Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

L'instabilità gravitazionale

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Gregorio Paci

Sessione invernale
Anno Accademico 2018/2019

" Lasciamo al marciume di questa fine secolo
una vita che non è tale "

Sommario

L'elaborato si propone di studiare la formazione di strutture come cluster, fogli, vuoti e filamenti di galassie. La formazione di queste strutture è dovuta al fenomeno dell'instabilità gravitazionale. Tale fenomeno è una proprità intrinseca della gravità: la materia è attratta verso le regioni a più alta densità amplificando in questo modo la disomogeneità iniziale. Ciò che verrà fatto allora è studiare come possono essere fatte delle perturbazioni su un background omogeneo isotropo e come queste evolvano nel tempo.

Nel primo capitolo si esporranno le caratteristiche principali dell'universo di Friedmann, che nel seguito servirà da background per le perturbazioni. Nel secondo si studierà l'instabilità gravitazionale nella teoria Newtoniana della gravità. In primo luogo si studierà teoria di Jeans, che descrive la crescita di piccole disomogeneità in un universo non in espansione. In secondo luogo si considereranno le perturbazioni lineari in un universo in espansione fino ad arrivare al comportamento delle perturbazioni nel regime non lineare. Infine nel terzo capitolo si studierà il comportamento dell'instabilità gravitazionale in Relatività generale in approssimazione lineare.

Indice

Introduzione **1**

1 Il modello cosmologico isotropo **5**
- 1.1 La metrica di uno spazio isotropo 5
- 1.2 Il modello isotropo chiuso 9
  - 1.2.1 Il modello isotropo piatto 12

2 L'instabilità gravitazionale nella teoria Newtoniana **15**
- 2.1 Equazioni fondamentali 15
- 2.2 La teoria di Jeans 17
  - 2.2.1 Perturbazioni adiabatiche 19
  - 2.2.2 Perturbazioni vettoriali 20
  - 2.2.3 Perturbazioni dell'entropia 20
- 2.3 L'instabilità in un universo in espansione 21
  - 2.3.1 Perturbazioni adiabatiche 23
  - 2.3.2 Perturbazioni vettoriali 26
- 2.4 Oltre l'approssimazione lineare 27
  - 2.4.1 La soluzione di Zel'dovich 30
- 2.5 La rete cosmica 33

3 L'instabilità gravitazionale in Relatività Generale **35**
- 3.1 Perturbarzioni e variabili gauge-invarianti 36
  - 3.1.1 Classificazione delle perturbazioni della metrica 36
  - 3.1.2 Trasformazioni di gauge e variabili gauge-invarianti 39
  - 3.1.3 Sistemi di coordinate 44
- 3.2 Le equazioni per le perturbazioni cosmologiche 46
- 3.3 Perurbazioni idrodinamiche 48
  - 3.3.1 Perturbazioni scalari 49

4 Conclusioni **55**

Introduzione

La teoria delle perturbazioni, che intende studiare il fenomeno dell'instabilità gravitazionale, è la teoria con la quale spieghiamo la formazione delle strutture dell'universo. Nel presente lavoro abbiamo affrontato il problema in diversi passi data la complessià e la vastità del problema che si vuole affrontare. Vediamo ora nel dettaglio come si strutturerà il lavoro.

Nel primo capitolo cominceremo con lo studiare il problema dello studio di un universo in cui si suppone valido il *principio cosmologico*. L'obiettivo di questo primo capitolo è quello di presentare dei risultati validi in tale tipo di univeso che saranno utili nel seguito. Useremo infatti nel seguito questo tipo universo come sistema "imperturbato" su cui metterre le perturbazioni.

In particolare si presenteranno le possibili metriche di uno spazio omogeno e istropo. Ciò che si troverà è che la metrica in questo tipo di spazio è determinata da tali isometrie a meno di un solo numero, chiamato *costante di curvatura*. Si hanno quindi tre possibilità per la geometria dell'universo che sono individuate dal segno della costante di curvatura. Si deriva poi, dalle equazioni di campo di Einstein, l'equazione di Friedman che lega la costante di curvatura alla densità di massa dell'universo. Studiando l'equazione di Friedman assieme all'equazione di continuità siamo in grado di presentare facilmente delle relazioni che legano costante di curvatura, denstià di energia e tempo in presenza di diverse tipologie di sorgente di campo gravitazionale. In particolare in presenza di fluido cosmico con predominanza di materia, con predominanza di radiazione e nel "vuoto".

Nel secondo capitolo studieremo le perturbazioni nell'ambito di una teoria classica (non relativistica). Il primo passo sarà quindi scrivere delle equazioni che descrivano l'universo nel suo insieme. A tale scopo si useranno le equazioni idrodinamiche nelle quali si approssima l'universo a un fluido perfetto e che è dunque descritto da questo set di equazioni. Tali equazioni sono in generale molto difficili da risolvere ma, introducendo delle perturbazioni sulle funzioni che caratterizzano il fluido (come distibuzione di massa, pressione, velocità etc.), e tenendo solo i termini lineari nelle perturbazioni, è possibile linearizzare le equazioni, ottenendo delle equazioni che descrivono il comportamento delle perturbazioni in approssimazione lineare. Nel fare questo procedimento faremo due ipotesi diverse sul background. Inizialmente supporremo che l'universo sia statico. Questa assunzione porterà a considerare la distibuzione di materia come costante nello spazio e nel tempo e le velocità di background nulle. Otteremo con tali assunzioni la *teoria di Jeans*. Dopodiché faremo un'ipotesi più realistica sul fluido cosmico considerando l'universo di Friedman come backgound. Considereremo dunque la densità di materia come funzione solo del tempo e che le velocità di background obbediscano alla legge di Hubble. Otterremo in questo modo delle equazioni che descrivono il comportamento dele perturbazioni in regime lineare in un universo in espansione. Infine consideremo la possibilità che l'approssimazione lineare per le perturbazioni non sia applicabile. Considerando l'espansione della densità di massa $\epsilon = \epsilon_0(1 + \delta + O(\delta^2))$ è chiaro che se si hanno delle perturbazioni crescenti col tempo prima o poi il termine trascurato $O(\delta^2)$ raggiungerà l'unità e dopodiché diventerà più e più importante non potendo certo essere trascurato. Abbiamo allora riscritto le equazioni idrodinamiche in una forma migliore per lo studio del regime non lineare e presentato una particolare soluzione dell'equazione ottenuta, nota come *soluzione di Zel'dovich* che ci aiuterà a comprendere il comportamento delle perturbazioni in tale regime. Concluderemo questo capitolo costruendo una teoria qualitativa dei processi che portano alla formazione delle strutture dell'universo.

Nel terzo e ultimo capitolo discuteremo le pertubazioni nell'ambito della teoria della Relatività Generale. Usualmente i risultati che si ottengono in relatività generale sono di più difficile interpretazione che in una teoria newtoniana ed inoltre c'è la possibilità di riscontrare nelle equazioni dei fenomeni che sono legati alle proprietà delle coordinate e non descrivono un fenomeno fisico reale. Per ovviare a questa problematica si considereranno sia le perturbazioni della metrica che quelle nella distibuzione della materia.
Cominceremo allora a classificare le perturbazioni del tensore metrico sfruttando un teorema di matematica che ci permette di scomporre un tensore simmetrico senza traccia nei suoi costituenti di natura scalare, vettoriale e tensoriale. Introdurremo in tal modo le pertubazioni scalari, vettoriali e tensoriali. Ci occuperemo principalmente delle prime in quanto sono le uniche ad essere legate alla formazione della struttura dell'universo. Dopodiché introdurremo l'idea di trasformazioni di gauge (legate all'invarianza del quadrintervallo per cambio di coordinate generico) e le variabili gauge-invarianti. Queste variabili sono tali che non cambiano sotto trasformazioni di gauge infinitesime. Inoltre hanno (come vederemo) una semplice interpretazione fisica e sono dunque particolarmente adatte per scrivere le equazioni per le perturbazioni. Dopodiché, per l'appunto, si costruiranno le equazioni per le perturbazioni scalari in relatività generale. Nel presente lavoro non ci si occuperà delle altre due tipologie di perturbazioni che non sono interessanti per lo studio della formazione delle strutture del cosmo. Non è difficile intuire che le equazioni per le perturbazioni in regime lineare saranno ottenute linearizzando le equazioni di Einstein. Otterremo delle equazioni lineari che descrivono le pertubazioni del tensore di Einstein in termini delle perturbazioni di sorgenti di campo

generiche. Verranno ora introdotte le perturbazioni idrodinamiche per descrivere delle particolari perturbazioni nella distribuzione di massa e energia e il cosmo verrà quindi nuovamente pensato come un fluido perfetto (cosa che è chiaramente un'approssimazione). Concluderemo il lavoro scrivendo l'equazione per le pertubazioni scalari con perturbazioni idrodinamiche e risolvendo tale equazione nel caso particolarmente semplice di fluido cosmico non relativistico con predominanza di materia.

Capitolo 1

Il modello cosmologico isotropo

Cominceremo, in questo capitolo, a presentare il modello cosmologico basato sull'ipotesi che la materia sia distribuita in modo omogeneo e isotropo, la soluzione delle equazioni di Einstein trovata da Friedman nel 1922. Non si farà un'analisi dettagliata del problema, in quanto l'obbiettivo è quello di presentare i principali risultati che serviranno nelle prossime sezioni.

1.1 La metrica di uno spazio isotropo

Pensando l'universo come una varietà quadridimensionale, con una dimensione temporale e tre spaziali, sappiamo che la richiesta di isotropia e omogeneità della distribuzione di massa in ogni istante temporale si riflette solamente sulle caratteristiche "spaziali" dell'universo, è infatti quanto assicurato dal *principio cosmologico*, il quale afferma che *l'universo è spazialmente omogeneo e isotropo.* Più formalmente, si può affermare che i campi vettoriali associati alle rotazioni (legate all'isotropia della distribuzione di massa) e alle traslazioni (legate alla sua omogeneità) lungo i tre assi spaziali sono *vettori di Killing.* Ognuno di questi sei vettori rispetta quindi la condizione:

$$\mathcal{L}_{\vec{k}}\, g = k_{i;j} + k_{j;i} = 0. \tag{1.1}$$

Dalla geometria differenziale sappiamo però che una varietà tridimensionale non può avere più di tre vettori di killing indipendenti, concludiamo allora, ragionevolmente, che richiedere isotropia spaziale rispetto a un'origine arbitraria equivale a richiedere l'omogeneità. Consideriamo allora solo i campi vettoriali associati alle traslazioni. Poichè tali campi vettoriali formano un'algebra di Lie, cosa ragionevole dato che sono delle isometrie (i campi vettoriali associati alle traslazioni in realtà communtano), ci si aspetta di trovare, per il *teorema di Frobenius*, una foliazione di dimensione $d \leq 3$ della varietà quadridimensionale che rappresenta l'universo. A questo punto, sempre se consideriamo come vettori di killing indipendenti i tre vettori legati alle traslazioni spaziali, abbiamo che questi danno luogo a dei "piani" tridimensionali su cui la coordinata temporale è costante che fungono da *foliazione della varietà quadridimensionale che rappresenta l'universo*. Un ragionamento analogo può essere fatto considerando le rotazioni, le quali portano a una foliazione fatta di tre-sfere. Dunque *l'omogeneità e l'isotropia dello spazio significano che si può scegliere un tempo "universale" tale che ad ogni istante la metrica dello spazio sia identica in tutti i suoi punti e in tutte le direzioni.* Possiamo allora cominciare a studiare la sola metrica spaziale dello spazio isotropo senza preoccuparci per ora di considerare una possibile dipendenza dal tempo. È possibile, in modo generale, indicare l'elemento di distanza spaziale attraverso il tensore metrico tridimensionale γ_{ij}:

$$dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1.2}$$

Ora, sappiamo che la curvatura dello spazio è determinata dal tensore di curvatura tridimensionale P_{ijkl}. Nel caso di completa isotropia ci si aspetta che questo tensore tridimensionale possa esprimersi mediante il tensore metrico γ_{ij}:

$$P_{ijkl} = \lambda(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \tag{1.3}$$

con questa struttura in virtù delle sue proprietà di simmetria, e dove λ è una costante. A questo punto è possibile ricavare il tensore di ricci $P_{ij} = P^k_{ikj} = \gamma^{km} R_{kimj}$:

$$P_{ij} = 2\lambda\gamma_{ij}, \tag{1.4}$$

e allora la curvatura scalare è:

$$P = 6\lambda. \tag{1.5}$$

Le proprietà della curvatura dello spazio isotropo sono allora completamente determinate dal valore di una sola costante. Si potranno allora avere essenzialmente tre casi differenti:

1) lo spazio a curvatura costante positiva, corrispondente ai valori $\lambda > 0$;

2) lo spazio a curvatura costante negativa, corrispondente ai valori $\lambda < 0$;

3) lo spazio a curvatura costante nulla, corrispondente ai valori $\lambda = 0$. Quest'ultimo è uno spazio piatto, detto euclideo.

Per i nostri scopi siamo interessati al modello chiuso, corrispondente ai casi 1) e 3). In particolare saremo interessati al caso 3) che è il caso che descrive le proprietà del nostro universo. Nello studiare la metrica spaziale è utile sfruttare l'analogia tra la geometria dello spazio isotropo tridimensionale con quella su una ipersuperficie isotropa immersa in uno spazio quadridimensionale fittizio. Ci si aspetta che tale superficie sia una tre-sfera, in analogia con fatto che le superfici isotrope in uno spazio tridimensionale sono le usuali sfere. Chiaramente lo spazio tridimensionale associato a questa tre-sfera è lo spazio a curvatura positiva. L'equazione di una tre-sfera di raggio a in uno spazio quadridimensionale x_1, x_2, x_3, x_4 si scrive come:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \tag{1.6}$$

mentre l'elemento di lunghezza sulla tre-sfera si scrive:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{1.7}$$

Esprimendo ora l'ultimo termine dell'elemento di lunghezza della tre-sfera sfruttando l'equazione precedente, si trova:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}. \tag{1.8}$$

Tale espressione ci permette di calcolare λ. Infatti poichè la curvatura è costante può essere semplicemente calcolata vicino all'origine. Guardando l'ulttima espressione per dl^2 vicino all'origine abbiamo:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{a^2}, \tag{1.9}$$

una volta la metrica è nota è possibile calcolare attraverso formule generali il tensore di Ricci, che una volta contratto restituisce:

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \tag{1.10}$$

La grandezza a viene chiamata *raggio di curvatura spaziale* mentre λ è detta *costante di curvatura*. Se in luogo delle coordinate x_i si introducono le coordinate sferiche r, θ e ϕ l'elemento dl^2 assumerà l'usuale forma:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(sen^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \tag{1.11}$$

È possibile ottenere una forma comoda per esprimere dl^2 usando le coordinate sferiche quadrimensionali che si ottengono introducendo l'angolo χ definito dalla relazione $r = a\, sen\chi$, con $0 < \chi < \pi$:

$$dl^2 = a^2[(d\chi)^2 + sen^2\chi(sen^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \tag{1.12}$$

È utile notare che allora possiamo esprimere il volume dello spazio a curvatura positiva come:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 sen^2\chi sen\theta \, d\chi \, d\theta \, d\phi \tag{1.13}$$

$$V = 2\pi^2 a^3 \tag{1.14}$$

In tal modo si vede che nel caso di curvatura positiva il volume è *proporzionale a* a^3, e lo spazio è finito ma senza frontiere.

1.2 Il modello isotropo chiuso

Passiamo ora allo studio della metrica spazio-temporale dello spazio isotropo. Il sistema di riferimento più conveniente è quello in moto solidale con la materia. È una scelta del tutto naturale in quanto per una scelta diversa l'orientazione delle velocità della materia introdurrebbe una non equivalenza, solo apperente, delle diverse direzioni spaziali. Ci si aspetta allora che le componenti g_{0i} del tensore metrico quadridimensionale siano nulle: questi tre valori possono infatti essere considerate come le componenti di un tre-vettore che quindi introdurrebbe una non equivalenza delle direzioni qualora fosse diverso da 0. Abbiamo allora che ds^2 deve assumere la forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \tag{1.15}$$

dove la coordinata temporale è stata scelta in modo che la componente g_{00} fosse uguale a 1. Vediamo innanzitutto il caso dello spazio con una generica curvatura positiva: *il modello chiuso*. Se si usa per dl^2 l'ultima espressione trovata, si ottiene allora per ds^2, ricordando che ora a è una funzione del tempo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + sen^2\chi(sen^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)\} =, \tag{1.16}$$

$$= dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + sen^2\chi(sen^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)\}$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo posto $c = 1$. Se si introduce la grandezza η, chiamata *tempo conforme*, e definita dalla relazione:

$$dt = ad\eta, \tag{1.17}$$

si può allora scrivere ds^2 nella forma:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - sen^2\chi(sen^2\theta d\phi^2 - d\theta^2)\}. \tag{1.18}$$

A questo punto utilizzando i valori delle componenti del tensore metrico e delle note formule generali è possibile ottenere le equazioni del campo. Ricordiamo però che nel sistema di riferimento scelto si ha $u^i = 0, u^0 = 1$. Sostituendo ora i valori nella componente 00 delle equazioni di Einstein si ottiene la nota *equazione di Friedman*:

$$8\pi G_N \epsilon = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\lambda}{a^2}\right]. \tag{1.19}$$

Questa equazione presenta due incognite: ϵ, la densità di energia della materia, e a il raggio di curvatura. È quindi necessario trovare una seconda equazione. Si può, per questo scopo, utilizzare l'equazione di continuità per le componenti (0μ) del il tensore energia-impulso:

$$T^{\mu}_{0;\,\mu} = 0, \tag{1.20}$$

che viene richiesta per compatibilità col lato sinistro delle equazioni di Einstein. Il fluido cosmico può essere approssimato con un fluido perfetto, e quindi, come verrà specificato meglio nel seguito, nel sistema comovente col fluido il tensore energia-impulso assume la forma:

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(-\rho, p, p, p),$$

dove $\rho = \rho(t)$, e $p = p(t)$ per l'omogeneità della distribuzione della massa. L'equazione (1.20) può allora essere esplicitata come (si noti che i simboli di Christoffel non sono zero per la metrica di Friedman):

$$-\nabla_\mu T^{\mu}_{0} = \dot{\epsilon} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\epsilon + p) = 0. \tag{1.21}$$

Possiamo osservare, per convincerci un po' di più della validità di questa formula, che questa equazione esprime la conservazione dell'energia e quindi si ha, imponendo $E = a^3\,\epsilon$:

$$\frac{dE}{dt} = 3a^2\,\dot{a}\epsilon + a^3\dot{\epsilon} = a^3\left(\dot{\epsilon} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\epsilon\right) = 0,$$

nella quale possiamo riconoscere un caso particolare della relazione (1.21) cercata, in particolare quello in cui si ha $p = 0$ (il significato di questa condizione è precisato nel seguito). Ipotizziamo a questo punto una equazione di stato per la materia:

$$p(t) = p(\epsilon) = \omega\,\epsilon(t), \tag{1.22}$$

allora, inserendo l'ultima equazione nell'equazione di continuità si trova:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.23}$$

Dall'ultima equazione che abbiamo scritto possiamo concludere, notando che $\frac{\dot{f}}{f} = \frac{d}{dt}(\ln f)$ e integrando ripetto al tempo, che la densità di massa ϵ è *proporzionale* al termine $a^{-3(1+\omega)}$. Cioè:

$$\epsilon \propto a^{-3(1+\omega)}$$

Presenteremo ora un serie di risultati che ci serviranno nei capitoli successivi. Specificando a questo punto in maniera oppurtuna l'equazione di stato della materia a seconda della composizione del fluido cosmico, possiamo ricavare, per le varie componenti del fluido, la relazione che intercorre tra ϵ e a:

1. predominanza di "polvere" nel fluido cosmico, cioè materia fredda non relativistica: in questo caso, essendo la materia non relativistica ci si apetta che $P = \omega = 0$. Si può allora concludere che la relazione cercata assume la forma:

$$\epsilon \propto a^{-3}. \tag{1.24}$$

2. predominanza di radiazione: in questo caso ci si apetta $\omega = \frac{1}{3}$, e quindi la relazione cercata è:

$$\epsilon \propto a^{-4}. \tag{1.25}$$

3. vuoto: in tal caso si può porre $\omega = -1$ e si ottiene allora:

$$\epsilon = cost. \tag{1.26}$$

Ricordiamo inoltre che nel modello isotropo si può predirre la legge di Hubble, che è infatti una delle più convincenti verifiche sperimentali del *principio cosmologico* su cui si basa la soluzione di Friedman.

1.2.1 Il modello isotropo piatto

Sperimentalmente si trova che la costante di curvatura assume valori prossimi a zero suggerendo così che il corretto modello per il nostro universo è quello chiuso con curvatura spaziale nulla. In quanto segue lavoreremo proprio con l'ipotesi di avere un universo spazialmente piatto (euclideo). In questo modello l'intervallo ds^2 può essere scritto come:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\} = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}\, dx^i dx^j). \tag{1.27}$$

Ponendo ora nell'equazione di Friedman $\lambda = 0$ si ottiene immediatamente:

$$\epsilon \propto \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \tag{1.28}$$

Possiamo ora ricavare delle relazioni che ci dicono l'andamento di a con t, dove t e η sono legati da $dt = ad\eta$, che ci serviranno nel seguito. Per fare questo sfrutteremo l'andamento di ϵ rispetto ad a con i tre "fluidi" precedentemente introdotti. Seguendo lo stesso ordine precedente:

1. predominanza di polvere:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \epsilon \propto a^{-3} \tag{1.29}$$

considerando il primo e l'ultimo termine della relazione si ottiene:

$$\dot{a}^2 a \sim 1 \quad \dot{a}\sqrt{a} \sim 1 \quad \int_{a_0}^{a} \sqrt{a}\, da \sim \int_0^t dt \sim t \tag{1.30}$$

in definitiva con semplici calcoli abbiamo che:

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \tag{1.31}$$

2. predominanza di radiazione:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \epsilon \propto a^{-4} \tag{1.32}$$

da cui facendo calcoli del tutto analoghi a prima:

$$\dot{a}^2 a^2 \sim 1 \quad \dot{a}a \sim 1 \quad \int_{a_0}^{a} a\,da \sim \int_0^t dt \sim t \quad a^2 \sim t \tag{1.33}$$

si ottiene:

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \tag{1.34}$$

3. vuoto: in questo caso abbiamo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \epsilon \propto cost \sim 1, \tag{1.35}$$

dalla quale si ottiene:

$$\dot{a}^2 \sim a^2 \quad \dot{a} \sim a \tag{1.36}$$

abbiamo allora:

$$a(t) \sim \exp{(H_0 t)}, \tag{1.37}$$

dove chiaramente si ha che $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}$.

Ribadiamo che tali relazioni sono valide per un universo isotropo spazialmente piatto e verranno usate nel seguito.

Capitolo 2

L'instabilità gravitazionale nella teoria Newtoniana

In questo capitolo si analizzerà il comportamento dell'instabilità gravitazionale nell'ambito della teoria Newtoniana. Per prima cosa studieremo la crescita delle piccole disomogeneità in un universo non in espansione: la teoria di Jeans. Le formule ricavate non sono molto utili in pratica ma aiuteranno a comprendere più intuitivamente il comportamento delle perturbazioni in caso maggiormente realistici. Dopodiché considereremo perturbazioni lineari in un universo in espansione e applicheremo questa nuova teoria per studiare l'andamento di queste perturbazioni in un universo dominato dalla materia. Infine concluderemo presentando una soluzione valida nel regime di perturbazioni non lineari con cui potremo studiare le caratteristiche della formazione delle strutture anisotrope (nella loro distribuzione di materia) dell'universo. I risultati trovati sono applicabili solo alla materia non relativistica su scale non superiori all'orizzonte di Hubble.

2.1 Equazioni fondamentali

Nell'ambito di una teoria Newtoniana dell'instabilità gravitazionale descriveremo il fluido cosmico attraverso equazioni della fisica non relativistica. In particolare, come preannunciato, assumeremo che questo sia un fluido *perfetto*; privo cioè di viscosità e che sia completamente caratterizzato dalla distribuzione della densità di energia $\epsilon(\mathbf{x}, t)$, dall'entropia per unità di massa $S(\mathbf{x}, t)$ e dal campo vettoriale delle tre-velocità $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Inoltre queste quantità soddisferanno le *equazioni idrodinamiche*. Riportiamo questo set di equazioni e la loro derivazione.

- *Equazione di Poisson.* Cominciamo con l'equazione che determina il potenziale gravitaziale, la ben nota equazione di Poisson:

$$\boxed{\Delta\phi = 4\pi G\epsilon.} \tag{2.1}$$

- *Conservazione dell'entropia.* Se si considera il fluido come perfetto, e quindi si trascura la dissipazione di energia, l'entropia di un elemento di materia si conserva:

$$\boxed{\tfrac{dS(\mathbf{x}(t),t)}{dt} = \tfrac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)S = 0.} \tag{2.2}$$

- *Equazioni di Eulero.* Possiamo trovare le equazioni di Eulero considerando semplicemente la seconda equazione di Newton per un elemento di massa ΔM:

$$\Delta M\,\mathbf{g} = \mathbf{F}_{gr} + \mathbf{F}_{pr}.$$

La forza gravitazionale $\mathbf{F}_{gr}$ può essere facilmente determinata attraverso l'equazione di Newton:

$$\mathbf{F}_{gr} = -\Delta M\,\nabla\phi$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale. La $\mathbf{F}_{pr}$ può essere calcolata attraverso la pressione p come:

$$\mathbf{F}_{pr} = -\oint p\ d\boldsymbol{\sigma} = -\int_{\Delta V} \nabla p\ dV \simeq -\Delta V\nabla p.$$

Dove il primo integrale può essere pensato come il "flusso di pressione" attraverso la superficie su cui si integra, mentre il secondo corrisponde all'espressione $\mathbf{F}_{pr} - \nabla E$, dove E è l'energia. Infatti da una nota relazione termidinamica sappiamo che $dE = TdS - pdV = -pdV$, dove l'ultima uguaglianza è valida, come effettivamente accade nel nostro caso, se l'entropia si conserva.

Possiamo infine esprimere $\mathbf{g}$ come:

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t),t)}{dt} = \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\right)_x + \frac{dx^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$$

sostituendo ora le relazioni trovate nella seconda legge di Newoton e dividendo per ΔM è facile trovare, ricordando che $\epsilon = \frac{\Delta M}{\Delta V}$:

$$\boxed{\tfrac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \tfrac{\nabla p}{\epsilon} + \nabla\phi = 0} \tag{2.3}$$

- *Equazione di continuità.* Considerando fissato un elemento di volume ΔV è possibile scrivere la variazione della massa contenuta in tale volume nell'usuale modo:

  $$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \, dV.$$

  Un modo equivalente per scrivere la variazione della massa è di considerare il flusso di materia attraverso la superficie del volume ΔV:

  $$\frac{dM(t)}{dt} = -\oint \epsilon \mathbf{V} \cdot \, d\boldsymbol{\sigma} = -\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{V}) \, dV.$$

  Confrontando queste due equazioni troviamo allora l'usuale equazione di continuità:

  $$\boxed{\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{V}) = 0.} \tag{2.4}$$

Abbiamo quindi un set di sei equazioni dalle quali, se aggiungiamo un'equazione di stato della materia $p = p(\epsilon, S)$, otteniamo un set completo di sette equazioni che ci permettono, in pricipio, di determinare le sette funzioni ϵ, $\mathbf{V}$, S, ϕ, p. Queste equazioni idrodinamiche non sono lineari ed è, in generale, molto difficile trovare una soluzione. Nello studio di piccole perturbazioni attorno a un background omogeno e isotropo possiamo però linearizzarle e quindi semplificare di molto la loro soluzione.

2.2 La teoria di Jeans

Nella teoria di Jeans si considera un universo statico non in espansione e si assume che il background sia omogeneo e isotropo, abbiamo quindi che la densità di massa è costante nello spazio e nel tempo: $\epsilon_0(t, \mathbf{x}) = cost.$ Notiamo che questa assunzione è in realtà in contraddizione con le equazioni idrodinamiche, infatti l'energia non cambia solamente se la masse è ferma e $\nabla \phi = 0$, ma allora l'equazione di Poisson non è più soddisfatta. Questa inconsistenza può essere evitata in princio considerando una costante cosmologica Λ che contrasti la forza gravitazionale.

Consideriamo ora una piccola perturbazione nella distribuzione della massa, allora avremo che tale perturbazione porterà anche a una variazione delle altre grandezze in esame, in particolare:

$$\phi(\mathbf{x}, \, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)$$

$$\epsilon(\mathbf{x},t) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$$

dove chiaramente $\delta\phi \ll \phi_0$ e così via.

Mentre dall'equazione di stato abbiamo subito che:

$$p(\mathbf{x},t) = p(\epsilon_0 + \delta\epsilon, S_0 + \delta S) = p_0 + \delta p(\mathbf{x},t). \tag{2.5}$$

Inoltre in approssimazione lineare possiamo scrivere δp come:

$$\delta p = c_s^2 \delta\epsilon + \sigma \delta S \tag{2.6}$$

dove abbiamo posto $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\epsilon$ e $\sigma \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_S$. Se ora si sostituiscono le equazioni per le perturbazioni nelle equazioni idrodinamiche e si tengono solamente i termini lineari nelle perturbazioni si ottengono facilmente le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0 \nabla \cdot (\delta\mathbf{v}) = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\epsilon_0} \nabla\delta\epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \nabla\delta S + \nabla\delta\phi = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0 \tag{2.9}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G \delta\epsilon. \tag{2.10}$$

Si noti che il termine $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ non produce termini lineari nelle perturbazioni. La penultima equazione ammette una soluzione ovvia: $\delta S(\mathbf{x},t) = \delta S(\mathbf{x})$. Abbiamo quindi che la variazione di entropia è una funzione indipendente dal tempo e dipendente solo dalle coordinate spaziali. Se prendiamo ora la divergenza della seconda equazione e usiamo l'equazione di continuità per esprimere $\nabla \cdot (\delta\mathbf{v})$ in termini di $\delta\epsilon$ e l'equazione di Poisson per esprimere $\Delta\delta\phi$, sempre in termini di $\delta\epsilon$, e moltiplichiamo tutto per ϵ_0, otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta\delta\epsilon - 4\pi G \epsilon_0 \delta\epsilon = \sigma \Delta\delta S(\mathbf{x}).} \tag{2.11}$$

L'equazione trovata è un'equazione differenziale lineare per la variabile $\delta\epsilon$ in cui δS ha il ruolo di sorgente data. Si noti inoltre che δS dipende solo dalle coordinate spaziali.

Nei prossimi paragrafi risolveremo questa equazione per alcuni tipi di perturbazioni, in particolare considereremo *perturbazioni adiabatiche, vettoriali e entropiche*, il cui significato verrà spiegato nel seguito.

2.2.1 Perturbazioni adiabatiche

Cominciamo a risolvere l'equazione (2.11) nel caso di perturbazioni adiabatiche, ponendo cioè che la sorgente δS sia assente. Poniamo quindi nella (2.11) la condizione $\delta S = 0$. Poiché i coefficienti dell'equazione non dipendono dalle coordinate spaziali, sfruttando le trasformate di Fourier si può ottenere un'equazione differenziale ordinaria per i coefficienti di Fourier $\delta\epsilon_{\mathbf{k}}(t)$. Vediamo brevemente come ottenere questa equazione. Possiamo esprimere $\delta\epsilon(\mathbf{x}, t)$ in funzione dei coefficienti di Fuourier nel seguente modo:

$$\delta\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ \delta\epsilon_{\mathbf{k}}(t)\ exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

sostinuendo questa espressione nell'equazione (2.11) è allora immediato trovare l'equazione per i coefficienti di Fourier:

$$\delta\ddot{\epsilon}_{\mathbf{k}} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\epsilon_0)\delta\epsilon_{\mathbf{k}} = 0 \tag{2.12}$$

nella quale k è il modulo di $\mathbf{k}$. Questa equazione chiaramente ha due soluzioni indipendenti. Queste possono essere scritte nel seguente modo:

$$\delta\epsilon_{\mathbf{k}} \propto exp(\pm i\omega(k)t), \tag{2.13}$$

dove abbiamo posto:

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\epsilon_0}. \tag{2.14}$$

Vediamo quindi che il comportamento delle perturbazioni adiabatiche dipende in modo significativo dal segno dell'espressione sotto radice. Se, infatti, si definisce la lunghezza di Jeans come:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G\epsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

dove k_J è tale che $\omega(k_J) = 0$. Poichè $\omega(k)$ è una funzione crescente di k e quindi una funzione descescente di $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, si hanno le seguenti possibilità:

- $\lambda < \lambda_J$: il radicando è positivo. Le soluzioni possono allora essere scritte nel seguente modo:

  $$\delta\epsilon_{\mathbf{k}} \propto sen(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \alpha). \tag{2.16}$$

  Possiamo pensare queste soluzioni come "onde sonore" con velocità di fase $\frac{\omega}{k}$.

- $\lambda > \lambda_J$: il radicando è negativo. Come soluzioni si ha allora:

$$\delta\epsilon_{\mathbf{k}} \propto exp(\pm |\omega| t). \tag{2.17}$$

Vediamo quindi che una soluzione descrive inomogeneità che crescono esponenzialmente mentre l'altra descrive un modo decrescente. Abbiamo quindi che in un universo statico l'instabilità gravitazionale è molto efficiente poichè le perturbazioni crescenti crescono esponenzialmente con il tempo.

2.2.2 Perturbazioni vettoriali

Imponiamo le condizioni $\delta\epsilon = 0$ e $\delta S = 0$. Anche se l'equazione (2.11) ha soluzione banale, le equazioni idrodinamiche hanno invece una soluzione non banale. Infatti con tali condizioni le equazioni idrodinamiche si riducono a:

$$\nabla\delta\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = 0, \tag{2.18}$$

dalla seconda equazione segue subito che $\delta\mathbf{v}$ è indipendente dal tempo: $\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Se adesso consideriamo perturbazioni con l'andamento di un'onda piana, $\delta\mathbf{v} = \mathbf{w_k} exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$, dalla prima equazione si vede subito che:

$$\mathbf{w_k}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{2.19}$$

Quest'ultima relazione ci dice che la velocità della perturbazione è perpendicolare al vettore d'onda $\mathbf{k}$. Inoltre questo tipo di perturbazioni, dette *vettoriali*, non disturbano la distribuzione di massa poiché descrivono movimenti di taglio nel mezzo. Infine notiamo che si hanno due modi vettoriali in quanto per ogni $\mathbf{k}$ abbiamo due direzioni perpendicolari.

2.2.3 Perturbazioni dell'entropia

Consideriamo ora $\delta S \neq 0$. In questo caso nell'equazione per i coefficienti di Fourier abbiamo un termine aggiuntivo rispetto ai casi precedenti:

$$\delta\ddot{\epsilon}_{\mathbf{k}} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\epsilon_0)\delta\epsilon_{\mathbf{k}} = -\sigma k^2 \delta S_{\mathbf{k}}. \tag{2.20}$$

La soluzione generale può essere scritta come la somma di una soluzione generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare. Una soluzione particolare indipendente dal tempo è:

$$\delta\epsilon_{\mathbf{k}} = -\frac{\sigma k^2 \delta S_{\mathbf{k}}}{(k^2 c_s^2 - 4\pi G\epsilon_0)}. \tag{2.21}$$

Questa soluzione è chiamta *perturbazione dell'entropia.*

Abbiamo dunque trovato i possibili tipi perturbazioni che si hanno su un mezzo omogeneo non in espansione: due modi adiabatici, due modi vettoriali e uno relativo all'entropia. Quello più interessante per i nostri fini è il modo adiabatico a crescita esponenziale che è l'unico a poter essere collegato con la struttura dell'universo.

2.3 L'instabilità in un universo in espansione

Consideriamo ora la possibilità che l'universo omogeneo e isotropo si espanda, consideriamo in pratica come background l'universo di Friedman spazialmente piatto. Questo modifica il background delle nostre perturbazioni. In questo caso abbiamo che la densità di energia sarà indipendente dalle coordinate spaziali ma dipendente dal tempo, inoltre le velocità di background obbediscono alla legge di Hubble:

$$\epsilon = \epsilon_0(t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = H(t)\, \mathbf{x}. \tag{2.22}$$

Se si sostituiscono queste espressioni nell'equazione di continuità, $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{V}) = 0$, si ottiene subito:

$$\dot{\epsilon}_0 + 3H\epsilon_0 = 0, \tag{2.23}$$

che coincide con l'equazione di continuità (1.21) per il tensore energia impulso nel caso di massa non relativistica $\omega = 0$. Fisicamente questa equazione afferma che la massa totale non relativistica si conserva. Inoltre prendendo nuovamente la divergenza dell'equazione di Eulero (2.3) (e ponendovi $p = 0$) e considerando l'equazione di Poisson $\Delta\phi = 4\pi G\epsilon$ si ottiene l'equazione di Friedman nel caso in cui $p = 0$:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\epsilon, \tag{2.24}$$

per ottenere tale equazione si noti che vale $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 3\dot{H}$ e che $\nabla \cdot (H^2 \mathbf{x}) = 3H^2$, in quanto $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = (H\mathbf{x} \cdot \nabla)\, H\mathbf{x} = H^2\mathbf{x}$.
Le perturbazioni possibili sono del tutto analoghe al caso precedente, con la differenza che ora le velocità di background non sono più zero, ma sono date dalla legge di Hubble. Abbiamo allora, ignorando le perturbazioni dell'entropia:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t) = p_0 + c_s^2 \delta\epsilon$$

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}$$

inserendo ora queste relazioni nell'equazione di Eulero (2.3), nell'equazione di Poisson (2.1) e in quella di continuità (2.4), e tenendo solo i termini lineari nelle perturbazioni si ottengono le seguenti equazioni linearizzate:

$$\frac{\partial \delta\epsilon}{\partial t} + \epsilon_0 \nabla \cdot (\delta \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\delta\epsilon \mathbf{V}_0) = 0, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\epsilon_0} \nabla \delta\epsilon + \nabla \delta\phi + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V}_0 = 0 \tag{2.26}$$

$$\Delta \delta\phi = 4\pi G \delta\epsilon. \tag{2.27}$$

Si noti che il termine $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ dell'equazione di Eulero ora produce due termini lineari nelle perturbazioni, corrispondenti agli ultimi due termini della seconda equazione. Notiamo inoltre però che ora c'è un coefficiente di queste equazioni che dipe esplicitamente da $\mathbf{x}$, dal momento che la velocità di Hubble $\mathbf{V}_0$ dipende dalle coordinate spaziali. Per questo motivo considerare le trasformate di Fourier come fatto nel caso di universo statico non riduce più le equazioni a un set di equazioni ordinarie disaccoppiate. Per risolvere questo problema è possibile usare le coordinate Lagrangiane comoventi col flusso di Hubble $\mathbf{q}$ anziché quelle Euleriane. Queste coordinate sono definite dalla relazione:

$$\mathbf{x} = a(t)\, \mathbf{q}. \tag{2.28}$$

A questo punto è necessario rimpiazzare nelle nostre equazioni le derivate rispetto al tempo fatte con $\mathbf{x}$ costante con le derivate rispetto al tempo fatte con $\mathbf{q}$ costante, e le derivate rispetto a $\mathbf{x}$ con quelle rispetto a $\mathbf{q}$. Vediamo come fare. Innanzi tutto consideriamo una funzione generica $f(\mathbf{x} = a(t)\, \mathbf{q},\, t)$ che è del tipo che ci interessa, allora per la regola della catena si ha:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \dot{a} q^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_t \tag{2.29}$$

dalla quale si ottiene, considerando $\frac{dx^i}{dt} = \dot{a} q^i = V_0^i$, che:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}), \tag{2.30}$$

infine abbiamo che le derivate spaziali sono legate in maniera più semplice, sempre dalla regola della catena segue:

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a}\, \nabla_{\mathbf{q}}. \tag{2.31}$$

Se ora poniamo $\delta = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}$, e sostituiamo la (2.30) e la (2.31) nelle equazioni linearizzate che descrivono le perturbazioni (2.25)-(2.27), si ottengono le seguenti equazioni lineari:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H\delta \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a}\nabla\delta + \frac{1}{a}\nabla\delta\phi = 0 \tag{2.33}$$

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G a^2 \epsilon_0 \delta. \tag{2.34}$$

In queste equazioni ora le derivate rispetto al tempo sono fatte tenendo $\mathbf{q}$ costante e i gradienti sono fatti rispetto alle coordinate lagrangiane comoventi. Per ricavare la seconda abbiamo sfruttato l'equazione $\dot{\epsilon}_0 + 3H\epsilon_0 = 0$, e notato che $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_0 = 3H$ e $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_0 = H\delta\mathbf{v}$. Se ora, come fatto in precedenza, prendiamo la divergenza della seconda di queste equazioni e sfuttiamo l'equazione di Poisson (2.34) e l'equazione di continuità (2.32), si ottiene facilmente:

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \tfrac{c_s^2}{a^2}\Delta\delta - 4\pi G\epsilon_0\delta = 0.} \tag{2.35}$$

Questa equazione descrive allora l'instabilità gravitazionale in un universo in espansione trascurando le perturbazioni dell'entropia. Inoltre i coefficienti non dipendono dalle coordinate comoventi per cui, analogamente al caso dell'universo non in espansione della teoria di Jeans, eseguendo una trasformata di Fourier è possibile ricondursi a un'equazione differenziale ordinaria. Nei prossimi paragrafi vedremo la soluzione di questa equazione limitandoci al caso delle perturbazioni adiabatiche e vettoriali.

2.3.1 Perturbazioni adiabatiche

L'equazione (2.35) è stata trovata trascurando le perturbazioni dell'entropia e pertanto descrive già perturbazioni adiabatiche. Scriviamo allora la relazione che lega $\delta(\mathbf{q}, t)$ ai suoi coefficienti di Fourier calcolati ripetto alle coordinate comoventi:

$$\delta(\mathbf{q}, t) = \int \delta_{\mathbf{k}}(t) exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.36}$$

sostituendo questa equazione nella (2.35) si trova subito che i coefficienti di Fourier devono soddisfare la seguente equazione:

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\epsilon_0\right)\delta_{\mathbf{k}} = 0. \tag{2.37}$$

In analogia con quanto visto nel caso di un unverso non in espansione il comportamento delle perturbazioni dipende fortemente dalla scala di grandezza spaziale. La scala critica è data dalla *lunghezza di Jeans*:

$$\lambda_J^{ph} = \frac{2\pi}{k_J}\, a = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\epsilon_0}}, \tag{2.38}$$

la grandezza λ_J^{ph} è la "lunghezza d'onda fisica" (misurata, ad esempio, in centimetri) legata a quella comovente tramite $\lambda_J^{ph} = a\lambda_c$. Poiché nel modello isotropo chiuso si ha $\epsilon \propto a^{-3}$, e in un universo piatto con predominanza di materia si ha $a \sim t^{\frac{2}{3}}$, allora abbiamo che in tale tipo di universo vale $\epsilon_0 \sim t^{-2}$, quindi dall'espressione di λ_J^{ph} abbiamo che:

$$\lambda_J^{ph} \sim c_s t, \tag{2.39}$$

per cui la lunghezza di Jeans è dell'ordine "dell'orizzonte del suono".

Dividiamo ora i casi in cui la perturbazione ha una scala di lunghezza tipica molto minore e molto maggiore della lunghezza di Jeans:

- $\lambda << \lambda_J$.

  Abbiamo visto che in questo caso le perturbazioni sono onde sonore e se c_s cambia adiabaticamente allora la soluzione, che può essere trovata mediante l'approssimazione WKB, è:

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} exp\left(\pm k \int \frac{c_s dt}{a}\right). \tag{2.40}$$

  In particolare per arrivare a questa soluzione possiamo notare che nella nostra condizione il secondo addendo nel termine tra parentesi nella (2.37) può essere trascurato, e, usando il tempo conforme $\eta = \int \frac{dt}{a}$ e derivando poi l'equazione per l'ampiezza riscalata $\sqrt{a}\delta_{\mathbf{k}}$, diventa a questo punto possibile usare, direttamente, l'approssimazione WKB.

- $\lambda >> \lambda_J$.

  In questa condizione possiamo stimare la soluzione con una semplice argomentazione matematica. Sia la densità di energia di background $\epsilon_0(t)$ che la densità di energia shiftata nel tempo $\epsilon_0(t+\tau)$, dove τ è una costante, soddisfanno le equazioni $\dot{\epsilon}_0 + 3H\epsilon_0 = 0$ e $\dot{H} + H^2 = \frac{4\pi G}{3}\epsilon$. Infatti se sfruttiamo la prima per esprimere H in termini di ϵ_0 e sostiuiamo nella seconda si ottiene evidentemente un'equazione per ϵ_0 che non ha dipendenza esplicita dal tempo e per cui se ho una soluzione e la traslo nel tempo questa nuova funzione traslata è ancora soluzione. Ora per τ piccoli $\epsilon_0(t+\tau)$ può essere vista come una perturbazione del background $\epsilon_0(t)$, la cui ampiezza δ è:

$$\delta_d = \frac{\epsilon_0(t+\tau) - \epsilon_0(t)}{\epsilon_0(t)} \approx \frac{\dot{\epsilon}_0 \tau}{\epsilon_0} \sim \frac{\dot{a}}{a} \propto H(t), \tag{2.41}$$

notiamo che questo è il modo che decade nel tempo poichè la costante di Hubble decsresce nel tempo. Essendo la nostra equazione del secondo ordine deve avere due soluzioni indipendenti. Una volta che una è nota l'altra soluzione indipendente δ_i può facilmente essere trovata sfruttando il Wronskiano W. Nel caso di un'equazione del secondo ordine il Wronskiano può essere scritto come:

$$W = \dot{\delta}_d \delta_i - \delta_d \dot{\delta}_i. \tag{2.42}$$

Prendendo ora la derivata temporale del Wronskiano e usando la (2.37) per esprimere $\ddot{\delta}_{\mathbf{k}}$ in funzione di $\dot{\delta}_{\mathbf{k}}$ e di $\delta_{\mathbf{k}}$ si trova che il Wronskiano soddisfa la seguente equazione:

$$\dot{W} = \ddot{\delta}_d \delta_i + \dot{\delta}_d \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_d \dot{\delta}_i - \delta_d \ddot{\delta}_i = \ddot{\delta}_d \delta_i - \delta_d \ddot{\delta}_i = -2HW, \tag{2.43}$$

questa equazione ha una soluzione ovvia:

$$W = \dot{\delta}_d \delta_i - \delta_d \dot{\delta}_i = \frac{C}{a^2}, \tag{2.44}$$

dove C è una costante d'integrazione. Facciamo ora l'ansatz $\delta_i = \delta_d f(t)$. Se ora lo sostituiamo nell'equazione precedente troviamo che:

$$\dot{\delta}_d \delta_d f(t) - \delta_d \dot{\delta}_d f(t) - \delta_d^2 \dot{f}(t) = -\delta_d^2 \dot{f}(t) = \frac{C}{a^2} \tag{2.45}$$

da cui troviamo subito che:

$$\dot{f}(t) = -C \frac{1}{\delta_d^2 a^2} \tag{2.46}$$

che può essere facilmente integrata. Abbiamo dunque che la funzione f deve essere della forma:

$$f(t) = -C \int \frac{dt}{\delta_d^2 a^2}. \tag{2.47}$$

In definitiva la soluzione generale dell'equazione nel caso considerato può essere scritta come:

$$\delta = C_1 H \int \frac{dt}{\delta_d^2 a^2} + C_2 H. \tag{2.48}$$

Se consideriamo ora il caso di universo piatto con predominanza di materia otteniamo che:

$$\delta = C_1 t^{\frac{2}{3}} + C_2 t^{-1} \tag{2.49}$$

in quanto nel caso di universo piatto si ha che $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ e $H = \frac{\dot{a}}{a} \propto t^{-1}$. Possiamo allora concludere che nel caso di un universo in espansione l'instabilità gravitazionale è molto meno "efficiente" che nel caso statico, infatti il modo crescente va come una potenza del tempo, diversamente dall'andamento esponenziale che aveva nella teoria di Jeans.

2.3.2 Perturbazioni vettoriali

Imponendo $\delta = 0$ le equazioni linearizzate per l'ampiezza della densità di perturbazione si riducono a:

$$\nabla \delta \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H \delta \mathbf{v} = 0. \tag{2.50}$$

Dalla prima di queste due equazioni segue che se consideriamo perturbazioni con l'andamento di un'onda piana $\delta \mathbf{v} \propto \delta \mathbf{v_k} exp(i\mathbf{kq})$ allora la velocità peculiare $\delta \mathbf{v}$ è *perpendicolare* al numero d'onda $\mathbf{k}$. Sostituendo questa espressione per $\delta \mathbf{v}$ nella seconda equazione, e divedendo per l'esponenziale l'equazione diventa:

$$\dot{\delta} \mathbf{v_k} + \frac{\dot{a}}{a} \delta \mathbf{v_k} = 0, \tag{2.51}$$

una soluzione ovvia di questa equazione allora è:

$$\delta \mathbf{v_k} \propto \frac{1}{a} \tag{2.52}$$

come è immediato verificare per sostituzione. Notiamo allora che le perturbazioni vettoriali in un universo in espansione decrescono con l'espansione. Per cui per osservarne gli effetti oggi, agli inizi dell'universo l'ampiezza di questo tipo di perturbazioni sarebbe dovuta essere tanto grande da distruggere l'omogeneità. Non hanno quindi nessun ruolo nella formazione della struttuta dell'universo su larga scala. Malgrado ciò questo tipo di perturbazioni possono essere generate più tardi nella storia dell'universo e possono spiegare la rotazione delle galassie.

2.4 Oltre l'approssimazione lineare

In approssimazione lineare si approssima la denstià di energia trascurando i termini non lineari nello sviluppo:

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \delta + O(\delta^2)). \tag{2.53}$$

Abbiamo però visto che ci sono delle perturbazioni che crescono col tempo; è quindi chiaro che quando abbiamo che l'ampiezza della perturbazione soddisfa $\delta \sim 1$, i termini non lineari ($\sim \delta^2$) che abbiamo trascurato diventano più e più importanti. Quando si raggiunge questa condizione ci si aspetta che il campo gravitazionale causi un collasso della materia che sovrasta il flusso di Hubble dell'espansione. Come risultato ci aspettiamo quindi che la disomogeneità "esca" da questo flusso e che collassi fino alla formazione di una struttura stabile non lineari, che è ciò che possiamo osservare oggi nell'universo.

Studieremo il caso di predominanza di materia. Purtroppo anche nel caso di predominanza della materia, fluido con equazione di stato $p = 0$, la soluzione esatta delle equazioni per l'evoluzione in regime non lineare può essere fatta per un limitato numero di casi in cui la disomogeneità ha particolari simmetrie.

Per prima cosa è utile riscrivere le equazioni idrodinamiche in una forma più adatta per trovare le loro soluzioni in regime non lineare nel caso in cui $p = 0$. Usiamo le coordinate Euleriane. L'equazione di continuità può essere facilmente riscritta come:

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x + V^i \nabla_i \right) \epsilon + \epsilon \nabla_i V^i = 0, \tag{2.54}$$

e prendendo nuovamente la divergenza delle equazioni di Eulero (in cui si è posto $p = 0$), e usando l'equazione di Poisson abbiamo:

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla \phi \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}] + \Delta\phi = \tag{2.55}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) + 4\pi G\epsilon = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \left(\nabla_j \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\partial V^j}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{dx^i}{dt} \nabla_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + 4\pi G\epsilon = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + V^i \nabla_j \nabla_i V^j + \nabla_j V^i \nabla_i V^j + 4\pi G\epsilon = 0.$$

In definitiva, poichè le derivate commutano, la nostra equazione diventa:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_x + V^i \nabla_i \right) (\nabla_j V^j) + (\nabla_j V^i)(\nabla_i V^j) + 4\pi G \epsilon = 0. \tag{2.56}$$

Ora dobbiamo sostituire alle coordinate Euleriane $\mathbf{x}$ le coordinate lagrangiane comoventi $\mathbf{q}$, abbiamo allora: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$. La velocità di un elemento di materia con una data $\mathbf{q}$ può essere espressa come:

$$V^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i(\mathbf{q}, t)}{\partial t}\bigg|_q \tag{2.57}$$

e la derivata rispetto alle coordinate Euleriane del campo vettoriale delle velocità può essere espressa come:

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial q^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial x^i(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial q^k}{\partial x^j} \frac{\partial J^i_k}{\partial t}, \tag{2.58}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo introdotto il tensore degli sforzi:

$$J^i_k(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial x^i(\mathbf{q}, t)}{\partial q^k}. \tag{2.59}$$

Ricordiamo ora che come trovato in precedenza, abbiamo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_x + V^i \nabla_i \right) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_x + \frac{\partial x^i(\mathbf{q}, t)}{\partial t}\bigg|_q \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_q. \tag{2.60}$$

Sostituendo la (2.60) e la (2.58) nelle (2.54) e (2.56) si ottengono subito le seguenti equazioni, dalla (2.54):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial q^k}{\partial x^i} \frac{\partial J^i_k}{\partial t} = 0, \tag{2.61}$$

e dalla (2.56):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q^k}{\partial x^j} \frac{\partial J^j_k}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial q^k}{\partial x^j} \frac{\partial J^i_k}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial q^l}{\partial x^i} \frac{\partial J^j_l}{\partial t} \right) + 4\pi G \epsilon = 0, \tag{2.62}$$

nelle quali ricordiamo che le derivate temporali sono fatte a $\mathbf{q}$ costante. Il tensore degli sforzi è una matrice 3x3 le cui componenti, per la regola della catena, soddisfano:

$$\frac{\partial q^k}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial q^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{2.63}$$

Possiamo quindi affermare che le grandezze $\frac{\partial q^k}{\partial x^i}$ sono gli elementi della matrice inversa $\mathbf{J}^{-1}$. Una volta notato questo possiamo riscrivere le ultime due equazioni in forma matriciale come:

$$\dot{\epsilon} + \epsilon\, tr\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right) = 0, \tag{2.64}$$

$$\left[tr\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right)\right]^{\bullet} + \left[tr\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right)^2\right] + 4\pi G\epsilon = 0. \tag{2.65}$$

Svolgendo un po' di calcoli di algebra lineare è possibile vedere che:

$$tr\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right) = \dot{(\ln J)}, \quad J(\mathbf{q}, t) = det\mathbf{J} \tag{2.66}$$

inserendo questa relazione nella (2.64), si trova:

$$\dot{\epsilon} + \epsilon\left(\dot{(\ln J)}\right) = 0,$$

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -\left(\dot{(\ln J)}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\epsilon = -\frac{\partial}{\partial t}(\ln J) = 0,$$

$$\ln\epsilon = -\ln J = \ln\frac{1}{J}$$

$$\epsilon \propto \frac{1}{J},$$

e in definitiva troviamo allora che $\epsilon(\mathbf{q}, t)$ è data da:

$$\epsilon(\mathbf{q}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{q})}{J(\mathbf{q}, t)} = \frac{\rho_0(\mathbf{q})}{det\mathbf{J}} \tag{2.67}$$

dove $\rho_0(\mathbf{q})$ è un'arbitraria funzione delle coordinate Lagrangiane. Tenendo in conto questa espressione la (2.65) diventa:

$$\boxed{(\ln J)^{\bullet\bullet} + tr\left[\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right)^2\right] + 4\pi G\rho_0 J^{-1} = 0.} \tag{2.68}$$

Risolveremo questa complicata equazione in un caso particolarmente interessante per i nostri scopi, questa soluzione è detta *soluzione di Zel'dovich* e descrive l'evoluzione non lineare di una perturbazione uno-dimensionale.

2.4.1 La soluzione di Zel'dovich

Nella realtà il collasso è un processo che spesso è fortemente anisotropo. Per intuire le principali caratteristiche del comportamento di perturbazioni non lineari è istruttivo studiare la soluzione di Zel'dovich. Questa soluzione descrive perturbazioni non lineari uno-dimensionali sovrapposte al flusso di Hubble tre-dimensionale. In questo caso la relazione tra le coordinate Euleriane e Lagrangiane deve essere modificata per tenere conto della "velocità peculiare", che è la velocità che ha la materia rispetto al flusso di Hubble. In questo caso la relazione può essere scritta come:

$$x^i = a(t)(q^i - f^i(q^j, t)), \tag{2.69}$$

dove, se ignoriamo le perturbazioni vettoriali, $f^i = \frac{\partial \psi}{\partial q^i}$. Inoltre ψ può essere visto come un potenziale per le velocità peculiari. Considerare una perturbazione uno-dimensionale vuol dire allora restringersi al caso in cui ψ dipende solo da una delle coordinate, poniamo da q^1. Considerando la relazione (2.69), il tensore degli sforzi diventa:

$$\mathbf{J} = a(t) \begin{pmatrix} 1 - \lambda(q^1, t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

in cui $\lambda(q^1, t) = \frac{\partial f^1}{\partial q^1}$. Una volta noto il tensore degli sforzi attraverso il calcolo esplicito si può ottenere:

$$J = \det \mathbf{J} = a^3(1-\lambda), \quad tr\left[\left(\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}^{-1}\right)^2\right] = \left(H - \frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right)^2 + 2H^2. \tag{2.71}$$

Sostituendo le ultime due relazioni, e ponendo $\rho_0 = cost$, nell'equazione (2.68), questa si riduce a due equazioni indipendenti:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\epsilon_0, \tag{2.72}$$

$$\ddot{\lambda} + 2H\dot{\lambda} - 4\pi G \epsilon_0 \lambda = 0 \tag{2.73}$$

dove abbiamo posto: $\epsilon_0(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$, e ricordiamo che $\lambda(q^1, t) = \frac{\partial f^1}{\partial q^1}$. Vediamo brevemente come si ottengono queste equazioni:

$$\ddot{\ln} J = [\ln(\ddot{\det} \mathbf{J})] = \frac{d}{dt}\left(3\,\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right) = 3\,\frac{\ddot{a}}{a} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{1-\lambda} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right)^2, \tag{2.74}$$

sostituendo allora nella (2.68), e tenendo conto che $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$, abbiamo:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{1-\lambda} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right)^2 + \left(H - \frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right)^2 + 2H^2 + 4\pi G\rho_0 \frac{1}{a^3(1-\lambda)} = 0$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{1-\lambda} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda}\right)^2 + H^2 + \frac{\dot{\lambda}^2}{(1-\lambda)^2} - 2H\frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda} + 2H^2 + 4\pi G\rho_0 \frac{1}{a^3(1-\lambda)} = 0$$

$$3\dot{H} + 3H^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{1-\lambda} - 2H\frac{\dot{\lambda}}{1-\lambda} + 4\pi G\rho_0 \frac{1}{a^3(1-\lambda)} = 0,$$

moltiplicando per $1-\lambda$ e ponendo $\epsilon_0(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$:

$$3\dot{H} + 3H^2 - (3\dot{H} + 3H^2)\lambda - \ddot{\lambda} - 2H\dot{\lambda} + 4\pi G\epsilon_0 = 0, \tag{2.75}$$

il primi due termini e l'ultimo allora si cancellano per l'equazione di Friedman, e esprimendo il secondo addendo sempre tramite questa equazione otteniamo le formule (2.72), (2.73) precedentemente riportate.

Osservando la (2.72) e la (2.73) notiamo che la prima di queste coincide con l'equazione di Friedman (2.24) per il background omogeneo e isotropo. La seconda è più interessante: è esattamente la stessa che per le perturbazioni lineari per la materia non relativistica (2.35), ma è stata ricavata senza ipotizzare che le perturbazioni siano piccole, per cui le sue soluzioni sono valide sia nel regime lineare che in quello non lineare. Dalla (2.67) allora, tenendo sempre in conto che $\epsilon_0(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$, la densità di energia è :

$$\epsilon(q,t) = \frac{\rho_0(\mathbf{q})}{det\mathbf{J}} = \frac{\epsilon_0(t)}{(1-\lambda(q^1,t))}, \tag{2.76}$$

si può inoltre vedere che possiamo scrivere $\lambda(q^1,t) = \alpha(q^1)\delta_i(t) + \chi(q^1)\delta_d(t)$. I termini δ_i, δ_d sono i modi visti nella teoria linearizzata. Per esempio in un universo piatto in espansione con predominanza di materia abbiamo, $\delta_i = t^{\frac{2}{3}}$ e $\delta_d = t^{-1}$. Per $\lambda(q^1,t) << 1$ abbiamo $\epsilon(q,t) \approx \epsilon_0(t)$, e la nostra soluzione riproduce i risultati della teoria linearizzata. Il termine δ_d può essere ovviamente trascurato dato che non influenza l'evoluzione della perturbazinoe (tali termini non entreranno in regime non lineare). Si ha dunque che:

$$\epsilon(q,t) = \frac{\epsilon_0(t)}{(1-\alpha(q^1)\delta_i(t))}. \tag{2.77}$$

Osservando la formula precedente possiamo notare che si hanno comportamenti qualitativamente diversi a seconda del segno che $\alpha(q^1)$ assume nella regione considerata, in particolare:

- $\alpha(q^1) > 0$. In queste regioni la densità di energia $\epsilon(q,t)$ è maggiore della densità media $\epsilon_0(t)$. Ma, nel regime lineare, abbiamo che ϵ decresce poiché anche la densità media $\epsilon_0(t)$ descresce. Solo una volta che si entra nel regime non lineare, cioè quando $\alpha(q^1)\delta_i(t) \sim 1$, abbiamo che ϵ comincia a crescere, poiché il denominatore esplode, e dunque ci si aspetta che la disomogeneità "esca" dal flusso di Hubble e cominci a collassare. Allora per stimare quando la disomogeneità esce dal flusso di Hubble dobbiamo trovare quando $\dot{\epsilon}(q,t) = 0$. Dalla (2.77) troviamo allora che questa condizione è verificata quando:

$$\frac{\epsilon(q,t)}{\epsilon_0(t)} = 1 + 3\,\frac{H}{(\ln\delta_i)^\bullet}. \tag{2.78}$$

  In un universo piatto con predominanza di materia abbiamo che $\delta_i \propto a$ e, dall'equazione precedente, si vede quindi subito che il collasso avviene non appena la densità di energia ϵ supera di un fattore moltiplicativo 4 la densità di energia media ϵ_0. Questo collasso sarà uno-dimensionale e produrrà delle strutture bidimensionali note come *"pancakes" di Zel'dovich.*

- $\alpha(q^1) > 0$. In queste regioni la densità di energia ϵ decrescee sempre: la materia "scappa" da queste regioni, che possono anche diventare, eventualmente, vuote.

Nella realtà chiaramente la situazione è ben più complicata in quanto una disomogeneità tipicamente non è uno-dimensionale, nel senso che il potenziale ψ per le velocità peculiari sarà in generale funzione di tutte le coordinate q^i. Per descrivere l'evoluzione di una perturbazione con "forma" arbitraria Zel'dovich propose la seguente soluzione approssimata, generalizzazione della (2.77):

$$\epsilon(q,t) = \frac{\epsilon_0(t)}{(1-\alpha\delta_i(t))(1-\beta\delta_i(t))(1-\gamma\delta_i(t))}. \tag{2.79}$$

Le funzioni α, β, γ caratterizzano la deformazione lungo i tre assi principali del tensore degli sforzi e dipendono ora da tutte e tre le coordinate q^i. Il corrispondente tensore degli sforzi, in analogia con la perturbazione uno dimensionale, allora è:

$$\mathbf{J} = a\mathbf{I} - a\delta_i \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & o \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

in cui $\mathbf{I}$ è la matrice identità. Nel prossimo paragrafo vediamo come costruire qualitativamente l'evoluzione di una perturbazione arbitrario sfruttando il tensore degli sforzi (2.80).

2.5 La rete cosmica

Nello studiare la struttura non lineare dell'universo il tensore J^i_k risulta essere molto utile. Le disomogeneità iniziali possono essere infatti caratterizzate attraverso tale tensore o, equivalentemente, dalle tre funzioni $\alpha(q^i), \beta(q^i)$ e $\gamma(q^i)$. *Il modo in cui la disomogeneità evolve in una regione è determinato dalla relazione tra i valori* α, β, γ. Basandoci infatti sulla soluzione di Zel'dovich (2.77), e sulla sua generalizzazione (2.79), possiamo dire che nelle regioni in cui $\alpha >> \beta, \gamma$ ci apettiamo un collasso uno-dimensionale che porta alla formazione di strutture bidimensionali (i pancakes di Zel'dovich); nelle regioni in cui $\alpha \sim \beta >> \gamma$ ci aspettiamo collassi due-dimensionali, che porteranno alla formazione di strutture uno-dimensionali; infine nelle regioni in cui $\alpha \sim \beta \sim \gamma$ ci aspettiamo un collasso sferico, quindi un collasso tre-dimensionale che porta a strutture "puntiformi". Per una descrizione quantitativa dell'evoluzione di queste perturbazioni sarebbe necessario fissare una distribuzione di massa iniziale, ma questo richiederebbe anche uno studio approfondito della teoria inflazionaria, la quale *predice* tale distribuzione ma che esula dai nostri scopi. La completa teoria quantitativa è inoltre ancora un campo di frontiera nella ricerca. Diamo allora una descrizione qualitativa della formazione di queste strutture non lineari.

Per descrivere qualitativamente la formazione delle strutture anistrope è utile immaginare un paesaggio montagnoso, che rappresenta la distribuzione di massa in uno spazio bidimensionale: i picchi delle montagne corrisponderanno alle zone a densità più alta e le valli le zone a densità più bassa. Le prime strutture non lineari a formarsi saranno vicine ai picchi più alti, dove la densità assume i valori massimi. Queste regioni sono l'analogo di picchi nella densità localizzati attorno a un punto dello spazio, per cui abbiamo che, nel caso reale in tre dimensioni, $\alpha \sim \beta \sim \gamma$. Quindi le regioni attorno ai picchi vanno in contro a un collasso tre-dimensionale che porta alla formazione di strutture di forma sferica o ellittica.

A collegare i picchi principali spesso si trovano delle "selle" che sono più basse dei picchi. In queste zone l'addensamento di massa è distribuito lungo una linea e dunque il collasso porterà a strutture uno-dimensionali, nella nostra visualizzazione bidimensionale. In modo simile i picchi di densità sono collegati da "selle" di dimensione più alta, in cui avremo $\alpha \sim \beta >> \gamma$. Attorno a queste regioni avremo la formazione di strutture uno-dimensionali, che collegano le strutture sferiche, e che sono dovute a un collasso due-dimensionale: i filamenti di galassie.

Ci sono, infine, delle regioni dello spazio che non hanno analoghi nella nostra visualizzazione in dimensione più bassa, dove solo una delle tre funzioni che caratterizzano una perturbazione ha un massimo locale. In queste regioni si ha (per esempio): $\alpha >> \beta, \gamma$. Si assiste in tali zone al collasso uno-dimensionale di Zel'dovich che porta alla formazione di strutture bidimensionali, i muri di galassie. Infine nelle zone in cui α, β, γ sono tutti e tre negativi, le valli, l'espansione continuerà per sempre facendo in modo che la materia contenuta in queste regioni venga continuamente "diliuta".

Capitolo 3

L'instabilità gravitazionale in Relatività Generale

In questo capitolo affronteremo il problema di perturbazioni lineari sul background di Friedman nell'ambito della teoria della Relatività Generale. Considereremo solo un universo in espansione spazialmente piatto.

La teoria Newtoniana ha chiaramente dei limiti. In particolare ovviamente ci si aspetta che questa fallisca per un fluido relativistico, per il quale dobbiamo usare la Relatività Generale sia per perturbazioni con grande lunghezza d'onda (più grande del raggio di Hubble) che quelle con piccola lunghezza d'onda.

Sfortunatamente l'interpretazione dei risultati in Relatività Generale è molto più difficoltosa che nella teoria Newtoniana a causa della completa libertà di scelta delle coordinate. Ad esempio, mentre per il background omogeneo e isotropo abbiamo una scelta naturale del sistema di riferimento (quello comovente), per studiare le perturbazioni non c'è un ovvio sistema di riferimento ottimale. Inoltre, come sempre accade in Relatività Generale, è possibile trovarsi di fronte a dei fenomeni dovuti alla scelta delle cordinate e non alla "fisica" del sistema che si studia. Una singolarità, ad esempio, può essere non una singolarità fisica, ma una singolarità legata alle coordinate scelte. Oppure, analogamente, è possibile vedere delle perturbazioni fittizie, che riflettono le proprietà delle coordinate e non descrivono alcun fenomeno fisico. Per vedere meglio questo fatto consideriamo un universo omogeneo e isotropo senza perturbazioni, ovviamente abbiamo che $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t)$. Ridefiniamo ora, possiamo farlo, la coordinata temporale come $\tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x}, t)$. Abbiamo allora:

$$\epsilon(t) = \epsilon(\tilde{t} - \delta t(\mathbf{x}, t) \simeq \epsilon(\tilde{t}) - \frac{\partial \epsilon}{\partial t}\delta t = \epsilon(\tilde{t}) + \delta\epsilon(\mathbf{x}, t). \tag{3.1}$$

Vediamo quindi che è possibile produrre delle perturbazioni semplicemente perturbando le coordinate: questa perturbazione è completamente dovuta alla scelta delle coordinate e non ha alcuna interpretazione fisica. Allo stesso modo è possibile, in principio, anche rimuovere una perturbazione reale. Per capire se la perturbazione è fisica oppure no è necessario studiare *sia* le perturbazioni della metrica *sia* quelle nella distribuzione della massa. Cominceremo ora a studiare le perturbazini metriche possibili e, successivamente, introdurremo le perturbazioni idrodinamiche.

3.1 Perturbarzioni e variabili gauge-invarianti

L'idea fondamentale è che le perturbazioni nella distribuzione della massa inducano perturbazioni della metrica. Sfruttando le proprietà tensoriali della metrica è poi possibile decomporre le perturbazioni nelle parti irriducibili. Vedremo inoltre che in approssimazione lineare ognuna di queste parti evolve in modo indipendente e possono essere quindi studiate separatemente.

Cominceremo ora a classificare le perturbazioni della metrica, vedere come queste si trasformano sotto generiche trasformazioni di gauge delle coordinate, e inoltre costruiremo le variabili gauge-invarianti.

3.1.1 Classificazione delle perturbazioni della metrica

Nel caso di universo piatto la metrica di Friedman perturbata, attraverso piccole perturbazioni, può essere scritta come:

$$ds^2 = [\, g^{(0)}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\,]dx^\alpha dx^\beta, \tag{3.2}$$

dove chiaramente $|\delta g_{\alpha\beta}| << g^{(0)}_{\alpha\beta}$. Notiamo inltre che $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ è la metrica di background di Friedman, e pertanto possiamo scriverla, guardando la (1.27), come:

$$g^{(0)}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}\, dx^i dx^j). \tag{3.3}$$

Ora, le perturbazioni metriche $\delta g_{\alpha\beta}$ possono essere classificate sulla base delle proprietà di simmetria del background omogeneo e isotropo il quale, come abbiamo visto, è invariante rispetto a traslazioni e rotazioni spaziali. In particolare poichè le pertubazioni metriche vengono sommate con la metrica imperturbata devono essere della stessa "natura".

Abbiamo allora che la componente δg_{00} si comporta come uno scalare sotto rotazioni spaziali, per cui possiamo porre:

$$\boxed{\delta g_{00} = 2a^2\phi} \tag{3.4}$$

dove allora ϕ deve essere un tre-scalare.

Le componenti spazio-temporali δg_{0i} si comportano come un campo tre-vettoriale. Quindi abbiamo che tale campo vettoriale è completamente determinato dalla sua divergenza e dal suo rotore in ogni punto. In questo caso, secondo la decomposizione di Helmoltz, il campo può essere espresso come la somma di un campo vettoriale irrotazionale $w_{||}$ (conservativo, con rotore nullo), detto longitudinale, tale che $B_{,i} = \nabla_i B = w_{||}$ dove B è funzione scalare; e di uno solenoidale $w_{\perp}$ (con divergenza nulla), detto trasversale. In definitiva per le componenti spazio temporali, usando la *decomposizione di Helmoltz*, si ha:

$$\boxed{\delta g_{0i} = w_{||} + w_{\perp} = 2a^2(B_{,i} + S_i)} \tag{3.5}$$

dove il vettore $S_i = w_{\perp}$ soddifa il *vincolo* $S^i_{,i} = 0$ (divergenza nulla) e B è una funzione scalare (e dunque il campo vettoriale $B_{,i}$ ha rotore nullo). Dunque abbiamo che S ha due componenti indipendenti, e inoltre, considerando il grado di libertà della funzione scalare B, si trova che in tutto le componenti spazio-temporali δg_{0i} sono caratterizzate da tre gradi di libertà, come dovrebbe essere per un tre-vettore. Riportiamo esplicitamente che d'ora in poi scegliamo di alzare e abbassare gli indici con la metrica impertubata δ_{ij}, benché in realtà la matrica è quella perturbata (3.2). Questa trattazione è adeguata purché si supponga che le perturbazioni siano piccole.

Rimangono le componenti δg_{ij}. Queste componenti si comportano come un campo tre-tensoriale. Cominciamo innanzi tutto nel separare questo campo tensoriale nel seguente modo:

$$\delta g_{ij} = a^2(2\tilde{\psi}\,\delta_{ij} + 2\,\tilde{h}_{ij}), \tag{3.6}$$

Dove $\tilde{h}_{ij}$ è un tensore senza traccia e $\tilde{\psi}$ è un tre-scalare. Notiamo esplicitamente che non si perde generalità nel fissare che $\tilde{h}_{ij}$ sia senza traccia in quanto questa può essere messa nella parte scalare ψ e che questa decomposizione corrisponde proprio al separare il campo tensoriale dalla sua traccia. Segni e fattori sono stati scelti solo per comodità. Prima di procedere con la decomposizione del tensore simmetrico senza traccia $\tilde{h}_{ij}$, facciamo, per chiarezza, il punto della situazione. Fino a questo momento abbiamo decomposto le componenti della metrica perturbata come segue:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1+2\,\phi)d\eta^2 + 2(B_{,i}+S_i)d\eta\,dx^i + [(1+2\tilde{\psi}\,\delta_{ij}) + 2\,\tilde{h}_{ij}]\,dx^i dx^j\}, \tag{3.7}$$

$$\delta^{ij}h_{ij} = h^i_i = 0.$$

Tale decomposizione è valida finchè è valida la decomposizione di Helmoltz di un vettore nella sua parte longitudinale e trasversale: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{||} + \mathbf{w}_{\perp}$, $\nabla \times \mathbf{w}_{||} = \nabla \cdot \mathbf{w}_{\perp} = 0$.

Passiamo ora alla decomposizione del campo tensoriale simmetrico senza traccia $\tilde{h}_{ij}$. Per fare questo ci avvaliamo di un teorema simile alla decomposizione di Helmoltz. Tale teorema afferma che qualunque campo tensoriale simmetrico senza traccia $\tilde{h}_{ij}(\mathbf{x})$ può essere decomposto nella somma di una parte longitudinale, una solenoidale e trasversa:

$$\tilde{h}_{ij}(\mathbf{x}) = h_{ij\,||} + h_{ij\,\perp} + h_{ij\,T}. \tag{3.8}$$

Inoltre i vari addendi possono essere definiti in termini di un campo scalare $h(\mathbf{x})$ (con cui esprimeremo $h_{ij\,||}$) e di un campo vettoriale trasverso $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (con cui esprimeremo $h_{ij\,\perp}$) nel modo seguente:

$$h_{ij\,||} = D_{ij}\,h = (\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2)\,h = (\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\,h \tag{3.9}$$

$$h_{ij\,\perp} = \frac{1}{2}(\nabla_i\,h_j + \nabla_j\,h_i) \tag{3.10}$$

$$\nabla_i h^i_{j\,T} = h^i_{j,i\,T} = 0. \tag{3.11}$$

Notiamo che che poiché stiamo considerando lo spazio come piatto le derivate covarianti altro non sono che le normali derivate direzionali e sempre per questo motivo per noi la metrica spaziale γ_{ij} coincide con δ_{ij}. Applichiamo ora tale teorema al nostro caso specifico, decomponiamo $\tilde{h}_{ij}(\mathbf{x})$ secondo quanto visto:

$$\delta g_{ij} = a^2(2\tilde{\psi}\,\delta_{ij} + 2\,h_{ij}) = a^2(2\tilde{\psi}\,\delta_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla^2\,h + 2\nabla_i\nabla_j\,h + 2\frac{1}{2}(\nabla_i\,h_j + \nabla_j\,h_i) +$$

$$+2h_{ij\,T} = a^2(\;2\,(\tilde{\psi} - \frac{1}{3}\nabla^2\,h\,)\,\delta_{ij} + 2h_{,ij} + h_{j,i} + h_{i,j} + h_{ij}) = a^2(\;2\,\psi\,\delta_{ij} + 2E_{,ij} +$$

$$+F_{j,i} + F_{i,j} + h_{ij}).$$

Notiamo infine che, oltre alle condizioni sulla parte tensoriale di trasversalità e traccia nulla, il campo vettoriale $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ è noto a meno di una soluzione dell'equazione di Killing $\nabla_i\,h_j + \nabla_j\,h_i = 0$ (si osservi la (3.10)). Siamo per cui liberi di imporre una condizione aggiuntiva sul campo vettoriale F^i, solitamente si sceglie che sia a divergenza nulla: $F^i_{,i} = 0$. In definitiva per la parte tensoriale δg_{ij} abbiamo la segunte decomposizione:

$$\boxed{\delta g_{ij} = a^2(\;2\,\psi\,\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{j,i} + F_{i,j} + h_{ij}),} \tag{3.12}$$

dove ψ ed E sono funzioni scalari, F_i è un campo vettoriale tale che $F^i_{,i} = 0$, h_{ij} è un tre-tensore che soddisfa i vincoli $h^i_i = 0$ e $h^i_{j,i}$, cioè è trasverso, senza traccia e simmetrico, e pertanto ha solo due componenti indipendenti.

In definitiva possiamo scivere la metrica perturbata come segue:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1+2\,\phi)d\eta^2+2(B_{,i}+S_i)d\eta\, dx^i-[(1-2\psi)\,\delta_{ij}-2E_{,ij}-F_{j,i}-F_{i,j}-h_{ij}]\, dx^i dx^j\}, \tag{3.13}$$

Contiamo ora il numero di funzioni indipendenti che abbiamo usato per costruire le grandezze $\delta g_{\alpha\beta}$: abbiamo usato *quattro funzioni*, ϕ, B, ψ *e* E, per le perturbazioni di natura scalari; *quattro funzioni* per le perturbazioni di natura vettoriale, in quanto abbiamo usato due tre-vettori F_i e S_i ognuno con un vincolo; due funzioni per le perturbazioni di natura vettoriale, poiché h_{ij} è un tensore simmetrico 3x3 con quattro vincoli. Abbiamo quindi in tutto *10 funzioni* indipendenti per descrivere le varie tipologie di pertubazioni metriche, numero che coincide proprio con il numero di componenti indipendenti del tensore $\delta g_{\alpha\beta}$, essendo questo un tensore simmetrico 4x4.

Abbiamo quindi la seguente classificazione delle perturbazioni metriche:

- *perturbazioni scalari.* Sono quelle perturbazioni che sono caratterizzate dalle quattro funzioni scalari ϕ, B, ψ *e* E che agiscono sulla parti scalari del tensore $\delta g_{\alpha\beta}$. Sono le più importanti per i nostri scopi perché conducono al fenomeno dell'instabilità gravitazionale.

- *perturbazioni vettoriali.* Sono quelle descritte dai due vettori S_i e F_i. Come nella teoria Newtoniana decrescono velocemente e sono poco interessanti dal punto di vista della cosmologia.

- *perturbazioni tensoriali.* Sono caratterizzate dal tensore h_{ij} e descrivono le onde gravitazionali.

Notiamo che le perturbazioni scalari, vettoriale e tensoriali sono disaccoppiate, in quanto sono caratterizzate da funzioni indipendenti, e possono quindi essere studiate separatamente.

3.1.2 Trasformazioni di gauge e variabili gauge-invarianti

Consideriamo la seguente trasformazione *infinitesima* di coordinate:

$$x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \tag{3.14}$$

dove ξ^α è infinitesima. Tali trasformazioni infinitesime vengono chiamate *trasformazioni di gauge* delle coordinate in quanto il quadrintervallo $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$

deve rimanere invariato sotto trasformazioni di coordinate. L'invarianza per generico cambio di coordinate complica la Relatività Generale rispetto ad altre teorie di gauge come l'elettromagnetismo nel quale le trasformazioni di gauge sono solo sulle variabili in gioco, come ad esempio sul potenziale quadrivettore.

Il nostro obbiettivo è trovare le leggi di trasformazione della perturbazione della metrica $\delta g_{\alpha\beta}$, imponendo che sotto il cambio di coordinate (3.13) il quadrintervallo $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ rimanga invariato: queste saranno le trasformazioni di gauge per la perturbazione metrica $\delta g_{\alpha\beta}$. Il tensore metrico trasformato, nel nuovo sistema di riferimento può essere calcolato con l'usuale formula di trasformazione:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(x^\rho) \tag{3.15}$$

tenendo ora a mente la legge di trasformazione (3.14), riscriviamo questa espressione tenendo solo i termini lineari in δg e in ξ:

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(x^\rho) = (\delta^\gamma_\alpha - \xi^\gamma_{,\alpha})(\delta^\delta_\beta - \xi^\delta_{,\beta})\, g_{\gamma\delta}(x^\rho) = (g_{\gamma\delta}\, \delta^\gamma_\alpha - g_{\gamma\delta}\xi^\gamma_{,\alpha})(\delta^\delta_\beta - \xi^\delta_{,\beta}) =$$

$$= (g_{\alpha\delta} - g_{\gamma\delta}\, \xi^\gamma_{,\alpha})(\delta^\delta_\beta - \xi^\delta_{,\beta}) = g_{\alpha\delta}\, \delta^\delta_\beta - g_{\alpha\delta}\xi^\delta_{,\beta} - g_{\gamma\delta}\, \xi^\gamma_{,\alpha}\delta^\delta_\beta + g_{\gamma\delta}\, \xi^\gamma_{,\alpha}\, \xi^\delta_{,\beta} \approx$$

$$\approx g_{\alpha\beta} - g_{\gamma\beta}\, \xi^\gamma_{,\alpha} - g_{\alpha\delta}\, \xi^\delta_{,\beta},$$

ma poiché la metrica $g_{\alpha\beta}$ può essere splittata nella parte di background e nella perturbazione, cioè si può scrivere $g(x^\rho)_{\alpha\beta} = g^{(0)}_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta}$ (e allo stesso modo per la metrica trasformata), in definitiva la metrica trasformata può essere scritta:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} \approx g^{(0)}_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta} - g^{(0)}_{\gamma\beta}\, \xi^\gamma_{,\alpha} - g^{(0)}_{\alpha\delta}\, \xi^\delta_{,\beta}.$$

Se riusciamo quindi a scriverere $g^{(0)}_{\alpha\beta}(x^\rho)$ in funzione di $g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho)$ abbiamo trovato la trasformazione a cui siamo interessati. Questo legame ci è chiaramente fornito dallo sviluppo in serie di potenze di ξ^α della funzione $g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho)$:

$$g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) \approx g^{(0)}_{\alpha\beta}(x^\rho) + g^{(0)}_{\alpha\beta\,,\gamma}\xi^\gamma,$$

se invertiamo queste relazione abbiamo allora:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} \approx g^{(0)}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta g_{\alpha\beta} - g^{(0)}_{\alpha\beta\,,\gamma}\xi^\gamma - g^{(0)}_{\gamma\beta}\, \xi^\gamma_{,\alpha} - g^{(0)}_{\alpha\delta}\, \xi^\delta_{,\beta}. \tag{3.16}$$

Confrontando le ultime due uguaglianze deduciamo allora la seguente *legge di trasformazione di gauge per le perturbazioni metriche*:

$$\boxed{\delta g_{\alpha\beta} \to \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - g^{(0)}_{\alpha\beta\,,\gamma}\xi^\gamma - g^{(0)}_{\gamma\beta}\, \xi^\gamma_{,\alpha} - g^{(0)}_{\alpha\delta}\, \xi^\delta_{,\beta}.} \tag{3.17}$$

È possibile inoltre, con un procedimento del tutto analogo, trovare le leggi di trasformazione di gauge per quattro-scalari e quattro-vettori. Vediamo come. Seguendo la stessa logica di prima, cominciamo col considerare che un quattro-scalare non cambia sotto trasformazione di coordinate:

$$\tilde{q}(\tilde{x}^\rho) = q(x^\rho),$$

considerando che analogamente a prima abbiamo il quattro-scalare q può essere diviso nella parte di background e nella perturbazione, $q(x^\rho) = q^{(0)}(x^\rho) + \delta q$, otteniamo che:

$$\tilde{q}(\tilde{x}^\rho) = q^{(0)}(\tilde{x}^\rho) + \delta\tilde{q} = q(x^\rho) = q^{(0)}(x^\rho) + \delta q \approx q^{(0)}(\tilde{x}^\rho) + \delta q - q^{(0)}_{,\alpha}\,\xi^\alpha,$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato lo sviluppo in serie di Taylor $q^{(0)}(\tilde{x}^\rho) \approx \delta q + q^{(0)}_{,\alpha}\,\xi^\alpha$. Confrontando queste espressioni ottieniamo la seguente trasformazione di gauge per i quattro-scalari:

$$\delta q \rightarrow \delta\tilde{q} = \delta q - q^{(0)}_{,\alpha}\,\xi^\alpha. \tag{3.18}$$

Passiamo ai quattro-vettori. Nuovamente cominciamo dalla legge di trasformazione:

$$\tilde{u}_\alpha(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\,u_\gamma(x^\rho) = (\delta^\gamma_\alpha - \xi^\gamma_{,\alpha})\,u_\gamma(x^\rho) = u_\alpha(x^\rho) - u_\gamma\,\xi^\gamma_{,\alpha} = u^{(0)}_\alpha(x^\rho) + \delta u_\alpha - u_\gamma\,\xi^\gamma_{,\alpha},$$

da cui, considerando nuovamente l'espansione di Taylor $u^{(0)}_\alpha(\tilde{x}^\rho) \approx u^{(0)}_\alpha(x^\rho) + u^{(0)}_{\alpha,\gamma}\,\xi^\gamma$ e che $u_\alpha(x^\rho) = u^{(0)}_\alpha(x^\rho) + \delta u_\alpha$, abbiamo allora che:

$$\tilde{u}_\alpha(\tilde{x}^\rho) = u^{(0)}_\alpha(\tilde{x}^\rho) + \delta\tilde{u}_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha}\,u_\gamma(x^\rho) \approx u^{(0)}_\alpha(\tilde{x}^\rho) + \delta u_\alpha - u^{(0)}_{\alpha,\gamma}\,\xi^\gamma - u^{(0)}_\gamma\,\xi^\gamma_{,\alpha}.$$

Abbiamo quindi la seguente legge di trasformazione di gauge per i quattro-vettori:

$$\delta u_\alpha \rightarrow \tilde{u}_\alpha = \delta u_\alpha - u^{(0)}_{\alpha,\gamma}\,\xi^\gamma - u^{(0)}_\gamma\,\xi^\gamma_{,\alpha}. \tag{3.19}$$

Torniamo al problema delle trasformazioni di gauge per le perturbazini del tensore metrico. Consideriamo il quadrivettore infinitesimo $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^i)$. Sfruttando la decomposizione di Helmoltz scriviamo ora le componenti spaziali ξ^i come:

$$\xi^i = \xi^i_\perp + \zeta^{,i},$$

con $\xi_\perp^i$ tale che $\xi^i_{\perp\,,i} = 0$ e ζ è una funzione scalare. Ricordando che la metrica di Friedman in un universo statico è $g^{(0)}_{00} = a^2(\eta)$ and $g^{(0)}_{ij} = -a^2(\eta)\delta_{ij}$ si ottiene subito sostituendo nella (3.17) che:

$$\delta\tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\xi^0)', \tag{3.20}$$

$$\delta\tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2\left[\xi'_{\perp\, i} + (\zeta' - \xi^0)_i\right], \tag{3.21}$$

$$\delta\tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2\left[2\frac{a'}{a}\,\delta_{ij}\,\xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp\, i,j} + \xi_{\perp\, j,i})\right], \tag{3.22}$$

dove abbiamo che $\xi_{\perp\, i} = \xi^i_\perp$ poichè gli indici vengono alzati e abbassati con la delta di Kronecker, e il simbolo $'$ indica la derivata rispetto al tempo conforme η. Possiamo ora trovare facilmente le leggi di trasformazione di gauge per le diverse tipologie di perturbazioni, scalari, vettoriali e tensoriali.

- *perturbazioni scalari.* Nel caso delle perturbazioni scalari possiamo scrivere la metrica come (ponendo che le perturbazioni vettoriali e tensoriali nella (3.13) siano uguali a zero):

  $$ds^2 = a^2(\eta)\{(1+2\,\phi)d\eta^2 + 2B_{,i}\eta\,dx^i - [(1-2\psi)\,\delta_{ij} - 2E_{,ij}]\,dx^i dx^j\}. \tag{3.23}$$

  Imponendo ora la condizione $d\tilde{s}^2 = ds^2$ si possono trovare le seguenti leggi di trasformazione di gauge per le funzioni che caratterizzano le perturbazioni scalari :

  $$\phi \to \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)' \qquad B \to \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0 \tag{3.24}$$

  $$\psi \to \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 \qquad E \to \tilde{E} = E + \zeta.$$

  Vediamo come esempio come si ottiene la prima di queste relazioni: poiché $\delta g_{00} = 2a^2\phi$, allora si ha ovviamente $\delta\tilde{g}_{00} = 2a^2\tilde{\phi}$; se ora imponiamo $d\tilde{s}^2 = ds^2$, abbiamo $\delta\tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\xi^0)' = 2a^2\phi - 2a(a\xi^0)' = 2a^2\tilde{\phi}$, da cui considerando l'ultima uguaglianza si ottiene facilmente la relazione cercata. Per le altre il procidemento è del tutto analogo.

Osserviamo che solo ξ^0 e ζ conribuiscono alle perturbazioni scalari. Possiamo quindi concludere che lo spazio delle perturbazioni scalari è due-dimensionale e che quindi scegliendo in modo opportuno ξ^0 e ζ possiamo azzerare due delle quattro ϕ, ψ, E, B. Costruiamo ora finalmente le variabili gauge invarianti (ce ne servono due) sfruttando le leggi di trasformazione delle quattro funzioni che caratterizzano le perturbazioni scalari. Le più semplici combinazioni lineari *gauge-invarianti* di queste quattro funzioni che generano lo spazio due-dimensionale delle perturbazioni sono:

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]'; \qquad \Psi = \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \tag{3.25}$$

È facile verificare che queste variabili sono gauge-invarianti. Vediamolo per la prima a titolo di esempio. Si ha: $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} - \frac{1}{a}[a(\tilde{B} - \tilde{E}')]' =$
$= \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)' - -\frac{1}{a}[B + \zeta' - \xi^0 - E' - \zeta'] = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]' = \Phi$. In particolare abbiamo che se tali variabili assumono il valore zero in un particolare sistema di riferiento lo saranno in tutti. Questo ci dà anche una maniera per distinguere perturbazioni reali e fittizie: se entrambe le variabili Φ e Ψ sono zero allora le perturbazioni sono fittizie e possono essere rimosse.

Aggiungiamo che è facile vedere che è possibile costruire un numero infinito di variabili gauge invarianti dal momento che qualunque combinazione lineare di Φ e Ψ sarà nuovamente una variabile gauge invariante. Vediamo ora che è possibile costruire altre variabili gauge invarianti utili: la variabile gauge invariante che caratterizza le perturbazioni della densità di eneriga:

$$\delta E = \delta\epsilon - \epsilon_0'(B - E'), \tag{3.26}$$

e le variabili gauge invarianti per le perturbazioni della quadrivelocità δu_α. Tenendo a mente che la quadrivelocità per un fluido in un universo omogeneo è $u_\alpha^{(0)} = (a, 0, 0, 0)$ si ha:

$$\delta U_0 = \delta u_0 - [a(B - E')]', \qquad \delta U_i = \delta u_i - a(B - E')_{,i}. \tag{3.27}$$

Vediamo brevemente come ottenere la (3.26). Usiamo la (3.18). Poiché ϵ_0 dipende solo dal tempo, le altre derivate danno zero; inlotre notiamo che possiamo esprimere ξ^0 nel seguente modo $\xi^0 = E' - B$. Dalla (3.18) otteniamo allora subito la prima delle due relazioni. Per ottenere la (3.27) si usa lo stesso procedimento usando però la (3.19).

- *perturbazioni vettoriali.* In questo caso la metrica può essere scritta:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 + 2S_i d\eta\, dx^i - (\delta_{ij} - F_{j,i} - F_{i,j})\, dx^i dx^j\}. \tag{3.28}$$

Imponendo come in precedenza che il quadrintervallo infinitesimo sia invariante sotto le trasformazione di (3.20)-(3.22), si trovano le seguenti leggi di trasformazione:

$$S_i \to \tilde{S}_i = S_i + \xi'_{\perp\, i}, \qquad F_i \to \tilde{F}_i = F_i + \xi_{\perp\, i}, \tag{3.29}$$

è facile capire che allora la variabile:

$$V_i = S_i + F'_i \tag{3.30}$$

è gauge-invariante.

- *perturbazioni tensoriali.* In tal caso la metrica assume la forma:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij})\, dx^i dx^j\}. \tag{3.31}$$

Si trova allora che h_{ij} non cambia sotto trasformazione di coordinate. h_{ij} descrive già onde gravitazionali in maniera gauge invariante.

3.1.3 Sistemi di coordinate

La libertà di gauge permette di introdurre delle condizioni aggiuntive sulle variabili che descrivono le perturbazioni. Nel caso, per noi maggiormente importante, di perturbazioni scalari possiamo usare tale libertà per imporre due condizioni sulle fuzioni $\psi, \phi, E, B, \delta\epsilon$ e sul potenziale per le perturbazioni della velocità $\delta u_{||\, i} = \varphi_{,i}$. Ciò è semplicemente dovuto al fatto che possiamo scegliere liberamente le funzioni ξ^0 e ζ; tale scelta è detta condizione di gauge. Imporre la condizione di gauge è equivalente a scegliere un sistema, o una classe di, sistemi di riferimento. Vediamo ora due scelte di gauge particolarmente utili.

Gauge longitudinale (o Newtoniano conforme). Il gauge longitudinale è definito dalla scelta $B_l = E_l = 0$. È facile vedere, dalle (3.24), che questa scelta fissa in modo univoco il sistema di riferimento. Infatti la condizione $E_l = 0$ impone che si abbia $\zeta = 0$, ma se vale questa condizione allora per avere $B_l = 0$ deve anche essere che $\xi^0 = 0$. Non ci sono quindi altre libertà nella scelte delle coordinate che preservino le condizioni imposte. In questo sistema di riferimento la metrica può essere scritta come (imponendo $B_l = E_l = 0$ nella (3.23)):

$$ds^2 = a^2(\eta)\{(1 + 2\,\phi_l)d\eta^2 - (1 - 2\psi_l)\,\delta_{ij}\, dx^i dx^j\}. \tag{3.32}$$

Notiamo dalle (3.25), (3.26), (3.27) che in questo sistema di riferimento le variabili Φ, Ψ, E e U_α hanno una semplice interpretazione fisica: corrispondono all'ampiezza delle perturbazioni della metrica, della densità di energia e della velocità. In particolare, per quanto riguarda le perturbazioni della metrica, nel gauge longitudinale abbiamo che: $\Phi = \phi_l$ e $\Psi = \psi_l$.

Gauge sincrono. Il sistema di riferimento del gauge sincrono è definito dalla condizione: $\delta g_{0\alpha} = 0$. Queste condizioni corrispondono, come si capisce dalla (3.23), a imporre $\phi_s = 0$ e $B_s = 0$. Con tale condizioni è possibile scegliere come sitema di coordinate un sitema sincrono, che, come è noto è definito dalle condizioni $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$. Possiamo però vedere, con una intuitiva costruzione geometrica, che la scelta di un sistema di coordinate sincrono non è mai univoca. Cioè la scelta di gauge $\phi_s = 0$ e $B_s = 0$, in ogni caso, non fissa in modo univoco il sistema di riferimento. Per vedere questa non univocità si consideri il quadrivettore tangente alle linee di tempo. Le linee di tempo sono le linee di universo tali che $x^1, x^2, x^3 = costante$, allora il quadrivettore tangente $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ avrà come componenti $u^i = 0, u^0 = 1$. Vediamo inoltre che tale quadrivettore soddisfa allora automaticamente l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} u^\beta u^\delta = \Gamma^\alpha_{00} = 0, \tag{3.33}$$

infatti per un sistema sincrono si ha $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$, e in generale possiamo esprimere i simboli di Christoffell in funzione del tensore metrico come: $\Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} \right)$, per cui si ha che $\Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{00} = \Gamma^\alpha_{00} = 0$. Possiamo quindi affermare che in un sistema sincrono le linee di tempo sono le geodetiche dello spazio quadridimensionale. Queste geodetiche sono anche normali alle ipersuperfici con $t = costante$. Tali superfici sono descritte implicitamente dall'equazione $t - costante = 0$ e dunque il vettore normale a tali ipersuperfici si esprime come il gradiente: $n_\alpha = \partial t / \partial x^\alpha$. Abbiamo quindi $n_i = 0$ e $n_0 = 0$, e dunque $n^i = 0$ e $n^0 = 1$. Quindi il vettore normale alle ipersuperfci con $t = costante$ coincide con il quadrivettore u^α tangente alle linee di tempo. Possiamo ora usare questo fatto geometrico per costruire un sistema sincrono e vedere che tale costruzione non è univoca. Cominciamo allora con lo scegliere una ipersuperficie la cui normale coincide con la direzione temporale, una superficie così fatta è detta del *genere spazio*. Prendo ora la famiglia di geodetiche normali all'ipersuficie del genere spazio scelta e uso queste come nuove linee del tempo e come coordinata temporale il parametro t che ne descrive la lunghezza a partire dall'ipersuperficie. Quello che si ottiene è un sistema sincrono ma è chiaro che tale costruzione non è univoca: è possibile infatti scegliere qualunque superficie del genere spazio come ipersuperficie iniziale.

Notiamo infine un fatto importante. Una volta che la soluzione delle equazioni che descrivono le perturbazioni è nota in termini delle variabili gauge-invarianti (Ψ, Φ per esempio), o equivalentemente nel Newtoniano conforme, è possibile trovare la soluzione nel gauge sincrono senza risolvere nuovamente le equazioni di

Einstein. Infatti dalla definizione (3.25) di Ψ e Φ si ha che nel gauge sincrono, imponendo dunque $\phi_s = 0$ e $B_s = 0$ nelle (3.25), valgono le seguenti equazioni:

$$\Phi = \frac{1}{a}\,[a\,E_s']' \qquad \Psi = \psi_s - \frac{a'}{a}\,E_s'. \tag{3.34}$$

Da queste è possibile trovare le espressioni di E_s, ψ_s in termini di Φ e Ψ:

$$E_s = \int \frac{1}{a}\left(\int^{\eta} a\Phi d\tilde{\eta}\right) d\eta, \quad \psi_s = \Psi + \frac{a'}{a^2}\int a\Phi d\eta. \tag{3.35}$$

Da queste espressioni, ricordando che $E = \delta\epsilon - \epsilon_0'(B - E')$ e imponendo $\phi = 0$ e $B = 0$, otteniamo che l'espressione della pertubazione della densità di energia nel gauge sincrono è:

$$\delta\epsilon_s = E - \frac{\epsilon_0'}{a}\int a\Phi d\eta. \tag{3.36}$$

3.2 Le equazioni per le perturbazioni cosmologiche

Mentre nella teoria Newtoniana le equazioni per le pertubazioni sono state ottenute linearizzando le equazioni idrodinamiche, che sono equazioni fondamentalmente della fisica classica, le equazioni per le perturbazioni cosmologiche in Relatività Generale dovranno essere ottenute linearizzando le equazioni di campo di Einstein attorno alla soluzione di Friedman. Le equazioni di campo di Einstein sono:

$$G^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}R = 8\pi G T^{\alpha}_{\beta}. \tag{3.37}$$

Considerando la metrica di Friedman $g^{(0)}_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta} = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij}\,dx^i dx^j)$, è facile calcolare il tensione di Einstein G^{α}_{β}. Il calcolo diretto porta a:

$$^{(0)}G^0_0 = \frac{3\mathcal{H}^2}{a^2}, \quad ^{(0)}G^0_i = 0, \quad ^{(0)}G^i_j = \frac{1}{a^2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta_{ij}, \tag{3.38}$$

dove $\mathcal{H} = a'/a = \dot{a}$, nel seguito con $\mathcal{H}$ si indicherà sempre questa quantità. Tali espressioni sono state ricavate mediante le formule:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial\Gamma^{\delta}_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\delta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \tag{3.39}$$

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta},$$

per la formula per i simboli di Christoffell si veda la discussione del gauge sincrono.

Guardando le (3.38) è allora chiaro che il tensore energia-impulso $^{(0)}T^{\alpha}_{\beta}$ deve avere le seguenti proprietà:

$$ ^{(0)}T^0_0 = 0, \qquad ^{(0)}T^i_j \propto \delta_{ij}. \tag{3.40} $$

Il tensore di Einstein per piccole perturbazioni della metrica può essere scritto come:

$$ G_{\alpha\beta} =^{(0)} G_{\alpha\beta} + \delta G_{\alpha\beta} + ..., \tag{3.41} $$

dove $\delta G_{\alpha\beta}$ indica le perturbazioni del tensore di Einstein indotte dai termini *lineari nelle perturbazioni metriche*. Il tensore energia-impulso può essere decomposto in modo analogo al tensore di Einstein, e in questo modo si ottengono le equazioni linearizzate per le perturbazioni:

$$ \delta G^\alpha_\beta = 8\pi G \delta T^\alpha_\beta. \tag{3.42} $$

In queste equazioni però le grandezze δG^α_β e δT^α_β non sono gauge-invarianti. Questo significa che tali equazioni non sono invarianti per trasformazioni infinitesime del tipo (3.14). Tuttavia è possibile costruire le corrispondenti variabili gauge-invarianti in modo analogo per come abbiamo fatto nelle (3.25), (3.26) e (3.27). In particolare è possibile costruire le leggi di trasformazione per le perturbazioni per $\delta G^\alpha_\beta, \delta T^\alpha_\beta$ in modo del tutto simile a quanto fatto nella (3.17). Si può allora facilmente verificare che le seguenti sono gauge- invarianti:

$$ \begin{gathered} \overline{\delta T^0_0} = \delta^{(0)}T^0_0 - (^{(0)}T^0_0)'(B - E'), \\ \overline{\delta T^0_i} = \delta^{(0)}T^0_i - (^{(0)}T^0_i -^{(0)} T^k_k/3)(B - E')_{,i}, \\ \overline{\delta T^i_j} = \delta^{(0)}T^i_j - (^{(0)}T^i_j)'(B - E'), \end{gathered} \tag{3.43} $$

in modo analogo è possibile anche costruire le variabili gauge invarianti associate alle perturbazioni del tensore di Einstein ottendendo per questo ovviamente delle relazioni identiche alle precedenti:

$$ \begin{gathered} \overline{\delta G^0_0} = \delta^{(0)}G^0_0 - (^{(0)}G^0_0)'(B - E'), \\ \overline{\delta G^0_i} = \delta^{(0)}G^0_i - (^{(0)}G^0_i -^{(0)} G^k_k/3)(B - E')_{,i}, \\ \overline{\delta G^i_j} = \delta^{(0)}G^i_j - (^{(0)}G^i_j)'(B - E'). \end{gathered} \tag{3.44} $$

Possiamo quindi riscrivere le (3.42) in termini di grandezze gauge invarianti:

$$ \overline{\delta G^\alpha_\beta} = 8\pi G\, \overline{\delta T^\alpha_\beta}. \tag{3.45} $$

Notiamo esplicitamente che i teoremi visti per la decomposizione delle perturbazioni metriche sono validi anche per il tensore $\delta T^{\alpha}_{\beta}$. Tale tensore può quindi essere decomposto nelle sue parti scalari, vettoriali e tensoriali. Studiamo il caso delle perturbazioni scalari che è quello più interessante per quanto riguarda la formazione delle strutture anisotrope dell'universo. Per trovare le equazioni che descrivono le perturbazioni scalari dobbiamo esprimere la (3.45) scrivendone il lato sinistro in termini delle pertubazioni scalari. In particolare la grandezza $\overline{\delta G^{\alpha}_{\beta}}$ dipende dalle perturbazioni della metrica. Quindi, limitandosi al caso delle perturbazioni scalari, è possibile scrivere questa grandezza in termini delle varibili gauge invarianti Φ e Ψ. Il calcolo diretto (che è molto macchinoso) di $\overline{\delta G^{\alpha}_{\beta}}$ per la metrica con perturbazioni scalari (3.23) fornisce le seguenti equazioni:

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta T^0_0} \tag{3.46}$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Psi)_{,i} = 4\pi G a^2 \overline{\delta T^0_i} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}[\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi)]\delta_{ij} - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,ij} = \\ = -4\pi G a^2 \overline{\delta T^i_j}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Notiamo che tali equazioni sono state ricavate senza imporre un gauge e sono pertanto del tutto generali, e *valide per ogni sistema di riferimento.* Per avere la forma esplicita di queste equazioni in un sistema di riferimento è necessario esprimere le variabili gauge-invarianti in termini delle perturbazioni, per il gauge sincrono si userranno ad esempio le (3.34).

3.3 Perurbazioni idrodinamiche

Dalle (3.46)-(3.48) osserviamo che le perturbazioni metriche sono generate dalle perturbazioni del tensore energia-impulso. Per essere precisi dalle variabili gauge-invaranti che descrivono tali perturbazioni. È necessario dunque trovare una forma esplicita per tali variabili.

Il fluido cosmico può essere approssimato con un fluido perfetto. Costruiamo innanzi tutto il tensore energia impulso per tale tipo fluido. È facile scrivere il tensore energia impulso nel sistema comovente. Abbiamo infatti che la componente T^{00} è come sempre la densità di energia del fluido, le componenti T^{0i}, che rappresentano la densità di impulso, devono essere zero nel sistema comovente; mentre la parte rimanente può essere scritta come $T^{ij} = p\delta^{ij}$. In definitiva abbiamo che per un fluido perfetto nel sistema comovente il tensore energia impulso è:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Possiamo ora facilmente trovare l'espressione del tensore energia-impulso in un generico sistema di riferimento. L'espressione generica di $T^{\alpha\beta}$ deve essere presa in modo che nel sistema comovente tale tensore torni ad assumere la forma precedente. Ricordando che la quadrivelocità nel sistema comovente è $u_\alpha = (a, 0, 0, 0)$, è facile verificare che la forma cercata è:

$$T^\alpha_\beta = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta^\alpha_\beta. \tag{3.49}$$

Più formalmente è possibile trovare la forma (3.49) del tensore energia-impulso effettuando una trasformazione di lorentz per una velocità arbitraria sul tensore $\tilde{T}^{\alpha\beta}$. Considerando le perturbazioni del tensore (3.49) è facile rendersi conto che in questo caso le perturbazioni gauge invarianti sono:

$$\overline{T^0_0} = \overline{\delta\epsilon}, \quad \overline{T^0_i} = \frac{1}{a}(\epsilon_0 + p_0)(\overline{\delta u_{||\,i}} + \delta u_{\perp\,i}), \quad \overline{T^i_j} = -\overline{\delta p}\delta^i_j. \tag{3.50}$$

Tutti i termini hanno la struttura di perturbazioni scalari, tranne quello proporzionale a $\delta u_{\perp\,i}$ che ha la struttura di perturbazione vettoriale (si ricordi la decomposizione di Helmoltz, che vale anche per il campo delle velocità).

3.3.1 Perturbazioni scalari

Come si vede dalle equazioni precedenti, si ha che se $i \neq j$ allora $\delta T^i_j = 0$. Imponendo questa condizione nella (3.48) abbiamo che questa si riduce alla seguente equazione:

$$(\Phi - \Psi)_{,ij} = 0 \qquad (i \neq j), \tag{3.51}$$

dalla quale concludiamo che deve essere $\Phi = \Psi$. Facendo ora questa sostituzione nelle (3.46)-(3.48) si ottiene:

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta\epsilon} \tag{3.52}$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2(\epsilon_0 + p_0)\overline{\delta u_{||\,i}} \tag{3.53}$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta p}. \tag{3.54}$$

Analizziamo un attimo la prima equazione. In un universo non in espenasione si ha che $\mathcal{H} = 0$, e imponendo nella prima di queste equazioni (la (3.52)) tale condizione abbiamo che questa coincide con l'equazione di Poisson per il potenziale gravitrazionale. Inoltre, anche in un universo in espansione, abbiamo che il secondo e il terzo termine a sinistra dell'equazione possono essere trascurati. Possiamo allora dire che l'equazione (3.52) è una generalzzazione dell'equazione di Poisson, e dunque si può pensare che Φ sia la generalizzazione del potenziale gravitazionale Newtoniano.

Come fatto in precedenza, scriviamo la perturbazione gauge-invariante della pressione come:

$$\delta\overline{p} = c_s^2 \delta\overline{\epsilon} + \tau \delta S. \tag{3.55}$$

Inserendo ora questa relazione nella (3.54) e usando la (3.52) per esprimere il termine $\pi G a^2 \overline{\delta\epsilon}$, si ottiene la seguente equazione:

$$\boxed{\Phi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Phi' - c_s^2 \Delta\Phi + \left(2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S.} \tag{3.56}$$

Vediamo la soluzioni della (2.56) in un caso particolare nel quale la soluzione risulta particolarmente semplice:

- fluido cosmico non relativistico, materia con equazione di stato $p = 0$.

Studiamo allora il caso di <u>*materia non relativistica*</u>.

In un universo piatto in cui si ha predominanza di materia si ha che il raggio in curvatura è proporzionale al quadrato del tempo conforme, in simboli $a \propto \eta^2$. Ricordiamo infatti che con predominanza di materia si ha $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, da cui è facile (ricordando la relazione $\eta = \int \frac{dt}{a}$) vedere che $\eta \propto t^{\frac{1}{3}}$. Da quest'ultima relazione segue subito la relazione cercata. Inoltre ricordando che abbiamo posto $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$, abbiamo anche che $\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$. Vediamo ora che forma assume la (3.56). Ponendo $\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$ nella (3.54) questa diventa:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta} + \left(-\frac{4}{\eta^2} + \frac{4}{\eta^2}\right)\Phi = \Phi'' + \frac{6}{\eta} = 4\pi G a^2 c_s^2 \delta\overline{\epsilon} + 4\pi G a^2 \tau \delta S.$$

Ma poichè stiamo considerando materia non relativistica, per cui si ha $p = 0$, abbiamo che:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_S = 0 \qquad \tau = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\epsilon = 0.$$

Otteniamo dunque che indefinitiva l'equazione (3.54) diventa:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0. \tag{3.57}$$

Una soluzione ovvia di questa equazione è allora:

$$\Phi = C_1(x) + \frac{C_2(x)}{\eta^5}. \tag{3.58}$$

Consideriamo ora l'equazione (3.52) dalla quale possiamo ora derivare un'espressione per la perturbazione della densità di energia gauge invariante $\delta\bar{\epsilon}$. Sostiuiamo nella (3.52) la (3.58) e la relazione $\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$, si ottiene allora:

$$\Delta C_1 + \frac{\Delta C_2(x)}{\eta^5} - \frac{6}{\eta}\left(-5\,\frac{C_2(x)}{\eta^6} + \frac{2}{\eta}\,C_1 + 2\,\frac{C_2(x)}{\eta^6}\right) = \Delta C_1 + \frac{\Delta C_2(x)}{\eta^5} -$$

$$-\frac{6}{\eta}\left(-3\,\frac{C_2(x)}{\eta^6} + \frac{2}{\eta}\,C_1\right) = 4\pi G a^2 c_s^2 \delta\bar{\epsilon},$$

svolgendo il prodotto e ricordando anche $a \propto \eta^2$, abbiamo che:

$$\left(\Delta C_1 - \frac{12}{\eta^2}\,C_1\right) + \left(\frac{\Delta C_2(x)}{\eta^5} + 18\,\frac{C_2(x)}{\eta^7}\right) = 4\pi G a^2 \delta\bar{\epsilon} = 4\pi G \eta^4 \delta\bar{\epsilon}.$$

L'equazione di Friedmann per un universo piatto ($\lambda = 0$) si può scrivere usando la relazione $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$, come $\frac{3\mathcal{H}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{H}\epsilon_0$. Da questa è facile ottenere un'espressione per ϵ_0 tenendo a mente che $\mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$. Si ottiene che: $\epsilon_0 = \frac{3}{2\pi G\eta^6}$. Moltiplicando l'ultima equazione a destra per $\frac{2\pi G\eta^6}{3}$ e a sinistra per $\frac{1}{\epsilon_0}$ otteniamo che:

$$\frac{\eta^2}{6}\left(\Delta C_1 - \frac{12}{\eta}\,C_1\right) + \left(\frac{\Delta C_2(x)}{\eta^5} + 18\,\frac{C_2(x)}{\eta^7}\right) = \frac{\delta\bar{\epsilon}}{\epsilon_0},$$

dalla quale immediatamente otteniamo la relazione cercata:

$$\frac{\delta\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{1}{6}\left[(\Delta C_1\,\eta^2 - 12C_1) + (\Delta C_2\,\eta^2 + 18C_2)\,\frac{1}{\eta^5}\right]. \tag{3.59}$$

Notiamo da questa equazione che c'è un solo modo non decrescente, C_1. Come sempre il comportamento delle perturbazioni dipende in modo cruciale dalla scala della perturbazione. Per facilitare i conti consideriamo una perturbazine con la struttura di onda piana e con numero d'onda comovente k: $C_{1,2} = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$. Cominciamo a studiare il caso: $k\eta \ll 1$. Innanazi tutto notiamo che questa condizione equivale a chiedere che la scala fisica $\lambda_{ph} \sim a/k$ sia più grande del raggio di Hubble $\mathcal{H}^{-1} \sim a\eta$, cioè $\lambda_{ph} \sim a/k \gg \mathcal{H}^{-1} \sim a\eta$. Poichè abbiamo $k\eta \ll 1$ la (3.59) all'ordine principale diventa:

$$\frac{\delta\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \simeq -2C_1 + 3C_2\,\frac{1}{\eta^5}, \tag{3.60}$$

da questa ultima equazione, trascurando il termine $\propto \frac{1}{\eta^5}$ che va a zero, possiamo scrivere che:

$$\frac{\delta\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \simeq -2\Phi. \tag{3.61}$$

Consideriamo ora il caso di perturbazine con piccola lunghezza d'onda: $k\eta \gg 1$. In questo caso è facile vedere che, ricordando la forma ipotizzata della perturbazione, la (3.59) all'ordine principale diventa:

$$\frac{\delta\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \simeq -\frac{k^2}{6}(C_1\,\eta^2 + C_2\,\eta^{-3}) = \tilde{C}_1\,t^{2/3} + \tilde{C}_2\,t^{-1}, \tag{3.62}$$

come ci si poteva aspettare nelle ipotesi che la perturbazione abbia una piccola lunghezza d'onda e la materia sia non relativistica si riottiene un risultato in perfetto accordo con la teoria Newtoniana (si veda la (2.49)).

Concludiamo esaminando le perturbazioni vettoriali che possono essere studiate con facilità. Infatti è facile vedere le leggi di smorzamento di tali tipi di perturbazioni senza fare calcoli dettagliati, ma sfruttando invece delle semplici considerazioni fisiche.

Prendiamo una piccola regione piena di materia con dimensione lineare l. Se in tale regione ha luogo una perturbazione vettoriale con velocità δv, abbiamo allora che il momento angolare di questa regione sarà $\sim \frac{\epsilon}{c^2}\,l^3\cdot l\cdot v \approx m\,l\,v$. Ricordando ora che in un universo il espansione si ha che l cresce proporzionalmente ad a, mentre $\epsilon \propto a^{-3}$ (nel caso in cui p=0). Allora, in virtù della conservazione del momento angolare si ha:

$$\delta v \sim \frac{1}{a} \qquad (p = 0). \tag{3.63}$$

Si può studiare in questo modo anche il comportamento delle perturbazioni vettoriali nel caso di materia altamente relativistica, con equazione di stato $p = \frac{\epsilon}{3}$. In questo caso si ha allora a^{-4}, e allora, sempre per la conservazione del momento angolare si ha

$$\delta v = costante \qquad (p = \frac{\epsilon}{3}). \tag{3.64}$$

Capitolo 4

Conclusioni

In questo capitolo conclusivo riassumiamo quanto fatto e cerchiamo di fare il punto su quanto esposto. Nel primo capitolo abbiamo esposto le caratteristiche generali del modello cosmologico omogeneo e isotropo. In particolare imponendo le simmetrie di omogeneità e isotropia dello spazio abbiamo determinato, a meno di una costante, la metrica di questa tipologia di spazi. Tale costante è chiamata costante di curvatura. Inoltre abbiamo determinato l'equazione di Friedmann, che descrive proprio la costante di curvatura di questo tipo di spazi e come questa evolva nel tempo. Ci siamo quindi soffermati con maggiore attenzione sul modello isotropo chiuso, caratterizzato dal'avere costante di curvatura λ positiva. Dopodiché dall'equazione di continuità, ipotizzando diverse equazioni di stato per la materia, abbiamo ricavato le ralazioni di proporzionalità tra la densità di energia ϵ è il raggio di curvatura a. Infine abbiamo trovato, sfruttando l'equazione di Fredmann e le precedenti relazioni, l'andamento del raggio di curvatura a col tempo per diverse composizioni del fluido cosmico.

Nel capitolo successivo, dopo aver studiato il background per le perturbazioni, si svolge lo studio dell'instabilità gravitazionale nel caso di una teoria Newtoniana. Abbiamo quindi cominciato introducendo le equazioni fondamentali per descrivere un fluido (non relativistico), dalle quali abbiamo estratto le equazioni per le perturbazioni della distribuzione di massa. Le equazioni imperturbate usate sono le equazioni di Eulero (non relativistica), l'equazione di continuità, la conservazione dell'entropia e l'equazione di Poisson per determinare il potenziale gravitazionale. Dopodiché abbiamo ricavato le equazioni che descrivono le perturbazioni dei campi che caratterizzano il fluido, $\phi, S, \epsilon, \mathbf{V}$, in approssimazione lineare ipotizzando un universo non in espanzione (teoria di Jeans). Abbiamo dunque ipotizzato che la densità di energia ϵ fosse una costante e, ipotizzando delle perturbazioni lineari in $\phi, S, \epsilon, \mathbf{V}$ e inserendo tali espressioni nelle equazioni che descrivono il fluido, abbiamo ottenuto (tenendo solamente i termini lineari nelle perturbazioni) delle equazioni lineari che descrivono appunto le perturbazioni al fluido in approssimazione lineare. Queste equazioni sono poi state riarrangiate in una equazione per la perturbazione della distribuzione di massa (la (2.11)) che è stata risolta distinguendo varie tipologie di perturbazioni. La soluzione più significativa è quelle che descrive un crescita esponenziale dell'ampiezza di una perturbazione adiabatica, la (2.37). Dopo di ciò abbiamo ripetuto dei calcoli analoghi per una situazione fisicamente più significativa, considerando cioè che l'universo sia in espansione. Utilizzando l'universo di Friedmann come background abbiamo quindi ipotizzato ora che la densià di energia ϵ variasse solo col tempo e che le le velocità di backgound seguissero la legge di Hubble. In modo analogo a prima, anche se tecnicamente più complesso, abbiamo ottenuto un'equazione che descrive le perturbazioni lineari nella distribuzione di massa. In questo caso la soluzione non decrescente che può portare alla formazione di strutture anistrope va come una potenza del tempo e non come un esponenziale, si veda la (2.40). Infine abbiamo considerato soluzioni che potessero essere valide anche oltre l'approssimazione lineare e che potessero quindi descrivere in modo più accurato l'evoluzione di una perturbazione con ampiezza crescente. Per questo scopo abbiamo presentato la soluzione di Zel'dovich, la quale suggerisce la classificazione delle tipologie di strutture che si possono formare dai collassi dovuti a perturbazioni crescenti nel tempo: strutture tre, due e uno-dimensionali a seconda della relazione tra gli autovalori del tensore degli sforzi (2.80).

Infine nel terzo capitolo abbiamo studiato la teoria per le perturbazioni lineari in Relatività Generale. Lo studio dell'instabilità gravitazionale, in questo caso ci siamo limitati solo alle perturbazioni lineari, si complica notevolmente nell'ambito della Relatività Generale. In particolare è noto che a causa della libertà di scelta delle coordinate è possibile vedere dei fenomeni che sono in realtà legati alle coordinate e non sono "fisici". Per ovviare a questo problema abbiamo studiato sia le perturbazioni della metrica che le perturbazioni della sorgente di campo gravitazionale e introdotto delle variabili gauge invarianti (la libertà di gauge è in Relatività Generale dovuta alla possibilità di effettuare qualunque trasformazione di coordinate). Inizialmente abbiamo allora classificato le perturbazioni della metrica in base alle proprietà di simmetria. Abbiamo poi trovato la forma della trasformazioni di gauge sulle perturbazioni del tensore metrico e costruito le variabili gauge invarianti per ogni tipologia di perturbazione. Dopodiché abbiamo linearizzato le equazioni di Einstein scrivendo le espansioni perturbative del tensore di Einstein e del tensore energia-impulso e tenendo solo i termini lineari nelle perturbazioni metriche. Dopo di ciò abbiamo riscritto le equazioni di Einstein linearizzate attraverso le variabili gauge invarianti. Infine abbiamo ricavato un'equazione per le perturbazioni scalari della metrica e l'abbiamo risolta per un caso significativo, cioè quello con materia non relativistica. In definitiva notiamo che l'analisi dell'instabilità gravitazionale in Relatività Generale è ben più complessa e i risultati sono di più difficile interpretazione.

Inoltre sarebbe interessante completare i risultati del presente lavoro con uno studio accurato della teoria dell'inflazionaria. Nell'ambito della cosmologia quantistica si riesce infatti a predirre uno spettro per le disomogeneirà iniziali nella distribuzione di massa, che nel presente lavoro è stato preso come dato, che può essere fatto allora evolvere con la teoria esposta e che quindi potrebbe dare una conferma della validità dell'ipotesi inflattiva.

Bibliografia

[1] Mukhanov V., *Physical Foundation of cosmology*, Cambridge university press (2005);

[2] Coles P., LUcchin F., *Cosmology, the origin and evolution of cosmic structure*, John Wiley and sons, LTD;

[3] Landau Lev D., Lifsits Evgenij M., *Fisica teorica 2 - Teoria dei campi*, Editori Riuniti university press (2010);

[4] Straumann N., *Proof of a decomposition theorem for symmetric tensor on space with constant curvature*, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zurich, Switzerland, May 28, 2018;

[5] Weinberg S., *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and sons, LTD;

[6] Bertschinger E., *Cosmological dynamics*, arXiv:astro-ph/9503125, 1993;