

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

## Calcolo degli effetti di gravità quantistica sull'evoluzione degli spettri inflazionari

Relatore:  
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:  
Simone Claudio Murgia

Correlatore:  
Dott. Alessandro Tronconi

Anno Accademico 2017/2018

# Abstract

Lo scopo di questa tesi è di calcolare l'approssimazione al primo ordine in  $M_p^{-2}$  dell'equazione di evoluzione della funzione di correlazione a due punti in presenza di effetti quantistici gravitazionali.

La forma di questa funzione di correlazione determina le proprietà degli spettri inflazionari.

Gli effetti studiati sono la conseguenza della quantizzazione dei gradi di libertà gravitazionali che descrivono il background (fattore di scala) e sono valutati per lo stato di vuoto e per una serie di stati eccitati.

L'equazione di evoluzione trovata per la funzione di correlazione verrà quindi risolta assumendo un'evoluzione tipo De Sitter.

Inoltre le conseguenze dell'ordinamento nella procedura di quantizzazione che conduce all'equazione di Wheeler-DeWitt verranno studiate.



# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria del Big Bang Caldo</b>	<b>7</b>
1.1	Cosmologia Standard . . . . .	7
1.2	Problemi dell'orizzonte e della piatezza . . . . .	11
1.3	Inflazione . . . . .	14
1.4	Zoologia dei modelli dell'inflazione . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Perturbazioni cosmologiche</b>	<b>19</b>
2.1	Classificazione delle perturbazioni . . . . .	19
2.2	Dinamica del campo e delle perturbazioni . . . . .	23
2.2.1	Risoluzione dell'equazione delle perturbazioni . . . . .	25
2.3	Quantizzazione semiclassica delle perturbazioni . . . . .	27
2.4	Contatto con le osservazioni . . . . .	31
2.5	Quantizzazione delle perturbazioni con la Gravità Quantistica Canonica . . . . .	36
2.6	Approssimazione di Born-Oppenheimer . . . . .	40
2.6.1	Approssimazione WKB . . . . .	45
2.7	Problema dell'ordinamento nell'equazione di Wheeler-DeWitt . . . . .	49
<b>3</b>	<b>La funzione di correlazione a due punti</b>	<b>53</b>
3.1	Dinamica imperturbata . . . . .	53
3.1.1	Invarianti Adiabatici . . . . .	54
3.1.2	Applicazione al sistema oscillatore armonico . . . . .	56
3.2	Dinamica perturbata . . . . .	59
3.2.1	Calcolo degli effetti adiabatici al primo ordine perturbativo . . . . .	61
3.2.2	Applicazione agli autostati dell'invariante adiabatico . . . . .	63
3.3	Applicazione al caso di De Sitter . . . . .	66
<b>A</b>	<b>Gravità Quantistica Canonica</b>	<b>76</b>

# Introduzione

La teoria dell'inflazione cosmologica risulta essere attualmente lo scenario più promettente per estendere la teoria del Big Bang Caldo, preservandone i successi e risolvendo alcuni dei suoi problemi.

L'idea è stata proposta negli anni ottanta, in maniera del tutto indipendente, da Alexei Starobinsky e Alan Guth e consiste nell'ipotizzare una fase in cui l'Universo subì un'espansione accelerata di tipo esponenziale prima del Big Bang Caldo.

La maniera più semplice per modellare la dinamica della fase inflazionaria è di ipotizzare l'esistenza di un campo scalare  $\varphi$ , chiamato inflatone, con un opportuno potenziale.

Questa semplice idea permette di risolvere i problemi della piattezza, dell'omogeneità ed isotropia della teoria del Big Bang Caldo.

Inoltre, come dimostrarono Mukhanov e Chibisov, una fase di questo tipo produce le piccole perturbazioni di densità all'origine della struttura delle galassie che vediamo oggi.

Questo è dovuto al fatto che la materia e lo spaziotempo sono legati dalle equazioni di Einstein: le fluttuazioni della materia comporteranno delle fluttuazioni dello spaziotempo e, viceversa, fluttuazioni dello spaziotempo comporteranno fluttuazioni del campo scalare.

In generale, l'approccio utilizzato per studiare la dinamica inflazionaria è quello semiclassico e consiste nel quantizzare solo le fluttuazioni del campo scalare e dello spaziotempo, studiando la loro evoluzione in uno spaziotempo classico omogeneo ed isotropo.

L'approccio semiclassico ha il difetto di perdere informazioni sull'influenza che la natura quantistica del background ha sull'evoluzione delle fluttuazioni.

In questa tesi studieremo un approccio più generale che consiste nel quantizzare lo spaziotempo in modo canonico.

La teoria quantistica canonica della gravità è stata sviluppata da Wheeler e DeWitt e permette di ottenere delle deviazioni dal formalismo semiclassico.

A causa delle difficoltà a trattare il suddetto sistema esattamente verrà utilizzata l'approssimazione di Born-Oppenheimer.

Questo è giustificato dalla presenza nel sistema di due masse (e quindi tempi) diversi, ovvero la massa di Planck che caratterizza la gravità e la massa della materia.

Come conseguenza del fatto che la massa di Planck è molto più grande della massa del-

la materia, all'ordine dominante la gravità sarà guidata dalla hamiltoniana media della materia mentre la materia seguirà la gravità adiabaticamente.

Grazie a questa decomposizione, troveremo l'equazione di evoluzione della funzione di correlazione a due punti della materia (ovvero degli spettri inflazionari) con l'inclusione degli effetti non adiabatici, ovvero degli effetti quantistici legati alla quantizzazione del background omogeneo.

In questa tesi, in particolare, si valuteranno le correzioni quantistiche gravitazionali sugli stati eccitati che descrivono le perturbazioni, che possono essere calcolati grazie alla tecnica degli invarianti adiabatici.

Infine, si studieranno gli effetti dell'ordinamento nell'equazione di Wheeler-DeWitt sulla funzione di correlazione.

La tesi avrà la seguente struttura:

- Nel primo capitolo illustreremo brevemente la teoria cosmologica del Big Bang Caldo, le sue problematiche e come una fase inflazionaria riesca a risolverle. Discuteremo in dettaglio alcune caratteristiche peculiari della dinamica inflazionaria, tratteremo in particolare il paradigma inflazionario in presenza di un solo campo scalare, elencando alcuni tipi di potenziali discussi in letteratura;
- Nel secondo capitolo introdurremo il formalismo per descrivere le perturbazioni cosmologiche e lo applicheremo alle fluttuazioni quantistiche prodotte durante l'inflazione, studiando la loro evoluzione sia nel contesto dell'approssimazione semiclassica, sia nel contesto della gravità quantistica canonica. Per finire si studierà come il diverso ordinamento nell'equazione di Wheeler-DeWitt influenzerà l'equazione di evoluzione della materia;
- Nel terzo capitolo ricaveremo la funzione di correlazione a due punti nel limite semiclassico grazie alla tecnica degli invarianti adiabatici. Successivamente calcoleremo, in presenza di effetti quantistici del background, l'equazione di evoluzione della funzione di correlazione. Approssimeremo tale equazione al primo ordine in  $M_p^{-2}$  per ottenere un' "equazione master" che contiene gli effetti quantistici della parte omogenea al primo ordine. Infine applicheremo tale equazione al caso in cui la fase inflazionaria è di tipo De Sitter e in particolare al caso del vuoto.

# Notazioni

In questa sezione vorrei introdurre alcune notazioni:

- si useranno gli indici latini  $i, j, k$  per indicare le coordinate spaziali, che assumeranno i valori 1,2,3;
- si useranno gli indici greci  $\mu, \nu, \lambda$  per indicare le coordinate spaziotemporali, che assumeranno i valori 0,1,2,3;
- si userà la notazione di Einstein quindi gli indici ripetuti, rispettivamente uno covariante e uno controvariante, sono da considerarsi sommati;
- i vettori saranno indicati con le lettere in grassetto;
- la metrica spaziotemporale piatta è indicata con  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ;

Si adotterà il sistema di Planck basato sulle costanti universali come la velocità della luce  $c$ , la costante gravitazionale  $G$ , la costante di Planck ridotta  $\hbar$  e la costante di Boltzmann  $k_b$ .

Combinando queste costanti troviamo le seguenti definizioni:

$$l_{Pl} \equiv \left( \frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1.61 \cdot 10^{-33} \text{cm} \quad (1)$$

detta lunghezza di Planck;

$$t_{Pl} \equiv \left( \frac{l_{Pl}}{c} \right) = 5.39 \cdot 10^{-44} \text{s} \quad (2)$$

detto tempo di Planck;

$$m_{Pl} \equiv \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.18 \cdot 10^{-5} \text{g} \quad (3)$$

detta massa di Planck;

# Capitolo 1

## Teoria del Big Bang Caldo

La teoria del Big Bang secondo cui l'Universo passa da uno stato molto caldo e denso ad uno più freddo e rarefatto a seguito della sua espansione è supportata da una serie di dati osservativi, come la misura dei redshift delle galassie, la nucleosintesi degli elementi leggeri e la radiazione cosmica di fondo (CMB).

Questa teoria descrive l'evoluzione dell'Universo in toto, utilizza la teoria della Relatività Generale per studiare la struttura dello spaziotempo e il Modello Standard per studiare la materia in esso contenuto.

Sebbene il modello riesca a spiegare in maniera molto precisa molte osservazioni, esistono una serie di problematiche che non si riescono a spiegare all'interno della teoria stessa.

Inoltre, risalendo indietro nel tempo, ci si imbatte inevitabilmente con la necessità di descrivere regimi di energia alla scala di Planck.

A queste energie appare indispensabile inglobare la Relatività Generale con i principi della Meccanica Quantistica in una teoria della Gravità Quantistica, oggetto ancora di ricerca.

### 1.1 Cosmologia Standard

La teoria del Big Bang caldo si basa sull'assunzione che l'Universo si evolva secondo le equazioni classiche della Relatività Generale.

In particolare, lo spaziotempo è descritto come una varietà  $\mathcal{M}$  quadridimensionale su cui possiamo definire il concetto di distanza attraverso un tensore simmetrico di tipo (0,2) detto metrica  $g_{\mu\nu}(x)$ .

Possiamo trovare le equazioni del moto di un sistema, ad esempio, costituito da un campo scalare che evolve sullo spaziotempo curvo attraverso il formalismo lagrangiano.

Scriviamo l'azione:

$$S = \int_{\mathcal{M}} dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}(x), \phi(x), \partial\phi(x)) \quad (1.1)$$

dove  $\mathcal{L}$  è la densità lagrangiana totale:

$$\mathcal{L} = -\frac{m_{Pl}^2}{16\pi}R + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}(x), \phi(x), \partial\phi(x)) \quad (1.2)$$

$\mathcal{L}_m$  è la densità lagrangiana della materia,  $R$  è lo scalare di Ricci e  $\phi$  è il campo di materia.

Utilizzando il principio variazionale, variamo l'azione rispetto alla metrica trovando:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2}T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

dove  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso della materia in uno spaziotempo curvo:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.4)$$

Le equazioni (1.3) sono chiamate equazioni di Einstein.

Una proprietà fondamentale delle equazioni di Einstein è data dall'identità di Bianchi:

$$D^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Insieme alle equazioni di Einstein permette di generalizzare il concetto di conservazione dell'energia e dell'impulso in uno spaziotempo curvo:

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.6)$$

Le equazioni di Einstein rappresentano un insieme di dieci equazioni differenziali non lineari, accoppiate, del secondo ordine di dieci funzioni libere che sono gli elementi della metrica.

Tuttavia, solo sei di queste equazioni sono indipendenti, mentre gli altri quattro gradi di libertà corrispondono alla libertà di scelta del sistema di riferimento.

L'Universo è omogeneo ed isotropo su scale dell'ordine delle centinaia di Mpc e per questo in Cosmologia le equazioni di Einstein assumono una forma molto semplificata.

Uno spazio omogeneo è uno spazio invariante per traslazione mentre uno spazio isotropo è uno spazio invariante per rotazioni.

Il principio cosmologico è stato, in origine, preso come principio da Einstein per cercare di trovare una soluzione alle sue equazioni.

Successivamente questo principio è stato confermato sperimentalmente grazie allo studio della distribuzione delle galassie e della radiazione cosmica di fondo.

La metrica più generale consistente con l'omogeneità e l'isotropia è ottenuta moltiplicando una geometria spaziale statica per un fattore di scala dipendente dal tempo  $a(t)$ :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.7)$$

dove  $d\Omega^2 = \sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2$  è l'angolo solido,  $(r, \theta, \phi)$  sono le coordinate comoventi: un sistema di coordinate di un osservatore che vede l'espansione attorno a se come isotropa. Il tempo  $t$  è il tempo cosmico,  $a(t)$  è il fattore di scala e quantifica l'espansione dell'Universo.

La formula:

$$d_p(t) = a(t)d_c \quad (1.8)$$

mette in relazione il fattore di scala con la distanza propria di due osservatori comoventi  $d_p(t)$  ad un dato tempo cosmico  $t$  e la distanza comovente  $d_c$  degli stessi osservatori. Il parametro  $k$  è chiamato parametro di curvatura e può assumere i seguenti valori:

- $k = 1$  curvatura positiva, corrisponde ad uno spazio chiuso;
- $k = -1$  curvatura negativa, corrisponde ad uno spazio aperto;
- $k = 0$  nessuna curvatura, corrisponde ad uno spazio piatto.

Uno spaziotempo la cui metrica assume questa forma è detto spaziotempo di Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

La condizione di omogeneità ed isotropia impone limiti stringenti alla forma del tensore energia-impulso, l'isotropia implica che il tensore deve essere diagonale e che tutte le parti spaziali devono essere identiche mentre l'omogeneità comporta che le sue componenti non dipendano dalle coordinate.

Il più semplice tensore energia-impulso compatibile con queste restrizioni è il tensore energia-impulso di un fluido perfetto:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\nu u_\mu - pg_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\rho$  è la densità di energia e  $u_\mu$  è il vettore quadrivelocità. Nel sistema di riferimento comovente avrà la seguente forma :

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p). \quad (1.10)$$

Sostituendo la metrica di FRW e il tensore energia-impulso di un fluido perfetto nell'equazione di Einstein troviamo le equazioni che descrivono la dinamica dell'Universo:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3m_{Pl}^2}(\rho + 3p). \quad (1.12)$$

Queste equazioni sono chiamate equazioni di Friedmann.

$H$  è chiamato parametro di Hubble, esso quantifica la velocità di espansione dell'Universo.

I fluidi ideali rilevanti in cosmologia soddisfano la semplice equazione di stato  $p = w\rho$  dove  $w$  è una costante.

Questa costante è legata alla velocità del suono  $v_s$  nel fluido dalla seguente relazione:

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = w. \quad (1.13)$$

Tale velocità non potrà superare la velocità della luce, questo implica che  $|w| \leq 1$ . Sostituendo il tensore energia-impulso (1.9) all'equazione di continuità, che consiste nella componente  $\nu = 0$  dell'equazione (1.6), si ottiene:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad (1.14)$$

la cui soluzione è:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (1.15)$$

Questa relazione specifica la dipendenza della densità di energia in funzione del fattore di scala, una volta fissato  $w$ .

Nel caso di un Universo piatto ( $k = 0$ ), l'equazione di Friedmann ha la seguente soluzione:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (1.16)$$

quando  $w \neq -1$ , mentre quando  $w = -1$  la soluzione è:

$$a(t) \propto e^{Ht}. \quad (1.17)$$

Due tipi di fluidi cosmologici hanno particolare importanza:

- La **materia**: è il fluido costituito da particelle massive non relativistiche (ovvero con energia cinetica trascurabile rispetto all'energia a riposo), la cui pressione può essere trascurata rispetto alla densità di energia.
- La **radiazione**: è il fluido costituito da particelle di massa nulla (come i fotoni) e particelle relativistiche (come i neutrini).

Ad essi si deve aggiungere la costante cosmologica, equivalente ad un fluido cosmologico la cui densità di energia è costante.

Il modo più semplice di incorporare questo fluido è quello di aggiungere un termine proporzionale alla metrica del tipo  $\Lambda g_{\mu\nu}$ .

Questo termine lascia invariata l'equazione di conservazione del tensore energia-impulso:

$$D_\mu(T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.18)$$

Per i diversi tipi di fluido considerati, troviamo i seguenti valori:

tipo fluido	$w$	$\rho$	$a$
materia	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{2/3}$
radiazione	1/3	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{1/2}$
costante cosmologica	-1	cost	$\propto e^{Ht}$

Le singole componenti hanno un'evoluzione diversa rispetto al fattore di scala, di conseguenza, nel corso dell'evoluzione dell'Universo ci sono state delle ere in cui ha dominato una determinata componente a discapito delle altre.

In particolare, l'Universo è stato dominato dalla radiazione ai primi istanti, poi dalla materia ed infine dal vuoto.

Notiamo che quando l'Universo è dominato dalla radiazione, il fattore di scala può andare a zero in un tempo finito dunque l'Universo ha un'età finita.

Dato che la temperatura e la densità sono inversamente proporzionali al fattore di scala, essi tenderanno all'infinito quando il fattore di scala andrà a zero.

Tuttavia, non dovremmo considerare questa estrapolazione come affidabile dato l'utilizzo della Relatività Generale, teoria classica.

Considerando scale dell'ordine dell'energia di Planck ( $E_p \simeq 10^{19} GeV$ ) dobbiamo considerare gli effetti quantistici.

## 1.2 Problemi dell'orizzonte e della piattezza

Sebbene la teoria del Big Bang caldo sia corroborata da una serie di successi, esistono delle osservazioni che la teoria non riesce ancora a spiegare.

Riscriviamo l'equazione di Friedmann in un modo più congeniale ai nostri scopi, definiamo il parametro di densità:

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G}{3m_{Pl}^2} \frac{\rho}{H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.19)$$

dove  $\rho_c$  è chiamata densità critica:

$$\rho_c = \frac{3m_{Pl}^2}{8\pi} H^2. \quad (1.20)$$

Questa quantità in generale dipenderà dal tempo e definisce la densità di energia corrispondente ad un Universo piatto nella sua parte spaziale.

Riscriviamo la prima equazione di Friedmann (1.11) in questo modo:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(aH)^2}. \quad (1.21)$$

Notiamo come la curvatura dell'Universo sia associata al fatto che  $\Omega$  sia maggiore, uguale o minore di uno.

L'evoluzione del parametro di densità rispetto al fattore di scala è dato da:

$$\frac{d\Omega}{d(\ln a)} = (1 + 3w)(\Omega - 1)\Omega \quad (1.22)$$

dove abbiamo usato una scala logaritmica per semplicità.

Nel caso di Universo piatto ( $\Omega=1$ ) rimarrà piatto per sempre, mentre in un Universo non piatto, il parametro di densità è una quantità dipendente dal tempo la cui evoluzione è determinata dal parametro di stato  $w$ .

Nel caso di un Universo dominato da radiazione o materia avremo:

$$1 + 3w > 0, \quad (1.23)$$

questo significa che  $\Omega = 1$  è un punto fisso instabile per un Universo in espansione:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d(\ln a)} > 0. \quad (1.24)$$

Ogni deviazione dalla geometria piatta è amplificata dall'espansione cosmologica.

Considerando ad esempio come limite odierno  $\Omega_0 = 1 \pm 0.01$  troveremo al tempo della nucleosintesi  $\Omega_{nucl} = 1 \pm 10^{-12}$ .

Un valore così vicino alla piattezza è considerato un parametro fine-tuned all'interno della teoria del Big Bang.

La piccolezza della deviazione da  $\Omega = 1$  (che va rimpicciolendosi risalendo indietro nel tempo) è estremamente innaturale al punto da essere considerato un problema della teoria chiamato problema della piattezza.

Il problema dell'orizzonte è anch'esso concettuale ed è legato allo stato iniziale dell'Universo osservato e al fatto che l'Universo ha un età finita.

Dato che l'Universo ha un età finita ogni segnale (fotone) avrà percorso una distanza finita, quindi un qualunque osservatore oggi sarà al centro di una superficie sferica che definisce il suo Universo osservabile: l'orizzonte cosmologico.

La grandezza di questo orizzonte, in unità comoventi, al tempo  $t$  dopo il Big Bang è:

$$d_H = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.25)$$

Per un Universo vecchio 14 miliardi di anni, piatto e dominato dalla materia l'orizzonte sarà circa  $d_H \simeq 13$  Gpc.

Vediamo perchè la presenza di un orizzonte cosmologico sia un problema; definiamo il tempo conforme  $\tau$ :

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (1.26)$$

come un tempo che rallenta con l'espansione dell'Universo, questo ci permette di scrivere la metrica in questo modo:

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - |d\mathbf{x}|^2). \quad (1.27)$$

Le traiettorie dei fotoni saranno descritti da  $|d\mathbf{x}| = d\tau$ , quindi in un diagramma  $(\tau, |\mathbf{x}|)$  viaggeranno su angoli di 45 gradi.

Due eventi in un diagramma  $(\tau, |\mathbf{x}|)$  saranno connessi causalmente se i coni luce del passato si intersecano prima della superficie a tempo conforme costante  $\tau = 0$ .

Considerando due direzioni qualsiasi da cui provengono i fotoni della radiazione cosmica di fondo con un distanza angolare maggiore di due gradi, scopriamo che esse non sono connesse causalmente dato che i loro coni di luce del passato non si intersecano.

Tuttavia la radiazione cosmica di fondo è isotropa con fluttuazioni della temperatura dell'ordine di:

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}. \quad (1.28)$$

Come è possibile che punti che non sono mai entrati in contatto causale abbiamo la stessa temperatura?

Possiamo facilmente vedere che i due problemi sopra citati sono correlati, infatti considerando una lunghezza di riferimento comovente  $\lambda$ , per valori di  $w = cost$  possiamo dimostrare che vale la seguente espressione è costante nel tempo:

$$\left(\frac{\lambda}{d_H}\right)^2 |\Omega - 1| = cost. \quad (1.29)$$

Dimostriamolo:

Deriviamo l'espressione precedente rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{d_H}\right)^2 |\Omega - 1| + \frac{1}{d_H^2} \frac{d}{dt} (|\Omega - 1|) = 0. \quad (1.30)$$

Sostituiamo la relazione (1.21) ottenendo:

$$\frac{2}{d_H^3 \dot{a}^2} \frac{d}{dt} (d_H) = \frac{1}{d_H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2}\right). \quad (1.31)$$

Calcolando le derivate troviamo:

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = -\frac{1}{ad_H}. \quad (1.32)$$

Questa espressione è soddisfatta quando il fattore di scala ha la forma (1.16) o (1.17).

Per un Universo che si evolve allontanandosi dalla piattezza:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d(\ln a)} > 0, (1 + 3w) > 0, \quad (1.33)$$

l'orizzonte diventa via via più grande (in unità comoventi) e sempre più materia sarà connessa causalmente:

$$\frac{d}{d(\ln a)} \left( \frac{\lambda}{d_H} \right) < 0. \quad (1.34)$$

Ipotizzando l'esistenza di una fase di espansione dell' Universo con:

$$(1 + 3w) < 0 \quad (1.35)$$

si otterrà un'evoluzione verso la piattezza:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d(\ln a)} < 0, \quad (1.36)$$

inoltre le distanze inizialmente più piccole dell'orizzonte saranno redshiftate su scale più grandi a tempi successivi:

$$\frac{d}{d(\ln a)} \left( \frac{\lambda}{d_H} \right) > 0. \quad (1.37)$$

Quindi una fase di espansione di questo tipo risolverebbe entrambi i problemi menzionati.

Dalla seconda equazione di Friedmann, osserviamo che un Universo di questo tipo corrisponde ad un Universo che si espande accelerando:

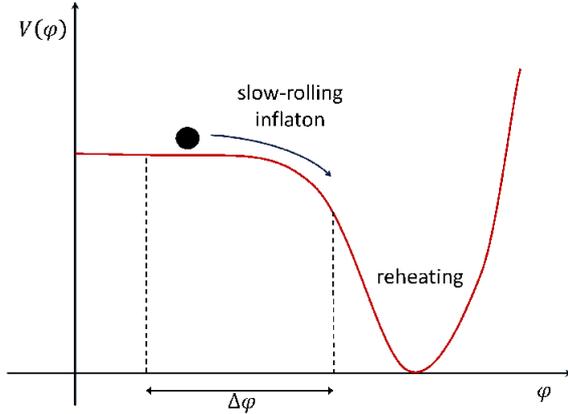
$$\frac{\ddot{a}}{a} \propto -(1 + 3w) > 0 \quad (1.38)$$

Una fase di espansione accelerata che anticipa il Big Bang Caldo è chiamata Inflazione.

### 1.3 Inflazione

Abbiamo visto nel capitolo precedente come una fase di espansione accelerata può risolvere i problemi concettuali del modello del Big Bang Caldo.

La maniera più semplice per modellare una fase di questo tipo è attraverso un singolo campo scalare, chiamato inflatone, con un potenziale sufficientemente piatto (ad esempio come quello nella figura):



Se la densità di energia dell'Universo è dominata da un campo che evolve lentamente su un potenziale quasi costante, la sua densità di energia si comporta come una costante cosmologica.

Durante questo periodo, il fattore di scala avrà una dipendenza dal tempo di tipo esponenziale, guidando l'Universo verso la piattezza e l'omogeneità.

L'inflazione termina quando il campo attraversa una regione dove il potenziale diventa più ripido, normalmente questo si verifica in prossimità di un minimo, in tal caso il campo inizierà ad oscillare attorno al minimo decadendo in radiazione (questo processo è comunemente chiamato Reheating).

La dinamica del campo scalare  $\varphi$  accoppiato in maniera minimale con la metrica, è descritta dalla seguente azione:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( -\frac{m_{Pl}^2}{16\pi} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right). \quad (1.39)$$

L'inflazione inizia in una regione dello spaziotempo sufficientemente omogenea ed isotropa quindi possiamo fare le seguenti assunzioni:

- $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2)$  spazio piatto;
- modi omogenei del campo  $\nabla\varphi = 0$ .

Variando l'azione rispetto al campo  $\varphi$  otteniamo l'equazione di Klein-Gordon per il campo scalare:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0. \quad (1.40)$$

dove con  $_{,\varphi}$  indichiamo la derivata rispetto al campo scalare  $\varphi$ .

Il tensore energia-impulso di un campo scalare è dato da:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\varphi \quad (1.41)$$

e, per un campo scalare omogeneo, prende la forma di un tensore energia-impulso di un fluido perfetto con densità di energia  $\rho$  e pressione  $p$ :

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (1.42)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (1.43)$$

Inseriamo queste equazioni nelle equazioni di Friedmann (considerando il caso di un Universo piatto):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right), \quad (1.44)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} (\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)). \quad (1.45)$$

Per avere un'espansione di tipo esponenziale come nel modello di De Sitter ( $-\rho \simeq p$ ), il termine potenziale del campo deve dominare il termine cinetico  $V \gg \dot{\varphi}^2$ .

In tali condizioni l'Universo si espanderà quasi esponenzialmente:

$$a(t) \propto e^{\int dt H} \approx e^{H_0 t} \equiv a_0 e^N \quad (1.46)$$

dove  $N$  è chiamato il numero di e-folds.

Trascurando il termine cinetico la prima equazione di Friedmann diventa:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\varphi). \quad (1.47)$$

Riscriviamo la seconda equazione di Friedmann in questo modo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon) \quad (1.48)$$

dove il parametro  $\epsilon$  è così definito:

$$\epsilon \equiv \frac{3}{2} \left( \frac{p}{\rho} + 1 \right) = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2} \left( \frac{\dot{\varphi}}{H} \right)^2. \quad (1.49)$$

Questa è un'utile parametrizzazione dato che la condizione di espansione accelerata è equivalente alla condizione  $\epsilon < 1$ .

Affinchè l'inflazione abbia tempo sufficiente per appiattire e rendere causalmente connesso l'Universo osservato oggi, il campo deve accelerare molto lentamente.

Dobbiamo aggiungere la seguente approssimazione:

$$3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi}. \quad (1.50)$$

In questo caso l'equazione del moto del campo scalare diventa:

$$3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} \simeq 0. \quad (1.51)$$

Possiamo parametrizzare questa approssimazione con un altro parametro  $\eta$ :

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}. \quad (1.52)$$

L'equazione (1.47) insieme all'equazione (1.51) sono caratteristiche della cosiddetta approssimazione di Slow Roll.

I parametri  $\eta$  e  $\epsilon$  sono chiamati parametri di Slow Roll, l'approssimazione di Slow Roll è valida fin tanto che  $\epsilon, |\eta| \ll 1$ .

Nel limite di validità dell'approssimazione di Slow Roll, possiamo riscrivere i parametri di Slow Roll in funzione del potenziale dell'inflatone e delle sue derivate:

$$\epsilon \simeq \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V_{,\varphi}(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2, \quad (1.53)$$

$$\eta \simeq \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \left( \frac{V_{,\varphi\varphi}(\varphi)}{V(\varphi)} \right). \quad (1.54)$$

## 1.4 Zoologia dei modelli dell'inflazione

L'origine microscopica dell'inflazione è ancora un mistero, è possibile pertanto considerare molti tipi di potenziale che soddisfano il paradigma dello Slow Roll.

Limitandoci a considerare un singolo campo scalare abbiamo che la dinamica dell'inflatone è determinata dalla forma del potenziale  $V(\varphi)$ .

Le caratteristiche dello spettro delle fluttuazioni primordiali dipenderà dalla precisa forma del potenziale.

Le differenti possibilità per la scelta del potenziale possono essere classificate determinando se l'inflatone si muove su piccole o grandi distanze  $\Delta\varphi = \varphi_{cmb} - \varphi_{end}$ , misurate in unità di Planck, dove  $\varphi_{cmb}$  indica il valore del campo all'istante in cui le fluttuazioni della CMB sono create e  $\varphi_{end}$  è il valore del campo al termine dell'inflazione.

- Modelli a campo piccolo:

Nei modelli a campo piccolo il campo si muove su scale sub-Planckiane

$$\Delta\varphi < m_{Pl}.$$

Questo tipo di potenziali sorgono in genere attraverso il meccanismo di rottura di simmetria spontanea dove il campo passa da un punto di equilibrio instabile verso un vuoto.

Un esempio di tali potenziali è il potenziale alla Higgs:

$$V(\varphi) = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{\varphi}{\mu} \right)^2 \right]^2. \quad (1.55)$$

I modelli a campo piccolo in generale predicono che l'ampiezza delle onde gravitazionali prodotte durante l'inflazione sono troppo piccole per essere rilevate.

- **Modelli a campo grande:**

Nei modelli a campo grande il campo inflazionario inizia da un valore molto grande per poi evolvere verso il minimo a  $\varphi = 0$ .

In questo caso l'evoluzione è generalmente super-Planckiana  $\Delta\varphi > m_{Pl}$  ed è accompagnata da una produzione di onde gravitazionali che potrebbero essere rilevate nel prossimo futuro.

Un esempio di modello a campo grande è il modello dell'inflazione caotica:

$$V(\varphi) = \lambda_p \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^p. \quad (1.56)$$

I modelli a singolo campo costituiscono una piccola parte di tutti i possibili modelli fenomenologici che producono inflazione.

Si può considerare più di un campo che abbia una dinamica rilevante durante l'inflazione (non sarà contemplata in questa tesi), inoltre possiamo estendere l'azione (1.39) in diversi modi:

- Attraverso un **accoppiamento non minimale con la gravità:**

In teoria potremmo considerare un accoppiamento non minimale tra l'inflatone e la gravità;

- Assumendo una **gravità modificata:**

In questo caso si considera una modifica dell'azione di Einstein-Hilbert alle scale di energia dell'inflazione.

Uno degli esempi più semplici in questo senso è costituito dalle teorie  $f(R)$ ;

- Mediante l'adozione di **termini cinetici non canonici:**

L'azione (1.39) ha un termine cinetico canonico  $\mathcal{L} = X - V(\varphi)$  dove

$$X = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi.$$

Possiamo supporre che ad alte energie per effetto del gruppo di rinormalizzazione si generi un termine non canonico effettivo del tipo:

$$\mathcal{L} = F(\varphi, X) - V(\varphi) \quad (1.57)$$

dove  $F(\varphi, X)$  è una funzione che dipende dal campo  $\varphi$  e dalle sue derivate.

# Capitolo 2

## Perturbazioni cosmologiche

### 2.1 Classificazione delle perturbazioni

Uno dei problemi della cosmologia standard è quello di spiegare l'origine delle perturbazioni primordiali, l'inflazione fornisce una naturale spiegazione a questo quesito: le perturbazioni primordiali sono originate da fluttuazioni quantistiche.

Queste fluttuazioni quantistiche vengono amplificate sino a scale galattiche a seguito della fase inflazionaria.

Uno dei problemi maggiori nello studiare le perturbazioni è la scelta delle coordinate, infatti al contrario dell'Universo omogeneo ed isotropo descritto nel precedente capitolo dove è stato possibile scegliere un sistema di riferimento privilegiato (sistema comovente), in questo caso non c'è un'ovvia scelta.

La nostra libertà nella scelta delle coordinate può causare la comparsa di perturbazioni fittizie, cioè perturbazioni che non descrivono perturbazioni reali, ma riflettono solo la proprietà del sistema di riferimento usato.

Prendiamo come esempio un Universo omogeneo isotropo con densità di energia

$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t)$  ed effettuiamo una trasformazione della coordinata temporale

$t \rightarrow \tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x}, t)$ .

La densità di energia  $\tilde{\epsilon}(\tilde{t}, \mathbf{x}) = \epsilon(t(\tilde{t}, \mathbf{x}))$  sull'ipersuperficie a  $\tilde{t} = cost$  dipenderà dalle coordinate spaziali  $\mathbf{x}$ .

Assumendo  $dt \ll t$  possiamo scrivere la densità di energia in funzione della nuova scelta di coordinate:

$$\epsilon(t) = \epsilon(\tilde{t} - \delta t(\mathbf{x}, t)) \simeq \epsilon(\tilde{t}) - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \delta t = \epsilon(\tilde{t}) + \delta \epsilon(\mathbf{x}, \tilde{t}). \quad (2.1)$$

$\epsilon(\tilde{t})$  può essere interpretato come la densità di energia del background nel nuovo sistema di riferimento, mentre  $\delta \epsilon$  rappresenta una perturbazione fittizia dovuta alla nuova scelta di coordinate.

L'esistenza di gradi di libertà fittizi non è una caratteristica particolare della teoria delle

perturbazioni cosmologiche.

Anche l'elettromagnetismo (e in generale le teorie di gauge per le descrizioni delle interazioni fondamentali) hanno un problema simile.

La Relatività Generale infatti è una teoria di gauge rispetto alla riparametrizzazione dello spaziotempo.

Per evitare la comparsa di questo problema dobbiamo perciò introdurre le variabili gauge-invarianti: variabili che descrivono le perturbazioni ma non dipendono dalla particolare scelta del sistema di coordinate.

Studiamo le perturbazioni della metrica in un Universo piatto di Friedmann.

La metrica può essere decomposta in una parte omogenea e una parte perturbata:

$$ds^2 = (g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}(x^\gamma)) dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

dove:

$$|g_{\mu\nu}^{(0)}| \gg |\delta g_{\mu\nu}|, \quad (2.3)$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau)(d\tau^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (2.4)$$

Possiamo decomporre le perturbazioni della metrica in pezzi irriducibili in base alla simmetria dell'Universo omogeneo ed isotropo di background, che è invariante sotto il gruppo delle traslazioni e rotazioni spaziali.

Le componenti delle perturbazioni sotto il gruppo di simmetria del background assumono la seguente forma:

$$\delta g_{00} = 2a^2 \phi, \quad (2.5)$$

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_{,i} + S_i), \quad (2.6)$$

$$\delta g_{ij} = a^2 (2\psi \delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (2.7)$$

dove  $\phi, \psi, E$  e  $B$  sono scalari,  $S_i$  e  $F_i$  sono vettori a divergenza nulla e  $h_{ij}$  è un tensore a traccia nulla, trasverso e simmetrico.

La virgola con l'indice indica la differenziazione rispetto alla corrispondente coordinata spaziale (ad esempio  $B_{,i} = \partial B / \partial x^i$ ).

Il numero di funzioni indipendenti sono dieci, pari al numero delle componenti indipendenti di  $\delta g_{\mu\nu}$ .

Riassumendo possiamo classificare le perturbazioni della metrica in:

- **Perturbazioni scalari**

Sono caratterizzate da quattro funzioni scalari  $\psi, B, E$  e  $\phi$ .

Esse sono indotte dalle disomogeneità della densità di energia ed esibiscono l'instabilità gravitazionale che porta alla formazione di strutture nell'Universo.

Il numero totale dei gradi di libertà ad esse associati è quattro ( $4 \cdot 1$ ).

- **Perturbazioni vettoriali**

Sono caratterizzate da due vettori  $S_i$  e  $F_i$  a divergenza nulla ( $S^i{}_{,i} = 0 = F^i{}_{,i}$ ).

Esse sono legate al moto rotazionale del fluido che guida l'espansione dell'Universo, decadono come  $1/a$  perciò non sono molto interessanti dal punto di vista cosmologico.

Il numero totale dei gradi di libertà è quattro ( $2 \cdot 3 - 2$ ).

- **Perturbazioni tensoriali**

Sono caratterizzate da un tensore  $h_{ij}$  simmetrico ( $h_{ij} = h_{ji}$ ), trasverso ( $h^i{}_{,i} = 0$ ) e a traccia nulla ( $h^i{}_{,i} = 0$ ) che descrive le onde gravitazionali, che sono i gradi di libertà del campo gravitazionale stesso.

Il numero totale dei gradi di libertà è due ( $6 - 1 - 3 = 2$ ).

In approssimazione lineare, i diversi tipi di perturbazioni (scalari, vettoriali e tensoriali) evolvono indipendentemente, pertanto possiamo studiarle separatamente.

Scriviamo ora le perturbazioni in forma gauge invariante.

Consideriamo la seguente trasformazione delle coordinate:

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (2.8)$$

dove  $\epsilon^\mu$  è una funzione infinitesima dello spaziotempo.

Si può dimostrare che la legge di trasformazione di coordinate per le perturbazioni della metrica nel sistema di coordinate  $\tilde{x}$  è la seguente:

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}{}_{,\gamma} \epsilon^\gamma - g_{\gamma\nu}^{(0)} \epsilon^\gamma{}_{,\mu} - g_{\mu\gamma}^{(0)} \epsilon^\gamma{}_{,\nu}. \quad (2.9)$$

Utilizzando questa legge di trasformazione e scrivendo la componente spaziale di  $\epsilon^\mu$  come:

$$\epsilon^i = \epsilon_\perp^i + \zeta^i \quad (2.10)$$

dove  $\epsilon_\perp^i$  è un vettore a divergenza nulla ( $\epsilon_\perp^i{}_{,i} = 0$ ) e  $\zeta$  è una funzione scalare, possiamo scrivere la legge di trasformazione delle diverse componenti delle perturbazioni della metrica nella seguente forma:

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\epsilon^0)', \quad (2.11)$$

$$\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2 [\epsilon_\perp^i{}_{,i} + (\zeta' - \epsilon^0)_{,i}], \quad (2.12)$$

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2 \left[ 2 \frac{a'}{a} \delta_{ij} \epsilon^0 + 2\zeta_{,ij} + \epsilon_{\perp i,j} + \epsilon_{\perp j,i} \right] \quad (2.13)$$

dove con ' si indica la derivata calcolata rispetto al tempo conforme.

Combinando questi risultati, possiamo derivare la legge di trasformazione per i differenti tipi di perturbazione:

- **Perturbazioni scalari**

Considerando solo le perturbazioni scalari, la metrica prende la forma:

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi)d\tau^2 + 2B_{,i} dx^i d\tau - ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij})dx^i dx^j]. \quad (2.14)$$

Sotto una generica trasformazione delle coordinate, le funzioni si trasformano nel seguente modo:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\epsilon^0)', \quad (2.15)$$

$$\tilde{B} = B + \zeta' - \epsilon^0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\epsilon^0, \quad (2.17)$$

$$\tilde{E} = E + \zeta. \quad (2.18)$$

Possiamo perciò combinare opportunamente le funzioni scalari per ottenere le seguenti variabili gauge invarianti:

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]', \quad (2.19)$$

$$\Psi = \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \quad (2.20)$$

Queste variabili gauge indipendenti sono chiamati Potenziali di Bardeen.

Essi non cambiano sotto trasformazioni di coordinate, se sono nulli in un sistema di riferimento allora saranno nulli in tutti gli altri.

Ovviamente si possono costruire un'infinità di variabili gauge invarianti dalla combinazione dei potenziali di Bardeen, dato che una combinazione di variabili gauge indipendenti sarà gauge indipendente a sua volta.

- **Perturbazioni vettoriali**

Considerando solo le perturbazioni vettoriali, la metrica prende la seguente forma:

$$ds^2 = a^2 [d\tau^2 + 2S_i dx^i d\tau - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i})dx^i dx^j]. \quad (2.21)$$

Sotto una generica trasformazione delle coordinate, le variabili  $S_i$  e  $F_i$  si trasformano secondo le seguenti equazioni:

$$\tilde{S}_i = S_i + \epsilon'_{\perp i}, \quad (2.22)$$

$$\tilde{F}_i = F_i + \epsilon_{\perp i}, \quad (2.23)$$

in questo modo troviamo la variabile gauge-invariante:

$$\tilde{V}_i = \tilde{S}_i - \tilde{F}'_i. \quad (2.24)$$

- **Perturbazioni tensoriali**

Infine per le perturbazioni tensoriali, la metrica prende la seguente forma:

$$ds^2 = a^2 [d\tau^2 - (\delta_{ij} - h_{ij})dx^i dx^j] \quad (2.25)$$

dove  $h_{ij}$  è già la variabile gauge-invariante.

## 2.2 Dinamica del campo e delle perturbazioni

Per derivare le equazioni delle perturbazioni cosmologiche, all'ordine più basso dobbiamo linearizzare le equazioni di Einstein per piccole disomogeneità rispetto all'Universo di Friedmann:

$$\delta G_\nu^\mu = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \delta T_\nu^\mu. \quad (2.26)$$

$\delta G^\mu$  e  $\delta T_\nu^\mu$  non sono gauge invarianti, tuttavia è possibile combinare  $T_\nu^\mu$  con le perturbazioni della metrica per ottenere quantità gauge invarianti:

$$\delta \tilde{T}_0^0 = \delta T_0^0 - \left[ ({}^{(0)}T_0^0)' (B - E') \right], \quad (2.27)$$

$$\delta \tilde{T}_i^0 = \delta T_i^0 - \left[ ({}^{(0)}T_0^0 - ({}^{(0)}T_k^k/3) (B - E') \right]_{,i}, \quad (2.28)$$

$$\delta \tilde{T}_j^i = \delta T_j^i - \left[ ({}^{(0)}T_j^i)' (B - E') \right]. \quad (2.29)$$

In maniera analoga si può esprimere  $\delta G_\mu^\nu$  in funzione dei potenziali di Bardeen. Sostituendo i termini gauge invarianti così costruiti nell'equazione (2.26) troviamo:

$$\delta \tilde{G}_\nu^\mu = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \delta \tilde{T}_\nu^\mu. \quad (2.30)$$

Le componenti del tensore energia-impulso gauge invariante possono essere decomposte in contributi scalari, vettoriali e tensoriali in cui ogni contributo contribuirà solo all'evoluzione della perturbazione corrispondente.

Calcoliamo la (2.30) per le perturbazioni scalari utilizzando i potenziali di Bardeen:

$$\nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2} a^2 \delta \tilde{T}_0^0, \quad (2.31)$$

$$(\Psi + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2} a^2 \delta \tilde{T}_i^0, \quad (2.32)$$

$$\left[ \Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi) \right] \delta_{ij} - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,ij} = -\frac{4\pi}{m_{Pl}^2} a^2 \delta \tilde{T}_j^i \quad (2.33)$$

dove abbiamo definito  $\mathcal{H} = a'/a$ .

Queste equazioni sono valide in qualunque sistema di riferimento e dipendono dal tipo di tensore energia-impulso.

Dato che siamo interessati alle perturbazioni sul contesto inflazionario con la presenza di un singolo campo scalare, utilizzeremo il tensore energia-impulso di un campo scalare dato dall'equazione (1.41).

Calcoliamo le equazioni del moto del campo scalare e delle sue perturbazioni: consideriamo quindi un campo scalare  $\varphi$  minimamente accoppiato la cui azione in uno spazio curvo è dato da:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right). \quad (2.34)$$

Variando l'azione troviamo l'equazione di Klein Gordon in uno spazio curvo :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right) + V_{,\varphi} = 0. \quad (2.35)$$

Possiamo formalmente dividere il campo in un contributo imperturbato omogeneo ed isotropo  $\varphi_0(\tau)$  e una parte disomogenea che tratteremo come una perturbazione  $\delta\varphi(\tau, \mathbf{x})$ :

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \varphi_0(\tau) + \delta\varphi(\tau, \mathbf{x}). \quad (2.36)$$

Dato che una perturbazione del campo scalare induce una perturbazione scalare della metrica, utilizziamo l'equazione (2.14) come metrica e sostituiamo all'equazione (2.35) ottenendo:

$$\varphi_0'' + 2\mathcal{H}\varphi_0' + a^2 V_{,\varphi} = 0 \quad (2.37)$$

per la parte omogenea e

$$\begin{aligned} & \delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2 [\delta\varphi - \varphi_0'(B - E')] \\ & + a^2 V_{,\varphi\varphi} \delta\varphi - \varphi_0'(3\psi + \phi)' + 2a^2 V_{,\varphi} \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

per le perturbazioni.

Possiamo riscrivere questa equazione utilizzando l'equazione omogenea, le variabili di Bardeen e la perturbazione scalare del campo gauge indipendente:

$$\tilde{\delta\varphi} = \delta\varphi - \varphi_0'(B - E') \quad (2.39)$$

trovando la seguente equazione:

$$\tilde{\delta\varphi}'' + 2\mathcal{H}\tilde{\delta\varphi}' - \nabla^2 \tilde{\delta\varphi} + a^2 V_{,\varphi\varphi} \tilde{\delta\varphi} - \varphi_0'(3\Psi + \Phi)' + 2a^2 V_{,\varphi} \Phi = 0. \quad (2.40)$$

Questa equazione ha tre incognite:  $\tilde{\delta\varphi}$  e le variabili di Bardeen, dunque è necessario considerare le equazioni di Einstein per trovare l'evoluzione delle perturbazioni.

Utilizzando il tensore energia impulso del campo scalare  $\varphi$ :

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\gamma} \varphi_{,\gamma} \varphi_{,\nu} - (g^{\gamma\delta} \varphi_{,\gamma} \varphi_{,\delta} - V(\varphi)) \delta_\nu^\mu \quad (2.41)$$

notiamo subito che  $\delta T_j^i = 0$  quando  $i \neq j \rightarrow \Psi = \Phi$ , mentre la componente gauge invariante  $\delta \tilde{T}_i^0$  del tensore energia impulso è:

$$\delta \tilde{T}_i^0 = \frac{1}{a^2} (\varphi'_0 \delta \tilde{\varphi})_{,i}. \quad (2.42)$$

Troviamo allora che l'equazione (2.32) assume la seguente forma:

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2} \varphi'_0 \delta \tilde{\varphi}. \quad (2.43)$$

Prendendo la traccia spaziale ( $i = j$ ) dell'equazione (2.33), dividendo per tre, sottraendo ad essa l'equazione (2.31) ed eliminando  $\delta \tilde{\varphi}$  con il vincolo dell'equazione (2.43) troviamo l'equazione di evoluzione del potenziale gravitazionale generalizzato  $\Phi$ :

$$\Phi'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} \right) \Phi' + 2 \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} \right) \Phi - \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.44)$$

Una volta risolta, possiamo calcolare le perturbazioni scalari del campo dal vincolo (2.43), in questo modo le equazioni (2.44) e (2.43) determinano completamente la dinamica delle perturbazioni scalari.

## 2.2.1 Risoluzione dell'equazione delle perturbazioni

Possiamo studiare un caso semplificato in modo da comprenderne meglio la fisica.

Consideriamo un campo scalare massless ( $V_{,\varphi\varphi} = 0$ ) in un Universo di Friedmann "rigido" (quindi un background fisso, non perturbato).

In questo caso parleremo di dinamica di un campo di prova ovvero di un campo che non perturba sensibilmente la metrica.

Nella (2.40) possiamo trascurare i contributi della metrica perturbata e ridurre  $\delta \tilde{\varphi} = \delta \varphi$ . L'equazione (2.40) assumerà la forma:

$$\delta \varphi'' + 2\mathcal{H}\delta \varphi' - \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.45)$$

Per risolvere questa equazione del moto, espandiamo il campo attraverso la trasformata di Fourier:

$$\delta \varphi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} [\delta \varphi_{\mathbf{k}}(\tau) b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \delta \varphi_{\mathbf{k}}^*(\tau) b_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (2.46)$$

dove  $\mathbf{x}$  è la coordinata comovente e  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda comovente.

Sostituendo l'equazione (2.46) nell'equazione (2.45) troviamo:

$$\delta \varphi''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}\delta \varphi'_{\mathbf{k}} + k^2 \delta \varphi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.47)$$

Ridefinendo il campo :

$$u_k = a(\tau)\delta\varphi_{\mathbf{k}} \quad (2.48)$$

troviamo che le funzioni  $u_k$  obbediscono all'equazione di un oscillatore armonico con frequenza dipendente dal tempo:

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0. \quad (2.49)$$

La soluzione dipenderà dall'evoluzione dello spaziotempo di background attraverso il fattore  $a''/a$ , che a sua volta dipenderà dall'equazione di stato  $w$  del fluido che ne determina l'evoluzione.

L'equazione di stato  $w$  è legata ad  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$  dalla relazione:

$$\epsilon = \frac{3}{2}(w + 1). \quad (2.50)$$

Possiamo considerare senza perdere di generalità il caso in cui  $\epsilon = \text{cost} < 1$ .

Riscriviamo la seconda equazione di Friedmann nel tempo conforme:

$$\frac{a''}{a} = \frac{(2 - \epsilon)}{(1 - \epsilon)^2} \frac{1}{\tau^2} \quad (2.51)$$

sostituendo la (2.51) alla (2.49) troviamo:

$$\tau^2(1 - \epsilon)^2 u_k'' + [(k\tau)^2(1 - \epsilon)^2 - (2 - \epsilon)] u_k = 0. \quad (2.52)$$

Questa è l'equazione di Bessel, la cui soluzione è:

$$u_k = \sqrt{-k\tau} [C_k H_\nu^{(1)}(-k\tau) + D_k H_\nu^{(2)}(-k\tau)] \quad (2.53)$$

con indice:

$$\nu = \frac{3 - \epsilon}{2(1 - \epsilon)} \quad (2.54)$$

dove  $H_\nu^{(1)}(x)$  e  $H_\nu^{(2)}(x)$  sono le funzioni di Hankel di prima e seconda specie, rispettivamente,  $C_k$  e  $D_k$  sono costanti di integrazione.

Quindi l'equazione (2.49) in questo caso ammette soluzione esatta.

Andiamo ad analizzare il comportamento della soluzione trovata nel regime ultravioletto (lunghezza d'onda corta) e nel regime infrarosso (lunghezza d'onda lunga):

- Regime ultravioletto  $k^2 \gg a''/a$ .

In questo caso l'equazione (2.49) si riduce a:

$$u_k'' + k^2 u_k = 0 \quad (2.55)$$

la cui soluzione è:

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} (A_k e^{-ik\tau} + B_k e^{ik\tau}). \quad (2.56)$$

Le condizioni al contorno delle perturbazioni del campo attraverso le costanti  $A_k$  e  $B_k$  possono essere scelte imponendo opportune condizioni iniziali che discuteremo nel prossimo paragrafo.

Riscrivendo l'equazione (2.51):

$$\frac{a''}{a} = a^2 H^2 (2 - \epsilon) \simeq a^2 H^2 \quad (2.57)$$

abbiamo una chiara interpretazione fisica nel limite ultravioletto: le perturbazioni con lunghezza d'onda più piccola della scala di curvatura ( $k \gg aH$ ) oscillano esattamente come nello spaziotempo di Minkowski.

- Regime infrarosso  $k^2 \ll a''/a$ .

Nel limite infrarosso, l'equazione (2.49) diventa:

$$a'' u_k = a u_k''. \quad (2.58)$$

la cui soluzione è:

$$u_k = C_{1,k} a + C_{2,k} a \int d\tau \frac{1}{a^2} + O((k\tau)^2) \quad (2.59)$$

dove  $C_{1,k}$  e  $C_{2,k}$  sono costanti di integrazione.

Per  $a$  grande l'equazione si riduce a :

$$u_k \propto a \rightarrow \delta\varphi_k = \text{cost.} \quad (2.60)$$

In questo caso avviene il fenomeno del “congelamento”: la perturbazione con lunghezza maggiore del raggio di curvatura cessa di evolvere e diventa costante con un ampiezza non nulla.

## 2.3 Quantizzazione semiclassica delle perturbazioni

Per descrivere una teoria quantistica delle perturbazioni cosmologiche dovremmo avere una teoria quantistica della gravità che renda conto dell'influenza della quantizzazione dello spaziotempo.

In genere nello studio dell'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche si adotta l'approssimazione semiclassica, si considera cioè la quantizzazione delle sole perturbazioni in un

background classico determinato dalla soluzione delle equazioni omogenee.

È possibile trovare un unico campo gauge invariante che descriva le perturbazioni scalari, possa essere quantizzato imponendo le relazioni di commutazioni canoniche e che possa opportunamente normalizzare l'ampiezza delle fluttuazioni quantistiche.

Le variabili gauge invarianti  $\Phi$  e  $\tilde{\delta}\varphi$  non sono indipendenti ma sono legate dalle equazioni di Einstein, possiamo quindi combinarle per ottenere il grado di libertà fisico suddetto, chiamato variabile di Mukhanov-Sasaki(MS):

$$v(\tau, \mathbf{x}) \equiv a \left( \tilde{\delta}\varphi + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Phi \right), \quad (2.61)$$

che descrive le perturbazioni scalari.

Espandiamo l'azione del campo gravitazionale e della materia al secondo ordine nelle perturbazioni:

$$S [g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}, \varphi_0 + \delta\varphi] \simeq S^{(0)} [g_{\mu\nu}^{(0)}, \varphi_0] + S^{(2)} [g_{\mu\nu}^{(0)}, \delta g_{\mu\nu}, \varphi_0, \delta\varphi] \quad (2.62)$$

dove  $S^{(0)}$  è l'azione imperturbata e  $S^{(2)}$  è l'azione delle perturbazioni cosmologiche.

Notiamo che  $S^{(1)}$  è nulla a causa delle equazioni del moto omogenee.

Utilizzando le equazioni omogenee e i vincoli sulle perturbazioni, l'azione delle perturbazioni può essere riscritta mediante la variabile di MS nella forma:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int dx^3 d\tau \left[ (v')^2 + v \nabla^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right] \quad (2.63)$$

dove  $z = a\varphi'_0/\mathcal{H}$ .

Variando l'azione rispetto a  $v$  si ottiene la seguente equazione del moto:

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0, \quad (2.64)$$

che è formalmente simile all'equazione (2.49).

La procedura di quantizzazione sarà formalmente equivalente alla quantizzazione di un campo scalare  $v$  con massa dipendente dal tempo  $m^2 = -z''/z$ .

La dipendenza temporale della massa incorpora l'interazione delle perturbazioni con il background.

Definito il momento canonico coniugato a  $v$ :

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v'} = v' \quad (2.65)$$

possiamo facilmente quantizzare le variabili  $v$  e  $\pi$  attraverso la procedura canonica: le variabili  $v$  e  $\pi$  diventano operatori  $\hat{v}$  e  $\hat{\pi}$  che ad ogni istante  $\tau$  soddisfano le relazioni di

commutazione canoniche:

$$[\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.66)$$

$$[\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{v}(\tau, \mathbf{y})] = 0, \quad (2.67)$$

$$[\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.68)$$

L'operatore  $\hat{v}$  soddisferà alla stessa equazione del moto del campo classico  $v$ :

$$\hat{v}'' - \nabla^2 \hat{v} - \frac{z''}{z} \hat{v} = 0 \quad (2.69)$$

e la soluzione generale di quest'ultima equazione può essere formalmente scritta come:

$$\hat{v}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ v_k(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} v_k^*(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (2.70)$$

Notiamo in particolare che abbiamo espresso tutti i modi di Fourier con lo stesso  $|\mathbf{k}| = k$  in termini della stessa funzione  $v_k$ .

Questa possibilità è conseguenza dell'isotropia dell'Universo di Friedmann.

Gli operatori  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$  sono rispettivamente gli operatori di distruzione e creazione.

Essi soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.71)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = 0, \quad (2.72)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0. \quad (2.73)$$

Sostituendo l'espansione (2.70) nell'equazione (2.69) troviamo che le funzioni  $v_k(\eta)$  devono soddisfare alla seguente equazione:

$$v_k'' + \omega_k(\tau)^2 v_k = 0 \quad (2.74)$$

con:

$$\omega(\tau)^2 = k^2 - \frac{z''}{z}. \quad (2.75)$$

Le due funzioni  $v_k$  e  $v_k^*$  sono linearmente indipendenti, questo implica che il loro Wronskiano  $W$  è non nullo ed indipendente dal tempo.

Utilizzando le relazioni di commutazione canoniche tra  $v$  e il suo momento coniugato troviamo che le funzioni  $v_k$  dovranno soddisfare la condizione:

$$W[v_k, v_k^*] = v_k v_k'^* - v_k' v_k^* = 2i. \quad (2.76)$$

Questa condizione tuttavia non determina in maniera univoca  $v_k$ .

Posto:

$$u_k(\tau) = \alpha_k v_k(\tau) + \beta_k v_k^*(\tau) \quad (2.77)$$

dove  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  sono coefficienti complessi indipendenti nel tempo, anche la (2.77) sarà soluzione dell'equazione (2.74).

Inoltre, se i coefficienti soddisfano la relazione:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (2.78)$$

anche la condizione (2.76) è rispettata.

Queste nuove funzioni  $u_k, u_k^*$  si associano un'altra coppia di operatori di creazione e distruzione, rispettivamente  $\hat{b}_{\mathbf{k}}^+$  e  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ , che sono legati ai primi da una trasformazione di Bogoliubov:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ = \alpha_k \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ + \beta_k^* \hat{b}_{-\mathbf{k}}, \quad (2.79)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \alpha_k^* \hat{b}_{\mathbf{k}} + \beta_k \hat{b}_{-\mathbf{k}}^+ \quad (2.80)$$

dove  $|\beta_k|^2 \rightarrow 0$  più velocemente di  $k^{-3}$  per  $k$  molto grande affinché le trasformazioni siano ben definite.

Questi nuovi operatori soddisfano le stesse regole di commutazione dei vecchi operatori:

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.81)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (2.82)$$

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}^+, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^+] = 0. \quad (2.83)$$

Per la prima coppia di operatori di creazione e distruzione possiamo definire lo stato di vuoto come:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0_a\rangle = 0 \quad (2.84)$$

per ogni  $\mathbf{k}$ .

Per la seconda coppia, possiamo ragionare analogamente definendo lo stato di vuoto come:

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}|0_b\rangle = 0 \quad (2.85)$$

per ogni  $\mathbf{k}$ .

Questi vuoti non sono gli stessi, quindi dobbiamo trovare un modo per definire in maniera univoca lo stato di vuoto fisico.

Noi siamo interessati solo alle perturbazioni che ad un dato tempo iniziale  $\tau_i$  possedevano una lunghezza d'onda minore del raggio di curvatura.

Questo è dovuto al fatto che tutte le perturbazioni che al tempo  $\tau_i$  possedevano una lunghezza d'onda maggiore del raggio di curvatura oggi avranno una lunghezza d'onda maggiore dell'orizzonte cosmologico.

Possiamo quindi considerare lo stato di vuoto iniziale in uno spaziotempo approssimabile allo spaziotempo Minkoskiano.

Le perturbazioni considerate soddisferanno la relazione  $k^2 \gg z''/z$ , questo implica che  $\omega_k(\tau)^2 > 0$ .

Questo ci permette di usare la definizione di vuoto come lo stato di minima energia, che in uno spazio di Friedmann corrisponde allo stato in cui non ci sono particelle per un osservatore comovente.

Scriviamo l'energia dell'azione (2.63):

$$E = \frac{1}{2} \int d^3k \left( |v'_k|^2 + \omega_k^2 |v_k|^2 \right). \quad (2.86)$$

La (2.86) è formata da termini positivi o nulli, quindi per minimizzare l'energia dobbiamo minimizzare l'integrando.

Scriviamo  $v_k$  in questa forma:

$$v_k = r_k e^{i\alpha_k} \quad (2.87)$$

dove  $r_k$  e  $\alpha_k$  sono funzioni reali.

Dalla condizione (2.76) troviamo:

$$r_k^2 \alpha'_k = 1. \quad (2.88)$$

Sostituendo queste equazioni alla (2.86), l'integrando prende la seguente forma:

$$E_k = \frac{1}{2} \left( r_k'^2 + \frac{1}{r_k^2} + \omega_k^2 r_k^2 \right). \quad (2.89)$$

Ogni termine è minimizzato quando:

$$r'_k(\tau_i) = 0, \quad (2.90)$$

$$r_k(\tau_i) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}. \quad (2.91)$$

Il fattore di fase rimane indeterminato, tuttavia è irrilevante e possiamo fissarlo a zero. Questa prescrizione permette di definire uno stato di vuoto comunemente noto come vuoto di Bunch-Davies (BD).

## 2.4 Contatto con le osservazioni

Ora ci focalizzeremo sul contatto della teoria con le osservazioni.

Le perturbazioni generate durante l'inflazione sono responsabili delle fluttuazioni della temperatura nella radiazione cosmica di fondo, studiando quindi lo spettro di queste fluttuazioni possiamo testare la nostra teoria.

Data una generica perturbazione  $\zeta$ , lo spettro di potenza per i suoi modi  $k$  si ottiene

calcolando la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti (a tempi uguali):

$$f(\mathbf{r}) = \langle \zeta(\tau, \mathbf{x}) \zeta(\tau, \mathbf{x}') \rangle \quad (2.92)$$

dove  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ .

Le parentesi che compaiono nell'equazione precedente rappresentano un valore di aspettazione se la fluttuazione è quantistica oppure un valore medio statistico, rappresentato come una media spaziale su un appropriato volume  $V$ , nel caso classico.

In quest'ultimo caso possiamo scrivere:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{x} \zeta(\mathbf{x}) \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{r}). \quad (2.93)$$

Effettuiamo la trasformata di Fourier di  $\zeta$  ottenendo:

$$f(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}'} e^{i((\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})}. \quad (2.94)$$

Notiamo che abbiamo espresso tutti i modi di Fourier con lo stesso  $|\mathbf{k}| = k$  in termini della stessa funzione  $\zeta_k$  data l'isotropia dell'Universo di Friedmann.

Utilizzando la rappresentazione integrale della delta di Dirac  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$  e la condizione di realtà  $\zeta_{-\mathbf{k}} = \zeta_{\mathbf{k}}^*$  troviamo:

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.95)$$

Passiamo quindi alle coordinate polari e integriamo sull'angolo solido ottenendo:

$$f(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\sin kr}{kr} P(k), \quad (2.96)$$

dove  $P(k)$  è lo spettro di potenza e vale:

$$P(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta_k|^2. \quad (2.97)$$

Lo spettro di potenza è approssimativamente l'ampiezza quadrata tipica delle fluttuazioni su distanze dell'ordine  $r = k^{-1}$ .

Le proprietà fisicamente rilevanti degli spettri primordiali sono quelle dei modi  $k \ll aH$ . Lo spettro di potenza si calcola nel suddetto limite e differisce di poco dallo spettro calcolato quando la lunghezza del modo è pari al raggio di Hubble  $\mathbf{r} = 1/aH$ .

Partiamo dalle perturbazioni scalari: calcolare lo spettro di potenza per il caso generale dell'equazione di MS è molto complicato, tuttavia è possibile fare delle semplificazioni che ci permetteranno di scrivere lo spettro di potenza in un caso abbastanza generale.

Scriviamo le relazioni tra le derivate rispetto al tempo conforme di  $z$  (indicate con l'apice) con le derivate rispetto al tempo cosmico (indicate con il punto):

$$z' = a\dot{z}, \quad (2.98)$$

$$z'' = a(a\ddot{z} + \dot{a}\dot{z}), \quad (2.99)$$

da cui si evince che:

$$\frac{z''}{z} = \frac{H}{\dot{\varphi}_0}(a\ddot{z} + \dot{a}\dot{z}). \quad (2.100)$$

Facciamo la derivata rispetto al tempo cosmico di  $z$ :

$$\dot{z} = a\dot{\varphi}_0 + \frac{a}{H}\ddot{\varphi}_0 - a\dot{\varphi}_0\frac{\dot{H}}{H^2} = a\dot{\varphi}_0 \left( 1 + \frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0 H} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (2.101)$$

Utilizzando le definizioni dei parametri di Slow Roll in questa forma:

$$\eta = -\frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0 H}, \quad (2.102)$$

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (2.103)$$

troviamo:

$$\dot{z} = a\dot{\varphi}_0(1 + \epsilon - \eta). \quad (2.104)$$

Calcoliamo inoltre la derivata seconda rispetto al tempo cosmico di  $z$ :

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= (1 + \epsilon - \eta)(\ddot{\varphi}_0 a + \dot{\varphi}_0 \dot{a}) = (1 + \epsilon - \eta)a\dot{\varphi}_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0} + \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ &= (1 + \epsilon - \eta)a\dot{\varphi}_0 H(1 - \eta). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Notiamo che abbiamo considerato i parametri di Slow Roll come costanti.

Questo è possibile perchè la loro derivata temporale è proporzionale al loro quadrato quindi al primo ordine nell'approssimazione di Slow Roll si possono considerare costanti. Sostituiamo all'equazione (2.100) ottenendo:

$$\frac{z''}{z} = a^2 H^2 (1 + \epsilon - \eta)(2 - \eta). \quad (2.106)$$

Dato che i parametri di Slow Roll sono piccoli fintanto che siamo in regime inflazionario, possiamo trascurare i termini di ordine superiore al primo ottenendo:

$$\frac{z''}{z} = a^2 H^2 (2 + 2\epsilon - 3\eta). \quad (2.107)$$

Nel caso di inflazione di De Sitter il fattore di scala ha un andamento di tipo esponenziale:

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (2.108)$$

e abbiamo che i parametri di Slow Roll sono nulli dunque:

$$\frac{z''}{z} = \frac{a''}{a} = -\frac{2}{\tau^2}. \quad (2.109)$$

In questo modo la formula di MS avrà la seguente forma:

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0 \quad (2.110)$$

che è formalmente uguale all'equazione (2.49) la cui soluzione è la stessa dell'equazione (2.53).

Lo spettro calcolato quando  $\epsilon = \text{cost}$  nel limite infrarosso è una potenza di  $k$ :

$$[P(k)]^{1/2} \propto \frac{H}{2\pi} \left( \frac{k}{aH(1-\epsilon)} \right)^{3/2-\nu} \quad (2.111)$$

dove:

$$\nu = \frac{3-\epsilon}{2(1-\epsilon)}. \quad (2.112)$$

Nel caso di De Sitter  $\epsilon = 0$  e lo spettro di potenza è costante:

$$P(k) \rightarrow \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (2.113)$$

In questo caso lo spettro risulterà indipendente da  $k$  e quindi tutti modi verranno amplificati con la stessa ampiezza.

Questa proprietà è chiamata invarianza di scala.

Nel caso di approssimazione di Slow-Roll  $\epsilon \simeq \text{cost}$ , la dipendenza dello spettro da  $k$  è ancora del tipo "legge di potenza":

$$P_s \propto k^{n_s-1} \quad (2.114)$$

dove:

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\eta. \quad (2.115)$$

Ora trattiamo le perturbazioni tensoriali: in analogia con le perturbazioni scalari, espandiamo l'azione di Einstein-Hilbert fino al secondo ordine nelle perturbazioni tensoriali della metrica ottenendo la seguente azione:

$$S^{(2)} = \frac{M_p^2}{8} \int d\tau d\mathbf{x} a^2 \left( (h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right) \quad (2.116)$$

dove  $h_{ij}$  è la variabile gauge-invariante per le perturbazioni tensoriali della metrica. Effettuiamo la trasformata di Fourier:

$$h_{ij} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\gamma=x,+} \epsilon(k)_{ij}^{\gamma} h_{k,\gamma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.117)$$

dove  $\epsilon_{ij}^{\gamma}$  rappresentano i due stati di polarizzazione dei modi tensoriali, e sostituiamo all'azione (2.116) ottenendo:

$$S^{(2)} = \frac{M_p^2}{4} \sum_{\gamma=x,+} \int d\tau d\mathbf{k} a^2 \left( (h'_{k,\gamma})^2 - k^2 (h_{k,\gamma})^2 \right). \quad (2.118)$$

Posto:

$$v_{k,\gamma} = \frac{aM_p}{\sqrt{2}} h_{k,\gamma} \quad (2.119)$$

otteniamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{\gamma=+,x} \int d\tau d\mathbf{k} \left( (v'_{k,\gamma})^2 - \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) (v_{k,\gamma})^2 \right). \quad (2.120)$$

L'azione di ogni modo delle due polarizzazioni quindi è formalmente simile all'azione della variabile di MS per le perturbazioni scalari, ed in particolare è la stessa nel caso di De Sitter.

Analogamente alle perturbazioni scalari calcolate nel precedente caso approssimato, possiamo trovare un andamento tipo legge di potenza per lo spettro tensoriale:

$$P_T \propto k^{n_T} \quad (2.121)$$

dove:

$$n_T = -2\epsilon. \quad (2.122)$$

L'ampiezza dello spettro di potenza tensoriale  $P_T$ , scalare  $P_s$  e i loro indici spettrali  $n_s$  e  $n_T$  non sono indipendenti.

Il rapporto tra lo spettro di potenza tensoriale e lo spettro di potenza scalare è dato da:

$$r = \frac{P_T}{P_s} = 16\epsilon. \quad (2.123)$$

Questa relazione è conosciuta come relazione di consistenza per l'inflazione in regime di Slow Roll a singolo campo.

## 2.5 Quantizzazione delle perturbazioni con la Gravità Quantistica Canonica

Il metodo illustrato nel precedente capitolo ha permesso di quantizzare le perturbazioni in un background classico.

Questo è il metodo tradizionalmente adottato di trattare le perturbazioni inflazionarie. Tuttavia se questa approssimazione è perfettamente lecita ad energie subplanckiane, alle scale dell'inflazione può essere più opportuno considerare gli effetti quantistici del background; questo è lo scopo di questa tesi.

Per quantizzare sia le perturbazioni sia il background utilizzeremo l'approccio sviluppato da Wheeler e DeWitt verso la fine degli anni 60' che va sotto il nome di Gravità Quantistica Canonica.

Questo approccio utilizza la formulazione hamiltoniana (o formulazione ADM) della Relatività Generale.

Per poter descrivere la Relatività Generale attraverso questa formulazione dobbiamo prendere lo spaziotempo, una varietà Riemanniana 3+1 dimensionale con metrica  $g_{\mu\nu}$ , ed effettuare una foliazione in un insieme di ipersuperfici tridimensionali di tipo spazio  $\Sigma$  parametrizzate dal tempo  $t$ :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{R} \times \Sigma. \quad (2.124)$$

Per garantire inoltre che la teoria sia invariante per diffeomorfismi (invariante per riparametrizzazione dei punti nello spaziotempo), tutte le possibili foliazioni di questo tipo dovranno essere equivalenti.

Questa formulazione utilizza come variabili dinamiche il tensore metrico  $h_{ab}$  delle ipersuperfici spaziali tridimensionali  $\Sigma$  e i loro momenti coniugati  $p^{ab}$ .

Usando queste variabili è possibile definire una hamiltoniana e scrivere le equazioni che descrivono la dinamica del sistema (equazioni di Hamilton).

Oltre alle equazioni dinamiche, questa formulazione porta a quattro equazioni vincolari che rappresentano la libertà nella scelta del sistema di riferimento (invarianza per diffeomorfismi).

La quantizzazione canonica, eleva poi le variabili dinamiche ad operatori che agiscono su un funzionale d'onda  $\Psi$ :

$$\hat{h}_{ab}\Psi = h_{ab}\Psi, \quad (2.125)$$

$$\hat{p}^{ab}\Psi = -i\frac{\delta}{\delta h_{ab}}\Psi, \quad (2.126)$$

portando ad una formulazione quantistica della gravità.

Per semplicità rimandiamo il lettore alla lettura dell'appendice A per una trattazione approfondita della teoria e focalizziamoci al caso del sistema inflatone-gravità.

Il sistema inflatone-gravit  è descritto dalla seguente azione:

$$S = \int_V d\tau d\mathbf{x} \sqrt{-g} \left[ -\frac{m_{Pl}^2}{16\pi} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (2.127)$$

dove abbiamo considerato il sistema all'interno di un volume finito  $V$  per non avere delle divergenze quando andremo ad integrare sullo spazio.

Questa azione pu  essere decomposta in una parte omogenea e una parte non omogenea che descrive le fluttuazioni come nell'equazione (2.62).

Le fluttuazioni scalari possono essere collettivamente descritte in modo gauge invariante attraverso la variabile di MS e, espandendo in serie di Fourier, l'azione delle perturbazioni ha la seguente forma:

$$S^{(2)} = \int_V d\tau \frac{1}{2} \left[ \sum_{k \neq 0}^\infty (v_k'^2 - \omega_k^2 v_k^2) \right] \quad (2.128)$$

dove  $\omega_k^2 = k^2 - z''/z$ .

La parte omogenea dell'azione ha la seguente forma:

$$S^{(0)} = \int_V d\tau d\mathbf{x} a^4 \left[ -\frac{m_{Pl}^2}{16\pi} R^{(0)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\mu \varphi_0 \partial^\nu \varphi_0 - V(\varphi_0) \right] \quad (2.129)$$

dove:

$$R^{(0)} = \frac{6}{a^2} \left[ \left( \frac{a'}{a} \right)' + \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \right], \quad (2.130)$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = a^2(\tau) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.131)$$

Nessuna variabile dipende dallo spazio perci  integrando nello spazio troviamo il volume  $L^3 \equiv \int_V d\mathbf{x}$ .

Si introduce cos  una lunghezza  $L$  non ben specificata che pu  essere per  riassorbita mediante le seguenti ridefinizioni:  $a \rightarrow a/L$ ,  $\tau \rightarrow \tau L$ ,  $v \rightarrow v\sqrt{L}$  e  $k \rightarrow k/L$  (equivalenti a porre  $L = 1$ ).

Possiamo scrivere esplicitamente l'azione della parte omogenea (a meno di un termine di bordo) come:

$$S^{(0)} = \int_V d\tau \frac{1}{2} \left[ -M_p^2 a'^2 + a^2 (\varphi_0'^2 - 2V(\varphi_0) a^2) \right] \quad (2.132)$$

dove  $M_p = \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} = \sqrt{\frac{6}{8\pi}} m_{Pl}$ .

L'azione totale sar :

$$S = \int_V d\tau \frac{1}{2} \left[ -M_p^2 a'^2 + a^2 (\varphi_0'^2 - 2V(\varphi_0) a^2) + \sum_{k \neq 0}^\infty (v_k'^2 - \omega_k^2 v_k^2) \right]. \quad (2.133)$$

Riscriviamo l'azione riparametrizzandola attraverso un parametro temporale arbitrario  $\tilde{\tau}$ .

Definita la funzione di ritardo come:

$$N(\eta) = \frac{a(\tau)d\tau}{d\tilde{\tau}}, \quad (2.134)$$

l'azione avrà la seguente forma:

$$S = \int d\tilde{\tau} \frac{N}{2a} \left[ -\frac{M_p^2 a^2 \dot{a}^2}{N^2} + a^4 \left( \frac{\dot{\varphi}_0^2}{N^2} - 2V(\varphi_0) \right) + \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left( \frac{\dot{v}_k^2 a^2}{N^2} - \omega_k^2 v_k^2 \right) \right], \quad (2.135)$$

dove il punto indica la derivata rispetto al nuovo parametro  $\tilde{\tau}$ .

La funzione di ritardo è un moltiplicatore di Lagrange dato che l'azione non contiene le sue derivate temporali, la variazione dell'azione rispetto ad essa porta alla seguente equazione vincolare:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta N} = \frac{M_p^2 a \dot{a}^2}{2N^2} - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0^2}{2N^2} - a^3 V - \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left( \frac{a \dot{v}_k^2}{2N^2} + \frac{\omega_k^2 v_k^2}{2a} \right) = 0. \quad (2.136)$$

Scriviamo la hamiltoniana attraverso la trasformata di Legendre:

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} + p_N \dot{N} + p_\varphi \dot{\varphi}_0 + \sum_k p_k \dot{v}_k - \mathcal{L} \quad (2.137)$$

dove:

$$p_N = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (2.138)$$

$$p_a = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{a}} = -\frac{M_p^2 a \dot{a}}{N}, \quad (2.139)$$

$$p_\varphi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}_0} = \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N}, \quad (2.140)$$

$$p_k = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{v}_k} = \frac{a \dot{v}_k}{N}. \quad (2.141)$$

Il fatto che il momento coniugato alla funzione di ritardo sia nulla è in accordo con il fatto che la funzione di ritardo non è una variabile dinamica.

Sostituendo i momenti canonici nella hamiltoniana abbiamo:

$$\mathcal{H} = -\frac{N p_a^2}{2a M_p^2} + \frac{N p_\varphi^2}{2a^3} + a^3 N V + \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left( \frac{N p_k^2}{2a} + \frac{N \omega_k^2 v_k^2}{2a} \right). \quad (2.142)$$

Notiamo che la hamiltoniana è proporzionale al vincolo (2.136):

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta N} = \frac{\mathcal{H}}{N} = 0 \quad (2.143)$$

che è chiamato vincolo Hamiltoniano.

Questo vincolo è dovuto all'invarianza dell'azione rispetto alla riparametrizzazione temporale.

Passiamo ora alla procedura di quantizzazione canonica: le variabili  $a, \varphi_0, \{v_k\}$  e i loro momenti coniugati diventano operatori che agiscono sulla funzione d'onda  $\Psi$ :

$$\hat{a}\Psi = a\Psi, \quad (2.144)$$

$$\hat{\varphi}_0\Psi = \varphi_0\Psi, \quad (2.145)$$

$$\hat{v}_k\Psi = v_k\Psi, \quad (2.146)$$

$$\hat{p}_a\Psi = -i\frac{\partial}{\partial a}\Psi, \quad (2.147)$$

$$\hat{p}_\varphi\Psi = -i\frac{\partial}{\partial \varphi_0}\Psi, \quad (2.148)$$

$$\hat{p}_k\Psi = -i\frac{\partial}{\partial v_k}\Psi. \quad (2.149)$$

La quantizzazione del vincolo (2.142) conduce infine all'equazione:

$$\left[ \frac{1}{2M_p^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2} + Va^4 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0}^{\infty} \left( -\frac{\partial^2}{\partial v_k^2} + \omega_k^2 v_k^2 \right) \right] \Psi(a, \varphi_0, \{v_k\}) = 0. \quad (2.150)$$

Questa equazione è chiamata equazione di Wheeler-DeWitt.

Al livello classico la funzione  $\omega_k$  che compare nell'equazione di Wheeler-DeWitt dipende solo dalle quantità omogenee  $a, \varphi_0$  e dalle loro derivate.

Questa dipendenza non è banale e, in particolare,  $\omega^2$  contiene derivate di ordine superiore al primo di  $a(\tau)$  e  $\varphi_0(\tau)$ .

Valutato sulla traiettoria classica  $\omega^2 = \omega^2(a)$  e procedendo nella quantizzazione trattiamo appunto  $\omega = \omega(a)$ .

In questo modo la sua dipendenza funzionale dalle derivate della parte omogenea non influisce nella definizione dei momenti coniugati ad  $a(\tau)$  e  $\varphi_0(\tau)$ .

Diversamente l'espressione di questi momenti coniugati miscelerebbe la parte omogenea con le perturbazioni.

Fisicamente quindi questa espressione equivale a trascurare effetti quantistici di ordine superiore al secondo in  $\hbar$ .

Possiamo riscrivere la funzione di Wheeler-DeWitt in maniera compatta:

$$\left[ \frac{1}{2M_p^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \hat{H}^{(M)} \right] \Psi(a, \varphi_0, \{v_k\}) = 0 \quad (2.151)$$

dove:

$$\hat{H}^{(M)} = \hat{H}_0^{(M)} + \sum_k \hat{H}_k^{(M)} \quad (2.152)$$

con:

$$\hat{H}_0^{(M)} = -\frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2} + V a^4, \quad (2.153)$$

$$\hat{H}_k = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v_k^2} + \omega_k^2 v_k^2 \right). \quad (2.154)$$

Notiamo che l'equazione (2.151) è formalmente simile all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo (a parte il segno di fronte al termine cinetico).

## 2.6 Approssimazione di Born-Oppenheimer

Trovare una soluzione generale per l'equazione di Wheeler-DeWitt è molto complicato dato l'accoppiamento non banale tra la gravità e la materia.

Tuttavia è possibile individuare nel sistema totale gradi di libertà associati a masse/tempi molto diversi tra loro.

Questo fatto ci permette di sfruttare l'approssimazione di Born-Oppenheimer (BO).

Questa tecnica è d'uso in fisica atomica ed è utilizzata per studiare il sistema nucleo-elettroni. Si considera, in prima approssimazione, il moto degli elettroni in configurazioni fisse del nucleo mentre per la dinamica del nucleo si utilizza un potenziale che tiene conto del moto medio degli elettroni.

Questo è giustificato dal fatto che la massa del nucleo è molto più grande della massa degli elettroni. I gradi di libertà associati al moto del nucleo sono definiti come i gradi di libertà "lenti" mentre i gradi di libertà associati al moto degli elettroni sono i gradi di libertà "veloci".

In analogia possiamo applicare la stessa approssimazione al nostro sistema: associamo i gradi di libertà "lenti" alla parte omogenea della gravità mentre i gradi di libertà "veloci" saranno associati alla materia (intesa come la parte omogenea del campo scalare più le perturbazioni).

La parte omogenea della gravità è caratterizzata da energie dell'ordine della massa di Planck e sarà influenzata dalla hamiltoniana media della materia mentre le energie in gioco della materia saranno molto inferiori rispetto alla massa di Planck.

Applichiamo la decomposizione BO iniziando dalla fattorizzazione della funzione d'onda  $\Psi$  in un prodotto:

$$\Psi(a, \varphi_0, \{v_k\}) = \psi(a) \chi(a, \varphi_0, \{v_k\}) \quad (2.155)$$

dove  $\psi(a)$  è la funzione d'onda per la parte omogenea gravitazionale mentre  $\chi(a, \varphi_0, \{v_k\})$  è la funzione d'onda per la materia.

Notiamo che le variabili della funzione d'onda sono il fattore di scala  $a$ , il campo scalare omogeneo  $\varphi_0$  e i coefficienti di Fourier della variabile di MS  $\{v_k\}$ .

La funzione d'onda della materia può essere ulteriormente fattorizzata vista la forma dell'equazione di Wheeler-DeWitt:

$$\chi(a, \varphi_0, \{v_k\}) = \chi_0(a, \varphi_0) \prod_{k \neq 0}^{\infty} \chi_k(a, v_k) = \prod_{k=0}^{\infty} \chi_k. \quad (2.156)$$

Partendo dall'equazione (2.151), utilizzando la fattorizzazione descritta dall'equazione (2.155) e moltiplicando a sinistra per  $\langle \chi |$  troviamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} + 2 \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \frac{\partial \psi}{\partial a} + \langle \chi | \frac{\partial^2 \chi}{\partial a^2} \rangle \psi + 2M_p^2 \langle \chi | \hat{H}^{(M)} | \chi \rangle \psi = 0 \quad (2.157)$$

dove:

$$\langle \chi | \chi \rangle = 1. \quad (2.158)$$

Effettuando le seguenti trasformazioni di fase:

$$\psi = e^{-i \int^a A da'} \tilde{\psi}, \quad (2.159)$$

$$\chi = e^{i \int^a A da'} \tilde{\chi}, \quad (2.160)$$

con:

$$\mathcal{A} = -i \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \quad (2.161)$$

troviamo le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \left( - \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \tilde{\psi} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \right) e^{-i \int^a A da'}, \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = \left( - \langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \tilde{\psi} - \langle \chi | \frac{\partial^2 \chi}{\partial a^2} \rangle \tilde{\psi} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial a^2} + \left( \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \right)^2 \tilde{\psi} - 2 \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \right) e^{-i \int^a A da'}, \quad (2.163)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial a} = \left( \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \tilde{\chi} + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \right) e^{i \int^a A da'}, \quad (2.164)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial a^2} = \left( \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial a^2} + \langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \tilde{\chi} + \left( \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \right)^2 \tilde{\chi} + \langle \chi | \frac{\partial^2 \chi}{\partial a^2} \rangle \tilde{\chi} + 2 \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \right) e^{i \int^a A da'} \quad (2.165)$$

da cui:

$$\left\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \frac{\partial \chi}{\partial a} \right\rangle = \left( \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \chi \right\rangle \langle \tilde{\chi} | + \left\langle \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} | \right\rangle \right) \left( \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \chi \right\rangle | \tilde{\chi} \rangle + \left| \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \right\rangle \right). \quad (2.166)$$

Inoltre calcolando la derivata rispetto al fattore di scala dell'equazione  $\langle \chi | \chi \rangle = 1$  troviamo la seguente relazione:

$$\langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle = -\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \chi \rangle, \quad (2.167)$$

e facendo la derivata rispetto al fattore di scala dell'equazione (2.160), moltiplicando a sinistra per  $\langle \chi |$  otteniamo:

$$\langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle = \langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle + \langle \tilde{\chi} | \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \rangle, \quad (2.168)$$

da cui si evince che:

$$\langle \tilde{\chi} | \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \rangle = 0. \quad (2.169)$$

Sostituendo queste due relazioni nell'equazione (2.166) troviamo:

$$\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle = -\langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle^2 + \langle \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} | \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \rangle. \quad (2.170)$$

Calcoliamo la derivata rispetto al fattore di scala dell'equazione (2.169) e sostituiamo nell'equazione precedente per ottenere:

$$\langle \frac{\partial \chi}{\partial a} | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle = -\langle \chi | \frac{\partial \chi}{\partial a} \rangle^2 - \langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \rangle, \quad (2.171)$$

dove:

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \tilde{\chi} | \hat{O} | \tilde{\chi} \rangle. \quad (2.172)$$

Sostituiamo queste relazioni nell'equazione (2.160) e troviamo l'equazione per la funzione d'onda della gravità:

$$\left[ \frac{1}{2M_p^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right] \tilde{\psi} = -\frac{1}{2M_p^2} \langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \rangle \tilde{\psi}. \quad (2.173)$$

Questa equazione è chiamata equazione della gravitazione.

Essa corrisponde all'equazione per il nucleo atomico nel contesto tradizionale dell'approssimazione di BO.

Il lato destro della (2.173) in tale contesto viene trattato come una perturbazione ed è associato ad effetti non adiabatici nel moto del nucleo rispetto agli elettroni.

Ora troviamo l'equazione per la materia: partendo dall'equazione (2.151) e utilizzando la fattorizzazione:

$$\Psi(a, \varphi_0, \{v_k\}) = \tilde{\psi}(a) \tilde{\chi}(a, \varphi, \{v_k\}), \quad (2.174)$$

troviamo:

$$\frac{1}{2M_p^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial a^2} \tilde{\chi} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial a^2} \tilde{\psi} + 2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} \right) + H^{(M)} \tilde{\psi} \tilde{\chi} = 0. \quad (2.175)$$

Utilizzando l'equazione (2.173) riscriviamo la derivata seconda rispetto al fattore di scala come:

$$\frac{1}{2M_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial a^2} = \frac{1}{2M_p^2} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle \tilde{\psi} - \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \tilde{\psi}, \quad (2.176)$$

sostituendo questa relazione nell'equazione precedente e moltiplicandola per  $\tilde{\psi}^*$  troviamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} \left[ \hat{H}^{(M)} - \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right] \tilde{\chi} + \frac{1}{M_p^2} \left( \tilde{\psi}^* \frac{\partial}{\partial a} \tilde{\psi} \right) \frac{\partial}{\partial a} \tilde{\chi} \\ = \frac{1}{2M_p^2} \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} \left[ \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle - \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (2.177)$$

Questa è l'equazione della materia.

Essa corrisponde all'equazione per gli elettroni nel contesto tradizionale della BO.

Il lato destro è inoltre trattato come una perturbazione.

Notiamo che dividendo l'equazione della materia per  $\tilde{\psi}^* \tilde{\psi}$  rimane comunque un termine del tipo:

$$\frac{1}{M_p^2} \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a}. \quad (2.178)$$

Questo significa che abbiamo un accoppiamento non banale tra la materia descritta dall'equazione (2.177) e la parte omogenea della gravità descritta dall'equazione (2.173).

È importante notare che la decomposizione Born-Oppenheimer ha generato, nell'equazione della materia, un termine proporzionale alla derivata rispetto al fattore di scala di  $\tilde{\chi}$ .

Questo contributo è necessario per ottenere l'equazione di evoluzione standard per la funzione d'onda della materia (analogo all'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo). Questo termine dipende pure dalla derivata rispetto al fattore di scala della funzione d'onda della gravità.

La dinamica del fattore di scala (che a livello classico è descritta, ad esempio, dal parametro di Hubble  $H$ ) è quindi legata all'evoluzione temporale della materia (come lo è a livello classico). Al livello completamente quantistico questo legame può essere non banale.

L'equazione (2.177) può essere divisa ulteriormente in un insieme di equazioni, ognuna delle quali governa la dinamica del singolo modo  $k$  del campo della materia.

Posto:

$$\tilde{\chi} = \prod_j \tilde{\chi}_j \quad (2.179)$$

con  $\tilde{\chi}_j = \tilde{\chi}_j(a, v_j)$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial a} = \frac{\partial \tilde{\chi}_j}{\partial a} \prod_{j \neq k} \tilde{\chi}_k + \tilde{\chi}_j \sum_{j \neq k} \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} \prod_{i \neq j \neq k} \tilde{\chi}_i, \quad (2.180)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\chi}^2}{\partial a^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_j}{\partial a^2} \prod_{j \neq k} \tilde{\chi}_k + 2 \frac{\partial \tilde{\chi}_j}{\partial a} \sum_{k \neq j} \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} \prod_{i \neq k \neq j} \tilde{\chi}_i \\ &+ \tilde{\chi}_j \left( \sum_{k \neq j} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_k}{\partial a^2} \prod_{i \neq j \neq k} \tilde{\chi}_i + \sum_{j \neq k} \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} \sum_{i \neq j \neq k} \frac{\partial \tilde{\chi}_i}{\partial a} \prod_{m \neq i \neq k \neq j} \tilde{\chi}_m \right) \end{aligned} \quad (2.181)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle = \sum_j \left\langle \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle_j \quad (2.182)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle = \sum_j \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle_j + \sum_j \sum_{j \neq k} \left\langle \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle_j \left\langle \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle_k \quad (2.183)$$

dove:

$$\langle \hat{O} \rangle_k \equiv \langle \tilde{\chi}_k | \hat{O} | \tilde{\chi}_k \rangle. \quad (2.184)$$

Inoltre:

$$\hat{H} = \hat{H}_j + \sum_{k \neq j} \hat{H}_k \quad (2.185)$$

dove  $\hat{H}_j = \hat{H}_j(\hat{a}, \hat{v}_j, \hat{\pi}_j)$ , da cui segue che:

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}_j \rangle_j + \sum_{k \neq j} \langle \hat{H}_k \rangle_k. \quad (2.186)$$

Sostituendo tutte queste relazioni all'equazione (2.177) e moltiplicando ambo i membri per  $\prod_{j \neq k} \langle \tilde{\chi}_k |$  troviamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} \left[ \hat{H}_k^{(M)} - \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k \right] \tilde{\chi}_k + \frac{1}{M_p^2} \left( \tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \right) \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} \\ = \frac{1}{2M_p^2} \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} \left[ \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle_k - \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right] \tilde{\chi}_k. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Quindi è possibile decomporre alla Born-Oppenheimer il sistema iniziale ed ottenere un insieme di equazioni disaccoppiate per i modi di Fourier del campo delle perturbazioni. Si noti che fino a questo punto la decomposizione è esatta ed il sistema di equazioni formato dalle equazioni (2.187) e (2.173) è equivalente all'equazione di Wheeler-DeWitt iniziale.

L'equazione per la parte omogenea della gravità determina la funzione  $\psi(a)$  in relazione

al valor medio della hamiltoniana della materia e dei contributi non adiabatici che comunemente compaiono nell'approccio di Born-Oppenheimer.

É possibile utilizzare l'approssimazione semiclassica (WKB) per scriverne formalmente la soluzione.

Questa soluzione, sostituita nelle equazioni delle perturbazioni, fisserà l'evoluzione temporale di queste ultime.

### 2.6.1 Approssimazione WKB

Vediamo come sia possibile utilizzare l'approssimazione WKB per l'equazione d'onda della parte omogenea della gravità.

Nel caso in cui possiamo considerare  $M_p \rightarrow \infty$  possiamo trascurare le fluttuazioni quantistiche gravitazionali e scrivere l'equazione (2.173) in questa forma:

$$\left[ -\frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + M_p V(a) \right] \tilde{\psi} \simeq 0 \quad (2.188)$$

dove:

$$V(a) = -\langle \hat{H}^{(M)} \rangle. \quad (2.189)$$

L'equazione (2.188) è formalmente identica all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo con un'energia nulla.

É possibile risolvere formalmente questa equazione usando il metodo WKB: assumiamo che la funzione d'onda della parte omogenea della gravità si possa scrivere come una funzione esponenziale:

$$\tilde{\psi} = e^{iS(a)} \quad (2.190)$$

e andiamo a sostituirla all'equazione (2.188) ottenendo:

$$\left\{ -\frac{1}{2M_p} \left[ i \frac{d^2 S}{da^2} - \left( \frac{dS}{da} \right)^2 \right] + M_p V(a) \right\} \tilde{\psi} = 0. \quad (2.191)$$

Sviluppiamo  $S(a)$  in potenze di  $M_p$ :

$$S(a) = M_p S_0 + S_1 + M_p^{-1} S_2 \quad (2.192)$$

ed inseriamo l'espressione nella (2.191).

Al secondo ordine in  $M_p$  troviamo:

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial a} \right)^2 = 2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \quad (2.193)$$

la cui soluzione è:

$$S_0 = \pm \int^a da' \left( 2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right)^{1/2}. \quad (2.194)$$

Osserviamo che, formalmente, l'equazione (2.193) è uguale all'equazione di Hamilton-Jacobi classica.

Posto:

$$p_a \equiv M_p \frac{dS_0}{da} \quad (2.195)$$

possiamo scrivere l'equazione (2.193) in una forma più familiare:

$$\frac{p_a^2}{2M_p^2} = \langle \hat{H}^{(M)} \rangle. \quad (2.196)$$

Infatti classicamente,  $p_a$  si identifica con il momento associato al fattore di scala ( $p_a = M_p^2 a'$ ), e la (2.196) è proprio l'equazione di Friedmann:

$$H^2 \equiv \left( \frac{a'}{a^2} \right)^2 = \frac{2}{M_p^2} \frac{\langle \hat{H}^{(M)} \rangle}{a^4}. \quad (2.197)$$

Al livello quantistico  $p_a$  è una funzione del fattore di scala che definisce il contributo all'ordine  $M_p$  della fase della funzione d'onda della gravità  $\tilde{\psi}$ .

Al primo ordine in  $M_P$  troviamo la seguente equazione:

$$i \frac{d^2 S_0}{da^2} = 2 \frac{dS_0}{da} \frac{dS_1}{da}. \quad (2.198)$$

Utilizzando la definizione (2.195) quest'ultima equazione diventa:

$$\frac{d(\ln p_a)^{-1/2}}{da} = i \frac{dS_1}{da}. \quad (2.199)$$

che ha come soluzione:

$$iS_1 = (\ln p_a)^{-1/2} + c. \quad (2.200)$$

Trascurando contributi di ordine successivo in  $M_p$ , quindi, l'equazione (2.188) ha soluzione:

$$\tilde{\psi}(a) = \frac{1}{\sqrt{p_a}} \left( c_1 e^{iM_p \int^a da' \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle}} + c_2 e^{-iM_p \int^a da' \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle}} \right). \quad (2.201)$$

Si noti che la stessa soluzione si otterrebbe considerando pure gli effetti non adiabatici nell'equazione per la gravità.

Le costanti di integrazione  $c_1, c_2$  sono legate alle condizioni al contorno della funzione

d'onda della gravità.

Se consideriamo  $c_1 = 0$  e  $c_2 \neq 0$  o  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 = 0$  allora la densità di probabilità (quantistica):

$$\rho(a) \equiv \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} = \frac{c_{1,2}}{p_a} = \frac{1}{\langle \hat{H}^{(M)} \rangle^{1/2}} \quad (2.202)$$

coincide con quella classica.

Infatti classicamente la probabilità di trovare una particella in una certa posizione è inversamente proporzionale alla sua velocità di transito da quella stessa posizione ovvero:

$$\rho_{cl}(a) \simeq \frac{1}{a'} \simeq \frac{1}{\langle \hat{H}^{(M)} \rangle^{1/2}}. \quad (2.203)$$

Sostituendo la soluzione appena trovata nell'equazione della materia si ottiene:

$$\frac{1}{M_p^2} \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} \tilde{\chi}_k = \frac{1}{M_p^2} \left( \frac{d}{da} (\ln p_a)^{-1/2} \pm i M_p \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle} \right) \frac{\partial}{\partial a} \tilde{\chi}_k. \quad (2.204)$$

Il termine:

$$\pm i M_p \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle} \frac{\partial}{\partial a} \tilde{\chi}_k \quad (2.205)$$

in questo contesto, definisce correttamente l'evoluzione temporale e risulta perciò naturale introdurre il tempo attraverso il cambio di variabile:

$$\frac{d}{d\tau} = \pm \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle} \frac{\partial}{\partial a}. \quad (2.206)$$

Infatti questo cambio di variabile, nel limite classico, definisce proprio il tempo conforme: classicamente dalla (2.196) si ottiene:

$$\frac{d}{d\tau} = a' \frac{\partial}{\partial a} = \pm \frac{1}{M_p} \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle} \frac{\partial}{\partial a} \quad (2.207)$$

che è proprio il coefficiente che definisce il tempo nella (2.206).

Si noti che l'ambiguità nel segno davanti a  $\sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle}$  è associata all'espansione/contrazione del background (ovvero dal segno di  $a'$ ).

Infine il contributo:

$$\frac{1}{M_p^2} \left( \frac{d}{da} (\ln p_a)^{-1/2} \right) \quad (2.208)$$

della (2.204) può essere incorporato alle correzioni non adiabatiche.

L'introduzione del tempo tramite l'equazione (2.206) permette infine di convertire, nell'equazione della materia, tutte le derivate rispetto al fattore di scala con le derivate

rispetto al tempo conforme:

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{1}{a'} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.209)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} = \frac{1}{a'^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{a''}{a'^3} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.210)$$

$$(2.211)$$

ottenendo:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H}_k + \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k \right] \tilde{\chi}_k = \frac{1}{2M_p^2} \left[ \frac{1}{a'^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \langle \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \rangle_k \right) - \frac{2a''}{a'^3} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \langle \frac{\partial}{\partial \tau} \rangle_k \right) \right] \tilde{\chi}_k. \quad (2.212)$$

Notiamo che abbiamo aggiunto il termine identicamente nullo  $\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \rangle_k$  per avere alla destra dell'equazione un'espressione della forma  $(\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle_k)$ .

A questo punto consideriamo la seguente trasformazione di fase e la conseguente ridefinizione della funzione d'onda della materia:

$$|\chi_k\rangle_s \equiv e^{i \int^\tau \langle \tilde{\chi}_k | \hat{H}_k^{(M)} | \tilde{\chi}_k \rangle d\tau'} |\tilde{\chi}_k\rangle. \quad (2.213)$$

Questa trasformazione di fase non cambia il valor medio della hamiltoniana:

$$\langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k = \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_s, \quad (2.214)$$

dove:

$$\langle \hat{O} \rangle_s \equiv {}_s \langle \chi_k | \hat{O} | \chi_k \rangle_s. \quad (2.215)$$

Calcoliamo le derivate rispetto al tempo conforme della trasformazione di fase:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |\chi_k\rangle_s = e^{i \int^\tau \langle \tilde{\chi}_k | \hat{H}_k^{(M)} | \tilde{\chi}_k \rangle d\tau'} \left( i \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k |\tilde{\chi}_k\rangle + \frac{\partial}{\partial \tau} |\tilde{\chi}_k\rangle \right), \quad (2.216)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |\chi_k\rangle_s = e^{i \int^\tau \langle \tilde{\chi}_k | \hat{H}_k^{(M)} | \tilde{\chi}_k \rangle d\tau'} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |\tilde{\chi}_k\rangle + 2i \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k \frac{\partial}{\partial \tau} |\tilde{\chi}_k\rangle - \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k |\tilde{\chi}_k\rangle \right). \quad (2.217)$$

Sostituendo queste derivate nell'equazione (2.212) possiamo riscriverla in questo modo:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\chi_k\rangle_s - \hat{H}_k^{(M)} |\chi_k\rangle_s = \frac{1}{2M_p^2} \left[ \hat{\Omega}_k - \langle \hat{\Omega}_k \rangle_s \right] |\chi_k\rangle_s \quad (2.218)$$

dove:

$$\hat{\Omega}_k \equiv \frac{1}{a'^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \left[ \frac{2i}{a'^2} \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_s - \frac{2a''}{a'^3} \right] \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.219)$$

Al lato sinistro abbiamo isolato l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda del modo  $k$ .

Al lato destro l'operatore  $\hat{\Omega}_k$  descrive gli effetti non adiabatici di origine quantistica nell'approccio di Born-Oppenheimer.

Spieghiamo meglio l'origine di questi effetti. Se  $H(t)$  è una hamiltoniana dipendente dal tempo e  $\psi_i$  è l'autostato istantaneo della hamiltoniana e la dipendenza dal tempo è "piccola", allora il sistema si mantiene nel suddetto autostato, acquistando al più una fase dinamica e una fase adiabatica.

Questo è quello che succede in prima approssimazione agli elettroni orbitanti attorno al nucleo.

L'ampiezza di transizione ad autostati differenti è tanto più piccola tanto minore è la dipendenza temporale della hamiltoniana.

Si parla quindi di effetti non adiabatici quando ci si riferisce a transizioni fra autostati differenti della hamiltoniana.

Nell'approccio di Born-Oppenheimer, i lati destri dell'equazione (2.218) determinano ulteriori effetti non adiabatici che, nel nostro contesto, sono originati dalla quantizzazione del grado di libertà gravitazionale  $a$ .

Parleremo quindi di effetti non adiabatici o quantistici gravitazionali, riferendoci ad essi. In assenza di questi effetti l'equazione della materia coincide con l'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\chi_k\rangle_s = \hat{H}_k^{(M)} |\chi_k\rangle_s \quad (2.220)$$

che origina, nel formalismo di Heisenberg, l'equazione di MS standard.

## 2.7 Problema dell'ordinamento nell'equazione di Wheeler-DeWitt

Nella precedente sezione abbiamo considerato, per arrivare all'equazione di Wheeler-DeWitt data dall'equazione (2.150), una particolare scelta dell'ordinamento della variabile canonica e del suo momento coniugato durante la procedura di quantizzazione.

Esplicitamente, nell'equazione (2.142) si è utilizzato il seguente ordinamento:

$$\frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} \Psi \rightarrow -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2}. \quad (2.221)$$

Tuttavia questo è uno solo dei possibili ordinamenti che possiamo adottare durante la procedura di quantizzazione.

Diversi ordinamenti potrebbero in teoria originare dei contributi aggiuntivi nelle equazioni di evoluzione della funzione d'onda della gravità e della materia.

Andiamo ora a generalizzare l'equazione di evoluzione della materia nel caso di un ordinamento più generale:

$$\frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} \Psi \rightarrow -a^i \frac{\partial}{\partial a} a^j \frac{\partial}{\partial a} (a^k \Psi) \quad (2.222)$$

con  $i + j + k = -1$ .

Svolgiamo i conti:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a^k \Psi) = ka^{k-1} \Psi + a^k \frac{\partial \Psi}{\partial a}, \quad (2.223)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left[ a^j \frac{\partial}{\partial a} a^k \Psi \right] &= jka^{j+k-2} \Psi + ja^{j+k-2} \frac{\partial \Psi}{\partial a} + k(k-1)a^{j+k-2} \Psi + 2ka^{j+k-1} \frac{\partial \Psi}{\partial a} \\ &+ a^{j+k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2}, \end{aligned} \quad (2.224)$$

$$a^i \frac{\partial}{\partial a} \left[ a^j \frac{\partial}{\partial a} a^k \Psi \right] = a^{-3}k(k+j-1)\Psi + a^{-2}(2k+j) \frac{\partial \Psi}{\partial a} + a^{-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2}. \quad (2.225)$$

Quindi sostituiamo all'equazione (2.142) e scegliendo  $N = a$  otteniamo:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{2k+j}{a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{k(k+j-1)}{a^2} + 2M_p^2 \hat{H}^{(M)} \right] \Psi = 0. \quad (2.226)$$

Notiamo che compaiono dei contributi in più rispetto all'equazione (2.151), questo comporta una diversa funzione d'onda totale  $\Psi$  rispetto a quella della sezione precedente ovvero l'equazione di Wheeler-DeWitt è modificata da scelte differenti dell'ordinamento. Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, utilizziamo la decomposizione di Born-Oppenheimer (2.155), le trasformazioni di fase (2.159) e (2.160) e proiettiamo in  $\langle \tilde{\chi} |$  per ottenere l'equazione gravitazionale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial a^2} + \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle \tilde{\psi} + \frac{2k+j}{a} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \\ + \frac{k(k+j-1)}{a^2} \tilde{\psi} + 2M_p^2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (2.227)$$

dove:  $\langle \tilde{\chi} | \hat{O} | \tilde{\chi} \rangle = \langle \hat{O} \rangle$ .

Per trovare l'equazione della materia partiamo dall'equazione (2.226).

In maniera analoga a quanto fatto nella precedente sezione, utilizziamo la decomposizione di Born-Oppenheimer (2.174) e proiettiamo sul singolo modo  $\tilde{\chi}_k$  ottenendo:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} + \tilde{\psi} \left( \sum_{l \neq k} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle_l \tilde{\chi}_k + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_k}{\partial a^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial a^2} \tilde{\chi}_k + \frac{2k+j}{a} \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} \tilde{\psi} \\ + \frac{2k+j}{a} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \tilde{\chi}_k + \frac{k(k+j-1)}{a^2} \tilde{\psi} \tilde{\chi}_k + 2M_p^2 \tilde{\psi} \hat{H}^{(M)} \tilde{\chi}_k = 0. \end{aligned} \quad (2.228)$$

Utilizzando l'equazione (2.227) e dividendo tutto per  $\tilde{\psi}$  l'equazione (2.228) si riduce a:

$$\begin{aligned} \left( 2 \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} + \frac{2k+j}{a} \right) \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial a} + \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \right\rangle_k \right) \tilde{\chi}_k \\ + 2M_p^2 \left( \hat{H}_k^{(M)} - \left\langle \hat{H}_k^{(M)} \right\rangle_k \right) \tilde{\chi}_k = 0. \end{aligned} \quad (2.229)$$

Questa è l'equazione della materia.

Notiamo che sia nell'equazione (2.226) e (2.229) abbiamo dei contributi aggiuntivi.

Andiamo ora ad utilizzare l'approssimazione WKB per la gravità e ad introdurre il tempo: la funzione d'onda della gravità  $\tilde{\psi}$  può essere scritta nella forma (2.190).

Sostituendo nell'equazione (2.227) otteniamo:

$$\left\{ \left[ i \frac{d^2 S}{da^2} - \left( \frac{dS}{da} \right)^2 \right] + \langle \frac{\partial^2}{\partial a^2} \rangle + i \frac{2k+j}{a} \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{k(k+j-1)}{a^2} + 2M_P^2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right\} \tilde{\psi} = 0 \quad (2.230)$$

In analogia a quanto fatto nel precedente capitolo, sviluppiamo  $S$  in potenze come nella (2.192) e sostuiamo nell'equazione precedente.

Al secondo ordine in  $M_p$  troviamo:

$$\left( \frac{\partial S_0}{\partial a} \right)^2 = 2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \quad (2.231)$$

e la sua soluzione è:

$$S_0 = \pm \int^a da' \left( 2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right)^{1/2}. \quad (2.232)$$

Notiamo che questa espressione è identica a quella trovata nella precedente sezione.

Al primo ordine in  $M_P$  troviamo:

$$i \frac{\partial^2 S_0}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial S_0}{\partial a} \frac{\partial S_1}{\partial a} + i \left( \frac{2k+j}{a} \right) \frac{\partial S_0}{\partial a} = 0, \quad (2.233)$$

la cui soluzione è:

$$i S_1 = -(\ln a)^{-\frac{2k+j}{2}} + \ln \left( \frac{dS_0}{da} \right)^{-1/2} + \tilde{c} \quad (2.234)$$

dove  $\tilde{c}$  è una costante di integrazione.

La funzione d'onda della gravità assumerà la seguente forma:

$$\tilde{\psi}(a) = \frac{c}{\left( 2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle \right)^{1/4} a^{\frac{2k+j}{2}}} \left( e^{-i M_P \int^a da' \sqrt{2 \langle \hat{H}^{(M)} \rangle}} \right). \quad (2.235)$$

dove  $c$  è una costante.

In questo caso, abbiamo già scelto le condizioni al contorno adatte ad avere una corretta densità di probabilità, associata ad un'espansione del background.

Facciamo la derivata della funzione d'onda della gravità rispetto al fattore di scala e dividiamo per la funzione d'onda della gravità stessa:

$$\frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} = -\sqrt{2} i M_P \langle \hat{H}^{(M)} \rangle^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{d \ln \langle \hat{H}^{(M)} \rangle}{da} - \frac{2k+j}{2a}. \quad (2.236)$$

Sostituendo all'equazione (2.229) e convertendo tutte le derivate rispetto al fattore di scala con le derivate rispetto al tempo, otteniamo:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H}_k + \langle \hat{H}_k^{(M)} \rangle_k \right] \tilde{\chi}_k = \frac{1}{2M_p^2} \left[ \frac{1}{a'^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \langle \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \rangle_k \right) - \frac{2a''}{a'^3} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \langle \frac{\partial}{\partial \tau} \rangle_k \right) \right] \tilde{\chi}_k. \quad (2.237)$$

L'equazione della materia trovata è identica all'equazione della materia trovata nella precedente sezione.

Quindi possiamo affermare che sebbene un ordinamento diverso modifichi l'evoluzione della funzione d'onda della gravità, in approssimazione WKB, l'evoluzione della materia sarà la stessa.

Di conseguenza, per andare a studiare nel prossimo capitolo la funzione di correlazione a due punti della materia possiamo d'ora in poi considerare il caso  $k = 0 = j$ .

## Capitolo 3

# La funzione di correlazione a due punti

In generale ci si aspetta che gli effetti non adiabatici sugli spettri inflazionari primordiali, imputabili direttamente alla quantizzazione del background, siano piccoli durante la fase inflazionaria, ad energie della scala GUT,  $\Lambda_{GUT}$ , a causa del valore della massa di Planck ( $M_P \simeq 10^4 \Lambda_{GUT}$ ).

Gli effetti gravitazionali quantistici infatti sono inversamente proporzionale a  $M_P^2$ . Tuttavia nella parte infrarossa degli spettri, i modi usciti dall'orizzonte nei primi istanti dell'inflazione sono stati esposti ad effetti di curvatura per un tempo maggiore, quindi gli effetti quantistici in questa regione degli spettri potrebbero essere amplificati.

E' possibile pertanto che gli effetti non adiabatici abbiano avuto un'influenza non trascurabile per questi modi.

Lo scopo di questo capitolo è la stima degli effetti non adiabatici sugli spettri inflazionari.

### 3.1 Dinamica imperturbata

Consideriamo innanzitutto il caso in cui gli effetti non adiabatici sono trascurabili.

In questo caso l'equazione (2.218) si ridurrà all'equazione di un oscillatore armonico quantistico la cui frequenza dipende dal tempo.

Possiamo risolvere questa equazione con la tecnica degli invarianti adiabatici.

Per semplicità si ometterà da ora in poi il pedice  $k$  e l'indice ( $M$ ) per non appesantire la notazione.

### 3.1.1 Invarianti Adiabatici

Consideriamo un sistema descritto da un hamiltoniana  $H(t)$  dipendente dal tempo. Un operatore dipendente dal tempo  $\hat{I}(t)$  è detto operatore invariante adiabatico se:

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t} - i[\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0. \quad (3.1)$$

Assumiamo che esista un insieme completo ortonormale di autostati di  $\hat{I}$ :

$$\hat{I}(t)|\lambda, k, t\rangle = \lambda|\lambda, k, t\rangle, \quad (3.2)$$

$$\langle\lambda', k', t|\lambda, k, t\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}, \quad (3.3)$$

dove  $\lambda$  sono gli autovalori, gli autostati dell'autovalore  $\lambda$  sono  $|\lambda, k, t\rangle$  e  $k$  è un qualunque numero quantistico che tiene conto della possibile degenerazione degli autostati rispetto al singolo autovalore.

Se l'operatore invariante è hermitiano gli autovalori sono reali, inoltre dimostriamo che essi sono indipendenti dal tempo.

Prendiamo la definizione dell'equazione (3.1) ed applichamola all'autostato  $|\lambda, k, t\rangle$  ottenendo:

$$i\frac{\partial\hat{I}}{\partial t}|\lambda, k, t\rangle + \hat{I}\hat{H}|\lambda, k, t\rangle - \lambda\hat{H}|\lambda, k, t\rangle = 0. \quad (3.4)$$

Moltiplicando a sinistra per  $\langle\lambda, k, t|$  otteniamo:

$$\langle\lambda, k, t|\frac{\partial\hat{I}}{\partial t}|\lambda, k, t\rangle = 0. \quad (3.5)$$

Prendiamo ora l'equazione (3.2) e differenziamo rispetto al tempo ottenendo:

$$\frac{\partial\hat{I}}{\partial t}|\lambda, k, t\rangle + \hat{I}\frac{\partial|\lambda, k, t\rangle}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda, k, t\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda, k, t\rangle}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Moltiplicando a sinistra per  $\langle\lambda, k, t|$  e usando la relazione (3.5) otteniamo infine:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.7)$$

Gli invarianti adiabatici hanno due importanti proprietà:

- il prodotto di due invarianti adiabatici è un invariante adiabatico.

Prendiamo il prodotto di due invarianti adiabatici  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , allora dalla definizione (3.1) abbiamo:

$$\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dt} = \frac{\partial(\hat{A}\hat{B})}{\partial t} - i[\hat{A}\hat{B}, \hat{H}]. \quad (3.8)$$

Sviluppando il prodotto rispetto al tempo otteniamo infine:

$$\hat{A} \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} - i[\hat{B}, \hat{H}] \right) + \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - i[\hat{A}, \hat{H}] \right) \hat{B} = 0 \quad (3.9)$$

dalla definizione di operatori invarianti di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

- se  $\psi$  è soluzione dell'equazione di Schrödinger allora un invariante adiabatico che agisce su  $\psi$  produrrà ancora una soluzione dell'equazione di Schrödinger.  
Sia  $\psi$  soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (3.10)$$

allora prendiamo  $\psi' = \hat{I} \psi$  dove  $\hat{I}$  è un operatore invariante e facciamo la derivata rispetto al tempo:

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = i \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} \psi + i \hat{I} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Utilizzando la definizione dell'equazione (3.1) e l'equazione (3.10) otteniamo:

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = - [\hat{I}, \hat{H}] \psi + \hat{I} \hat{H} \psi = \hat{H} \psi' \quad (3.12)$$

come volevasi dimostrare.

Per investigare la connessione tra gli autostati dell'invariante adiabatico hermitiano e le soluzioni dell'equazione di Schrödinger differenziamo l'equazione (3.2):

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} |\lambda, k, t\rangle + \hat{I} \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k, t\rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k, t\rangle. \quad (3.13)$$

Moltiplicando a sinistra per  $\langle \lambda', k', t |$  e con un pò di manipolazione algebrica si trova la seguente relazione:

$$i(\lambda - \lambda') \langle \lambda', k', t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k, t\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k', t | \hat{H} |\lambda, k, t\rangle. \quad (3.14)$$

Questo implica che per  $\lambda \neq \lambda'$  vale:

$$i \langle \lambda', k', t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k, t\rangle = \langle \lambda', k', t | \hat{H} |\lambda, k, t\rangle. \quad (3.15)$$

Se l'equazione (3.15) valesse anche per  $\lambda = \lambda'$  allora  $|\lambda, k, t\rangle$  sarebbe una soluzione dell'equazione di Schrödinger.

La fase di  $|\lambda, k, t\rangle$  non è stata fissata dalla nostra definizione perciò possiamo definire un nuovo insieme di autostati di  $\hat{I}$  utilizzando una fase dipendente dal tempo:

$$|\lambda, k, t\rangle_s = e^{i\alpha_{\lambda,k}(t)}|\lambda, k, t\rangle, \quad (3.16)$$

dove  $\alpha_{\lambda,k}(t)$  sono funzioni reali nel tempo.

Questi nuovi autostati saranno un insieme completo e ortonormale se l'operatore invariante non contiene derivate temporali.

Per i nuovi autostati vale ancora l'equazione (3.15) per  $\lambda \neq \lambda'$  mentre è possibile scegliere la fase  $\alpha_{\lambda,k}(t)$  in modo che l'equazione (3.15) valga anche per  $\lambda = \lambda'$ .

La fase dovrà soddisfare la seguente equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{d}{dt}\alpha_{\lambda,k} = \langle \lambda, k, t | i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} | \lambda, k, t \rangle, \quad (3.17)$$

dove abbiamo considerato il caso  $k = k'$ .

Questo è sempre possibile farlo dato che l'operatore alla destra dell'equazione (3.17) è hermitiano (quindi è possibile diagonalizzarlo).

Quindi il problema di risolvere l'equazione di Schrödinger si riduce a trovare gli autostati di un operatore hermitiano invariante e risolvere l'equazione differenziale per le fasi.

Perciò l'operatore invariante ha quindi il ruolo della hamiltoniana nei sistemi con hamiltoniana dipendente dal tempo.

### 3.1.2 Applicazione al sistema oscillatore armonico

Ogni invariante di un sistema quantistico può essere costruito in termini di invarianti di base (o invarianti generatori).

Un invariante di base è un invariante non hermitiano che soddisfa la relazione:

$$[\hat{I}_b, \hat{I}_b^\dagger] = 1. \quad (3.18)$$

In particolare per un oscillatore armonico della forma:

$$H(t) = \frac{1}{2} [X(t)q^2 + Y(t)(qp + pq) + Z(t)p^2] \quad (3.19)$$

dove  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$  sono parametri dipendenti dal tempo che soddisfano la relazione  $XZ - Y^2 > 0$ , possiamo scrivere l'operatore invariante nella forma:

$$\hat{I}(t) = \left[ \hat{I}_b^\dagger(t) \hat{I}_b(t) + \frac{1}{2} \right] \quad (3.20)$$

dove:

$$\hat{I}_b = \frac{e^{i\Theta}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{q-y}{x} + i \left[ x \left( p + \frac{Y}{Z}q - \frac{\dot{y}}{Z} \right) - \frac{\dot{x}}{Z}(q-y) \right] \right\}, \quad (3.21)$$

$$\hat{I}_b^\dagger = \frac{e^{-i\Theta}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{q-y}{x} - i \left[ x \left( p + \frac{Y}{Z}q - \frac{\dot{y}}{Z} \right) - \frac{\dot{x}}{Z}(q-y) \right] \right\}, \quad (3.22)$$

$$\Theta = \int_0^t dt' \frac{Z(t')}{x(t')^2}, \quad (3.23)$$

mentre  $x(t)$  e  $y(t)$  sono soluzioni delle equazioni:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{Z} \right) + \left[ \frac{XZ - Y^2}{Z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{Z} \right) \right] x = \frac{Z}{X^3}, \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{Z} \right) + \left[ \frac{XZ - Y^2}{Z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{Z} \right) \right] y = 0. \quad (3.25)$$

Per un operatore scritto nella forma (3.20) sappiamo costruire una famiglia di autostati ortonormali.

Definito il vuoto come quell'autostato tale per cui:

$$\hat{I}_b |0, t\rangle_b = 0 \quad (3.26)$$

possiamo trovare tutti gli altri autostati dell'operatore invariante dinamico  $\hat{I}(t)$  applicando ripetutamente l'operatore  $\hat{I}_b^\dagger$  sullo stato di vuoto:

$$|n, t\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \hat{I}_b^\dagger(t) \right)^n |0, t\rangle_b. \quad (3.27)$$

Non sarà necessario risolvere l'equazione differenziale (3.17) per ogni autostato ma sarà sufficiente risolverla solo per lo stato di vuoto.

Una famiglia ortonormale di autostati dell'operatore invariante  $\hat{I}(t)$  che soddisfa l'equazione di Schrödinger è:

$$|n, t\rangle_s = e^{i\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \hat{I}_b^\dagger(t) \right)^n |0, t\rangle_b. \quad (3.28)$$

Nel caso delle perturbazioni primordiali che stiamo studiando tramite la variabile di Mukhanov-Sasaki l'equazione (3.19) si riduce a:

$$q \rightarrow v, \quad (3.29)$$

$$p \rightarrow \pi, \quad (3.30)$$

$$X(t) = \omega(t)^2, \quad (3.31)$$

$$Y(t) = 0, \quad (3.32)$$

$$Z(t) = 1. \quad (3.33)$$

Troviamo così l'operatore invariante di base :

$$\hat{I}_b = \frac{e^{i\Theta}}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{1}{\rho} - i\rho' \right) \hat{v} + i\rho\hat{\pi} \right] \quad (3.34)$$

dove abbiamo rinominato  $x(t) \equiv \rho(t)$  mentre per  $y(t)$ , che è soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico classico, abbiamo scelto che sia identicamente nulla per semplicità. La variabile  $\rho(t)$  è comunemente denominata variabile di Pinney, una funzione reale che soddisfa l'equazione di Ermakov-Pinney:

$$\rho'' + \omega^2 \rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (3.35)$$

Utilizziamo l'operatore dell'equazione (3.34) per ottenere il vuoto grazie alla definizione data dall'equazione (3.26):

$$\left( \frac{1}{\rho} - i\rho' \right) \hat{v}|0\rangle = -i\rho\hat{\pi}|0\rangle. \quad (3.36)$$

Nella rappresentazione delle coordinate:

$$\langle v|\hat{v}|0\rangle = v\langle v|0\rangle, \quad (3.37)$$

$$\langle v|\hat{\pi}|0\rangle = -i\frac{\partial}{\partial v}\langle v|0\rangle. \quad (3.38)$$

Utilizzando queste relazioni troviamo:

$$-\left( \frac{1}{\rho^2} - i\frac{\rho'}{\rho} \right) \langle v|0\rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle v|0\rangle. \quad (3.39)$$

Integrando nella variabile di MS troviamo:

$$\langle v|0\rangle = A \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho^2} - i\frac{\rho'}{\rho} \right) v^2 \right] \quad (3.40)$$

dove A è un'ampiezza di normalizzazione definita positiva.

Essa è fissata dalla condizione di normalizzazione sulla funzione d'onda:

$$\int dv |A|^2 e^{-\frac{v^2}{\rho^2}} = |A|^2 \sqrt{(\pi\rho^2)} = 1 \rightarrow A = (\pi\rho^2)^{-1/4}. \quad (3.41)$$

Ora possiamo costruire formalmente lo spazio delle soluzioni dell'equazione di MS.

Utilizzando l'equazione (3.17) troviamo infine il vuoto normalizzato che soddisfa l'equazione di Schrödinger (nella rappresentazione delle coordinate):

$$\langle v|0\rangle_s = \frac{1}{(\pi\rho^2)^{1/4}} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int^\tau \frac{d\tau'}{\rho^2} - \frac{v^2}{2} \left( \frac{1}{\rho^2} - i\frac{\rho'}{\rho} \right) \right]. \quad (3.42)$$

In questo caso possiamo calcolare il valore di aspettazione di  $v^2$  e troviamo la funzione di correlazione a due punti:

$${}_s\langle 0|\hat{v}^2|0\rangle_s \equiv p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho^2}} \int dv v^2 e^{-v^2/2\rho^2} \quad (3.43)$$

in funzione della variabile di Pinney ovvero:

$$p(\tau) = \rho^2/2. \quad (3.44)$$

## 3.2 Dinamica perturbata

Consideriamo ora il caso in cui gli effetti adiabatici non sono trascurabili.

Dato che risolvere l'equazione (2.218) è molto complicata, cerchiamo invece di trovare un'equazione differenziale per la funzione di correlazione a due punti, dalla quale si possono facilmente ricavare le principali proprietà osservabili degli spettri primordiali. Sostituire l'equazione alle derivate parziali con un'equazione differenziale ordinaria per la funzione di correlazione è un primo passo con l'obiettivo di semplificare ulteriormente il problema originario.

Scriviamo l'equazione (2.218) come:

$$\begin{aligned} \left( i \frac{d}{d\tau} - \hat{H} \right) |\chi_k\rangle_s = & \left[ \left( 2i \langle \hat{H} \rangle_s g(\tau) + g'(\tau) \right) \left( \frac{d}{d\tau} - \langle \frac{d}{d\tau} \rangle_s \right) \right. \\ & \left. + g(\tau) \left( \frac{d^2}{d\tau^2} - \langle \frac{d^2}{d\tau^2} \rangle_s \right) \right] |\chi_k\rangle_s \end{aligned} \quad (3.45)$$

dove  $\langle \hat{O} \rangle_s = {}_s\langle \chi_k | \hat{O} | \chi_k \rangle_s$  e  $g = 1/2M_p^2 a'^2$ .

Definita la funzione di correlazione a due punti per un generico stato:

$$p = {}_s\langle \chi_k | \hat{v}^2 | \chi_k \rangle_s = \langle \hat{v}^2 \rangle_s, \quad (3.46)$$

differenziamola rispetto a  $\tau$  ottenendo:

$$i \frac{dp}{d\tau} = i \langle \hat{v}^2 \frac{d}{d\tau} \rangle_s - c.c. \quad (3.47)$$

Usando la (3.45) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} i \langle \hat{v}^2 \frac{d}{d\tau} \rangle_s = & \langle \hat{v}^2 \hat{H} \rangle_s + g \left( \langle \hat{v}^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \rangle_s - \langle \hat{v}^2 \rangle_s \langle \frac{d^2}{d\tau^2} \rangle_s \right) + \\ & \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \left( \langle \hat{v}^2 \frac{d}{d\tau} \rangle_s - \langle \hat{v}^2 \rangle_s \langle \frac{d}{d\tau} \rangle_s \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Gli operatori  $\hat{H}$  e  $\hat{v}^2$  sono operatori hermitiani quindi:

$$\left(\langle \hat{v}^2 \hat{H} \rangle_s\right)^* = \langle \hat{H} \hat{v}^2 \rangle_s. \quad (3.49)$$

L'equazione (3.47) quindi diventa:

$$i \frac{dp}{d\tau} = \langle [\hat{v}^2, \hat{H}] \rangle_s - \langle \hat{v}^2 \rangle_s \left\{ \left[ \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \frac{d}{d\tau} \rangle_s + g \langle \frac{d^2}{d\tau^2} \rangle_s \right] - c.c. \right\} \\ + g \langle \hat{v}^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \rangle_s + \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \hat{v}^2 \frac{d}{d\tau} \rangle_s - c.c. \quad (3.50)$$

Definiti gli operatori:

$$F(\tau) = \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \frac{\partial}{\partial \tau} \rangle_s + g \langle \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \rangle_s - c.c., \quad (3.51)$$

$$G_{\hat{v}^2}(\tau) = \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \hat{v}^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \rangle_s + g \langle \hat{v}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \rangle_s - c.c., \quad (3.52)$$

possiamo scrivere l'equazione precedente come:

$$i \frac{dp}{d\tau} = \langle [\hat{v}^2, \hat{H}] \rangle_s - \langle \hat{v}^2 \rangle_s F(\tau) + G_{\hat{v}^2}(\tau). \quad (3.53)$$

Notiamo che  $G$  e  $F$  sono funzioni puramente immaginarie per costruzione mentre  $g$  è una funzione reale.

Definiamo inoltre la funzione  $R(\hat{O})$ :

$$R(\hat{O}) = -\langle \hat{O} \rangle_s F(\tau) + G_{\hat{O}}(\tau), \quad (3.54)$$

che contiene effetti gravitazionali quantistici.

Deriviamo ulteriormente rispetto al tempo conforme e utilizzando il commutatore:

$[\hat{v}^2, \hat{H}] = i \{ \hat{v}, \hat{\pi} \}$  possiamo scrivere:

$$\frac{d^2 \langle \hat{v}^2 \rangle_s}{d\tau^2} = \frac{d \langle \{ \hat{v}, \hat{\pi} \} \rangle_s}{d\tau} - i \frac{dR(\hat{v}^2)}{d\tau}. \quad (3.55)$$

In analogia con l'equazione (3.53) per il primo termine vale la seguente relazione:

$$\frac{d \langle \{ \hat{v}, \hat{\pi} \} \rangle_s}{d\tau} = -i \langle [\{ \hat{v}, \hat{\pi} \}, \hat{H}] \rangle_s - iR(\{ \hat{v}, \hat{\pi} \}), \quad (3.56)$$

inoltre il commutatore nell'espressione precedente può essere sostituito dalla seguente espressione:

$$[\{ \hat{v}, \hat{\pi} \}, \hat{H}] = 2i(\hat{\pi}^2 - \omega^2 \hat{v}^2). \quad (3.57)$$

L'equazione (3.55) assumerà la seguente forma:

$$\frac{d^2\langle\hat{v}^2\rangle_s}{d\tau^2} = 2(\langle\hat{\pi}^2\rangle_s - \omega^2\langle\hat{v}^2\rangle_s) - iR(\{\hat{v}, \hat{\pi}\}) - i\frac{dR(\hat{v}^2)}{d\tau}. \quad (3.58)$$

Differenziamo ulteriormente rispetto al tempo conforme per ottenere:

$$\frac{d^3\langle\hat{v}^2\rangle_s}{d\tau^3} = 2\frac{d\langle\hat{\pi}^2\rangle_s}{d\tau} - 2\omega^2\frac{d\langle\hat{v}^2\rangle_s}{d\tau} - 4\omega\omega'\langle\hat{v}^2\rangle_s - i\frac{d^2R(\hat{v}^2)}{d\tau^2} - i\frac{dR(\{\hat{v}, \hat{\pi}\})}{d\tau}. \quad (3.59)$$

In analogia con l'equazione (3.53) possiamo scrivere:

$$\frac{d\langle\hat{\pi}^2\rangle_s}{d\tau} = -i\langle[\hat{\pi}^2, \hat{H}]\rangle_s - iR(\hat{\pi}^2). \quad (3.60)$$

Utilizzando la relazione:

$$0 = [\hat{H}, \hat{H}] = \frac{1}{2}\langle[\hat{\pi}^2, \hat{H}]\rangle_s + \frac{1}{2}\omega^2\langle[\hat{v}^2, \hat{H}]\rangle_s \quad (3.61)$$

e l'equazione (3.53) troviamo che l'equazione (3.59) avrà la seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\langle\hat{v}^2\rangle_s}{d\tau^3} + 4\omega^2\frac{d\langle\hat{v}^2\rangle_s}{d\tau} + 2(\omega^2)'\langle\hat{v}^2\rangle_s + 2iR(\hat{\pi}^2) \\ + 2i\omega^2R(\hat{v}^2) + i\frac{dR(\{\hat{v}, \hat{\pi}\})}{d\tau} + i\frac{d^2R(\hat{v}^2)}{d\tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Questa è un'equazione esatta che vale per qualunque stato che soddisfi l'equazione (2.218).

I contributi in cui compare  $R(\hat{O})$  contengono le correzioni non adiabatiche.

### 3.2.1 Calcolo degli effetti adiabatici al primo ordine perturbativo

Per risolvere l'equazione (3.62), chiamata d'ora in poi equazione master, è conveniente utilizzare un approccio di tipo perturbativo: consideriamo all'ordine zero in  $M_p^2$  lo stato generico  $|\chi\rangle_s$  soluzione dell'equazione (2.218) in cui sono trascurati gli effetti non adiabatici.

Dall'equazione imperturbata:

$$i\frac{d}{d\tau}|\chi_k\rangle_s = \hat{H}|\chi_k\rangle_s, \quad (3.63)$$

derivando rispetto al tempo conforme troviamo:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}|\chi_k\rangle = -i\frac{d\hat{H}}{d\tau}|\chi_k\rangle_s - \hat{H}^2|\chi_k\rangle_s. \quad (3.64)$$

Utilizzando queste due relazioni, possiamo scrivere l'equazione (3.51) come:

$$F = -i \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \hat{H} \rangle_s - ig \left\langle \frac{d\hat{H}}{d\tau} \right\rangle_s - g \langle \hat{H}^2 \rangle_s - c.c. \quad (3.65)$$

Gli operatori  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}^2$  e  $\frac{d\hat{H}}{d\tau}$  sono operatori hermitiani dunque la precedente relazione si riduce a:

$$F(\tau) = -2ig' \langle \hat{H} \rangle_s - 2ig \left\langle \frac{d\hat{H}}{d\tau} \right\rangle_s = -2i \left\langle \left[ \frac{d}{d\tau} (g\hat{H}) \right] \right\rangle_s. \quad (3.66)$$

Sfruttando sempre l'equazione (3.63) riscriviamo l'equazione (3.52):

$$G_{\hat{O}}(\tau) = -i \left( 2ig \langle \hat{H} \rangle_s + g' \right) \langle \hat{O}\hat{H} \rangle_s - ig \left\langle \hat{O} \frac{d\hat{H}}{d\tau} \right\rangle_s - g \langle \hat{O}\hat{H}^2 \rangle_s - c.c. \quad (3.67)$$

dove  $\hat{O}$  è un operatore hermitiano ed indipendente dal tempo che sarà identificato rispettivamente con gli operatori:

$$\hat{O} = \hat{v}^2, \{ \hat{v}, \hat{\pi} \}, \hat{\pi}^2. \quad (3.68)$$

Dato che tutti gli operatori coinvolti sono hermitiani possiamo utilizzare la seguente relazione:

$$\langle \hat{A}\hat{B} \rangle_s - \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_s^* = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_s. \quad (3.69)$$

Inoltre essendo l'operatore  $\hat{O}$  indipendente dal tempo possiamo scrivere:

$$i \frac{d}{d\tau} \langle \hat{O} \rangle_s = \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle_s. \quad (3.70)$$

Sostituiamo all'equazione (3.67) trovando:

$$G_{\hat{O}} = 2g \langle \hat{H} \rangle_s \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle_s - ig' \langle \{ \hat{O}, \hat{H} \} \rangle_s - ig \left\langle \left\{ \hat{O}, \frac{d\hat{H}}{d\tau} \right\} \right\rangle_s - g \langle [\hat{O}, \hat{H}^2] \rangle_s. \quad (3.71)$$

Possiamo raggruppare il secondo e il terzo termine in un'unica espressione, cioè:

$$ig' \langle \{ \hat{O}, \hat{H} \} \rangle_s + ig \left\langle \left\{ \hat{O}, \frac{d\hat{H}}{d\tau} \right\} \right\rangle_s = i \left\langle \frac{d}{d\tau} \{ \hat{H}, g\hat{O} \} \right\rangle_s. \quad (3.72)$$

Si noti che valgono le seguenti relazioni:

$$i \frac{d}{d\tau} \langle \{ \hat{H}, g\hat{O} \} \rangle_s = i \left\langle \frac{d}{d\tau} \{ \hat{H}, g\hat{O} \} \right\rangle_s + \langle [\{ \hat{H}, g\hat{O} \}, \hat{H}] \rangle_s \quad (3.73)$$

e:

$$\langle [\{ \hat{H}, g\hat{O} \}, \hat{H}] \rangle_s = g \langle [\hat{O}, \hat{H}^2] \rangle_s. \quad (3.74)$$

Quindi sostituendo all'equazione (3.71) otteniamo:

$$\begin{aligned} G_{\hat{O}} &= 2g\langle\hat{H}\rangle_s\langle[\hat{O}, \hat{H}]\rangle_s - i\frac{d}{d\tau}\langle\{\hat{H}, g\hat{O}\}\rangle_s \\ &= 2ig\langle\hat{H}\rangle_s\frac{d}{d\tau}\langle\hat{O}\rangle_s - i\frac{d}{d\tau}\langle\{\hat{H}, g\hat{O}\}\rangle_s. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Inoltre sostituendo le equazioni (3.66) e (3.75) alla (3.52) otteniamo:

$$R_{\hat{O}} = 2i\langle\hat{O}\rangle_s\left\langle\left(\frac{d}{d\tau}(g\hat{H})\right)\right\rangle_s + 2ig\langle\hat{H}\rangle_s\frac{d}{d\tau}\langle\hat{O}\rangle_s - i\frac{d}{d\tau}\langle\{\hat{H}, g\hat{O}\}\rangle_s \quad (3.76)$$

il cui primo termine può essere così scritto:

$$2i\langle\hat{O}\rangle_s\left\langle\left(\frac{d}{d\tau}(g\hat{H})\right)\right\rangle_s = 2i\langle\hat{O}\rangle_s\frac{d}{d\tau}\langle(g\hat{H})\rangle_s. \quad (3.77)$$

In questo modo possiamo raccogliere il primo e il secondo termine:

$$2i\langle\hat{O}\rangle_s\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(g\hat{H})\right)\right\rangle_s + 2i\langle\hat{O}\rangle_s\frac{d}{d\tau}\langle(g\hat{H})\rangle_s = 2i\frac{d}{d\tau}\left[\langle\hat{O}\rangle_s\langle g\hat{H}\rangle_s\right], \quad (3.78)$$

e possiamo scrivere il terzo termine dell'equazione (3.76) come:

$$i\frac{d}{d\tau}\langle\{\hat{H}, g\hat{O}\}\rangle_s = i\frac{d}{d\tau}\langle g\hat{H}\hat{O}\rangle_s + i\frac{d}{d\tau}\langle\hat{O}g\hat{H}\rangle_s. \quad (3.79)$$

Infine utilizzando le relazioni trovate, l'equazione (3.76) avrà la seguente forma compatta:

$$R_{\hat{O}} = i\frac{d}{d\tau}\left(\langle g\hat{H}\rangle_s\langle\hat{O}\rangle_s - \langle g\hat{H}\hat{O}\rangle_s + c.c.\right), \quad (3.80)$$

valida al primo ordine perturbativo.

### 3.2.2 Applicazione agli autostati dell'invariante adiabatico

Applichiamo ora il formalismo semplificato della precedente sezione sullo stato  $|n\rangle_s$ , soluzione dell'equazione (2.218) ed autostato dell'invariante hermitiano (3.34).

Usando l'identità:

$$\mathbf{I} = \sum_m |m\rangle\langle m| \quad (3.81)$$

possiamo scrivere

$$\sum_m \langle n|g\hat{H}|m\rangle\langle m|\hat{O}|n\rangle = \langle g\hat{H}\hat{O}\rangle_n. \quad (3.82)$$

In questo modo solo i termini con  $m \neq n$  rimangono nell'equazione (3.80):

$$R_{\hat{O}} = -i \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{m \neq n} \langle n | g\hat{H} | m \rangle \langle m | \hat{O} | n \rangle + c.c. \right). \quad (3.83)$$

Scriviamo gli operatori dell'equazione (3.68) e  $g\hat{H}$  in funzione degli invarianti di base (3.34) (omettiamo i termini del tipo  $\hat{I}_b \hat{I}_b^\dagger$  poichè non contribuiscono per  $m \neq n$ ):

$$g\hat{H} \simeq A^2 \hat{I}_b^2 + A^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2}, \quad (3.84)$$

$$\hat{O} \simeq B^2 \hat{I}_b^2 + B^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2} \quad (3.85)$$

dove il simobolo  $\simeq$  indica che le espressioni sono valide una volta applicate alla (3.83) ma non sono esatte (manca il contributo diagonale).

Si noti che  $g\hat{H}$  e  $\hat{O}$  nei casi di interesse contengono solo contributi quadratici negli invarianti di base.

Sostituiamo quindi all'equazione (3.83) ottenendo:

$$R_{\hat{O}} = \sum_{m \neq n} \langle n | A^2 \hat{I}_b^2 + A^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2} | m \rangle \langle m | B^2 \hat{I}_b^2 + B^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2} | n \rangle + c.c. \quad (3.86)$$

dove:

$$\hat{I} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle, \quad (3.87)$$

$$\hat{I}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle. \quad (3.88)$$

Utilizzate le ultime relazioni nell'equazione precedente otteniamo:

$$R_{\hat{O}} = \sum_{m \neq n} \left[ \left( \sqrt{n+2} \sqrt{n+1} \delta_{m,n+2} \right) A^2 + A^{*2} \left( \sqrt{n} \sqrt{n-1} \delta_{m,n-2} \right) \right] \left[ \left( \sqrt{n+2} \sqrt{n+1} \delta_{m,n+2} \right) B^2 + \left( \sqrt{n} \sqrt{n-1} \delta_{m,n-2} \right) B^{*2} \right] + c.c. \quad (3.89)$$

Svolgendo i conti arriviamo al seguente risultato:

$$R_{\hat{O}} = \left[ (A^2 B^{*2} + A^{*2} B^2) (n+1)(n+2) + (A^{*2} B^2 + A^2 B^{*2}) n(n-1) \right] = 4(n^2 + n + 1) \text{Re}(A^2 B^{*2}) \quad (3.90)$$

In particolare per  $\hat{O}$  che assume la seguente forma:

$$\hat{v}^2 = V^2 \hat{I}_b^2 + V^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2}, \quad (3.91)$$

$$\hat{\pi}^2 = P^2 \hat{I}_b^2 + P^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2}, \quad (3.92)$$

$$\{\hat{v}, \hat{\pi}\} = M^2 \hat{I}_b^2 + M^{*2} \hat{I}_b^{\dagger 2}, \quad (3.93)$$

possiamo calcolare ogni termine del tipo  $R_{\hat{O}}$  dell'equazione (3.83):

$$R_{\hat{v}^2} = -4i(n^2 + n + 1) \frac{d}{d\tau} \text{Re} [A^2 V^{*2}] \quad (3.94)$$

$$R_{\hat{\pi}^2} = -4i(n^2 + n + 1) \frac{d}{d\tau} \text{Re} [A^2 P^{*2}] \quad (3.95)$$

$$R_{\{\hat{v}, \hat{\pi}\}} = -8i(n^2 + n + 1) \frac{d}{d\tau} \text{Re} [A^2 V^* P^*] \quad (3.96)$$

dove con  $\text{Re}[X]$  intendiamo la parte reale di  $X$  e:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho e^{-i\Theta}, \quad (3.97)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \rho' - \frac{i}{\rho} \right) e^{-i\Theta} = V', \quad (3.98)$$

$$M = \sqrt{2PV}, \quad (3.99)$$

$$A = \sqrt{\frac{g}{2}(P^2 + \omega^2 V^2)}. \quad (3.100)$$

Esprimiamo tutto in termini della funzione di correlazione a due punti per lo stato generico  $|n\rangle$ :

$$p_n(\tau) = \langle \hat{v}^2 \rangle_n. \quad (3.101)$$

Scriviamo  $\hat{v}^2$  in termini dell'invariante di base (considerando ora tutti i termini):

$$\hat{v}^2 = V^2 \hat{I}_b^2 + V^{*2} \hat{I}_b^{+2} + |V|^2 (\hat{I}_b \hat{I}_b^+ + \hat{I}_b^+ \hat{I}_b). \quad (3.102)$$

Utilizzando le relazioni (3.87) troviamo:

$$p_n(\tau) = \langle \hat{v}^2 \rangle_n = |V|^2 (2n + 1) = (2n + 1) \frac{\rho^2}{2} \quad (3.103)$$

da cui:

$$\rho^2 = \frac{2p_n}{2n + 1}. \quad (3.104)$$

Possiamo sostituire all'equazione (3.35) trovando l'equazione di Pinney modificata per  $p_n$ :

$$p_n'' - \frac{p_n'^2}{2p_n} + 2\omega^2 p_n = \frac{(2n + 1)^2}{2p_n}. \quad (3.105)$$

Esprimiamo poi  $V$  e  $P$  in termini della funzione di correlazione:

$$V = \sqrt{\frac{p_n}{(2n + 1)}} e^{-i\Theta}, \quad (3.106)$$

$$P = \sqrt{\frac{1}{4(2n + 1)p_n}} \left( p_n' - i(2n + 1) \right) e^{-i\Theta}. \quad (3.107)$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione di evoluzione della funzione di correlazione:

$$\frac{d^3 p_n}{d\tau^3} + 4\omega^2 \frac{dp_n}{d\tau} + 2\frac{d\omega^2}{d\tau} p_n + \Delta p_n = 0 \quad (3.108)$$

dove:

$$\Delta p_n = 2i [R(\hat{\pi}^2) + \omega^2 R(\hat{v}^2)] + i \frac{dR(\{\hat{v}, \hat{\pi}\})}{d\tau} + i \frac{d^2 R(\hat{v}^2)}{d\tau^2} \quad (3.109)$$

è valutato sullo stato  $|n\rangle_s$ .

Sostituendo i termini (3.94), (3.95) e (3.96) otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta p_n = 8(n^2 + n + 1) & \left[ \frac{d}{d\tau} Re(A^2 P^{*2}) + \omega^2 \frac{d}{d\tau} Re(A^2 V^{*2}) \right. \\ & \left. + \frac{d^2}{d\tau^2} Re(A^2 V^* P^*) + \frac{1}{2} \frac{d^3}{d\tau^3} Re(A^2 V^{*2}) \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

Calcolando esplicitamente i termini otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta p_n = \frac{n^2 + n + 1}{M_P^2 (2n + 1)^2} & \left\{ \frac{d^3}{d\tau^3} \left( \frac{h_n}{4a'^2} \right) + \frac{d^2}{d\tau^2} \left[ \frac{p'_n}{4p_n a'^2} \left( h_n + 2(2n + 1)^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{8p_n^2 a'^2} \left( h_n^2 + 4(2n + 1)^2 p_n'^2 \right) \right] - \frac{\omega \omega'}{a'^2} h_n \right\}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$h_n = p_n'^2 + 4\omega^2 p_n^2 - (2n + 1)^2. \quad (3.112)$$

L'espressione  $\Delta p_n$  dell'equazione (3.108) è stata ottenuta valutando i contributi non adiabatici sullo stato imperturbato soluzione dell'equazione di Schrödinger imperturbata.

Questo è uno dei risultati principali della tesi.

Questa equazione al primo ordine perturbativo descrive la dinamica di  $\langle \hat{v}^2 \rangle_k$ .

Fissata l'evoluzione del background inflazionario, la (3.108) è un'equazione non lineare per  $\langle \hat{v}^2 \rangle_k$ , risolvibile numericamente o mediante un ulteriore approccio perturbativo ma per via analitica.

### 3.3 Applicazione al caso di De Sitter

Nel precedente capitolo siamo riusciti ad ottenere un'approssimazione dell'equazione di evoluzione della funzione di correlazione quando i contributi non adiabatici sono valutati sullo stato imperturbato, soluzione dell'equazione di Schrödinger imperturbata.

Ora applicheremo questa equazione al caso in cui la fase inflazionaria è di tipo De Sitter

e in particolare allo stato di vuoto ( $n = 0$ ).

In questo caso l'equazione di MS avrà la seguente forma:

$$v'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)v = 0. \quad (3.113)$$

Nel limite di lunghezza d'onda corta  $-k\tau \gg 1$ , possiamo trascurare il termine  $2/\tau^2$  ed avere, al solito, come soluzione una combinazione lineare di onde piane:

$$v = (\alpha e^{ik\tau} + \beta e^{-ik\tau}) \quad (3.114)$$

dove i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  sono coefficienti complessi indipendenti nel tempo che soddisfano la condizione wronskiana (2.76):

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (3.115)$$

In analogia a quanto visto nel capitolo sulla quantizzazione semiclassica delle perturbazioni possiamo scegliere, in questo limite, come vuoto iniziale lo stato di minima energia (vuoto di Bunch-Davies).

Questo ci permette di fissare in maniera univoca i coefficienti ottenendo per i modi di Fourier della variabile di MS:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{ik\tau}. \quad (3.116)$$

Conseguentemente, la funzione di correlazione nel limite di lunghezza d'onda corta è:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} p = \frac{1}{2k}. \quad (3.117)$$

Prendiamo ora l'equazione (3.108) nel caso in cui  $n = 0$  e moltiplichiamo per  $2p$  ottenendo:

$$2pp''' + 4(\omega^2 p^2)' + 2p\Delta p = 0 \quad (3.118)$$

dove l'apice indica la derivata rispetto al tempo conforme.

È possibile sostituire il primo termine con la seguente derivata totale:

$$2pp''' = (p^2)''' - \frac{3}{4} \left( \left( \frac{(p^2)'}{p} \right)^2 \right)'. \quad (3.119)$$

Sostituendo questo termine all'equazione (3.118) ed integrando rispetto al tempo conforme otteniamo:

$$(p^2)'' - \frac{3}{4} \left( \frac{(p^2)'}{p} \right)^2 + 4\omega^2 p^2 + \int_{-\infty}^{\tau} d\bar{\tau} (2p\Delta p) = \text{cost}. \quad (3.120)$$

Infine utilizzando la relazione:

$$(p^2)'' = 2(p')^2 + 2pp'' \quad (3.121)$$

e dividendo per  $2p$  otteniamo:

$$p'' - \frac{(p')^2}{2p} + 2\omega^2 p + \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{\tau} (2p\Delta p) = \frac{c}{2p}. \quad (3.122)$$

dove  $c$  è una costante di integrazione.

È possibile fissare la costante imponendo che, nel limite  $\tau \rightarrow -\infty$ , in cui i contributi non adiabatici siano nulli, l'equazione precedente coincida con l'equazione (3.106) ovvero:

$$p_0'' - \frac{(p_0')^2}{2p_0} + 2\omega^2 p_0 = \frac{1}{2p_0}. \quad (3.123)$$

Questo fissa la costante al valore  $c = 1$ .

Possiamo inoltre notare che l'integrando dell'equazione (3.122) contiene i termini non adiabatici che, per assunzione, sono piccoli.

Questo ci permette di trattare l'integrando nell'equazione (3.122) in modo perturbativo:

$$\int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{\tau} (2p\Delta p) = \int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{\tau} (2p_0\Delta p). \quad (3.124)$$

L'equazione (3.122) si ridurrà alla seguente forma:

$$p'' - \frac{(p')^2}{2p} + 2\omega^2 p - \frac{1}{2p} \left( 1 - \int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{\tau} (2p_0\Delta p) \right) = 0. \quad (3.125)$$

La funzione di correlazione in assenza di effetti non adiabatici è facilmente calcolabile ponendo:

$$\omega = \sqrt{k^2 - \frac{2}{\tau^2}} \quad (3.126)$$

nell'equazione (3.123) e vale:

$$p_0 = \frac{1 + k^2\tau^2}{2k^3\tau^2}. \quad (3.127)$$

Sostituendo questo risultato all'equazione (3.124) si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{\tau} (2p_0\Delta p) = -\frac{8H^2}{M_p^2 k^3 \tau^2} \left( \frac{k^2\tau^2 + 1}{2k^3\tau^2} \right)^2 = -\frac{16H^2}{M_p^2} p_0^2 \left( p_0 - \frac{1}{2k} \right). \quad (3.128)$$

Notiamo che nel limite di lunghezza d'onda corta  $p_0 \rightarrow \frac{1}{2k}$  abbiamo che:

$$\frac{16H^2}{M_p^2} p_0^2 \left( p_0 - \frac{1}{2k} \right) \rightarrow 0 \quad (3.129)$$

in accordo con il fatto che i contributi non adiabatici si annullano ( $\Delta p \rightarrow 0$ ).

Ponendo  $p = p_0$  nel risultato dell'equazione (3.128) e sostituendo all'equazione (3.125) otteniamo:

$$p'' - \frac{p'^2}{2p} + 2 \left[ k^2 - 2a^2 H^2 \left( 1 + \frac{H^2}{M_p^2 k^3} \right) \right] p - \frac{1}{2p} = 0. \quad (3.130)$$

Questa è l'equazione master valutata su De Sitter.

Per risolverla osserviamo che nel limite di lunghezze d'onda lunghe possiamo fare il seguente ansatz:

$$p = c_k (-\tau)^\nu \quad (3.131)$$

che, sostituito all'equazione precedente, ci da la seguente equazione:

$$\nu^2 - 2\nu - 8(1 + \delta_k) = 0 \quad (3.132)$$

dove:

$$\delta_k = \frac{H^2}{M_p^2 k^3}. \quad (3.133)$$

Questa è un'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono rispettivamente crescente e calante per  $\tau \rightarrow 0^-$ .

La soluzione crescente sarà ovviamente dominante a  $\tau \rightarrow 0^-$  e a essa corrisponde:

$$\nu = 1 - \sqrt{1 + 8(1 + \delta_k)} = 1 - \sqrt{9 + 8\delta_k}. \quad (3.134)$$

Otteniamo così per la (3.131):

$$p = c_k (-\tau)^{(1 - \sqrt{9 + 8\delta_k})}. \quad (3.135)$$

É possibile fissare il coefficiente  $c_k$  raccordando a  $-k\tau = 1$  (attraversamento dell'orizzonte) la soluzione dell'equazione (3.135) con la soluzione per  $-k\tau \rightarrow \infty$ :

$$c_k k^{-1 + \sqrt{9 + 8\delta_k}} = \frac{1}{2k} \quad (3.136)$$

che ha come soluzione:

$$c_k = \frac{k^{-\sqrt{9 + 8\delta_k}}}{2}. \quad (3.137)$$

Sostituendo questa costante in (3.131) otteniamo, infine, la soluzione perturbata:

$$p = p_0 (-k\tau)^{3 - \sqrt{9 + 8\delta_k}}. \quad (3.138)$$

nel regime  $k\tau \rightarrow 0^-$ .

Ricordiamo che nel capitolo precedente abbiamo ridefinito le quantità  $a$ ,  $v$ ,  $\tau$  e  $k$  in modo

tale che la lunghezza  $L$  sia unitaria ( $L = 1$ ).

Per ritrovare la quantità fisica iniziale dobbiamo risostituire  $k \rightarrow Lk \equiv k/k^*$ , per ottenere  $\delta_k$ :

$$\delta_k = \frac{H^2}{M_p^2} \left( \frac{k^*}{k} \right)^3. \quad (3.139)$$

Ricordiamo che  $k^*$  è un parametro libero della teoria, convenzionalmente si può porre come il valore minimo osservabile di  $k$ :

$$k^* = k_{min} = a_0 H_0 \quad (3.140)$$

dove  $a_0$  e  $H_0$  sono, rispettivamente, i valori odierni del fattore di scala e della costante di Hubble.

In questo caso  $k^* \approx 1.4 \cdot 10^4 Mpc^{-1}$  mentre  $k \approx 10^{-3} Mpc^{-1}$ .

Possiamo ora mostrare il grafico (qualitativo) del logaritmo del rapporto tra la soluzione contenente i contributi non adiabatici e la soluzione imperturbata:

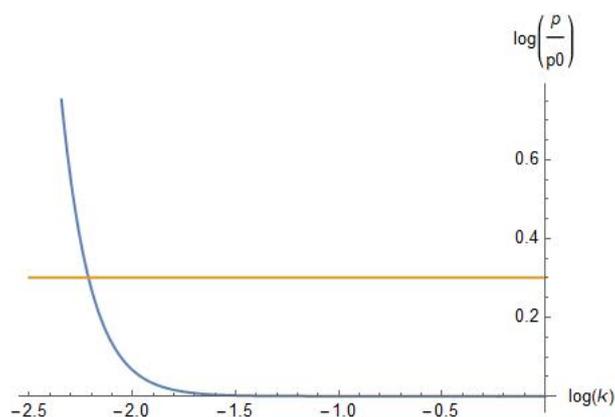


Figura 3.1: grafico del logaritmo del rapporto tra la soluzione contenente i contributi non adiabatici e la soluzione imperturbata in funzione di  $k$  dati i valori  $\tau = 10^{-3}$ ,  $H = 10^{-4} M_p$ .

Come riferimento abbiamo tracciato nel grafico una linea ( linea color senape) che indica il valore in cui la soluzione con l'inclusione dei contributi non adiabatici è due volte la soluzione imperturbata.

È evidente che quando le perturbazioni sono così grandi l'approccio perturbativo perde validità.

Possiamo notare che quando  $k$  diventa piccolo ( $k < 10^{-2}$ ) abbiamo che le perturbazioni diventano dello stesso ordine rispetto alla soluzione imperturbata, in questo caso le nostre approssimazioni iniziali non sono più valide.

È evidente che risulta modificata la regione dello spettro a  $k$  piccoli (come ci si attendeva).

In questo caso la modifica è un'amplificazione rispetto al caso non perturbato. È possibile utilizzare un altro approccio per calcolare la soluzione dell'equazione (3.108) nel caso in cui la fase inflazionaria è di tipo De Sitter e in particolare nello stato di vuoto ( $n = 0$ ).

Infatti possiamo scrivere la soluzione  $p$  come la somma della soluzione imperturbata  $p_0$  dell'equazione (3.123) e di una perturbazione  $\delta p$ :

$$p = p_0 + \epsilon \delta p = \left( \frac{1 + k^2 \tau^2}{2k^3 \tau^2} + \epsilon \delta p \right). \quad (3.141)$$

Andando a sostituire all'equazione (3.123) e valutando i contributi non adiabatici sullo stato imperturbato otteniamo:

$$\delta p''' + 4 \left( k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) \delta p' + \frac{8}{\tau^3} \delta p + \frac{4H^2}{M_p^2 \tau^3 k^4} \left( 1 + \frac{3}{k^2 \tau^2} \right) = 0. \quad (3.142)$$

Per risolvere questa equazione differenziale del terzo ordine dobbiamo imporre le condizioni nel limite di lunghezza d'onda corta:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \delta p = 0, \quad (3.143)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \delta p' = 0, \quad (3.144)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \delta p'' = 0, \quad (3.145)$$

in accordo con le condizioni di limite di lunghezza d'onda corta della soluzione imperturbata.

Infatti già la soluzione imperturbata riproduce in questo limite il vuoto di Bunch-Davies, quindi  $\delta p$  e le sue derivate, nello stesso limite, devono dare un contributo nullo.

Imponendo queste condizioni, troviamo la soluzione dell'equazione (3.142):

$$\delta p = \frac{H^2 k^3}{3k^6 M_p^2 \tau^2} \left\{ 2 [\text{CosIntegral}(-2k\tau)((1 - k^2 \tau^2) \cos(2k\tau) - 2k\tau \sin(2k\tau))] \right. \\ \left. + 2 [\text{SinIntegral}(2k\tau)(\sin(2k\tau)(k^2 \tau^2 - 1) + 2k\tau \cos(2k\tau))] \right. \\ \left. + 4 + 2k\pi\tau \cos(2k\tau) - \pi \sin(2k\tau) + \pi k^2 \tau^2 \sin(2k\tau) \right\}. \quad (3.146)$$

dove:

$$\text{CosIntegral}[x] = - \int_x^\infty dz \frac{\cos z}{z}, \quad (3.147)$$

$$\text{SinIntegral}[x] = \int_0^x dz \frac{\sin z}{z}. \quad (3.148)$$

Possiamo ora mostrare il grafico del logaritmo del rapporto tra la soluzione contenente i contributi non adiabatici e la soluzione imperturbata:

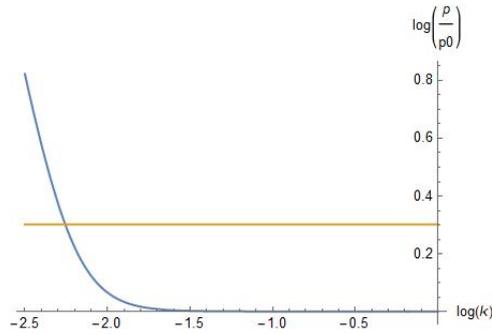


Figura 3.2: grafico del logaritmo del rapporto tra la soluzione contenente i contributi non adiabatici e la soluzione imperturbata in funzione di  $k$  dati i valori  $\tau = 10^{-3}$ ,  $H = 10^{-4}M_p$ .

Anche in questo caso abbiamo tracciato nel grafico una linea (linea color senape) che indica il valore in cui la soluzione con l'inclusione dei contributi non adiabatici è due volte la soluzione imperturbata.

Anche in questo caso quando  $k$  diventa piccolo ( $k < 10^{-2}$ ) abbiamo che le perturbazioni diventano dello stesso ordine rispetto alla soluzione imperturbata e quindi le nostre approssimazioni iniziali non sono più valide.

Possiamo infine confrontare i due grafici ottenuti (e quindi i due metodi di approssimazione):

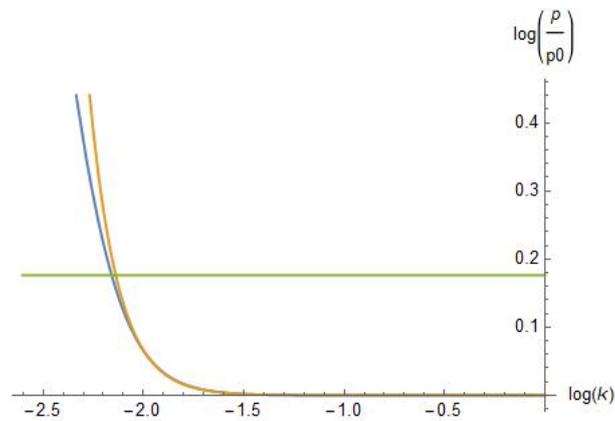


Figura 3.3: Grafico di confronto tra i due metodi: il primo metodo è caratterizzato dalla linea blu mentre il secondo dalla linea color senape.

In questo caso abbiamo utilizzato come riferimento una linea di color verde che indica il valore in cui la soluzione con l'inclusione dei contributi non adiabatici è 1,5 volte la soluzione imperturbata.

Quindi in definitiva possiamo affermare che i due metodi, entro la validità delle appros-

simazioni fatte, sono equivalenti.

Qualitativamente i risultati mostrano una modifica allo spettro non perturbato che aumenta al diminuire di  $k$  con un andamento tipo  $k^{-3}$ . Le correzioni quantistiche gravitazionali inoltre sono proporzionali a  $H^2/M_p^2$ .

Le ultime osservazioni (Planck 2018) evidenziano una possibile modifica dello spettro a piccoli  $k$  nella forma di perdita di potenza. Nel caso in questione correzioni non adiabatiche generano un aumento di potenza per piccoli  $k$ .

Quindi la regione interessata è la stessa ma l'andamento è opposto. L'analisi di casi più realistici (Slow Roll) sembra dunque necessaria ma va oltre la finalità di questa tesi.

Infine si noti che le stesse modifiche dello spettro si ottengono anche per i modi tensoriali che, su De Sitter, soddisfano alla stessa equazione di quelli scalari.

# Conclusioni

La teoria inflazionaria risulta essere lo scenario più promettente per risolvere il problema della piattezza, dell'omogeneità e dell'isotropia estendendo la teoria del Big Bang Caldo. Essa produce delle piccole perturbazioni di densità all'origine della struttura delle galassie e delle disomogeneità nella radiazione cosmica di fondo (CMB) che osserviamo oggi. Lo studio dello spettro di potenza di queste disomogeneità (spettri inflazionari) forniscono dei vincoli che ci permettono di determinare con precisione la dinamica inflazionaria. In questa tesi si sono studiati gli effetti derivanti dalla quantizzazione canonica della gravità sull'evoluzione degli spettri inflazionari.

In particolare lo studio del sistema gravità-materia (inflatone) tramite l'approccio della Gravità Quantistica Canonica ci ha permesso di scrivere l'equazione di Wheeler-DeWitt, l'equazione quantistica che descrive la funzione d'onda dell'Universo primordiale.

La presenza nel sistema di due masse diverse, ovvero la massa di Planck per la parte omogenea della gravità e la massa della materia (perturbazioni della gravità, del campo scalare e la parte omogenea del campo scalare), ci ha permesso di decomporre il sistema attraverso il metodo di Born-Oppenheimer e sostituire l'equazione di Wheeler-DeWitt con un sistema di equazioni equivalenti: l'equazione della gravità (per la funzione d'onda del fattore di scala omogeneo) e le equazioni per ogni singolo modo  $k$  della materia.

Queste equazioni hanno la forma di un'equazione di Schrödinger e contengono i contributi non adiabatici dovuti alla quantizzazione dei gradi di libertà che descrivono il background.

In questo modo si ottengono deviazioni dall'approccio semiclassico tradizionale in cui si quantizzano solo le perturbazioni e si considera lo spaziotempo classico omogeneo ed isotropo.

Fra gli effetti quantistici studiati si sono considerate le conseguenze di un differente ordinamento nella procedura di quantizzazione canonica.

Sebbene questo ordinamento modifichi l'equazione di Wheeler-DeWitt esso non influenza le equazioni di evoluzione della materia al primo ordine perturbativo in  $M_P^{-2}$ .

L'equazione della gravità e la funzione d'onda, sua soluzione, hanno un ruolo chiave nella definizione del "tempo" per l'evoluzione della materia.

Nonostante si possano generare effetti quantistici sull'evoluzione della materia legati alla definizione dell'evoluzione temporale si è scelto un approccio più conservativo adottando

per la funzione d'onda della gravità una soluzione di tipo semiclassico (ottenuta mediante l'approccio WKB al primo ordine in  $M_P^2$ ).

Le equazioni per i modi di materia (che descrivono le perturbazioni inflazionarie mediante la variabile di Mukhanov-Sasaki), in assenza di contributi non adiabatici possono essere risolte esattamente nel formalismo di Schrödinger attraverso la tecnica degli invarianti adiabatici.

Nel caso in cui i contributi non adiabatici della materia siano inclusi siamo riusciti a calcolare in maniera esatta l'equazione di evoluzione della funzione di correlazione che descrive lo spettro della perturbazioni inflazionarie.

Data la difficoltà nello studiare l'equazione perturbata, ne abbiamo calcolato l'approssimazione al primo ordine in  $M_P^{-2}$  valutando i contributi non adiabatici mediante la tecnica perturbativa.

L'equazione perturbata approssimata è stata ottenuta nel caso del vuoto e del generico stato eccitato.

Infine abbiamo applicato l'equazione trovata al caso in cui la fase inflazionaria è di tipo De Sitter e in particolare allo stato di vuoto.

Applicando due metodi diversi di approssimazione per via analitica abbiamo ottenuto le soluzioni per gli spettri primordiali perturbati.

Queste soluzioni evidenziano un'amplificazione dello spettro di potenza rispetto al caso imperturbato nella regione a  $k$  piccoli. Modifiche in questa regione dello spettro erano attese. Le stime analitiche dimostrano che le deviazioni sono proporzionali a  $H^2/M_P^2 \cdot k^{-3}$ . Le ultime osservazioni degli spettri inflazionari (Planck 2018) hanno evidenziato delle deviazioni dalla piattezza nella regione a piccoli  $k$  ma di tipo opposto (soppressione della potenza invece che amplificazione).

L'applicazione del nostro formalismo a situazioni più realistiche ma troppo complesse per essere trattate all'interno di questa tesi (inflazione con Slow Roll) sono quindi necessarie per un confronto più attendibile con le osservazioni.

# Appendice A

## Gravità Quantistica Canonica

Per studiare la Gravità Quantistica Canonica è necessario utilizzare la formulazione hamiltoniana della Relatività Generale.

Partiamo da qualche definizione:

Una ipersuperficie  $\Sigma$  è una sottovarietà di dimensione  $n - 1$  di una varietà  $n$  dimensionale  $\mathcal{M}$ .

Possiamo descrivere questa ipersuperficie in due modi distinti:

- In termini di immersione dell'ipersuperficie  $\Sigma$  in  $\mathcal{M}$ :

$$\Phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M} \tag{A.1}$$

attraverso una mappa iniettiva  $\Phi$ ;

- In termini di ipersuperficie immersa:

$$\Sigma \subset \mathcal{M} \tag{A.2}$$

specificata da:

$$\Sigma = \{x \in \mathcal{M} : S(x) = 0\} \tag{A.3}$$

per qualche funzione  $S$  a valori reali su  $\mathcal{M}$ .

Sia  $x^\mu$  la coordinata sullo spaziotempo  $\mathcal{M}$  e sia  $y^a$  la coordinata definita sull'ipersuperficie  $\Sigma$ .

Allora l'immersione dell'ipersuperficie sarà data semplicemente da un'equazione parametrica:

$$\Phi : x^\mu = x^\mu(y^a). \tag{A.4}$$

Definito il campo vettoriale tangente  $\partial_{y^a}$  su  $\Sigma$ , il campo vettoriale tangente sull'immagine  $\Phi(\Sigma) \subset \mathcal{M}$  è:

$$X_a = X_{,a}^\mu \partial_\mu \tag{A.5}$$

dove:

$$X_{,a}^{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^a} \quad (\text{A.6})$$

è lo Jacobiano di  $\Phi$  (imporremo abbia rango massimo  $n$ ).

Se in tutti i punti dell'ipersuperficie il vettore tangente è di tipo spazio, tempo o nullo allora l'ipersuperficie sarà detta di tipo spazio, tempo o nulla.

Possiamo definire un campo vettoriale ortogonale all'ipersuperficie:

$$\epsilon^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} \partial_{\nu} S. \quad (\text{A.7})$$

Se  $\epsilon^{\mu}$  è un campo vettoriale ortogonale, allora anche  $f\epsilon^{\mu}$  lo sarà (dove  $f$  è uno scalare non nullo).

In particolare se l'ipersuperficie è di tipo spazio o tempo possiamo normalizzare il campo vettoriale ortogonale:

$$n^{\mu} = \frac{\epsilon^{\mu}}{|\epsilon^{\mu}\epsilon_{\mu}|^{1/2}} \quad (\text{A.8})$$

dove:

$$n^{\mu} n_{\mu} = \epsilon \quad (\text{A.9})$$

( $\epsilon = 1$  se l'ipersuperficie  $\Sigma$  è di tipo spazio mentre  $\epsilon = -1$  se l'ipersuperficie è di tipo tempo).

Lo spazio ambiente  $\mathcal{M}$  sarà dotato di una metrica  $g_{\mu\nu}$ , questa indurrà una metrica indotta:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_{\mu} n_{\nu} \quad (\text{A.10})$$

sull'immagine  $\Phi(\Sigma)$  con le seguenti proprietà:

- $h_{\mu\nu}$  è ortogonale a  $n^{\mu}$ :

$$n^{\mu} h_{\mu\nu} = 0 = n^{\nu} h_{\mu\nu}; \quad (\text{A.11})$$

- per vettori  $V^{\mu}$  tangenti all'immagine  $\Phi(\Sigma)$ , il prodotto scalare rispetto a  $h_{\mu\nu}$  è identico al prodotto scalare con  $g_{\mu\nu}$ :

$$V^{\mu} n_{\mu} = 0 \rightarrow h_{\mu\nu} V^{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\mu}. \quad (\text{A.12})$$

$h_{\mu\nu}$  è un oggetto tridimensionale: esiste una relazione tra questo tensore definito su  $\Phi(\Sigma)$  e il tensore  $h_{ab}$  definito sull'ipersuperficie  $\Sigma$ :

$$h_{ab} = X_{,a}^{\mu} X_{,b}^{\nu} h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Questo oggetto permette di descrivere in maniera completa la geometria intrinseca dell'ipersuperficie: tutte le proprietà che possono essere dedotte misurando lunghezze, angoli, trasporti paralleli etc.

Tuttavia non ci dice nulla su come questa ipersuperficie sia immersa nello spazio ambiente  $\mathcal{M}$ .

Per calcolare quantitativamente questa quantità si utilizza il tensore di curvatura estrinseca.

Definiamo il tensore di proiezione lungo le componenti tangenti dell'immagine  $\Phi(\Sigma)$ :

$$h_{\beta}^{\alpha} \equiv g^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} - \epsilon n^{\alpha} n_{\beta}. \quad (\text{A.14})$$

Esso ha la proprietà:

$$h_{\gamma}^{\alpha} h_{\beta}^{\gamma} = h_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.15})$$

che è caratteristica degli operatori di proiezione.

Definiamo il tensore di curvatura estrinseca:

$$K_{\mu\nu} \equiv h_{\mu}^{\rho} \nabla_{\rho} n_{\nu}. \quad (\text{A.16})$$

Il tensore di curvatura estrinseca è simmetrico  $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ .

Esiste una relazione tra questo tensore definito su  $\Phi(\Sigma)$  e il tensore definito sull'ipersuperficie  $\Sigma$ :

$$K_{ab} = X_{,a}^{\mu} X_{,b}^{\nu} K_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

L'interpretazione geometrica del tensore di curvatura estrinseca è chiara: consideriamo due vettori normali in due punti P e Q sull'ipersuperficie  $\Sigma$ .

Sia  $\tilde{n}^{\mu}$  il vettore normale su P risultante dal trasporto parallelo di  $n^{\mu}$  su Q lungo la geodetica da Q a P.

La differenza tra questo vettore e il vettore normale su P sarà una misura della curvatura estrinseca dell'ipersuperficie nel punto P.

La traccia del tensore di curvatura è così definita:

$$K \equiv g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} n^{\mu}. \quad (\text{A.18})$$

Possiamo riscrivere la derivata temporale di  $h_{ab}$  in termini del tensore di curvatura estrinseca:

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + D_a N_b + D_b N_a. \quad (\text{A.19})$$

dove  $D_a$  è la derivata covariante sull'ipersuperficie  $\Sigma$ :

$$D_a N_b = X_{,a}^{\mu} X_{,b}^{\nu} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \nabla_{\alpha} N_{\beta}. \quad (\text{A.20})$$

É possibile definire il campo vettoriale "evoluzione temporale"  $t^{\mu}(\mathbf{x})$  tramite l'equazione:

$$t^{\mu} \nabla_{\mu} t = 1. \quad (\text{A.21})$$

Ogni singolo vettore di questo campo vettoriale punta da una coordinata spaziale  $y^a$  su un'ipersuperficie a  $t$  costante in un punto con la stessa coordinata ma in un'ipersuperficie

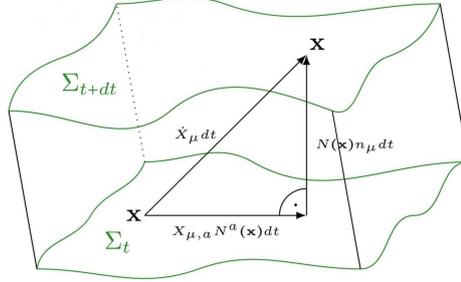


Figura A.1: Interpretazione Geometrica

di tempo  $t + dt$  costante.

Possiamo scomporre questo campo vettoriale come:

$$t^\mu(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})n^\mu + N^a(\mathbf{x})X_{;a}^\mu(\mathbf{x}) \quad (\text{A.22})$$

dove  $N(\mathbf{x})$  è chiamata funzione di ritardo,  $N^a(\mathbf{x})$  è chiamato vettore di spostamento e  $X_{;a}^\mu(\mathbf{x})$  è lo Jacobiano definito dall'equazione (A.6).

La funzione di ritardo può essere scritta come  $N = n_\mu t^\mu$  da cui possiamo dedurre:

$$N = \frac{1}{n^\mu \nabla_\mu t}. \quad (\text{A.23})$$

Possiamo interpretare la funzione di ritardo come il rapporto tra il tempo proprio (dato da  $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ ) e il tempo coordinato  $n^\mu \nabla_\mu t$ .

Il vettore di spostamento  $N^a(\mathbf{x})$  è un vettore che punta dal punto di coordinata  $y^a$  sull'ipersuperficie a  $t$  costante al punto, nella stessa ipersuperficie, la cui normale eretta da quel punto raggiunge il punto di coordinate  $y^a$  sull'ipersuperficie a  $t + dt$  costante.

Grazie alla foliazione dello spaziotempo possiamo scrivere la relazione tra lo scalare di Ricci su  $\mathcal{M}$  e lo scalare di Ricci su  $\Sigma$  (a meno di una divergenza totale):

$$R = R^{(3)} + (K^{ab}K_{ab} - K^2) \quad (\text{A.24})$$

dove  $R^{(3)}$  è lo scalare di Ricci sull'ipersuperficie  $\Sigma$  tridimensionale,  $K_{ab}$  è il tensore di curvatura estrinseca mentre  $K$  è la sua traccia.

Questa equazione è chiamata equazione di Gauss-Codazzi.

Grazie a questa equazione possiamo riscrivere l'azione di Einstein-Hilbert come:

$$S_{EH} = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \int dt d\mathbf{x} \sqrt{h} N (K_{ab}K^{ab} - K^2 + R^{(3)}) \quad (\text{A.25})$$

dove l'elemento di volume  $\sqrt{-g}d\mathbf{x}$  è stato espresso in termini del determinante della metrica indotta  $h$ :

$$\sqrt{-g}d\mathbf{x} = N\sqrt{h}d\mathbf{x}. \quad (\text{A.26})$$

Possiamo esprimere l'azione nella classica forma di un energia cinetica meno un energia potenziale.

Definita la metrica di DeWitt:

$$G^{abcd} = \frac{1}{2} (h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}) \quad (\text{A.27})$$

possiamo riscrivere la (A.25) come:

$$S_{EH} = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \int dt d\mathbf{x} N \sqrt{h} (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + R^{(3)}) = \int dt d\mathbf{x} \mathcal{L}^g. \quad (\text{A.28})$$

Il termine cinetico è determinato dalla metrica di DeWitt mentre il termine potenziale è l'opposto dello scalare di Ricci tridimensionale.

Definiti i momenti canonici:

$$p_N = \frac{\delta \mathcal{L}^g}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$p_{N^a} = \frac{\delta \mathcal{L}^g}{\delta \dot{N}^a} = 0, \quad (\text{A.30})$$

notiamo subito che la funzione di spostamento e la funzione di ritardo sono moltiplicatori di Lagrange.

Mentre per:

$$p^{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}^g}{\delta \dot{h}_{ab}} = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \sqrt{h} G^{abcd} K_{cd} \quad (\text{A.31})$$

abbiamo la seguente parentesi di Poisson:

$$[h_{ab}(\mathbf{x}), p^{cd}(\mathbf{y})]_{pb} = \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{A.32})$$

La densità hamiltoniana canonica:

$$\mathcal{H}^g = p^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}^g \quad (\text{A.33})$$

assumerà la seguente espressione:

$$\mathcal{H}^g = N \mathcal{H}_\perp^g + N^a \mathcal{H}_a^g \quad (\text{A.34})$$

dove:

$$\mathcal{H}_\perp^g = \frac{16\pi}{m_{Pl}^2 \sqrt{h}} G_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \frac{\sqrt{h} m_{Pl}^2}{16\pi} R^{(3)}, \quad (\text{A.35})$$

$$\mathcal{H}_a^g = -2D_b p_a^b. \quad (\text{A.36})$$

Scriviamo l'azione in forma hamiltoniana:

$$S = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \int dt d\mathbf{x} \left( p^{ab} \dot{h}_{ab} - N \mathcal{H}_\perp^g - N^a \mathcal{H}_a^g \right). \quad (\text{A.37})$$

L'informazione della foliazione è codificata dalle funzioni di spostamento e di ritardo; dato che la Relatività Generale è background-indipendente esse saranno funzioni arbitrarie.

Variando l'azione rispetto a  $N$  e  $N^a$  troviamo i vincoli, rispettivamente, vincolo hamiltoniano e vincoli dei momenti:

$$\mathcal{H}_\perp^g \approx 0, \quad (\text{A.38})$$

$$\mathcal{H}_a^g \approx 0. \quad (\text{A.39})$$

In addizione a questi quattro vincoli abbiamo sei equazioni dinamiche date dalle equazioni di Hamilton.

Ora la procedura di quantizzazione è lineare: promuoviamo  $h_{ab}$  e  $p^{cd}$  ad operatori la cui azione agisce su un funzionale d'onda  $\Psi$ :

$$\hat{h}_{ab} \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = h_{ab} \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})], \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{p}^{cd} \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = -i \frac{\delta}{\delta h_{cd}} \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})]. \quad (\text{A.41})$$

Sostituiamo le parentesi di Poisson con il commutatore:

$$\left[ \hat{h}_{ab}(\mathbf{x}), \hat{p}^{cd}(\mathbf{y}) \right] = \frac{i}{2} (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{A.42})$$

Implementando i vincoli secondo questa procedura troviamo:

$$\hat{\mathcal{H}}_\perp \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = \left( -\frac{16\pi}{m_{Pl}^2 \sqrt{\hbar}} G_{abcd} \frac{\delta^2}{\delta h_{ab} \delta h_{cd}} - \frac{\sqrt{\hbar} m_{Pl}^2 R^{(3)}}{16\pi} \right) \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = 0. \quad (\text{A.43})$$

Questa è l'equazione di Wheeler-DeWitt.

Per gli altri vincoli troviamo:

$$\hat{\mathcal{H}}_a \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = 2i D_b h_{ac} \frac{\delta}{\delta h_{bc}} \Psi[h_{ab}(\mathbf{x})] = 0. \quad (\text{A.44})$$

Questi sono chiamati vincoli dei momenti quantistici.

Se ci sono dei campi non gravitazionali accoppiati i vincoli acquistano un termine aggiuntivo.

Nel vincolo hamiltoniano abbiamo un termine aggiuntivo del tipo  $\sqrt{\hbar} \rho$  dove:

$$\rho = T_{\mu\nu} n^\nu n^\mu \quad (\text{A.45})$$

mentre nei vincoli del momento si avrà un termine aggiuntivo del tipo  $\sqrt{\hbar} J_a$  dove:

$$J_a = X_{,a}^\mu T_{\mu\nu} n^\nu. \quad (\text{A.46})$$

# Bibliografia

- [1] S. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison Wesley, 2004.
  
- [2] M. Blau, Lecture Notes on General Relativity, 2018.  
URL: <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
  
- [3] M. Gasperini, Lezioni di Cosmologia Teorica, Springer-Verlag, 2012.
  
- [4] V. F. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge University Press, 2005.
  
- [5] W. H. Kinney, TASI Lectures on Inflation (2009).  
arXiv: <https://arxiv.org/abs/0902.1529>.
  
- [6] D. Baumann, The Physics of Inflation (2015).  
URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/TEACHING/INFLATION/Lectures.pdf>.
  
- [7] A. Riotto, Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations (2018).  
URL: <http://webtheory.sns.it/ggilectures2018/riotto/riotto.pdf>.
  
- [8] V. F. Mukhanov, S. Winitzki, Introduction to Quantum Effects in Gravity, Cambridge University Press, 2007.
  
- [9] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, Theory of Cosmological Perturbation, Phys.Rept.215 (1992) 203.

- [10] V. F. Mukhanov, Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations, Sov.Phys. JETP 67 (1988) 1297.
- [11] C. Kiefer, Quantum Gravity, Oxford Press University, 2007.
- [12] D. Atkatz, Quantum Cosmology for Pedestrian, American Journal of Physics 62, 619 (1994).
- [13] J. B. Hartle and S. W. Hawking, Wave Function of the Universe, Phys.Rev.D 28 (1983) 2960.
- [14] F. Finelli, G. P. Vacca, G. Venturi, Chaotic Inflation from a Scalar Field in Non-classical States (2018).  
arXiv:<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712098v2>.
- [15] G. L. Alberghi, C. Appignani, R. Casadio, F. Sbisà, A. Tronconi, Inflation and the Semiclassical Dynamics of a Conformal Scalar Field (2007).  
arXiv: <https://arxiv.org/abs/0708.0483v2>.
- [16] D. Bini, G. Esposito, C. Kiefer, M. Kramer, F. Pessina, On the Modification of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Spectrum from Canonical Quantum Gravity (2013).  
arXiv: <https://arxiv.org/abs/1303.0531v2>.
- [17] G. L. Alberghi, R. Casadio, A. Tronconi, Planck Scale Inflationary Spectra from Quantum Gravity (2006).  
arXiv: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0606085v2>.
- [18] A. Y. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, Quantum Cosmology and the Evolution of Inflationary Spectra (2016).  
arXiv: <https://arxiv.org/abs/1609.02830>.
- [19] A. Y. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, Quantum Gravity and the Large Scale Anomaly (2015).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/1501.06404>.

[20] D. Brizuela, C. Kiefer, M. Kramer, Quantum-gravitational Effects on Gauge-invariant Scalar and Tensor Perturbations during Inflation: The De Sitter case (2016).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/1511.05545v2>.

[21] D. Brizuela, C. Kiefer, M. Kramer, Quantum-gravitational Effects on Gauge-invariant Scalar and Tensor Perturbations during Inflation: The Slow-Roll Approximation (2016).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/1611.02932v2>.

[22] A. Y. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, Signatures of Quantum Gravity in a Born-Oppenheimer Context (2014).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/1403.2961>.

[23] A. Y. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, The Born-Oppenheimer Method, Quantum Gravity and Matter (2017).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/1709.10361v1>.

[24] H. R. Lewis, W. B. Riesenfeld, An Exact Quantum Theory of the Time Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time Dependent Electromagnetic Field, *J. Math. Phys.* 10 (1969), 1458.

[25] X. C. Gao, J. B. Xu, T. Z. Qian, Geometric Phase and the Generalized Invariant Formulation, *Phys. Rev. A* 44 (11) (1991).

[26] R. Steigl, F. Hinterleitner, Factor Ordering in Standard Quantum Cosmology (2005).

arXiv: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0511149v1>.

[27] N. Kontoleon and D. L. Wiltshire, Operator Ordering and Consistency of the Wave Function of the Universe, *Phys. Rev. D* 59, 063513 (1999).