

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica delle Galassie a Spirale e delle Galassie Ellittiche

Tesi di Laurea

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Candidato:
Luca Rosignoli

Sessione IV
Anno Accademico 2017-2018

Sommario

Per descrivere la *Dinamica* delle galassie bisogna tenere conto sia degli aspetti puramente cinematici delle sue componenti, come Stelle e Gas, sia dei Processi Elettromagnetici che, avendo un effetto dissipativo, modificano l'energia della galassia e quindi anche la sua dinamica.

Per questo motivo una trattazione esaustiva richiede l'uso di varie discipline come la *Meccanica Classica*, la *Fluidodinamica*, la *Meccanica Statistica* e la *Fisica dei Plasmi*.

In questa tesi verrà data inizialmente un panoramica sulla Classificazione di Hubble e sui principali processi di radiazione delle Galassie a Spirale ed Ellittiche (*Capitolo 1*). Verrà poi mostrata la teoria fisica che permette di costruire un modello di galassia vista come *Sistema Non Collisionale*(*Capitolo 2*). Successivamente si andranno a ricavare le relazioni più importanti per le Galassie Ellittiche e a Spirale, dedotte grazie all'uso del modello teorico appena descritto, confrontato con i dati osservativi(*Capitolo 3, 4*).

Indice

1	Panoramica Morfologica	1
1.1	Classificazione di Hubble	1
1.2	Cenni sui Processi di Radiazione	2
1.2.1	Emissione nelle Galassie a Spirale	2
1.2.2	Emissione nelle Galassie Ellittiche	3
2	Dinamica Stellare	3
2.1	Problema degli N-Corpi	4
2.2	Tempo di Rilassamento a Due Corpi	5
2.3	La CBE e le Equazioni di Jeans	6
2.3.1	Equazioni di Jeans	7
2.4	Teorema del Viriale	9
2.5	Applicazione Fisica: <i>Rapporto Massa-Luminosità</i>	10
3	Galassie Ellittiche	11
3.1	Profili di Brillanza	11
3.2	Deproiezione di Massa	12
3.3	Piano Fondamentale	12
4	Galassie a Spirale	13
4.1	Il Bulge e la Barra	13
4.2	Il Disco	13
4.2.1	Curva di Rotazione	14
4.3	I Bracci	14
4.3.1	Formazione ed Evoluzione	15

1 Panoramica Morfologica

Con il nome Galassia si intende un Sistema Autogravitante composto da *Stelle*, *Gas*, *Polvere* e *Materia Oscura*.

Le quantità fisiche più importanti rientrano in un range molto ampio di valori, in particolare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^7 \leq N_* \leq 10^{12} & \text{N. Stelle} \\ 0.5[kpc] \leq R \leq 120[Kpc] & \text{Raggio} \\ 10^9 \leq M \leq 10^{13} & \text{Massa in } [M_\odot] \\ 100 \leq \sigma_* \leq 300 & \text{Dispersione di Velocità in } [\frac{Km}{s}] \end{array} \right.$$

Inoltre diverse formazioni ed evoluzioni determinano differenti strutture che hanno portato a catalogare le galassie in differenti classi.

1.1 Classificazione di Hubble

Bisogna premettere che le galassie possono apparire di forma diversa a seconda anche dell'angolo di osservazione sotto cui si guardano: vista di faccia(*Face-ON*), *Inclinate*, viste di taglio(*Edge-ON*).

La *Classificazione di Hubble*(fig.1) fu ideata da Edwin Hubble nel 1926 e poi via via ampliata e perfezionata, essa suddivide le galassie in quattro grandi categorie:

- *Galassie Ellittiche*[E0-E7]: Hanno una forma ellissoidale con eccentricità sempre maggiore (0:7). Non presentano sotto-strutture evidenti, hanno una popolazione stellare vecchia(*Pop.II*) e non hanno Star-Formation.
- *Galassie Lenticolari*: Presentano un Bulge ed un Disco equatoriale, hanno una popolazione stellare ed un Star-Formation simile alle galassie ellittiche. Hanno inoltre una loro sotto-suddivisione in:
 - *Senza Barra*[S0]: Classificate in base alla prominenza della polvere rispetto al disco (S01-S03)
 - *Con Barra*[SB0]: Classificate in base alla prominenza della barra (SB01-SB03)
- *Galassie a Spirale*: Sono le più diffuse, hanno stelle giovani(*Pop.I*) nel disco e vecchie(*Pop.II*) nel bulge e nell'alone attorno alla galassia, presentano un Star Formation bassa ma costante. Vengono suddivise in due grandi categorie:
 - *Spirali non Barrate*[Sa-Sc]: La classificazione qui tiene conto sia dell'angolo di apertura e della risoluzione dei bracci: da *a*(Bracci molto avvolti e poco risolti) a *c*(Bracci poco avvolti e molto risolti), che della luminosità del bulge rispetto al disco che da *a* a *c* diventa sempre meno luminoso.
 - *Spirali Barrate*[SBa-SBc]: In questo tipo i bracci partono da una barra, la loro classificazione è la stessa per le Non-barrate.

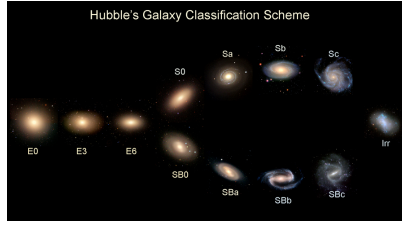


Figura 1: Classificazione di Hubble

- *Galassie Irregolari*[Irr]: Presentano una forma irregolare e non hanno sottostrutture evidenti, hanno piccola massa e dimensione ma una popolazione di stelle giovani ed una formazione stellare piuttosto alta.

1.2 Cenni sui Processi di Radiazione

Oltre al collettivo di stelle che con la loro luce diffusa determinano il "Colore" della galassia, esistono altri processi di emissione molto importanti, dovuti all' *ISM*¹, che possono anche aiutare a capire la dinamica dell'intera struttura galattica(es:*Effetto Doppler*). E' giusto quindi elencare qua i principali.

1.2.1 Emissione nelle Galassie a Spirale

In queste galassie l'ISM si trova in tutte e quattro le sue *Fasi* che dipendono dalla sua densità e temperatura:

- *Hot Ionized Medium*: Con temperature nell'ordine di $10^6[K]$ e densità di circa $10^{-2}[cm^{-3}]$, si trova nel bulge e nei *SNR*². Il processo di emissione primario è la *Bremsstrahlung*³, che emette in maniera continua ed è molto visibile in banda X.
- *Warm Ionized Medium*: Con temperature nell'ordine di $10^4[K]$ e densità di circa $10[cm^{-3}]$, si trova nelle zone di star formation, nei Nuclei Galattici Attivi e nelle Nebulose Planetarie. Il principale processo di emissione per questo mezzo è la *Bremsstrahlung* ma presenta anche *Righe di Ricombinazione* di Idrogeno e Ossigeno.
- *Warm Neutral Medium*: Con temperature nell'ordine di $10^{2÷4}[K]$ e densità di circa $10^{-1}[cm^{-3}]$, è composto principalmente da Idrogeno Neutro (*HI*). Rappresenta la maggior parte del volume del *ISM* e si trova principalmente nel disco, viene rivelato grazie alla *Riga 21cm* dell'Idrogeno ed è molto importante per costruire la *Curva di Rotazione* della galassia di cui si parlerà in seguito.
- *Cold Neutral Medium*: Con temperature nell'ordine di $10^{1÷2}[K]$ e densità maggiori di $10[cm^{-3}]$, è composto da gas atomico, molecolare e polvere. Il gas è rivelabile grazie alle righe di emissione⁴, mentre la polvere si trova grazie alla sua emissione termica nell'IR e ai suoi effetti di estinzione.

¹InterStellar Medium, composto per il 99% da Gas e per l'1% da Polvere

²SuperNovae Remnant

³Radiazione di frenamento

⁴Molto importante è quella del CO a $115[GHz]$, detta "*Tracciante*" dell'Idrogeno Molecolare

1.2.2 Emissione nelle Galassie Ellittiche

Oltre alle relazioni fotometriche⁵ che si andranno a descrivere più avanti, si può vedere che in queste galassie è presente solo la fase *HIM* che emette principalmente per *Bremsstrahlung*. Nel caso in cui il nucleo della galassia sia attivo, si può avere emissione in banda Radio dovuta al processo di *Sincrotrone*⁶. In tal caso quando la luminosità Radio supera le $10^{21}[\frac{W}{Hz}]$ si parla allora di *RadioGalassia*

2 Dinamica Stellare

La Dinamica Stellare è un ampio campo di studio ma i suoi obiettivi principali sono essenzialmente:

- Ottenere una visione qualitativa della struttura e dell'evoluzione dei *Sistemi Stellari*⁷
- Elaborare metodi matematici (Analitici e Numerici) che riescano a dare previsioni quantitative.

Per prima cosa bisogna studiare in maniera formale il comportamento del costituente fondamentale delle galassie, le Stelle.

Poichè la forza principale è la mutua interazione gravitazionale tra le stelle è necessario capire se esiste la possibilità di *Collisioni* tra di esse, più propriamente dette *Urti Geometrici*. Si considerano ora N stelle tutte uguali di raggio ($R_{\odot} \simeq 7 \cdot 10^{10}[cm]$) distribuite omogeneamente dentro una sfera di raggio R . Per studiare l'impatto tra due stelle si definisce la *Sezione D'Urto Geometrica*:

$$\sigma_* \simeq 4\pi R_{\odot}^2$$

da cui si ricava un *Volume d'Impatto* corrispondente ad un cilindro di sezione σ_* e altezza λ corrispondente al *Liberio Cammino Medio* $\Rightarrow (V_* = \lambda\sigma_*)$.

Per l'omogeneità del problema si può uguagliare la somma di tutti questi volumi d'impatto con quello della sfera che le contiene:

$$N\lambda\sigma_* = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Andando a sostituire la definizione di σ_* ricavata prima, si può ottenere un rapporto tra il libero cammino medio e il diametro del sistema (di una Galassia nel nostro caso):

$$\frac{\lambda}{2R} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \frac{1}{6N}$$

Inserendo ora valori tipici per una galassia ellittica ($N = 10^{11}$, $R = 10^4[pc]$) si vede che

$$\frac{\lambda}{2R} \simeq 3 \cdot 10^{11}$$

⁵La fotometria è una tecnica dell'astronomia che riguarda la misurazione del flusso, o dell'intensità, della radiazione elettromagnetica di un oggetto astronomico.

⁶Processo in cui gli elettroni ultra relativistici spiraleggiano attorno alle linee di forza del campo magnetico esterno

⁷Sistema Gravitazionale composto da un Grande numero di particelle ($N \geq 10$)

che, in termini di un tempo di Hubble ($t_H \simeq 15[Gyr] \simeq 4.7 \cdot 10^{17}[s]$) e assumendo una velocità stellare tipica di $v_* = 100[Kms^{-1}]$ diventa

$$\frac{\lambda}{t_h v_*} \approx 10^9$$

Quindi, dato che il tempo medio tra un impatto e l'altro è molto più grande di un tempo di Hubble, si possono ragionevolmente escludere dalla trattazione gli urti geometrici. Questo porta a trattare la galassia come un sistema di N *Punti Materiali* il cui moto è descritto da un insieme di equazioni differenziali noto come il *Problema degli N-Corpi*.

2.1 Problema degli N-Corpi

La formulazione di tipo Newtoniana⁸ del problema a N-Corpi in coordinate cartesiane espresse per un sistema di riferimento inerziale S_0 è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \\ U = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \end{cases} \quad (1)$$

dove m_i , \mathbf{x}_i , \mathbf{v}_i sono rispettivamente massa, posizione e velocità dell' i -esima stella, U è l'energia potenziale e G è la *Costante di Gravitazione*⁹.

Solitamente si assumono come condizioni iniziali: $\mathbf{x}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_i^0$; $\mathbf{v}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{v}_i^0$.

Questo problema ha $6N$ *GdL*¹⁰ e ad ogni Legge di Conservazione si riducono di 1 i *GdL*. Si ottiene una soluzione analiticamente corretta, quindi $6N - 1$ integrazioni indipendenti, solo per $N = 2$.

Per $N \geq 3$ non è risolvibile in maniera generale ma è comunque possibile ricavare importanti informazioni sul sistema, come l'*Identità di Lagrange-Jacobi*, che per S_0 risulta essere:

$$\ddot{I} = 2(2T + U) = 2(T + E) = 2(2E - U)$$

Con \ddot{I} Derivata seconda del momento polare di inerzia

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{x}_i\|^2$$

Questa equazione è molto importante poiché collega quantità dinamiche (U, T, E) con informazioni sull'evoluzione della struttura del sistema (I).

Anche se il Problema degli N-corpi porta anche ad altri importanti risultati, esso non è un approccio esaustivo per trattare i sistemi stellari. Infatti, bisogna tenere conto dell'elevatissimo numero di particelle (Stelle) che compongono questi sistemi e, per avere una visione più evoluta, bisogna passare ad un approccio *Statistico*. Tale approccio, detto di *Liouville*, usa la meccanica statistica per trasformare il set di *ODE*¹¹ del problema degli N-corpi in un set di *Quasi - Linear PDE*¹², ma anche questo sistema fallisce difatti non riesce ad abbassare la dimensionalità del problema.

⁸Esiste anche la formulazione Hamiltoniana

⁹ $G = 6.67 \cdot 10^{-8}[cm^3 s^{-2} g^{-1}]$

¹⁰Gradi di Libertà

¹¹*Ordinary Differential Equation*

¹²*Partial Differential Equation*

2.2 Tempo di Rilassamento a Due Corpi

Bisogna quindi trovare un modo per abbassare la dimensionalità.

Per farlo si può cambiare approccio di indagine e trasformare la distribuzione *discreta* di N particelle massive in una distribuzione *Continua* di massa $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{t})$.

Per essere sicuri che tale approccio sia corretto per il caso in questione bisogna capire quanto l'effettiva *Granularità* del sistema, poichè realmente composto da N corpi discreti e massivi, sia significativa per studiare il moto delle Stelle al suo interno.

Per tale scopo viene utilizzato il *Tempo di Rilassamento a Due Corpi*, che può essere inteso come:

Definizione 1 *Il tempo che dovrebbe passare perchè la traiettoria percorsa da un stella di test, "sparata" dentro ad una nube omogenea di altre stelle di campo, intesa quindi come sistema di N corpi discreti; differisca dalla traiettoria della stessa stella sparata dentro ad una nube di densità di massa "Continua"*

Per calcolare tale quantità si devono fare varie assunzioni sul sistema:

- Tutte le "Collisioni"¹³ siano indipendenti tra di loro.
Questo modifica il problema degli N -corpi a N problemi a 2-corpi.
- Ogni singolo P2b¹⁴ è di tipo iperbolico, quindi sono tutti sistemi non-legati.
- L'intero sistema sia *Virializzato*(Cap-2.3).
- Vengono trascurate eventuali *Forze Mareali* dovute a Collisioni vicine.

Sotto queste assunzioni il problema si riduce ad una *Diffusione* dell'energia della stella di test(m_t) dovuta a tutte le interazioni con le N_* stelle di campo. In questo contesto il *Tempo di Rilassamento a due Corpi* diventa:

Definizione 2 *Il tempo richiesto affinché la Variazione di Energia Cinetica $\sum |\Delta E_t|$ data dalla somma su tutte le collisioni fatte dalla stella di test, sia uguale all'energia cinetica iniziale di tale stella.*

Ora tramite integrazioni sulle velocità e sul parametro d'impatto(*Approccio Cinetico*) si ottiene la definizione di tempo di rilassamento a due corpi:

$$t_{2b} = n_{2b} \times t_{cross} \quad (2)$$

dove t_{cross} è il tempo di attraversamento richiesto perchè la stella percorra l'intero sistema e n_{2b} è il numero di attraversamenti necessari per il *Rilassamento*¹⁵ della stella di test nel sistema: $n_{2b} = \frac{E_0}{\sum |\Delta E|}$.

Si può dare una stima asintotica di t_{2b} per $N_* \rightarrow \infty$ che è:

$$t_{2b} \sim \frac{0.1 N_* t_{cross}}{\ln N_*} \quad (3)$$

¹³Precisiamo che per collisioni si intende Interazione Gravitazionale, poichè abbiamo dimostrato che le vere e proprie collisioni geometriche sono irrilevanti.

¹⁴Problema a 2 Corpi

¹⁵La defizione di *Rilassamento* è la Def.(2)

Si può affermare che un sistema è *Collisionale* se il suo tempo di rilassamento è *minore* della sua età; viceversa si definisce *Non Collisionale* se il suo tempo di rilassamento è *maggiore* della sua età. Andando a sostituire in (3) dei valori tipici per una galassia ($N_* \simeq 10^{11}$, $t_{cross} \simeq 2 \cdot 10^8$) si ottiene che:

$$t_{2b} \simeq 10^{15 \div 16} [yr] \quad (4)$$

Si può notare che esso è circa un miliardo di volte l'età dell'Universo!

Si può tranquillamente supporre quindi le Galassie come Sistemi Non Collisionali.¹⁶

Questa caratteristica è fondamentale per continuare lo studio di questi sistemi, poichè essi possono essere descritti dall'Equazione di Boltzmann Non Collisionale (CBE) che grazie al *Metodo dei Momenti* fornirà importanti informazioni fisiche del sistema.

2.3 La CBE e le Equazioni di Jeans

Per studiare la CBE bisogna prima introdurre il concetto di *Funzione di Distribuzione* che descrive una densità nello SdF ¹⁷.

Definizione 3 La *Funzione di Distribuzione (FD)* di un sistema a N -corpi è una funzione $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) \geq 0$ con la seguente proprietà:

$$\Delta M(\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}, t) = \int_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}$$

dove $\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v} \subseteq \gamma$ ¹⁸ e ovviamente:

$$\Delta M(\gamma, t) = \int_{\gamma} f(\gamma, t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v} = M$$

Ora andando a moltiplicare la *FD* per delle funzioni peso $g_k(\mathbf{v})$ ed andando ad integrare sulle velocità, si ottengono i Momenti k -esimi¹⁹ della *FD* (Momenti delle Velocità) che saranno utili anche in seguito per lo studio della *CBE*.

- **Ordine 0:** Fornisce la *Densità Volumetrica del Sistema*, $\rho : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
A questa è anche associato un Potenziale Gravitazionale grazie alla equazione di Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi g \rho$, da cui, $\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) d^3 \mathbf{v}$

- **Ordine 1:** Questo momento introduce le Velocità

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) v_i d^3 \mathbf{v}$$

- **Ordine 2:** Esprime la componente ij -esima del *Tensore di Dispersione delle Velocità* σ^2

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) (v_i - v_j)(v_j - v_i) d^3 \mathbf{v}$$

¹⁶Attenzione!: non tutti i sistemi Stellari possono essere considerati tali, per esempio gli *Ammassi Globulari* hanno un $t_{2b} \simeq 10^9$ quindi confrontabile con l'età dell'Universo.

¹⁷Spazio delle Fasi

¹⁸ γ è un volume $6D$

¹⁹Queste quantità ricavate sono da considerarsi *Locali* difatti le mettiamo tutte in funzione di \mathbf{x} e \mathbf{t}

Bisogna soffermarsi ora sul Tensore di Dispersione delle Velocità, difatti questo momento è di fondamentale importanza per la dinamica della galassia. Si può verificare che vale sempre la seguente scomposizione:

$$[\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j]^{20}$$

Tale tensore è chiaramente simmetrico e può essere quindi rappresentato da una matrice diagonale, che in questo caso è anche definita positiva. Il significato fisico di tale tensore è che la galassia può essere vista come un campo continuo di densità non collisionale caratterizzato da un campo di velocità medie che varia da punto a punto e nel tempo. In particolare ad ogni punto è associato un *Ellissoide* con orientazione e lunghezza degli assi diverse per ogni posizione.

Questi ellissoidi sono rappresentati dalla forma quadratica del tensore di dispersione delle velocità:

$$\sigma^2 = \sigma_{ij}^2 n_i n_j$$

Si può allora affermare che:

Definizione 4 *Il tensore di dispersione delle velocità risulta Isotropo se:*

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma^2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \delta_{i,j}$$

ed in questo caso l'ellissoide di dispersione associato risulta essere una sfera.

Se il tensore di dispersione non ha questa caratteristica allora si dice **anisotropo** e si ha un generico ellissoide di Dispersione.

Ora per studiare i sistemi non collisionali la *FD* deve essere trattata con un set di *PDE* con cui si costruisce la *CBE*:

$$\begin{cases} \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \frac{\partial \phi_t}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0 \\ \phi_t = \phi + \phi_{ext} \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v} \end{cases}$$

Per generalità si mette anche un potenziale esterno ϕ_{ext} e nel caso in cui esso sia nullo allora si parla di sistema autogravitante.

2.3.1 Equazioni di Jeans

Anche se con il passaggio al "Continuo" e alla *CBE* la dimensione del problema si riduce a 6 *Gdl*²¹ spaziali e 1 *Gdl* temporale, non si è ancora trovata la soluzione generale, perciò la *CBE* è ancora irrisolta. Si possono però estrarre informazioni dalla *CBE* grazie al *Metodo dei Momenti* con il quale si costruiscono le cosiddette *Equazioni di Jeans*. Da queste si può ulteriormente costruire un sistema di equazioni nello *SdC*²², che costituiscono la *Gerarchia delle Equazioni Viriali* in forma *Tensoriale*, di cui si studierà la forma più semplice (*forma scalare*) in seguito.

Il punto di partenza per derivare le Equazioni di Jeans è la seguente definizione:

²⁰ $\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) v_i v_j d^3 \mathbf{v}$

²¹Gradi di Libertà

²²Spazio delle Configurazioni

Definizione 5 Sia $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $F : \gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Microscopica²³. A tale funzione è definita una funzione Macroscopica²⁴ $\bar{F} = \bar{F}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la relazione

$$\bar{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}$$

Da un punto di vista fisico la \bar{F} può essere visto come valore medio di F mediato su tutte le particelle che al tempo t determinano la densità ρ in \mathbf{x} . In questo contesto f svolge il ruolo di densità di probabilità da usare come funzione peso nelle medie.

Ora una conseguenza diretta della *CBE* è che :

$$\int_{\mathbb{R}^3} F \frac{Df}{Dt} d^3\mathbf{v} = 0$$

Da cui si ricavano, utilizzando i Momenti della *FD* trovati prima, la Prima e Seconda Equazione di Jeans, sostituendo $F = 1$ nella prima e $F = v_i$ nella seconda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial \phi_t}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

L'equazione (6) può essere riscritta²⁵ come:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial \phi_t}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}^2 \rho}{\partial x_j} \quad (7)$$

Si può vedere che la (5) e la (7) hanno la forma rispettivamente dell'equazione di Continuità e dell'equazione di Eulero²⁶(per un fluido viscoso ed in presenza di un Campo Gravitazionale), ciò non è casuale poichè le equazioni della fluidodinamica possono essere ricavate dalle equazioni di Jeans tramite il teorema del Trasporto.

Però esiste una differenza sostanziale tra un fluido ordinario collisionale ed uno non collisionale: mentre per un fluido normale la temperatura e la pressione sono quantità *scalari*, sintomo di un tensore di dispersione delle velocità *isotropo*, in un fluido non collisionale sono delle quantità *tensoriali* poichè abbiamo un'*anisotropia* del tensore di dispersione.

Difatti nei fluidi ordinari gli *urti* tra particelle sono frequentissimi ed ogni eventuale deviazione dall'isotropia dei moti quadratici viene subito cancellata.

In un fluido non collisionale invece questi urti vengono a mancare ed esso può essere più "*caldo*" in una direzione rispetto ad un'altra. Questo spiega ad esempio perchè le galassie ellittiche non sono di forma sferica anche se non è presente alcun moto rotatorio; sarebbe meglio dire che un sistema non collisionale, come una galassia ellittica, raggiungerebbe la forma sferica solo dopo aver passato il suo tempo di rilassamento che, come si è dimostrato, è di gran lunga superiore all'età dell'Universo. Questo è un fatto interessante perchè mostra che questi sistemi sono come dei "fossili", in quanto hanno ancora lo stesso stato dinamico che avevano al tempo della loro formazione.

²³Definita nello *SdF*

²⁴Definita nello *SdC*

²⁵sapendo la definizione di σ_{ij}^2

²⁶Equazione di Conservazione dell'impulso

2.4 Teorema del Viriale

Il successo del metodo dei momenti per aggirare la *CBE* è solo parziale, difatti la riduzione della dimensionalità è stata ottenuta al prezzo di passare da un' unica Equazione (la *CBE*), ad un set infinito di equazioni (*JEANS*). Infatti esse sono un sistema *aperto* ovvero una *gerarchia* infinita di equazioni che coinvolgono momenti delle velocità di ordine sempre più elevato. Questa è una differenza sostanziale rispetto alle equazioni della Fluidodinamica classica che, grazie alla Termodinamica del sistema, presentano un numero sufficiente di relazioni termodinamiche per poter chiudere il sistema di equazioni.

Per fortuna l'importanza pratica dei momenti di Jeans si riduce notevolmente con l'aumentare dell'ordine, infatti la Dinamica Stellare si basa quasi interamente solo sui momenti del primo e secondo ordine.

In ogni caso le Equazioni di Jeans sono di per sé *esatte* e da esse si può partire per un' ulteriore riduzione di dimensionalità, ricavando i momenti delle equazioni di Jeans sullo Spazio delle Configurazioni²⁷.

Con questo metodo si ottiene le cosiddetta *Gerarchia dei Viriali* in forma tensoriale. Per procedere bisogna definire certe quantità:

- *Tensore di Energia Cinetica Totale:*

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_i v_j} d^3 \mathbf{x} \quad ; \quad Tr(K_{ij}) = K = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x}$$

- *Tensore di Energia Cinetica di Dispersione:*

$$\Pi_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x} \quad ; \quad Tr(\Pi_{ij}) = \Pi = \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) d^3 \mathbf{x}$$

- *Tensore di Energia Cinetica Ordinata:*

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_i^2 v_j^2} d^3 \mathbf{x} \quad ; \quad Tr(T_{ij}) = T = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x}$$

Queste prime tre quantità sono legate:

- In forma Tensoriale: $K_{ij} = T_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2}$
- In forma Scalare²⁸: $K = T + \frac{\Pi}{2}$

infine con:

- *Tensore del Momento d'Inerzia Polare:*

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x} \quad ; \quad Tr(I_{ij}) = I = \int_{\mathbb{R}^3} \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d^3 \mathbf{x}$$

- *Tensore di Autoenergia:* Sia $\phi_t = \phi + \phi_{ext}$, con $\phi = -G \int \frac{\rho(\bar{\xi})}{\|\mathbf{x}-\bar{\xi}\|} d^3 \xi$

$$U_{ij} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x} \quad ; \quad Tr(U_{ij}) = U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi d^3 \mathbf{x}$$

²⁷Analogo al metodo dei Momenti per la *CBE* fatto sullo spazio delle velocità.

²⁸Prendendone le *Tracce*

Ora manipolando le Equazioni di Jeans (5) e (6) si ottiene il *Teorema del Viriale in forma Tensoriale*:

$$\frac{\ddot{I}_{ij}}{2} = 2K_{ij} + U_{ij} + \frac{(W_{ij} - W_{ji})}{2} \quad (8)$$

NB!: Da qui è chiaro che il Tensore W non è simmetrico e quindi $W_{ij} \neq W_{ji}$.

Prendendo solo le Tracce di queste quantità si ottiene il **Teorema del Viriale in forma Scalare**

$$\frac{\ddot{I}}{2} = 2K + U + W \quad (9)$$

dove $W \equiv \int \rho \langle \mathbf{x}, \nabla \phi_{ext} \rangle d^3\mathbf{x}$

Bisogna fare ora alcune osservazioni importanti:

i) W non è l'energia potenziale di ρ nel campo esterno, che invece risulta essere:

$$U_{ext} = \int \rho \phi_{ext} d^3\mathbf{x}$$

ii) Se $\ddot{I} = 0$ allora:

$$2K = -(U + W)$$

iii) Se $W = 0$ allora $E = K + U$ e si ritrova l'*Identità di Jacobi*:

$$\ddot{I} = E + K = 2E - U$$

Inoltre per $\ddot{I} = 0$ e $W = 0$ il Sistema si dice **Virializzato** e dalla (9) si ha che:

$$2K = -U$$

classica relazione che si usa per un sistema gravitazionale.

A questo punto si possono definire due quantità \mathbf{v}_{vir} e \mathbf{r}_{vir} con le quali risulta che:

$$U \equiv -\frac{GM^2}{r_{vir}} \quad K \equiv \frac{M}{2} v_{vir}^2$$

da cui si ottiene l'importante relazione:

$$v_{vir}^2 = \frac{GM}{r_{vir}}$$

Quindi se dai dati osservativi si riescono ad ottenere i valori di r_{vir} e v_{vir} si può stimare la massa del sistema.

2.5 Applicazione Fisica: *Rapporto Massa-Luminosità*

Una delle applicazioni più importanti delle equazioni di Jeans è che da esse si ottiene un metodo per stimare la massa di una galassia partendo da dati osservativi come la Brillanza superficiale $I(R)$.

Si utilizzano qua le coordinate cilindriche e si ritiene che la galassia osservata sia un sistema non rotante ($\overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2}$), si definisce inoltre il *Parametro di Anisotropia* della dispersione di velocità $\beta(r) := (1 - \frac{\overline{v_\theta^2}}{\overline{v_r^2}})$. Infine con le assunzioni appena fatte e utilizzando la (7) si ottiene:

$$\frac{1}{\nu} \frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + 2\beta \frac{\overline{v_r^2}}{r} = -\frac{d\phi}{dr}$$

da dati osservativi si vede che $\overline{v_r^2} \geq \overline{v_\theta^2}$ quindi $\beta \geq 0$.

Ora, sapendo che, $\frac{d\phi}{dt} = \frac{GM(r)}{r^2}$ si ottiene un'espressione di M in funzione di quantità fisiche osservabili:

$$M(r) = -\frac{\overline{v_r^2} r}{G} \left(\frac{d \ln(\nu)}{d \ln(r)} + \frac{d \ln(\overline{v_r^2})}{d \ln(r)} + 2\beta \right)$$

Difatti si nota che in questa formula entrano in gioco la brillantezza superficiale²⁹ e la dispersione di velocità lungo la linea di vista che sono quantità osservabili, compare però anche il parametro β che rimane libero. Dare arbitrariamente un valore a tale parametro è una mossa rischiosa e bisogna trovare un metodo di valutazione per questa grandezza. Un metodo valido sta nel supporre che la *Massa e la Luminosità siano legate da una costante di Proporzionalità γ*

$$\rho(r) = \gamma \nu(r) \quad (10)$$

Tale relazione detta **Rapporto Massa-Luminosità** permette di arrivare ad una espressione analiticamente risolvibile per $\overline{v_r^2}$ e quindi si può valutare l'andamento di β . Inoltre la costante di proporzionalità γ che compare in (10) può essere stimata con il Teorema del Viriale e si dimostra essere dipendente solo da $I(R)$ e $\sigma_p^2(R)$.

Operativamente la (10) si traduce in un rapporto $L \propto M^{3.5}$.

3 Galassie Ellittiche

Si mostra ora una panoramica sulle relazioni che collegano le quantità fisiche delle galassie ellittiche dedotte tramite osservazioni *fotometriche* e *spettroscopiche*³⁰

3.1 Profili di Brillanza

Sono molto importanti perchè permettono di studiare l'andamento radiale delle quantità fisiche delle galassie, come la massa.

Per poterli spiegare è necessario introdurre alcuni concetti:

- *Brillanza Superficiale(SB)*: $I = \frac{\text{flusso}(F)}{\text{angolosolido}(\Omega)} = \frac{\frac{L}{4\pi D^2}}{\frac{A}{D^2}} = \frac{L}{4\pi A}$ dove L è la Luminosità e A è l'area sottesa nel cielo dall'oggetto in esame. Si nota che tale quantità **non** dipende della Distanza D .
- *Isofota*: Curva che unisce tutti i punti con la stessa SB . Normalmente sono di forma ellittica e seguono la distribuzione stellare.
- *Raggio effettivo*: Raggio dell'isofota entro cui è contenuta metà della luminosità totale della galassia

Il profilo di brillantezza più usato per riprodurre i dati osservati dalle galassie ellittiche e dei bulge nelle galassie a spirale è il **Profilo di De Vaucouleurs**:

$$I(R) = I_e \exp \left[-7.673 \left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \quad (11)$$

²⁹Legata a ν : distribuzione di intensità luminosa

³⁰La Spettroscopia, in Astronomia, è lo studio dello Spettro Elettromagnetico della luce proveniente da un oggetto Astronomico.

Si nota che questo in verità è un caso particolare di un profilo più generale, detto **Profilo di Sersic**:

$$I(R) = I_e \exp - \left[b_n \left(\frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \quad (12)$$

dove n è detto *Indice di Sersic* e $b_n = 2n - 0.327$.

Allora si può vedere che il Profilo di De Vaucouleurs (11) è il caso particolare di Sersic per $n = 4$.

3.2 Deproiezione di Massa

Tramite il profilo di brillantezza si può arrivare alla distribuzione tridimensionale della massa. Bisogna però assumere che la galassia sia di forma sferica e che abbia un'unica popolazione stellare, allora vale che $\frac{M_*}{L} = \text{cost}$ da cui si può definire la *Densità di Massa*: $\rho_* = \frac{M_*}{L} j_*(R)$, dove j_* è la densità di luminosità. A questo punto si può definire la *Densità di Massa Superficiale*: $\Sigma(r) = \frac{M_*}{L} I(R)$.

Ora sapendo che $I(R)$ è l'integrale di $j(R)$ lungo la linea di vista si ottiene la *Formula di Proiezione*:

$$I(R) = 2 \int_R^\infty \frac{j(R) r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

Ancora più importante è la sua forma inversa detta **Formula di Inversione di Abel**:

$$j(R) = -\frac{1}{\pi} \int_R^\infty \frac{dI(R)}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

andando ad inserire tale formula nella definizione di ρ_* si può stimare la distribuzione di massa della galassia.

3.3 Piano Fondamentale

La velocità individuale delle stelle può essere misurata solo per poche galassie vicine, mentre la distribuzione di velocità lungo la linea di vista può essere ottenuta anche per quelle distanti, grazie all'allargamento doppler delle righe nello spettro integrato della galassia.

Tramite l'analisi di alcuni parametri si è visto che alcuni di essi sono in relazione, in particolare si parla della luminosità, della velocità di dispersione lungo la linea di vista (σ_{\parallel}) e delle dimensioni lineari delle galassie.

Solitamente si crea uno spazio 3-D con coordinate $\log_{10}(\bar{I}_e) - \log_{10}(R_e) - \log_{10}(\sigma_{\parallel})$ e si trova che tutte le galassie ellittiche stanno su un piano (entro pochissimo margine) detto **Piano Fondamentale**(fig.2). Se si proietta tale piano in 2D si ottengono delle leggi empiriche molto importanti:

- **Legge di Faber-Jackson**: Mette in relazione la luminosità e la dispersione di velocità³¹

$$\log_{10} \left(\frac{\sigma_{\parallel}}{150 \text{ km s}^{-1}} \right) \simeq 0.25 \log_{10} \left(\frac{L_R}{10^{10} h_7^{-2} L_{\odot}} \right) \quad (L \propto \sigma^4)$$

³¹ h_7 è una costante nell'ordine dell'unità

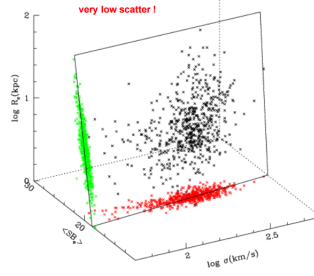


Figura 2: Piano Fondamentale

- **Relazione di Kormendy:** Mette in relazione la luminosità e il raggio effettivo

$$\log_{10}\left(\frac{L_R}{7.7 \cdot 10^9 h_7^{-2} L_\odot}\right) = 1.2 \log_{10}\left(\frac{R_e}{h_7^{-1} Kpc}\right) \quad (L \propto R_e)$$

4 Galassie a Spirale

Nelle galassie a spirale si trovano elementi distinti come il *Bulge*, il *Disco*, i *Bracci* ed eventualmente anche una *Barra* nella zona centrale. Dal punto di vista cinematico in questi sistemi prevalgono i moti di Streaming³², mentre nelle galassie ellittiche dominano quelli Random³³.

Più specificatamente nelle galassie a spirale la zona del bulge è dominata da moti caotici, mentre il disco è dominato dai moti sistematici. Questo porta le galassie a spirale ad avere un momento angolare maggiore rispetto a quelle ellittiche.

Si devono ora esaminare singolarmente le varie componenti.

4.1 Il Bulge e la Barra

Il bulge si trova nelle zone centrali della galassia e può essere considerato come una galassia ellittica in "miniatura" a causa delle varie similitudini che intercorrono fra le due strutture, si dice in miniatura poichè ha dimensioni lineari che vanno da $0.1 Kpc$ a $1 Kpc$ ³⁴.

La luminosità del bulge è correlata a molte caratteristiche del disco come la quantità di gas o la popolazione stellare (quindi il *colore*). In coesistenza con il bulge si può trovare anche una *Barra*, ovvero un sistema stellare di forma allungata che può essere inteso come un bulge triassiale, difatti non esistono nette distinzioni tra questi due oggetti. La formazione della barra e del bulge sono ancora oggetto di studio.

4.2 Il Disco

Il motivo per cui le galassie hanno un disco è lo stesso che forma tutti gli altri sistemi "piatti" come i Dischi di Accrescimento o i Sistemi Planetari. Nel disco il gas può irradiare energia ma **non** Momento Angolare e, per una distribuzione assiale³⁵, la

³²Moti Sistematici

³³Moti Caotici

³⁴Da confrontarsi con le dimensioni dell'intera galassia che è nell'ordine delle centinaia di Kpc

³⁵Come le stelle attorno al centro galattico

configurazione di minima energia è un disco piatto perpendicolare all'asse.

Quindi si può affermare che in questa zona prevalgono i moti sistematici dovuti al momento angolare e le velocità tipiche delle stelle nel disco vanno dai $100[kms^{-1}]$ ai $300[kms^{-1}]$. Come esiste una relazione tra luminosità e dispersione di velocità nelle galassie ellittiche, esiste qua una relazione tra velocità circolare e luminosità nota come

Legge di Tully-Fisher:

$$\log_{10}\left(\frac{L_R h_7^2}{10^{10} L_\odot}\right) = 3.5 \log_{10}\left(\frac{v_c}{200 km s^{-1}}\right) + 0.5$$

4.2.1 Curva di Rotazione

Mostra come varia la velocità delle stelle in funzione della distanza dal centro galattico. Come nei sistemi planetari anche le stelle orbitano attorno al nucleo secondo le leggi di Keplero e per costruire la curva di rotazione di una galassia a spirale si fa uso di alcune caratteristiche di simmetria dei gusci di massa sferici. Presa una stella di riferimento posta a distanza R dal centro galattico si può affermare che:

- La forza agente sulla stella di tutta la massa contenuta entro il suo raggio è uguale a quella di una stessa massa puntiforme posta al centro del sistema.
- La forza netta agente sulla stella da parte di tutta la massa che sta al di fuori del suo raggio è nulla.

Perchè la stella rimanga in orbita attorno al centro galattico deve essere che:

$$\frac{v_c(R)^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

da cui si ottiene:

$$v_c(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \left(v_c \propto \frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

Sapendo che la velocità angolare aumenta con il raggio fin tanto che anche la massa contenuta aumenta, si dovrebbe osservare nelle zone periferiche della galassia, dove anche se aumenta il raggio la massa contenuta rimane la stessa, una *diminuzione* della velocità con $\frac{1}{\sqrt{R}}$ detta *Caduta Kepleriana*, ma ciò **non succede** e la curva di rotazione si *appiattisce*(fig.3). Questo effetto si ha per un sistema in rotazione con densità di massa decrescente($\rho \propto \frac{1}{r^2}$). Ciò implica che le stelle nelle zone periferiche sono invece immerse in una densità di massa che noi non vediamo. Questa massa, che interagisce solo gravitazionalmente e non elettromagneticamente, è detta **Materia Oscura** e si estende ben oltre i confini visivi della galassia.

4.3 I Bracci

I Bracci sono una struttura evidente nella galassia e modellano molte proprietà del disco come la composizione chimica, la dinamica e l'equilibrio termico del gas nel disco. Questo perchè nei bracci sono situate le zone di *formazione stellare*, che trasformano gas in stelle, e i *SNR* che iniettano nel *ISM* notevoli quantità di elementi pesanti.

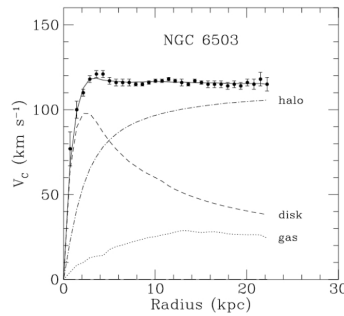


Figura 3: Curva di Rotazione, le linee tratteggiate sono i valori teorici senza Materia oscura.

L'origine e l'evoluzione di queste strutture è uno dei problemi più complicati dell'astrofisica, ma prima di esporre qualche modello a riguardo, bisogna trattare la loro geometria.

Si consideri una galassia a spirale vista *face-on*, se la distribuzione di brillantezza superficiale rimane invariata sotto una rotazione di $\frac{2\pi}{m}$ [rad], ovvero $I(R, \phi + \frac{2\pi}{m}) = I(R, \phi)$, allora si dice che la galassia ha m modi di simmetria rotazionale e quindi m bracci. Dalle osservazioni si è visto che il modello più comune è quello con 2 bracci. In base all'orientamento di queste strutture rispetto al senso di rotazione del disco si possono distinguere due casi:

- **Bracci Leading:** Bracci che puntano nella direzione del senso di rotazione del disco
- **Bracci Trailing:** Bracci che puntano nella direzione opposta al senso di rotazione del disco

4.3.1 Formazione ed Evoluzione

Il primo valido tentativo di spiegare l'origine e l'evoluzione dei bracci fu avanzato da Bertin Lindblad, il quale ricostruì la corretta forma dei bracci supponendo che essi fossero formati dall'interazione tra le orbite e le forze gravitazionali tra le stelle nel disco. Successivamente due scienziati del MIT³⁶ *C.C. Lin* e *Frank Shu* ricostruirono correttamente la struttura a spirale dei bracci trattandoli come *onde di densità*, ovvero periodiche *compressioni e rarefazioni* del materiale presente nel disco. Inoltre Lin e Shu sfruttarono un risultato della teoria di Lindblad, ovvero che la struttura a spirale nelle galassie è di lunga durata, in altri termini rimane apparentemente ferma per molti periodi di rotazione del disco. Questo portò a completare il modello, detto di **Lin-Shu**, che descrive i bracci come **onde di densità stazionarie**.

³⁶Massachusetts Institute of Technology

Riferimenti bibliografici

- [1] James Binney-Scott Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton series in Astrophysics, 2008.
- [2] Giuseppe Bertin, *Dynamics of Galaxies*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] Luca Ciotti, *Lectures Notes on Stellar Dynamics*, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2000.
- [4] Appunti del corso di *Processi di Radiazione e MHD*, Daniele Dallacasa.
- [5] Appuneti del corso di *Astrofisica Extragalattica*, Silvia Pellegrini.