori che hanno scelto proprio gli stessi numeri estratti dagli organizzatori del gioco.

Sara ha scelto i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Guglielmo ha scelto i numeri 7, 12, 15, 23, 28, 34.

Sara e Guglielmo hanno la stessa probabilità di vincere?

A. ☐ No, perché i numeri scelti da Sara sono consecutivi

B. ☐ Sì, perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti

C. ☐ No, perché Sara e Guglielmo non hanno scelto gli stessi numeri

D. ☐ Sì, perché non conosciamo i numeri usciti nelle estrazioni precedenti

Figura 2.2: Livello 8, Anno 2015, Domanda 12.

Esempio 2.2. Il quesito riportato in Figura 2.2, è volto ad esaminare:

1. *Traguardi: Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità;*

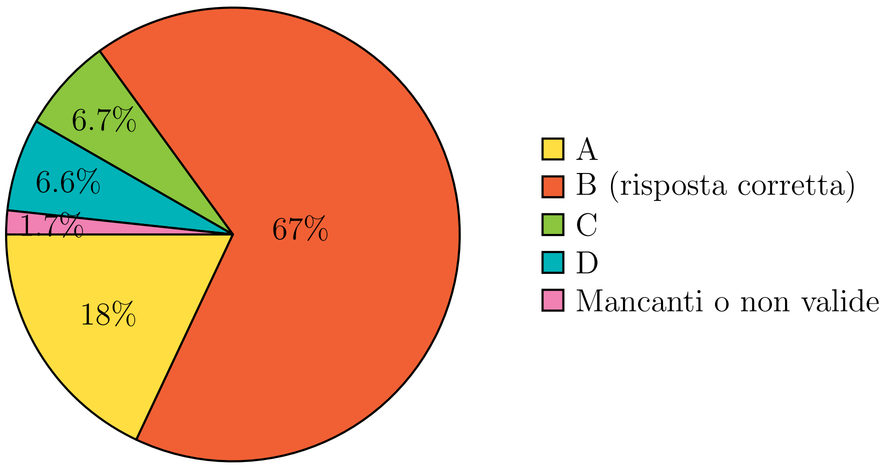
2. *Obiettivi: In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.*

Si tratta di un quesito a risposta chiusa con quattro diverse alternative: coppie di opzioni, però, differiscono "solo" per le motivazioni che forniscono alla risposta ("Sì" oppure "No"). Per questo motivo, la sua risoluzione richiede, da parte dello studente, capacità argomentative nel discernere le varie risposte.
Nello specifico, due dei tre distrattori mirano esplicitamente a verificare la presenza di determinate misconcezioni (si veda il Capitolo 1):

A. Bias di rappresentatività legato alla casualità del processo: i numeri consecutivi da 1 a 6 non sembrano avere un carattere "casuale" quindi hanno meno probabilità di uscire rispetto ad una sestina di numeri non consecutivi.

D. Bias di rappresentatività legato al "recency effect": se fossimo a conoscenza dei numeri usciti nelle estrazioni precedenti, potremmo essere tentati dal farci guidare da queste informazioni nel puntare su un numero che non esce da numerose estrazioni ("negative recency") oppure su uno che, al contrario, è uscito per diverse volte ("positive recency").

I risultati trovati sono riportati nel grafico seguente:



I numeri mostrano un andamento piuttosto incoraggiante: circa i due terzi dei rispondenti non si lascia fuorviare e dà la risposta corretta. Tra i distrattori, il più selezionato è quello legato alla casualità del campione mentre quello relativo all' "effetto ricorrenza" non sembra guadagnare molto consenso.

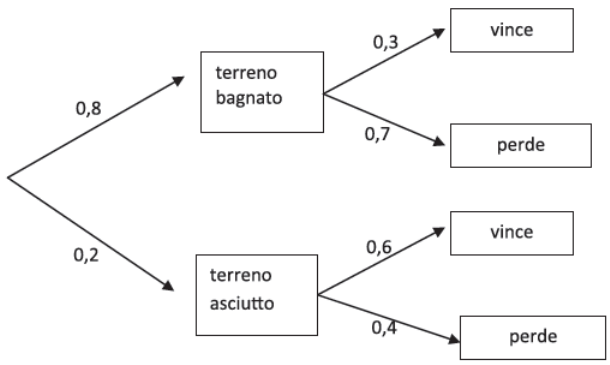
Una domanda simile è stata posta nel questionario che ha aperto le attività da me svolte nelle scuole (si veda l'Appendice A, Quesito 6) e di cui si parlerà nel seguito, andando a confrontare anche l'andamento riscontrato nelle classi esaminate (si veda Sezione 4.1.2).

Esempio 2.3. La domanda in Figura 2.3 riguarda:

D17. **In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:**

- **0,3 se il terreno è bagnato;**
- **0,6 se il terreno è asciutto.**

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è 0,2 · 0,4 = 0,08.

Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

Risposta: ……………………………

Figura 2.3: Livello 10, Anno 2017, Domanda 17.

1. *Traguardi: Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice;*

2. *Obiettivi: Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.*

La percentuale di risposte corrette (18.7%) è considerevolmente più bassa rispetto alle precedenti: il quesito è molto più articolato e la complessità è alquanto elevata. Il suo coefficiente di difficoltà[5] è, infatti, di 1.83.

[5] Il coefficiente di difficoltà (solitamente indicato con "delta") è un numero compreso tra -3 e 3 che rappresenta il livello di complessità della domanda: indici inferiori allo zero indicano domande non particolarmente difficili, al contrario delta maggiori di zero contrassegnano gli item meno semplici.

Nonostante nel testo dell'esercizio ci sia un'indicazione sul tipo di ragionamento da seguire, questo non risulta chiaro e semplice: purtroppo non abbiamo accesso a nessun prototipo di risposta, ma si può ipotizzare che la difficoltà maggiore si sia riscontrata nei confronti della gestione dei numeri rappresentanti la probabilità. L'effetto che le operazioni matematiche (somma e prodotto) hanno sulle probabilità di certi eventi non è intuitivo e la traduzione del linguaggio con cui colloquialmente si descrive la probabilità in un linguaggio formale non è scontata e automatica. L'acquisizione di questi meccanismi dovrebbe maturare al quarto anno di scuola secondaria di secondo grado dopo aver affrontato definizioni e teoremi che permettono una manipolazione più profonda e consapevole delle informazioni e che dovrebbero quindi favorire la creazione di un approccio adeguato a questo genere di problemi.

2.2.2 La probabilità nell'esame di maturità dei Licei Scientifici

Secondo il testo di legge (n. 425 del 10 dicembre 1997 Articolo 1, confermato anche nell'ultimo Decreto Ministeriale 796 del 26 novembre 2018) e coerentemente con quanto affermato poco prima, l'esame di Stato ha come fine "l'analisi e la verifica della preparazione di ciascun candidato in relazione agli obiettivi generali e specifici propri di ciascun indirizzo di studi".
Come è noto, la seconda prova è differenziata per ogni tipo di scuola e, nel caso del liceo scientifico, fino allo scorso anno scolastico (2017/2018) ha sempre riguardato esclusivamente matematica; a partire da quello corrente, invece, coinvolgerà sia matematica che fisica, come previsto dalle recenti disposizioni ministeriali (D. M. 796 del 26 novembre 2018).
Come si legge nel *Quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell'esame di Stato*[6], "la prova consiste nella so-

[6]Reperibile sul sito del MIUR all'indirizzo
`http://www.miur.gov.it/web/guest/news/-/asset_publisher/ubIwoWFcqWhG/content/esami-di-stato-del-secondo-ciclo-di-istruzione-a-s-2018-2019-d-m-`

luzione di un problema a scelta del candidato tra due proposte e nella risposta a quattro quesiti tra otto proposte". Inoltre, per quanto riguarda la matematica, "essa è finalizzata ad accertare l'acquisizione dei principali concetti e metodi della matematica di base, anche in una prospettiva storico-critica, in relazione ai contenuti previsti dalle vigenti Indicazioni Nazionali per l'intero percorso di studio del liceo scientifico".
Fra i *Nuclei tematici fondamentali* riportati in tale documento figura la probabilità, in particolare "probabilità di un evento" e "dipendenza probabilistica". Nello specifico, fra le capacità e competenze che la prova intende accertare, risultano:

- Determinare la probabilità di un evento utilizzando i teoremi fondamentali della probabilità, il calcolo combinatorio, il calcolo integrale;
- Valutare la dipendenza o l'indipendenza di eventi casuali.

A partire dall'esame dall'anno scolastico 2014/2015[7], fra i quesiti delle sessioni ordinarie (dell'indirizzo tradizionale e dell'indirizzo scienze applicate) sono stati inseriti degli esercizi di probabilità (almeno uno per ogni prova). Riferimenti alla probabilità si trovano, talvolta, anche nei problemi.
Buona parte di questi sono risolubili sfruttando la nozione di variabile aleatoria e ragionando sulla sua distribuzione. È il caso dei quattro seguenti in cui va applicato il modello della distribuzione binomiale:

A.S. 2014/2015, Quesito 3
Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

A.S. 2015/2016, Quesito 4
Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte

769-del-26-novembre-2018?pk_vid=f3db6d25ec14d4451551777062ed1d56 .

[7] In realtà nell'esame di Stato dell'indirizzo sperimentale PNI, eliminato nel 2010 dalla riforma Gelmini, sono sempre stati presenti dei quesiti di probabilità.

di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

A.S. 2016/2017, Quesito 8

Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

A.S. 2017/2018, Quesito 8

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

In un quinto quesito, invece, viene proposta una funzione rappresentante la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria e, a partire da questa, si deve calcolare il valore medio e la probabilità di un paio di eventi (utilizzando, dunque, l'integrazione):

A.S. 2016/2017, Quesito 4

Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0, 2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$. *Quale sarà il valore medio dei numeri generati? Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia* $\frac{4}{3}$*? Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?*

Compaiono, poi, quesiti in cui è richiesto di saper individuare l'evento composto a cui il testo fa riferimento e, di conseguenza, calcolarne la probabilità in maniera appropriata. In generale, comunque, questa capacità sottostà alla risoluzione anche degli altri quesiti citati:

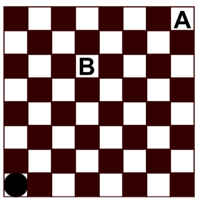
A.S. 2017/2018, Quesito 2

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

In una prova è stato riportato anche un quesito più singolare che, oltre ad una buona capacità di ragionamento, prevede l'impiego del calcolo combinatorio:

A.S. 2015/2016, Quesito 7

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Grazie alla pubblicazione di un esempio di traccia della seconda prova per il presente A.S. 2018/2019[8] e in conformità con il Quadro di Riferimento

[8]Resa pubblicata dal Ministero in data 1 febbraio 2019 e visionabile all'indirizzo:

di cui sopra, si è riconfermata la presenza di esercizi di tipo probabilistico all'interno della prova. È riportato di seguito il quesito tratto dalla simulazione in cui, ancora una volta, è necessaria una corretta formalizzazione del contesto e degli eventi composti descritti:

Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

http://www.istruzione.it/esame_di_stato/esempi/201819/Licei/Pdf/LI02-Esempio1.pdf
.

Capitolo 3

Il percorso nelle scuole

Nel capitolo corrente si descrivono i percorsi svolti in due classi differenti: nella II A del Liceo Scientifico Malpighi e nella IV B del Liceo Scientifico A. B. Sabin, entrambi di Bologna. Sono messe in evidenza le differenze dei due percorsi (dettate dalle tempistiche e dalle Indicazioni Nazionali) e le caratteristiche comuni. In particolare, si fa riferimento al modo in cui sono stati introdotti i concetti e le nozioni base della probabilità e vengono descritte le attività di gruppo orchestrate per favorire lo scambio di idee tra pari nonché l'esplicitazione di ragionamenti impliciti. Si conclude con una breve analisi sullo svolgimento dei lavori di gruppo e sulle difficoltà emerse.

3.1 Struttura, finalità e differenze dei percorsi

A partire dalle criticità emerse dagli articoli di ricerca ed evidenziate nel Capitolo 1, legate al rapporto tra il concetto di probabilità e l'intuizione ad essa relativa nonché al ruolo dell'informazione nella sua valutazione, è messo a punto un percorso rivolto agli studenti di scuola secondaria di secondo grado che non abbiano ancora trattato, nel corso di tale ciclo scolastico, la probabilità e i vari aspetti che la riguardano.
L'obiettivo principale della sperimentazione è quello di indagare le reazio-

ni degli studenti di fronte a particolari situazioni, pensate appositamente per mettere in risalto eventuali bias intuitivi. Nello specifico, si è creato un questionario (si veda Appendice A) da sottoporre agli studenti prima dell'introduzione dell'argomento al fine di sondare quali siano le loro idee rispetto all'ambito della probabilità e se manifestino le misconcezioni note in letteratura. Nella maggior parte dei casi i quesiti sono aperti e liberi e includono domande sul significato di evento aleatorio e di probabilità, valutazioni o stime di probabilità di vari eventi e il ruolo delle informazioni in tali stime. Per rispondere al questionario non sono richieste competenze avanzate nell'ambito della probabilità, né la conoscenza di particolari formule: l'intento è, infatti, quello di osservare i ragionamenti che portano a dare le risposte facendo emergere il contributo dell'intuizione primaria e non tanto l'utilizzo di certe espressioni simboliche.
Successivamente, si è progettato e quindi realizzato un percorso sulla teoria della probabilità all'interno del quale le risposte date dagli studenti al questionario sono analizzate ed utilizzate a volte come punto di partenza per l'introduzione di un dato concetto, commentandole e contestualizzandole, altre volte come spunto di discussione fra gli allievi stessi. Ciò che è scritto dai ragazzi svolge, quindi, un importante ruolo di guida nella formazione delle varie attività oltre a rappresentare una sorta mappatura delle conoscenze preliminari possedute, utile per la costruzione dell'attività didattica.
Infine, dopo circa quattro mesi dal termine delle attività, si è somministrato agli stessi studenti un secondo questionario (per il quale si rimanda ad Appendice B), analogo al precedente, con una duplice intenzione: vedere se e come cambino le loro risposte ai quesiti e se, a distanza di tempo, rimanga impresso loro qualcosa riguardo a quanto trattato.
Come atto conclusivo, si sono effettuate anche tre interviste semi-strutturate/libere a studenti che hanno partecipato al percorso, riguardo ad alcuni punti interessanti emersi dall'analisi delle loro risposte al questionario.

L'intero percorso è svolto presso due classi:

- La classe II A del Liceo Scientifico Malpighi di Bologna;
- La classe IV B del Liceo Scientifico A. B. Sabin di Bologna;

con le seguenti tempistiche:

	MALPIGHI	SABIN
QUESTIONARIO INIZIALE	A. S. 2017/2018 18 aprile durata: 1 ora	A. S. 2017/2018 13 aprile durata: 1 ora
ATTIVITÀ IN CLASSE	A. S. 2017/2018 dal 23 aprile al 4 giugno durata: 5 ore	A. S. 2017/2018 dal 20 aprile al 4 giugno durata: 16 ore
QUESTIONARIO FINALE	A. S. 2018/2019 2 ottobre durata: 1 ora	A. S. 2018/2019 17 ottobre durata: 1 ora
INTERVISTE	A. S. 2018/2019 27 novembre	

Il giorno della somministrazione del primo questionario nella classe del Liceo Malpighi sono presenti 27 alunni mentre in quella del Sabin 17; a svolgere il questionario finale vi sono, invece, rispettivamente 25 e 15 ragazzi.

I percorsi sviluppati all'interno delle due classi hanno natura differente dovuta, sicuramente, ai livelli scolastici diversi e alle ore a disposizione per lo svolgimento delle varie attività, ma non solo. Lo studio approfondito della probabilità non è previsto per la classe seconda del Liceo Scientifico Malpighi se non qualche accenno in vista delle prove INVALSI che, come detto in precedenza, presentano anche quesiti su tale argomento. Per questo motivo il docente non ha espresso alcuna richiesta particolare riguardo alla struttura del percorso permettendone una progettazione libera dai vincoli istituzionali,

che, intendendo proporre agli studenti dei problemi di natura probabilistica che favorissero la riflessione e il ragionamento, avrebbe comunque potuto risultare utile anche per affrontare gli imminenti test INVALSI. Va, inoltre, sottolineato che durante lo svolgimento della sperimentazione il docente non è presente in aula.
L'obiettivo primario delle lezioni svolte nella classe quarta del Liceo Sabin è, invece, quello di adempiere quanto previsto dalle Indicazioni Nazionali raggiungendo gli *Obiettivi di apprendimento* per il quarto anno di Liceo Scientifico. L'organizzazione dell'insegnamento è stata accordata con l'insegnante, sempre presente in aula, secondo le esigenze degli allievi messe in evidenza da quest'ultimo.
Per questo motivo, tanto la metodologia adottata (prevalenza di lezioni frontali al Sabin, quasi assenti al Malpighi) quanto i contenuti trattati (più formalizzati e istituzionalizzati al Sabin, per nulla al Malpighi) si sono inevitabilmente dimostrati differenti. Il punto d'incontro è rappresentato dalle attività di gruppo le quali, sebbene utilizzate in misura diversa (per quasi la totalità del tempo al Malpighi, in maniera sporadica al Sabin), sono state organizzate con le medesime modalità.
All'interno del gruppo, costituito da tre o quattro persone, ogni ragazzo ha un ruolo accordato con gli altri membri:

- Moderatore, con il compito di fare attenzione a non andare fuori tema, di riportare l'attenzione sul problema da trattare tenendo le fila del discorso;

- Tienitempo, ad ogni attività è assegnata una durata: il tienitempo può usare il timer sul suo cellulare per tenere conto del tempo trascorso;

- Scriba, con il ruolo di scrivere le soluzioni delle varie attività coerentemente con quanto discusso all'interno del gruppo;

- Voce del gruppo, il quale, nei momenti di confronto collettivo, riporta a tutta la classe quanto discusso con i suoi compagni.

Ad ogni compagine è consegnato un fascicoletto riportante i vari esercizi che, al termine di ogni lezione viene recuperato e restituito la volta successiva in modo da visionare gli sviluppi delle varie attività per poi, eventualmente, riprendere alcuni punti. Lo scriba scrive direttamente sui fogli presenti all'interno del fascicolo. Sono, inoltre, posizionati dei dispositivi che registrano le conversazioni che avvengono all'interno del gruppo e di questo gli studenti sono assolutamente consapevoli.
In entrambe le classi la maggior parte delle attività riprende alcuni dei quesiti del questionario iniziale proponendo, anche, alcune fra le risposte degli studenti stessi.
Le finalità dei lavori di gruppo sono, tuttavia, differenti: mentre al Malpighi fungono da spunto per l'introduzione di nuove nozioni, nel caso del Sabin sono pensati piuttosto per applicare i concetti già incontrati e come occasione per stimolare discussioni.

3.2 L'attività presso la classe II A del Liceo Scientifico Malpighi

Come già accennato sopra, le attività designate per questa classe non vogliono essere esaustive dell'argomento né tantomeno fornire delle definizioni formali o delle formule risolutive per gli esercizi, quanto piuttosto cercare di fare emergere il senso di evento aleatorio e di probabilità a partire dalle risposte degli studenti al questionario, oltre a mostrare e a commentare le incongruenze e le contraddizioni causate dalle misconcezioni rintracciate nei loro questionari. Per questo motivo si è lavorato quasi esclusivamente su degli esercizi di base più o meno destrutturati, che non riguardano concetti avanzati di probabilità e da cui man mano si identificano le proprietà fondamentali della probabilità (di fatto, quelle enunciate da Kolmogorov). Va notato che non si è voluta dare alcuna definizione di probabilità fra quelle proposte solitamente e si sono affrontate anche situazioni in cui la più conosciuta definizione classica non funziona, sottolineando di continuo l'implicito necessario alla sua applicazione relativo all'equiprobabilità degli eventi elementari.

La tabella sottostante funge da schema cronologico di quanto trattato nelle varie lezioni, che verrà descritto in dettaglio di seguito.

Lezione 1 23 aprile 2018 durata: 1 ora	Lezione introduttiva Definizioni di: - esperimento aleatorio; - spazio campionario; - evento (elementare/composto, certo/impossibile). Alcune considerazioni sulla funzione della probabilità.
Lezione 2 24 aprile 2018 durata: 1 ora	- ATTIVITÀ 1 - ATTIVITÀ 2
Lezione 3 26 aprile 2018 durata: 1 ora	- Riflessione collettiva su come calcolare la probabilità di un evento composto - ATTIVITÀ 4 - Riflessione collettiva sul ruolo dell'informazione - ATTIVITÀ 3 (inizio)
Lezione 4 27 aprile 2018 durata: 1 ora	- ATTIVITÀ 3 (fine) - ATTIVITÀ 5 - Riflessione collettiva sul calcolo della probabilità dell'unione di due eventi
Lezione 5 4 giugno 2018 durata: 1 ora	Lezione conclusiva

Durante le lezioni dedicate alla risoluzione delle attività, i ragazzi sono divisi in otto gruppi numerati e costituiti da tre o quattro componenti, decisi dal loro professore di matematica secondo un criterio di omogeneità per livello e affinità caratteriale. Come ricordato in precedenza, l'insegnante non è presente in classe.

Lezione introduttiva

La prima è una lezione frontale supportata da slide in cui, a partire dalle risposte degli studenti al Quesito 1 del questionario iniziale *"Prova a spiegare, eventualmente aiutandoti con degli esempi, il significato che dai all'espressione ≪evento aleatorio o casuale≫"* (si veda Figura 3.1) vengono individuate e discusse due caratteristiche qualificanti l'evento aleatorio: l'incertezza e la prevedibilità/imprevedibilità.

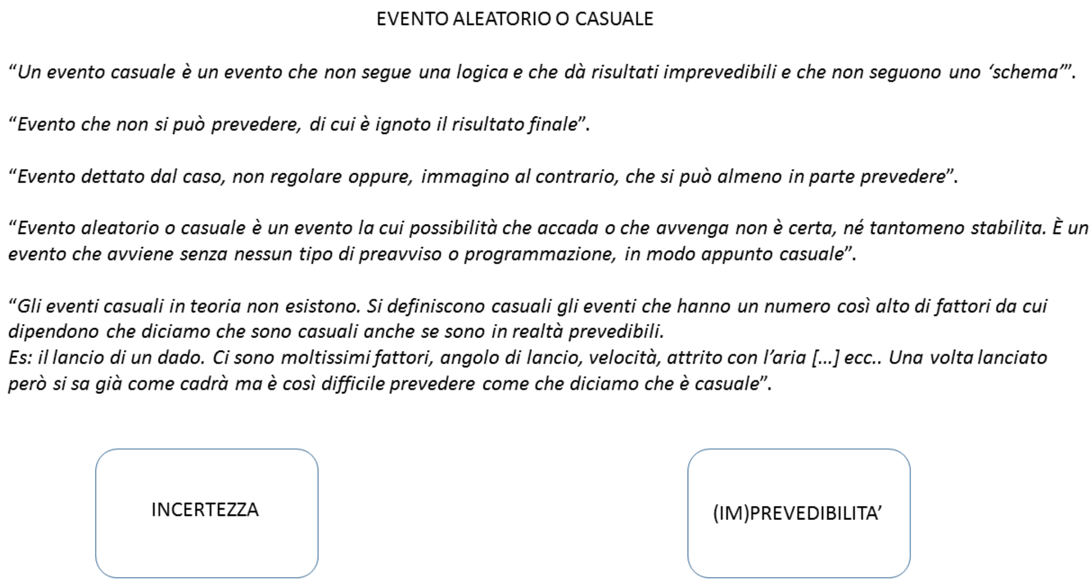


Figura 3.1: Alcune risposte date al Quesito 1.

Nell'ambito dell'incertezza, vengono date le definizioni di esperimento aleatorio, spazio campionario ed evento come insieme e sottoinsieme, evento elementare e composto ed evento certo ed impossibile: l'evento aleatorio trova quindi posto fra quegli eventi che non sono né certi né impossibili e quindi incerti.

Per giustificare la prevedibilità o meno degli eventi aleatori viene chiamata in causa la probabilità considerando, ancora una volta, le risposte date dai ragazzi al Quesito 3 del questionario iniziale *"Prova a spiegare, eventualmente* *aiutandoti con degli esempi, il significato che dai alla parola «probabilità»"* (si veda Figura 3.2).

LA PROBABILITA'

"La probabilità è la possibilità che uno o più eventi accadano basandosi su fatti reali".

"La probabilità misura se un qualcosa può accadere servendosi dei numeri (le percentuali)".

"Con la parola 'probabilità' si vuole intendere una grandezza che quantifichi la possibilità che un evento accada".

"Un evento che non è né certo né impossibile, ci sono vari modi in cui potrebbe svolgersi e il calcolo delle probabilità è il calcolo di quanto è verosimile che accada una certa cosa".

"Si parla di probabilità quando si vuole definire il verificarsi di un evento [...] il calcolo della probabilità si deve basare su dei dati e non può essere una previsione astratta secondo i propri presentimenti".

Figura 3.2: Alcune risposte date al Quesito 3.

La probabilità viene dunque introdotta come strumento utile per stabilire in che punto collocare un evento aleatorio in una scala che va da "impossibile" a "certo", sfruttando le informazioni di cui si è in possesso (si veda Figura 3.3). Ci consente di fare una previsione sulla realizzabilità di un evento misurando il suo grado di certezza.

Sottolineando che stabilire che cosa sia la probabilità non è affar semplice, si prendono in considerazione tre diversi eventi relativi ad altrettanti esperimenti aleatori e riportati in Tabella 3.1. Per ciascuno si cerca di capire come sia sensato definire la probabilità e quali siano le caratteristiche comuni presentate dalle varie definizioni date.

A prescindere da come è stata definita la probabilità, si osserva che è una quantità non negativa e che quella relativa all'evento certo vale 1 perciò è

[9] All'epoca, erano rimaste quattro squadre semifinaliste: Roma, Liverpool, Real Madrid e Bayern Monaco.

[10] Tratte dal sito `www.superscommesse.it` .

EVENTO ALEATORIO	INFORMAZIONI IN NOSTRO POSSESSO	DEFINIZIONE DELLA PROBABILITÀ
Uscita di una faccia nel lancio di un dado regolare a 6 facce	"Regolare" = densità omogenea; dunque non c'è motivo di credere che alcuna faccia sia favorita	Si può prendere come probabilità un "qualcosa" che quantifica le possibilità che una faccia ha di uscire
Una squadra vince la Champions League[9]	Le quote per le scommesse[10] (si veda Figura 3.15)	Si può prendere come probabilità un "qualcosa" che dipende (inversamente) dal valore della quota
Un punto di un quadrato di lato 1 appartiene al cerchio inscritto (si veda Figura 3.15)	I punti si possono pensare generati in maniera casuale (per esempio con Excel)	Si può prendere come probabilità un "qualcosa" che misura l'area

Tabella 3.1: Definizioni di probabilità date in classe nel caso di tre eventi aleatori differenti.

Figura 3.3: Slide sul ruolo della probabilità.

ragionevole ritenere che la probabilità, per essere tale, debba possedere tali proprietà. Nel caso del lancio del dado e del generatore casuale di numeri, il fatto che il valore della probabilità sia compreso tra 0 e 1 (inclusi) deriva direttamente dalla funzione di probabilità considerata mentre per le scommesse calcistiche lo si può assumere convenzionalmente.
La probabilità può quindi essere vista come una funzione che va dall'insieme degli eventi relativi ad un esperimento aleatorio all'intervallo reale [0,1] e che presenta le suddette caratteristiche.

Attività 1

La prima attività (si veda Figura 3.4) che i gruppi affrontano è propedeutica al Quesito 8, il quale è risultato essere il più problematico fra quelli proposti nel questionario (come illustrato nel Capitolo 4, a partire da p. 129). Come si può notare, l'attività si sviluppa in più richieste successive. Infatti l'obbiettivo di questa, come delle altre attvità, è quello di dare agli studenti

ATTIVITÀ 1: LANCIO DI DUE DADI

Considerate il seguente esperimento aleatorio:
Si lanciano contemporaneamente due dadi regolari a sei facce (numerate da 1 a 6).
Ad ogni lancio si osservano i numeri che escono su ciascun dado.

1) Individuate lo SPAZIO CAMPIONARIO.
(Suggerimento: è comodo rappresentare ogni elemento dello spazio campionario - cioè ogni evento elementare - mediante una coppia ordinata; bisogna quindi stabilire cosa rappresenta la prima componente della coppia e cosa la seconda)

2) Date un esempio di EVENTO ELEMENTARE e uno di EVENTO COMPOSTO.

3) Che probabilità assegnereste ad ogni evento elementare?

4) In che modo si può attribuire la probabilità agli eventi del punto 2)?

5) Qual è la probabilità che esca il numero 6 sul primo o sul secondo dado?

Figura 3.4: Attività 1.

1) $\Omega = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6);(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6);(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6);(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),(5;1),(5;2),(5;3),(5;4)(5;5)(5;6),(6;1),(6;1),(6;2),(6;3),(6;5),(6;4),(6;6)\}$

2) A = evento elementare
A = "esce la combinazione (3;6)"
A = $\{(3;6)\}$

B = evento composto
B = "esce una combinazione che ha come somma 4"
B = $\{(1;3),(2;2),(3;1)\}$

3) $\frac{1}{36}$ ~~A~~

4) $\frac{1}{36}$ A $\frac{3}{36} \rightarrow \frac{1}{12}$ B

5) $\frac{11}{36}$

Figura 3.5: Lo svolgimento dell'attività 1 preso da un protocollo.

una sorta di struttura mentale con cui affrontare questo genere di esercizi (in cui è applicabile la definizione classica) e, proprio per questo scopo, i problemi sono destrutturati in più punti anziché presentare direttamente la richiesta di calcolo della probabilità di un particolare evento:

1. Individuare l'esperimento aleatorio;
2. Individuare lo spazio campionario e scriverlo come insieme;
3. Assegnare una probabilità ad ogni evento elementare;
4. Scrivere l'evento di cui si domanda la probabilità come sottoinsieme dello spazio campionario;
5. Assegnare una probabilità a tale evento.

Si osservi che, a seconda delle attività, sono stati aggiunti od omessi alcuni punti, ma la sostanza dello schema resta questa.

Formalizzare il problema attraverso gli insiemi e ragionare sulla probabilità dei singoli eventi elementari potrebbe aiutare ad evitare errori collegati all'abuso della "probabilità classica" e fornire un quadro più completo della situazione trattata.
In Figura 3.5 è riportato lo svolgimento (corretto) di uno dei gruppi.

Attività 2

Prima di introdurre la seconda attività, agli studenti sono mostrate e commentate delle immagini (tratte dal sito `www.wikihow.it/Truccare-i-Dadi`) che spiegano come poter truccare un dado applicando una zavorra dietro ad una delle facce giungendo alla conclusione che questa operazione renda disomogenea la densità del dado. Nell'attività (si veda Figura 3.6) è contenuto un esempio di esperimento aleatorio in cui gli eventi elementari non sono equiprobabili a causa della natura dell'esperimento (nella fattispecie, l'asimmetria del dado). Questo squilibrio non si ripercuote sullo spazio campionario, che

ATTIVITÀ 2: LANCIO DI UN DADO TRUCCATO

Considerate il seguente esperimento aleatorio:
Si lancia un dado truccato in cui si è deciso di «zavorrare» la faccia raffigurante il numero 1.
Ad ogni lancio si osserva la faccia che esce.

1) Individuate lo SPAZIO CAMPIONARIO.

2) Date un esempio di EVENTO ELEMENTARE e uno di EVENTO COMPOSTO.

3) Che probabilità assegnereste ad ogni evento elementare?

Figura 3.6: Attività 2.

rimane immutato rispetto a quello del lancio di un dado regolare, bensì sulle probabilità dei singoli eventi elementari. L'attribuzione di tali probabilità va fatta tenendo presente che la loro somma deve dare come risultato 1.
In Figura 3.7 è riportato lo svolgimento (parziale) di uno dei gruppi. Que-

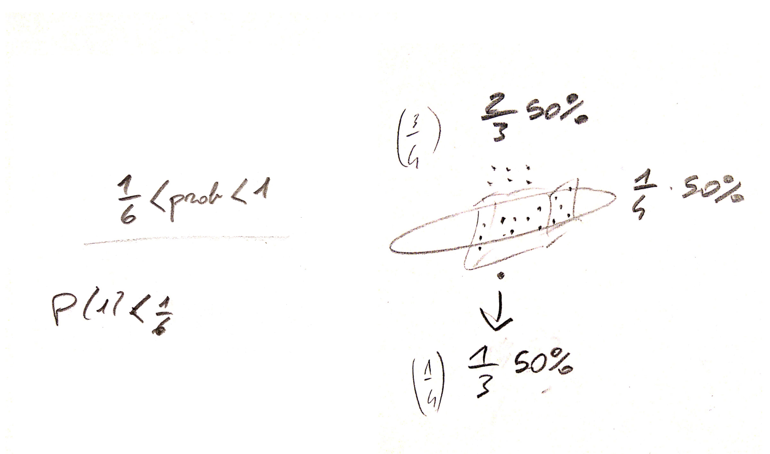


Figura 3.7: Lo svolgimento (parziale) dell'attività 2 preso da un protocollo.

sto esercizio offre l'occasione per una discussione sul calcolo della probabilità di eventi composti quando gli eventi elementari non sono equiprobabili. In questo caso si conviene che basti sommare le probabilità degli eventi elementari che formano un evento composto e si osserva che questa procedura è applicabile anche ai casi simmetrici.

Attività 4

ATTIVITÀ 4: COMPLETATE LA TABELLA

ESPERIMENTO ALEATORIO: lancio di un dado a sei facce (numerate da 1 a 6).

Esiti possibili	Probabilità «a priori»	Probabilità dopo l'informazione: il dado è truccato (la faccia 1 è quella «zavorrata»)	Probabilità dopo l'informazione: è uscito un numero pari
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0 %
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0 %
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0 %
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

In che modo agisce ciascuna delle due informazioni?

Che 1 faccia sia "zavorrata" incrementa la probabilità che esca 6 e diminuisce la probabilità che esca 1. (ha modificato l'esito di ogni evento elementare)

Escludendo 1, 3, 5 nel secondo caso, i numeri 2, 4, 6 hanno maggiore probabilità di uscire $(\frac{1}{3})$ rispetto al primo caso $(\frac{1}{6})$. (si è ristretto lo spazio campionario)

Figura 3.8: Lo svolgimento dell'attività 4 preso da un protocollo.

Con l'attività 4 (la terza in ordine di svolgimento) si introduce l'idea di informazione e di come questa possa condizionare l'assegnazione di probabilità: nell'esempio trattato (si veda Figura 3.8, in cui è riportato anche lo svolgimento corretto di un gruppo) entrambe le informazioni modificano la distribuzione della probabilità degli eventi elementari mantenendo inalterato lo spazio campionario (rispetto a quello in assenza di informazioni). Si osserva che nel secondo caso, relativo all'uscita di un numero pari, alcuni elementi dello spazio risultano avere probabilità nulla: questo consente di dare un'ulteriore interpretazione all'informazione acquisita, andando a considerare un diverso insieme degli esiti costituito dai soli numeri pari, ottenuto eliminando dall'insieme di partenza gli eventi elementari con probabilità nulla (l'uscita di facce dispari).

Attività 3

L'attività 3 (si veda Figura 3.9) riprende il Quesito 8 (per il quale si rimanda, ancora una volta, all'Appendice A) guidandone la risoluzione mediante i passaggi elencati nello schema descritto a p. 48.
In Figura 3.10 è riportato lo svolgimento (solo in parte corretto) di uno dei gruppi.

ATTIVITÀ 3: RIPRENDIAMO IL QUESITO 8

"Si lancia un dado cubico tradizionale. Se si ottiene la faccia 6, si vince. Se no, si ha diritto di lanciarlo una seconda volta e se si ottiene la faccia 6, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere?"

1) Descrivete l'ESPERIMENTO ALEATORIO.

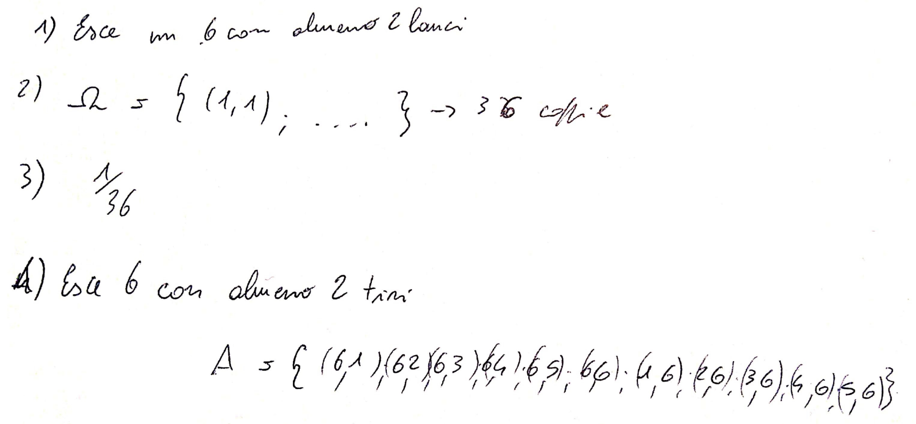
2) Scrivete lo SPAZIO CAMPIONARIO.

3) Che probabilità assegnereste ad ogni evento elementare?

4) Individuate l'evento di cui si sta domandando la probabilità e scrivetelo come sottoinsieme dello spazio campionario.

Figura 3.9: Attività 3 - prima parte.

Alla luce di quanto stabilito nei primi quattro punti dell'esercizio, si chiede di calcolare la probabilità dell'evento che corrisponde alla vittoria. Vengono poi proposte agli allievi diverse risposte (si veda Figura 3.11) prese da quelle date al Quesito 8 (rappresentanti le varie categorie di risposte individuate


1) Esce un 6 con almeno 2 lanci

2) $\Omega = \{(1,1); \ldots\} \to 36$ coppie

3) $1/36$

4) Esce 6 con almeno 2 tiri

$A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$

Figura 3.10: Lo svolgimento dell'attività 3 preso da un protocollo (la descrizione dell'esperimento aleatorio è scorretta).

durante l'analisi dei questionari, si veda la sezione dedicata, a p. 129), con la richiesta di discuterne all'interno del gruppo. Dopo il dibattito con i gruppi, prendendo spunto dalla Risposta 5, si illustra una risoluzione attraverso l'uso di un grafo ad albero. Con questo metodo si va a considerare uno spazio campionario composto da tre elementi: *"Vinco al primo lancio"*, *"Vinco al secondo lancio non avendo vinto al primo"*, *"Non vinco"*, i quali però sono tutt'altro che equiprobabili. Nel calcolare la probabilità dell'evento composto *"Vinco"* si dovrà, dunque, sommare le probabilità dei due eventi elementari da cui è formato, analogamente al caso del dado truccato (si utilizza esplicitamente la formula della probabilità dell'unione di due eventi incompatibili: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).

Si descrive, poi, un'altra possibile soluzione partendo dal conteggio della Risposta 4. In questo caso sia l'esperimento che lo spazio campionario sono gli stessi dell'attività 1 e quindi ad ogni evento elementare si può attribuire la stessa probabilità.

In questo modo si evidenzia, inoltre, come la scrittura dello spazio campionario relativo ad un esperimento aleatorio non sia unica e che, a seconda dell'insieme considerato, la probabilità si può calcolare in modi diversi (an-

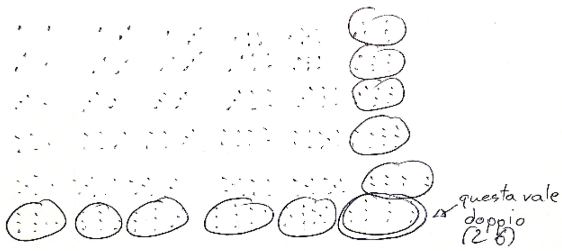
5) Discutete le seguenti risposte e provate a calcolare la probabilità dell'evento del precedente punto 4).

Risposta 1:
"Ha ragione perché i casi possibili sono 3:
1) Esce 6 al primo lancio
2) Esce un altro numero al primo lancio e 6 al secondo
3) Esce un altro numero sia al primo che al secondo
In questi 3 casi, nel primo e nel secondo vinci mentre nel terzo perdi. Dunque la probabilità è 2/3 (casi di vittoria/totale)".

Risposta 2:
"La prima volta ho 1/6 di probabilità di trovare un 6. Lo stesso vale al secondo lancio.
1/6 + 1/6 = 1/3 di possibilità di vincere."

Risposta 3:
"Ha torto perché secondo me la probabilità di vincere è 1/6 perché ho due lanci a disposizione e in quei due lanci sono sempre 6 i numeri che possono uscire. 1/6 sul primo e 1/6 anche sul secondo perché il risultato del primo non condiziona il secondo (a meno che non sia 6, in quel caso non ci sarebbe il secondo lancio)".

Risposta 4:
"No perché con due lanci possono venire 36 combinazioni:



le combinazioni possibili sono 12 su 36 ovvero 1/3 di probabilità. Infatti si ha con il primo lancio 1/6 di probabilità, con il secondo anche.
1/6 + 1/6 = 2/6 =1/3 = 33,333.. %".

Risposta 5:

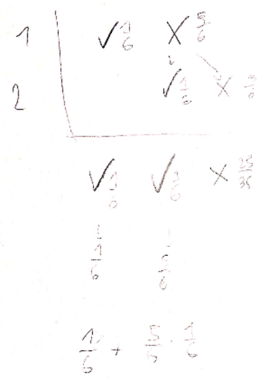


Figura 3.11: Attività 3 - seconda parte.

che se la procedura di attribuire una probabilità ad ogni evento elementare e poi sommare quelle degli eventi che costituiscono un evento composto ha valenza universale, per spazi campionari finiti o numerabili).

Attività 5

Il testo dell'ultima attività (si veda Figura 3.12) è stato parzialmente ripreso da un quesito INVALSI (Livello 8, Anno 2011, Domanda 11) e, a differenza delle precedenti, la risoluzione non è guidata in modo da lasciare libertà agli studenti e vedere quale approccio assumono.

ATTIVITÀ 5

Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro. Stabiliscono che:

- Se verranno due croci, laverà i piatti Marco;
- Se verranno zero croci, laverà i piatti Livia;
- Se verrà una croce, laverà i piatti Lorenzo.

Ritenete che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti? Perché?

Qual è la probabilità che esca testa al primo o al secondo lancio?

Figura 3.12: Attività 5.

In Figura 3.13 è riportata una risposta (corretta) di un gruppo alla prima domanda.

La seconda domanda dell'esercizio conduce ad una breve discussione sulla validità della formula per il calcolo della probabilità dell'unione di due eventi, incontrata nel commentare l'attività 3: la tentazione potrebbe essere quella di scrivere $P(\text{“}\textit{Testa al primo o al secondo lancio}\text{”}) = P(\text{“}\textit{Testa al primo lancio}\text{”} \cup \text{“}\textit{Testa al secondo lancio}\text{”}) = P(\text{“}\textit{Testa al primo lancio}\text{”}) + P(\text{“}\textit{Testa al secondo lancio}\text{”}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ma è evidente che non può valere 1, data la presenza dell'evento *“Croce al primo e al secondo lancio”*. Si introduce quindi la terza ed ultima

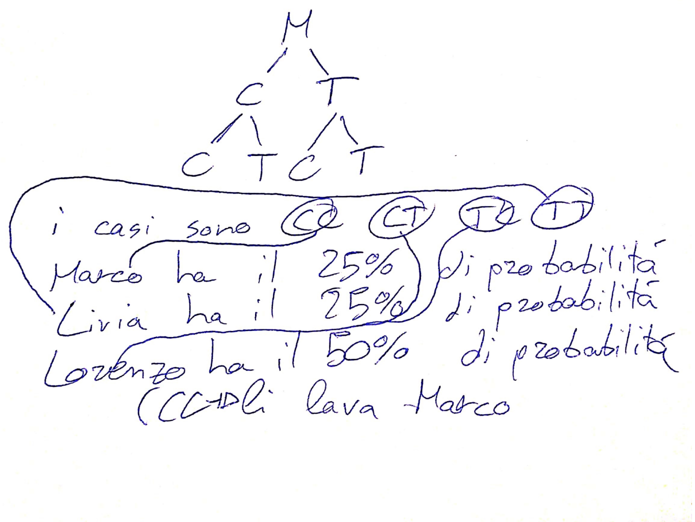


Figura 3.13: Lo svolgimento del primo punto dell'attività 5 preso da un protocollo.

proprietà caratterizzante della probabilità ovvero che per due eventi A e B qualsiasi vale che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Lezione finale

Nella lezione frontale finale si sono riprese le fila del discorso cercando di dare una visione organica della probabilità, focalizzandosi sulle caratteristiche che la identificano emerse durante le attività. Nel sottolineare l'importanza fondamentale di tali proprietà, viene fatto un parallelismo con la geometria euclidea: allo stesso modo in cui i concetti di punto, retta e piano potrebbero essere sostituiti da "tavoli, sedie e boccali di birra" purché soddisfino gli assiomi enunciati da Euclide (come amava sostenere Hilbert), qualsiasi funzione potrebbe essere usata come probabilità a patto che sottostia alle tre leggi di Kolmogorov.

Infine vengono ripresi e commentati i Quesiti 6 e 7 del questionario iniziale che non sono stati ripresi durante le attività, facendo un cenno alla legge dei grandi numeri.

Commento alle attività

Non sorprende il fatto che fra le difficoltà maggiori riscontrate dagli studenti vi sia la formalizzazione dello spazio campionario, soprattutto nel caso del lancio di due dadi e, ancora di più, nell'esperimento descritto nell'attività 3.

- Nell'attività 1, sette gruppi su otto individuano lo spazio campionario come insieme delle 36 coppie rappresentanti le combinazioni ma solo cinque di questi lo descrivono per elencazione mentre gli altri due lo fanno a parole, ad esempio uno riporta:

  "Lo spazio campionario sono tutti i numeri che possono uscire lanciando 2 dadi. In tutto sono 36 perché bisogna combinare le facce di uno con quelle dell'altro."

  Un gruppo, invece, non scrive un unico spazio campionario ma ne associa uno a ciascun dado. Questo genera una piccola discussione all'interno del gruppo stesso, in particolare uno studente sembra rendersi conto che qualcosa non torna nel momento in cui deve essere riportato un esempio di evento elementare. L'evento da loro indicato è *"$A =$ ≪esce 5 e 4≫ $= \{5, 4\}$"* che, però, non rappresenta un sottoinsieme con un unico elemento rispetto a nessuno dei due insiemi e, pertanto, non dovrebbe essere considerato elementare. Ecco uno stralcio tratto dalla registrazione audio:

  "Ma l'insieme...sono questi due insiemi...sono intersecati?...E quindi dobbiamo unirli? [...] Deve uscirne uno solo [riferendosi all'evento elementare scritto] *...nella graffa devi prenderne uno solo!"*

Un suo compagno però lo stronca sostenendo che stia sbagliando. Quando poi vanno a calcolare la probabilità dell'evento $A = \{5, 4\}$ lo fanno sommando le probabilità di *"esce 5"* ed *"esce 4"* considerandoli come eventi elementari dei due spazi campionari (identici) relativi ai due dadi: "$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$". Il gruppo non porta a termine l'attività.

Il dibattito su come "mettere insieme" i due spazi individuati da questi studenti si allarga, in un secondo momento, a tutta la classe: vengono vagliate le varie operazioni insiemistiche fino a trovare quella idonea al caso trattato, ovvero il prodotto cartesiano.

Tra i sette gruppi che individuano correttamente lo spazio campionario, uno non completa correttamente l'attività: pur avendo rintracciato tutti gli elementi dello spazio campionario assegnando loro la giusta probabilità, come evento composto scrive *"Che esca 2 volte la coppia 1-5"* attribuendogli come probabilità $\frac{1}{3}$ senza specificare come sia avvenuta tale assegnazione. Infine, senza motivare, sostiene che la probabilità dell'evento del punto (5) sia $\frac{2}{12}$.
Anche altri due gruppi sbagliano tale attribuzione: in un caso è $\frac{2}{6}$ mentre nell'altro $\frac{1}{18}$; va detto che questi sono i due che hanno descritto lo spazio a parole, non esplicitando tutte le coppie.

- L'attività 2 e l'attività 4 vengono svolte molto bene da tutti i gruppi. Riguardo alla distribuzione della probabilità tra le facce del dado truccato, i gruppi si sono divisi in due schieramenti: da una parte vi è chi assegna alla faccia 1 (quella zavorrata) la probabilità minore, alla faccia 6 (quella opposta) la maggiore e alle altre quattro uno stesso valore intermedio; dall'altra chi attribuisce alla faccia 6 (ritenendola favorita) la probabilità maggiore e a tutte le altre la stessa probabilità. Uno studente sembra essere particolarmente convinto di questo metodo e non accettare quello proposto dagli altri gruppi (le probabilità decretate con i suoi compagni sono: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{7}$

e $P(6) = \frac{2}{7}$). Discutendone si arriva alla conclusione che, dato che a priori non si conosce l'influenza della zavorra sulle caratteristiche fisiche del cubo, un modo per farsi un'idea della distribuzione della probabilità tra i vari possibili esiti del lancio potrebbe essere quello di tirare tale dado per un numero elevato di volte, prendendo nota dei risultati e andando a calcolare la frequenza relativa dell'uscita di ogni faccia.

- Con l'attività 3 i problemi emersi nella prima si accentuano e solamente tre gruppi su otto individuano come esperimento aleatorio lo stesso dell'attività 1, risolvendo correttamente l'esercizio (solo uno di questi commette un errore di calcolo al punto (4)). La difficoltà risiede nel fatto che l'esperimento aleatorio può apparire non chiaro e non è semplice tenerlo separato dall'evento aleatorio in questione: il dado si deve lanciare una o due volte?
  Fra le risposte si legge infatti:

  "Due lanci di un dado (non allo stesso tempo)."

  "Si lancia un dado due volte e si vince quando esce 6."

  "Lancio un dado 2 volte se al primo tiro non esce 6."

  Questa confusione si riflette nella scrittura dello spazio campionario, ulteriormente complicata dal fatto che si parli di un unico dado: ciò può portare all'individuazione di un insieme costituito dai numeri da 1 a 6, il che non è a priori scorretto se a ciascun evento elementare viene assegnata la giusta probabilità. Tre gruppi scrivono lo spazio in questo modo conferendo ad ogni evento la probabilità $\frac{1}{6}$ e non riescono a completare l'attività.
  Un altro gruppo (si veda Figura 3.14) scrive lo spazio campionario formato dai tre elementi *"Vinco al primo lancio"* (corrispondente nel protocollo a *"6"*), *"Vinco al secondo lancio non avendo vinto al pri-*

mo" (*"n, 6"*, dove n rappresenta un numero diverso da 6), *"Non vinco"* (*"n,n"*), gli stessi individuati con l'ausilio del grafo durante la discussione dell'attività 3 (si veda p. 52), ma attribuisce ad ognuno la stessa probabilità $\frac{1}{3}$.

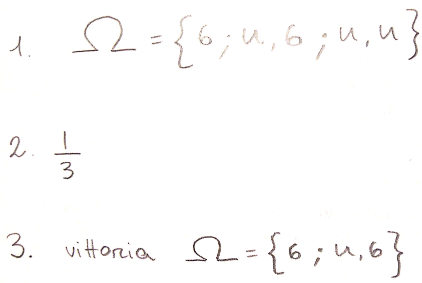


Figura 3.14: Una risposta all'attività 3 presa da un protocollo.

L'ultimo gruppo non segue lo schema proposto, tenta di scrivere lo spazio campionario come insieme di tutte le coppie ordinate che non hanno 6 alla prima componente e 6 (da solo) e calcola direttamente la probabilità dell'evento $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ senza mettere spiegazioni.

Vengono riportati di seguito degli stralci di una conversazione registrata fra due membri di uno dei gruppi che ha risposto correttamente alle domande dell'attività (se non per il fatto di aver commesso un errore di conteggio nel calcolo della probabilità dell'evento del punto (4), valutandola come $\frac{12}{36}$ invece di $\frac{11}{36}$). Il dialogo è interessante perché vede contrapposti uno studente più scettico (che sarà indicato con "A") e uno che, invece, cerca di sviluppare un ragionamento, a tratti in maniera intuitiva, illustrando le sue ragioni (indicato con "B").

[Stanno parlando della probabilità dell'evento del punto (4)]

B: *"Io nel questionario avevo messo 1 su 3. Perché, allora, che venga 6 la prima volta è 1 su 6 più la seconda possibilità...*$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$*...non sono sicuro...vado a istinto più che altro* [...] *cioè potrebbe essere la strada* *giusta però è solamente istinto, non è che ci sono arrivato perché sono intelligente."*

[Dopodiché capiscono che lo spazio campionario è formato da 36 coppie]

A: *"E di quelle che vanno bene ce ne sono due...comunque non è* $\frac{1}{3}$*..."*

B: *"No, non ce ne sono due...sono molte di più di due quelle che vanno bene."*

A: *"Sono tutte quelle col 6!"*

B: *"Sono 12."*

A: *"Quindi forse* $\frac{1}{3}$ *va bene."*

[A ci ripensa]

A: *"Ma non si tirano contemporaneamente 'sti dadi, eh! Se ne lancia uno prima e poi l'altro, eh! Quindi non ci sono combinazioni! [...] No perché se tu ne tiri uno, se non viene 6 lo prendi e ne tiri un altro...sììì!"*

B: *"Sì, però sono due combinazioni...sono le combinazioni della prima volta con la seconda volta...è come avere due dadi, è uguale!"*

A: *"[...] No, perché se tu tiri la prima volta e viene 6 hai già vinto!"*

B: *"Tirare un dado due volte o tirare due dadi diversi ognuno una volta è uguale, è identico, non cambia nulla."*

A: *"Però se tu tiri il primo dado e viene 6 hai già vinto e bon, hai finito l'esperimento!"*

B: *"Ma anche se ne avessi due sarebbe così perché basta che ne tiri uno e viene 6..."*

A: *"Appunto! Però non li tiri contemporaneamente!"*

B: *"Non cambia nulla, tirarli contemporaneamente non cambia nulla! Se in uno viene 6..."*

A: *"Va bene..."*

Per mancanza di tempo, solo la metà dei gruppi commenta parte delle risposte proposte nella seconda parte dell'attività 3 (si veda Figura 3.11). Nessuno di loro è d'accordo con la Risposta 1, in particolare un gruppo afferma:

"No! Ognuno dei casi possibili ha una probabilità diversa di avverarsi, quindi non possono avere lo stesso peso."

Lo stesso gruppo concorda con la Risposta 4 a cui apporta una modifica correggendo l'errore di conteggio delle "combinazioni favorevoli" da 12 a 11, ma non con la Risposta 5 a causa di uno sbaglio nello svolgimento del calcolo (corretto) riportato nella risposta né con le altre due. Un altro condivide solo la Risposta 5 e riconosce che nella 4 la coppia $(6, 6)$ ha la stessa probabilità delle altre; infine gli ultimi due gruppi non prendono in considerazione tutte le risposte (uno si ferma alla prima, l'altro alla terza convenendo, senza motivare, con questa).

- La maggior parte dei gruppi affronta l'attività 5 in maniera molto intuitiva, scrivendo direttamente i risultati e non seguendo uno schema preciso (va detto che per completare l'esercizio hanno a disposizione pochi minuti). Nella prima parte dell'esercizio, un gruppo giunge alla soluzione mediante un diagramma ad albero, due ragionando sullo spazio campionario e uno attraverso una tabella a doppia entrata. Gli altri assegnano direttamente le probabilità ai tre eventi che decretano chi dovrà lavare i piatti.
  Riguardo alla seconda parte, solamente tre gruppi su otto non calcolano la probabilità di *"Esce testa al primo o al secondo lancio"* o danno un risultato sbagliato (uno di questi scrive "50%").

3.3 L'attività presso la classe IV B del Liceo Scientifico Sabin

Come anticipato, il percorso svolto in questa classe è costituito perlopiù da lezioni frontali alla lavagna, attraverso spiegazioni teoriche ed esercitazioni che gli studenti seguono dalle proprie postazioni. Nel percorso particolare importanza è stata data agli esercizi dai quali, talvolta, si partiva per l'introduzione di nuovi concetti teorici; ove possibile e sensato, si applicava lo schema enunciato precedentemente nella sezione relativa al Liceo Malpighi: l'individuazione dell'esperimento aleatorio e la successiva scrittura insiemistica dello spazio campionario e dei vari eventi (per elencazione o per proprietà caratteristica), come punto di partenza per l'attribuzione delle probabilità.
Per una scelta concordata con l'insegnante, inizialmente si è voluta dare solamente la definizione classica di probabilità ma sottolineando di continuo la sua limitatezza e non dandola per scontata in nessuno dei problemi trattati. In un secondo momento, comunque, si sono mostrate anche altre definizioni. Per l'organizzazione degli argomenti ci si è basati sul libro di testo *Nuova Matematica a colori 4* [17] che non rappresentava il testo in adozione nella classe ma si è ritenuto più adeguato per il modo in cui presentava la teoria della probabilità.
Si segnala inoltre che gli studenti di questa classe, a differenza di quelli del Malpighi, avevano già affrontato il calcolo combinatorio.

Nella tabella sottostante sono riassunti i contenuti delle ore di lezione trascorse all'interno della classe.

Lezione 1 20 aprile 2018 durata: 1 ora	Lezione introduttiva Considerazioni sul ruolo della probabilità Definizioni di: - esperimento aleatorio; - spazio campionario; - evento (elementare/composto, certo/impossibile). Linguaggio della probabilità e linguaggio della teoria degli insiemi
Lezione 2 - Lezione 8 24 aprile - 11 maggio 2018 durata: 8 ore	Introduzione della probabilità classica e di tutte le definizioni e teoremi che la riguardano
Lezione 8 11 maggio 2018 durata: 1 ora	- ATTIVITÀ 1 - ATTIVITÀ 2
Lezione 9 - Lezione 10 21 - 23 maggio 2018 durata: 2 ore	Esercizi in preparazione alla verifica
Lezione 11 25 maggio 2018 durata: 2 ore	Verifica
Lezione 12 1 giugno 2018 durata: 1 ora	- ATTIVITÀ 3 - ATTIVITÀ 4 - ATTIVITÀ 5
Lezione 13 4 giugno 2018 durata: 1 ora	Lezione conclusiva: - discussione collettiva sulle attività; - altre definizioni di probabilità.

Durante l'ora dedicata allo svolgimento delle prime due attività, gli studenti vengono divisi dal docente in cinque gruppi da tre o quattro persone, eterogenei per livello in modo tale che in ogni gruppo ci sia uno fra gli allievi

più capaci che funga da aiuto e stimolo per gli altri. Nella lezione dedicata alle altre tre attività, non sono presenti tutti gli studenti in quanto parte della classe è impegnata in un compito: è dunque lasciato loro modo di aggregarsi spontaneamente in tre gruppi.
Per tutto il periodo l'insegnante è presente in classe e collabora alla realizzazione del percorso.

Lezione introduttiva

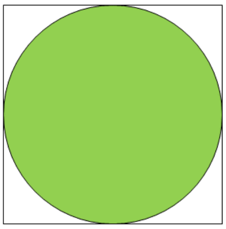
La trattazione dell'argomento in questa classe comincia con un video[11] che, come azione di denuncia, simula in maniera curiosa la probabilità di vittoria del montepremi massimo di un Gratta&Vinci del valore di 5 euro. Oltre al significato etico, sociale e attuale, ciò permette di ricollegarsi alla nascita della probabilità, sviluppatasi proprio nel campo dei giochi d'azzardo. Essa è, infatti, un potente strumento per muoversi nelle situazioni di incertezza, assegnando un grado di realizzabilità a ciascuna di esse.
Come per la classe del Malpighi, vengono date le definizioni di esperimento aleatorio, spazio campionario ed evento aleatorio insistendo sulla formalizzazione di questi elementi attraverso la teoria degli insiemi. Mediante l'ausilio di una tabella si ragiona sulla traduzione del linguaggio probabilistico nel linguaggio insiemistico servendosi di diversi esempi e dei diagrammi di Eulero-Venn, ampiamente utilizzati da qui in avanti.

Lezioni successive

Nella terza lezione si dà la definizione classica di probabilità rimarcando fortemente le sue limitazioni attraverso due esempi (si veda Figura 3.15):

[11] Realizzato nell'ambito del progetto *Fate il nostro gioco*, che ha lo scopo di sensibilizzare la popolazione, attraverso la matematica e la psicologia, al gioco d'azzardo. Il video è reperibile al sito: `https://www.youtube.com/watch?v=iXjtIHOjLyk&t=22s` .

SPAZIO CAMPIONARIO INFINITO



EVENTI ELEMENTARI NON EQUIPROBABILI

Favorite vittoria Champions	Quote a metà luglio su Snai	Prima dei sorteggi dei quarti	Quote dopo quarti	Quote vincente Champions oggi
Bayern	5.50	5.50	2.75	7.00
Real Madrid	6.00	5.50	2.50	2.10
Liverpool	25.00	20.00	4.25	2.40
Roma	50.00	40.00	10.00	25.00

Figura 3.15: Due casi di non applicabilità della definizione classica della probabilità.

- Non si può utilizzare in problemi in cui lo spazio campionario è infinito, per esempio per calcolare la probabilità che un punto qualsiasi preso dentro un quadrato (di lato 1) appartenga anche al cerchio inscritto;

- Conduce in errore in esercizi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme, come nel caso in cui si voglia decretare la squadra vincitrice di un torneo calcistico[12].

Mentre nel primo caso trattato, l'attribuzione della probabilità come rapporto di aree (quella del cerchio su quella del quadrato) può considerarsi come un'estensione della nota formula di "Casi favorevoli su casi possibili" considerando, cioè, "equiprobabili" i singoli punti, nel caso delle squadre di calcio così non è: ritenendo ragionevolmente la probabilità in relazione inversa con il valore della quota, si osserva come le probabilità degli eventi elementari, oltre a non essere uguali, varino nel tempo a seconda dello stato di informazioni possedute.
In seguito, nello svolgimento degli esercizi viene prestata, dunque, molta attenzione alle probabilità degli eventi elementari e vengono affrontati casi in cui a scritture diverse di spazi campionari relativi allo stesso esperimento

[12]La tabella relativa alle quote delle scommesse è tratta dal sito www.superscommesse.it .

aleatorio, corrispondono eventi elementari equiprobabili o no.
Vengono quindi elencate e commentate le proprietà caratterizzanti (che saranno riprese nella lezione conclusiva), insieme a teoremi e definizioni:

- Probabilità dell'evento contrario;
- Probabilità dell'unione di due eventi;
- Probabilità condizionata (per la quale si discute sul ruolo dell'informazione);
- Eventi indipendenti;
- Teorema della probabilità totale;
- Teorema di Bayes.

Si mostra, inoltre, la risoluzione di alcuni problemi mediante diagrammi ad albero e tabelle a doppia entrata.

Attività 1

La prima attività somministrata al Sabin coincide con l'attività 3 svolta al Liceo Malpighi (si veda p. 51). Ovviamente le risposte di cui gli studenti devono discutere sono prese dal loro questionario iniziale e sono riportate in Figura 3.16.

In Figura 3.17 è riportato lo svolgimento di tale attività da parte di un gruppo.

Attività 2

L'attività 2 (si veda Figura 3.18) è parte di un esercizio tratto dal libro [17], ritenuto particolarmente fuorviante a causa del suo testo descrittivo.

L'intenzione è quella di osservare l'approccio utilizzato dagli allievi nella risoluzione del problema. A tal proposito, in Figura 3.19 è riportata la risoluzione (corretta) di uno dei gruppi.

Risposta 1:
«*No, le possibilità sono 2 su 12 perché le facce del dado nel primo caso sono 6 e la possibilità 1 e nel secondo caso le facce sono sempre 6 e la possibilità è sempre 1.*»

Risposta 2:
«*No, io ho un 6 al primo lancio e ho vinto, oppure non ho un 6 al primo lancio e ho 6 al secondo lancio e ho ugualmente vinto. Altrimenti ho perso. Ci sono 2 possibilità su 6 di vincere!*»

Risposta 3:
«*Torto, un lancio vale l'altro. La probabilità che uscirà 6 è sempre 16%.*»

Risposta 4:
«*Sì ha ragione*

LANCIO 1 → *6 VINCO*
LANCIO 1 → *NON 6 RITIRO*
NON 6 RITIRO → *6 VINCO*
NON 6 RITIRO → *NON 6 PERDO* »

Figura 3.16: Attività 1.

T = "lancio un dado 2 volte"
A = "esce 6 al primo lancio" $P(A) = \frac{1}{6}$
B = "esce 6 al 2° lancio" $P(A) = \frac{1}{6}$

$\Omega = |12| \rightarrow (1_A, 2_A \dots 1_B, 2_B)$

VINCO → "$A \cup B$" → almeno 1

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$

~~disposizione~~ con $1_A, 1_B \dots$ $2_A, 1_B \dots$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Figura 3.17: Lo svolgimento dell'attività 1 preso da un protocollo.

ATTIVITÀ 2

In un giardino pubblico ci sono tre panchine, ciascuna a due posti. Una persona arriva e si siede a caso su una panchina; successivamente arriva una seconda persona: anch'essa si siede a caso su una panchina. Qual è la probabilità che le due persone si trovino sedute sulla stessa panchina?

Figura 3.18: Attività 2.

$\boxed{1 | 2}$ $\boxed{3 | 4}$ $\boxed{5 | 6}$

1-2 2-1 2-3 3-2
1-3 3-1 : :
1-4 4-1 3-4 4-3
1-5 5-1 5-6 6-5

$\Omega = \{(a,b) \mid a,b \in \{1,\dots,6\},\ b \neq a\}$

$\rightarrow$ 30 combinazioni

$A = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5)\} \rightarrow 6$

$P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

Figura 3.19: Lo svolgimento dell'attività 2 preso da un protocollo.

Attività 3 e 4

In queste attività vengono riproposti il Quesito 6 (si veda Figura 3.20) e il Quesito 7 (si veda Figura 3.21) del questionario iniziale con alcune fra le risposte che sono state date dagli studenti: come per l'attività 1, il loro compito è quello di discutere tali risposte. Una volta fatto ciò, tutti i gruppi interagiscono fra loro valutando le varie conclusioni raggiunte.

ATTIVITÀ 3

Nel gioco del SuperEnalotto vengono estratti (senza reinserimento) sei numeri da un contenitore che contiene novanta palline identiche al tatto e numerate da 1 a 90. Un giocatore sceglie sei numeri su cui puntare.

a) Sapendo che il numero 37 non è mai stato estratto negli ultimi sei mesi, saresti più portato a giocarlo rispetto ad un altro numero, oppure no? Perché?

Commentate le risposte seguenti:

Risposta 1: «*Sì, per statistica è più probabile che esca un numero che non viene estratto da un po'.*»

Risposta 2: «*No, perché ad ogni estrazione il numero ha le stesse probabilità* [di venire estratto] *degli altri numeri.*»

b) Se dovessi scegliere se giocare la sestina 1, 2, 3, 4, 5, 6 oppure la sestina 2, 5, 31, 48, 73, 82, quale sceglieresti?

A. □ 1, 2, 3, 4, 5, 6 perché ...

B. □ 2, 5, 31, 48, 73, 82 perché ...

C. □ Indifferente, perché ...

Commentate le risposte seguenti:

Risposta 1: «*B, è più probabile che escano numeri non in ordine perché l'estrazione è casuale.*»

Risposta 2: «*B, le probabilità che escano delle sequenze ordinate sono più basse.*»

Risposta 3: «*C, si ha la stessa probabilità di estrarre una sequenza come la A o come la B.*»

Risposta 4: «*C, le palline* [i numeri] *hanno la stessa probabilità di uscire.*»

Figura 3.20: Attività 3.

Parlare delle risposte date al Quesito 6 è servito per esaminare direttamente insieme agli studenti le misconcezioni legate alla rappresentatività che si insinuano nel quesito così come, grazie al punto (b) dell'attività 4, si di-

ATTIVITÀ 4

Un uomo e una donna si preparano ad estrarre a turno una pallina da un'urna contenente 5 palline bianche e 5 palline nere, identiche al tatto.
L'uomo è il primo a pescare: estrae una pallina e, senza guardarla e senza mostrarla alla donna, la mette in tasca.

a) Qual è la probabilità che abbia estratto una pallina bianca? Perché?

Successivamente la donna estrae a sua volta una pallina e, senza guardarla e senza mostrarla all'uomo, la mette in tasca.

b) Ritieni che si possa stabilire la probabilità che la donna abbia estratto una pallina bianca? Se sì, ti aspetti che sia minore, maggiore o uguale alla probabilità dell'uomo di aver estratto una pallina bianca? Perché?

Commentate le risposte seguenti:

Risposta 1: «*No, perché non sappiamo il colore della pallina estratta dall'uomo.*»

Risposta 2: «*Dipende dal colore della pallina estratta dall'uomo: se bianca, è più probabile che la donna estragga una nera; se nera, è più probabile che la donna estragga una bianca.*»

Risposta 3: «*È uguale perché non sappiamo di che colore è la pallina estratta dall'uomo.*»

A questo punto l'uomo tira fuori la sua pallina dalla tasca, la mostra alla donna che vede che è bianca.

c) Quest'informazione, secondo te, influisce sulla probabilità della donna di aver pescato una pallina bianca? In particolare modifica la tua risposta al punto b)? Perché?

Commentate le risposte seguenti:

Risposta 1: «*Influisce perché ci sono probabilità minori che la donna abbia preso una pallina bianca.*»

Risposta 2: «*Non cambia perché ha già estratto.*»

Figura 3.21: Attività 4.

mostra avvalendosi per esempio di un grafo che, non essendo presente alcuna informazione aggiuntiva in merito all'esito dell'evento, la probabilità risulta invariata.

Attività 5

Per questa si rimanda all'attività 4 del percorso svolto al Liceo Malpighi (si veda p. 50).

Lezione finale

Come ricordato in precedenza, solo una parte della classe partecipa alle attività 3, 4 e 5. Perciò, durante questa ora, un membro per ogni gruppo racconta il lavoro svolto ai compagni che non sono stati presenti.
Per concludere il percorso condotto, utilizzando delle slide e partendo da particolari eventi, si illustrano altre definizioni di probabilità per giungere, poi, all'opera di assiomatizzazione realizzata da Kolmogorov sottolineando, ancora una volta, come la probabilità non sia definibile univocamente, ma assiomaticamente, cioè richiedendo che soddisfi certe proprietà.

La verifica

La verifica, avente valenza sommativa, è consultabile nell'Appendice C ed è realizzata in accordo con l'insegnante. Il giorno del compito in classe sono presenti 16 alunni.
Il primo esercizio presenta il medesimo esperimento aleatorio del Quesito 8 e riproposto nell'attività 1; riporta, inoltre, la stessa struttura schematica adottata nel risolvere gli esercizi (partendo dallo spazio campionario, calcolare la probabilità di eventi composti più complessi).
Gli altri sono esercizi abbastanza standard tratti da vari libri di testo o riadattati: si tratta di esercizi ampiamente esaminati in classe nelle ore di lezione frontale.
L'ultimo, invece, vuole ricalcare l'impostazione del Quesito 8 fornendo un

ragionamento scorretto ma che, a prima vista, "suona bene" e che nasconde l'insidia del bias di equiprobabilità.

Commento alle attività e alla verifica

- Anche in questa classe la risoluzione dell'attività 1 ha causato delle difficoltà legate soprattutto alla formalizzazione dello spazio campionario. Tre gruppi su cinque tentano di risolvere l'esercizio non dando troppa importanza allo spazio degli esiti, sfruttando il grafo e la formula della probabilità dell'unione di eventi: due di questi riescono a concluderlo con successo (fra i quali, l'autore dello svolgimento riportato in Figura 3.17), mentre uno non ricorda con esattezza come usare quegli strumenti.
  Gli altri due gruppi si fermano alla scrittura dello spazio: in un caso è costituito da coppie (da $(1,1)$ a $(5,6)$ e ad ogni evento elementare viene attribuito $\frac{1}{6}$ di probabilità); nell'altro l'insieme è più articolato e distingue tra l'uscita di 6 al primo lancio e la sua non uscita (l'esperimento aleatorio individuato da questi studenti è infatti *"Lancio di un dado regolare a 6 facce, se non esce 6 ritiro"*):

  " $\Omega = \{a \in \{1,2,3,4,5,6\},\ \text{se } a \neq 6 \Rightarrow (a,b)|b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$."

  Fra tutti, solo un gruppo individua come esperimento aleatorio *"Lancio un dado due volte"* (quello citato poco sopra); per gli altri è *"Lancio un dado a 6 facce"* o *"Lancio un dado a 6 facce fino a 2 volte"*.
  Nessuno commenta le risposte nella seconda parte dell'attività.

- Nell'affrontare l'attività 2 due dei cinque gruppi si perdono, in balia delle formule di calcolo combinatorio cercando di ricondurre ad una di queste la situazione descritta.
  Un gruppo formalizza perfettamente l'esercizio riconoscendo come lo spazio campionario sia formato dalle 30 coppie rappresentanti i posti occupati dalle due persone arrivando a concludere che, fra queste, solo 6 corrispondono all'evento di cui si sta domandando la probabilità

(questo svolgimento è quello riportato in Figura 3.19).
Anche un secondo gruppo risolve correttamente l'esercizio ma ragiona a livello più intuitivo: contano che, non considerando l'ordine (cioè non facendo distinzione fra chi è seduto nel posto di destra e chi in quello di sinistra), ci sono 15 modi possibili in cui le due persone possono sedersi sulle due panchine e in solo 3 di questi condivideranno la seduta. Pertanto la probabilità è $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.
Dall'ascolto delle registrazioni emerge che un componente del gruppo restante, invece, afferma, subito dopo aver letto il testo dell'attività:

"Io uno lo tengo fisso; l'altro ha $\frac{1}{5}$ di possibilità di sedersi vicino"

il che è corretto in quanto rispecchia l'assenza di informazioni riguardo al posto a sedere occupato dal primo individuo. Tuttavia, non dando troppo peso a questa affermazione, insieme ai suo compagni passa in rassegna delle formule per mettere insieme i dati del problema, non riuscendoci.

- Solo tre gruppi partecipano allo svolgimento delle attività 3, 4 e 5. Uno di questi non è molto attivo e perlopiù, ricopia ciò che viene scritto alla lavagna durante la discussione collettiva. Gli altri due gruppi esprimono il loro assenso o dissenso in maniera corretta alle risposte riportate nell'attività 3 senza fornire troppe spiegazioni, mentre nei confronti dell'attività 4 sembrano mostrare più difficoltà: sono entrambi d'accordo con la Risposta 2 (si veda Figura 3.21) e, di conseguenza, non con le altre due; in particolare su un fascicolo si legge, riguardo alla Risposta 3 (quella corretta):

  "Non può essere uguale." [Cioè ritengono, sbagliando, che la probabilità della donna di estrarre una pallina bianca è per forza diversa da

quella dell'uomo.]

Si può facilmente immaginare lo stupore dei ragazzi quando, in seguito, è stato dimostrato essere così, con l'ausilio di un diagramma ad albero (strumento che nessuno di loro ha pensato di utilizzare nello svolgere l'attività).
Nell'ultimo punto i due gruppi prendono posizioni diverse: uno conviene che, avendo la donna già estratto, la sua probabilità non vari dopo l'acquisizione dell'informazione (sostenendo, quindi, la Risposta 2); l'altro, invece, è basito da tale affermazione e condivide l'affermazione della Risposta 1:

"What? Sì che cambia"

- L'attività 5 è accolta positivamente da tutti e tre i gruppi che completano in maniera coerente la tabella.

- Per quanto concerne i risultati della verifica, riportata in Appendice C, gli esercizi di maggiore interesse ai fini delle tematiche di questa tesi sono il primo e l'ultimo.
  Fra i 16 presenti, 5 risolvono correttamente l'esercizio 1, scrivendo adeguatamente lo spazio campionario come insieme e i vari eventi come suoi sottoinsiemi; altri 6 studenti individuano correttamente lo spazio campionario ma non gli eventi. I restanti 5 sbagliano o non scrivono nulla passando direttamente a calcolare le probabilità richieste.
  L'esercizio 7 va meglio: 11 allievi su 16 rispondono di non condividere il ragionamento proposto, calcolando le probabilità effettive: alcuni si servono di un diagramma ad albero, altri direttamente delle formule; solo uno scrive lo spazio campionario come insieme delle coppie in cui ogni componente rappresenta l'esito rispettivamente della prima e della

seconda operazione. Uno degli studenti è esente dallo svolgere questo esercizio in quanto DSA.

Capitolo 4

I questionari

Come menzionato nel capitolo precedente (p. 38), si sono realizzati due questionari con finalità diverse: il primo, anteriore all'introduzione della teoria della probabilità, per sondare lo stato dell'intuizione primaria ad essa relativa e delle conoscenze (disciplinari e provenienti dall'esperienza) possedute dagli studenti; il secondo, successivo alla fine delle lezioni, con lo scopo di indagare la presenza di eventuali variazioni nelle tipologie di risposte a distanza di tempo dalle attività svolte e interpretabili come arricchimento e sviluppo di una corretta intuizione secondaria. L'esplicitazione dei criteri che hanno guidato la costruzione dei questionari nonché l'analisi dei risultati emersi dalla loro somministrazione saranno oggetto di questo capitolo.

Nonostante le diverse finalità dei questionari, la loro impostazione è molto simile e le modalità con cui sono somministrati le medesime.
Agli allievi è consegnato un fascicolo contenente i quesiti sul quale scrivono direttamente le loro risposte. Il test è anonimo: per ognuno è riportato un codice che lo studente annota in modo da essere rintracciabile nel caso in cui si desideri fargli un'intervista; grazie alla sigla, inoltre, si ha una corrispondenza tra gli autori del primo e del secondo questionario. È specificato loro che la prova non ha alcun carattere valutativo né i risultati saranno mostrati al docente e sono dichiarate fin da subito le sue finalità, chiedendo la loro

collaborazione per il miglior svolgimento possibile del progetto. È consentito l'uso della calcolatrice e i banchi non sono separati per evitare di creare l'atmosfera da compito in classe e situazioni di disagio.
I quesiti sono formulati utilizzando un linguaggio informale e riguardano ambiti il più possibile familiari agli studenti. La maggioranza delle domande è aperta per permettere la libera espressione dei ragazzi e viene utilizzata la seconda persona singolare, in modo che l'allievo si senta coinvolto ed interpellato direttamente, unitamente ad espressioni come "Secondo te" o "Ritieni che" volte a non delegittimare il pensiero di ognuno e ad evitare la parvenza di univocità della risposta corretta. Inoltre, come sprone ad esplicitare il proprio ragionamento, è sempre richiesta una giustificazione alle risposte.

4.1 Questionario iniziale

Il questionario (per la cui consultazione si rimanda all'Appendice A) vuole rappresentare una sorta di percorso naturale attraverso l'intuizione primaria relativa alla probabilità: gli otto quesiti si sviluppano attorno ad un filo logico che intende guidare senza forzature lo studente nel ragionamento e fare sì che, nella successiva fase di analisi, si possa prendere atto di eventuali intoppi o incongruenze. Questo cammino di indagine parte dal basso, dal concetto di evento aleatorio e probabilità, e non prevede (tranne in un paio di casi) il calcolo di alcuna probabilità né, tantomeno, la risoluzione di complicati problemi probabilistici. Viene perciò prediletto un approccio qualitativo volto a sollecitare le opinioni personali degli studenti e ad osservare, quindi, le loro reazioni di fronte a situazioni in cui la prima intuizione potrebbe condurre ad una conclusione inesatta.
Inoltre, per quanto possibile, si è cercato di non soffermarsi unicamente su casi che rientrassero nell'ambito della probabilità classica per sottolineare ulteriormente la sua limitata applicabilità, privilegiando tipi di eventi meno standard (ma più vicini alla realtà di tutti i giorni) non appartenenti a questo ristretto insieme.

Oltre alle due classi di cui si è già parlato nel Capitolo 3:

- La classe II A del Liceo Scientifico Malpighi di Bologna, composta da 27 alunni;
- La classe IV B del Liceo Scientifico A. B. Sabin di Bologna, composta da 17 alunni;

il questionario iniziale (e solo questo) è stato somministrato anche ad una terza classe:

- La classe II A liceo[13] del Liceo Classico M. Minghetti di Bologna, composta da 16 alunni;

per un totale di 60 studenti.

4.1.1 Descrizione dei quesiti

I quesiti sono di difficoltà crescente e possono essere raggruppati in due classi:

- I primi cinque sono strettamente correlati e vogliono sondare le idee relative ai concetti basilari di evento e, in un secondo momento, di probabilità;
- Gli ultimi tre sono tra loro indipendenti e mirano a far emergere eventuali misconcezioni.

Quesiti 1 - 5

Questi primi quesiti sono pensati e posti con un ordine specifico rispondente ai criteri di consequenzialità sopra enunciati e non riportano specifici riferimenti all'ambito matematico.

[13] Corrispondente al quarto anno di scuola secondaria di secondo grado. Il questionario è stato svolto dalla classe il giorno 18 aprile 2018.

Con il Quesito 1 si chiede allo studente di descrivere, utilizzando parole proprie ed eventualmente sfruttando degli esempi, il significato che attribuisce all'espressione "evento aleatorio o casuale", concetto fondante della teoria della probabilità e che rappresenterà il punto di partenza nell'introduzione alla disciplina.

Una volta che lo studente chiarisce a sé stesso la nozione di evento aleatorio, il Quesito 2 lo pone di fronte ad una serie di sei eventi di cui solo il primo (riguardante l'uscita del 6 dal lancio di un dado a sei facce) è un esempio classico, presente in varie forme in tutti i testi scolastici. Le altre sono affermazioni molto concrete, intenzionalmente vicine all'universo giovanile in modo che l'allievo possa attingere direttamente dalla sua esperienza e dalle conoscenze che da essa derivano nel valutare il loro stato di certezza. La familiarità degli eventi elencati vuole anche porre l'accento sul fatto che l'incertezza sia una componente fondamentale di svariati aspetti della vita comune e che quindi sia veramente necessario uno strumento per la sua quantificazione e gestione.
Va notato che i primi due quesiti non trattano ancora la probabilità, vocabolo che non di fatto non compare.

Il termine "probabilità" è di uso comune nel linguaggio quotidiano in quanto parte integrante del modo di pensare e di guardare alla realtà dell'essere umano: ciascuno di noi, ad esempio, valuta le scelte da compiere in base alle possibilità di successo (inteso in senso ampio) che da esse derivano e nel fare ciò utilizza, più o meno consciamente, un proprio "metro probabilistico". Ciò vale anche per i ragazzi interpellati: quello che viene chiesto nel Quesito 3 è di spiegare in che cosa consiste, secondo loro, questo strumento di misura. La formulazione della domanda è analoga a quella del primo quesito e non sono posti vincoli alla risposta.
Anche in questo caso i punti salienti delle risposte gioveranno ad una presentazione curricolare dell'argomento più "personalizzata" oltre a fornire un

panorama completo della conoscenza di senso comune della classe relativa al concetto di probabilità.
Sarà inoltre interessante andare a confrontare la definizione data da ciascuno con il modo in cui la probabilità verrà valutata nei quesiti successivi.

Il Quesito 4 fa da ponte tra i concetti di "evento aleatorio" e "probabilità": si riprendono, infatti, gli eventi del Quesito 2 e, invece di chiedere di calcolare la probabilità di ciascuno dando per assunto che ciò si possa fare, si domanda se sia effettivamente quantificabile la possibilità che tali affermazioni si realizzino.
Queste asserzioni sono esposte attraverso un linguaggio semplice e confidenziale, e rappresentano situazioni apparentemente distanti dalla formalizzazione matematica o dagli esempi che solitamente si trovano nei libri di testo, fatta eccezione per l'evento (a). La loro probabilità non è, per di più, calcolabile applicando il modello classico e ciò rende ancora più interessante l'osservazione del modo in cui gli studenti vi si approcciano: cioè se venga naturale un qualche tipo di ragionamento non assimilabile a quello di tipo classico e, in tal caso, su cosa questo si basi, oppure se vi siano situazioni in cui si ritiene di non poter parlare di probabilità.
Con questo quesito si vuole anche far riflettere sull'esistenza di diversi modi di attribuire una probabilità i quali variano a seconda del contesto e della natura degli eventi considerati. L'applicazione del modello classico non è che uno fra questi ed è valido solo per una cerchia ristretta di casi particolari. In aggiunta risulta evidente come nel valutare la probabilità necessariamente ci si debba affidare alle informazioni di cui si è a disposizione.

L'influenza che talune informazioni esercitano sull'assegnazione di una probabilità rappresenta il nodo cruciale attorno al quale si sviluppa il Quesito 5. Nella fattispecie, vengono ripresi tre fra gli eventi elencati in precedenza, riguardo ai quali gli studenti erano invitati a valutare l'eventuale probabilità, accompagnati da una coppia di informazioni (sempre molto concrete) ognu-

no: i ragazzi sono chiamati ad argomentare gli effetti che ogni dato sortisce sulla probabilità dell'evento in questione. Va notato che non viene richiesto loro di calcolare la probabilità in ciascuna circostanza, ma solo di provare a descrivere le possibili variazioni che l'informazione data provoca.
I tre eventi in questione sono stati scelti in quanto associabili a tre modi diversi di valutare la probabilità: il primo (a) è un esempio classico, il secondo (b) è di tipo "frequentista" mentre il terzo (c) "soggettivo". In questo modo si vede come, da una parte, lo stato delle informazioni possa condizionare il valore della probabilità indipendentemente dal modo in cui vada determinata, dall'altra, come alcune informazioni non siano rilevanti ai fini del ragionamento probabilistico poiché non modificano lo stato attuale delle conoscenze riguardo al verificarsi di un evento.

Quesito 6

Il SuperEnalotto è il gioco governato dal caso per eccellenza, in cui ogni estrazione è indipendente dall'altra. Attraverso questa coppia di domande si indaga il modo in cui gli allievi guardano al caso: se lo ritengano, cioè, un processo dotato di memoria in cui il passato può influenzare il futuro, oppure privo delle caratteristiche proprie del determinismo e che cosa essi intendano per "sequenza casuale".
Il quesito è stato ripreso da un questionario[14] realizzato da E. Fischbein in collaborazione con A. Gazit [9, p. 5] (*Questionnaire B*) e intende indagare la presenza del bias di rappresentatività (trattato nel Capitolo 1 a p. 7), sotto un duplice aspetto. In un primo momento si focalizza su quello che lo stesso Fishbein definisce "recency effect" [7, p. 29] ovvero se la non occorrenza del numero 37 nelle estrazioni del SuperEnalotto dei sei mesi precedenti eserciti una qualche influenza sulla probabilità che ciò accada in estrazioni successi-

[14] Realizzato per valutare gli effetti indiretti dell'istruzione sulle misconcezioni intuitive degli allievi appartenenti ai livelli scolastici 5, 6, 7. Non si riporteranno in questa sede i risultati ottenuti dai due autori in quanto le intenzioni e i modi con cui è stata condotta l'indagine sono differenti.

ve. La domanda, in questo caso come negli altri, è posta esplicitamente allo studente in modo da coinvolgerlo affettivamente per poter osservare come si comporterebbe in una situazione reale di questo tipo: se applicherebbe un ragionamento corretto, oppure se la sua intuizione gli suggerirebbe di giocare il numero in questione ("negative recency effect") o di ripudiarlo ritenendolo un numero sfortunato ("positive recency effect").

Successivamente è chiesto ai ragazzi di scommettere sull'uscita (sempre nell'ambito delle estrazioni del SuperEnalotto) di una fra le due sestine proposte: una è costituita dai primi sei numeri naturali mentre l'altra da sei numeri non consecutivi e senza nessuna correlazione apparente. La misconcezione in questione può agire, in questo caso, inducendo lo studente a ritenere meno probabile l'uscita della sequenza più regolare (1, 2, 3, 4, 5, 6) in quanto vista come non rappresentativa del processo casuale da cui ha origine.

Quesito 7

Il quesito riprende il tema del ruolo dell'informazione in probabilità (introdotto nel Quesito 5) per indagarne ulteriori aspetti. L'acquisizione di alcune informazioni può modificare la probabilità che un evento si realizzi mentre altre, al contrario, possono non apportare nessun cambiamento. Non sempre questo tipo di distinzione è scontato ed evidente; d'altra parte, ragionare sulla variazione dello stato delle conoscenze può semplificare ed abbreviare la risoluzione di un esercizio. Ovviamente questo tipo di approccio può nascondere delle insidie ed indurre in errore nel momento in cui l'informazione ricevuta è mal interpretata.
Il problema proposto è destrutturato in tre punti per accompagnare gli studenti nel ragionamento: inizialmente viene posta una elementare domanda di controllo in cui si chiede di calcolare la probabilità dell'evento A = *"l'uomo ha pescato una pallina bianca"*, motivando la risposta (come anticipato, unitamente al Quesito 4, questo è l'unico caso nel quale viene fatta richiesta esplicita di calcolo). La descrizione prosegue senza che nulla venga comunica-

to riguardo all'esito di A: il fatto che A rimanga incerto, impedisce o influenza la determinazione della probabilità di un evento avvenuto posteriormente e a priori non scorrelato da esso? La risposta è no. Quello che determina il calcolo della probabilità degli eventi relativi a questo esperimento aleatorio è la conoscenza della quantità di palline bianche e nere presenti nell'urna. Il non avere notizie riguardo all'avveramento di A si traduce in invarianza dello stato delle conoscenze che rimane, pertanto, immutato rispetto a quello iniziale: non sapere se A si sia realizzato significa che non vi è nessun aggiornamento sul numero di palline di ogni colore; l'unica cosa risaputa (i.e. l'unica informazione ricevuta) è che l'evento A'= *"l'uomo ha pescato una pallina"* è accaduto. Ciò, tuttavia, non causa alcuna modifica alle informazioni iniziali riguardo alla proporzione di biglie bianche e nere, né ha alcuna incidenza sulla probabilità dell'evento B = *"la donna ha pescato una pallina bianca"* (successivo ad A) la quale ha, quindi, lo stesso valore di *P(A)* ovvero $\frac{1}{2}$.
A conferma di quanto detto, lo stesso risultato si trova sfruttando il Teorema della probabilità totale[15]:
$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Nell'ultimo punto del problema viene rivelato il colore della pallina estratta dall'uomo e si chiede di fare un confronto fra questa e la precedente situazione: in questo caso l'evento A è certo e, a differenza di quello trattato poco prima, l'informazione che esso rappresenta affina lo stato delle conoscenze iniziali rendendo più sfavorevole la riuscita dell'evento B.
È da notare che tutte le domande del quesito fanno riferimento ad eventi già accaduti e non ad eventi futuri: tanto l'uomo quanto, in un secondo momento, la donna hanno già estratto una pallina perciò, da un punto di vista "empiristico" (nel senso attribuitogli da de Finetti, si veda p. 15), sembrerebbe non esserci incertezza al riguardo in quanto il colore degli oggetti pescati è determinato, anche se sconosciuto. Coerentemente, invece, con la visione

[15]I ragazzi a cui il questionario è stato somministrato non erano tenuti a sapere tale formula poiché, come già asserito, non avevano ancora affrontato l'argomento.

"personalistica" portata avanti dall'autore l'incertezza sussiste eccome, fino al momento in cui le proprietà dell'oggetto sono rivelate all'osservatore ed egli viene a conoscenza dell'esito dell'esperimento.
In probabilità, quindi, il passato può risultare altrettanto indeterminato del futuro, se non si possiedono sufficienti ed esaustive informazioni riguardo a ciò che è accaduto. Non è, dunque, il fatto di situarsi temporalmente nel passato a far cessare il carattere incerto di un evento: la probabilità di quest'ultimo dipende infatti, citando nuovamente de Finetti, da "tutte le circostanze rilevanti note al momento" [4, p. 262].

Quesito 8

L'ottavo e ultimo quesito è ripreso dalla seconda prova del 25-esimo Rally Matematico Transalpino risalente al 2017 (brevemente RMT[16]), con la sola differenza che non viene chiesto di risolvere l'esercizio ma solo di esplicitare e giustificare la propria posizione nei confronti della risposta data da Gianni.

L'intero quesito, in linea con il resto del questionario, utilizza un linguaggio colloquiale, lontano da quello matematico. La forma dell'enunciato del problema (ovvero la parte posta dal professore) risulta essere descrittiva, anche se la sostanza può essere riassunta con "Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando due volte un dado cubico tradizionale?". Il

[16] Il RMT è un confronto fra classi, dalla terza elementare al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica, e si svolge in Algeria, Argentina, Belgio, Francia, Italia, Lussemburgo e Svizzera. Lo scopo è quello di "promuovere la risoluzione di problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica tramite un confronto fra classi", come si legge sul sito dell'associazione che lo organizza (`www.armtint.org`). Per lo svolgimento dei problemi, è previsto che gli studenti siano divisi per gruppi e lavorino in completa autonomia (senza l'aiuto dell'insegnante il quale svolge solamente un ruolo di sorveglianza). Ciascuna prova consta di un certo numero di problemi, da 5 a 7 a seconda della categoria, da risolvere in 50 minuti; sono i gruppi stessi a decidere come spartirsi la risoluzione degli esercizi tenendo conto che i punteggi ottenuti valgono a livello di classe. A partecipare alla competizioni non sono, perciò, i singoli gruppi ma le classi a cui questi appartengono.

suo carattere narrativo può risultare fuorviante nel comprendere quale sia l'effettivo esperimento aleatorio in questione e l'evento di cui si sta domandando la probabilità, nonché nel formalizzare l'esercizio da un punto di vista probabilistico.
La risposta riportata mira a far riflettere gli studenti sul modo in cui viene applicata la definizione classica di probabilità, in particolare sul velato abuso dell'ipotesi di equiprobabilità. Gianni considera, di fatto, uno spazio campionario costituito da tre eventi elementari:

- A = *"Esce 6 al primo lancio"*;
- B = *"Esce 6 al secondo lancio, non essendo uscito al primo"*;
- C= *"Non esce 6 né al primo né al secondo lancio"*;

e, non curandosi della reale probabilità di ognuno, esegue un conteggio dei casi favorevoli alla vittoria (corrispondenti agli eventi A e B) fra tutte le possibilità che si possono presentare (che sono, per l'appunto, tre). Distribuisce, pertanto, in maniera uniforme la probabilità fra i tre eventi elementari i quali risultano avere $\frac{1}{3}$ di possibilità di realizzarsi ciascuno.
Questo tipo di ragionamento scorretto non è atipico e l'intento di tale quesito non è tanto quello di far calcolare la corretta probabilità di vincita, quanto fare sì che gli allievi prendano consapevolezza della falla nell'argomentazione, anche in maniera qualitativa, rendendosi conto che nella maggioranza delle occasioni, lanciando due volte un dado, non uscirà 6. Di conseguenza, tale asimmetria dovrà ragionevolmente ripresentarsi nella distribuzione della probabilità fra A, B e C.

Nell'ambito del Rally, il problema è stato somministrato a 372 classi: 197 appartenenti al primo anno di scuola secondaria di secondo grado ("Cat. 9"), 175 al secondo anno ("Cat. 10"). Richiedeva, in aggiunta, la risoluzione del problema calcolando la probabilità di vittoria. Non è specificato se i partecipanti avessero già affrontato alcune fra le tematiche proprie della probabilità e necessarie alla risoluzione dell'esercizio; in ogni caso di seguito, in Tabella 4.1, sono riportati i risultati ottenuti[17].

Categoria	0	1	2	3	4	N. classi	Media
Cat. 9	114 (58%)	54 (27%)	8 (4%)	2 (1%)	19 (10%)	197	0.77
Cat. 10	100 (57%)	42 (24%)	15 (9%)	1 (1%)	17 (10%)	175	0.82
Totale	214 (58%)	96 (26%)	23 (6%)	3 (1%)	36 (10%)	372	0.79

Tabella 4.1: Risultati problema Rally Matematico Transalpino.

I numeri da 0 a 4 rappresentano i punteggi attribuiti a ciascuna risposta in base a criteri di correttezza e completezza stabiliti a priori, come riportato sul sito:

- **4 punti** *Risposta corretta (Gianni ha torto: la probabilità di vincere è* $\frac{11}{36}$*, oppure ci sono 11 possibilità di vincere su 36) con spiegazione chiara e completa (una descrizione dettagliata dei diversi casi e del modo di fare il calcolo);*

- **3 punti** *Risposta corretta con una spiegazione poco chiara o incompleta;*

- **2 punti** *Risposta: "Gianni ha torto", con una spiegazione intuitiva senza valore numerico oppure conteggio corretto dei casi nei quali si perde (25) con o senza spiegazione;*

- **1 punto** *Risposta errata nel calcolo della probabilità dovuta a un errore di conteggio, ma procedura corretta (per esempio 12 possibilità su 36 contando due volte il doppio 6);*

- **0 punti** *Risposta: "Gianni ha ragione" o incomprensione del problema.*

[17] Consultabili anche sul sito
`http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=pr38-it&flag=1&langue=it&w=0`
.

L'andamento dei risultati è pressoché il medesimo per entrambe le categorie: più della metà delle classi partecipanti condivide la posizione di Gianni o non comprende il problema proponendo strategie risolutive errate, a testimonianza della difficoltà del quesito e della diffusione del cosiddetto bias di equiprobabilità, del quale si è parlato nel capitolo iniziale a p. 12 (purtroppo nel report dei dati non viene fatta distinzione tra i due tipi di risoluzione). Solamente l'11% è in grado di dare la risposta corretta giustificando in maniera chiara e completa (o quasi) la procedura seguita.
Come ribadito precedentemente, l'interesse nei confronti del quesito è dato più dalla strada argomentativa seguita che dal raggiungimento del risultato numerico.

4.1.2 Risultati del questionario

Nella presente sezione vengono riportati ed analizzati i risultati raccolti nelle tre classi in cui è stato svolto il questionario. Le risposte date dagli studenti sono suddivise per categorie in base alla tipologia e alle argomentazioni che le sostengono; per ogni categoria è trascritto l'ammontare di risposte date divise per classe ("MP" sta ad indicare la classe del Liceo Malpighi, "S" quella del Liceo Sabin, "MG" quella del Liceo Minghetti) e sul totale di 60 studenti (indicata con "TOT").

Quesito 1

Alla luce delle risposte degli studenti sono emersi diversi filoni identificanti le proprietà che caratterizzerebbero l'aleatorietà di un evento:

1. ASSENZA DI LOGICA/DIPENDENZA DAL CASO: un evento aleatorio è un evento che accade senza seguire una logica prestabilita e schematica, è un evento che non avviene per volontà di qualcuno ma è dettato dal caso o è ad esso affidato. Due protocolli recitano:

"Si può avere casualità, o eventi casuali, quando si lancia un dado. In esso non vi è una logica secondo la quale io prima di tirare so già che numero mi può venire. Questo fenomeno viene spiegato come evento casuale ovvero privo di una vera e propria logica." (MP)

"Qualcosa che può accadere che non dipende dalla nostra volontà, o comunque dalla conscia decisione di qualcuno/qualcosa. Dipende dalla necessità/caso." (S)

2. IMPREVEDIBILITÀ: un evento casuale è un evento che non si può prevedere. Nei confronti di tale presunta caratteristica, si riscontrano posizioni differenti fra gli allievi; alcuni sostengono la totale imprevedibilità causata, per esempio, dalla presenza di fattori non quantificabili:

   "Un evento casuale è un evento del tutto imprevedibile, ovvero non ci si può preparare davanti ad esso. Mi vengono in mente eventi come la morte ma anche sentimenti ed emozioni come la felicità. Comunque eventi astratti." (MG)

   "Non si può predire il suo risultato finale a causa di alcune variabili che non si possono calcolare." (MP)

   "Un evento aleatorio o casuale è un evento del quale, per impossibilità di valutazione o per intrinseca probabilità (l'evento non dipende apparentemente da altro), non conosciamo l'esito fin quando esso non si manifesta." (MG)

   Altri, invece, ammettono la possibilità di predire in maniera parziale, non "con certezza", l'esito dell'esperimento aleatorio e quindi di fare delle considerazioni sulla realizzabilità dell'evento. Qualcuno riconosce nella probabilità un mezzo attraverso cui risolvere questa condizione:

"Evento che porta ad un risultato (o un non risultato) non prevedibile al 100%." (MG)

"Un evento casuale è un evento che potrebbe andare in un modo come in un altro. Non posso stabilire cosa accadrà se non con l'aiuto della probabilità." (MG)

Infine vi è chi, abbracciando appieno la visione deterministica, sostiene che gli eventi aleatori non esistano in quanto conseguenze determinabili di certe condizioni iniziali:

"Un evento aleatorio è un evento che può accadere come non. La casualità non esiste. Ci sono fattori che influenzano le azioni e la natura delle cose per cui un evento casuale in realtà non è casuale ma calcolabile." (S)

"Gli eventi casuali in teoria non esistono. Si definiscono casuali gli eventi che hanno un numero così alto di fattori da cui dipendono che diciamo che sono casuali anche se sono in realtà prevedibili." (MP)

3. INCERTEZZA: un evento aleatorio è un evento incerto per il quale, cioè, non vi è certezza che si concretizzi; detto con le parole di uno studente:

   "Un evento casuale [...] è un evento dove non si ha certezza, dove non solo una cosa è possibile. Ad esempio il numero che esce quando si tira un dado o una moneta." (MP)

4. ALTRE PROPRIETÀ: altre risposte mettono in risalto ulteriori qualità. In particolare, in quattro di queste, un evento aleatorio è tale se appartiene ad un contesto di equiprobabilità; se, cioè, è uno degli esiti equiprobabili di un esperimento aleatorio, in cui nessuno è favorito:

   "Casuale significa a caso, con la stessa probabilità (senza un criterio). Per esempio se abbiamo due palline una nera e una bianca e peschiamo la scelta è casuale. È casuale la scelta della pallina bianca o di quella nera." (MP)

   oppure

   "È un evento che può avvenire con la stessa probabilità con cui può non avvenire." (MG)

   Un'altra posizione degna di nota sembra fare un collegamento fra la probabilità di riuscita di un evento e le informazioni di cui si è in possesso (quello che lo studente chiama *"altri eventi"*):

   "Un evento casuale è un evento che può accadere come non accadere in base a una serie di altri eventi che ne influenzano la probabilità". (S)

Nella Tabella 4.2 sono riportate le percentuali di risposte appartenenti a ciascuna categoria suddivise per classe.

Scrutando i risultati, si nota come il profilo dell'evento aleatorio venga a delinearsi autonomamente: è un evento che non è né certo né impossibile, il cui esito non segue pertanto le leggi del determinismo, di fronte al quale ci si può porre in una maniera non neutrale grazie alla probabilità, che consente di *prevedere* non tanto la sua riuscita, quanto le possibilità che esso ha di verificarsi. Di fatto, come già illustrato nel Capitolo 3, questo è l'approccio che

	MP	S	MG	TOT
ASSENZA DI LOGICA/ DIPENDENZA DAL CASO	37.0% (10/27)	29.4% (5/17)	18.8% (3/16)	30%
IMPREVEDIBILITÀ	18.5% (5/27)	23.5% (4/17)	56.3% (9/16)	30%
INCERTEZZA	18.5% (5/27)	11.8% (2/17)	12.5% (2/16)	15%
ALTRE	11.1% (3/27)	29.4% (5/17)	12.5% (2/16)	16.7%
AMBIGUE/ NO RISPOSTA	14.8% (4/27)	5.9% (1/17)		8.3%

Tabella 4.2: Quesito 1 - distribuzione delle risposte.

è stato seguito nell'introduzione del concetto di evento aleatorio (e, successivamente, di probabilità) nelle due classi del Liceo Malpighi e del Liceo Sabin, nozione che, come si evince, non era, estranea alle conoscenze pregresse dei ragazzi.

Quesito 2

a) In tutte e tre le classi, la totalità degli studenti ha riconosciuto come incerto l'evento, in quanto ci sono altri esiti possibili dello stesso esperimento aleatorio. Alcune giustificazioni a questa affermazione sono particolarmente interessanti:

   "Incerto: possono venire anche i numeri 1, 2, 3, 4, 5 (anche se in realtà dal momento in cui lanci è già «deciso» il risultato del lancio)." (MP)

   In questa risposta, lo studente focalizza l'attenzione sulla dimensione "oggettiva" dell'incertezza: secondo la versione da lui suggerita, una volta fissate le condizioni iniziali (nel momento del lancio) il risultato finale risulterebbe determinato per cui l'incertezza cesserebbe. Un altro esplicita quelle "variabili difficili da calcolare" citate nella definizione di evento aleatorio la cui conoscenza, analogamente alla risposta precedente, comporterebbe la fine dell'indeterminatezza:

"Incerto: se ≪calcolassi≫ variabili come peso, forma, dimensioni, forza con cui il dado viene lanciato, conformazione del terreno su cui il dado viene lanciato, riuscirei a trovare il modo per ottenere sempre 6." (MG)

A queste due visioni si contrappone, ancora una volta, quella "soggettivista" di de Finetti: è vero che se fossimo al corrente di tutti i fattori che concorrono nel determinare la posizione finale del dado allora potremmo predire con precisione l'esito del suo lancio, ma il fatto è che *non li conosciamo*; il nostro stato delle conoscenze, in questo caso, si limita al fatto che il dado è regolare e quindi, per la natura simmetrica del solido, non vi è una faccia più privilegiata rispetto alle altre e, dunque, l'evento è incerto.

b) Anche in questo caso, la certezza dell'evento è condivisa nella quasi unanimità poiché si tratta di una data convenzionalmente stabilita. Soltanto due studenti lo mettono in dubbio:

"Incerto dipende dal tipo di religiosità o etnia." (S)

"Incerto: il calendario potrebbe cambiare." (MG)

c) Pressoché tutti gli allievi condividono l'incertezza della vittoria del Real Madrid, essendo un evento che riguarda il futuro. Alcuni sostengono che le ragioni dell'incertezza si annidino nel fatto che il calcio dipende da prestazioni umane, le quali sono imprevedibili, altri le riconducono alla natura dello sport stesso:

"Incerto: la vittoria dipende da prestazioni «umane» e una cosa che dipende dalle prestazioni di un uomo quasi mai è certa. Potrebbe infatti succedere che i giocatori del Real Madrid abbiano prestazioni eccellenti (così da vincere la Champions) come potrebbe succedere che i giocatori abbiano prestazioni pessime (così da non vincerla)." (MP)

"Incerto perché il calcio non è matematica e, come si dice, la palla è rotonda. È sicuramente favorita rispetto a qualche squadra per cui sì, ha probabilità di vincere maggiori soprattutto se si conta che ha perso solo 1 o 2 finali nello scontro diretto. Detto questo non è detto che arrivi in finale e che riesca a vincerla." (MP)

Un ragazzo, invece, punta il dito contro di sé e la sua carenza di informazioni riguardo al mondo calcistico:

"Incerto, partendo dal presupposto che del calcio ne so pochissimo, posso dire incerto perché è effettivamente il mio stato davanti a una tale affermazione." (MP)

Infine, in due risposte l'evento è giudicato rispettivamente certo e impossibile, in base ad alcune considerazioni personali:

"Certo, hanno CR7 e il Barça è uscito." (S)

"Impossibile, quest'anno è un'annata molto difficile per il Real." (S)

d) Fatta eccezione per tre ragazzi i quali giudicano irrealizzabile l'evento per via dello stato del proprio telefono cellulare (spento), tutti gli altri sono concordi nel definirlo incerto essendo un evento futuro e non dipendente dalla personale volontà:

"Incerto: questa cosa dipende da altre persone e come già detto l'uomo crea imprevedibilità. Nei prossimi 10 minuti potrebbero scrivermi 100 persone come nessuno." (MP)

e) A differenza dei precedenti, questo item genera una divisione nelle opinioni degli studenti, dipendente dal grado di conoscenza nei confronti del calcio e, nello specifico, dell'organizzazione e funzionamento della competizione mondiale. In Tabella 4.3 è riportato l'andamento delle risposte che, come si può notare, è molto simile in tutte le classi.

	MP	S	MG	TOT
CERTO				
INCERTO	25.9% (7/27)	29.4% (5/17)	37.5% (6/16)	30%
IMPOSSIBILE	70.4% (19/27)	70.6% (12/17)	62.5% (10/16)	68.3%
NO RISPOSTA	3.7% (1/27)			1.7%

Tabella 4.3: Quesito 2.e - distribuzione delle risposte.

A seconda delle informazioni possedute, c'è chi ritiene che l'evento sia impossibile in quanto la nazionale italiana non si è qualificata ai mondiali (il fatto era risaputo al momento in cui il questionario è stato somministrato), oppure incerto. Fra questi ultimi, le motivazioni sono antipodali: alcuni ragazzi non sanno neppure che l'Italia non ha superato le fasi iniziali che danno accesso alla competizione e quindi ritengono che abbia delle possibilità di vittoria, mentre altri, i più esperti, danno una spiegazione precisa:

"Incerto. Se una nazione qualificata ha un problema politico (come recentemente la Spagna) oppure entra in guerra, viene squalificata, a quel

punto l'Italia potrebbe essere ripescata e potrebbe giocarsela." (S)

f) Tutti concordano che l'evento descritto sia impossibile: per sua natura e per quanto affermato dalla scienza un gatto non può deporre un uovo. Solamente uno studente risponde, forse per provocazione:

"Incerto, tutto può succedere, la scienza può farlo accadere." (S)

Si può concludere che, complessivamente, gli studenti non mostrano difficoltà nel riconoscere il grado di certezza di un evento e legano l'incertezza a fattori temporali (eventi il cui esito si potrà stabilire solo in futuro), a circostanze non controllabili tramite la propria volontà (legate, per esempio, al comportamento di altre persone) e al livello di conoscenza personale relativa all'evento.

Quesito 3

Le tipologie di risposte al quesito sono state divise nelle seguenti categorie, ricorrenti in tutte e tre le classi.

1. INDICE DI POSSIBILITÀ: vi rientrano tutte le argomentazioni che fanno riferimento, in vario modo, alla probabilità come un quantificatore o indicatore delle possibilità che un evento si realizzi. A titolo d'esempio:

   "La probabilità è la possibilità che uno o più eventi accadano basandosi su fatti reali". (MP)

   Un paio di risposte, di cui una molto accurata, utilizzano il verbo "misurare" avvicinandosi più di tutte, forse inconsapevolmente, al corretto modello di probabilità:

"La probabilità è quel numero o valore che stabilisce quanto è possibile che un determinato evento si verifichi o non si verifichi. Quel valore non coincide necessariamente alla realtà, ma alla lunga ci si avvicina (cioè se tiro una moneta due volte non è detto che esca una volta testa e una volta croce, essendo la probabilità di ognuna al 50%, ma se faccio 1000 tiri il numero di volte in cui esce testa sarà circa uguale al numero di volte in cui esce croce). Serve quindi per misurare e anche prevedere un evento." (MG)

"La probabilità misura se un qualcosa può accadere servendosi dei numeri (le percentuali)." (MP)

Un'altra definizione molto azzeccata associa la probabilità all'aleatorietà degli eventi:

"La ≪probabilità≫ è una percentuale per indicare un evento incerto, per sapere quanto sia o non sia realizzabile quell'evento." (S)

2. DEFINIZIONE CLASSICA: sono qui raccolte tutte quelle definizioni riconducibili alla formulazione classica della probabilità. Probabilmente l'argomento era già stato affrontato dai rispondenti ad un livello scolastico inferiore ed era rimasta loro impressa la famosa dicitura, ma non il suo limitato campo di applicabilità:

   "La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero di casi possibili." (S)

3. DEFINIZIONE FREQUENTISTA: la probabilità viene ricollegata alla frequenza. Come per la categoria precedente, anche in questa non si fa caso alle restrizioni che tale definizione assume (riguardanti la ripetibilità dell'esperimento nelle stesse condizioni):

   "La probabilità è la frequenza con cui un evento accade." (MP)

4. LINGUAGGIO QUOTIDIANO: in questo gruppo sono riunite le risposte che richiamano l'uso della parola "probabilità" nel linguaggio comune. Alcuni pensano all'aggettivo "probabile" che nella lingua italiana sta ad indicare qualcosa di non certo ma comunque verosimile:

   "La non certezza che qualcosa accada." (MG)

   "Probabilità è quando una tal cosa è più possibile e meno incerta." (S)

   "È probabile qualcosa che rispetto a qualcos'altro ha più possibilità di avvenire." (MP)

5. ALTRE PROPRIETÀ: le risposte che trovano posto in questa categoria si concentrano su altre peculiarità. Per esempio in due di queste la probabilità viene ritratta come una proprietà intrinseca degli eventi (l'opposto di quanto sostenuto da de Finetti, si veda p. 16):

   "La probabilità è una caratteristica che esiste per ogni evento e che dà l'esatta combinazione con cui tale evento può avvenire." (MG)

   "La probabilità è il grado di incertezza che un fenomeno che può verificarsi in più modi dia un esito specifico. [...] [Può essere] Epistemica,

legata ad una non conoscenza o impossibilità di considerazione di tutti gli aspetti; Ontologica, intrinseca al fenomeno." (MG)

In altre, si fa riferimento alla probabilità come disciplina:

"È la scienza che studia da un punto di vista matematico l'eventualità di una determinata azione o cosa." (MG)

Nella Tabella 4.4 si trovano i dati raccolti. Nelle classi del Malpighi e del Minghetti, la maggioranza degli allievi associa la probabilità all'espressione della realizzabilità degli eventi, mentre al Sabin si raccolgono perlopiù risposte aderenti all'uso che se ne fa nel parlato di tutti i giorni. Le definizioni che si avvicinano a quella classica e frequentista non riscuotono particolare successo in nessuno dei tre istituti ed è da notare l'assenza di domande lasciate in bianco: tutti tentano di dare una risposta e questo è sintomatico della familiarità con tale concetto.

	MP	S	MG	TOT
INDICE DI POSSIBILITÀ	55.6% (15/27)	29.4% (5/17)	50% (8/16)	46.7%
DEF. CLASSICA	11.1% (3/27)	11.8% (2/17)	6.3% (1/16)	10%
DEF. FREQUENTISTA	3.7% (1/27)		12.5% (2/16)	5%
LINGUAGGIO QUOTIDIANO	11.1% (3/27)	47.1% (8/17)	6.3% (1/16)	20%
ALTRE	7.4% (2/27)		18.8% (3/16)	8.3%
AMBIGUE	11.1% (3/27)	11.8% (2/17)	6.3% (1/16)	10%

Tabella 4.4: Quesito 3 - distribuzione delle risposte.

Quesito 4

Dall'analisi del presente quesito emergono due questioni interessanti: la prima riguarda l'applicazione della definizione classica di probabilità anche ai casi in cui tale modello risulta inadatto (a conferma della presenza del bias di equiprobabilità, di cui si è parlato nel Capitolo 1 a p. 12). Ciò è stato riscontrato soprattutto nei confronti dell'evento (c) e nella classe del Liceo Malpighi.
Un fattore non previsto, invece, e ritrovato nei confronti tutti gli eventi tranne il primo (sebbene non con percentuali eclatanti) riguarda il fatto che la probabilità dell'avverarsi di alcune affermazioni non è ritenuta calcolabile o stimabile. La causa di tale credenza risiede nel fatto che l'esito di questi eventi (nello specifico (c), (d), (e)) risulta dipendente da delle variabili che sono ritenute assolutamente imprevedibili, esterne al contesto matematico di cui la probabilità fa parte (come, ad esempio, la volontà di un'altra persona o le prestazioni umane) e, dunque, non associabili ad un valore numerico. Alla base di questa convinzione, può essercene un'altra (ancora più inesatta) secondo cui alla probabilità spetti il compito di anticipare l'esito di un esperimento aleatorio: in quest'ottica, più sono i fattori da cui l'esito può essere condizionato, più diventa difficoltoso determinare quello che avverrà. Ma non è questo il ruolo della probabilità: essa non rivela cosa accadrà, ma quante sono le possibilità che ciò accada.
Vengono ora esaminate, punto per punto, le risposte degli studenti.

a) Calcolare la probabilità di questo evento non ha destato particolari problemi; le percentuali di risposte corrette sono alte nelle classi del Malpighi e del Minghetti, poco più basse al Sabin (in cui tre ragazzi danno una risposta generica, valida per tutti gli eventi), come si evince dalla Tabella 4.5.

   Nel giustificare tale attribuzione di probabilità (indicata indifferentemente con la frazione o la percentuale) alcuni studenti tengono a fare delle precisazioni:

	MP	S	MG	TOT
$\frac{1}{6}$	85.2% (23/27)	64.7% (11/17)	87.5% (14/16)	80%
GENERICHE/ AMBIGUE	3.7% (1/27)	11.8% (2/17)	12.5% (2/16)	8.3%
NO RISPOSTA	11.1% (3/27)	23.5% (4/17)		11.7%

Tabella 4.5: Quesito 4.a - distribuzione delle risposte.

"Dal punto di vista matematico la probabilità che esca ciascuna faccia è calcolabile ($1 : 6 = x : 100$*), ma nella realtà i fattori che possono influire sono infiniti (es. distanza dado-piano, forza con cui viene lanciato il dado, posizione di partenza del dado, ecc...)."* (MG)

"90% se sono a conoscenza delle variabili prima indicate [peso, forma, dimensioni, forza con cui il dado viene lanciato]; 16,5% di norma." (MG)

Nella prima di queste due risposte l'allievo tiene a sottolineare la distanza tra il modello matematico e ciò che avviene nella realtà: quello che sembra suggerire è che *nella realtà* la probabilità che tale evento si realizzi non sia calcolabile poiché i fattori che concorrono nella sua determinazione sono troppi. La seconda risposta, invece, fa riferimento alle "variabili non calcolabili" la cui conoscenza renderebbe determinato l'esito dell'esperimento aleatorio; lo studente distingue spontaneamente il caso in cui è in possesso di tali informazioni, da quello in cui non lo è.
Le risposte generiche racchiudono affermazioni del tipo:

"Sì [si può calcolare la probabilità], basandomi sulle mie esperienze e conoscenze." (S)

"Sì posso, con dei calcoli, delle statistiche, conoscendo alcuni dettagli che influenzano il risultato, . . . " (MG)

valide per tutti i quesiti; una poco chiara, in cui non è evidente quale sia il valore della probabilità, è:

"Se lancio il dado una volta ho una possibilità di ottenere 6." (MG)

b) L'andamento delle risposte in Tabella 4.6 mostra come non sia affatto scontato attribuire una probabilità ad un evento certo (lo stesso vale anche, in seguito, per gli eventi impossibili).

	MP	S	MG	TOT
CALCOLABILE	48.1% (13/27)	47.1% (8/17)	56.3% (9/16)	50%
PROBABILITÀ CLASSICA	14.8% (4/27)	5.9% (1/17)		8.3%
NON CALCOLABILE	14.8% (4/27)		12.5% (2/16)	10%
GENERICHE/ AMBIGUE	7.4% (2/27)	17.6% (3/17)	6.3% (1/16)	10%
NO RISPOSTA	14.8% (4/27)	29.4% (5/17)	25% (4/16)	21.7%

Tabella 4.6: Quesito 4.b - distribuzione delle risposte.

Anzi, per diversi studenti se l'evento non è incerto non ha proprio senso parlare di probabilità oppure essa non è calcolabile (fra parentesi vi sono le definizioni date al Quesito 3):

"Probabilità non calcolabile dal punto di vista matematico, è una convenzione prestabilita." (MG)
(Definizione classica)

"Non c'è probabilità perché è un evento certo." (MP)
(Altre: probabilità come disciplina)

Inoltre, il fatto che vi sia una considerevole assenza di risposte può essere interpretato come dichiarazione di non calcolabilità della probabilità dell'evento.
Fra i sostenitori della determinabilità della probabilità dell'evento, solamente due non affermano che essa valga 1 o 100%:

"99,3% (è pressoché improbabile che cambi il calendario)." (MG, per questo studente l'evento è incerto)

"Essendo sempre accaduto ci sono buone probabilità che riaccadrà." (MG)

Da questa categoria di risposte, sono tenuti separati (e inseriti in "PROBABILITÀ CLASSICA") coloro che presentano una motivazione che appare come una forzatura della valutazione classica:

"La probabilità sarà 1 su 1 perché il 25 di dicembre è sempre Natale e non può essere modificato." (S)
(Indice di possibilità, tuttavia questo studente ragionerà in termini rapporto fra casi favorevoli e casi possibili anche per le probabilità degli eventi successivi)

" $\frac{1 \rightarrow \textit{giorno in cui è il 25 dicembre}}{1 \rightarrow \textit{giorni in cui è Natale}} = \textit{1 (certo).}$" (MP)
(Definizione classica, tendenza mantenuta in tutto il quesito)

c) Dalla Tabella 4.7 si vede come, tranne nella classe del Minghetti, a prevalere sia un approccio di tipo classico al calcolo della probabilità dell'evento.

	MP	S	MG	TOT
CALCOLABILE	25.9% (7/27)	11.8% (2/17)	37.5% (6/16)	25%
PROBABILITÀ CLASSICA	44.4% (12/27)	52.9% (9/17)	31.3% (5/16)	43.3%
NON CALCOLABILE	14.8% (4/27)		12.5% (2/16)	10%
GENERICHE/ AMBIGUE		23.5% (4/17)	12.5% (2/16)	10%
NO RISPOSTA	14.8% (4/27)	11.8% (2/17)	6.3% (1/16)	11.7%

Tabella 4.7: Quesito 4.c - distribuzione delle risposte.

In particolare, si sono individuati modi diversi in cui è avvenuto l'abuso della formulazione classica basato, come anticipato nel Capitolo 1, sul considerare (a volte inconsciamente) equiprobabili gli eventi che costituiscono lo spazio campionario (implicito).
La maggior parte di chi attua quest'operazione, tende a valutare la probabilità come $\frac{1}{4}$ (o, in generale, $\frac{1}{\text{n. di squadre in gioco}}$): il Real Madrid rappresenta una squadra (*un caso favorevole*) fra le quattro semifinaliste (*quattro casi possibili*). Solo un ragazzo si rende conto di tralasciare alcuni fattori fondamentali nella stima della probabilità:

"[...] In questo caso però non si tiene conto del valore delle squadre impegnate." (MG)

Altri suggeriscono che il valore della probabilità è $\frac{1}{2}$: il Real Madrid ha una possibilità su due di vincere, rappresentate dalle alternative *"il Real Madrid vince"* e *"il Real Madrid non vince"*, trascurando ancora più clamorosamente le reali probabilità di questi due eventi.

A questo genere di ragionamenti si contrappongono quelli, in apparenza più qualitativi e più lontani dal formalismo matematico, di coloro che riflettono sulla bravura dei giocatori, sulle performance delle squadre, sulle partite vinte e quant'altro (orientamento seguito soprattutto dai ragazzi del Minghetti). Fra questi, non tutti danno un valore alla probabilità ma sostengono che, per farlo, si debba tenere conto delle variabili sopra elencate:

"Real Madrid 45%: è la squadra più forte sulla carta, ed essendo un club molto importante, in questa competizione spesso viene favorita, come contro la Juve. Inoltre ha vinto le ultime due Champions League." (S)

"Per giustificare la mia affermazione ho dovuto basarmi su alcuni dati o statistiche. [Fa un'attenta analisi di tutte e quattro le semifinaliste senza, tuttavia, pronunciarsi sulle probabilità di vittoria] Detto ciò, nel calcio è difficile parlare di probabilità, ci sono molti fattori che agiscono ma se proprio dovessi scegliere una squadra favorita questa sarebbe il Real Madrid, soprattutto parlando di statistiche e dati evidenti." (MP)

"Bisognerebbe conoscere quante squadre ci sono; quante squadre sono forti e quante sono deboli e quali; in che condizioni è il Real Madrid e quali giocatori mancano; se sono reduci da una sconfitta o no; ecc..." (MG)

Anche nei confronti di questo evento, qualcuno sostiene che la probabilità non sia calcolabile. Le ragioni di questa posizione non sempre sono rese palesi:

"1 su 4 se lo sport fosse «matematico» ma visto che dipende da pre-

stazioni umane questa probabilità non si può calcolare." (MP)
(Questa posizione verso certi eventi, si ritroverà anche più avanti e sarà indagata tramite un'intervista, per la quale si rimanda al Capitolo 5.)
(Indice di possibilità)

"Non posso calcolarlo per mancanza di dati numerici." (MG)
(Altre: probabilità come disciplina)

d) Ancora più che nei casi finora analizzati, questo evento risulta per molti non prevedibile (si veda Tabella 4.8); la sua probabilità non è, cioè, ritenuta calcolabile o stimabile. Le cause sono quasi sempre ricercate nella presenza di troppe variabili che condizionano l'avverarsi dell'evento, le quali non sono esprimibili con dei numeri o gestibili con delle formule. Sebbene nell'esempio precedente (punto (c)) la probabilità dell'evento fosse, per certi versi, più difficile da stimare (necessitando di un approccio soggettivista), la percentuale di chi l'ha giudicata non determinabile è inferiore: questo può essere dato dal fatto che, nel caso corrente, la tentazione di applicare la formula classica venga meno per via dell'assenza di un qualsiasi sostegno numerico a differenza della probabilità di vincita del Real Madrid in cui un ragionamento classico (errato) poteva risultare più naturale.

	MP	S	MG	TOT
CALCOLABILE	22.2% (6/27)	29.4% (5/17)	43.8% (7/16)	30%
PROBABILITÀ CLASSICA	25.9% (7/27)		6.3% (1/16)	13.3%
NON CALCOLABILE	25.9% (7/27)	17.6% (3/17)	18.8% (3/16)	21.7%
GENERICHE/ AMBIGUE		29.4% (5/17)	25% (4/16)	15%
NO RISPOSTA	25.9% (7/27)	23.5% (4/17)	6.3% (1/16)	20%

Tabella 4.8: Quesito 4.d - distribuzione delle risposte.

Ecco alcune risposte che mostrano quanto appena descritto, sotto ad ognuna è indicata la definizione di probabilità data dallo studente nel Quesito 3:

"Non si può calcolare, troppe variabili." (MP)
(Indice di possibilità)

"Non si può calcolare perché ci sono variabili incalcolabili." (MP)
(Indice di possibilità)

"Impossibile stimare la probabilità, l'evento dipende da fattori non prevedibili." (MG)
(Altre: espressione del grado di incertezza)

A queste si può aggiungere una parte delle risposte lasciate in bianco e che potrebbero stare ad indicare che la probabilità non è ritenuta calcolabile.
Fra coloro che ritengono di poter assegnare un valore alla possibilità che l'evento si verifichi, una parte propone di farlo attraverso una formula. Questi sono stati inseriti in "PROBABILITÀ CLASSICA" per il fatto che sembrano sentire la necessità di usare un'espressione frazionaria in cui al numeratore compare sempre il numero 1 (ad indicare *un caso favorevole*) mentre al numeratore quantità diverse che si riferiscono al numero di elementi di un insieme (i *casi possibili*):

"$\frac{1}{\textit{n. di persone che hanno il mio numero}}$." (MP)
(Indice di possibilità)

"$\frac{1}{\textit{n. di chat che si possiede}}$ *, tenendo in considerazione la frequenza di messaggi al minuto."* (MP)

(Definizione classica)

Non mancano, anche in questo contesto, le risposte del tipo "50%": c'è una possibilità su due (lo ricevo o non lo ricevo) di ricevere un messaggio nei prossimi 10 minuti.
Un'esigua percentuale ritiene si possa fare una stima di tale probabilità, a partire da certe considerazioni soprattutto di natura statistica:

"90% stimata. È molto probabile che sia così perché di solito le persone da cui aspetto una risposta lo fanno velocemente e hanno internet che funziona. Ma c'è una probabilità che non sia così questa volta." (S)

"Bisogna calcolare in media quanti messaggi arrivano al giorno e dividere il tempo per ogni 10 minuti." (S)

"Si può stimare guardando la frequenza media con cui ricevo messaggi su WhatsApp." (MG)

e) Dalla Tabella 4.9 si evince come la vittoria della nazionale italiana ai mondiali di calcio sia ritenuto dai più un evento a cui è possibile assegnare una probabilità.

   In generale gli viene attribuita una probabilità dello 0% o molto vicina a questo valore (a seconda che l'evento fosse ritenuto impossibile o poco probabile).
   Le risposte che fanno riferimento al modello classico sono ugualmente presenti, anche se in percentuali ridotte (contestualmente viene riportata la categoria a cui appartiene la risposta al Quesito 3):

	MP	S	MG	TOT
CALCOLABILE	55.6% (15/27)	47.1% (8/17)	50% (8/16)	51.7%
PROBABILITÀ CLASSICA	14.8% (4/27)	5.9% (1/17)		8.3%
NON CALCOLABILE	3.7% (1/27)			1.7%
GENERICHE/ AMBIGUE	7.4% (2/27)	23.5% (4/17)	37.5% (6/16)	20%
NO RISPOSTA	18.5% (5/27)	23.5% (4/17)	12.5% (2/16)	18.3%

Tabella 4.9: Quesito 4.e - distribuzione delle risposte.

"$\frac{1}{\textit{n. di squadre che partecipano}}$." (MP)
(Indice di possibilità)

"$\frac{0}{\textit{n. di squadre in gioco}}$." (MP)
(Definizione classica)

"$\frac{1}{2}$." (MP)
(Definizione classica)

"Non avrà nessuna probabilità perché all'interno dell'insieme mondiale la possibilità Italia non è compresa." (S)
(Linguaggio quotidiano)

Questa volta, un solo studente afferma di non poter calcolare il valore della probabilità senza però aggiungere altro: probabilmente ciò è dovuto al fatto che l'evento è impossibile (nel Quesito 3 aveva definito la probabilità come indice di possibilità).

f) Similmente al caso precedente, la maggioranza degli studenti giudica calcolabile tale probabilità attribuendole il valore 0, come riportato in Tabella 4.10.

	MP	S	MG	TOT
CALCOLABILE	51.8% (14/27)	47.1% (8/17)	50% (8/16)	50%
PROBABILITÀ CLASSICA	7.4% (2/27)	5.9% (1/17)		5%
NON CALCOLABILE	7.4% (2/27)	5.9% (1/17)	6.3% (1/16)	6.7%
GENERICHE/ AMBIGUE	11.1% (3/27)	17.6% (3/17)	25% (4/16)	16.7%
NO RISPOSTA	22.2% (6/27)	23.5% (4/17)	18.8% (3/16)	21.7%

Tabella 4.10: Quesito 4.f - distribuzione delle risposte.

Sono presenti, con percentuali inferiori rispetto a quanto visto in precedenza, riferimenti alla formula classica che risulta forzata più che mai (fra parentesi è riportata la definizione di probabilità data al Quesito 3):

“ $\frac{0 \text{ (uova deposte da gatti)}}{TOT \text{ (gatti in tutto il mondo)}}$.” (MP)
(Definizione classica)

“ $\frac{1}{0 \text{ (n. di uova deposte)}}$.” (MP)
(Definizione classica)

“Come per la risposta (e) il gatto non è compreso nell'insieme animali che fanno le uova.” (S)
(Linguaggio quotidiano)

Dei quattro ragazzi che sostengono che tale probabilità non sia calcolabile, solo uno azzarda una giustificazione:

"È impossibile calcolare la probabilità perché il gatto non depone le uova." (MG)
(Indice di possibilità)

Quesito 5

a) Nel caso dell'usuale esempio del lancio di un dado, un'alta percentuale di studenti in tutte le tre classi intuisce che la probabilità dell'evento aumenti in seguito all'acquisizione dell'Informazione 1 (si veda Tabella 4.11), molti addirittura scrivono il nuovo valore.

	MP	S	MG	TOT
MODIFICA	81.5% (22/27)	82.4% (14/17)	81.3% (13/16)	81.7%
NON MODIFICA	18.5% (5/27)	11.8% (2/17)	12.5% (2/16)	15%
AMBIGUE		5.9% (1/17)	6.3% (1/16)	3.3%

Tabella 4.11: Quesito 5.a, Informazione 1 - distribuzione delle risposte.

Le motivazioni di chi sostiene che, invece, la sua conoscenza non apporti nessuna variazione alla probabilità dell'evento non sempre sono esplicite; quelle che lo sono fanno riferimento alla presenza di un egual numero di facce pari e facce dispari oppure seguono da una mal interpretazione dell'informazione:

"Non modifica il calcolo perché i numeri pari nel dado sono: 2, 4, 6 e quelli dispari sono: 1, 3, 5. Sono lo stesso numero di cifre pari e dispari quindi non influisce sul risultato del calcolo." (MP)

"No perché la probabilità che uscisse un numero pari era del 50%." (MG)

"Si sapeva già che il numero fosse pari." (MP)

Per quanto riguarda la seconda informazione fornita, praticamente tutti concordano nel trascurarla nel calcolo della probabilità (Tabella 4.12).

	MP	S	MG	TOT
NON MODIFICA	100% (27/27)	88.2% (15/17)	100% (16/16)	96.7%
AMBIGUE		5.9% (1/17)		1.7%
NO RISPOSTA		5.9% (1/17)		1.7%

Tabella 4.12: Quesito 5.a, Informazione 2 - distribuzione delle risposte.

b) Nonostante in ogni classe più della metà dei soggetti giudichi ininfluente la prima informazione, le percentuali di chi, al contrario, ritiene che questa comporti un'alterazione della probabilità dell'evento non sono trascurabili (soprattutto al Malpighi, come riportato in Tabella 4.13).

	MP	S	MG	TOT
MODIFICA	40.7% (11/27)	29.4% (5/17)	25% (4/16)	33.3%
NON MODIFICA	55.6% (15/27)	52.9% (9/17)	75% (12/16)	60%
AMBIGUE	3.7% (1/27)	5.9% (1/17)		5%
NO RISPOSTA		11.8% (2/17)		1.7%

Tabella 4.13: Quesito 5.b, Informazione 1 - distribuzione delle risposte.

Non sempre gli studenti argomentano le proprie prese di posizione; di seguito ne sono riportate rispettivamente tre a favore della "modifica" e tre della "non modifica" della valutazione della probabilità espressa in precedenza:

"Modifica perché se in 24 ore si sono ottenuti 5 messaggi è molto improbabile che in 10 minuti si ottenga uno." (MP)

"Meno probabilità! Ricevi pochissimi messaggi di solito quindi poca probabilità che te ne arrivi uno proprio in quei 10 minuti." (MP)

"Diminuisce la probabilità ma non a fini matematici." (S)

"Non modifica infatti i messaggi dipendono dalle altre persone ed essendo le persone imprevedibili mi potrebbe scrivere qualcuno anche se ≪matematicamente≫ non ho molte probabilità che mi scriva." (MP)

"Non modifica, chiunque vuole può scrivermi in qualsiasi momento." (S)

"Non è un'informazione rilevante, in quanto non dà una visione generale dell'evento." (MG)

Solo in quest'ultima risposta, si pone il problema della brevità dell'arco di tempo a cui viene fatto riferimento: quello che succede in 24 ore non è necessariamente rappresentativo dell'andamento generale della ricezione di messaggi. Per essere significativo, l'intervallo temporale da considerare dovrebbe essere più ampio.

L'Informazione 2 genera una divisione più marcata, come si evince dalla Tabella 4.14.

	MP	S	MG	TOT
MODIFICA	74.1% (20/27)	82.4% (14/17)	75% (12/16)	76.7%
NON MODIFICA	22.2% (6/27)	11.8% (2/17)	25% (4/16)	20%
AMBIGUE		5.9% (1/17)		1.7%
NO RISPOSTA	3.7% (1/27)			1.7%

Tabella 4.14: Quesito 5.b, Informazione 2 - distribuzione delle risposte.

Ecco alcune fra le motivazioni di chi sostiene che tale informazione non sortisca nessun effetto sul calcolo della probabilità dell'evento nelle quali si riscontra un fraintendimento del ruolo della probabilità che non corrisponde, a meno che non si tratti di un evento certo (o impossibile), al dare la certezza che un evento si realizzi (o meno):

"Molto probabile perché 30 messaggi all'ora = 2 messaggi al minuto anche se può succedere che ne riceva 30 nell'ultimo minuto. La probabilità non è calcolabile perché dipende da altre persone." (MP)

"Non modifica. Essendo una media non mi può dare la certezza che riceverò un messaggio entro 10 min." (MG)

"No, non dipende da una media il messaggio." (S)

Allo stesso modo questa misconcezione si ritrova anche in alcune giustificazioni del punto di vista opposto:

"Questa informazione mi è utile ma non mi dà probabilità CERTE, poiché posso riceverne 0 come 40 per stabilire la media di 30 messaggi all'ora." (S)

"La probabilità di ottenere un messaggio è di $\frac{5}{2}$ seguendo la statistica (oltre il 200%)." (MG)

"Modifica, ricevendo in media un messaggio ogni 2 minuti è probabile che ne riceva uno per 5 gruppi di due minuti (10 minuti)." (MG)

Infine vi sono delle posizioni particolari riguardo all'influenza dell'informazione dal punto di vista matematico:

"≪Matematicamente≫ avrei molte probabilità ma potrebbe comunque succedere che nessuno mi scriva visto che lo scrivere, dipendendo da una persona, non è una cosa matematica." (MP)

"Aumenta la probabilità ma non in senso matematico." (S)

c) Come illustrato in Tabella 4.15, la maggior parte degli studenti sostiene che l'Informazione 1 modifichi la risposta data nel Quesito 4.

	MP	S	MG	TOT
MODIFICA	77.8% (21/27)	76.5% (13/17)	87.5% (14/16)	80%
NON MODIFICA	18.5% (5/27)	11.8% (2/17)	6.3% (1/16)	13.3%
AMBIGUE	3.7 (1/27)	5.9% (1/17)	6.3% (1/16)	5%
NO RISPOSTA		5.9% (1/17)		1.7%

Tabella 4.15: Quesito 5.c, Informazione 1 - distribuzione delle risposte.

Questo dato aggiuntivo vuole anche far riflettere sul modo in cui è stata valutata la probabilità all'evento (c) del Quesito 4, in particolare coloro che l'hanno calcolata in maniera classica. Se la probabilità è stata assegnata seguendo un ragionamento classico, basato solamente

sul numero di squadre in gioco, allora questa informazione non dovrebbe apportare alcuna variazione (in quanto il numero di squadre non cambia). Tuttavia, molti (16 dei 26 raggruppati in "PROBABILITÀ CLASSICA") non colgono questa mancanza di coerenza (data dal fatto che la formula utilizzata non è adatta a questo contesto) e, affidandosi all'intuizione, sostengono che la probabilità di vittoria diminuirebbe se Cristiano Ronaldo non potesse partecipare alla partita.
Qualcuno, invece, forse rendendosi conto di questo fatto, cerca di ovviarvi:

"La probabilità che ho considerato precedentemente [$\frac{1}{4}$] non considera il valore effettivo delle cose; è ovvio che, se considerata, l'assenza di Cristiano Ronaldo comporterebbe un abbassamento delle probabilità; dal punto di vista matematico invece essa rimane uguale." (MG)

"Abbassa un po' la possibilità, ma non c'entra. C'entra tutta la squadra. A mio parere la probabilità rimane $\frac{1}{4}$." (MP)

"Modifica. Non modifica però la valutazione della probabilità che ho dato [cioè $\frac{1}{\text{n. di squadre che partecipano}}$]." (MP)

Quasi tutti convengono sul fatto che l'altra informazione non causi alcun tipo di risvolto alla riuscita dell'evento (si veda Tabella 4.16).

	MP	S	MG	TOT
MODIFICA		5.9% (1/17)	6.3% (1/16)	3.3%
NON MODIFICA	100% (27/27)	88.2% (15/17)	93.8% (15/16)	95%
AMBIGUE		5.9% (1/17)		1.7%

Tabella 4.16: Quesito 5.c, Informazione 2 - distribuzione delle risposte.

Quesito 6

a) La Tabella 4.17 mostra come il bias di rappresentatività legato alla ricorrenza non sia particolarmente diffuso a questo livello scolastico (si contano quattro casi per classe).

	MP	S	MG	TOT
RISPOSTA CORRETTA	74.1% (20/27)	52.9% (9/17)	68.8% (11/16)	66.7%
NEGATIVE RECENCY	7.4% (2/27)	23.5% (4/17)	18.8% (3/16)	15%
POSITIVE RECENCY	7.4% (2/27)		6.3% (1/16)	5%
AMBIGUE	7.4% (2/27)	5.9% (1/17)	6.3% (1/16)	6.7%
NO RISPOSTA	3.7% (1/27)	17.6% (3/17)		6.7%

Tabella 4.17: Quesito 6.a - distribuzione delle risposte.

A trarre più in inganno è il ragionamento secondo la "negative recency" che alcuni giustificano molto accuratamente facendo appello alla Legge dei grandi numeri:

"Sì, per statistica è più probabile che esca un numero che non viene estratto da un po'." (S)

"Sì, per la regola della «regressione verso la media». Questa teoria, formulata da un mio amico, afferma che più un evento si verifica molte volte di seguito, più le probabilità che l'evento continui a ripetersi calano (e viceversa). Dunque, essendo 6 mesi che il numero 37 non esce, con il passare dei giorni sono aumentate le probabilità che il 37 esca: prima o poi uscirà e non manca molto a quel «poi»." (MG)

"Sì, per la legge dei grandi numeri eventi con la stessa probabilità tendono ad uguagliarsi negli eventi verificati. Se il 37 non è uscito negli ultimi 6 mesi, ciò non toglie che la probabilità che esca sia uguale a quella degli altri numeri ($\frac{1}{90}$ alla prima pescata). Il numero 37 tenderà ad uguagliarsi agli altri." (MG)

Evidentemente questi studenti si sono imbattuti nella cosiddetta Legge empirica del caso ed errori di questo tipo, dovuti alla sua scorretta applicazione, non sono nuovi: l'effetto di tale teorema (che lega la probabilità "a priori" di un evento, alla frequenza relativa della sua occorrenza) non si riscontra localmente, a livello di singola estrazione, quanto globalmente sulla media del numero di estrazioni, con tale numero che tende all'infinito.

Le ragioni che sostengono, invece, la logica del "positive recency effect" appaiono meno autorevoli e basate piuttosto su delle osservazioni empiriche:

"So che è un ragionamento stupido, ma io non lo sceglierei, e per un motivo ancora più stupido: ogni volta che la nostra prof. estrae dei numeri dall'elenco per l'interrogazione di latino, alcuni numeri non vengono proprio estratti; da 3 anni. Nella mia ignoranza, ne sceglierei uno che viene estratto varie volte." (MG)

"Dipende se il SuperEnalotto si ha ogni giorno e in 6 mesi non è mai capitato allora non lo sceglierei (anche se non è detto: può uscire comunque). Altrimenti potrei comunque sceglierlo." (MP)

"No perché in 6 mesi non è mai uscito quindi la probabilità che esca è bassissima (oppure altissima perché non l'hanno mai estratto quindi

potrebbero estrarlo $\rightarrow$ è un po' impossibile).” (MP)

D'altra parte vi è chi risponde molto lucidamente alla domanda, non lasciandosi fuorviare dal fatto che il numero non fosse estratto da diverso tempo, informazione del tutto ininfluente:

“No, sarebbe indifferente, un numero ha le stesse probabilità di uscire di un altro, essendoci ogni volta le stesse condizioni.” (S)

“No, la legge dei grandi numeri influisce su un numero di casi tendenti all'infinito, evidentemente negli ultimi 6 mesi non è stato estratto un numero di palline così alto.” (MP)

“È uguale. L'estrazione è casuale e non segue uno schema preciso quindi il 37 ha la stessa probabilità di essere estratto di un qualsiasi altro numero.” (MP)

“No, perché le probabilità si azzerano ogni volta (gli eventi precedenti non influiscono sulla probabilità).” (MG)

“Se giocassi il 37 vorrebbe dire che il caso ha le caratteristiche della matematica, il che non è assolutamente vero. Pertanto sceglierei i numeri in maniera casuale affidandomi alla sorte.” (MG)

Parafrasando queste ultime due risposte: *il caso non ha memoria.* La risposta finale, inoltre, contrappone questa caratteristica del caso alla matematica; questo aspetto, emerso in molti dei questionari analizzati, verrà commentato nel capitolo seguente.

b) Il bias indagato con questa domanda legato alla rappresentatività di un campione del processo da cui ha avuto origine è molto presente nella classe IV del Sabin, molto più che nel punto (a); anche nella IV del Minghetti le percentuali di coloro che riportano tale misconcezione aumenta leggermente. Nella classe II del Malpighi, al contrario, il ragionamento corretto è in aumento rispetto ad (a) e gli studenti rispondono tendenzialmente meglio se messi a confronto con le altre due classi (si veda Tabella 4.18).

	MP	S	MG	TOT
(A)				
(B) BIAS DI RAPPRESENTATIVITÁ	18.5% (5/27)	52.9% (9/17)	37.5% (6/16)	33.3%
(C) RISPOSTA CORRETTA	81.5% (22/27)	47.1% (8/17)	62.5% (10/16)	66.7%

Tabella 4.18: Quesito 6.b - distribuzione delle risposte.

Ecco alcune delle argomentazioni corrette degli allievi che scelgono la risposta C; alcune sono più formali, altre basate su considerazioni più empiriche:

"Il contenitore è in continuo movimento perciò le palline, non avendo una disposizione precisa, possono contenere numeri in fila o staccati." (MG)

"Indifferente, perché hanno comunque le stesse probabilità di uscire i numeri della sestina A, anche se tutti di fila, perché sono comunque casuali." (S)

"Le probabilità sono esattamente $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86} \cdot \frac{1}{85}$*."* [Per entrambe le sestine, considerando l'ordine] (MP)

I ragazzi che ragionano correttamente in entrambi i contesti (a) e (b) sono 4 al Sabin (23.5%), 18 al Malpighi (66.7%) e 7 al Minghetti (43.8%).

Nessuno opta per la risposta A. Rispetto alle motivazioni che conducono alla scelta della sestina B, quella in apparenza meno regolare, è interessante fare una distinzione. Da una parte, vi è chi la preferisce affidandosi pienamente all'errata intuizione sulla sua maggiore casualità (rispecchiando quanto riportato in letteratura):

"È più probabile che escano numeri non in ordine perché l'estrazione è casuale." (S)

"Sono 6 numeri di fila e al SuperEnalotto mai nella storia capiterà una roba del genere." (S)

Dall'altra chi, invece, pur riconoscendo l'equiprobabilità delle due sestine, non riesce a svincolarsi dalla convinzione che le possibilità di estrarre numeri consecutivi siano minori:

"Premettendo che ogni pallina ha uguali probabilità è più facile che escano numeri casuali piuttosto che perfettamente in ordine." (MG)

"MOOOLTO MEGLIO GIOCARE NUMERI SEPARATI, perché è RARO che escano 6 numeri consecutivi, la probabilità è la stessa, però è sconsigliabile." (MP)

"Mi ispira di più, so che teoricamente non cambia, ma non è mai possibile, per il mio cervello di essere umano medio, pensare che possa uscire 1-6." (S)

In queste risposte, è palese il conflitto tra l'intuizione secondaria che suggerisce come, dal punto di vista della probabilità, le due sequenze numeriche siano assolutamente equivalenti, e la prima intuizione secondo la quale non è verosimile l'estrazione di sei numeri consecutivi. A prevalere, in questi casi, è l'intuizione primaria, più radicata e più convincente.

Facendo un confronto con i risultati del quesito INVALSI citato a p. 28 (sebbene questo presenti delle risposte chiuse, fornendo degli spunti sui possibili modi di ragionare[18]), si nota come la percentuale di studenti che non fa distinzioni tra le probabilità delle due sestine sia pressoché la stessa emersa dal questionario (un poco inferiore per Minghetti e Sabin, decisamente superiore per il Malpighi, per un totale di 66.7% a fronte del 67% riportato dall'archivio INVALSI).
Rispetto all'andamento nazionale, il bias legato alla rappresentatività del campione si riscontra, invece, maggiormente in due delle tre classi (Sabin e Minghetti), mentre quella del Malpighi si attiene alla media INVALSI. Sicuramente ciò è imputabile anche al fatto che nella domanda INVALSI vi fossero altri due distrattori fra i quali le risposte degli studenti si sono divise, nonostante quello relativo a questa misconcezione abbia comunque attirato quasi il triplo di adesioni rispetto agli altri due.
Infine, per quanto riguarda l'effetto ricorrenza, il riferimento presente nel questionario era molto più esplicito di quanto non lo fosse nell'INVALSI, oltre ad essere ricondotto a due eventi diversi (nel questionario si trovava un'allusione diretta al ritardo nell'uscita di un numero, mentre nella domanda INVALSI il rimando era più velato). La percentuale di chi manifesta questo

[18] Va ricordato che tale quesito è stato somministrato a studenti del terzo anno di scuola secondaria di primo grado.

bias è, pertanto, maggiore fra gli allievi interrogati rispetto agli studenti italiani.

Quesito 7

a) Come si vede in Tabella 4.19, non si riscontrano particolari difficoltà nel calcolare questa probabilità.

	MP	S	MG	TOT
50% oppure $\frac{1}{2}$	88.9% (24/27)	88.2% (15/17)	87.5% (14/16)	88.3%
ALTRE PROBABILITÀ	11.1% (3/27)			5%
AMBIGUE		5.9% (1/17)	12.5% (2/16)	5%
NO RISPOSTA		5.9% (1/17)		1.7%

Tabella 4.19: Quesito 7.a - distribuzione delle risposte.

In genere il valore trovato viene giustificato dalla presenza, all'interno del contenitore, di un egual numero di palline bianche e di palline nere. Un paio di ragazzi richiama la definizione classica di probabilità:

“ $\frac{\textit{n. palline bianche estraibili}}{\textit{n. palline nel contenitore}}$. ” (MG)

“I casi favorevoli, ovvero i casi in cui esca una pallina bianca, sono 5; mentre i casi possibili sono la somma di palline bianche E palline nere, quindi 5+5=10.” (MP)

Alcuni studenti travisano la formulazione classica, di cui probabilmente hanno un lontano ricordo, affidandole il loro ragionamento:

“$\frac{1}{5}$ perché su 5 palline bianche in tutto ha la possibilità di averne estratta una.” (MP)

“La probabilità è di $\frac{1}{10}$ perché bisogna tener conto anche delle palline nere.” (MP)

b) Questo è risultato uno dei punti più critici di tutto il questionario, non a caso è fra i più controintuitivi.

	MP	S	MG	TOT
INVARIATA	11.1% (3/27)	23.5% (4/17)	18.8% (3/16)	16.7%
DIMINUITA	18.5% (5/27)	11.8% (2/17)	6.3% (1/16)	13.3%
DIPENDE DALL'UOMO	37.0% (10/27)	29.4% (5/17)	43.8% (7/16)	36.7%
NON CALCOLABILE	22.2% (6/27)	29.4% (5/17)	25% (4/16)	25%
AMBIGUE	7.4% (2/27)		6.3% (1/16)	5%
NO RISPOSTA	3.7% (1/27)	5.9% (1/17)		3.3%

Tabella 4.20: Quesito 7.b - distribuzione delle risposte.

La maggior parte degli studenti (soprattutto del Malpighi e del Minghetti) ritiene che la probabilità dell'evento B = *“la donna ha pescato una pallina bianca”*, come indicato a p. 83, dipenda dall'esito dell'evento A = *“l'uomo ha pescato una pallina bianca”* ad esso precedente e di cui, al momento, non si sa nulla. Così non viene indicata una probabilità, ma questa assume due valori diversi a seconda della situazione che si presenta:

“In tal caso la probabilità dipende dall'estrazione dell'uomo: se l'uomo ha estratto una pallina bianca, la probabilità che la donna abbia estratto

una bianca è $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$; se l'uomo ha pescato una pallina nera, la probabilità che la donna abbia estratto una pallina bianca è $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$." (MG)

Altri leggono l'assenza di informazioni riguardo all'avverarsi di A in due modi: da una parte vi è chi interpreta la mancanza di informazioni come una non alterazione dello stato delle conoscenze rispetto alla composizione dell'urna per cui $P(B) = P(A)$. In particolare, gli studenti che arrivano a questa conclusione lo fanno in maniera naturale, senza il bisogno di rifarsi a formule di qualche genere:

"È uguale, perché non ti dà informazioni che servono." (S)

"[...] Se paragoniamo le due probabilità, l'uomo e la donna hanno la stessa probabilità di aver estratto una pallina bianca, perché non sappiamo di che colore sono le palline che hanno estratto." (MG)

"Secondo me non sapendo che cosa avesse estratto il marito, la moglie ha la stessa probabilità. Se però il marito avesse estratto una nera allora per la moglie ci sarebbe più probabilità di estrarre una bianca." (MP)

D'altro canto, emerge una nuova dimensione della non calcolabilità della probabilità di un evento, che in questo caso viene collegata, per l'appunto, alla non conoscenza di ciò che è avvenuto in precedenza:

"Non sapendo cosa l'uomo abbia estratto precedentemente, non posso in alcun modo calcolare la probabilità che la donna abbia estratto una pallina bianca." (MG)

"No perché se sapessi se l'uomo ha estratto una pallina bianca o nera potrei calcolarlo, ma dal momento che le palline saranno 4+5, ma non

so in che relazione, non posso calcolarla." (MG)

"La probabilità della donna di estrarre una pallina bianca è diversa rispetto a quella dell'uomo (non è calcolabile) poiché l'uomo ha già estratto e si è messo in tasca la pallina che ha preso." (S)

"No, non sapendo cosa ha estratto l'uomo non si può sapere come la probabilità di estrarre bianca è cambiata." (MP)

Infine, un'esigua percentuale, ritiene che la donna abbia meno possibilità di pescare una sferetta bianca rispetto a quelle che aveva l'uomo all'inizio. In questi casi (tranne nell'ultimo riportato) viene assunto che l'evento A si sia verificato:

"Penso che si possa stabilire la probabilità di estrarre una pallina bianca e penso che sia minore rispetto a quella che ha avuto l'uomo, ammesso che lui ne abbia estratta una bianca." (S)

"Minore poiché se l'uomo avesse pescato una pallina bianca il numero di palline presenti sarebbe inferiore." (MG)

" $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 22\%$ *la probabilità è minore perché il numero di palline bianche è diminuito."* [In realtà calcola la probabilità di $A \cap B$] (MP)

"Dipende da cosa ha in tasca l'uomo maschio se ha bianco allora è più probabile che adesso la donna ha nero, altrimenti l'opposto. Quindi però non è certo ma solo leggermente inferiore al 50%." (S)

c) Come riporta la Tabella 4.21, buona parte degli allievi di tutte e tre le classi riconoscono l'influenza dell'informazione ricevuta sulla probabilità dell'evento B.

	MP	S	MG	TOT
INFLUISCE	74.1% (20/27)	64.7% (11/17)	75% (12/16)	71.7%
NON INFLUISCE	11.1% (3/27)	11.8% (2/17)	12.5% (2/16)	11.7%
GENERICHE/ AMBIGUE	14.8% (4/27)	11.8% (2/17)	12.5% (2/16)	13.3%
NO RISPOSTA		11.8% (2/17)		3.3%

Tabella 4.21: Quesito 7.c - distribuzione delle risposte.

Nello specifico, concordano sul fatto che la conoscenza della realizzazione di A causa una riduzione della porzione di palline bianche e, dunque, la diminuzione della probabilità di estrarne una:

"Ora si può stabilire perché sappiamo che la pallina estratta dall'uomo è bianca e vi sarà nell'urna una pallina bianca in meno." (S)
("Non calcolabile" in (b))

"Modifica la probabilità che la donna abbia pescato una pallina bianca, perché così l'evento diventa meno probabile. Per calcolare la probabilità nel quesito (b) bisognava tenere conto di due ipotesi. [la realizzazione di A e la realizzazione di $\overline{A}$] *In questo caso la probabilità risulta* $\frac{4}{9}$*."*
(MG)
("Dipende dall'uomo in (b))

"Certo, ci sono meno probabilità che lei abbia preso una pallina bianca, si modifica la mia risposta (b) perché ora c'è più possibilità che abbia preso una pallina nera." (S)

("Invariata" in (b))

I ragazzi che sostengono che l'informazione, invece, non influenzi la probabilità dell'evento B sono soprattutto quelli che avevano assunto l'estrazione di una pallina bianca da parte dell'uomo e quindi che fosse $P(B) < P(A)$. Vi sono, tuttavia, alcune giustificazioni basate sulla cronologia degli eventi:

"Non cambia perché ha già estratto." [la donna] (S)
("Invariata" in (b))

"Influisce sulla probabilità prima che la donna abbia pescato. No, non modifica la mia risposta." (MG)
("Invariata" in (b))

"La donna ha già estratto la sua pallina e la vista del colore della pallina bianca non ne farà cambiare colore (sempre che non si trattino di oggetti quantistici)." (MG)
("Dipende dall'uomo" in (b))

Questo genere di ragionamento confonde le proprietà dell'oggetto pescato dalla donna (che sono determinate nel momento in cui avviene l'azione) e lo stato delle conoscenze relative a queste caratteristiche: in seguito all'acquisizione di nuove informazioni, ad estrazione compiuta, chiaramente non cambierà il colore della palla ma ciò ha l'effetto di consentire una stima più precisa della probabilità di averne scelta una bianca. Come sosteneva de Finetti, citando Borel (p. 16), si può scommettere sull'evento B, prima che la donna peschi, mentre sta pescando o ad estrazione avvenuta, purché non si conosca il colore della palla. Quello che sappiamo in ognuno di questi tre stadi è suscettibile di arricchimenti in modo da poter effettuare una valutazione più accurata. Inoltre, come già ripetuto molte volte in molti contesti, la probabilità non dice cosa avverrà (o è avvenuto), ma le possibilità che avvenga (o che sia avvenuto).

Quesito 8

Il Quesito 8 è quello in cui, in assoluto, si sono riscontrate più problematicità.

	MP	S	MG	TOT
RAGIONAMENTO CORRETTO	7.4% (2/27)		6.3% (1/16)	5%
PROBABILITÀ CLASSICA	18.5% (5/27)	5.9% (1/17)	6.3% (1/17)	11.7%
ALTRI RAGIONAMENTI	48.1% (13/27)	58.8% (10/17)	75% (12/16)	58.3%
GENERICHE/ QUALITATIVE	11.1% (3/27)	5.9% (1/17)		6.7%
AMBIGUE/ NO RISPOSTA	14.8% (4/27)	29.4% (5/17)	12.5% (2/16)	18.3%

Tabella 4.22: Quesito 8 - distribuzione delle risposte.

Come si vede in Tabella 4.22, la percentuale di chi concorda con il ragionamento proposto nel quesito (categoria indicata con "PROBABILITÀ CLASSICA") che fa leva sul bias di equiprobabilità non è particolarmente alta. Uno studente (S) lo giustifica attraverso un diagramma ad albero sul quale, però, non considera i valori delle probabilità dei rami, come riportato nella *Risposta 4* (si veda Figura 3.11).
D'altra parte, coloro che non condividono quanto sostenuto da Gianni, che rappresentano la maggioranza, sostengono le loro posizioni andando a calcolare la presunta probabilità dell'evento. Il calcolo corretto non è immediato e

riuscire a svolgerlo richiede una sviluppata capacità nell'affrontare problemi di natura probabilistica (non era comunque la pretesa del quesito). Solamente tre ragazzi imboccano la strada giusta, due dei quali utilizzano un grafo:

Si veda *Risposta 5* in Figura 3.11. (MP)

[Disegna un diagramma simile a quello sopra citato] *"Probabilità di vincere al primo lancio:* $\frac{1}{6}$*; probabilità di vincere al secondo lancio:* $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$*. Probabilità totale di vincere:* $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{5+6}{36} = \frac{11}{36} \neq \frac{2}{3}$*. Gianni considera solo l'opzione vinco/perdo senza tener conto del fatto che la probabilità di vittoria non è* $\frac{1}{2}$*, ma* $\frac{1}{6}$ *ad ogni lancio."* (MG)

In quest'ultimo caso, nonostante il ragionamento di Gianni non sarebbe comunque esatto anche se fosse $\frac{1}{2}$ la probabilità di vittoria ad ogni lancio, sembra emergere la consapevolezza che il bias commesso nel ragionamento coinvolge le probabilità dei tre eventi che costituiscono i "casi possibili", le quali non assumono tutte lo stesso valore.

L'altro allievo (MP) si avvicina al soluzione del problema scrivendo lo spazio campionario formato dalle 36 coppie di risultati e andando a contare quelle in cui compare almeno un 6. Commette, però, un errore nel conteggio considerando due volte la coppia (6,6); come si evince dalla Tabella 4.1 relativa ai risultati del Rally Matematico Transalpino, questo tipo di equivoco non è così insolito.
Quella in questione è la *Risposta 4* mostrata in Figura 3.11.

Quattro ragazzi argomentano il loro disaccordo con Gianni in maniera più qualitativa, senza andare a calcolare la probabilità di vincita ma rendendosi conto che le probabilità di perdita sono maggiori:

"Torto. [...] La probabilità di perdere è per ogni lancio 5 volte superiore

a quella di vincere." (MP)

"Torto perché le probabilità che esca al primo turno 6 sono le stesse che esca al secondo turno, ma sono comunque meno di quelle che escano altri numeri! [...] In ogni caso non sono $\frac{2}{3}$." (MP)

Non è facile affrontare il calcolo della probabilità di un evento in un esercizio del genere se non si posseggono ancora gli strumenti adatti o non si è sviluppato un corretto modello probabilistico e l'intuizione suggerisce ai vari studenti approcci diversi (convogliati nella categoria "RAGIONAMENTI DIVERSI").
Sia V = *"ottengo almeno un 6"* l'evento corrispondente alla vittoria. Di seguito si riportano i modi in cui $P(V)$ è stata calcolata nel questionario.

- $P(V) = \frac{1}{3}$, come somma delle probabilità di ottenere 6 in ciascun lancio:

  "Ha torto poiché non considera la presenza delle altre cinque facce. Dunque a mio parere la probabilità di vincere è data dalla somma della probabilità di ottenere 6 in entrambi i dadi: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$." (MG)

  Più tardi scopriranno che a questa somma andrà tolta la probabilità dell'intersezione.

- $P(V) = \frac{2}{12}$:

  "No, le possibilità sono 2 su 12 perché le facce del dado nel primo caso sono 6 e la possibilità 1 e nel secondo caso le facce sono sempre 6 e la possibilità è sempre 1." (S)

  In questo caso, però, le 12 facce non sono tutte tra loro equiprobabili: al primo lancio, ciascuna faccia ha $\frac{1}{6}$ di probabilità di presentarsi mentre al secondo $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$, in quanto il secondo tiro del dado comporta la non uscita del numero 6 al primo. Considerando lo spazio campionario costituito dai risultati distinti dei due lanci, non si può quindi applicare la definizione classica.

- $P(V) = \frac{1}{6}$:

  "Gianni ha torto perché se io lancio il dado una volta (prob.: 1 su 6) e non esce 6, e poi lo rilancio ho comunque solo una probabilità su 6 di vincere, perché il numero che è uscito prima non influenza in nessun modo il numero che uscirà la seconda volta." (MP)

  La generale indipendenza degli esiti di due lanci di un dado è qui confusa con la correlazione presente nel contesto di questo quesito in cui il secondo lancio avviene nel caso in cui non sia uscito il numero 6 al primo. Pertanto, la probabilità di ottenere una qualsiasi delle sei facce è condizionata dal risultato del lancio precedente.

Come si è visto, l'intuizione non porta a compiere ragionamenti così distanti da quelli effettivamente corretti (soprattutto nei casi in cui la probabilità trovata è $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{12}$). Quello che manca è una maggiore consapevolezza degli strumenti probabilistici i quali, si auspica, saranno sviluppati una volta affrontata la teoria della probabilità e andranno ad integrare il substrato intuitivo già presente.

4.2 Questionario finale

Il questionario, consultabile in Appendice B, è costruito sulla falsa riga di quello iniziale: il suo scopo è, infatti, quello di offrire un specchio sulle risposte date alle stesse tipologie di quesiti a distanza di alcuni mesi e dopo aver affrontato, in modi diversi, la teoria della probabilità. In altre parole, è stato pensato come uno strumento per andare ad indagare eventuali segnali di rafforzamento dell'intuizione secondaria o se, al contrario, vi siano dei

punti critici sui quali un'errata intuizione primaria continui a prevalere.
Il test è stato somministrato alle due classi presso cui si sono tenuti i due percorsi curricolari:

- La classe III A (ex II A) del Liceo Scientifico Malpighi di Bologna, con 25 alunni presenti;

- La classe V B (ex IV B) del Liceo Scientifico A. B. Sabin di Bologna, con 15 alunni presenti.

Rispetto all'anno precedente alcuni elementi della classe sono cambiati pertanto, nell'analisi del questionario e nel suo confronto con quello precedente, si è tenuto conto (grazie al codice presente su ogni fascicolo che ha consentito la corrispondenza) solamente dei 37 studenti che hanno svolto entrambi i questionari: 25 al Malpighi e 12 al Sabin.

4.2.1 Descrizione dei quesiti

Segue ora una breve descrizione dei quesiti per i quali si rimanderà di continuo ai corrispettivi presenti nel primo questionario, essendo costruiti a partire da questi ultimi.

Quesiti 1 - 3

I primi due quesiti sono tali e quali al Quesito 1 e al Quesito 3 (p. 79) del questionario iniziale (che, per brevità, nel seguito verrà indicato con "QI"). Lo scopo evidente è quello di constatare eventuali variazioni nei concetti di evento aleatorio e probabilità.
Il terzo quesito è analogo al Quesito 4 di QI: gli eventi elencati sono differenti ma fanno comunque riferimento ad ambiti familiari per i ragazzi. Inoltre, solo per uno di questi (il lancio di un dado) è applicabile la definizione classica per calcolarne la probabilità.

Quesito 4

La situazione di partenza riprende quella del Quesito 7 di QI (p. 83). Come in quel caso, la prima è una semplice domanda per verificare la comprensione del quesito.
Successivamente viene descritta un'operazione di estrazione e reimbussolamento che segue lo schema dell'urna di Polya[19] in cui, per ogni pallina estratta, ne viene aggiunta una dello stesso colore (riprendendo le notazioni usate nella Nota 19, nel contesto corrente si ha: $N = 10$, $p = q = \frac{1}{2}$, $r = 1$).
L'informazione su ciò che è avvenuto, priva del dato sul colore della pallina aggiunta (che dipende dalla prima estrazione), non apporta alcunché allo stato iniziale delle conoscenze sulla partizione tra sferette bianche e nere, in modo del tutto analogo alla situazione descritta nel Quesito 7. Perciò, la probabilità di estrarre una biglia bianca dopo l'inserimento di una di colore incognito è la medesima del principio, ovvero $\frac{1}{2}$. A conferma di ciò si può sfruttare nuovamente la formula della probabilità totale (o, equivalentemente, un diagramma ad albero): indicando con E_1 l'evento *"esce bianca alla prima estrazione"* che comporta l'incremento di una unità delle palle bianche nell'urna e con E_2 l'evento *"esce bianca alla seconda estrazione"* si ottiene:
$P(E_2) = P(E_2|E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2|\overline{E_1}) \cdot P(\overline{E_1}) = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

[19] L'urna di Polya è un modello utilizzato in economia per studiare lo sviluppo di certi fenomeni. Il modello considera un'urna nella quale si trovano inizialmente N palline, di cui pN bianche ($0 < p < 1$) e qN nere ($q = 1 - p$). Si procede a una sequenza di estrazioni seguite, previa osservazione dell'esito, da reimbussolamento della pallina estratta e di altre rN dello stesso colore. Si noti che per $r = 0$ si ritrova il classico schema di estrazioni con reimbussolamento, che comporta equiprobabilità e indipendenza dall'esito delle precedenti estrazioni dell'uscita di una pallina bianca in ogni estrazione. Per $r > 0$ la composizione dell'urna è invece variabile nel tempo e dipende dall'esito dei precedenti sorteggi. Indicando con E_h l'evento *"esce bianca alla h-esima estrazione"*, si può provare che $P(E_h) = p$.

Quesito 5

Il quesito trae ispirazione da un articolo di L. Khazanov e L. Prado [15, p. 28], due ricercatori del Manhattan Community College, in cui viene proposto a degli studenti un esercizio per trattare apertamente il bias di rappresentatività.
Come nel Quesito 6 di QI (p. 82), infatti, la misconcezione presa di mira è proprio quella della rappresentatività (di cui si è parlato nel Capitolo 1): a partire da un processo casuale con esiti equiprobabili (lancio di una moneta ripetuto quattro volte) viene chiesto agli allievi, sempre in maniera diretta, di indicare quale fra le quartine di *"T"* e *"C"* elencate si aspetterebbero maggiormente come risultato. Le sequenze presentano un numero di teste che va da quattro a zero e quello che si intende investigare è se la scelta si indirizzi verso una di queste in base ai criteri propri del bias. Nello specifico, se venga prediletta la quartina all'apparenza meno regolare, come portatrice di un carattere di casualità, oppure quella con un egual numero di *"T"* e *"C"*, ritenuta più conforme all'equità della moneta.
Non si è fatto riferimento, all'interno di tale questionario, all'effetto ricorrenza, indagato invece in QI.

Quesito 6

L'ultimo quesito è ripreso dall'Esercizio 7 della verifica svolta nella classe del Liceo Sabin (per la quale si veda Appendice C) e vuole fare le veci del Quesito 8 di QI (illustrato a p. 85).
Il quesito ha un testo alquanto descrittivo e sintetico: lo studente dovrà operare in autonomia per formalizzarlo ed individuare gli elementi che gli serviranno per il calcolo della probabilità che, qui, viene richiesto esplicitamente.
Come in QI, l'esercizio si compone di una concatenazione di due esperimenti aleatori identici (rappresentati dal sottoporsi all'operazione chirurgica) in cui l'esito del primo condiziona l'attuazione del secondo. Anche in questo caso, nonostante non vi sia nessun rimando ad un ragionamento del genere,

può presentarsi la tentazione di applicare in maniera inadeguata il modello classico prendendo lo spazio campionario costituito dai tre eventi non equiprobabili *"Perisco alla prima operazione"*, *"Sopravvivo alla prima operazione ma perisco alla seconda"*, *"Sopravvivo ad entrambe le operazioni"* e valutando la probabilità di perire come $\frac{2}{3}$.
Altresì, il considerare l'insieme delle coppie in cui ciascuna componente rappresenta l'esito della rispettiva operazione potrebbe apparire inopportuno in quanto le coppie con prima componente $M =$ *"perisco alla prima operazione"* potrebbero risultare prive di senso, vista l'impossibilità di essere sottoposti al secondo intervento (essendo deceduti). Tuttavia, nell'affrontare questi problemi, bisogna effettuare un'astrazione dal contesto reale a cui si riferiscono, estrapolando i soli elementi utili e sensati, riconducendoli ad uno schema generale e formale che, in questa situazione, è lo stesso del più asettico lancio ripetuto di una moneta.

4.2.2 Confronto tra i risultati dei questionari iniziale e finale

Come anticipato, verranno prese in considerazione solamente le risposte degli studenti che hanno svolto entrambi i questionari: nella classe III del Malpighi tutti coloro che hanno partecipato alla seconda indagine erano presenti alla prima e avevano aderito alle attività; nella V del Sabin, invece, solamente 12 dei 15 ragazzi presenti provenivano dall'anno scolastico precedente, gli altri tre lo avevano trascorso all'estero non seguendo, pertanto, il percorso svolto con i compagni.
Per brevità, con "QI" si farà riferimento al questionario iniziale mentre con "QF" a quello finale.

Confronto tra Quesito 1 (QI) e Quesito 1 (QF)

La Tabella 4.23 illustra l'andamento delle risposte al quesito del questionario iniziale e finale, andando a considerare solo gli studenti che hanno

		MP	S	TOT
ASSENZA DI LOGICA/ DIPENDENZA DAL CASO	QI	36% (9/25)	41.7% (5/12)	37.8%
	QF	20% (5/25)	25% (3/12)	21.6%
IMPREVEDIBILITÀ	QI	20% (5/25)	33.3% (4/12)	24.3%
	QF	36% (9/25)	8.3% (1/12)	27.0%
INCERTEZZA	QI	20% (5/25)		13.5%
	QF	16% (4/25)	8.3% (1/12)	13.5%
ALTRE	QI	8% (2/25)	16.7% (2/12)	10.8%
	QF	4% (1/25)	41.7% (5/12)	16.2%
AMBIGUE	QI	12% (3/25)		8.1%
	QF	20% (5/25)	8.3% (1/12)	16.2%
NO RISPOSTA	QI	4% (1/25)	8.3% (1/12)	5.4%
	QF	4% (1/25)	8.3% (1/12)	5.4%

Tabella 4.23: Quesito 1 (QI), Quesito 1 (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

svolto entrambi.
La sostanza delle risposte non varia considerevolmente: al Malpighi mentre in QI la maggioranza definisce l'evento aleatorio come un evento regolato dal caso, in QF lo stesso ammontare si concentra intorno alla sua caratteristica imprevedibilità (totale o parziale); al Sabin, invece, entrambe le percentuali di queste due categorie diminuiscono in favore di diverse definizioni (raccolte in "ALTRE").
Un dato interessante (ma non sorprendente) è che compaiono più spesso riferimenti alla probabilità. In particolare si riscontrano più risposte (assenti in precedenza) in cui, nonostante l'evento sia incognito ("imprevedibile"), possono essere quantificate le possibilità che questo si realizzi per mezzo della probabilità:

"Un evento aleatorio o casuale è un evento non prevedibile la cui probabilità di successo è misurata tramite una probabilità. (Es. evento: esce 1 al tiro di un dado regolare $= 16,\overline{6}\%$*)."* (MP)

"Un evento di cui a priori non si conosce l'esito, ma si possono calcolare le varie possibilità. Es. esca pallina bianca/nera da un sacchetto di cui si conoscono alcune caratteristiche: totale palline e quantità nera/bianca." (MP)

"Un evento aleatorio o casuale è un evento di cui non si sa il risultato che si potrebbe ottenere fin da subito, ma si possono sapere le possibilità di risultato che può dare." (MP)

Si sono rilevate anche delle affermazioni più generiche che, comunque, associano i due concetti:

"Evento che può accadere con una certa probabilità." (S)

"Evento di cui si sanno le probabilità di riuscita." (MP)

Il numero di studenti del Sabin raggruppati in "ALTRE" aumenta proprio a causa dell'incremento di questo tipo di definizioni.
Al Malpighi, cresce il numero di "AMBIGUE" a causa della presenza di molte frasi del tipo *"Aleatorio = casuale"*, senza nessun'altra specifica.

Confronto tra Quesito 3 (QI) e Quesito 2 (QF)

		MP	S	TOT
INDICE DI POSSIBILITÀ	QI	56% (14/25)	41.7% (5/12)	51.4%
	QF	48% (12/25)	58.3% (7/12)	51.4%
DEF. CLASSICA	QI	12% (3/25)	8.3% (1/12)	11.4%
	QF	20% (5/25)		13.5%
DEF. FREQUENTISTA	QI	4% (1/25)		2.7%
	QF	4% (1/25)	25% (3/12)	10.8%
LINGUAGGIO QUOTIDIANO	QI	12% (3/25)	41.7% (5/12)	21.6%
	QF			
ALTRE	QI	4% (1/25)		2.7%
	QF	20% (5/25)		13.5%
AMBIGUE	QI	12% (3/25)	8.3% (1/12)	10.8%
	QF	8% (2/25)	16.7% (2/12)	10.8%

Tabella 4.24: Questito 3 (QI), Quesito 2 (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

Come si può notare dalla Tabella 4.24, nel questionario finale scompare la categoria di risposte che fanno riferimento al termine "probabilità" nel linguaggio quotidiano: ciò può essere sintomatico della costruzione di un significato più formale e più preciso, che si è elevato dal livello della conoscenza di senso comune.
Nel dettaglio, tutti i ragazzi del Sabin che hanno dato questa definizione, in

QF si indirizzano sulla categoria "INDICE DI POSSIBILITÀ", al di fuori di uno ("FREQUENTISTA"); al Malpighi danno risposte varie ("ALTRE"). Tra le due classi, inoltre, si riscontrano tendenze opposte: al Mapighi diminuiscono i numeri di "INDICE DI POSSIBILITÀ" in favore di "DEF. CLASSICA" e altre di vario tipo, mentre al Sabin succede esattamente l'opposto, anzi queste due categorie scompaiono del tutto (nonostante, come si vedrà successivamente, la probabilità classica sia ampiamente utilizzata per rispondere ai quesiti).

Fra le risposte che richiamano la definizione classica, solamente una lo fa in maniera esplicita (*casi favorevoli su casi possibili*, peraltro è la stessa definizione data in QI); gli altri, presumibilmente, hanno il ricordo delle operazioni svolte nel calcolo delle probabilità degli eventi proposti nelle attività, in cui il punto di partenza era la scrittura dello spazio campionario:

"Dato un evento e un suo possibile esito, la probabilità è la percentuale dei casi favorevoli divisi per il totale dei casi possibili." (MP)

"La parola probabilità si riferisce a un calcolo numerico che indica la percentuale di uscita di un certo elemento rispetto a tutti i casi possibili." (MP)

"È la possibilità che avvenga un certo evento su un totale di eventi. (Esca $\frac{\textit{faccia 6 dado}}{\textit{totale eventi}}$)." (MP)

Si osserva, inoltre, un affinamento nel definire la probabilità come quantificatore della realizzabilità di un evento. Nello specifico alcuni studenti aggiungono che tale quantità è compresa tra 0 e 1 (proprietà non comparsa in QI), per esempio:

"[...] La probabilità cerca di indicare in un numero compreso tra zero e 1, attraverso la percentuale, la ricorrenza di un certo avvenimento. Ottenere

il numero 5 in un dado a 6 facce su un lancio avrò $\frac{1}{6}$ di probabilità di ottenerlo." (MP)

"Stima (in percentuale ma anche non) di quanto una cosa possa accadere in futuro, varia da 0% a 100% ma non sempre è misurabile per ogni cosa." (MP)

"Percentuale di certezza con la quale un evento possa avverarsi." [Sembra implicito che tale percentuale sia compresa tra 0% e 100%] (S)

La presenza di tre definizioni di tipo frequentista al Sabin, non è giustificabile tramite il percorso curricolare se non per via dell'ultima lezione in cui, come ricordato a p. 71, sono state presentate le formulazioni diverse da quella classica. Non sono, tuttavia, molto accurate:

"Probabilità è data: $\frac{\textit{frequenze}}{\textit{numero di tentativi}}$." (S)

"È il numero di volte in cui un evento si verifica rispetto al totale dei tentativi." (S)

Infine, si segnalano due risposte singolari e ben formulate (contenute in "ALTRE"); la prima è ripresa dalla presentazione fatta della probabilità (Figura 3.3, p. 46), la seconda dimostra di aver ben compreso il ruolo di tale strumento matematico:

[Disegno del segmento] *"La probabilità definisce su quale punto del segmento che ha come estremi l'impossibile e il certo stia un evento."* (MP)

"La probabilità indica matematicamente l'andamento di un evento aleatorio. Essa non prevede per esempio che numero uscirà tirando un dado ma dice quante possibilità si hanno che esca un numero pari ($\frac{3}{6}$: 1 possibilità su

2).” (MP)

Comparando in maniera globale i responsi forniti dalle due classi, non si può non constatare come, in generale, quelli del Malpighi siano meglio articolati e più ricchi di dettagli: questo fatto può essere imputabile alla diversa natura degli approcci con cui l’argomento è stato affrontato.
Nella classe del Malpighi, il percorso era concentrato in sole quattro ore e i riferimenti alle proprietà della probabilità erano continui, in quanto l’obiettivo di tale sperimentazione era di far avvicinare gli studenti al concetto di probabilità in maniera consistente (ma non esaustiva), deducendone le caratteristiche dai diversi casi che si presentavano. Il ragionamento su questa nozione ha rappresentato il filo conduttore attraverso cui si sono sviluppate le lezioni e le attività.
Al Sabin, d’altro canto, nonostante l’approccio iniziale più qualitativo sulle proprietà essenziali della probabilità, ripreso anche nella lezione terminale, e avendo comunque sottolineato durante il percorso come non si trattasse di una mera formula per risolvere gli esercizi, il suo ruolo protagonista può essere venuto meno: per una questione di necessità dettata dal programma ministeriale, ci si è concentrati inevitabilmente di più sulla risoluzione di esercizi e sulla comprensione dei teoremi; la domanda sul senso della probabilità non di rado, quindi, è passata in secondo piano. Questo può aver influito sulla generalità delle risposte date in questa classe.

Confronto tra Quesito 4 (QI) e Quesito 3 (QF)

Seguirà, ora, un confronto tra i modi in cui sono state valutate le probabilità degli eventi elencati nei due questionari. L’accostamento di alcuni eventi apparirà naturale e sensato in quanto molto simili; altri, invece, risultano molto distanti e pertanto, per evitare di forzare troppo questa operazione, non verranno messi in parallelo, sebbene il modo di valutare la loro probabilità sia lo stesso. Gli eventi in questione sono (c) ed (f) del questionario finale che saranno analizzati singolarmente coinvolgendoli in un discorso più generale.

- (a - QI) Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni 6
  (b - QF) Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni un numero maggiore o uguale di 3

		MP	S	TOT
$\frac{1}{6}$	QI	92% (23/25)	75% (9/12)	86.5%
$\frac{2}{3}$	QF	100% (25/25)	83.3% (10/12)	94.6%
GENERICHE/	QI	4% (1/25)	16.7% (2/12)	8.1%
AMBIGUE	QF		16.7% (2/12)	5.4%
NO RISPOSTA	QI	4% (1/25)	8.3% (1/12)	5.4%
	QF			

Tabella 4.25: Quesito 4.a (QI), Quesito 3.b (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

Come si evince dalla Tabella 4.25, le risposte corrette aumentano in entrambe le classi, nonostante la crescente difficoltà del calcolo, e non si riscontrano più risposte omesse.
Un cenno va fatto ad una risposta di uno studente del Sabin che fa riferimento indiretto all'assioma della somma, anche se, poi, non calcola la probabilità dell'evento:

"Sì. Ho tenuto conto delle percentuali per ogni numero e le sommo." (S)

- (b - QI) Il 25 dicembre è Natale
  (a - QF) Pasqua cade di domenica

  I dati della Tabella 4.26 evidenziano in entrambe le classi un calo di risposte in cui si forza la definizione classica per giustificare la proba-

		MP	S	TOT
CALCOLABILE	QI	52% (13/25)	58.3% (7/12)	54.1%
	QF	60% (15/25)	75% (9/12)	64.9%
PROBABILITÀ CLASSICA	QI	16% (4/25)	8.3% (1/12)	13.5%
	QF	4% (1/25)		2.7%
NON CALCOLABILE	QI	16% (4/25)		10.8%
	QF	16% (4/25)		10.8%
GENERICHE/ AMBIGUE	QI	8% (2/25)	16.7% (2/12)	10.8%
	QF	16% (4/25)	25% (3/12)	18.9%
NO RISPOSTA	QI	8% (2/25)	16.7% (2/12)	10.8%
	QF	4% (1/25)		2.7%

Tabella 4.26: Quesito 4.b (QI), Quesito 3.a (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

bilità di questo evento certo.
Al contempo sono in aumento anche gli studenti che ritengono calcolabile tale probabilità, mentre il numero di coloro che assumono la posizione opposta resta costante. In questo caso le motivazioni sono riconducibili, presumibilmente, al ritenere erroneamente che Pasqua possa cadere un giorno qualsiasi della settimana:

"Non si può stimare perché ogni anno può essere diverso." (MP)

In entrambi gli istituti, si riscontrano più risposte generiche in cui l'evento è etichettato come "certo" ma senza alcun riferimento alla sua probabilità il che potrebbe significare che, essendo il suo esito stabilito, non abbia senso parlare di probabilità.

- (d - QI) Ricevi un messaggio su WhatsApp nei prossimi dieci minuti
  (d - QF) Nel novembre del 2018 nevica a Bologna

		MP	S	TOT
CALCOLABILE	QI	24% (6/25)	33.3% (4/12)	27.0%
	QF	36% (9/25)	16.7% (2/12)	29.7%
PROBABILITÀ CLASSICA	QI	28% (7/25)		18.9%
	QF	8% (2/25)		5.4%
NON CALCOLABILE	QI	28% (7/25)	25% (3/12)	27%
	QF	24% (6/25)	58.3% (7/12)	35.1%
GENERICHE/ AMBIGUE	QI		33.3% (4/12)	10.8%
	QF	28% (7/25)	25% (3/12)	27.0%
NO RISPOSTA	QI	20% (5/25)	8.3% (1/12)	16.2%
	QF	4% (1/25)		2.7%

Tabella 4.27: Quesito 4.d (QI), Quesito 3.d (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

I due eventi non sono completamente accorpabili e riguardano degli aspetti della vita quotidiana che, sebbene dal punto di vista formale non abbiano importanza o non determinino differenze nell'approccio alla valutazione della probabilità, possono suscitare reazioni diverse negli studenti a causa, per esempio, della maggiore o minore familiarità o di fattori ritenuti più o meno prevedibili.
Come mostra la Tabella 4.27, per gli studenti del Malpighi risulta maggiormente calcolabile la probabilità dell'evento di QF rispetto a quello di QI mentre al Sabin si riscontra la tendenza inversa.
Le ragioni espresse a sostegno della possibilità di stimare l'esito dell'evento sono, perlopiù, di natura statistica e non tutte comprendono una stima di tale probabilità:

"Si dovrebbero analizzare le nevicate degli anni precedenti, la frequenza di queste e misurare le temperature attuali." (MP)

"[...] Posso fare delle supposizioni in base a dati climatici e temperature previste." (S)

Al contempo, chi reputa non calcolabile la probabilità di tale evento, lo fa in nome della variabilità del clima e degli agenti atmosferici, analogamente a quanto sostenuto nei confronti delle persone la cui decisione di inviare un messaggio non può essere, normalmente, anticipata; oppure, attribuisce questa incapacità, alla sua mancanza di conoscenze nel campo della meteorologia (in effetti la domanda recita "Puoi calcolare..."):

"[...] Essendo il clima imprevedibile, a lungo termine questo evento risulta imprevedibile." (MP)

"Incalcolabile, non sono esperto di meteorologia, quindi non so dire se nevicherà." (MP)

I tentativi di ricondurre il calcolo della probabilità dell'evento ad una formula di tipo classico si riducono e rimangono solamente due risposte che si basano su un ragionamento di questo tipo (sotto, tra parentesi, è riportata la definizione di probabilità scritta nel Quesito 2 (QF)):

" $\frac{1}{3}$: o nevica, o c'è il sole, o piove." (MP)
(Ambigua)

"50% potrà nevicare come potrà non nevicare, ciò dipende dalle temperature, quindi c'è all'incirca il 50% di probabilità che nevichi (come successo qualche anno fa)." (MP)
(Definizione classica)

Come per l'evento di QF analizzato al punto precedente, soprattutto al Malpighi, si riscontra un certo numero di risposte generiche del tipo:

"Evento possibile, ma non certo." (MP)

"È possibile, infatti l'anno scorso è successo." (S)

forse dovute alla mal comprensione del testo del quesito.

- (f - QI) Un gatto depone un uovo
  (e - QF) Se adesso lasci andare la penna con cui stai scrivendo, questa finisce sul soffitto della classe

  Osservando la Tabella 4.28, si nota come l'andamento delle risposte della classe del Sabin sia all'incirca lo stesso, con la maggioranza degli studenti che ritiene calcolabile e pari a zero la probabilità dell'evento in questione:

  "0%, impossibile per la forza di gravità." (S)

  Nella classe del Malpighi, invece, aumentano di gran lunga le risposte indicate con "GENERICHE" ovvero quelle che affermano l'impossibilità dell'evento ma senza asserire niente di esplicito nei confronti della sua probabilità: ciò potrebbe stare a significare che, essendo irrealizzabile, è sottointeso che la sua probabilità sia nulla (quindi valutabile) oppure, al contrario, che non abbia senso domandarsi quale sia il suo valore (perciò non valutabile).
  In entrambe le classi, coloro che giudicano non calcolabile questa probabilità non fornisce alcuna giustificazione.
  Va inoltre sottolineata la totale assenza, per l'evento di QF, di approcci di tipo classico.

		MP	S	TOT
CALCOLABILE	QI	56% (14/25)	66.7% (8/12)	59.5%
	QF	40% (10/25)	66.7% (8/12)	48.6%
PROBABILITÀ CLASSICA	QI	8% (2/25)		5.4%
	QF			
NON CALCOLABILE	QI	8% (2/25)	8.3% (1/12)	8.1%
	QF	8% (2/25)	8.3% (1/12)	8.1%
GENERICHE/ AMBIGUE	QI	12% (3/25)	16.7% (2/12)	13.5%
	QF	48% (12/25)	25% (3/12)	40.5%
NO RISPOSTA	QI	16% (4/25)	8.3% (1/12)	13.5%
	QF	4% (1/25)		2.7%

Tabella 4.28: Quesito 4.f (QI), Quesito 3.e (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

- (c - QF) Nell'estate 2019 Fedez e J-Ax duettano in una nuova canzone

  Fedez e J-Ax sono due cantanti italiani che, in passato, hanno duettato spesso insieme (soprattutto nei periodi estivi). All'epoca in cui il questionario è stato somministrato, i due avevano già interrotto da tempo la loro collaborazione per via di un presunto litigio.

  In entrambe le classi, come evinto dalla Tabella 4.29, questo rappresenta uno fra i casi in cui il maggior numero degli studenti ritiene di non poter calcolare la probabilità (solo al Sabin è superato dall'evento (d - QF) relativo alle previsioni meteorologiche, si veda Tabella 4.27). Le ragioni indicate dagli allievi sono diverse, ma le principali riguardano la dipendenza di questo evento da fattori molto variabili come la volontà umana. Si riportano di seguito alcune fra le risposte più significative che giustificano questa presa di posizione:

"È probabile, ma non calcolabile, rispetto agli anni passati è probabile."

	MP (QF)	S (QF)	TOT
CALCOLABILE	12% (3/25)	31.7% (5/12)	21.6%
PROBABILITÀ CLASSICA			
NON CALCOLABILE	60% (15/25)	33.3% (4/12)	51.4%
GENERICHE/ AMBIGUE	16% (4/25)	25% (3/12)	18.9%
NO RISPOSTA	12% (3/25)		8.1%

Tabella 4.29: Quesito 3.c (QF) - distribuzione delle risposte.

(S)

"Non è possibile calcolarne la probabilità perché non segue uno schema ricorrente." (MP)

"Possibile ma non certo e non calcolabile perché oltre allo spazio campionario {sì; no} ci sono alcuni fattori che potrebbero influenzare la loro scelta." (MP)

"Incalcolabile, dipende dal modo di ragionare di Fedez e J-Ax, che per me è incalcolabile." (MP)

"Essendosi Fedez e J-Ax separati come duetto, matematicamente ci sarebbe lo 0% di possibilità ma essendo Fedez e J-Ax due esseri umani in grado di cambiare idea questo dato non si può determinare matematicamente." (MP)

In questa particolare ultima risposta viene messo in evidenza, ancora una volta, il carattere "non matematico" proprio di eventi del genere da cui segue la non determinabilità della rispettiva probabilità (secondo un non meglio specificato "senso matematico"). Per approfondire questo aspetto è stata svolta un'intervista per la quale si rimanda al capitolo successivo.

Non tutti sono informati dell'allontanamento dei due artisti: gli studenti che lo sono, assegnano all'evento una probabilità nulla, mentre gli altri stimano dei valori sulla base di considerazioni di natura prevalentemente statistica:

"È impossibile, hanno litigato: 0%." (S)

"99% perché sono già 2/3 estati che ne fanno uscire una." (S)

"Nelle ultime 3 estati lo hanno fatto ma non è detto che lo facciano di nuovo. Ho stimato un 85% di probabilità che lo rifacciano." (MP)

Il fatto che, nel presente contesto, non venga applicato il modello classico sicuramente è coerente con tutto il questionario finale in cui questa tendenza si è ridotta considerevolmente. D'altra parte stimare in maniera classica la probabilità di un evento del genere poteva risultare molto più innaturale rispetto, per esempio, agli eventi (c) e (e) del questionario iniziale relativi alle partite di calcio: nonostante in tutti questi casi il modello corretto sia quello soggettivista, dai quesiti (c) e (e) di QI risultava più facile ricavare dei numeri da inserire nella formula della probabilità classica (si veda l'alta percentuale di risposte di tal genere per l'evento riguardante la vittoria del Real Madrid a p. 104).

- (f - QF) Un italiano scelto a caso tra quelli che vivono in Italia abita in Lombardia

Con questo evento si intende verificare la corretta applicazione del modello classico ad una situazione più concreta rispetto al solito lancio di un dado. La Tabella 4.29 rivela come la maggioranza degli studenti di entrambi i licei sappia farlo in maniera corretta.

	MP (QF)	S (QF)	TOT
RAGIONAMENTO CORRETTO	84% (21/25)	66.7% (8/12)	78.4%
PROBABILITÀ CLASSICA IMPROPRIA		33.3% (4/12)	10.8%
GENERICHE/ AMBIGUE	12% (3/25)		8.1%
NO RISPOSTA	4% (1/25)		2.7%

Tabella 4.30: Quesito 3.f (QF) - distribuzione delle risposte.

I ragionamenti intrapresi per giungere ad una conclusione accettabile sono diversi. In primo luogo, la maggior parte sostiene che per dare una stima esatta del valore della probabilità occorra calcolare il rapporto fra il numero di residenti in Lombardia e il numero di italiani, applicando in maniera impeccabile la formula della probabilità classica. Un'altra fetta di studenti del Malpighi segue un discorso più qualitativo considerando uno spazio campionario diverso da quello uniforme ovvero l'insieme costituito dalle 20 regioni, rendendosi conto, però, che ogni elemento non "pesa" allo stesso modo in quanto la popolazione regionale è variabile. Questi allievi danno, quindi, una stima della probabilità partendo da $\frac{1}{20}$ per poi aggiustare il tiro facendo delle considerazioni sulla popolosità o sulle dimensioni della Lombardia:

"Poco più di $\frac{1}{20}$ (le regioni in Italia sono 20) perché la Lombardia è una delle più popolate." (MP)

"*7%: maggiore del 5% dato che la Lombardia è grande.*" (MP)

Anche al Sabin alcuni ragazzi considerano lo spazio formato dalle 20 regioni ma trascurano la sua non uniformità applicando, perciò, in maniera scorretta la probabilità classica:

"$\frac{1}{20}$ *perché ci sono 20 regioni.*" (S)

Confronto tra Quesito 7 (QI) e Quesito 4 (QF)

Gli aspetti che riguardano la traduzione nel linguaggio della probabilità di certe informazioni relative ad un esperimento aleatorio, in particolare quando queste hanno valenza nulla, non sono stati affrontati approfonditamente in nessuna delle due classi, in particolare in quella del Malpighi dove se ne è parlato velocemente solamente nella lezione conclusiva commentando il Quesito 7 di QI; al Sabin, invece, il quesito è stato ripreso nell'Attività 4 (p. 70), svolta solamente da una parte della classe.

a) Le risposte corrette a questa semplice domanda aumentano in entrambe le classi: al Malpighi la totalità degli studenti risponde in maniera esatta, al Sabin tutti tranne due che riportano delle probabilità sbagliate ($\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$).

b) Come si può osservare dalla Tabella 4.31 l'andamento delle risposte nei confronti di questo tipo di problema è andato peggiorando in entrambe le classi.
Solo un paio di studenti del Malpighi riconosce che la probabilità di estrarre una pallina bianca non varia dal momento iniziale a quello successivo all'acquisizione dell'informazione:

"50%: dal momento che non sappiamo che colore prenderemo per primo le probabilità sono le seguenti" [e traccia un diagramma ad albero con cui ritrova il valore 50%]. (MP)

"Sì, la probabilità di estrarre una pallina bianca non cambia, è sempre $\frac{1}{2}$, perché al 50% sono 5 bianche e 6 nere e al 50% sono 5 nere e 6 bianche, quindi non cambia niente." (MP)

		MP	S	TOT
INVARIATA	QI	12% (3/25)	25% (3/12)	16.2%
	QF	8% (2/25)		5.4%
DIMINUITA	QI	20% (5/25)	8.3% (1/12)	16.2%
	QF			
DIPENDE	QI	32% (8/25)	41.7% (5/12)	35.1%
	QF	60% (15/25)	33.3% (4/12)	48.6%
NON CALCOLABILE	QI	24% (6/25)	25% (3/12)	24.3%
	QF	32% (8/25)	25% (3/12)	29.7%
AMBIGUE	QI	8% (2/25)		5.4%
	QF		41.7% (5/12)	16.2%
NO RISPOSTA	QI	4% (1/25)		2.7%
	QF			

Tabella 4.31: Quesito 7.b (QI), Quesito 4.b (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

Al Malpighi aumentano sia i ragazzi che sostengono che la probabilità dell'evento dipenda da ciò che è avvenuto in precedenza, ovvero dal colore della pallina estratta e aggiunta, sia coloro che ritengono che non si possa calcolare:

"Se la pallina estratta era nera allora la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{5}{11}$ mentre se la pallina estratta era bianca la probabilità di estrarne una bianca sarà di $\frac{6}{11}$." (MP)

"Palline tot: 10+1=11. Non si può stabilire la probabilità di estrarre una pallina bianca, in quanto non sappiamo di che colore sia la nuova pallina." (MP)

Nella classe del Sabin, invece, crescono i tentativi di risposte quantitative in cui gli allievi cercano di assegnare un unico valore alla probabilità in maniera, però, poco chiara (per questo rientrano in "AMBIGUE"), forse a causa di una poca attenzione prestata al testo del quesito:

" $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$." (S) [Potrebbe rappresentare un tentativo di calcolare la probabilità dell'evento *"Pesco bianca alla prima e alla seconda estrazione"*]

" $\frac{7}{12}$." (S)

Il quesito del questionario finale poteva risultare più controintuitivo di quello iniziale in quanto l'azione di estrazione e aggiunta di una pallina nell'urna poteva apparire più articolata anche se le due situazioni sono assolutamente equivalenti. Inoltre, avrebbe potuto essere risolto, come già sottolineato in precedenza, con un grafo, strumento illustrato ad entrambi i gruppi di studenti (en passant al Malpighi, in maniera più profonda al Sabin dove, più e più volte, è stato utilizzato per risolvere gli esercizi).

Confronto tra Quesito 6 (QI) e Quesito 5 (QF)

Al pari del precedente, anche in questo caso al Malpighi il quesito è stato ripreso solamente nell'ultima parte della lezione conclusiva mentre al Sabin è stato riproposto e discusso nell'Attività 3 (p. 69).

		MP	S	TOT
RISPOSTA CORRETTA	QI	84% (21/25)	58.3% (7/12)	75.7%
	QF	56% (14/25)	75% (9/12)	62.5%
BIAS DI RAPPRESENTATIVITÀ	QI	16% (4/25)	41.7% (5/12)	24.3%
	QF	28% (7/25)		18.9%
AMBIGUE	QI			
	QF	12% (3/25)	25% (3/12)	16.2%
NO RISPOSTA	QI			
	QF	4% (1/25)		2.7%

Tabella 4.32: Quesito 6.b (QI), Quesito 5 (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

Dal punto di vista quantitativo, facendo un paragone fra gli andamenti delle risposte delle due classi riportati in Tabella 4.32, questi cambiano seguendo due trend opposti: al Malpighi diminuisce considerevolmente l'ammontare di chi risponde e argomenta correttamente mentre aumenta chi riporta il bias; al Sabin accresce, al contrario, il numero di ragionamenti adeguati e scompaiono quelli che poggiano sulla misconcezione.
Le ragioni che sostengono il carattere indifferente della scelta sono, come nel caso del quesito di QI, basate sull'uguale probabilità delle quartine:

"Si potrebbe scommettere su una qualsiasi perché i lanci non si influenzano a vicenda quindi sono equiprobabili." (S)

"La probabilità che esca una delle combinazioni citate sopra è sempre $\frac{1}{16}$ *perché la probabilità che esca T o C è uguale ed è* $\frac{1}{2}$*, inoltre il primo evento non influenza il secondo. (È* $\frac{1}{16}$ *se non tengo conto dell'ordine in cui escono.)"* (MP)

Vi sono, poi, delle risposte che condividono lo stesso punto di vista delle precedenti ma che presentano delle giustificazioni più elaborate tuttavia non sempre corrette. In particolare, la prima coppia di risposte seguenti si basa su delle motivazioni che poggiano sulla Legge dei grandi numeri (richiamata, più o meno esplicitamente, anche in altri quesiti). Tale legge rappresenta un argomento delicato e spesso frainteso (come in questo caso) che è stato solo parzialmente toccato durante le lezioni svolte nelle due classi.

"Su soli 4 lanci la legge dei grandi numeri non influisce. Se ne avesse fatti $1 \cdot 10^{10000}$ *lanci punterei su 50% T e 50% C (circa)."* (MP)
[Se non si considerano le singole sequenze ordinate, allora converrebbe puntare su quelle con un egual numero di T e C indipendentemente dai lanci effettuati, che siano 4 o $1 \cdot 10^{10000}$ (coerentemente con la distribuzione binomiale). D'altra parte, anche per un numero elevato di tiri di una moneta, ogni singola successione avrebbe la stessa probabilità di essere ottenuta come risultato.]

"Io non scommetterei sull'uscita, perché la legge empirica del caso si applica a numerosi tentativi, grazie ai quali si eliminano le ≪deviazioni causate dal lancio≫ (forza, angolo, attrito, pressione), perciò dovrebbe essere 50% T e 50% C. Mentre per un numero con un numero così ristretto [di lanci] si può ottenere qualsiasi uscita." (MP)
[Stesse osservazioni di sopra]

"È più probabile (prendendo tutti i quattro lanci insieme e non ogni lancio singolarmente) che esca due volte testa, due volte croce. Anche se in realtà

TTTT ha la stessa probabilità di TCCT, ma quattro volte testa è meno probabile di due volte testa, due volte croce." (MP)

Il bias di rappresentatività emerso nel Quesito 5 di QF ha, tranne per una eccezione, natura diversa rispetto a quello rintracciato nel Quesito 6.b di QI in cui si manifesta nella scelta della sestina di numeri in apparenza "più casuale". Solo un ragazzo si lascia guidare da questo tipo di ragionamento nel decretare la quartina su cui scommettere (in questo caso, quella riportata in C):

"È la probabilità più casuale non possono uscire 4 teste consecutive o quattro croci consecutive e neppure uscire 2 teste e 2 croci. Questa è la più probabile in quanto casuale." (MP)

Per gli altri, la misconcezione si riflette nell'optare per il campione più rappresentativo del carattere dell'esperimento aleatorio ovvero, avendo T e C la stessa probabilità di uscire, quello in cui T e C compaiono lo stesso numero di volte:

"La probabilità che esca testa o croce è uguale ed è del 50%, quindi è più probabile che esca 2 volte croce e due volte testa." (MP)

"Perché è più probabile una via di mezzo." (MP)

Infine, rispetto al quesito iniziale, appaiono delle risposte ambigue (soprattutto fra chi sceglie la casella E) in cui non è del tutto chiaro il pensiero dello studente. Questo può essere in parte dovuto al fatto che, mentre in QI fra le possibili opzioni vi è "Indifferente", nel caso di QF questa è rimpiazzata da "Altro" per influenzare il meno possibile il flusso argomentativo degli studenti:

"È impossibile perché ogni lancio le probabilità che esca testa o croce sono le stesse." (S)

"È casuale (a caso) quindi non si può dire con certezza se uscirà testa (T) o croce (C)." (MP)

Entrambe le affermazioni potrebbero, in realtà, essere riconducibili al fatto che fra le quattro quartine indicate non ve ne sia una di favorita e, perciò, la scommessa potrebbe avvenire in maniera casuale. Allo stesso modo, due allievi scelgono il distrattore B (quello con due teste e due croci) ma le cause non sembrano legate direttamente al bias; nel primo caso forse il ragazzo si rende conto dell'equiprobabilità di tutti i risultati mentre nel secondo, ancora una volta, fa capolino la "legge empirica del caso":

"A livello di principio ogni lancio ha il 50% di ottenere T e C però se dovessi scommettere sceglierei questa." (MP)

"La possibilità che esca T è 50%, come quella di C, e in questo caso sono presenti lo stesso numero di C e T. Questo non esclude però la veridicità delle altre opzioni, ma aumentando il numero di lanci il rapporto T:C si avvicinerà sempre più a $\frac{1}{2}$." (MP)

Confronto tra Quesito 8 (QI) e Quesito 6 (QF)

Dal raffronto degli andamenti dei risultati riportati in Tabella 4.33 risulta che, in entrambe le classi, i ragionamenti corretti siano in aumento da un questionario all'altro. Nella maggior parte dei casi, gli studenti sfruttano un grafo per calcolare la probabilità dell'evento esposto in QF. Va notato che, rispetto ai risultati della verifica somministrata al Sabin, le risposte esatte di questa classe sono in calo (si veda p. 75).

		MP	S	TOT
RAGIONAMENTO CORRETTO	QI	8% (2/25)		5.4%
	QF	40% (10/25)	41.7% (5/12)	40.5%
PROBABILITÀ CLASSICA IMPROPRIA	QI	20% (5/25)	8.3% (1/12)	16.2%
	QF	20% (5/25)		13.5%
ALTRI RAGIONAMENTI	QI	48% (12/25)	58.3% (7/12)	51.3%
	QF	32% (8/25)	58.3% (7/12)	40.5%
GENERICHE/ QUALITATIVE	QI	8% (2/25)	8.3% (1/12)	8.1%
	QF			
AMBIGUE/ NO RISPOSTA	QI	16% (4/25)	25% (3/12)	18.9%
	QF	8% (2/25)		5.4%

Tabella 4.33: Quesito 8 (QI), Quesito 6 (QF) - confronto tra le distribuzioni delle risposte.

Resta, invece, costante il numero di studenti del Malpighi che fanno riferimento alla formulazione classica mostrando il bias di equiprobabilità (al Sabin, in questo caso, scompare essendo già basso in partenza):

"3 possibilità: o muori al primo o sopravvivi ad entrambi o muori al secondo. La probabilità di perire è di $\frac{2}{3}$." (MP)

"A = sopravvivo, B = muoio. AA, AB, B. $\frac{2}{3} = 66,7\%$ perché ci sono 3 sole possibilità. [...] Le altre possibilità (BB, BA) sono scartabili perché non si può morire 2 volte (BB) e non si può morire e poi essere sottoposti ad un intervento (BA)." (MP)

In particolare, quest'ultima risposta rappresenta alla perfezione quanto riportato nella presentazione del quesito: il fatto che uno dei due eventi sia così drastico e irreversibile (la morte) influenza lo spazio campionario consi-

derato; se il contesto fosse stato diverso, la risposta data da questo studente sarebbe stata diversa. Ciò non toglie che sia comunque possibile considerare un insieme degli esiti come quello da lui individuato purché si riconoscano le diverse probabilità dei tre elementi che lo compongono.
Diminuiscono, inoltre, le risposte qualitative e ambigue: tutti tentano di darne una quantitativa. Nel farlo, però, commettono degli errori nella manipolazione delle probabilità oppure applicano dei ragionamenti incompleti. In entrambe le classi si riscontrano affermazioni del tipo:

"La probabilità di morire è $\frac{1}{2}$ in entrambi i casi, quindi la probabilità di morire è del 25% ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$)." (MP)
[In questo modo è come se calcolasse la probabilità di morire in entrambe le operazioni]

Un'altra parte di studenti di entrambe le scuole sostiene che tale probabilità valga $\frac{1}{2}$ ma senza fornire delle motivazioni.

Capitolo 5

Interpretazione dei risultati dei due percorsi e conclusioni

Alla luce dei percorsi svolti, considerando sia i questionari sia le attività, sono emersi dei punti interessanti che verranno discussi in questo capitolo, conducendo un'analisi globale più qualitativa.

Ciò che si può dire fin da subito è che quello della probabilità si è dimostrato essere (com'era, d'altronde, prevedibile) un ambito fertile in cui l'intuizione primaria degli studenti è ricca di immagini e costrutti provenienti tanto dalla conoscenza di senso comune (data dall'esperienza) quanto, in alcuni casi, da una trattazione antecedente dell'argomento (nel ciclo scolastico precedente).

La nozione stessa di probabilità non va ad instaurarsi su un terreno arido, privo di pre-giudizi. Al contrario, si tratta di un termine noto a tutti gli studenti che hanno partecipato all'indagine, di fronte al quale nessuno si dimostra spiazzato, attribuendogli un significato più o meno formale, più o meno vicino all'esperienza quotidiana (come mostrano le risposte al Quesito 3 del primo questionario, si veda p. 96). Tale significato, riflette l'immagine intuitiva che gli studenti posseggono che andrà integrata con tutte le proprietà del caso, anche per mezzo della risoluzione e discussione di eserci-

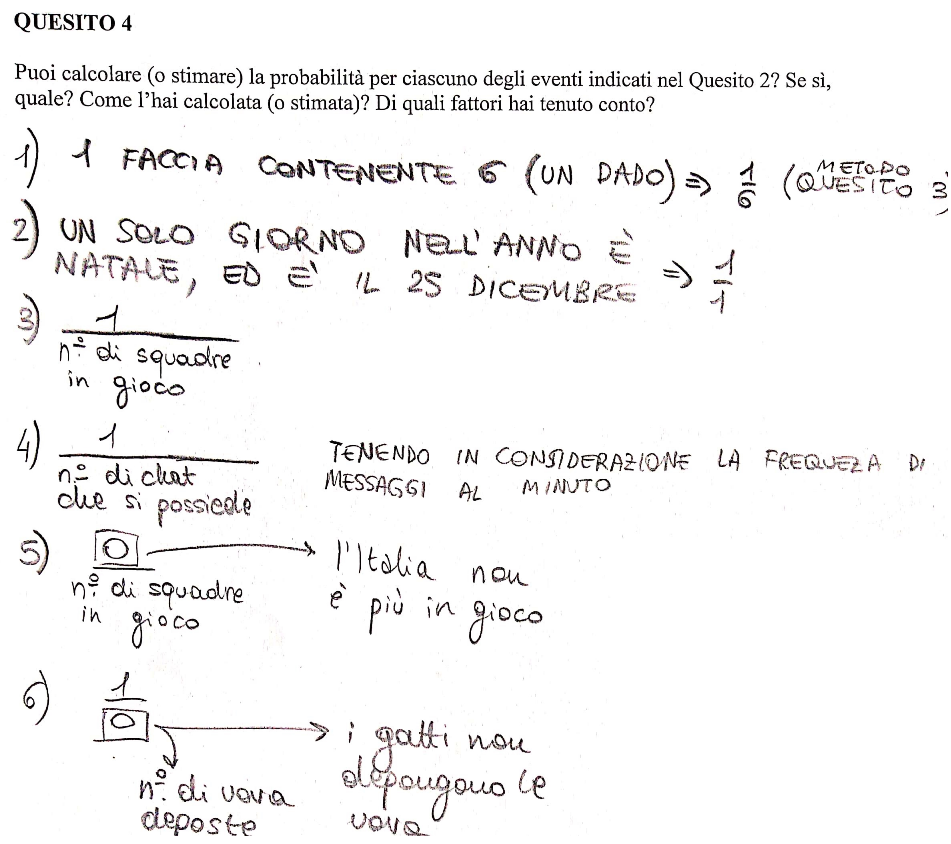
zi e problemi, con l'obiettivo di contribuire alla formazione di un'immagine mentale coerente e consistente, che possa tradursi in corretta intuizione secondaria.
Il questionario realizzato ad alcuni mesi di distanza dalla fine delle attività mostra, in generale, un allontanarsi della concezione di probabilità e del linguaggio con cui gli allievi la descrivono dalla sfera del quotidiano, inquadrandola in un contesto più formale e più preciso, arricchendo la sua definizione con nuove caratteristiche (per esempio il fatto che i valori che può assumere siano compresi tra zero e uno, o che rappresenti una misura o una stima) e associandola, talvolta, ad un calcolo.

Sono emersi, poi, ulteriori aspetti più generali rintracciati in più risposte, che rappresentano uno spunto di riflessione sul lavoro svolto e su come, eventualmente, migliorarlo. Tali punti sono affrontati nelle sezioni seguenti.

5.1 L'uso della probabilità classica

Dal confronto tra i due questionari si evince come sia in calo, in generale, l'utilizzo di ragionamenti di stampo classico nelle situazioni in cui tale modello non è applicabile.
Nonostante siano in leggero aumento le definizioni di probabilità date dai ragazzi (del Malpighi) che si rifanno alla formulazione classica (si veda p. 139), fatto che, come già osservato, può essere imputabile all'impostazione di alcune delle attività svolte, non viene più vista come un mezzo per giustificare e legittimare le valutazioni delle probabilità di certi eventi.
Come esempio emblematico, si riportano le risposte date da uno studente (MP) al Quesito 4 di QI e al Quesito 3 di QF (si vedano, rispettivamente, Figura 5.1 e Figura 5.2): nel primo caso, la probabilità di ogni evento è a prescindere valutata tramite una formula che emula quella per il calcolo in senso classico; nel secondo si osserva come tale tendenza venga meno, riconoscendo i contesti in cui sia ammissibile e sensato ragionare in termini di *casi favorevoli* e *casi possibili*, sebbene negli altri non sia specificato quanto

valga la probabilità.



QUESITO 4

Puoi calcolare (o stimare) la probabilità per ciascuno degli eventi indicati nel Quesito 2? Se sì, quale? Come l'hai calcolata (o stimata)? Di quali fattori hai tenuto conto?

1) 1 FACCIA CONTENENTE 6 (UN DADO) ⇒ $\frac{1}{6}$ (METODO QUESITO 3)

2) UN SOLO GIORNO NELL'ANNO È NATALE, ED È IL 25 DICEMBRE ⇒ $\frac{1}{1}$

3) $\frac{1}{\text{n° di squadre in gioco}}$

4) $\frac{1}{\text{n° di chat che si possiede}}$ TENENDO IN CONSIDERAZIONE LA FREQUEZA DI MESSAGGI AL MINUTO

5) $\frac{\boxed{0}}{\text{n° di squadre in gioco}}$ → l'Italia non è più in gioco

6) $\frac{1}{\boxed{0}}$ → i gatti non depongono le uova; n°. di uova deposte

Figura 5.1: Svolgimento del Quesito 4 (QI) preso da un protocollo.

Le stesse definizioni di probabilità fornite da questo allievo a distanza di tempo sembrano ricalcare tale presa di consapevolezza, restringendo il campo di validità della formula classica e non attribuendole più un carattere universale (come avviene, invece, in QI):

Risposta al Quesito 3 di QI
"La probabilità è il numero di eventi possibili diviso il numero di eventi totali che si possono verificare."

Risposta al Quesito 2 di QF
"In un lancio di dadi, la probabilità è il rapporto fra i casi possibili e i

QUESITO 3

Puoi calcolare (o stimare) la probabilità per ciascuno degli eventi riportati di seguito? Se sì, quale? Come l'hai calcolata (o stimata)? Di quali fattori hai tenuto conto?

a) Pasqua cade di domenica SEMPRE VERO

b) Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni un numero maggiore o uguale di 3

$\frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} \Rightarrow 66{,}\bar{6}\,\%$ $\left(\frac{\text{n° casi poss.}}{\text{n° casi totali}}\right)$

c) Nell'estate 2019 Fedez e J-Ax duettano in una nuova canzone

PROBABILE

d) Nel novembre del 2018 nevica a Bologna

PROBABILE (SE CI SONO LE CIRCOSTANZE CHE LO PERMETTONO)

e) Se adesso lasci andare la penna con cui stai scrivendo, questa finisce sul soffitto della classe

IMPOSSIBILE (CI SONO DELLE FORZE CHE LO IMPEDISCONO)

f) Un italiano scelto a caso tra quelli che vivono in Italia abita in Lombardia

PROBABILE $\left(\frac{\text{n° abitanti in Lombardia}}{\text{n° abitanti italiani in Italia}}\right)$

Figura 5.2: Svolgimento del Quesito 3 (QF) preso da un protocollo.

casi totali."

Quantunque nel questionario finale non dia una descrizione generale della natura della probabilità, riconosce come quella particolare formulazione sia adatta solo a certi casi, tra cui il citato lancio di un dado (regolare).

D'altro canto, considerando l'andamento generale di tutti i questionari, l'uso proprio della definizione classica è confermato nelle situazioni che lo richiedono, anche all'aumentare della difficoltà (si vedano le tabelle a p. 143 e a p. 151).
L'aver omesso qualsiasi definizione (inclusa quella classica) nel caso della classe del Malpighi, e l'aver evitato di usare di continuo la dicitura *casi favorevoli su casi possibili* nello svolgimento degli esercizi e andando a verificare, motivandola, che la condizione di equiprobabilità fosse sempre rispettata nella classe del Sabin, sembra aver agito positivamente nel non fossilizzare nella mente degli studenti l'associazione automatica tra il termine "probabilità" e l'espressione poco sopra citata, sia dal punto di vista della definizione sia dell'utilizzo nella valutazione delle possibilità di realizzazione degli eventi.

5.2 Probabilità non valutabili e distanza percepita tra il modello probabilistico e la realtà

Dalle risposte degli studenti sono emersi diversi ambiti in cui la probabilità viene giudicata non calcolabile, tanto nel questionario iniziale quanto in quello successivo alle lezioni.
L'idea dell'impossibilità di effettuare una stima o una valutazione della probabilità è legata alla natura di certi tipi di eventi, in particolare ai fattori che ne influenzano il verificarsi nel momento in cui coinvolgono decisioni e comportamenti umani o, più genericamente, "troppe variabili" ritenute non

controllabili (come, ad esempio, gli agenti atmosferici).
È il caso degli eventi seguenti, i primi due tratti dal Quesito 4 di QI, gli altri dal Quesito 3 di QF:

1. *Nel 2018 il Real Madrid vince la Champions League*
   Esempio di risposta: *"Non si può calcolare* [la probabilità], *troppe variabili."* (MP)

2. *Ricevi un messaggio su WhatsApp nei prossimi dieci minuti*
   Esempio di risposta: *"Non si può calcolare* [la probabilità] *perché ci sono variabili incalcolabili."* (MP)
   Esempio di risposta: *"L'eventualità di ricevere un messaggio nei prossimi 10 minuti appartiene al caso e se non possiedo altre informazioni non è possibile calcolarne la probabilità."* (MP)

3. *Nell'estate 2019 Fedez e J-Ax duettano in una nuova canzone*
   Esempio di risposta: *"Non è possibile calcolarne la probabilità perché non segue uno schema ricorrente."* (MP)

4. *Nel novembre del 2018 nevica a Bologna*
   Esempio di risposta: *"No,* [non si può calcolare la probabilità] *dipende dal meteo."* (S)

In particolare, secondo uno studente del Malpighi, quelli elencati rappresenterebbero degli "eventi non matematici", per i quali non è possibile dare una *reale* stima della probabilità. Egli vede, cioè, una distinzione tra gli eventi la cui probabilità è valutabile mediante un approccio matematico (qualunque cosa questo voglia dire) e quelli in cui ciò non è attuabile e pertanto giudica incalcolabile la loro probabilità.
Ecco come lo studente risponde ai quesiti che coinvolgono i suddetti eventi:

1. *Nel 2018 il Real Madrid vince la Champions League*
   Risposta: *"1 su 4* ***se lo sport fosse «matematico»*** *ma visto che dipende da prestazioni umane questa probabilità non si può calcolare."*

2. *Ricevi un messaggio su WhatsApp nei prossimi dieci minuti*
   Risposta: *"Imprevedibile. Non posso calcolarne una probabilità precisa."*

3. *Nell'estate 2019 Fedez e J-Ax duettano in una nuova canzone*
   Risposta: *"Essendosi Fedez e J-Ax separati come duetto, **matematicamente ci sarebbe lo 0% di possibilità** ma essendo Fedez e J-Ax due esseri umani in grado di cambiare idea questo dato non si può determinare matematicamente."*

4. *Nel novembre del 2018 nevica a Bologna*
   Risposta: *"**Statisticamente le probabilità si potrebbero determinare**, ma essendo il clima imprevedibile a lungo termine questo evento risulta imprevedibile."*

Mantiene questa sua visione anche nelle risposte al Quesito 5 di QI, nel valutare l'influenza che le informazioni fornite abbiano sulla probabilità degli eventi 1 e 2:

1. *INFORMAZIONE 1: Cristiano Ronaldo, il giocatore più forte della squadra, si infortuna e non potrà giocare fino a fine stagione*
   Risposta: *"Questo dato **non influenza ≪matematicamente≫ la probabilità**. Il sostituto di Ronaldo potrebbe infatti giocare meglio o peggio di lui e far vincere (o perdere) la Champions League al Real."*

2. *INFORMAZIONE 1: Nelle ultime 24 ore hai ricevuto 5 messaggi*
   Risposta: *"Non modifica* [la risposta data al Quesito 4] *infatti i messaggi dipendono dalle altre persone ed essendo le persone imprevedibili mi potrebbe scrivere qualcuno **anche se ≪matematicamente≫ non ho molte probabilità** che mi scriva."*

   INFORMAZIONE 2: Mediamente ricevi 30 messaggi all'ora
   Risposta: *" **≪Matematicamente≫ avrei molte probabilità** ma potrebbe comunque succedere che nessuno mi scriva visto che **lo scrivere, dipendendo da una persona, non è una cosa matematica**."*

È come se per questo allievo ci fosse una discrepanza sostanziale tra il modello probabilistico (ritenuto intrinsecamente matematico), e le previsioni che esso fornisce, e ciò che accade nella realtà. Tale lontananza si manifesta in quegli eventi più *reali* e meno "matematicizzati" che dipendono da fattori assolutamente imprevedibili: secondo lui, se guardassimo all'evento con le sole lenti della matematica, sarebbe possibile attribuirgli una probabilità. Tuttavia questa operazione risulterebbe eccessivamente riduttiva e semplificatrice venendo a trascurare delle proprietà caratterizzanti dell'evento (le "variabili imprevedibili") che, *nella realtà*, rendono totalmente impredicibile (nel senso che non è possibile attribuirgli una probabilità) l'esito dell'evento. Per indagare meglio il suo pensiero, è stata svolta un'intervista della quale si parlerà nella sezione successiva.

Questa sensazione nei confronti della probabilità come limitata ad un ambito astratto, eccessivamente semplificato, che a volte si rivela inadatta ad offrire una rappresentazione del mondo reale, si ritrova anche nelle risposte di altri studenti, all'interno del questionario iniziale. Questi ragazzi sembrano, però, assumere una posizione opposta rispetto al loro compagno, negando che la probabilità degli eventi 1 e 2 possa essere calcolata "dal punto di vista matematico":

> Risposta al Quesito 5.c (QI):
> [Lo studente aveva risposto che non si potesse valutare la probabilità che il Real Madrid vincesse la Champions League]
>
> INFORMAZIONE 1 e 2: *"Si tratta di probabilità non calcolabili matematicamente perché influenzabili da infiniti fattori."* (MG)

> Risposta al Quesito 5.b (QI):
> [Lo studente aveva risposto che non si potesse valutare la probabilità di ricevere un messaggio nei prossimi 10 minuti]

INFORMAZIONE 1: *"Diminuisce la probabilità ma non a fini matematici."* (S)

INFORMAZIONE 2: *"Aumenta la probabilità ma non a fini matematici."*(S)

Questo genere di affermazioni potrebbe derivare da un tentativo di accordare quello che suggerisce l'intuizione (ovvero che l'acquisizione di una certa informazione favorisca o, al contrario, sfavorisca la realizzazione di un evento) con l'incapacità di dare una stima della probabilità in maniera formale o, detto con le loro parole, "matematica" (per esempio, possiamo immaginare, mediante una formula come quella della probabilità classica). Il risultato sembra quello di tenere separata la dimensione matematica (in cui la probabilità di questi eventi risulta non calcolabile ed eventuali informazioni aggiuntive non sortiscono alcun effetto) da quella reale (in cui, intuitivamente, sembra possibile dare una stima delle possibilità del verificarsi di certe asserzioni suscettibile dell'influenza di informazioni).

Alla base di queste considerazioni sulla valutabilità o meno della probabilità potrebbe esserci una misconcezione sul suo ruolo.
In entrambe le classi la probabilità è stata introdotta come quel mezzo-guida nelle situazioni di incertezza che fornisce un'indicazione, basata sullo stato d'informazione attuale, sul grado di certezza di una affermazione. Sfruttando le potenzialità di questo strumento, non si ottiene, tuttavia, una previsione sull'esito di un evento (nel senso di pronostico di *cosa* accadrà - o è accaduto -) ma una valutazione del grado di fiducia da riporre nel suo avverarsi (in altre parole, quante sono le possibilità che si verifichi - o si sia verificato -).
Questa differenza, che potrebbe apparire ovvia e adeguatamente compresa dagli studenti, a volte genera confusione e viene facilmente persa di vista in certi contesti, soprattutto se lontani da quelli solitamente affrontati e trattabili dal punto di vista classico (lancio di una moneta, estrazioni da un'urna, eccetera).

È vero che una persona in qualunque istante potrebbe decidere di scrivere un messaggio, è vero che un giocatore di calcio potrebbe avere la giornata storta e che due cantanti potrebbero cambiare idea sul duettare insieme da un momento all'altro, ed è altrettanto vero che questi sono aspetti assolutamente fortuiti, ma la loro previsione non spetta alla probabilità.
In tutti gli esperimenti aleatori concorrono degli agenti imprevedibili anche, come alcuni ragazzi hanno osservato, nel lancio di un dado (si veda p. 101): la distanza del punto di lancio dal piano, la forza con cui questo viene tirato e quant'altro. Tuttavia, a meno di non essere "il Superuomo di Laplace" ([4, p. 261]), non siamo in grado di conoscere e prevedere la loro influenza sul risultato dell'esperimento, ma ciò non impedisce la valutazione della probabilità di un possibile esito (ad esempio, l'uscita della faccia numero due) la quale si basa, invece, su delle circostanze note come, per esempio, la simmetria del solido.
Allo stesso modo, il fatto che in qualunque istante un individuo possa decidere di inviare un messaggio ad un altro, non impedisce la stima delle possibilità di riceverne uno entro un dato lasso di tempo: la probabilità non assicura che ciò avverrà ma, sfruttando determinate informazioni pertinenti come ad esempio la conoscenza della media di messaggi ricevuti o della fascia oraria con più alta frequenza, offre una stima delle possibilità che ciò avvenga.
È proprio in questo che consiste la costruzione di un modello probabilistico ossia, citando Einstein, nella "astrazione selettiva della realtà", mediante la selezione delle "circostanze rilevanti" [4] che supportano la quantificazione delle possibilità che un evento accada. Tale modello è soggettivo, nel senso che non è proprio di un fenomeno (di un esperimento aleatorio) ma, al contrario, è costruito da ogni soggetto (coerente e razionale) che si approssimi ad osservare tale fenomeno basandosi sul suo stato di conoscenze ad esso relative, ed è mutevole secondo l'affluenza di nuove informazioni significative.

Va notato, inoltre, che c'è un altro contesto in cui un considerevole numero di studenti ritiene non calcolabile una probabilità. È il caso del Quesito

7 (QI) e del Quesito 4 (QF), in cui l'assenza di informazioni su ciò che è avvenuto in precedenza viene interpretato come movente dell'impossibilità di esprimere una valutazione di probabilità di un evento cronologicamente successivo. Non si tratta quindi dell'influenza di "variabili non controllabili" (la situazione descritta è, infatti, abbastanza standard: estrazioni di palline da un'urna), bensì di un ragionamento in termini di "prima-dopo" che viene assimilato ad una visione deterministica governata dalla logica di "causa-effetto", più familiare agli studenti (impostazione ritrovata anche in un'intervista che verrà esposta nella sezione seguente). Secondo quest'ottica, il non essere a conoscenza di ciò che è accaduto in precedenza corrisponderebbe all'ignoranza sulle cause scatenanti il fenomeno che comporterebbe l'incapacità di determinarne l'evoluzione e, *quindi*, la probabilità dei possibili scenari che ne potrebbero derivare.
Tuttavia la probabilità, come si è già accennato nel Capitolo 1, non obbedisce a tali leggi né risente dell'ordine temporale degli eventi.

5.3 Ulteriori considerazioni

Oltre alla già conclamata difficoltà nella formalizzazione di certi esperimenti aleatori (riscontrata in maniera particolare nella scrittura dello spazio campionario relativo all'attività 3 del Malpighi e all'attività 1 del Sabin, per le quali si rimanda alle pagine 51 e 66) si rileva una certa difficoltà nel maneggiare le quantità che rappresentano delle probabilità. Nello specifico, nella teoria della probabilità avvengono almeno tre passaggi fra altrettanti tipi di linguaggi: a partire dalle parole (più o meno colloquiali) con cui è descritto il problema va effettuata un'astrazione per rappresentare gli elementi d'interesse secondo il linguaggio della teoria degli insiemi; a questo punto, una volta individuati gli insiemi corrispondenti agli eventi di cui sono fornite le probabilità, su di queste si va ad agire mediante le operazioni aritmetiche per trovare le probabilità di eventi più complessi. In particolare, in quest'ultimo passo si riscontrano le maggiori problematicità: la traduzione di un'azione su certi eventi (ad esempio l'unione o l'intersezione) in un'operazione aritmetica fra le rispettive probabilità non sembra appartenere direttamente all'intuizione primaria (lo conferma il Quesito 8 di QI, si veda p. 85). Anzi, il controllo sulle operazioni fra probabilità risulta laborioso e non spontaneo anche dopo aver affrontato l'argomento (si vedano i risultati al Quesito 6 QF a p. 160).

Si è visto, inoltre, che una fonte di misconcezioni è data dalla mal interpretazione della Legge dei grandi numeri. Come già sottolineato precedentemente, tale tema non è stato particolarmente approfondito durante le ore di lezione tenute nelle due classi ma, dalle risposte, è evidente che faccia parte del bagaglio culturale di più di un ragazzo che, talvolta, ne fa uso sbagliato per indirizzare le sue scelte (si vedano, ad esempio, le due risposte a p. 156). Meriterebbe, pertanto, una trattazione più precisa e mirata (sebbene alcune nozioni di matematica più avanzata, come quella di limite, potrebbero non essere ancora state affrontate dagli studenti) in modo da chiarirne il significato (perlomeno in maniera qualitativa ed intuitiva); il non parlarne potrebbe favorire la sua sedimentazione all'interno di un modello probabilistico che risulterebbe sbagliato e fuorviante.

5.4 Le interviste

Allo scopo di indagare ulteriormente gli aspetti legati alla non calcolabilità della probabilità di alcuni eventi e alla distanza che a volte sembra emergere tra le previsioni fornite dalla matematica e l'andamento di taluni fenomeni reali sono state svolte tre interviste ad altrettanti studenti del Liceo Scientifico Malpighi, selezionati per la presenza di questi fattori nelle loro risposte ai questionari. Queste si sono tenute a circa un mese dalla somministrazione dell'ultimo questionario.

Ogni intervista è semi-strutturata/libera, a carattere informale: a partire dalle risposte di interesse, sono state trascritte delle domande che fungono

da linee guida nella conversazione con lo studente, adattabili a seconda dello sviluppo del discorso. L'obiettivo è quello di far emergere le motivazioni che sostengono le affermazioni dell'allievo pertanto si è cercato di formulare domande per quanto possibile generiche, facendo attenzione a non suggerire alcuna linea di pensiero favorendo, piuttosto, l'espressione spontanea delle sue idee.
Le interviste sono singole, a tu per tu con lo studente, ed hanno una durata che va dai sette ai nove minuti ciascuna. Prima di iniziare, all'allievo è spiegato il motivo di tale incontro ovvero avere delle delucidazioni riguardo ad alcune risposte prese dai questionari. Il dialogo è registrato, e di questo i ragazzi sono consapevoli, specificando che non ha alcuna valenza valutativa. Il punto di partenza è rappresentato sempre dalle reazioni ai quesiti dei questionari che vengono riprese e mostrate direttamente dai manoscritti dei ragazzi.

Il primo ad essere intervistato è un ragazzo che nel rispondere al punto (b) del Quesito 6 di QI mostra il bias di rappresentatività scegliendo la sestina meno regolare, pur riconoscendo l'equiprobabilità delle sequenze di numeri proposte:

"MOOOLTO MEGLIO GIOCARE NUMERI SEPARATI, perché è RARO che escano 6 numeri consecutivi, la probabilità è la stessa, però è sconsigliabile."

Questo fatto sembrava sintomatico di un presunto discostamento tra modello e realtà e, quindi, di un contrasto tra l'intuizione secondaria (coerente con la teoria della probabilità) e l'intuizione primaria (ancorata all'esperienza empirica). Questo conflitto cognitivo è stato confermato dall'intervista in cui è evidente come il ragazzo non riesca ad abbandonare la sua convinzione puramente intuitiva, nonostante sia pienamente consapevole dei dettami della probabilità.

Di seguito è riportata buona parte della conversazione avvenuta con lo studente, che verrà indicato con la sigla "MP1"; "A" rappresenta invece l'intervistatore.

[Dopo avergli mostrato la sua risposta sopra riportata]

MP1: *"Cioè io consideravo che la probabilità è uguale..."*

A: *"Ma che probabilità è uguale?"*

MP1: *"Che esca un numero sui 100..."*

A: *"90 sono nel Lotto, da 1 a 90."*

MP1: ***"Però mi sembrava più sensato scegliere non numeri consecutivi...*** *"*

A: *"Ok..."*

MP1: *"...Ma numeri almeno...con un certo distacco fra loro. Anche 2 e 5 va benissimo, però 1, 2, 3, 4, 5, 6 pensavo fossero..."*

A: *"Perché dici «sensato»? Prova a spiegarmi...tranquillo, a parole tue."*

MP1 esita

A: *"Cioè tu mi hai detto, qui nella tua risposta mi hai detto «MOOOLTO MEGLIO GIOCARE NUMERI SEPARATI», come mi stai dicendo adesso, «perché è RARO che escano 6 numeri consecutivi, la probabilità è la stessa però è sconsigliabile». Allora intanto con «la probabilità è la stessa» significa la probabilità di ogni numero di uscire?"*

MP1: *"Sì sì!"*

A: *"Ok. E sulla base di cosa tu mi dici che è raro? Perché è raro?"*

MP1: *"Cioè se io pensassi ad esempio a tutte le puntate che ci sono state ad esempio di giochi in TV e se pensassi alle volte in cui sono usciti numeri consecutivi, penso non ci siano mai state..."*

A: *"Quindi tu mi stai dicendo: la probabilità dei numeri di essere estratti è la stessa..."*

MP1: *"Sì, cioè* ***matematicamente è la stessa****."*

A: *"Matematicamente...però..."*

MP1: *"È molto raro che...cioè,* ***quasi impossibile che escano dei numeri consecutivi****."*

A: *"E questo fatto di essere raro, tu lo colleghi in qualche modo alla probabilità oppure è una cosa altra dalla probabilità?"*

MP1: *"No, magari è un fattore che non sappiamo però calcolare, forse."*

[...]

A: *"Per esempio, quale potrebbe essere?"*

MP1: *"...Perché...allora...se dovessero uscire numeri consecutivi..."*

A: *"Cioè a priori, se ogni numero ha la stessa probabilità di uscire..."*

MP1: *"...Sarebbe giusto che...però fra così tanti numeri...cioè, mettiamo che io tiro fuori l'1, mi rimangono 89 numeri."*

A: *"89, sì."*

MP1: *"La probabilità che esca il 2 è una su 89."*

A: *"Sì."*

MP1: *"E allo stesso modo...però invece la probabilità che non esca il 2 è 88 su 89...e anche la probabilità che non esca uno di questi 2, 3, 4, 5, 6 ma che invece escano tutti gli altri numeri a parte l'uno e questi è maggiore, quindi magari è per questo."*

A: *"Però allo stesso modo non potrei ragionare in questa secondo te? Cioè una volta che ho pescato il 2, la probabilità che mi esca proprio il 5..."*

MP1: *"Però che esca proprio il consecutivo oppure uno molto vicino...sì...sì giustamente...giustamente in realtà è uguale però...mmm..."*

A: *"Però non ti convince..."*

MP1: *"Cioè, se mi dicessero gioca o i numeri in fila o i numeri separati, io li giocherei separati."*

A: *"Ok, pur ammettendo che la probabilità è la stessa..."*

MP1: *"Sì, sì."*

A: *"Però..."*

MP1: *"Cioè secondo me ha più senso giocarli separati..."*

A: *"Per questo fatto qua che tu mi dici?"*

MP1: *"Sì sì!"*

A: *"E quindi...non so se...non ti suona un po' strano che la probabilità da una parte ti dice che..."*

MP1: *"Sì sì!"*

A: *"Teoricamente queste due cose dovrebbero avere la stessa probabilità però, se noi non consideriamo questo tipo di probabilità ma piuttosto una cosa empirica magari, ok, come mi stai dicendo tu, questa esce più raramente di questa."*

MP1: *"Sì."*

A: *"E allora quale consideriamo come probabilità di uscita di una sestina? Quella che ci dice la matematica o quella che..."*

MP1: *"No, nel dubbio quella che ci dice la matematica secondo me."*

A: *"Però non sei convinto."*

MP1: *"Cioè non...magari* ***non la vedo proprio direttamente riflessa sulla realtà****...cioè giustamente..."*

[...]

A: *"Prova a spiegarmi perché."*

MP1: *"Cioè proprio...no, sì, è solo legato all'esperienza, cioè...* ***non penserei mai che potrebbero uscire sei numeri consecutivi ma proprio penserei che sia...cioè...ma neanche più probabile,***

> ***che sia più logico, anche, che escano numeri non, appunto, non consecutivi...cioè non saprei come spiegarlo veramente****. Sì forse è un fatto psicologico."*

In questo caso sembra prevalere l'intuizione primaria basata, come riconosce lo studente stesso, sull'esperienza, che gli impedisce di credere anche solo possibile l'estrazione di sei numeri consecutivi.

Il secondo ad essere intervistato è lo studente di cui si è parlato nella sezione precedente il quale distingueva fra "eventi matematici" e non. Il colloquio è proprio indirizzato a scoprire qualcosa di più riguardo a questa differenziazione. Il ragazzo è contrassegnato con "MP2".

> [Giustifica la risposta 1, si veda p. 166]
>
> MP2: *"**Quindi avevo detto ≪matematico≫ perché se fosse una cosa matematica lo sport e non si basasse su prestazioni, potremmo dire uno su quattro e cioè una squadra vince su quattro totali. Però visto che lo sport è per l'appunto una cosa dove valgono prestazioni umane, di giocatori che un giorno possono essere infortunati, un giorno possono essere in forma (se esiste veramente l'essere in forma)...per l'appunto si basa su prestazioni umane, quindi non si può dire veramente, perché magari il Real Madrid ha giocatori più forti e quindi è più probabile, quindi avevo detto che uno su quattro matematicamente ma, nel pratico, è difficile stabilirlo veramente ed è anche un po' il bello dello sport in sé.**"*

In questo caso riconosce, giustamente, la non applicabilità della definizione classica in quanto il valore delle quattro squadre che si disputeranno le partite a venire non è lo stesso. Tale valore dipende da prestazioni umane, difficilmente quantificabili, da ciò: "lo sport non è una cosa matematica". Lo stesso vale per l'evento 3 (si veda ancora p. 166).

[Parlando della possibilità che Fedez e J-Ax cantino nuovamente insieme]

MP2: *"Sì sì perché, per l'appunto, nel pratico sarebbe impossibile perché loro due non fanno più canzoni insieme ma visto che sono esseri umani quindi* ***non è un evento matematico quello di cambiare idea...può variare anche a caso ma non secondo un caso logico, ma secondo una persona e potrebbe esserci lo stesso una possibilità che in futuro succeda questo evento****."*

A: *"Ok. Quindi se dovessi tipo sostituire «matematico», «matematicamente» con un sinonimo, cosa diresti?"*

MP2: *"Se fosse un evento aleatorio..."*

A: *"Anche a parole tue eh, magari non solo una parola...per esempio qui: «se lo sport fosse...»"*

MP2: *"Se fosse preciso e il valore delle squadre determinato, se fosse un evento determinato la vittoria in Champions League, allora sarebbe 1 su 4."*

A: *"E quindi, tu qui mi dici che «matematicamente» non posso determinarlo o calcolarlo. Invece se ci mettessimo «fuori dalla matematica»? Cioè «non matematicamente»? Ci sarebbe un modo di stimare o di attribuire una probabilità a questi due eventi secondo te?"*

MP2: *"Fuori dalla matematica, nel senso..."*

A: *"Cioè se tipo non ti stessi facendo un questionario sulla probabilità ma noi stessimo semplicemente parlando e io ti dico «ma secondo te la prossima estate Fedez e J-Ax fanno una nuova canzone?»"*

MP2: *"Vabbè, potrei dire «ho sentito voci» oppure puoi dire «no, hanno litigato così male che secondo me non faranno più una canzone insieme» oppure anche sul Real Madrid potresti dire «il Real Madrid l'ha già vinta gli ultimi tre anni quindi teoricamente è più probabile che la vinca di nuovo»."*

A: *"Quindi in un certo senso tu comunque gli stai attribuendo..."*

MP2: *"Una probabilità maggiore."*

[...]

A: *"E quella che tu invece stimi, dai, al di fuori della matematica è collegata in qualche modo a questa oppure...?"*

MP2: *"In un certo senso si basa su prestazioni precedenti...cioè è quasi come tirare un dado truccato, un po' truccato, e se vedi che le ultime tre volte esce sei e sai che quel dado non è preciso, potresti ipotizzare che esca di nuovo sei in quel dado. Però comunque* ***non si sa come è truccato il dado dello sport****, non so se si capisce."*

A: *"Ok...quindi tu mi dici che nell'ambito matematico io non posso calcolarla questa probabilità?"*

MP2: *"Cioè secondo me no perché, per l'appunto, magari dopodomani si rompono tre giocatori del Real Madrid e dici: allora c'è meno probabilità.* ***Quindi è un evento che varia sia di giorno in giorno...e comunque dipende dalla giornata, cioè dipende troppo da prestazioni al momento...che dipendono da persone****. Quindi secondo me matematicamente è difficile fare una stima precisa di quante possibilità ci siano."*

Sembra quindi che ciò che contraddistingue un "evento matematico" da uno "non matematico" sia il fatto che la sua probabilità abbia un valore fissato, "determinato" per usare le sue parole, non suscettibile a variazioni soprattutto se determinate dall'arbitrio umano. Lo studente non vede un modo per attribuire una probabilità di vittoria ad ogni squadra semifinalista, anche se a livello meno formale riconosce che vi siano squadre favorite basandosi, per esempio, sui risultati passati. Ciò che si nasconde dietro il conflitto tra quello che suggerirebbe l'intuizione primaria, ovvero "il Real Madrid è più portato a vincere la competizione" e "i due cantanti hanno litigato ed è difficile che canteranno insieme", e lo sbarramento imposto dalla separazione tra ambiti matematici e non, può essere dato innanzitutto da una visione scolarizzata della probabilità, limitata all'ambito di esercizi su dadi

e urne (nonostante sia evidente che il ragazzo non vi abbia ragionato solo superficialmente, anzi, e nonostante durante le attività si sia parlato anche di come attribuire la probabilità ad eventi del genere). In secondo luogo, in questa sua visione di probabilità, essa risulta non soggettiva, dipendente dall'osservatore e dalle informazioni di cui è in possesso, ma assoluta, ancorata all'evento e fissa.
Infine, le argomentazioni a sostegno della non influenza dell'informazione relativa all'infortunio di Cristiano Ronaldo sulla probabilità di vittoria della sua squadra danno l'impressione di poggiare sul fraintendimento del ruolo della probabilità di cui si è parlato nella sezione precedente. Il fatto che il giocatore migliore del Real Madrid non partecipi alle partite del suo team di certo non ne impedisce la vittoria ma è ragionevole aspettarsi che la probabilità che ciò avvenga ne risulti danneggiata. A maggior ragione se il giocatore viene sostituito da uno molto scarso. Tuttavia lo studente sostiene che la probabilità non risenta di queste informazioni poiché anche un giocatore incapace *"potrebbe in qualche modo riuscire far vincere il Real"*: la probabilità, come già affermato, non ha il compito di predire *cosa* accadrà, ma di assegnare un valore alle possibilità che ciò accada. E il fatto che la probabilità che il Real vinca la Champions diminuisca in seguito all'infortunio di Ronaldo non sarebbe in contraddizione con l'effettiva vittoria della squadra, che potrebbe comunque avvenire.

> [Dopo avergli fatto leggere la sua risposta relativa all'azione dell'informazione di cui si parlava poco sopra]
>
> MP2: *"Eh vuol dire che...siccome anche Ronaldo che è il più forte della squadra può giocare un giorno male, magari il sostituto quel giorno giocherebbe meglio e siccome è una cosa che dipende da prestazioni dei giocatori stessi, non possiamo determinare...certo, Cristiano Ronaldo è il più forte della squadra ma quel giorno il giocatore [sostituto] potrebbe essere, quello che si dice, ≪in giornata≫ e quindi farla vincere lui la Champions League al Real Madrid."*

A: *"E se invece l'informazione fosse stata ≪non gioca [Cristiano Ronaldo] e viene rimpiazzato dal giocatore più scarso in assoluto perché gli restava solo quello≫. In questo caso influenzerebbe, secondo te?"*

MP2: *"Certo, perché sarebbe comunque un valore perso per il Real Madrid però...secondo me cambia ma comunque anche il giocatore più scarso, anche perché si basa anche un po' sulla fortuna, potrebbe in un qualche modo riuscire a far vincere il Real."*

A: *"Quindi se tipo, non lo so se tu sei tifoso o segui un po' il calcio, metti che la tua squadra preferita, quella che ti piace un po' di più, si infortuna quello più bravo e ne mettono dentro uno proprio che non ha mai visto una palla in vita sua...tu sei comunque tranquillo perché sai che tanto potrebbe giocare bene, potrebbe giocare male, la probabilità di vittoria non cambierebbe?"*

MP2: *"No, certo, perché comunque in un certo senso cambia ma perché, per l'appunto,* ***toglie valore alla squadra*** *quindi è come se togliessi una probabilità di fare goal alla squadra ma aggiungi un'altra persona che, siccome il calcio si basa anche su eventi singoli che dipendono da come uno tira la palla, così, magari ha la botta di fortuna e fa il tiro perfetto e fa goal e quindi non possiamo saperlo effettivamente. Certo è più probabile che sia Ronaldo a fare il goal bellissimo, da fuori, così, ma anche quello scarso ≪in giornata≫ potrebbe fare un tiro perfetto e far vincere la squadra."*

Anche nel caso del terzo e ultimo allievo intervistato si palesa la confusione sulla funzione della probabilità.
Con lui la discussione verte su ciò che rende non calcolabile la probabilità di un evento. In particolare aveva dato le risposte seguenti agli eventi 1, 3 e 4 (si veda p. 166):

1. *"Non me ne intendo di calcio quindi non ne ho idea."*

3. *"Incalcolabile, dipende dal modo di ragionare di Fedez e J-Ax, che per me è incalcolabile."*

4. *"Incalcolabile, non sono un esperto di meteorologia, quindi non so dire se nevicherà."*

Il ragazzo, che sarà indicato con "MP3", riconosce apertamente come la valutazione di una probabilità dipenda dalle informazioni di cui egli è in possesso, e attribuisce all'assenza di informazioni l'impossibilità di esprimerne una valutazione. Ciò che secondo lui sarebbe necessario conoscere per calcolare la probabilità di un evento è rappresentato dalle cause che scatenano l'evento. Ed è nell'argomentare questo suo pensiero che è rintracciabile la misconcezione relativa al funzionamento della probabilità.

> [Gli viene chiesto se secondo lui ci sono eventi di cui non è possibile calcolare o stimare la probabilità]
>
> MP3: *"Non so, **qualcosa su cui non si ha una base, cioè nessun dato**. Non si può calcolare. Per esempio...il giorno in cui per esempio c'è...se, adesso, è scritto per esempio nel tuo destino che un giorno... per esempio vieni investito da un camion, non c'è modo di sapere quando succederà anche se sai che verrai investito..."*
>
> [Gli viene mostrata la risposta 3]
>
> MP3: *"Cioè sì perché anche se, per esempio tipo per venti anni di fila fanno sempre una canzone d'estate, **non posso sapere se succederà di nuovo perché comunque ogni volta che fanno una canzone è un evento completamente diverso da quello prima**."*
>
> A: *"Quindi, in un certo senso, non possiamo aspettarci niente? Non possiamo fare nessun tipo di previsione?"*
>
> MP3: *"Cioè forse possiamo dire che, non so, ogni anno è successo quindi forse succederà anche quest'anno però...bisognerebbe guardare quest'anno singolarmente."*
>
> [Gli viene mostrata la risposta 4]

MP3: *"Cioè il fatto che nevichi, per esempio, questo qui già è calcolabile, non so, guardando le nuvole. Intendo io personalmente non posso calcolarlo perché guardando il cielo, le nuvole non capisco."*

A: *"In quali condizioni invece, secondo te, si potrebbe calcolare questa probabilità (che nevichi, per esempio, domani)?"*

MP3: *"Per esempio se, non so, abito tipo in Alaska e nevica ogni giorno...sempre come il caso di J-Ax, alla fine non è veramente...cioè posso dire che secondo me domani nevica, però non so,* ***la probabilità la posso calcolare solamente guardando ciò che causa il nevicare****. Cioè intendo dire, posso pensare che secondo me nevichi perché ha nevicato sempre e, diciamo, è logico pensare che nevichi anche il giorno dopo, però per avere una probabilità devo calcolare la...cioè* ***devo guardare ciò da cui nasce il nevicare e vedere se ci sono fattori propizi al nevicare****."*

[...]

A: *"Quindi, secondo te (ti rifaccio la domanda), ci sono eventi di cui non è possibile calcolare la probabilità, o...?"*

MP3: *"Cioè sì, appunto degli eventi di cui non conosci informazioni."*

[...]

MP3: *"****Cioè, intendo, se io conoscessi tutto lo stato psichico, fisico dei giocatori, sapessi il campo in cui si gioca, il numero di tifosi e cosa fanno i tifosi, so il tempo, come è fatta la palla, come è fatto il campo, cioè tutto, penso che sarebbe calcolabile chi vince...****"*

La sua è una visione alquanto deterministica in cui sembra confondere la cessazione dell'incertezza (dovuta alla conoscenza di tutte le "condizioni iniziali" e alla determinazione dell'esito dell'evento che, a quel punto, diventerebbe certo o impossibile) con la valutazione della probabilità la quale però, lo ripetiamo nuovamente, si può servire di tali informazioni non per

determinare o *calcolare* l'esito di un esperimento aleatorio, ma per stimare le possibilità che le opzioni che si possono presentare si avverino.
Per questo studente, comunque, non sembra esserci conflitto o contraddizione, e dimostra di avere buona padronanza del modello probabilistico, ad ulteriore conferma di quanto insidioso e sottile possa essere questo equivoco.

5.5 Conclusioni

Concludendo la stesura di questo lavoro di tesi, mi trovo a pensare a quanto ci sarebbe da dire sulla probabilità. Si tratta di un ambito talmente vasto, che comprende talmente tanti aspetti non solo prettamente relativi alla matematica, che mi risulta evidente come lo spazio che la trattazione di questa disciplina trova all'interno della programmazione didattica non sia sufficiente, anzi forse potrebbe risultare addirittura riduttivo. Nelle poche ore a disposizione fra le mura scolastiche, trovo che l'obiettivo primario sia quello di favorire la costruzione di un corretto modello di probabilità e l'educazione di una appropriata intuizione secondaria.

La probabilità è un ambito molto delicato, che nasconde numerose insidie proprio a causa della forte componente intuitiva presente nei suoi confronti. Tale componente non va ignorata, in quanto, come si è visto, può portare alla stratificazione di misconcezioni fuorvianti che ostacolano la formazione di un giusto modello. A combattere contro questa evenienza, gli insegnanti non sono, tuttavia, soli e privi di punti di riferimento: a fare da bussola ci sono le parole degli studenti che, se ascoltate, possono indirizzare la progettazione didattica nella direzione dell'eliminazione di giudizi fuorvianti. Dove si trovano queste indicazioni? Negli errori, i quali sono utili tanto al docente per capire dove si annidino i punti più critici, quanto agli studenti se messi di fronte agli stessi. L'errore rappresenta, infatti, un'occasione di discussione, di indagine sulle sue radici e di inizio di un suo lento e graduale superamento o, per dirla con le parole dell'emerito Federigo Enriques, l'errore è "tentativo

e passo verso la scoperta della verità" [6, p. 61].
Le attività facenti parte dei percorsi organizzati nelle due scuole hanno, pertanto, rappresentato un'opportunità di mettere in pratica questa filosofia: prima di discuterne in maniera collettiva, gli studenti sono stati messi di fronte a delle situazioni volte a far emergere eventuali misconcezioni; nel fare ciò, però, non erano soli ma insieme ad altri compagni che, a volte, non la pensavano allo stesso modo, il che poteva far innescare un dibattito che richiedeva l'esplicitazione pensieri e ragionamenti di ognuno. Il confronto fra pari, favorito dai piccoli raggruppamenti, ha rappresentato per gli allievi un primo step nell'esaminare la propria intuizione primaria e le eventuali incongruenze che da essa derivavano. In un secondo momento, quando la discussione si spostava a livello dell'intera classe, potevano emergere diversi punti di vista fra gruppi differenti che, a volte, esaurivano il conflitto in autonomia. Altre volte, gli strumenti visti nella "teoria" hanno fornito un supporto o una confutazione alle varie argomentazioni.
L'errore, inteso ovviamente non come errore di calcolo o svista, ma nel momento in cui è indice di un'immagine mentale che "potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova dei fatti più contingenti o più generali" [2, p. 135], come nel caso della probabilità, per alcuni può rappresentare il mezzo per innescare un conflitto cognitivo che porta a rivalutare le proprie considerazioni, o per dare modo di rafforzare la propria intuizione secondaria per altri.
Mi sento quindi di dire che sia auspicabile un approccio qualitativo, a fianco di uno più quantitativo e tradizionale (necessario), all'interno del quale incoraggiare il libero scambio di idee tra ragazzi, proponendo anche ambiti di incertezza non convenzionali in cui è necessario fare appello alla probabilità in modo da esercitare l'intuizione a sfruttare le enormi potenzialità di tale disciplina.

Appendice A

Questionario iniziale

Di seguito è riportato il questionario somministrato agli studenti prima che affrontassero la teoria della probabilità.

QUESITO 1
Prova a spiegare, eventualmente aiutandoti con degli esempi, il significato che dai all'espressione "evento aleatorio o casuale".

QUESITO 2
In ognuno degli esempi seguenti stabilisci se si tratta di un evento CERTO, IMPOSSIBILE oppure INCERTO, spiegando brevemente perché.

a) Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni 6

b) Il 25 dicembre è Natale

c) Nel 2018 il Real Madrid vince la Champions League

d) Ricevi un messaggio su WhatsApp nei prossimi dieci minuti

e) La nazionale italiana vince i mondiali di calcio del 2018

f) Un gatto depone un uovo

QUESITO 3

Prova a spiegare, eventualmente aiutandoti con degli esempi, il significato che dai alla parola "probabilità".

QUESITO 4

Puoi calcolare (o stimare) la probabilità per ciascuno degli eventi indicati nel Quesito 2? Se sì, quale? Come l'hai calcolata (o stimata)? Di quali fattori hai tenuto conto?

QUESITO 5

Ti vengono fornite delle informazioni inerenti agli eventi dei quesiti precedenti: in riferimento ad ogni singola informazione scrivi, motivando, se modifica o meno la possibilità di assegnare una probabilità o la valutazione della probabilità che hai dato.

a) Evento: "Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni 6"
Informazione 1: "Il numero ottenuto è pari"
Informazione 2: "Il dado è rosso"

b) Evento: "Riceverai un messaggio su WhatsApp nei prossimi dieci minuti"
Informazione 1: "Nelle ultime 24 ore hai ricevuto 5 messaggi"
Informazione 2: "Mediamente ricevi 30 messaggi all'ora"

c) Evento: "Il Real Madrid vince la Champions League"
Informazione 1: "Cristiano Ronaldo, il giocatore più forte della squadra, si infortuna e non potrà giocare fino a fine stagione"
Informazione 2: "La finale della Champions League sarà trasmessa in tv"

QUESITO 6

Nel gioco del SuperEnalotto vengono estratti (senza reinserimento) sei numeri da un contenitore che contiene novanta palline identiche al tatto e numerate da 1 a 90. Un giocatore sceglie sei numeri su cui puntare.

a) Sapendo che il numero 37 non è mai stato estratto negli ultimi sei mesi, saresti più portato a giocarlo rispetto ad un altro numero, oppure no? Perché?

b) Se dovessi scegliere se giocare la sestina 1, 2, 3, 4, 5, 6 oppure la sestina 2, 5, 31, 48, 73, 82, quale sceglieresti?

☐ A. 1, 2, 3, 4, 5, 6 perché …

☐ B. 2, 5, 31, 48, 73, 82 perché …

☐ C. Indifferente, perché …

QUESITO 7

Un uomo e una donna si preparano ad estrarre a turno una pallina da un'urna contenente 5 palline bianche e 5 palline nere, identiche al tatto.
L'uomo è il primo a pescare: estrae una pallina e, senza guardarla e senza mostrarla alla donna, la mette in tasca.

a) Qual è la probabilità che abbia estratto una pallina bianca? Perché?

Successivamente la donna estrae a sua volta una pallina e, senza guardarla e senza mostrarla all'uomo, la mette in tasca.

b) Ritieni che si possa stabilire la probabilità che la donna abbia estratto una pallina bianca? Se sì, ti aspetti che sia minore, maggiore o uguale alla probabilità dell'uomo di aver estratto una pallina bianca? Perché?

A questo punto l'uomo tira fuori la sua pallina dalla tasca, la mostra alla donna che vede che è bianca.

c) Quest'informazione, secondo te, influisce sulla probabilità della donna di aver pescato una pallina bianca? In particolare modifica la tua risposta al punto b)? Perché?

QUESITO 8

Il professore di matematica pone un problema di probabilità.

"Si lancia un dado cubico tradizionale. Se si ottiene la faccia 6, si vince. Se no, si ha diritto di lanciarlo una seconda volta e se si ottiene la faccia 6, si vince. Altrimenti si perde. Quale probabilità si ha di vincere?"

Gianni dà la sua risposta:

"O io ho un 6 al primo lancio ed ho vinto, oppure io non ho 6 al primo lancio ed ho 6 al secondo ed ho ugualmente vinto. Altrimenti ho perso. Ci sono due casi su tre in cui vinco, dunque ho due possibilità su tre di vincere".

Secondo te Gianni ha ragione o torto? Perché?

Appendice B

Questionario finale

Di seguito è riportato il questionario somministrato agli studenti ad alcuni mesi di distanza dalla trattazione della teoria della probabilità.

QUESITO 1
Prova a spiegare, eventualmente aiutandoti con degli esempi, il significato che dai all'espressione "evento aleatorio o casuale".

QUESITO 2
Prova a spiegare, eventualmente aiutandoti con degli esempi, il significato che dai alla parola "probabilità".

QUESITO 3
Puoi calcolare (o stimare) la probabilità per ciascuno degli eventi riportati di seguito? Se sì, quale? Come l'hai calcolata (o stimata)? Di quali fattori hai tenuto conto?

a) Pasqua cade di domenica

b) Lanci un dado (con le facce numerate da 1 a 6) ed ottieni un numero maggiore o uguale di 3

c) Nell'estate 2019 Fedez e J-Ax duettano in una nuova canzone

d) Nel novembre del 2018 nevica a Bologna

e) Se adesso lasci andare la penna con cui stai scrivendo, questa finisce sul soffitto della classe

f) Un italiano scelto a caso tra quelli che vivono in Italia abita in Lombardia

QUESITO 4

Un'urna contiene 5 palline bianche e 5 palline nere, identiche al tatto.

a) Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Si estrae una pallina e si guarda di che colore è. Si reimmette poi nell'urna tale pallina e si aggiunge un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta.

b) Ritieni che si possa stabilire la probabilità di estrarre una pallina bianca? Perché? Se sì, qual è?

QUESITO 5

Aldo lancia una moneta per quattro volte consecutive e, di volta in volta, si annota il risultato scrivendo "T" qualora esca TESTA e "C" qualora esca CROCE (ad esempio: se al primo lancio è uscita CROCE, al secondo lancio è uscita CROCE, al terzo lancio è uscita TESTA e al quarto lancio è uscita CROCE, scriverà CCTC).

Se dovessi scommettere sull'uscita di una fra le sequenze di risultati proposte di seguito, quale sceglieresti? Perché?

☐ A. TTTT, perché ...

☐ B. TCCT, perché ...

☐ C. TCTT, perché ...

☐ D. CCCC, perché ...

☐ E. Altro (giustifica)

QUESITO 6

Supponiamo di dover essere sottoposti a due operazioni chirurgiche consecutive: se si sopravvive al primo intervento si verrà poi sottoposti al secondo. Sapendo che la probabilità di sopravvivere a ciascuno di questi interventi è $\frac{1}{2}$, qual è la probabilità di perire?

Appendice C

Verifica di probabilità, Liceo A. B. Sabin

Di seguito è riportato il compito in classe a valenza sommativa somministrato alla classe IV B del Liceo Scientifico A. B. Sabin.

Verifica di Matematica

Nome:________________________ **Classe 4°B**

ESERCIZIO 1

Si lancia due volte un dado regolare a sei facce (numerate da 1 a 6). Ad ogni lancio si osservano i numeri che escono sul dado.

a. Descrivi lo spazio campionario come insieme e calcola da quanti elementi è composto.
b. Fai un esempio di evento elementare e uno di evento composto.
c. Descrivi gli eventi seguenti come sottoinsiemi dello spazio campionario e calcolane la probabilità:
- Esce 1 sia al primo che al secondo lancio;
- Esce 1 al primo lancio e un numero diverso da 1 al secondo lancio;
- Escono due numeri la cui somma è 7.

ESERCIZIO 2

Ogni sabato pomeriggio Paola si reca nella gelateria sotto casa dove vengono prodotti i suoi due gusti di gelato preferiti "Mandorle caramellate" e "Arancia e zenzero" che, essendo particolari, non ci sono sempre. La probabilità di trovare il gusto "Mandorle caramellate" è doppia rispetto a quella di trovare il gusto "Arancia e zenzero". Inoltre la probabilità di trovare almeno uno dei due gusti è 0,9 mentre la probabilità di trovarli entrambi è 0,3.

a. Qual è la probabilità di non trovare il gusto "Arancia e zenzero"?
b. Qual è la probabilità che non ci sia nessuno dei due gusti?
c. Qual è la probabilità che almeno uno dei due gusti non ci sia?
d. Qual è la probabilità di trovare uno solo dei due gusti?

Prima di calcolare le probabilità, scrivi a quali insiemi corrispondono gli eventi utilizzando le operazioni tra insiemi (suggerimento: puoi aiutarti con la rappresentazione di Eulero – Venn).

ESERCIZIO 3

Un'urna contiene 20 palline, identiche al tatto, di cui i $\frac{3}{5}$ sono rosse e le restanti sono verdi. Da quest'urna vengono effettuate due estrazioni successive senza reinserimento.
Qual è la probabilità di pescare due palline verdi?

ESERCIZIO 4

Si estrae una carta da un mazzo di 52.

a. Gli eventi "la carta estratta è un fante" e "la carta estratta è di cuori" sono indipendenti?
b. Gli eventi "la carta estratta non è un asso" e "la carta estratta è una figura" sono indipendenti?

ESERCIZIO 5

Un automobilista arriva a un bivio. Sa che una strada è esatta e l'altra è sbagliata. Al bivio vi sono due persone, Tizio e Caio. Tizio dice la verità quattro volte su dieci e Caio invece sette volte su dieci. L'automobilista chiede a caso a uno dei due e ne segue l'indicazione. Calcola la probabilità che ha l'automobilista di percorrere la strada esatta, specificando quali sono gli eventi e quanto valgono le loro probabilità.

ESERCIZIO 6

Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 98% della sua produzione è senza difetti. La seconda macchina ha un tasso di difettosità del 7%. Avendo preso a caso un pezzo e avendo accertato che è difettoso, calcola la probabilità che esso provenga dalla seconda macchina.

ESERCIZIO 7

Una persona deve sottoporsi a due operazioni chirurgiche molto delicate, una dopo l'altra. La probabilità di sopravvivere ad ognuna di queste è del 50%.

Gianni sostiene che la persona ha 1 possibilità su 3 di sopravvivere ad entrambe le operazioni perché i casi sono 3:

- Muore dopo la prima operazione;
- Sopravvive alla prima operazione e muore alla seconda;
- Sopravvive alla prima operazione e anche alla seconda.

Sei o non sei d'accordo con Gianni? Perché?

NB. In ogni esercizio devono essere esplicitati tutti i passaggi utilizzati e il formalismo adeguato.

Bibliografia

[1] Berne, E. The nature of intuition. *Psychiatric Quarterly 23* (1949), 203–226.

[2] Bolondi G., M. I. F. P. *I quaderni della didattica - Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. EdiSES S. r. l., Napoli, 2012.

[3] Bruner, J. S. *On Knowing. Essay for the Left Hand*. Atheneum, New York, 1966.

[4] de Finetti, B. La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni! *Scientia 111* (1976), 255–281.

[5] Dhombres, J. *Leçons de Mathématiques. L'École Normale de l'an III, Laplace, Lagrange, Monge*. Éditions Dunod, Paris, 1992.

[6] Enriques, F. L'errore nelle matematiche. *Periodico di Matematiche* (1942), 57–65.

[7] Fischbein, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel Publishing Company, Dordrech (Olanda) / Boston (USA), 1975.

[8] Fischbein, E. Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. *Numeri e operazioni nella scuola di base* (1985), 8–19.

[9] Fischbein E., G. A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuition? *Educational Studies in Mathematics 15* (1984), 1–24.

[10] Fischbein E., Barbat I., M. I. Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. *Educational Studies in Mathematics 4* (1971), 264–280.

[11] Freudenthal, H. *The teaching of probability and statistics.* L. Rade, Stoccolma, 1970.

[12] Garfield, J. Probability, overview. in l. s. grinstein, s. i. lipsey (eds.). *Encyclopedia of Mathematics Education II* (2001), 560–562.

[13] Garfield J., B.-Z. D. How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review 35(3)* (2007), 372–396.

[14] Khazanov L., G. A. Instructors' perspectives on students' mistaken beliefs about probability in an elementary college statistics course. *Proceedings of the Adults Learning Mathematics, a Research Forum (ALM) 15th Annual International Conference* (2009), 249–264.

[15] Khazanov L., P. L. Correcting students' misconceptions about probability in an introductory college statistics course. *ALM International Journal 5(1)* (2010), 23–35.

[16] Ozdemir G., C. D. An overview of conceptual change theory. *Eurazia Journal of Mathematics, Science, Technology 3(4)* (2007), 351–361.

[17] Sasso, L. *Nuova matematica a colori 4.* Petrini, Italia, 2017.

[18] Tversky A., K. D. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science 185* (1974), 1124–1131.

[19] ZAN, R. Verso una teoria per le difficoltà in matematica. contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica. *Materiale dal Seminario Nazionale* (2002).

Ringraziamenti

Il mio primo e più sentito ringraziamento va alla Professoressa Alessia Cattabriga, la quale mi ha sempre seguita in ogni passo della realizzazione di questo lavoro di tesi mostrando estrema disponibilità e gentilezza, dimostrandosi una fonte inesauribile di idee, sempre stimolanti, facendomi concludere questo percorso universitario con una vera e propria collaborazione. Grazie. Grazie anche al Professor Andrea Pascucci che si è sempre messo a disposizione con dei preziosi consigli su aspetti disciplinari e didattici.

Grazie a mamma e papà che rinnovano continuamente il loro supporto nei miei confronti con il loro amore e grazie a tutta la mia famiglia, che più passa il tempo più capisco quanto sia fondamentale per me.
Grazie a Diego, la mia amata colonna portante, la mia metà e il mio doppio.
Grazie a tutti i miei amici, un'altra bella fetta importante di me, in particolare ad Anna, la mia sorella di fatto, ed ai compagni di corso che ho avuto il piacere di conoscere in questi due anni e che amici lo sono diventati: Valentina, Francesca e Luca.

Grazie ai Professori Paolo Giglioli del Liceo Malpighi, Maria Grazia Massa del Liceo Sabin e Paolo Cavallo del Liceo Minghetti di Bologna senza la cui infinita disponibilità questo lavoro non sarebbe stato possibile, e grazie ai loro fantastici studenti per essersi prestati a tutto ciò che proponevo loro: da loro ho imparato davvero tantissimo ed hanno reso questa una delle esperienze più formative della mia vita.

Infine grazie alla Professoressa Giulia Capitani, del Liceo Sabin, che è stata per me una vera Maestra e un esempio che voglio seguire.