

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# QUANTIZZAZIONE CANONICA DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

Relatore:  
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:  
Lorenzo Celiberti

Anno Accademico 2017/2018

## Sommario

Si mostra il tentativo di costruzione di una teoria quantistica del campo gravitazionale attraverso il metodo di Dirac come originariamente presentato da DeWitt nel 1967. A tal fine, si discutono i sistemi hamiltoniani vincolati e in particolare quelli generalmente covarianti, per le analogie formali che questi presentano con la Relatività Generale. Il programma di quantizzazione è presentato dopo aver introdotto il formalismo geometrico che permette di scrivere l'azione ADM del campo gravitazionale, la quale costituisce il punto di partenza per lo sviluppo della teoria quantistica. Enfasi particolare è posta sul problema del tempo e sul ruolo della covarianza generale.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>Notazione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Sistemi generalmente covarianti</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemi hamiltoniani vincolati . . . . .	3
1.2 Vincoli di prima classe e trasformazioni di gauge . . . . .	6
1.3 Vincoli di seconda classe e parentesi di Dirac . . . . .	8
1.4 Sistemi generalmente covarianti . . . . .	10
1.5 Quantizzazione dei sistemi vincolati . . . . .	11
1.6 Teorie di campo parametrizzate . . . . .	13
<b>2 Formulazione hamiltoniana della Relatività Generale</b>	<b>17</b>
2.1 Azione di Hilbert-Einstein . . . . .	17
2.2 Ipersuperfici e curvatures . . . . .	21
2.3 Foliazioni . . . . .	28
2.4 Formalismo ADM . . . . .	30
2.5 Definizione dell'energia . . . . .	34
<b>3 Geometrodinamica quantistica</b>	<b>37</b>
3.1 Il programma di quantizzazione canonica . . . . .	37
3.2 Il problema del tempo . . . . .	42
3.3 L'equazione di Wheeler-DeWitt . . . . .	43
3.4 Minisuperspazio dell'universo di Friedman . . . . .	45
3.5 Osservabili parziali . . . . .	50
<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>

# Introduzione

La ricerca di una teoria quantistica della gravità trova le sue ragioni essenzialmente in tre punti: unificazione, singolarità e problema del tempo. Poiché qui non si avrà modo di discuterne, si rimanda a [14] per un'introduzione al problema delle singolarità e della necessità di una teoria quantistica nella loro descrizione.

La richiesta di una teoria unificata, invece, deriva dal fatto che lo sviluppo della teoria quantistica dei campi e della Relatività Generale ha portato ad una descrizione delle interazioni fondamentali della natura costruita con un duplice linguaggio: da un lato si hanno i campi quantizzati su un background spaziotemporale fisso, dall'altro si ha un campo classico indipendente dal background. Il programma riduzionista che si è rivelato particolarmente fruttuoso nella fisica degli ultimi due secoli, conduce, in modo del tutto naturale, alla ricerca di una teoria unica, capace di descrivere tutti gli elementi che si presume descrivano la natura al livello fondamentale.

È importante sottolineare che la differenza tra le due teorie non consiste solo nell'introduzione del carattere intrinsecamente probabilistico delle previsioni di una teoria quantistica, ma anche nelle relazioni che tali previsioni hanno con la struttura dello spaziotempo. Le maggiori difficoltà per lo sviluppo di una teoria coerente della gravità quantistica, infatti, emergono proprio a causa di tale incompatibilità. Oltre alle difficoltà tecniche, derivanti dal fatto che la teoria della Relatività Generale possa essere vista come una teoria di gauge rispetto al gruppo infinito-dimensionale  $\text{Diff}(M)$  dei diffeomorfismi dello spaziotempo, il ruolo del background costituisce uno scoglio ben più insidioso al livello concettuale. Nel suo senso più generale, il problema del tempo costituisce l'istanza, prima di tutto interpretativa, della difficoltà che si incontra quando si tenta di definire il ruolo dello spaziotempo nel contesto di una teoria di gravità quantistica. I numerosi approcci volti alla risoluzione di tale problema, dei quali si può trovare una rassegna in [13], possono essere raggruppati sotto tre categorie descritte in sezione 3.2. Nonostante la numerosa letteratura, nel presente scritto, è stata rivolta attenzione (vedi sezione 3.5) principalmente alla proposta di Rovelli [21–24]. Benché per certi aspetti più radicale di altre proposte, come l'identificazione di un tempo estrinseco prima della quantizzazione nel modello di minisuperspazio presentato in sezione 3.4; l'introduzione del concetto di osservabile parziale e della formulazione covariante della meccanica quantistica di Rovelli risolve la contraddizione, fornendo uno schema interpretativo si-

stematicamente implementato nella LQG (*Loop Quantum Gravity*), che oggi risulta uno dei maggiori candidati come teoria quantistica della gravità.

Si descrive la geometrodinamica quantistica (vedi Capitolo 3), intesa come la teoria quantistica della gravità costruita a partire dalla teoria classica della Relatività Generale, utilizzando il metodo di Dirac descritto nel Capitolo 1. In particolare si fa uso della rappresentazione di Wheeler, in cui gli stati del campo gravitazionale sono codificati da funzionali d'onda della parte puramente spaziale della metrica, come presentato da DeWitt in [7]. Altre possibili rappresentazioni sono attraverso le variabili di connessione di Ashtekar [3] e i loop di Wilson della LQG [22], per una descrizione delle quali si rimanda ai riferimenti citati. Il Capitolo 2 è volto alla formulazione hamiltoniana della Relatività Generale, la quale costituisce il punto di partenza di ogni approccio canonico<sup>1</sup> alla quantizzazione del campo gravitazionale.

---

<sup>1</sup> Ovvero facente uso del metodo di quantizzazione di Dirac.

# Notazione e convenzioni

- Si adottano le unità di misura geometrizzate in cui la velocità della luce nel vuoto e la costante di Newton sono poste uguali a uno,  $c = G_N = 1$ .
- La metrica di Minkowski è scelta con la convenzione  $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .
- Gli indici rappresentati da lettere greche prendono valori  $\mu = 0, 1, 2, 3$  mentre quelli latini  $i = 1, 2, 3$ .
- Si adotta la convenzione di Einstein secondo cui le sommatorie sugli indici ripetuti vengono omesse.
- Le derivate parziali rispetto alle coordinate  $x^\alpha$  vengono indicate attraverso una virgola, ad esempio

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \equiv g_{\mu\nu,\alpha}.$$

La derivata covariante  $\nabla_\alpha$  rispetto alla connessione dello spaziotempo è invece indicata attraverso un punto e virgola, per cui  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu;\alpha}$ .

- Le densità tensoriali vengono indicate con caratteri gotici, ad esempio  $\mathfrak{g}_{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g_{\mu\nu}$ .
- Le parentesi tonde che racchiudono degli indici rappresentano la simmetrizzazione rispetto tali indici, le quadre invece l'antisimmetrizzazione. Ad esempio

$$A_{\alpha(\beta\gamma)} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\gamma\beta}),$$
$$A_{\alpha[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma\beta}).$$

# Capitolo 1

## Sistemi generalmente covarianti

Nel suo tentativo di estendere il principio di relatività a sistemi di riferimento arbitrari, Einstein fu indotto a cercare leggi fisiche in forma generalmente covariante, ovvero leggi che siano espresse dalle stesse relazioni tra grandezze fisiche in sistemi di riferimento legati da trasformazioni generiche

$$x^\mu \rightarrow \xi^\mu = \xi^\mu(x^\alpha),$$

dove le nuove coordinate  $\xi^\mu$  sono funzioni non singolari delle coordinate di partenza  $x^\mu$ .

Questo fu un punto particolarmente sottile nello sviluppo della Relatività Generale su cui Einstein lavorò a lungo tra il 1913 e il 1915. Inoltre, a partire dall'obiezione di Kretschmann nel 1917, subito dopo la pubblicazione della presentazione conclusiva della teoria [9], il dibattito sul principio di covarianza generale si è protratto negli anni e rimane tutt'oggi aperto. Si rinvia a [19] per un'introduzione di carattere principalmente storico al problema.

Dal punto di vista fisico, per comprendere le possibili conseguenze dell'utilizzo di un formalismo generalmente covariante sullo sviluppo di una teoria e le implicazioni a livello interpretativo, è utile ripercorrere il ragionamento dovuto ad Einstein noto come "argomento del buco".

Supponiamo di avere una regione di spaziotempo  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  in cui il tensore energia-impulso è nullo e che esista una trasformazione di coordinate  $x' = \phi(x)$ , sufficientemente regolare, tale che le nuove coordinate  $x'$  coincidano con le coordinate originarie fuori da  $\mathcal{B}$  e differiscano al suo interno. Se le equazioni della teoria sono generalmente covarianti allora  $g(x)$  e  $g'(x')$  sono entrambe soluzioni delle equazioni di campo. Tuttavia la mappa  $\phi$  permette di definire un nuovo campo  $\tilde{g}$ , diverso da  $g$ , tale che

$$\tilde{g}(x) = g'(x).$$

Il campo  $\tilde{g}$  è ancora soluzione dell'equazione di campo; in particolare è una soluzione che differisce da  $g$  solo all'interno del "buco"  $\mathcal{B}$ . In uno spaziotempo generalmente iperbolico

(vedi Capitolo 2), in cui è ben definito il problema di Cauchy per l'equazione di campo, ciò costituisce una contraddizione. Se infatti consideriamo un'ipersuperficie dei dati iniziali esterna al buco  $\mathcal{B}$ , i due campi  $g$  e  $\tilde{g}$  si troveranno in stati differenti al suo interno, benché siano evoluti a partire dallo stesso stato iniziale (come è rappresentato schematicamente in Figura 1.1).

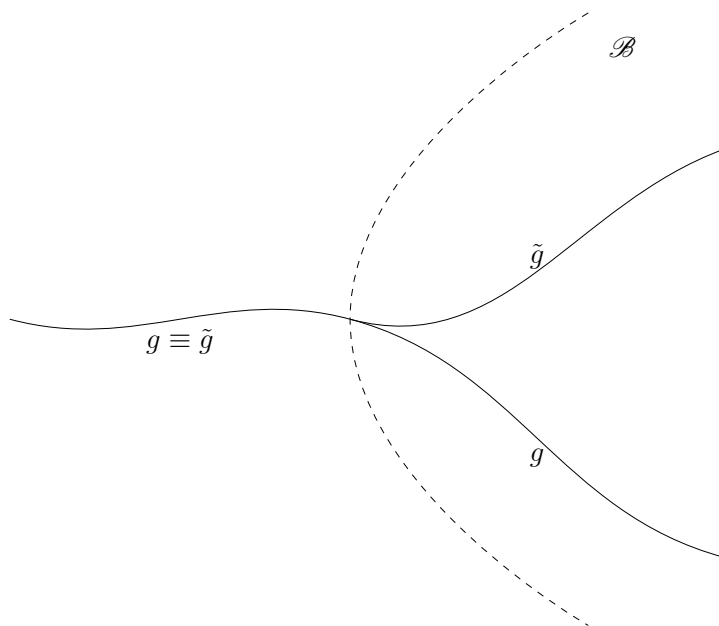


Figura 1.1: I tensori  $g$  e  $\tilde{g}$  differiscono all'interno del buco  $\mathcal{B}$ , nonostante coincidano sull'ipersuperficie dei dati iniziali.

Tale conclusione condusse Einstein nella ricerca di una teoria del campo gravitazionale che non fosse generalmente covariante, tuttavia senza alcun risultato. La soluzione, raggiunta nel 1915, fu quella di interpretare i punti dello spaziotempo come *coincidenze spaziotemporali*: per individuare un evento è necessario avere quantomeno due punti materiali le cui geodetiche si intersecano. A differenza della fisica classica e della teoria quantistica, in una teoria generalmente covariante come la Relatività Generale non è possibile eliminare tutti i campi di materia e, al contempo, avere informazioni sulla struttura dello spaziotempo. In questo senso si parla di indipendenza dal background della teoria.

Seguendo tale ragionamento è possibile vedere che la covarianza generale non conduce più ad una contraddizione [22] ed è dunque possibile avere una teoria consistente e covariante rispetto a trasformazioni generali di coordinate. Inoltre, il secondo teorema di Noether [18] implica che le equazioni dinamiche della teoria non siano tutte indipendenti. Nel formalismo Hamiltoniano, ciò si traduce nella presenza di relazioni tra coordinate e impulsi canonici che vincolano il sistema ad una sottovarietà dello spazio delle fasi. Ri-



sulta dunque utile studiare in generale sistemi vincolati e sistemi generalmente covarianti prima di affrontare la Relatività Generale.

## 1.1 Sistemi hamiltoniani vincolati

Consideriamo un sistema fisico che, per semplicità, abbia un numero finito di gradi di libertà e che sia descritto dall'azione

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}). \quad (1.1.1)$$

Le equazioni del moto sono ottenute imponendo che  $\delta S = 0$  per variazioni delle coordinate generalizzate tali che  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Definendo la matrice

$$H_{\alpha\beta}(q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \quad (1.1.2)$$

e ponendo

$$V_\alpha(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\beta, \quad (1.1.3)$$

possiamo scrivere le equazioni del moto di Eulero-Lagrange nella forma

$$H_{\alpha\beta}(q, \dot{q}) \ddot{q}^\beta = V_\alpha(q, \dot{q}). \quad (1.1.4)$$

Se la matrice  $H$  è non singolare, allora tale sistema determina univocamente le accelerazioni  $\ddot{q}^\alpha$  e quindi la traiettoria in un certo intorno delle condizioni iniziali. Se invece  $H$  ha rango inferiore al numero di gradi di libertà del sistema, la soluzione delle equazioni del moto può contenere delle funzioni arbitrarie del tempo. Si parla, in tal caso, di sistemi *vincolati*.

Supponiamo  $\text{rg}(H) = N - M$ , dove  $N$  è il numero di gradi di libertà. Allora esistono  $M$  funzioni indipendenti  $\phi_m(q, p)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , dette *vincoli primari*, tali che

$$\phi_\alpha(q, p) = 0 \quad (1.1.5)$$

vale come identità quando agli impulsi  $p_\alpha$  si sostituisce la loro definizione

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \quad (1.1.6)$$

Se si assume  $\text{rg}(H)$  costante nello spazio  $(q, \dot{q})$  allora le relazioni (1.1.5) definiscono una sottovarietà immersa nello spazio delle fasi.

Consideriamo l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \dot{q}^\alpha p_\alpha - L \quad (1.1.7)$$

che dipende dalle velocità  $\dot{q}^\alpha$  solo attraverso gli impulsi  $p_\alpha$ , infatti per variazioni arbitrarie delle coordinate e delle velocità si ha

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} &= p_\alpha\delta\dot{q}^\alpha + \dot{q}^\alpha\delta p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta\dot{q}^\alpha \\ &= \dot{q}^\alpha\delta p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha.\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

A causa della presenza dei vincoli primari, la dinamica del sistema risulta invariante in seguito alla trasformazione

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' = \mathcal{H} + c^m(q, p)\phi_m,\tag{1.1.9}$$

infatti

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H}' &= \delta\mathcal{H} + \phi_m\frac{\partial c^m}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \phi_m\frac{\partial c^m}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + c^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + c^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \\ &= \delta\mathcal{H}\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

sulla sottovarietà definita dai vincoli. Seguendo Dirac [8] possiamo dire che due funzioni di stato  $F$  e  $G$  sono uguali *debolmente*

$$F \approx G\tag{1.1.11}$$

se coincidono sulla sottovarietà definita dai vincoli e possiamo dunque scrivere  $\delta\mathcal{H}' \approx \delta\mathcal{H}$ . Definita la parentesi di Poisson tra due funzioni di stato come

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q^\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha},\tag{1.1.12}$$

possiamo esprimere la derivata temporale di un osservabile  $f$  come

$$\begin{aligned}\dot{f} &\approx \{f, \mathcal{H}'\} \\ &= \{f, \mathcal{H}\} + c^m\{f, \phi_m\} + \{f, c^m\}\phi_m \\ &\approx \{f, \mathcal{H}\} + c^m\{f, \phi_m\}.\end{aligned}\tag{1.1.13}$$

In particolare, poiché le traiettorie fisiche devono giacere sulla sottovarietà definita dai vincoli primari, questi devono essere preservati nell'evoluzione del sistema, ovvero

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, \mathcal{H}\} + c^{m'}\{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0.\tag{1.1.14}$$

Tali equazioni possono o costituire delle restrizioni sulle  $c^m$  oppure ridursi a delle relazioni tra coordinate ed impulsi indipendenti dalle  $c^m$ ; in tal caso, se risultano indipendenti

dai vincoli primari, diciamo che costituiscono dei *vincoli secondari*. Supponiamo che  $X(q, p) = 0$  sia un vincolo secondario, allora deve soddisfare

$$\{X, \mathcal{H}\} + c^m \{X, \phi_m\} = 0. \quad (1.1.15)$$

Se tale relazione è indipendente dalle  $c^m$  e dagli altri vincoli, allora fornisce dei vincoli che diremo terziari. Se invece impone una restrizione sulle  $c^m$  la ricerca dei vincoli può essere arrestata. Alla fine avremo  $K$  vincoli secondari che indicheremo, insieme ai vincoli primari, con la notazione collettiva

$$\phi_j \approx 0, \quad (1.1.16)$$

con l'indice  $j$  che etichetta tutti i  $J = M + K$  vincoli.

Una volta trovati tutti i vincoli, le funzioni  $c^m$  dovranno soddisfare le equazioni

$$\{\phi_j, \mathcal{H}\} + c^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (1.1.17)$$

che costituiscono un sistema non omogeneo di  $J$  equazioni nelle  $M \leq J$  incognite  $c^m$ . Possiamo scrivere una soluzione generale nella forma

$$c^m = u^m + v^m, \quad (1.1.18)$$

dove  $v^m$  è la soluzione del sistema omogeneo associato

$$v^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (1.1.19)$$

e  $u^m$  costituisce una soluzione particolare del sistema non omogeneo. In particolare se  $v_a^m$ ,  $a = 1, \dots, A$  sono le soluzioni linearmente indipendenti di (1.1.19), allora  $v^m = w^a v_a^m$ , con  $w^a$  funzioni arbitrarie del tempo [12]. Possiamo quindi riscrivere per un generico osservabile  $f$

$$\begin{aligned} \dot{f} &\approx \{f, \mathcal{H}\} + c^m \{f, \phi_m\} \\ &= \{f, \mathcal{H}\} + u^m \{f, \phi_m\} + w^a v_a^m \{f, \phi_m\} \\ &\approx \{f, \mathcal{H} + u^m \phi_m + v^a \phi_a\} \\ &\equiv \{f, \mathcal{H}' + v^a \phi_a\} \\ &\equiv \{f, \mathcal{H}_T\}, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

dove si è posto  $\phi_a = v_a^m \phi_m$  e si è definita l'Hamiltoniana di prima classe  $\mathcal{H}'$  e l'Hamiltoniana totale  $\mathcal{H}_T$ . In particolare, la (1.1.20) è equivalente alle equazioni del moto di Eulero-Lagrange e manifesta la sotto-determinazione dovuta alla singolarità della matrice  $H$  attraverso le  $A$  funzioni arbitrarie del tempo.

In generale una funzione di stato  $f$  è detta di *prima classe* se ha parentesi di Poisson debolmente nulla con i vincoli  $\phi_j$ :

$$\{f, \phi_j\} \approx 0 \iff f \text{ di prima classe.}$$

Se  $f$  non è di prima classe allora è di *seconda classe*. In particolare è immediato vedere che  $\mathcal{H}'$  e  $\phi_a$  sono di prima classe.

## 1.2 Vincoli di prima classe e trasformazioni di gauge

La presenza delle funzioni arbitrarie del tempo  $v^a$  nell'Hamiltoniana fa sì che ad ogni stato fisico sia possibile associare più valori delle  $q$  e delle  $p$ . Supponiamo di definire i valori delle variabili canoniche all'istante  $t_1$ , allora le equazioni del moto li definiscono univocamente ad un istante  $t_2 = t_1 + \delta t$ . Ciò implica che qualsiasi differenza nel valore di una funzione di stato all'istante  $t_2$  dovuta alla scelta delle  $v^a$  all'istante  $t_1$  deve essere priva di contenuto fisico. Dunque la trasformazione

$$\delta f = \delta v^a \{f, \phi_a\} \quad (1.2.1)$$

non altera lo stato fisico del sistema e diciamo che i vincoli primari di prima classe generano *trasformazioni di gauge*, ovvero trasformazioni che possono essere fatte in qualsiasi istante  $t$  e non alterano l'azione del sistema [12]. Posta

$$S[y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L, \quad (1.2.2)$$

una trasformazione di gauge è una trasformazione delle  $y^i$  dipendente da funzioni arbitrarie del tempo  $\epsilon^\alpha$  che può essere espressa come

$$\delta_\epsilon y^i = R_{(0)\alpha}^i \epsilon^\alpha + R_{(1)\alpha}^i \dot{\epsilon}^\alpha + \cdots + R_{(s)\alpha}^i \frac{d^s \epsilon^\alpha}{dt^s} \quad (1.2.3)$$

per qualche  $s$ . I coefficienti  $R_{(k)\alpha}^i$  dipendono dalle  $y^i$  e dalle loro derivate temporali fino ad un certo ordine comunque finito. Diremo che l'azione è invariante se esiste una funzione  $K$  dipendente dalle  $y^i$ , le  $\epsilon^\alpha$  e le loro derivate, tale che

$$\delta_\epsilon S = K(t_2) - K(t_1) = 0. \quad (1.2.4)$$

È poi possibile dimostrare che la parentesi di Poisson di una qualsiasi coppia di vincoli primari di prima classe genera una trasformazione di gauge. Infatti ripetendo la trasformazione (1.2.1) per quattro volte, con  $\delta v^a$  che assume i valori  $\epsilon^a$ ,  $\eta^{a'}$ ,  $-\epsilon^a$  e  $-\eta^{a'}$ , si ottiene

$$\delta f = \epsilon^a \eta^{a'} \{f, \{\phi_a, \phi_{a'}\}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (1.2.5)$$

Allo stesso modo, la parentesi di Poisson di qualsiasi vincolo primario di prima classe con l'Hamiltoniana di prima classe  $\mathcal{H}'$  genera una trasformazione di gauge. Se facciamo una trasformazione di gauge infinitesima (1.2.1) e poi facciamo evolvere da  $t$  a  $t + \epsilon$  per mezzo di  $\mathcal{H}'$  si ottiene

$$F \xrightarrow{\text{gauge}} F' = F + \eta^a \{F, \phi_a\} \xrightarrow{\text{evoluzione}} F''_{g \rightarrow e} = F' + \epsilon \{F', \mathcal{H}'\}, \quad (1.2.6)$$

dove  $F''_{g \rightarrow e}$  è data esplicitamente da

$$F''_{g \rightarrow e} = F + \eta^a \{F, \phi_a\} + \epsilon \{F, \mathcal{H}'\} + \epsilon \eta^a \{\{F, \phi_a\}, \mathcal{H}'\}. \quad (1.2.7)$$

Operando la trasformazione nell'ordine inverso

$$F \xrightarrow{\text{evoluzione}} F' = F + \epsilon \{F, \mathcal{H}'\} \xrightarrow{\text{gauge}} F''_{e \rightarrow g} = F' + \eta^a \{F', \phi_a\}, \quad (1.2.8)$$

la differenza  $\delta F = F''_{e \rightarrow g} - F''_{g \rightarrow e}$  deve essere una trasformazione di gauge. Notando che

$$F''_{e \rightarrow g} = F + \epsilon \{F, \mathcal{H}'\} + \eta^a \{F, \phi_a\} + \epsilon \eta^a \{\{F, \mathcal{H}'\}, \phi_a\}, \quad (1.2.9)$$

e utilizzando l'identità di Jacobi si ottiene

$$\delta F = \epsilon \eta^a \{F, \{\phi_a, \mathcal{H}'\}\}. \quad (1.2.10)$$

Benché in generale non è possibile dimostrare che tutti i vincoli secondari di prima classe generano trasformazioni di gauge e, anzi, è possibile fornire dei controesempi (vedi ad esempio [12]); si assume che valga la *congettura di Dirac* secondo cui tutti i vincoli di prima classe generano trasformazioni di gauge, indipendentemente dal fatto che siano primari o secondari. I motivi teorici che suggeriscono tale assunzione sono principalmente tre:

- (i) le trasformazioni generate dai vincoli di prima classe preservano tutti i vincoli, sia quelli primari sia quelli secondari;
- (ii) la parentesi di Poisson di due generatori di gauge è ancora un generatore di gauge;
- (iii) i metodi di quantizzazione noti per i sistemi vincolati non fanno distinzione tra vincoli primari e secondari.

D'altra parte in tutte le applicazioni note la congettura di Dirac è risultata valida [12].

Se  $G$  è una funzione di stato sufficientemente regolare e debolmente nulla  $G \approx 0$  allora esistono delle funzioni  $g^m$  tali che

$$G = g^m \phi_m, \quad (1.2.11)$$

infatti possiamo localmente utilizzare i vincoli indipendenti  $\phi_m$  come coordinate  $(y_m, x_\alpha)$ , con  $y_m \equiv \phi_m$  e, poiché

$$G \Big|_{\{(q,p): \phi_m(q,p)=0\}} = G(0, x) = 0, \quad (1.2.12)$$

si ha che

$$\begin{aligned} G(y, x) &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} G(ty, x) \\ &= y_m \int_0^1 dt \frac{\partial G(u, x)}{\partial u_m} \Big|_{u=ty}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Tale risultato implica che se  $\phi_a$  sono vincoli di prima classe allora la loro parentesi di Poisson è di prima classe e si ha

$$\{\phi_a, \phi_b\} = f_{ab}{}^c \phi_c. \quad (1.2.14)$$

L'algebra dei vincoli di prima classe con le parentesi di Poisson, grazie al risultato (1.2.5), può essere messa in corrispondenza con l'algebra di Lie associata al gruppo delle trasformazioni di gauge che lasciano invariata l'azione.

### 1.3 Vincoli di seconda classe e parentesi di Dirac

Tra i vincoli  $\phi_j$  indichiamo con  $\gamma_a$ ,  $a = 1, \dots, A_p$  i vincoli di prima classe e con  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, A_s$  quelli di seconda classe. Definiamo la matrice

$$C_{jj'} = \{\phi_j, \phi_{j'}\} \quad (1.3.1)$$

che risulta non nulla solo in presenza di vincoli di seconda classe. Assumiamo inoltre che  $C_{jj'}$  abbia rango costante in tutto lo spazio delle fasi. Si può dimostrare che se il determinante di  $C_{jj'}$  si annulla debolmente

$$\det(C_{jj'}) \approx 0, \quad (1.3.2)$$

allora esiste almeno un vincolo di prima classe tra le  $\phi_j$ . Infatti la (1.3.2) implica che il sistema  $\lambda^j C_{jj'} \approx 0$  ammetta una soluzione non nulla per cui  $\lambda^j \phi_j$  è di prima classe:

$$\{\lambda^j \phi_j, \phi_{j'}\} = \lambda^j C_{jj'} + \{\lambda^j, \phi_{j'}\} \phi_j \approx 0. \quad (1.3.3)$$

attraverso un'opportuna matrice  $a_j{}^{j'}$  invertibile è possibile utilizzare  $\lambda^j \phi_j$  come primo vincolo, in modo da avere  $C_{j1} = -C_{1j} \approx 0$ . Iterando tale ragionamento possiamo rappresentare le parentesi di Poisson dei vincoli nella forma

$$C_{jj'} = \begin{matrix} & \gamma_a & \chi_\alpha \\ \gamma_b & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1.3.4)$$

dove  $C_{\beta\alpha}$  è una matrice invertibile e antisimmetrica. Ciò implica che il numero di vincoli secondari deve necessariamente essere pari, altrimenti il determinante di  $C_{\beta\alpha}$  sarebbe zero<sup>1</sup>. Tuttavia, in presenza di gradi di libertà fermionici, ciò può non essere più vero [12].

---

<sup>1</sup>Se  $A$  è una matrice antisimmetrica  $n \times n$  allora

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A),$$

da cui si vede che se  $n$  è dispari  $\det(A)$  deve essere zero.

Per definizione i vincoli di seconda classe non preservano tutti i vincoli e possono quindi generare trasformazioni che mappano stati ammessi in stati non ammessi; dunque, a differenza dei vincoli di prima classe, essi non generano trasformazioni di gauge. Consideriamo un sistema descritto da  $N$  coppie di variabili canoniche  $(q^i, p_i)$  delle quali la prima è vincolata ad essere nulla

$$\chi_1 = q^1 \approx 0, \quad (1.3.5a)$$

$$\chi_2 = p_1 \approx 0. \quad (1.3.5b)$$

Allora si ha  $\{\chi_1, \chi_2\} = 1$  ed è ovvio che le relazioni (1.3.5a) e (1.3.5b) implicano che la coppia  $(q^1, p_1)$  è superflua ai fini della descrizione del sistema. Possiamo quindi ridefinire la parentesi di Poisson come

$$\{F, G\}^* = \sum_{i=2}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right), \quad (1.3.6)$$

per cui  $\{\chi_a, F\}^* = 0$ ,  $a = 1, 2$  per qualsiasi variabile dinamica  $F$ . Ciò implica che i vincoli di seconda classe possono essere posti uguali fortemente a zero

$$\chi_a \approx 0 \rightarrow \chi_a = 0.$$

D'altra parte è evidente che le equazioni del moto per gli altri gradi di libertà rimangono identiche se si sostituisce alle parentesi di Poisson le parentesi modificate  $\{\cdot, \cdot\}^*$ .

La generalizzazione di tali parentesi ad un insieme arbitrario di vincoli di seconda classe è data dalle *parentesi di Dirac* che sono definite come

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}, \quad (1.3.7)$$

dove  $C^{\alpha\beta}$  è l'inversa della matrice  $C_{\alpha\beta}$  che compare nella (1.3.4). Si può dimostrare [12] che le parentesi di Dirac soddisfano tutte le proprietà delle parentesi di Poisson, ovvero:

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*, \quad (1.3.8a)$$

$$\{F, GR\}^* = \{F, G\}^* R + G \{F, R\}^*, \quad (1.3.8b)$$

$$\{\{F, G\}^*, R\}^* + \{\{G, R\}^*, F\}^* + \{\{R, F\}^*, G\}^* = 0. \quad (1.3.8c)$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\{\chi_a, F\}^* = 0 \quad \text{per ogni } F, \quad (1.3.9a)$$

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\} \quad \text{per ogni } G \text{ di prima classe e } F \text{ arbitraria,} \quad (1.3.9b)$$

$$\{R, \{F, G\}^*\}^* \approx \{R, \{F, G\}\} \quad \text{per } F \text{ e } G \text{ di prima classe e } R \text{ arbitraria.} \quad (1.3.9c)$$

In particolare osserviamo che la (1.3.9a) implica che i vincoli di seconda classe possono essere posti uguali a zero prima della valutazione delle parentesi di Dirac. La (1.3.9b) invece ci assicura che l'Hamiltoniana estesa

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}' + u^\alpha \gamma_\alpha \quad (1.3.10)$$

genera le corrette equazioni del moto

$$\dot{F} \approx \{F, \mathcal{H}_E\}^* \approx \{F, \mathcal{H}_E\}, \quad (1.3.11)$$

in quanto  $\mathcal{H}_E$  è di prima classe. Se  $F$  è una quantità gauge invariante, allora la sua evoluzione temporale è descritta in modo equivalente da  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{H}_T$  e  $\mathcal{H}_E$ ; in caso contrario è necessario utilizzare l'Hamiltoniana estesa.

In generale, dunque, utilizzeremo le parentesi di Poisson per distinguere tra vincoli di prima e seconda classe per poi formulare le equazioni della teoria attraverso le parentesi di Dirac.

## 1.4 Sistemi generalmente covarianti

Normalmente si descrive lo stato di un sistema fisico fornendo le variabili dinamiche come funzioni del tempo che, in conseguenza di ciò, riveste un ruolo d'eccezione rispetto agli altri osservabili. Nonostante questo, è possibile fornire una descrizione in cui si recupera una certa simmetria tra il tempo e le altre variabili: il tempo viene promosso a variabile dinamica e lo stato del sistema è descritto mediante dei parametri arbitrari che forniscono l'“evoluzione” delle variabili originarie e del tempo fisico insieme ai rispettivi momenti coniugati. Data l'arbitrarietà di tali parametri, il formalismo così sviluppato risulterà invariante per riparametrizzazione delle variabili dinamiche e si parla di sistema *generalmente covariante*. Qualsiasi sistema fisico può sempre essere parametrizzato in modo da risultare generalmente covariante [12]. Non è ovvio, invece, come un sistema già generalmente covariante - in particolare il campo gravitazionale della Relatività Generale - possa essere deparametrizzato.

Sia

$$S[q^i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^i p_i - \mathcal{H}_0) \quad (1.4.1)$$

l'azione di un sistema che, per semplicità, supponiamo non vincolato. Poniamo ora  $q^0 = t$  e sia  $p_0$  il suo momento coniugato, possiamo quindi riscrivere l'azione (1.4.1) come

$$S[q^\mu, p_\mu, u^0] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\dot{q}^\mu p_\mu - u^0 (p_0 + \mathcal{H}_0)], \quad (1.4.2)$$

dove la variazione rispetto a  $u^0$  fornisce l'unico vincolo di prima classe, detto *super-Hamiltoniana* [15]

$$\mathcal{H} \equiv p_0 + \mathcal{H}_0 = 0, \quad (1.4.3)$$



mentre quella rispetto a  $p_0$  dà

$$u^0 = \dot{q}^0 = \frac{dt}{d\tau}. \quad (1.4.4)$$

Inserendo quest'ultima relazione nella (1.4.2) si riottiene l'azione (1.4.1). Il moltiplicatore di Lagrange  $u^0$ , indicato solitamente con  $N$  è detto funzione di intervallo (*lapse function* [14, 15]) in quanto indica il tasso di variazione del tempo fisico  $t$  rispetto al parametro  $\tau$ .

La parametrizzazione introduce dei gradi di libertà di gauge per tener conto dei quali l'azione (1.4.1) deve essere rimpiazzata da un'azione contenente l'Hamiltoniana estesa (1.3.10)

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}^\mu p_\mu - \mathcal{H}_E). \quad (1.4.5)$$

Da un confronto con la (1.4.2) si vede che l'Hamiltoniana di prima classe  $\mathcal{H}'$  deve essere nulla. Ciò implica che l'evoluzione del sistema rispetto al parametro  $\tau$  coincide con le trasformazioni di gauge generate dai vincoli. In particolare una riparametrizzazione

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau - \epsilon(\tau), \quad (1.4.6)$$

con  $\epsilon(\tau_2) = \epsilon(\tau_1) = 0$ , coincide con una trasformazione di gauge con parametro  $\epsilon^a = \epsilon u^a$ . Infatti la (1.4.6) induce

$$q^\mu \rightarrow q^\mu + \epsilon \dot{q}^\mu, \quad (1.4.7a)$$

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + \epsilon \dot{p}_\mu, \quad (1.4.7b)$$

e supponendo, per semplicità, che non ci siano vincoli di seconda classe, l'azione (1.4.5) diventa

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' \left( p_\mu \frac{dq^\mu}{d\tau'} - \frac{d\tau}{d\tau'} u^a \gamma_a \right), \quad (1.4.8)$$

e risulta invariante se i moltiplicatori di Lagrange si trasformano come

$$u^a(\tau) \rightarrow u'^a(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} u^a(\tau), \quad (1.4.9)$$

da cui si ottiene

$$\delta u^a = \frac{d}{d\tau}(\epsilon u^a). \quad (1.4.10)$$

## 1.5 Quantizzazione dei sistemi vincolati

Se  $A$  e  $B$  sono due osservabili classici, nella teoria quantistica vengono rimpiazzati da due operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  che soddisfano la regola di Dirac

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar\widehat{\{A, B\}} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (1.5.1)$$

Se il sistema classico per il quale si cerca una teoria quantistica risulta vincolato, bisogna sostituire alle parentesi di Poisson che compare nella (1.5.1) la parentesi di Dirac [12]

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{\widehat{A, B}\}^* + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (1.5.2)$$

Utilizzando tale regola è possibile trasformare i vincoli di seconda classe in equazioni operatoriali

$$\hat{\chi}_\alpha = 0, \quad (1.5.3)$$

in quanto per ogni funzione di stato  $A$  si ha che  $\{A, \chi_\alpha\}^* = 0$ .

Per quanto riguarda i vincoli di prima classe, invece, esistono diversi metodi per inserirli nella teoria quantistica (vedi ad esempio [12]). Consideriamo qui il metodo di Dirac, secondo il quale i gradi di libertà di gauge vengono incorporati nella teoria quantistica. Ciò implica che i vincoli agiscono in modo non banale sugli stati quantomeccanici. Infatti, affinché l'invarianza di gauge venga preservata nella teoria quantistica, bisogna imporre che se  $G_a$  è il generatore di una trasformazione di gauge nella teoria classica, allora

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0, \quad (1.5.4)$$

da cui

$$e^{i\epsilon^a \hat{G}_a} |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (1.5.5)$$

Osserviamo che i generatori  $G_a$  al livello classico sono di prima classe e dunque

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}{}^c G_c. \quad (1.5.6)$$

Se tale relazione è preservata nella teoria quantistica

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar \hat{C}_{ab}{}^c \hat{G}_c, \quad (1.5.7)$$

allora la (1.5.4) implica automaticamente  $[\hat{G}_a, \hat{G}_b] |\psi\rangle = 0$ . Se però nella (1.5.7) compaiono delle correzioni che vanno come  $\hbar^2$

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar \hat{C}_{ab}{}^c \hat{G}_c + \hbar^2 \hat{D}_{ab}, \quad (1.5.8)$$

bisogna imporre la condizione aggiuntiva  $\hat{D}_{ab} |\psi\rangle = 0$  che non ha un analogo nella teoria classica. Per di più, nel caso in cui  $\hat{D}_{ab}$  sia invertibile, si ottiene che l'unico stato quantico ammissibile è dato dal ket nullo. Dunque, se  $\hat{D}_{ab}$  non è l'operatore nullo, gli operatori  $\hat{G}_a$  non possono essere più interpretati come generatori di trasformazioni di gauge e diciamo che la simmetria di gauge classica è rotta a livello quantistico. Tuttavia se la simmetria è rotta da effetti quantistici non ha senso cercare stati che soddisfano la (1.5.4) e dunque il metodo di Dirac non è più applicabile.

La richiesta di invarianza di gauge degli stati quantomeccanici può essere incompatibile con l'evoluzione dinamica del sistema. Se classicamente si ha

$$\{\mathcal{H}_0, G_a\} = V_a{}^b G_b, \quad (1.5.9)$$

nella teoria quantistica possiamo avere

$$[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{G}_a] = i\hbar \hat{V}_a{}^b \hat{G}_b + \hbar^2 \hat{C}_a. \quad (1.5.10)$$

Se  $C_a$  non è l'operatore nullo, l'Hamiltoniano e l'evoluzione temporale non sono più gauge-invarianti per cui l'equazione di Schrödinger mappa stati permessi in stati non permessi. Dunque, oltre al caso in cui  $\hat{D}_{ab} = 0$ , anche quando  $\hat{C}_a = 0$  il metodo di Dirac diventa inconsistente. In tal caso bisogna ricorrere ad altri metodi per la quantizzazione dei vincoli di prima classe, come ad esempio il metodo BRST per un'analisi del quale si rimanda a [12].

Come esempio del metodo di Dirac possiamo considerare una particella descritta dall'Hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  e parametrizzata in modo da avere una descrizione generalmente covariante. La quantizzazione della super-Hamiltoniana (1.4.3) non è altro che l'equazione di Schrödinger per la particella. Infatti

$$p_0 \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.5.11)$$

da cui

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_0 \right) \psi = 0. \quad (1.5.12)$$

## 1.6 Teorie di campo parametrizzate

Come esempio di sistema generalmente covariante, possiamo considerare un campo scalare parametrizzato. Tale sistema infatti presenta delle analogie formali con il campo gravitazionale, quando questo è trattato nel formalismo di Arnowitt-Deser-Misner [1] discusso nel Capitolo 2.

Siano  $X^\mu$  coordinate nello spaziotempo di Minkowski e sia  $\phi(X^\mu)$  un campo scalare reale la cui azione è data da

$$S = \int d^4X \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right), \quad (1.6.1)$$

con

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.6.2)$$

dove il punto vicino al pedice indica la derivazione rispetto alle coordinate dello spaziotempo di Minkowski  $X^\mu$ . L'equazione del moto per il campo è data dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(X)} - \frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{,\mu}(X)} = 0, \quad (1.6.3)$$

che, in realtà, costituisce un sistema di infinite equazioni: una per ogni punto dello spaziotempo. D'altra parte, fissato il punto  $X$ , le derivate funzionali nella (1.6.3) si riducono a derivate ordinarie e, una volta calcolate, lasciando nuovamente  $X$  libero di variare, si ottiene l'equazione di Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = 0. \quad (1.6.4)$$

Possiamo ora parametrizzare le coordinate minkowskiane attraverso delle funzioni  $x^\mu(X^\nu)$  che descriveranno un sistema di coordinate in uno spazio tempo curvo. In seguito a tale trasformazione l'azione diventa

$$S = \int d^4x \tilde{\mathcal{L}} \left( \phi, \phi_{,k}, \dot{\phi}; X_{,k}^\mu, \dot{X}^\mu \right) = \int d^4x J \mathcal{L} \left( \phi, \phi_{,\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\mu} \right), \quad (1.6.5)$$

dove  $J$  è il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Esplicitando si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= J \left( -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\nu} \phi_{,\rho} \phi_{,\sigma} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

che costituisce la lagrangiana del campo scalare libero in uno spaziotempo curvo.

Si può ricavare la densità Hamiltoniana  $\tilde{\mathcal{H}}$  associata a  $\tilde{\mathcal{L}}$  rispetto a  $\phi$  che risulta essere

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \tilde{p}_\phi \dot{\phi} - \tilde{\mathcal{L}} \\ &= J \left( \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} \right) \\ &= J \frac{\partial x^0}{\partial X^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial X^\mu)} \frac{\partial \phi}{\partial X^\nu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \frac{\partial X^\nu}{\partial x^0} \\ &= J \frac{\partial x^0}{\partial X^\mu} T^\mu{}_\nu \dot{X}^\nu, \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

dove  $T^\mu{}_\nu$  è il tensore energia-impulso. Possiamo osservare che, per definizione,

$$J = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^1} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^2} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^3}, \quad (1.6.8)$$

per cui

$$J \frac{\partial x^0}{\partial X_\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^1} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^2} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^3} \quad (1.6.9)$$

rappresenta l'elemento di ipersuperficie definita da  $x^0 = \text{costante}$  e, per tale motivo, non dipende dalle velocità  $\dot{X}^\mu$ . Si può inoltre dimostrare [15] che anche il tensore energia-impulso non dipende da tali velocità, sicché la densità Hamiltoniana  $\tilde{\mathcal{H}}$  risulta lineare nelle  $\dot{X}^\mu$ .

Definiamo gli impulsi cinematici  $\Pi_\mu$ , coniugati delle coordinate di Minkowski  $X^\mu$ , in modo che sia soddisfatto il vincolo

$$\mathcal{H}_\nu \equiv \Pi_\nu + J \frac{\partial x^0}{\partial X^\mu} T^\mu{}_\nu \approx 0, \quad (1.6.10)$$

in analogia con la super-Hamiltoniana (1.4.3). Introducendo i moltiplicatori di Lagrange  $N^\nu$ , l'azione del campo può essere scritta come

$$S = \int d^4x \left( \tilde{p}_\phi \dot{\phi} - \tilde{\mathcal{H}} \right) = \int d^4x \left( \tilde{p}_\phi \dot{\phi} + \Pi_\nu \dot{X}^\nu - N^\nu \mathcal{H}_\nu \right). \quad (1.6.11)$$

Il vettore che definisce il vincolo (1.6.10) può essere rappresentato attraverso le sue componenti parallele e ortogonale all'ipersuperficie  $x^0 = \text{costante}$ . Se  $n^\nu$  è il vettore ortonormale a tale superficie ( $n_\nu n^\nu = -1$ ),  $X^\nu{}_{,a}$  costituisce una terna di vettori ortogonali appartenenti al suo spazio tangente ( $n_\nu X^\nu{}_{,a} = 0$ ). Allora possiamo porre

$$\mathcal{H}_\perp \equiv \mathcal{H}_\nu n^\nu \approx 0, \quad (1.6.12a)$$

$$\mathcal{H}_a \equiv \mathcal{H}_\nu X^\nu{}_{,a} \approx 0, \quad (1.6.12b)$$

dove  $\mathcal{H}_\perp$  e  $\mathcal{H}_a$  sono rispettivamente dette super-Hamiltoniana e super-impulso del campo. Possiamo quindi riscrivere l'azione come

$$S = \int d^4x \left( \tilde{p}_\phi \dot{\phi} + \Pi_\nu \dot{X}^\nu - N \mathcal{H}_\perp - N^a \mathcal{H}_a \right) \quad (1.6.13)$$

e variando rispetto a  $\Pi_\nu$  si ottiene

$$\dot{X}^\mu = N n^\mu + N^a X^\mu{}_{,a}. \quad (1.6.14)$$

Da tale relazione deduciamo che  $\dot{X}^\mu$  è un vettore che unisce due punti con le stesse coordinate spaziali giacenti sulle ipersuperfici  $x^0 = \text{costante}$  e  $x^0 + dx^0 = \text{costante}$ , come può essere osservato in Figura 1.6.1. In particolare  $N$  misura la distanza propria tra le due ipersuperfici e  $N^a$  ("shift vector") è un vettore sull'ipersuperficie  $x^0 = \text{costante}$  che al punto di coordinate spaziali  $x^a$  collega il punto dal quale deve essere innalzata la normale che raggiunge il punto con le stesse coordinate spaziali sull'ipersuperficie  $x^0 + dx^0 = \text{costante}$ .

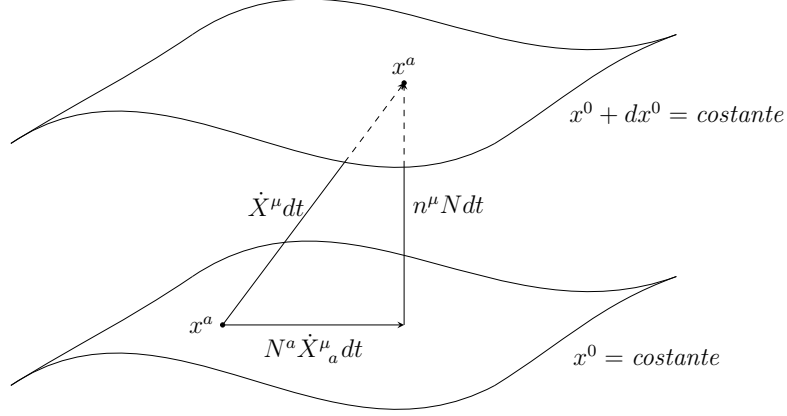


Figura 1.6.1: Interpretazione geometrica dei moltiplicatori di Lagrange  $N$  e  $N^a$ .

L'azione (1.6.13) risulta invariante rispetto a riparametrizzazioni delle coordinate spaziotemporali del tipo

$$x^0 \rightarrow x'^0 = x^0 + f(x^k) \quad (1.6.15a)$$

$$x^k \rightarrow g(x^l), \quad (1.6.15b)$$

con  $f$  e  $g$  funzioni sufficientemente regolari ma per altro arbitrarie. L'introduzione della super-Hamiltoniana e del super-impulso costituiscono il prezzo da pagare per ottenere tale invarianza.

Il sistema può essere quantizzato imponendo le relazioni formali di commutazione

$$[X^\mu(x), \Pi_\nu(y)] = i\hbar \delta^\mu_\nu \delta(x - y), \quad (1.6.16a)$$

$$[\phi(x), \tilde{p}_\phi(y)] = i\hbar \delta(x - y), \quad (1.6.16b)$$

mentre la quantizzazione dei vincoli (1.6.12a) e (1.6.12b) è realizzata, secondo il metodo di Dirac, dalle condizioni

$$\hat{\mathcal{H}}_\perp \Psi[\phi(x), X^\mu(x)] = 0, \quad (1.6.17a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a \Psi[\phi(x), X^\mu(x)] = 0, \quad (1.6.17b)$$

dove  $\Psi[\phi(x), X^\mu(x)]$  è il funzionale d'onda che descrive lo stato del campo quantizzato [14].

## Capitolo 2

# Formulazione hamiltoniana della Relatività Generale

### 2.1 Azione di Hilbert-Einstein

La quantizzazione canonica *à la Dirac* richiede la conoscenza delle parentesi di Poisson (o di Dirac, vedi sezione 1.5) degli osservabili classici per stabilire i commutatori dei rispettivi osservabili quantistici. Per tale motivo abbiamo bisogno di esprimere la teoria del campo gravitazionale in forma hamiltoniana.

Consideriamo uno spaziotempo  $\mathcal{M}$  dotato di tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  e connessione simmetrica  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ , associata alla derivata covariante  $\nabla$ ,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}), \quad (2.1.1)$$

compatibile con  $g_{\mu\nu}$ . Allora il tensore di Riemann che ne descrive la curvatura è dato da

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\pi\gamma}\Gamma^\pi_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\pi\delta}\Gamma^\pi_{\beta\gamma}, \quad (2.1.2)$$

da cui si ottengono il tensore e lo scalare di Ricci dati rispettivamente da  $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$  e  $R = R^\alpha_{\alpha}$ . Poco prima che Einstein pubblicasse la sua equazione di campo, Hilbert trovò che il campo gravitazionale può essere descritto attraverso l'azione

$$S[g] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.1.3)$$

dove  $\Lambda$  rappresenta la costante cosmologica, aggiunta successivamente da Einstein per rendere il suo modello cosmologico consistente con un universo statico. Per una discussione del ruolo di tale costante e della sua interpretazione si rimanda a [6], qui ne si terrà esplicitamente conto solo in quanto l'azione come espressa nella (2.1.3) rappresenta

la forma più generale di azione generalmente covariante costruibile attraverso il tensore metrico e le sue derivate.

A differenza dei principi variazionali che si incontrano in meccanica, nella (2.1.3) compaiono le derivate seconde delle variabili dinamiche che, in questo caso, sono rappresentate dalle dieci componenti  $g_{\mu\nu}$  indipendenti del tensore metrico. D'altra parte ciò è inevitabile: in un intorno di un punto possiamo sempre trovare un sistema di coordinate in cui le derivate prime del tensore metrico si annullano, il che renderebbe evidentemente nullo un invariante costruito per mezzo di esse. Lo scalare di Ricci è l'unico invariante ottenibile dal tensore di curvatura che sia lineare nelle derivate seconde della metrica. Inoltre, qualsiasi altra scelta per l'azione, diversa da quella di Hilbert, conduce ad una teoria più complessa in cui si perde l'immediata corrispondenza con la teoria newtoniana nel limite di campo debole [16].

Variando l'azione di Hilbert rispetto alle componenti della metrica  $g^{\mu\nu}$  si ottiene l'equazione di campo di Einstein nel vuoto. Infatti, notando che

$$\delta g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left( \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta}, \quad (2.1.4)$$

il principio variazionale  $\delta S = 0$  implica che

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) \equiv G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = 0, \quad (2.1.5)$$

dove si è definito il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$ .

In presenza di campi di materia descritti dalla densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ , l'azione (2.1.3) contiene un termine aggiuntivo che agisce da sorgente del campo gravitazionale

$$S[g] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + 16\pi \mathcal{L}_{\text{mat}}), \quad (2.1.6)$$

la cui variazione rispetto alle  $g^{\alpha\beta}$  rappresenta il tensore energia-impulso della sorgente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}) &= \left( \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\alpha\beta}} \mathcal{L}_{\text{mat}} + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \sqrt{-g} \left( \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathcal{L}_{\text{mat}} \right) \delta g^{\alpha\beta} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

dove si è definito il tensore energia-impulso di Hilbert

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\text{mat}} g_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.1.8)$$



che risulta simmetrico per definizione, a differenza di quello canonico definito attraverso il primo teorema di Nöther. Ad esempio, per un campo scalare, l'invarianza per traslazioni spaziotemporali dell'azione permette di definire, attraverso tale teorema, il tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\text{mat}} g_{\mu\nu} - \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta \phi^{;\mu}} \phi_{;\nu}, \quad (2.1.9)$$

che in questo caso coincide con quello di Hilbert (2.1.8). Tuttavia ciò non è detto che accada per campi tensoriali di rango superiore. Poiché qui non ci occuperemo di tali campi, possiamo scrivere l'equazione di campo di Einstein come

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1.10)$$

riferendoci in modo equivalente alle definizioni (2.1.8) e (2.1.9), senza curarci della loro differenza.

Un modo diverso di procedere è quello di utilizzare il principio variazionale di Palatini, in cui come variabili si considerano non solo le componenti del tensore metrico, ma anche quelle della connessione  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ :

$$S[g, \Gamma] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (2.1.11)$$

In questo caso non si assume a priori che le  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  siano i simboli di Christoffel (2.1.1), ma ciò risulta come vincolo geometrico che si ottiene richiedendo la stazionarietà dell'azione rispetto alle componenti della connessione. Da tale variazione si ottiene che deve essere soddisfatta

$$\mathbf{g}^{\alpha\lambda}_{;\lambda} \delta^{\beta}_{\gamma} - \mathbf{g}^{\alpha\beta}_{;\gamma} = 0, \quad (2.1.12)$$

ed è immediato vedere che tale equazione implica  $\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{;\gamma} = \mathbf{g}_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ . Infatti se gli indici  $\beta$  e  $\gamma$  sono uguali, al variare dei loro valori, si ottiene un sistema di quattro equazioni nelle  $\mathbf{g}^{\alpha\lambda}_{\lambda}$  (senza sommatoria in  $\lambda$ ) che ammette solo la soluzione triviale. Se invece i due indici sono differenti, si ottengono le restanti relazioni che implicano  $\nabla \mathbf{g} = 0$ . D'altra parte si ha che

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}_{;\gamma} = \sqrt{-g} \left( \delta^{\alpha}_{\mu} \delta^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) g^{\mu\nu}_{;\gamma}, \quad (2.1.13)$$

dalla quale si deduce che

$$g_{\alpha\beta;\gamma} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} g_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} = 0. \quad (2.1.14)$$

Tale relazione stabilisce la compatibilità della connessione con la metrica ed è equivalente alla (2.1.1), ovvero la connessione è data proprio dai simboli di Christoffel.

La variazione rispetto alle componenti della metrica  $g^{\alpha\beta}$ , invece, danno ancora l'equazione di campo di Einstein (2.1.5) o (2.1.10) a seconda che sia presente o meno una

sorgente. Risulta dunque che i principi variazionali di Hilbert e Palatini sono equivalenti se la Lagrangiana della sorgente non contiene le componenti della connessione.

Delle quaranta equazioni contenute nella (2.1.14), trenta non contengono delle derivate temporali, di modo che trenta componenti della connessione possono essere espresse in funzione di  $\Gamma^0_{ij}$ ,  $\Gamma^\mu_{00}$  e della metrica [1]:

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} \left[ g^{jm} - (g^{00})^{-1} g^{j0} g^{m0} \right] (g_{im,k} + g_{mk,i} - g_{ik,m}) + (g^{00})^{-1} g^{j0} \Gamma^0_{ik}, \quad (2.1.15a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{i0} = g^{km} \left[ g_{0m,i} - (g^{00})^{-1} \Gamma^0_{im} \right] + \frac{1}{2} g^{0k} g_{00,i} + \\ + \frac{1}{2} (g^{00})^{-1} g^{kn} g^{0m} (g_{im,n} + g_{nm,i} - g_{in,m}), \end{aligned} \quad (2.1.15b)$$

$$\Gamma^0_{0k} = g^{0m} \left[ g_{0m,k} - (g^{00})^{-1} \Gamma^0_{mk} \right] + \frac{1}{2} g^{00} g_{00,k} + (g^{00})^{-1} g^{0n} g^{0m} g_{nm,k}. \quad (2.1.15c)$$

Le rimanenti dieci equazioni che contengono le derivate temporali sono date da

$$\partial_0 g_{ij} = \Gamma_{i0j} + \Gamma_{j0i}, \quad (2.1.16a)$$

$$\partial_0 g_{\mu 0} = \Gamma_{\mu 00} + \Gamma_{00\mu}. \quad (2.1.16b)$$

Le (2.1.16a) costituiscono equazioni dinamiche per la parte spaziale della metrica, mentre le (2.1.16b) costituiscono delle equazioni per  $\Gamma^\mu_{00}$ , sebbene possano sembrare delle equazioni dinamiche per le  $g_{\mu 0}$ . Ciò è dovuto al fatto che alle (2.1.16b) non corrispondono equazioni canoniche coniugate. Esplicitando l'equazione di campo (2.1.5) si ha

$$\partial_0 \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} (-2\Gamma^m_{ij,m} + \Gamma^\alpha_{j\alpha,i} + \Gamma^\alpha_{i\alpha,j}) + \Gamma^\beta_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{j\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{ij}, \quad (2.1.17a)$$

$$\frac{1}{2} \partial_0 (\Gamma^0_{0i} - \Gamma^m_{im}) = \frac{1}{2} (-2\Gamma^m_{i0,m} + \Gamma^\alpha_{0\alpha,i}) + \Gamma^\beta_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{0\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{0i}, \quad (2.1.17b)$$

$$- \partial_0 \Gamma^m_{0m} = -\Gamma^m_{00,m} + \Gamma^\beta_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{0\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{00}, \quad (2.1.17c)$$

da cui si vede che la (2.1.17a) è l'equazione canonicamente coniugata alla (2.1.16a). Le equazioni (2.1.17b) e (2.1.17c) invece costituiscono insieme quattro vincoli differenziali. Se si inseriscono le (2.1.15) in tali vincoli e si utilizzano la (2.1.16a) e la sua coniugata (2.1.17a), otteniamo quattro equazioni che non contengono alcuna derivata temporale.

Il principio variazionale di Palatini, dunque, permette di costruire una teoria del campo gravitazionale partendo da  $10 + 40$  variabili dinamiche. Tuttavia, tra la fine degli anni '50 e i primi anni '60, Arnowitt, Deser e Misner hanno mostrato (vedi ad esempio [1]) che è possibile sviluppare un formalismo con un significato geometrico più esplicito e che permette di passare al linguaggio hamiltoniano attuando il trauma della distinzione di una coordinata temporale dalle coordinate spaziali.

## 2.2 Ipersuperfici e curvature

Definiamo un'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$  l'immagine di una varietà 3-dimensionale  $\tilde{\mathcal{S}}$  attraverso un'immersione  $\Phi : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{M}$  (vedi Figura 2.2.1), ovvero una mappa differenziabile, invertibile e con inversa iniettiva. Inoltre  $\Phi : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  deve essere anche un omeomorfismo, ciò garantisce infatti che  $\mathcal{S}$  non si “auto-intersechi”.

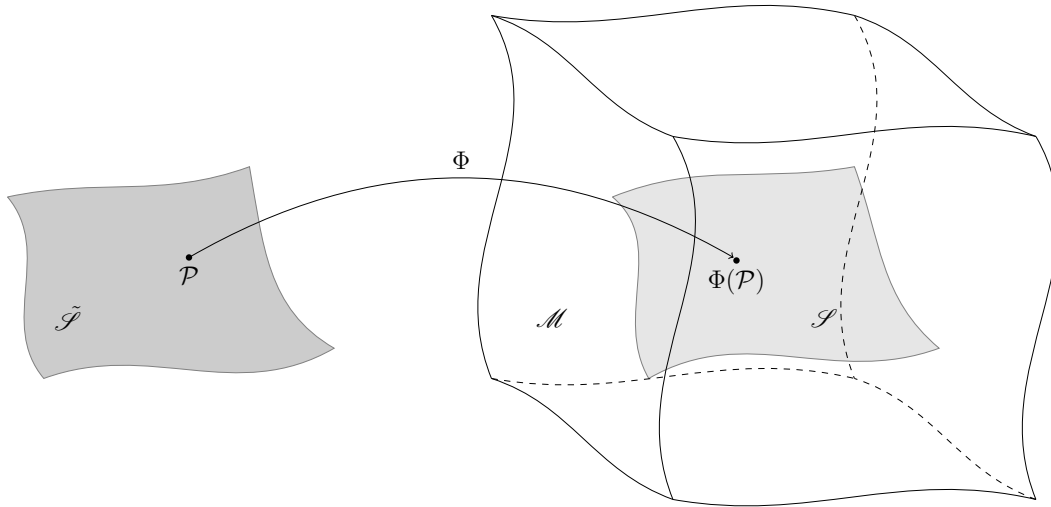


Figura 2.2.1: Rappresentazione dell'immersione  $\Phi$  di una varietà 3-dimensionale  $\tilde{\mathcal{S}}$  in una varietà 4-dimensionale  $\mathcal{M}$  che definisce l'ipersuperficie  $\mathcal{S}$ .

Un altro modo per definire un'ipersuperficie è di carattere locale: dato un campo scalare  $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo definirla come l'insieme dei punti di  $\mathcal{M}$  in cui  $t$  assume lo stesso valore costante (“superfici di livello”):

$$\Sigma = \{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \mid t(\mathcal{P}) = 0\}. \quad (2.2.1)$$

Supponiamo che  $(t, x, y, z)$  sia un sistema di coordinate su  $\mathcal{M}$  e che  $\Sigma$  sia una sottovarietà connessa di  $\mathcal{M}$  con la topologia di  $\mathbb{R}^3$ . Allora  $\Sigma$  è definita localmente dalla condizione che i suoi punti abbiano coordinata  $t = 0$  e possiamo trovare una forma esplicita per l'immersione considerando  $(x, y, z)$  come coordinate sulla varietà 3-dimensionale  $\tilde{\mathcal{S}}$ :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \tilde{\mathcal{S}} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (x, y, z) &\longmapsto (0, x, y, z). \end{aligned}$$

Da tale definizione si vede che l'immersione  $\Phi$  mappa curve di  $\tilde{\mathcal{S}}$  in curve di  $\mathcal{C}$ , di conseguenza mapperà anche vettori di  $\tilde{\mathcal{S}}$  in vettori di  $\mathcal{M}$ . Dunque definisce una mappa

$\Phi_*$  tra gli spazi tangenti  $T_{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{S}}$  e  $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$  detta *push-forward*:

$$\begin{aligned}\Phi_* : T_{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{S}} &\longrightarrow T_{\mathcal{P}}\mathcal{M} \\ \mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z) &\longmapsto \Phi_*\mathbf{v} = (0, v^x, v^y, v^z).\end{aligned}$$

Analogamente  $\Phi$  definisce una mappa  $\Phi^*$  tra i duali degli spazi tangenti detta *pull-back* e definita come

$$\begin{aligned}\Phi^* : T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{M} &\longrightarrow T_{\mathcal{P}}^*\tilde{\mathcal{S}} \\ \boldsymbol{\omega} &\longmapsto \Phi^*\boldsymbol{\omega} : T_{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\mathbf{v} \longmapsto \langle \boldsymbol{\omega}, \Phi_*\mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

che può essere esplicitata attraverso le coordinate:

$$\begin{aligned}\Phi^* : T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{M} &\longrightarrow T_{\mathcal{P}}^*\tilde{\mathcal{S}} \\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_t, \omega_x, \omega_y, \omega_z) &\longmapsto \Phi^*\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z),\end{aligned}$$

dove  $\omega_\alpha$  con  $\alpha = t, x, y, z$  rappresentano le componenti della 1-forma  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto alla base  $\mathbf{d}x^\alpha$  di  $T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{M}$  associata alle coordinate  $x^\alpha$ .

D'ora in avanti assumiamo che  $\tilde{\mathcal{S}}$  coincida con  $\mathcal{S} = \Phi(\tilde{\mathcal{S}})$  e, in particolare, identifichiamo i vettori  $\mathbf{v}$  di  $\tilde{\mathcal{S}}$  con il loro push-forward  $\Phi_*\mathbf{v}$  in  $\mathcal{M}$ . Inoltre osserviamo che l'operazione di pull-back può essere estesa a qualsiasi forma  $n$ -lineare  $\mathbf{T} : \otimes^n T_{\mathcal{P}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\forall \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}, \quad \Phi^*\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{T}(\Phi_*\mathbf{v}_1, \dots, \Phi_*\mathbf{v}_n). \quad (2.2.2)$$

Dunque se  $\mathbf{g}$  è il tensore metrico di  $\mathcal{M}$  possiamo definire la metrica indotta sull'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  come

$$\boldsymbol{\gamma} = \Phi^*\mathbf{g}, \quad (2.2.3)$$

anche detta *prima forma fondamentale* di  $\mathcal{S}$ . Si ha

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{S}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.2.4)$$

che in termini di coordinate implica

$$\gamma_{ij} = g_{ij}. \quad (2.2.5)$$

Possiamo dunque classificare leipersuperfici immerse nello spaziotempo come

- (i)ipersuperfici di *tipo spazio* quando  $\boldsymbol{\gamma}$  è definita positiva, ovvero ha segnatura  $(+, +, +)$ ;
- (ii)ipersuperfici di *tipo tempo* quando  $\boldsymbol{\gamma}$  è minkowskiana, ovvero ha segnatura  $(-, +, +)$ ;

(iii) ipersuperfici di *tipo luce* o *nulle* se  $\gamma$  è degenera, ovvero ha segnatura  $(0, +, +)$ .

Se l'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  è definita attraverso un campo scalare  $t$  su  $\mathcal{M}$ , allora la 1-forma gradiente  $\mathbf{d}t$  è ortogonale a  $\mathcal{S}$ , nel senso che dato un qualsiasi vettore  $\mathbf{v}$  tangente a  $\mathcal{S}$  si ha  $\langle \mathbf{d}t, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Il vettore  $\nabla t$ , duale della 1-forma  $\mathbf{d}t$  e di componenti  $\nabla^\alpha t = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta t = g^{\alpha\beta} (\mathbf{d}t)_\beta$ , è ortogonale all'ipersuperficie  $\mathcal{S}$ . Inoltre  $\nabla t$  è di tipo tempo se  $\mathcal{S}$  è di tipo spazio e viceversa, invece  $\nabla t$  è di tipo luce se, e solo se,  $\mathcal{S}$  è di tipo luce. In particolare, se  $\mathcal{S}$  è un'ipersuperficie di tipo luce, un vettore ortogonale è anche parallelo a  $\mathcal{S}$ , in quanto i vettori di tipo luce sono ortogonali a se stessi.

Supponiamo che l'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  non sia di tipo luce, allora possiamo normalizzare il vettore ortogonale  $\nabla t$  e definire

$$\mathbf{n} = |\nabla t \cdot \nabla t|^{-1/2} \nabla t, \quad (2.2.6)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= -1 && \text{se } \mathcal{S} \text{ è di tipo spazio,} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1 && \text{se } \mathcal{S} \text{ è di tipo tempo.} \end{aligned}$$

Dunque, nel caso in cui  $\mathcal{S}$  non sia di tipo luce, esistono due vettori normali unitari:  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ . Nel caso di ipersuperfici nulle, tale costruzione non funziona e non esiste una scelta privilegiata per il vettore normale [10].

### *Curvatura intrinseca e curvatura estrinseca*

Supponiamo che  $\mathcal{S}$  sia un'ipersuperficie di tipo spazio o di tipo tempo, di modo che la prima forma fondamentale  $\gamma$  sia non degenera. Di conseguenza esiste un'unica connessione (derivata covariante)  $\mathbf{D}$  simmetrica e compatibile con  $\gamma$

$$\mathbf{D}\gamma = 0 \quad (2.2.7)$$

e il tensore di Riemann associato a tale connessione è detto *curvatura intrinseca* della varietà metrica  $(\mathcal{S}, \gamma)$ . Possiamo indicare tale tensore con **Riem** e le sue componenti  $R^k{}_{lij}$  sono date dalla relazione di Ricci:

$$\forall \mathbf{v} \in T\mathcal{S}, \quad (D_i D_j - D_j D_i) v^k = R^k{}_{lij} v^l. \quad (2.2.8)$$

Il tensore di Ricci associato, indicato con **R**, ha componenti  $R_{ij} = R^k{}_{ikj}$ . Lo scalare di Ricci  $R = \gamma^{kl} R_{kl}$  è detto anche *curvatura gaussiana* dell'ipersuperficie  $(\mathcal{S}, \gamma)$ .

Nella definizione di tali quantità non si considera in alcun modo il fatto che  $\mathcal{S}$  sia un'ipersuperficie immersa in una varietà  $\mathcal{M}$ . Vogliamo definire una tensore che misuri la curvatura di  $\mathcal{S}$  rispetto a  $\mathcal{M}$ , ovvero che quantifichi il cambiamento di direzione del vettore normale  $\mathbf{n}$  quando viene spostato lungo curve di  $\mathcal{S}$ . Se  $\nabla$  è la derivata covariante

nello spaziotempo  $\mathcal{M}$ , contrapposta a  $D$  in  $\mathcal{S}$ , definiamo la *mappa di Weingarten*  $\chi$  (anche detta *operatore di forma*) che associa ad ogni vettore  $\mathbf{v}$  sull'ipersuperficie la variazione della normale  $\mathbf{n}$  lungo  $\mathbf{v}$ , ovvero

$$\begin{aligned} \chi : T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} &\longrightarrow T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Possiamo vedere che la mappa di Weingarten è ben definita osservando che, effettivamente,  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$  appartiene al fibrato tangente di  $\mathcal{S}$ . Si ha infatti

$$\mathbf{n} \cdot \chi(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (2.2.9)$$

Dunque la mappa è unicamente definita per ipersuperfici di tipo spazio e di tipo tempo, modulo la scelta del segno di  $\mathbf{n}$ . Per le ipersuperfici di tipo luce, invece, l'operatore di forma dipende dalla scelta del vettore normale  $\mathbf{n}$ .

La proprietà fondamentale della mappa di Weingarten è quella di essere autoaggiunta rispetto alla metrica  $\gamma$ :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{S}, \quad \mathbf{u} \cdot \chi(\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.2.10)$$

Si ha infatti, per definizione

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \chi(\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n} \\ &= \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{n} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Il teorema di Frobenius (vedi ad esempio l'Appendice B di [27]) ci assicura che  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  appartiene al fibrato tangente dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  se  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T\mathcal{S}$ . Dunque il commutatore che appare alla destra dell'ultima uguaglianza è ortogonale all'ipersuperficie e si ottiene la (2.2.10). Ciò prova che gli autovalori della mappa di Weingarten, detti *curvature principali* dell'ipersuperficie, sono tutti reali.

Si definisce la *seconda forma fondamentale* dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  la mappa bilineare

$$\begin{aligned} \mathbf{K} : T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} \otimes T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot \chi(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

che risulta simmetrica grazie alla proprietà di autoaggiunzione di  $\chi$ . D'altra parte è chiaro che la seconda forma fondamentale e la mappa di Weingarten contengono lo stesso tipo di informazione sulla curvatura dell'ipersuperficie. Il segno meno nella definizione è convenzionale [16].

## Proiettore ortogonale

In ogni punto  $\mathcal{P}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$  lo spazio tangente  $T_{\mathcal{P}}$  può essere decomposto nella somma diretta

$$T_{\mathcal{P}}\mathcal{M} = T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} \oplus \text{Span}(\mathbf{n}),$$

dove  $\text{Span}(\mathbf{n})$  è il sottospazio di  $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$  generato dal vettore  $\mathbf{n}$  normale all'ipersuperficie di *tipo spazio*  $\mathcal{S}$ . Possiamo dunque definire il proiettore ortogonale  $\tilde{\gamma}$  come

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : T_{\mathcal{P}}\mathcal{M} &\longrightarrow T_{\mathcal{P}}\mathcal{S} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \end{aligned}$$

da cui  $\tilde{\gamma}(\mathbf{n}) = 0$ . Inoltre tale mappa si riduce, come deve, all'identità quando agisce sui vettori di  $T_{\mathcal{P}}\mathcal{S}$ . In componenti possiamo scrivere

$$\gamma^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (2.2.11)$$

Osserviamo che il proiettore ortogonale appena definito ci permette di costruire una mappa  $\gamma_{\mathcal{M}}^* : T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{S} \rightarrow T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{M}$  tale che per ogni 1-forma  $\omega \in T_{\mathcal{P}}^*\mathcal{S}$  si ha

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{M}}^*\omega : T_{\mathcal{P}}\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \omega(\tilde{\gamma}(\mathbf{v})), \end{aligned}$$

che può essere chiaramente estesa ad una forma multilineare qualsiasi. Consideriamo ad esempio la prima forma fondamentale  $\gamma$ . Poiché l'applicazione della mappa  $\gamma_{\mathcal{M}}^*$  estende la forma da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{M}$ , utilizziamo lo stesso simbolo per indicare la prima forma fondamentale come tensore definito su tutto lo spaziotempo  $\mathcal{M}$ :

$$\gamma = \gamma_{\mathcal{M}}^*\gamma.$$

In componenti, tale estensione è data da [10]:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta, \quad (2.2.12)$$

dove  $n_\alpha$  sono le componenti della 1-forma associata al vettore normale  $\mathbf{n}$  attraverso la metrica  $g_{\alpha\beta}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$ . Dalla (2.2.12) si vede che se  $\mathbf{v}$  è un vettore dell'ipersuperficie, allora

$$\forall \mathbf{v} \in T_{\mathcal{P}}\mathcal{S}, \quad \gamma_{\alpha\beta}v^\beta = g_{\alpha\beta}v^\beta + n_\alpha n_\beta v^\beta = g_{\alpha\beta}v^\beta, \quad (2.2.13)$$

ovvero le metriche  $\gamma_{\alpha\beta}$  e  $g_{\alpha\beta}$  coincidono sull'ipersuperficie  $\mathcal{S}$ . Invece se  $\mathbf{v}$  è ortogonale all'ipersuperficie è immediato vedere che  $\gamma_{\alpha\beta}v^\beta = 0$ .

Allo stesso modo possiamo utilizzare  $\gamma^*$  per estendere la definizione della seconda forma fondamentale  $\mathbf{K}$  a tutto lo spaziotempo

$$\mathbf{K} = \gamma_{\mathcal{M}}^*\mathbf{K}.$$

Inoltre il proiettore ortogonale (2.2.11) permette di definire la “proiezione ortogonale”  $\tilde{\gamma}^*\mathbf{T}$  di un tensore  $\mathbf{T}$  le cui componenti sono date da

$$(\tilde{\gamma}^*\mathbf{T})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots \gamma^{\alpha_p}_{\mu_p} \gamma^{\nu_1}_{\beta_1} \dots \gamma^{\nu_q}_{\beta_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (2.2.14)$$

In particolare  $\tilde{\gamma}^*\mathbf{T}$  risulta tangente all’ipersuperficie  $\mathcal{S}$  nel senso che, se uno dei suoi argomenti è  $\mathbf{n}$  o la 1-forma a questo associata, si ottiene zero.

### *Relazioni di Gauss-Codazzi*

Se  $\mathbf{T}$  è un campo tensoriale sull’ipersuperficie  $\mathcal{S}$ , la sua derivata covariante  $D\mathbf{T}$  può essere espressa attraverso la derivata covariante  $\nabla\mathbf{T}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$ :

$$D\mathbf{T} = \tilde{\gamma}^*\nabla\mathbf{T}, \quad (2.2.15)$$

la cui versione in componenti può immediatamente essere dedotta dalla (2.2.14). In particolare tale relazione risulta valida qualora si identifichino  $\mathbf{T}$  e  $D\mathbf{T}$  con le loro estensioni  $\gamma^*\mathcal{M}\mathbf{T}$  e  $\gamma^*\mathcal{M}D\mathbf{T}$ . Bisogna inoltre notare che, benché  $\mathbf{T}$  sia un campo tensoriale di  $\mathcal{M}$  una volta esteso, il suo supporto rimane sempre  $\mathcal{S}$ . Dunque, per definire la derivata covariante  $\nabla\mathbf{T}$ , è necessario costruire un campo  $\mathbf{T}'$  definito in un intorno di  $\mathcal{S}$  che coincida con  $\mathbf{T}$  su  $\mathcal{S}$ . Si può allora mostrare che  $\nabla\mathbf{T}'$  non dipende dalla scelta dell’estensione  $\mathbf{T}'$  [10].

Dalla definizione della seconda forma fondamentale, dati due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathcal{S}$ , si ha che

$$u^\sigma D_\sigma v^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma v^\alpha + n^\alpha u^\sigma v^\rho K_{\sigma\rho}, \quad (2.2.16)$$

la quale mostra come  $\mathbf{K}$  possa essere interpretato come una misura di quanto differiscono le derivate di un vettore di  $\mathcal{S}$  rispetto ad un altro vettore di  $\mathcal{S}$ , se prese rispetto alla connessione  $\nabla$  dello spaziotempo o alla connessione  $D$  dell’ipersuperficie in esso immersa.

A questo punto possiamo ricavare delle relazioni che legano il tensore di Riemann  ${}^4\mathbf{Riem}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$ , le cui componenti indichiamo qui con  ${}^4R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ , con il tensore di Riemann  $\mathbf{Riem}$  e la seconda forma fondamentale  $\mathbf{K}$  dell’ipersuperficie immersa  $\mathcal{S}$ . Tali relazioni risultano di particolare interesse nello sviluppo del formalismo hamiltoniano della Relatività Generale ed è quindi utile ricavarle. Cominciamo, dunque, col mostrare che vale

$$K_{\alpha\beta} = -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \nabla_\mu n_\nu. \quad (2.2.17)$$

Supponiamo che il campo vettoriale  $\mathbf{n}$  sia definito in un intorno di  $\mathcal{S}$  di modo che sia ben definito il campo

$$\mathbf{a} = \nabla_n \mathbf{n}, \quad (2.2.18)$$

che risulta perpendicolare a  $\mathbf{n}$ , infatti

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \nabla_n \mathbf{n} = \frac{1}{2} \nabla_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (2.2.19)$$



Ora per ogni  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  in  $T\mathcal{S}$  si ha che l'estensione della seconda forma fondamentale valutata su  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  è data da

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{K}(\tilde{\gamma}(\mathbf{u}), \tilde{\gamma}(\mathbf{v})) = -\tilde{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\tilde{\gamma}(\mathbf{u})} \tilde{\gamma}(\mathbf{v}) \\
&= -\tilde{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&= -[\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \cdot [\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}] \\
&= -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \\
&= -\nabla_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle,
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

dove  $\underline{\mathbf{n}}$  è la 1-forma associata al vettore normale  $\mathbf{n}$ . Da tale relazione si deduce che

$$\nabla_{\underline{\mathbf{n}}} = -\mathbf{K} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{n} \tag{2.2.21}$$

e applicando il proiettore  $\tilde{\gamma}^*$  a tale relazione si ottiene la (2.2.17).

La relazione di Ricci nella sua versione 4-dimensionale per vettori  $v^\alpha$  di  $\mathcal{S}$  è data da

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) v^\gamma = R^\gamma_{\sigma\alpha\beta} v^\sigma, \tag{2.2.22}$$

mentre la medesima relazione per la connessione  $\nabla$  di  $\mathcal{M}$  è

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) v^\gamma = {}^4R^\gamma_{\sigma\alpha\beta} v^\sigma. \tag{2.2.23}$$

Se si sviluppa la (2.2.22) esplicitando le derivate covarianti  $\mathbf{D}$  in funzioni delle  $\nabla$  per mezzo della (2.2.15) si ottiene la *relazione di Gauss*

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\gamma_\rho \gamma^\sigma_\delta {}^4R^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\gamma_{\delta\alpha\beta} + K^\gamma_\alpha K_{\delta\beta} - K^\gamma_\beta K_{\delta\alpha}. \tag{2.2.24}$$

Contraendo gli indici  $\gamma$  e  $\alpha$  e utilizzando la relazione  $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\alpha_\nu = \gamma^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$  si ottiene la relazione di Gauss contratta, in cui compaiono i tensori di Ricci  ${}^4\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}$  associati rispettivamente alle metriche  $\mathbf{g}$  e  $\gamma$

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^4R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^4R^\mu_{\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K^\mu_\beta. \tag{2.2.25}$$

Contraendo nuovamente rispetto a  $\gamma$  si ottiene la relazione di Gauss scalare

$${}^4R + 2{}^4R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R + K^2 - K^{ij} K_{ij} \tag{2.2.26}$$

che costituisce una generalizzazione del *Theorema Egregium* di Gauss che fu formulato originariamente per superfici immerse nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . In tal caso si ha che la parte sinistra della (2.2.26) è nulla e, poiché si ha una metrica euclidea invece che minkowskiana, il proiettore diventa  $\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - n^\alpha n_\beta$  invece che  $\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta$ . Ciò comporta un cambiamento di segno davanti agli ultimi due addendi e si ha

$$R - K^2 + K^{ij} K_{ij} = 0. \tag{2.2.27}$$

In dimensione due possiamo ulteriormente semplificare tali relazioni introducendo le curvatures principali  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ . La seconda forma fondamentale  $\mathbf{K}$  può essere diagonalizzata in modo che  $K_{ij} = K^{ij} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$ . Dunque  $K = \kappa_1 + \kappa_2$  e  $K^{ij}K_{ij} = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ , per cui si ha

$$R = 2\kappa_1\kappa_2 \quad \text{se } \mathbf{g} \text{ euclidea e } \dim(\mathcal{S}) = 2. \quad (2.2.28)$$

Utilizzando la relazione di Ricci (2.2.23) applicata al vettore normale  $\mathbf{n}$  è facile mostrare che vale

$$\gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta {}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} n^\sigma = D_\beta K^\gamma{}_\alpha - D_\alpha K^\gamma{}_\beta, \quad (2.2.29)$$

detta *relazione di Codazzi*.

## 2.3 Foliazioni

Ora che abbiamo a disposizione il concetto di ipersuperficie immersa in una varietà, possiamo considerare famiglie continue di tali ipersuperfici che “ricoprono” l’intera varietà in cui sono immerse. A tal fine si definisce *globalmente iperbolico* uno spaziotempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  che ammette *superfici di Cauchy*, ovvero ipersuperfici di tipo spazio  $\mathcal{S}$  ciascuna delle quali ha la proprietà di essere intersecata solo in un punto da curve causali<sup>1</sup> senza punti finali (per una definizione rigorosa di tali concetti si rimanda a [11]). In particolare, uno spaziotempo globalmente iperbolico ha la proprietà di essere topologicamente equivalente al prodotto cartesiano di  $\mathbb{R}$  con una superficie di Cauchy  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{M} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}. \quad (2.3.1)$$

Possiamo definire una *foliazione*  $(\mathcal{S}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  dello spaziotempo  $\mathcal{M}$  come la famiglia di ipersuperfici date dalle superfici di livello di un campo scalare  $\tilde{t}$  definito su  $\mathcal{M}$  e sufficientemente regolare (vedi Figura 2.3.1), ovvero

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{S}_t = \{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \mid \tilde{t}(\mathcal{P}) = t\}, \quad (2.3.2)$$

inoltre, dall’ipotesi di regolarità del campo  $\tilde{t}$ , possiamo assumere

$$\mathcal{S}_t \cap \mathcal{S}_{t'} = \emptyset, \quad t \neq t'. \quad (2.3.3)$$

Nel seguito non distingueremo più tra  $t$  e  $\tilde{t}$ . Ciascuna ipersuperficie  $\mathcal{S}_t$  è detta *foglia* della foliazione ed assumiamo che sia di tipo spazio. Inoltre richiediamo che la foliazione ricopra lo spaziotempo  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_t. \quad (2.3.4)$$

---

<sup>1</sup> Per curve causali si intende curve tali per cui, in ciascun punto, il vettore tangente non è di tipo spazio [11].

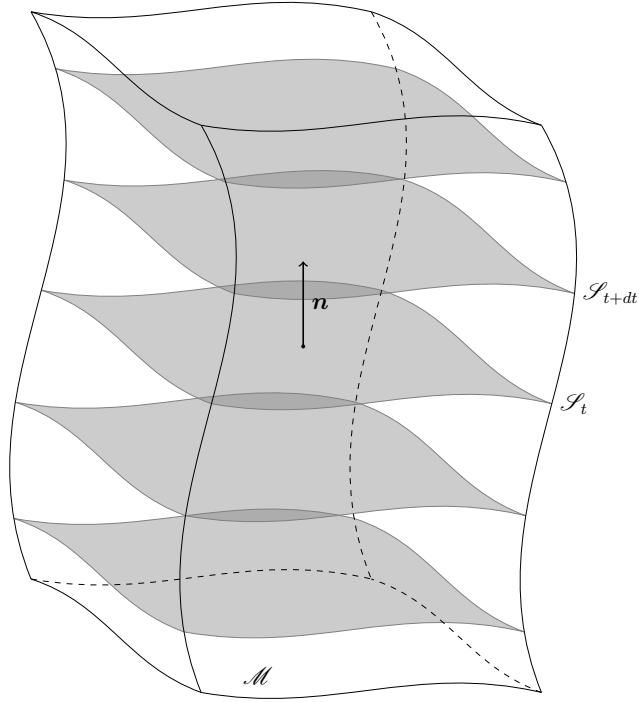


Figura 2.3.1: Rappresentazione di uno spaziotempo  $\mathcal{M}$  con alcune foglie della foliazione  $\mathcal{S}_t$ .

Il vettore normale  $\mathbf{n}$  è necessariamente collineare al vettore  $\nabla t$  duale della 1-forma  $\mathbf{dt}$ . Definiamo la funzione di intervallo  $N$  (*lapse function*, vedi anche sezione 1.4) di modo che

$$\mathbf{n} = -N\nabla t, \quad (2.3.5)$$

da cui

$$N = |\nabla t \cdot \nabla t|^{-1/2}. \quad (2.3.6)$$

Possiamo poi definire il vettore normale di evoluzione

$$\mathbf{m} = N\mathbf{n}, \quad (2.3.7)$$

che ha la proprietà di contrarsi a uno con la 1-forma  $\mathbf{dt}$ , ovvero  $\langle \mathbf{dt}, \mathbf{m} \rangle = 1$ . Ciò ci permette di ottenere l'ipersuperficie  $\mathcal{S}_{t+\delta t}$  dall'ipersuperficie vicina  $\mathcal{S}_t$  attraverso un

piccolo spostamento  $\mathbf{m}\delta t$  di ogni punto di  $\mathcal{S}_t$ . Si ha infatti che

$$\begin{aligned}
t(\mathcal{P}') &= \exp(\delta t \mathbf{m}) t \Big|_{\mathcal{P}} \\
&= t(\mathcal{P}) + \delta t \mathbf{m}_{\mathcal{P}}[t] + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= t(\mathcal{P}) + \delta t \langle \mathbf{d}t, \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{P}} + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= t(\mathcal{P}) + \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2),
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

da cui si vede che  $\mathcal{P}'$  appartiene all'ipersuperficie  $\mathcal{S}_{t+\delta t}$ , la quale, per tale motivo, è detta la *trascinata* secondo Lie dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}_t$  lungo  $\mathbf{m}$ . Poiché  $\mathbf{m}$  è ortogonale alle foglie  $\mathcal{S}_t$ , i vettori che giacciono in tali ipersuperfici sono mappati in vettori ortogonali a  $\mathbf{m}$  dal trascinamento di Lie, ovvero:

$$\forall \mathbf{v} \in T\mathcal{S}_t, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{v} \in T\mathcal{S}_t, \tag{2.3.9}$$

dove  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{v}$  indica la derivata di Lie di  $\mathbf{v}$  rispetto a  $\mathbf{m}$ .

## 2.4 Formalismo ADM

A questo punto possiamo costruire l'azione in forma hamiltoniana per il campo gravitazionale. Come punto di partenza è necessario individuare le variabili che caratterizzano il sistema nello spazio delle configurazioni e i rispettivi momenti coniugati, per la definizione dei quali è necessario avere a disposizione una variabile temporale in qualche modo distinta dalle altre variabili della teoria. In Relatività Generale questa distinzione del tempo può essere ottenuta richiedendo che esista un'ipersuperficie 3-dimensionale  $\mathcal{S}_{t_0}$  di tipo spazio, ovvero con metrica che abbia segnatura  $(+, +, +)$ , a partire dalla quale sia possibile determinare l'intero spaziotempo 4-dimensionale  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ . In altre parole è necessario richiedere che lo spaziotempo sia globalmente iperbolico e che ammetta  $\mathcal{S}_{t_0}$  come superficie di Cauchy. Ciò implica che la topologia dello spaziotempo sia fissata:  $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{t_0}$ . Benché questo possa essere un assunto ragionevole nella teoria classica, può essere una restrizione nella teoria quantistica e dunque costituire una mancanza dell'approccio canonico che non prevede tale possibilità [14].

Indichiamo con  $\partial_t$  il campo vettoriale associato alla funzione temporale globale  $t$ , tale che

$$\langle \mathbf{d}t, \partial_t \rangle = 1. \tag{2.4.1}$$

Siano poi  $\partial_k$  i campi coordinati sulle foglie  $\mathcal{S}_t$ . Possiamo allora esplicitare in coordinate la relazione precedente come

$$t^\mu \nabla_\mu t = \nabla_0 t = 1, \tag{2.4.2}$$

Tale relazione è soddisfatta allo stesso modo dal campo normale di evoluzione  $\mathbf{m}$  definito nella sezione precedente. Ciò implica che il trascinamento di Lie dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}_t$

lungo  $\partial_t$  coincide con quello lungo  $\mathbf{m}$ , tuttavia i due vettori differiscono per un vettore  $\mathbf{N}$  ortogonale a  $\mathbf{n}$  e di componenti  $N^\mu$  (*shift vector*, analogo al vettore  $N^a \dot{X}^\mu_a$  di Figura 1.6.1):

$$\partial_t = \mathbf{m} + \mathbf{N} = N\mathbf{n} + \mathbf{N}. \quad (2.4.3)$$

Se  $\tilde{\mathbf{n}}$  è la 1-forma associata al vettore normale  $\mathbf{n}$  tale che  $\langle \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle = -1$ , dalla relazione precedente si vede immediatamente che  $\tilde{\mathbf{n}} = -N dt$  e si ricava

$$\tilde{\mathbf{n}} = (-N, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \left( \frac{1}{N}, -\frac{N^k}{N} \right)^\top. \quad (2.4.4)$$

Utilizzando la relazione (2.2.12) si possono ricavare le componenti del tensore metrico  $\mathbf{g}$  in funzione del lapse  $N$ , dello shift  $\mathbf{N}$  e della 3-metrica  $\gamma$ :

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} N^k N_k - N^2 & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -N^{-2} & N^{-2} N^j \\ N^{-2} N^i & \gamma^{ij} - N^{-2} N^i N^j \end{pmatrix}, \quad (2.4.5)$$

da cui possiamo notare che, sebbene  $g_{ij} = \gamma_{ij}$ , si ha in generale  $g^{ij} \neq \gamma^{ij}$ . Possiamo poi trovare la relazione che lega i determinanti di  $\mathbf{g}$  e  $\gamma$  utilizzando la regola di Cramer per esprimere gli elementi  $g^{\alpha\beta}$  della matrice inversa delle componenti di  $\mathbf{g}$ . Se  $C_{00}$  è l'elemento  $(0, 0)$  della matrice dei cofattori di  $g_{\alpha\beta}$ , si ha  $g^{00} = C_{00}/g = \gamma/g$ , da cui

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}. \quad (2.4.6)$$

A questo punto possiamo esprimere l'azione di Hilbert-Einstein (2.1.3) nella forma ADM. Per far ciò dobbiamo esplicitare il termine contenente il tensore di Ricci nella relazione di Gauss scalare. Osserviamo, innanzi tutto, che  $n^\mu \nabla_\mu n_\nu = D_\nu \ln N$ , infatti:

$$\begin{aligned} n^\mu \nabla_\mu n_\nu &= -n^\mu \nabla_\mu (N \nabla_\nu t) \\ &= n_\nu n^\mu \nabla_\alpha \ln N + \nabla_\nu \ln N \\ &= \gamma^\mu_\nu \nabla_\mu \ln N \\ &= D_\nu \ln N. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Combinando tale risultato con la (2.2.17) si ottiene

$$\nabla_\mu n_\nu = -K_{\mu\nu} - n_\mu D_\nu \ln N. \quad (2.4.8)$$

Valutiamo ora il tensore di Riemann di  $\mathcal{M}$  proiettato due volte sulla foglia  $\mathcal{S}_t$  e due volte sulla normale  $\mathbf{n}$ . Utilizzando la relazione di Ricci (2.2.23) si ha

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu_\beta n^\sigma n^\pi R^\mu_{\pi\nu\sigma} &= \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu_\beta n^\sigma (\nabla_\nu \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\nu) n^\mu \\ &= \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu_\beta n^\sigma [\nabla_\sigma (K^\mu_\nu + n_\nu D^\mu \ln N) - \\ &\quad - \nabla_\nu (K^\mu_\sigma + n_\sigma D^\mu \ln N)] \\ &= \gamma_{\alpha\mu} \gamma^\nu_\beta (K^\mu_\sigma \nabla_\nu n^\sigma + n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu_\nu + \nabla_\nu D^\mu \ln N + \\ &\quad + D^\mu \ln N D_\nu \ln N) \\ &= -K_{\alpha\sigma} K^\sigma_\beta + \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

da cui si ottiene l'espressione cercata da inserire nella relazione di Gauss:

$$\begin{aligned} {}^4R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= -K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{n}D^l D_l N + n^\sigma \nabla_\sigma K \\ &= K^2 - K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{N}D^l D_l N + \nabla_\sigma(n^\sigma K). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

L'azione di Hilbert-Einstein allora diventa

$$\begin{aligned} 16\pi S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{S}_t} d^3x N \sqrt{\gamma} (R - K^2 + K_{ij}K^{ij} - 2\Lambda) + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{S}_t} d^3x \sqrt{\gamma} D_l D^l N + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{S}_t} d^3x N \sqrt{\gamma} \nabla_\sigma(n^\sigma K). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Il secondo e il terzo integrale non contribuiscono nella determinazione delle equazioni dinamiche del campo, infatti

$$\int_{\mathcal{S}_t} d^3x \sqrt{\gamma} D_l D^l N = \int_{\mathcal{S}_t} d^3x \partial_l (\sqrt{\gamma} D^l N) = 0, \quad (2.4.12)$$

mentre per quanto riguarda il terzo

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{S}_t} d^3x N \sqrt{\gamma} \nabla_\sigma(n^\sigma K) &= \\ = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma(n^\sigma K) &= \int d^4x \partial_\sigma (\sqrt{-g} n^\sigma K) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

assunto che le variazioni delle variabili siano nulle ai bordi del dominio di integrazione. Eliminando tali divergenze, si ottiene l'azione

$$S_{ADM} \equiv 16\pi S[\boldsymbol{\gamma}, N, \mathbf{N}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{S}_t} d^3x N \sqrt{\gamma} (K_{ij}K^{ij} - K^2 + R - 2\Lambda), \quad (2.4.14)$$

dove il termine coinvolgente la seconda forma fondamentale rappresenta il termine cinetico e la curvatura intrinseca  $R$  cambiata di segno rappresenta il termine di potenziale [7]. Possiamo subito osservare che nella Lagrangiana non compaiono le derivate temporali del lapse  $N$  e dello shift  $\mathbf{N}$ , dunque questi non sono variabili dinamiche della teoria e si vedrà tra poco che la variazione rispetto ad essi fornirà i vincoli primari della teoria, come del resto accadeva per il campo parametrizzato studiato in sezione 1.6. La curvatura intrinseca  $R$ , infatti, dipende solo dalla 3-metrica  $\boldsymbol{\gamma}$  mentre la seconda forma fondamentale è data da

$$K_{lm} = \frac{1}{2N} (D_l N_m + D_m N_l - \dot{\gamma}_{lm}). \quad (2.4.15)$$

Tale relazione può essere ricavata osservando che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m \gamma_{\alpha\beta} &= (\mathcal{L}_{\partial_t} - \mathcal{L}_N) \gamma_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta} - D_\alpha N_\beta - D_\beta N_\alpha \\ &= m^\mu \nabla_\mu (n_\alpha n_\beta) - N (K_{\alpha\beta} + n_\beta D_\alpha \ln N) - N (K_\alpha + n_\alpha D_\beta \ln N) \\ &= -2N K_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.4.16)$$

Si rimanda a [1] per la forma assunta dalle equazioni (2.1.15), (2.1.16) e (2.1.17) quando si sostituisca a  $g_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  la 3-metrica, il lapse, lo shift e la seconda forma fondamentale.

I momenti coniugati di  $N$ ,  $N_k$  e  $\gamma_{ij}$  sono dati rispettivamente da

$$\pi = \frac{\delta L_{ADM}}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (2.4.17a)$$

$$\pi^i = \frac{\delta L_{ADM}}{\delta \dot{N}_i} = 0, \quad (2.4.17b)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\delta L_{ADM}}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = -\gamma^{1/2} (K^{ij} - \gamma^{ij} K). \quad (2.4.17c)$$

La (2.4.17a) e la (2.4.17b) costituiscono complessivamente quattro vincoli primari di prima classe, a conferma del fatto che il lapse e lo shift non costituiscono delle variabili dinamiche per la teoria, ma rivestono il ruolo di moltiplicatori di Lagrange che definiscono i vincoli. Possiamo poi scrivere la parentesi di Poisson

$$[\gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y)] = \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta(x - y). \quad (2.4.18)$$

ed esprimere le velocità  $\dot{\gamma}_{ij}$  in funzione dei momenti utilizzando la (2.4.15)

$$\dot{\gamma}_{ij} = 2N\gamma^{-1/2} \left( \pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \right) + 2D_{(i} N_{j)}, \quad (2.4.19)$$

dove  $\text{tr}(\boldsymbol{\pi})$  è la traccia dell'impulso  $\pi^{ij}$  data da  $\text{tr}(\boldsymbol{\pi}) = \gamma_{ij} \pi^{ij}$ .

Per passare al formalismo hamiltoniano introduciamo la metrica di DeWitt

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}\gamma^{-1/2} (\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}), \quad (2.4.20)$$

che rappresenta il tensore metrico nella varietà  $\text{Riem}(\mathcal{S})$  6-dimensionale delle 3-metriche su  $\mathcal{S}$ , detta *superspazio*. In particolare  $G_{ijkl}$  risulta avere segnatura iperbolica  $(-, +, +, +, +, +)$  quando  $\gamma_{ij}$  è positiva definita [7].

Possiamo dunque riscrivere le velocità (2.4.19) come

$$\dot{\gamma}_{ij} = 2NG_{klj} \pi^{kl} + 2D_{(i} N_{j)}, \quad (2.4.21)$$

dunque la densità di Hamiltoniana canonica è data da

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} \\ &= 2NG_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} + 2\pi^{ij} D_{(i} N_{j)} - N\gamma^{1/2} (K_{ij} K^{ij} - K^2 + R - 2\Lambda) \\ &= N [G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \gamma^{1/2} (R - 2\Lambda)] + N_i (-2D_i \pi^{li}),\end{aligned}\quad (2.4.22)$$

a meno di divergenze e dunque l'azione nella forma di ADM è

$$S_{ADM}[\gamma_{ij}, \pi^{ij}] = \int d^4x \left( \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - N \mathcal{H}_\perp - N_k \mathcal{H}^k \right), \quad (2.4.23)$$

dove

$$\mathcal{H}_\perp = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \gamma^{1/2} (R - 2\Lambda) \approx 0, \quad (2.4.24a)$$

$$\mathcal{H}_k = -2\gamma_{jk} D_i \pi^{ij} \approx 0, \quad (2.4.24b)$$

sono vincoli secondari, detti rispettivamente *vincolo hamiltoniano* e *vincolo dei diffeomorfismi* o dell'impulso, così chiamato in quanto genera le trasformazioni di coordinate sulle foglie  $\mathcal{S}_t$ . Se è presente una sorgente  $T_{\mu\nu}$  allora i vincoli (2.4.24) diventano

$$\mathcal{H}_\perp = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \gamma^{1/2} (R - 2\Lambda) + \gamma^{1/2} \rho \approx 0, \quad (2.4.25a)$$

$$\mathcal{H}_k = -2\gamma_{jk} D_i \pi^{ij} + \gamma^{1/2} J_k \approx 0, \quad (2.4.25b)$$

dove  $\rho = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$  e  $J_k = \gamma^\mu_k T_{\mu\nu} n^\nu$  è il “vettore di Poynting” [14].

La 3-metrica  $\gamma_{ij}(x)$  è caratterizzata da sei numeri in ciascun punto dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}_t$ , ciò è solitamente rappresentato simbolicamente dicendo che  $\gamma$  possiede  $6 \times \infty^3$  gradi di libertà. Le trasformazioni<sup>2</sup> generate dal vincolo (2.4.25b) sono caratterizzate da tre parametri reali per punto di  $\mathcal{S}_t$ , per cui possiamo trovare una trasformazione che fissi tre componenti di  $\gamma$ . Il vincolo hamiltoniano (2.4.25a), invece, determina l'evoluzione di  $\mathcal{S}_t$ , ovvero genera le traslazioni temporali dei punti della foglia. Il capo gravitazionale risulta dunque caratterizzato da  $2 \times \infty^3$  gradi di libertà (nella teoria linearizzata, ciò corrisponde ai due stati possibili di polarizzazione delle onde gravitazionali, vedi ad esempio [16]).

## 2.5 Definizione dell'energia

Fin qui non si è considerata la presenza di possibili termini di superficie nella Hamiltoniana

$$H_0 = \int d^3x \left( N \mathcal{H}_\perp + N^k \mathcal{H}_k \right) \quad (2.5.1)$$

che compare nell'azione ADM (2.4.23). DeWitt ha notato [7] che, nel caso di un universo infinito e asintoticamente piatto, si può aggiungere, senza alterare le equazioni dinamiche del campo, l'integrale di superficie

$$E[\gamma_{ij}] = \int_{r \rightarrow \infty} d^2\sigma^k \left( \gamma_{ik,i} - \gamma_{ii,k} \right), \quad (2.5.2)$$

---

<sup>2</sup> Si rimanda a [5] per una discussione dettagliata delle relazioni che intercorrono tra le trasformazioni generate dai vincoli (2.4.24) e le trasformazioni generali di coordinate.



in modo che la Hamiltoniana modificata  $H = H_0 + E[\gamma_{ij}]$  coincida asintoticamente con quella della teoria linearizzata. D'altra parte, in [20], Regge e Teitelboim hanno mostrato che, con un'appropriata definizione dello spazio funzionale in cui vivono le componenti  $g_{\mu\nu}(x)$  del campo gravitazionale, l'aggiunta di tale integrale diventa necessaria per ottenere delle equazioni del moto ben poste e corrette.

Se  $H$  è la corretta Hamiltoniana della teoria, allora le equazioni canoniche sono date da

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}, \quad (2.5.3a)$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}}. \quad (2.5.3b)$$

Introduciamo esplicitamente le espressioni dei vincoli (2.4.24) nell'integrale (2.5.1) che definisce  $H_0$  e consideriamone la variazione, tenendo tutti i termini. Si ha [20]

$$\begin{aligned} \delta H_0 = & \int d^3x [A^{ij}(x)\delta\gamma_{ij} + B_{ij}(x)\delta\pi^{ij}] - \\ & - \oint d^2\sigma_l G^{ijkl} (ND_k\delta\gamma_{ij} - N_{,k}\delta\gamma_{ij}) - \\ & - \oint d^2\sigma_l [2N_k\delta\pi^{kl} + (2N^k\pi^{jl} - N^l\pi^{jk})\delta\gamma_{jk}], \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

dove  $A^{ij}$  e  $B_{ij}$ , di cui ora non ci interessa la forma esplicita, devono coincidere con le derivate funzionali che appaiono nelle equazioni canoniche (2.5.3), affinché queste riproducano le equazioni di Einstein. Dunque, se gli integrali di superficie in (2.5.4) si annullano,  $H_0$  costituisce la Hamiltoniana corretta della teoria. Ciò accade nel caso di un universo chiuso, mentre si può mostrare che il primo dei due integrali è non nullo nel caso di un universo aperto e asintoticamente piatto. In tal caso la metrica ha, all'infinito spaziale, la stessa forma della metrica di Schwarzschild

$$ds^2 \sim - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \left(\delta_{ij} + \frac{r_H}{r} \frac{x_i x_j}{r^2}\right) dx^i dx^j, \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (2.5.5)$$

dove  $r_H$  è il raggio di Schwarzschild della sorgente. Tuttavia, per trattare gli integrali di superficie in (2.5.4), bisogna specificare ulteriormente il comportamento asintotico della metrica e, in particolare, assumiamo che per  $r \rightarrow \infty$

$$\pi^{ij} \sim r^{-2}, \quad (2.5.6a)$$

$$N - 1 \sim r^{-1}, \quad (2.5.6b)$$

$$N_{,k} \sim r^{-2}, \quad (2.5.6c)$$

$$N^i \sim r^{-1}, \quad (2.5.6d)$$

$$N^i_{,k} \sim r^{-2}, \quad (2.5.6e)$$

dove la prima condizione assicura che il comportamento asintotico della 3-metrica sia preservato sotto deformazioni dell'ipersuperficie  $\mathcal{S}_t$  che coinvolgano una trasformazione di Lorentz all'infinito spaziale [20]. Le altre quattro, invece, fissano il comportamento del lapse e dello shift in modo che si accordi con la forma asintotica (2.5.5) della metrica e fanno sì, inoltre, che le coordinate dello spaziotempo  $(t, x^i)$  diventino minkowskiane all'infinito spaziale.

Tenendo in considerazione le condizioni (2.5.6) l'unico integrale di superficie che rimane nella (2.5.4) è

$$\oint d^2\sigma_l G^{ijkl} D_k \delta\gamma_{ij} \quad (2.5.7)$$

che si può mostrare [20] essere uguale a  $E[\gamma_{ij}]$ . Dunque la Hamiltoniana che produce correttamente le equazioni del moto nel caso di universo aperto e asintoticamente piatto è data da

$$H = H_0 + E[\gamma_{ij}], \quad (2.5.8)$$

da cui si vede che  $E[\gamma_{ij}]$  costituisce l'energia del campo gravitazionale, in quanto  $H_0$  è vincolato ad annullarsi. Questo implica che per un universo chiuso il concetto di energia non ha senso [7].

# Capitolo 3

## Geometrodinamica quantistica

### 3.1 Il programma di quantizzazione canonica

Data una certa teoria classica, non è possibile ottenere da essa un'unica teoria quantistica. Quello che si può fare è partire da un certo numero di ipotesi ragionevoli e sperare che queste conducano a delle previsioni verificabili per via sperimentale, in modo da poter decidere sulla plausibilità della teoria elaborata. Come linee guida di tale ricerca, si sono sviluppate delle *regole di quantizzazione* capaci di condurre a risultati coerenti con le osservazioni sperimentali, un esempio su tutti sia l'elettrodinamica quantistica. Tuttavia, tali regole non possono essere considerate delle prescrizioni di validità generale. In sezione 1.5 si è introdotta la regola di Dirac, secondo la quale l'algebra degli osservabili quantistici è determinata dalla parentesi di Poisson dei rispettivi osservabili classici. D'altra parte si è anche mostrato come tale regola possa condurre a risultati non contraddittori solo nel caso in cui non compaiano delle anomalie nei commutatori.

La geometrodinamica quantistica è il tentativo di ottenere una teoria quantistica del campo gravitazionale applicando la regola di Dirac alla Relatività Generale, che costituisce dunque la teoria classica a cui far riferimento attraverso il principio di corrispondenza. Seguendo [3] cerchiamo di precisare il programma di quantizzazione esposto euristicamente in sezione 1.5.

#### *Sistemi semplici*

Consideriamo un sistema fisico il cui spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  sia una varietà reale e finito dimensionale. Lo spazio delle fasi  $\Gamma$  è dato allora dal fibrato<sup>1</sup> cotangente  $T^*\mathcal{C}$ . Assumiamo inoltre per ora che il sistema non abbia vincoli.

---

<sup>1</sup> Intuitivamente il fibrato cotangente può essere pensato come l'unione del duale degli spazi tangenti in ciascun punto della varietà, per una definizione rigorosa si rimanda a [17]

Innanzitutto bisogna individuare un insieme  $\mathcal{S}$  di variabili elementari classiche che abbiano un corrispettivo quantistico non ambiguo. Tale insieme deve soddisfare le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathcal{S}$  deve essere uno spazio vettoriale complesso, chiuso rispetto all'operazione consistente nel prendere le parentesi di Poisson di due dei suoi elementi;
- (ii)  $\mathcal{S}$  deve essere "sufficientemente ampio" di modo che qualsiasi funzione dello spazio delle fasi  $\Gamma$  sufficientemente regolare possa essere espressa come la somma, o il limite di una somma, di prodotti di elementi di  $\mathcal{S}$ .

Ci aspettiamo che la teoria quantistica che stiamo sviluppando, affinché sia fisicamente accettabile, abbia degli operatori "di configurazione" e di momento. Nella teoria classica, le variabili di configurazione sono date dalle funzioni di  $\Gamma$  indipendenti dai momenti, mentre le variabili di momento corrispondono a funzioni di  $\Gamma$  lineari nei momenti. Indichiamo con  $\mathcal{S}_0$  lo spazio di tali variabili e osserviamo che esso soddisfa i requisiti (i) e (ii). Infatti se  $f(q)$  e  $g(q)$  sono due variabili di configurazione e  $V^a(q)p_a$  e  $W^a(q)p_a$  sono due variabili di momento, è immediato verificare che

$$\{f(q), g(q)\} = 0, \quad (3.1.1a)$$

$$\{V^a(q)p_a, f(q)\} = -(\mathcal{L}_{\mathbf{V}}f)(q), \quad (3.1.1b)$$

$$\{V^a(q)p_a, W^b(q)p_b\} = -(\mathcal{L}_{\mathbf{V}}W^c)(q)p_c. \quad (3.1.1c)$$

Se si considerano variabili di ordine superiore nei momenti, per soddisfare la richiesta (i), è necessario che  $\mathcal{S}_0$  includa tutte le funzioni di fase. Ciò può essere dedotto dal fatto che la (3.1.1c) implica che se due variabili sono polinomiali nei momenti, rispettivamente di grado  $n$  e  $m$ , allora la parentesi di Poisson è polinomiale nei momenti e di grado  $n + m - 1$ . Tuttavia uno spazio delle variabili così ampio non permette di costruire una teoria quantistica senza ambiguità, in quanto, a causa del problema dell'*ordinamento dei fattori*, non è possibile associare in modo naturale un operatore ad un'arbitraria funzione di fase. Bisogna poi notare che  $\mathcal{S}_0$  contiene più elementi del necessario, nel senso che i suoi elementi sono vincolati da relazioni algebriche. Ad esempio, date due variabili di configurazione  $f(q)$  e  $g(q)$ , i loro complessi coniugati  $f^*(q)$  e  $g^*(q)$ , il loro prodotto  $f(q)g(q)$  e una qualsiasi loro combinazione lineare  $\alpha f(q) + \beta g(q)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , è ancora una variabile di configurazione e costituisce un elemento a sé di  $\mathcal{S}_0$ . In alcuni casi, tuttavia, tale ridondanza può essere in parte arginata scegliendo come spazio delle variabili elementari  $\mathcal{S}$  un sottoinsieme di  $\mathcal{S}_0$ .

Il passo successivo consiste nell'associare a ciascuna variabile elementare  $F \in \mathcal{S}$  un corrispondente operatore quantistico elementare  $\hat{F}$ , in modo tale che le relazioni lineari tra le variabili elementari classiche sia riprodotto dai corrispondenti operatori quantistici:

$$a^i \hat{F}_i = 0 \quad \iff \quad a^i F_i = 0, \quad \text{in } \mathcal{S}, \text{ con } a^i \in \mathbb{C}, \forall i. \quad (3.1.2)$$

Tutti gli altri operatori sono ottenuti prendendo somme di prodotti di quelli elementari. L'algebra  $\mathcal{A}$  di tali operatori può essere costruita [2, 3] a partire dall'algebra associativa generata dallo spazio vettoriale  $\mathcal{S}$ , imponendo le seguenti relazioni

$$[\hat{F}, \hat{G}] - i\hbar\widehat{\{F, G\}} = 0, \quad (3.1.3a)$$

$$[\hat{F}, \hat{G}]_+ - 2\widehat{FG} = 0, \quad (3.1.3b)$$

dove  $[\hat{F}, \hat{G}]_+ \equiv \hat{F}\hat{G} + \hat{G}\hat{F}$  indica l'anticommutatore di  $\hat{F}$  e  $\hat{G}$ . In particolare la richiesta (3.1.3b) implica che l'operatore corrispondente al prodotto di due variabili elementari è dato dal prodotto simmetrizzato degli operatori corrispondenti alle singole variabili.

Il terzo passo nel programma di quantizzazione consiste nell'introduzione di una relazione di involuzione sull'algebra  $\mathcal{A}$  che indichiamo con  $\star : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Posto che

$$\forall F, G \in \mathcal{S}, \quad \hat{F}^\star = \hat{G} \quad \text{se e solo se } F^\star = G, \quad (3.1.4)$$

richiediamo che l'operazione soddisfi le proprietà che definiscono un'involuzione:

$$(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})^\star = \alpha^\star\hat{A}^\star + \beta^\star\hat{B}^\star, \quad (3.1.5a)$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\star = \hat{B}^\star\hat{A}^\star, \quad (3.1.5b)$$

$$(\hat{A}^\star)^\star = \hat{A}, \quad (3.1.5c)$$

per ogni  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{A}$  e per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Se l'algebra  $\mathcal{A}$  è dotata di involuzione la indichiamo con  $\mathcal{A}^{(\star)}$  per distinguerla da una sprovvista di tale operazione.

Tralasciando per un attimo la relazione di involuzione, bisogna a questo punto scegliere una rappresentazione dell'algebra  $\mathcal{A}$  in operatori lineari agenti su un qualche spazio vettoriale complesso  $V$ . Come esempio possiamo considerare lo spazio  $V$  delle densità tensoriali<sup>2</sup> a valori complessi  $\Psi(q)$  di peso  $1/2$  regolari sullo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ . In tal caso, gli operatori astratti  $\widehat{f(q)} \equiv \widehat{Q}(f)$  e  $\widehat{V^a p_a} \equiv \widehat{P}(V)$  agiscono nel modo seguente

$$\widehat{Q}(f)\Psi(q) = f(q)\Psi(q), \quad (3.1.6a)$$

$$\widehat{P}(V)\Psi(q) = -i\hbar\mathcal{L}_V\Psi(q). \quad (3.1.6b)$$

L'ultimo step nella costruzione della teoria quantistica consiste nell'introduzione di un prodotto scalare  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  hermitiano appropriato sullo spazio  $V$ . A tal fine necessitiamo dell'operazione di involuzione astratta introdotta precedentemente, questa può infatti essere

---

<sup>2</sup> Per densità tensoriale intendiamo una mappa  $\epsilon \mapsto \mathbf{T}(\epsilon)$  dallo spazio dei tensori totalmente antisimmetrici di rango  $(0, n)$  allo spazio dei tensori di rango generico  $(p, q)$  su una certa varietà di dimensione  $n$ , tale che  $\mathbf{T}(\alpha\epsilon) = \alpha^s\mathbf{T}(\epsilon)$ , dove  $s$  è il *peso* della densità.

utilizzata per selezionare un appropriato prodotto scalare, richiedendo che  $\star$  rappresenti l'operazione di autoaggiunzione rispetto a tale prodotto

$$\langle \Phi \hat{A}^\star | \Psi \rangle = \langle \Phi \hat{A}^\dagger | \Psi \rangle = \langle \Phi | \hat{A} \Psi \rangle. \quad (3.1.7)$$

Nell'esempio citato, la richiesta (3.1.7) permette di ottenere l'unico prodotto scalare

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_C d^n q \Psi^*(q) \Phi(q), \quad (3.1.8)$$

dove l'integrale risulta ben definito in quanto  $\Psi^*(q)\Phi(q)$  è una densità di peso pari a uno [3].

### *Sistemi vincolati*

Supponiamo ora che il sistema fisico in esame sia soggetto ad un certo insieme di vincoli di prima classe  $\gamma_j(q, p) \approx 0$ . Per quanto riguarda i primi quattro passaggi nel programma di quantizzazione, possiamo semplicemente ignorare la presenza dei vincoli. Dunque, una volta costruita l'algebra involutiva  $\mathcal{A}^{(*)}$ , passiamo a scegliere uno spazio vettoriale  $V$  sul quale gli elementi di  $\mathcal{A}$  agiscono come operatori, ignorando l'operazione di involuzione. A questo punto, utilizziamo i vincoli per selezionare gli stati ammessi. Dobbiamo, innanzi tutto, individuare tra gli elementi di  $\mathcal{A}$  gli operatori  $\hat{\gamma}_j$  corrispondenti ai vincoli  $\gamma_j(q, p)$ . Tale passaggio può risultare non banale: se i vincoli sono quadratici o di ordine superiore nei momenti, bisogna risolvere il problema dell'ordinamento e non è detto che esista una via naturale per farlo. Una volta ottenuti gli operatori  $\hat{\gamma}_j$  possiamo selezionare gli stati fisici ammessi  $|\Psi\rangle$  e definire lo spazio  $V_{fis}$  in cui vivono, che coincide con l'unione dei kernels degli  $\hat{\gamma}_j$ :

$$V_{fis} = \{|\Psi\rangle \in V : \hat{\gamma}_j |\Psi\rangle = 0, \forall j\} \equiv \bigcup_j \ker(\hat{\gamma}_j).$$

Dobbiamo ora trovare una sotto-algebra  $\mathcal{A}_{fis}$  di  $\mathcal{A}$  i cui elementi mappino stati fisicamente ammessi in stati altrettanto ammessi. Non è detto, infatti, che ciò accada per un generico elemento di  $\mathcal{A}$ . Definendo

$$\mathcal{A}_{fis} = \left\{ \hat{A} \in \mathcal{A} : [\hat{A}, \hat{\gamma}_j] = \hat{f}_j^i \hat{\gamma}_i \right\},$$

gli operatori di  $\mathcal{A}_{fis}$  sono ben definiti su  $V_{fis}$ . In generale la relazione di involuzione  $\star$  in  $\mathcal{A}$  non induce un'involuzione su  $\mathcal{A}_{fis}$ , in quanto  $\hat{A}^\star$  può non appartenere a  $\mathcal{A}_{fis}$  benché  $\hat{A}$  vi appartenga. In tal caso non abbiamo alcuna ovvia prescrizione per selezionare un prodotto scalare hermitiano su  $V_{fis}$ . Se però i vincoli sono auto-involutivi  $\hat{\gamma}_j^\star = \hat{\gamma}_j$  e  $\mathcal{A}_{fis}$

consiste degli operatori che commutano<sup>3</sup> con i vincoli (ovvero gli operatori  $\hat{f}_j^i$  sono nulli), allora  $\hat{A}^*$  è un operatore fisico se  $\hat{A} \in \mathcal{A}_{fis}$ . In tal caso il programma di quantizzazione può essere completato.

## ***Relatività Generale***

Possiamo quindi riassumere il programma di quantizzazione canonica della teoria della Relatività Generale in sei punti [3].

- (i) Trovare un appropriato spazio  $\mathcal{S}$  di funzioni dello spazio delle fasi a valori complessi che sia chiuso rispetto alle parentesi di Poisson e tale che qualsiasi funzione di fase possa essere generata attraverso somme di prodotti degli elementi di  $\mathcal{S}$ .
- (ii) Costruzione dell'algebra  $\mathcal{A}$  degli operatori quantistici  $\hat{F}$  corrispondenti alle funzioni  $F$  di  $\mathcal{S}$  ed imporre le relazioni canoniche di commutazione (3.1.3a) e, se necessario, quelle di anticommutazione (3.1.3b).
- (iii) Definizione di un'operazione di involuzione  $\star$  su  $\mathcal{A}$ , richiedendo che se due variabili classiche  $F, G \in \mathcal{S}$  sono tali che  $F^* = G$  allora  $\hat{F}^* = \hat{G}$ .
- (iv) Scelta di una rappresentazione dell'algebra  $\mathcal{A}$  su uno spazio vettoriale  $V$ .
- (v) Selezione dello spazio degli stati fisici  $V_{fis}$  mediante l'imposizione della versione operatoriale dei vincoli.
- (vi) Estrazione dell'algebra involutiva  $\mathcal{A}_{fis}^{(\star)}$  che lascia invariato lo spazio  $V_{fis}$  e definizione di un prodotto scalare hermitiano su  $V_{fis}$  tale che la relazione di involuzione  $\star$  rappresenti l'operazione di aggiunta hermitiana sullo spazio di Hilbert risultante.

Seguendo DeWitt [7] scegliamo<sup>4</sup> come variabili di configurazione elementari le componenti della 3-metrica  $\gamma_{ij}$  e come variabili di momento i momenti coniugati  $\pi^{ij}$  definiti in (2.4.17c). Lo spazio  $\mathcal{S}$  allora coincide con lo spazio di funzioni generato dalle tredici funzioni  $(1, \gamma_{ij}, \pi^{ij})$  che risulta chiuso rispetto alle parentesi di Poisson. Associamo a tali variabili gli operatori

$$\gamma_{ij} \rightarrow \hat{\gamma}_{ij} \quad \text{e} \quad \pi^{ij} \rightarrow \hat{\pi}^{ij},$$

---

<sup>3</sup> Non è strettamente necessario che gli operatori commutino con i vincoli, se infatti sono auto-involutivi  $\hat{A}^* = \hat{A}$ , basta richiedere che valga  $[\hat{A}, \hat{\gamma}_j^i] = \hat{f}_j^i \hat{\gamma}_i$ , come avviene nel modello (2 + 1)-dimensionale della Relatività Generale [3].

<sup>4</sup> Si rimanda a [14] per altre scelte, come le variabili di Ashtekar.

tali che

$$[\hat{\gamma}_{ij}(x), \hat{\pi}^{kl}(y)] = i\hbar \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta^{(3)}(x - y). \quad (3.1.9)$$

Poiché  $\gamma_{ij}(x)$  e  $\pi^{ij}(x)$  sono funzioni reali, gli operatori corrispondenti devono essere auto-involutivi rispetto all'involuzione  $\star$  del punto (iii). Per quanto riguarda il passaggio successivo, scegliamo come  $V$  lo spazio dei funzionali  $\Psi[\gamma]$  e richiediamo che gli operatori elementari agiscano su tali funzionali nel modo seguente:

$$\hat{\gamma}_{ij}(x)\Psi[\gamma(x)] = \gamma_{ij}(x)\Psi[\gamma(x)], \quad (3.1.10a)$$

$$\hat{\pi}^{ij}(x)\Psi[\gamma(x)] = -i\hbar \frac{\delta\Psi[\gamma]}{\delta\gamma_{ij}(x)}. \quad (3.1.10b)$$

La determinazione degli stati fisici ammessi e dello spazio di Hilbert (punto (v) e punto (vi)) non possono essere affrontati in maniera univoca e gli approcci praticabili sono selezionati dal modo in cui si cerca di risolvere il *problema del tempo* [14], ammesso che questo esista [22–24].

## 3.2 Il problema del tempo

Le teorie fisiche che ad oggi trovano un riscontro sperimentale possono essere distinte in due categorie: teorie dipendenti da un background fisso, quali meccanica classica, meccanica quantistica e teorie quantistiche di campo; e teorie indipendenti dal background, ovvero la Relatività Generale. Le prime sono caratterizzate da una nozione di spazio e tempo di tipo sostanzialista [24], per cui essi sono considerati entità esistenti a priori, indipendentemente dalla presenza o dall'assenza di oggetti da descrivere. In particolare la Relatività Ristretta non modifica tale impostazione, se non sostituendo alla metrica euclidea delle teorie non relativistiche, quella minkowskiana. In Relatività Generale, invece, affinché vengano implementate tutte le simmetrie della teoria, è necessario che il concetto di spazio e di tempo, o meglio di localizzazione spaziotemporale, sia di tipo relazionale, come già discusso all'inizio del Capitolo 1. Nel tentativo di costruire una teoria quantistica del campo gravitazionale, partendo dalla Relatività Generale, questa differenza concettuale è causa di alcune difficoltà che vengono generalmente indicate come *problema del tempo*.

In Relatività Generale il tempo è una coordinata e pertanto non ha contenuto fisico, infatti la covarianza generale della teoria implica che le sue predizioni fisiche non possano dipendere dalle coordinate. D'altra parte, in meccanica quantistica, la dipendenza dal background contraddistingue i seguenti aspetti della teoria [13]:

- (i) Il tempo non costituisce un osservabile fisico analogo agli altri, in quanto non è presente nella teoria un operatore ad esso corrispondente. In tal senso il tempo costituisce un parametro di background che consente di descrivere l'evoluzione del



sistema attraverso l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \hat{H} \psi_t.$$

- (ii) Nell'interpretazione di Copenaghen un osservabile è una quantità misurata in un singolo istante di tempo (processo di misura istantaneo).
- (iii) Si richiede che il prodotto scalare sullo spazio di Hilbert degli stati sia conservato dall'evoluzione temporale determinata dall'equazione di Schrödinger.
- (iv) Per costruire lo spazio di Hilbert degli stati è richiesto un insieme di operatori commutanti ad un istante fissato di tempo.

Benché il tempo compaia esplicitamente nell'equazione di Schrödinger, questo non può essere misurato da alcun orologio fisico. Un sistema che fosse in grado di farlo, infatti, non potrebbe avere energia definita positiva [26].

Seguendo Isham [13] e Kiefer [14], possiamo distinguere tre possibili idee guida per affrontare il problema del tempo.

**Tempus ante quantum** Il tempo viene identificato come un funzionale delle variabili canoniche e i vincoli sono risolti, eliminando i gradi di libertà aggiuntivi, prima della quantizzazione.

**Tempus post quantum** I vincoli vengono imposti dopo la quantizzazione. Gli stati vengono rappresentati da funzionali della 3-metrica e il tempo viene recuperato dalla soluzione dell'equazione di Wheeler-DeWitt, ottenuta imponendo uno dei vincoli.

**Tempus nihil est** Non viene introdotto alcun nuovo concetto di tempo, ma si mantiene quello della Relatività Generale.

Per una rassegna completa dei diversi approcci si rimanda a [13]. Qui ci limiteremo a introdurre l'equazione di Wheeler-DeWitt che costituisce la base del secondo tipo di approccio e di alcune interpretazioni riconducibili al terzo tipo.

### 3.3 L'equazione di Wheeler-DeWitt

Consideriamo il vincolo hamiltoniano (2.4.25a) e il vincolo dei diffeomorfismi (2.4.25b), ordinati in modo che le  $\gamma_{ij}$  compaiano alla sinistra dei momenti  $\pi^{ij}$  [7]. Definiamo le variabili stemperate (*smearred out*)

$$H[N] = \int_{\mathcal{S}} d^3x N(x) \mathcal{H}_{\perp}(x), \quad (3.3.1a)$$

$$H[\mathbf{N}] = \int_{\mathcal{S}} d^3x N^k(x) \mathcal{H}_k(x), \quad (3.3.1b)$$

dove  $N$  e  $\mathbf{N}$  sono rispettivamente un campo scalare e un campo vettoriale arbitrari sull'ipersuperficie  $\mathcal{S}$ . Allora l'algebra dei vincoli, detta *algebra di Dirac*, può essere scritta come [13]

$$\{H[\mathbf{N}_1], H[\mathbf{N}_2]\} = H[\mathcal{L}_{\mathbf{N}_2}\mathbf{N}_1], \quad (3.3.2a)$$

$$\{H[\mathbf{N}], H[N]\} = H[\mathcal{L}_{\mathbf{N}}N], \quad (3.3.2b)$$

$$\{H[N_1], H[N_2]\} = H[\boldsymbol{\eta}], \quad (3.3.2c)$$

dove il vettore  $\boldsymbol{\eta}$  nella (3.3.2c) è dato da

$$\eta^k(x) = \gamma^{kl} (N_1 D_j N_2 - N_2 D_j N_1). \quad (3.3.3)$$

La presenza dell'inverso  $\gamma^{ij}$  della 3-metrica in tale termine fa sì che l'algebra di Dirac non sia un'algebra di Lie: invece di costanti di struttura si hanno infatti delle funzioni delle variabili canoniche, per cui si parla di *algebra aperta*. I vincoli (3.3.1) generano le seguenti trasformazioni infinitesime sulle variabili canoniche

$$\delta\gamma_{ij} = \{\gamma_{ij}, H[N] + H[\mathbf{N}]\}, \quad (3.3.4a)$$

$$\delta\pi^{ij} = \{\pi^{ij}, H[N] + H[\mathbf{N}]\}. \quad (3.3.4b)$$

Poiché l'algebra di Lie del gruppo  $\text{Diff}(\mathcal{S})$  dei diffeomorfismi sull'ipersuperficie  $\mathcal{S}$  è rappresentata dai campi vettoriali  $\mathbf{N}$  su  $\mathcal{S}$ , con parentesi di Lie data dal commutatore dei campi, possiamo vedere che la (3.3.2a) implica che  $H[\mathbf{N}]$  genera i diffeomorfismi sull'ipersuperficie. In modo simile  $H[N]$  può essere interpretato come il generatore delle deformazioni dell'ipersuperficie ad essa ortogonali [13].

Imponiamo ora i vincoli nella rappresentazione di Wheeler (3.1.10)

$$\mathcal{H}_\perp(x; \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\pi}^{kl})\Psi[\gamma] = 0, \quad (3.3.5a)$$

$$\mathcal{H}_a(x; \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\pi}^{kl})\Psi[\gamma] = 0. \quad (3.3.5b)$$

La relazione (3.3.5a) è anche detta *equazione di Wheeler-DeWitt* e può essere esplicitata come [7]:

$$\left( \hbar^2 G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}} \frac{\delta}{\delta\gamma_{kl}} + \gamma^{1/2} (R - 2\Lambda) \right) \Psi[\gamma] = 0, \quad (3.3.6)$$

tuttavia tale ordinamento, in cui i fattori contenenti la metrica sono posti a sinistra di quelli contenenti i momenti, è arbitrario. Inoltre la presenza di un operatore differenziale funzionale di ordine due richiede un'opportuna regolarizzazione dell'operatore di Wheeler-DeWitt, che ad oggi non si è riuscito ad ottenere [25]. Un discorso analogo vale per il vincolo dei diffeomorfismi (3.3.5b). La situazione risulta migliore utilizzando la rappresentazione di Ashtekar, per cui si rimanda a [3].

DeWitt [7] ha notato che l'equazione (3.3.6) presenta una certa analogia formale con l'equazione di Klein-Gordon (1.6.4). Si può infatti notare che la metrica  $G_{ijkl}$ , avendo

segnatura  $(-, +, +, +, +, +)$ , ha carattere iperbolico come la metrica di Minkowki. È dunque possibile interpretare il termine cinetico nella (3.3.6) come l'equivalente dell'operatore di Laplace nel *superspazio* delle 3-metriche. Il termine  $\gamma^{1/2}(R - 2\Lambda)$ , invece, può essere messo in corrispondenza con il termine di massa dell'equazione (1.6.4). Per tale motivo, nello stesso articolo, DeWitt ha proposto di utilizzare un prodotto scalare “alla Klein-Gordon”

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = i \int \prod_x d\Sigma^{ij}(x) \Psi_1^*[\gamma] \left( G_{ijkl} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\gamma_{kl}} - \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\gamma_{kl}} G_{ijkl} \right) \Psi_2[\gamma] = \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle^*, \quad (3.3.7)$$

dove  $d\Sigma^{ij}(x)$  rappresenta l'elemento di superficie  $5 \times \infty^3$ -dimensionale nel superspazio  $6 \times \infty^3$ -dimensionale. Se invece della metrica  $\gamma_{ij}$  utilizziamo come variabili il fattore di scala  $\zeta = \sqrt{\gamma}$  e la parte conforme della 3-metrica  $\zeta_{ij} = \gamma^{-1/3}\gamma_{ij}$ , l'equazione di Wheeler-DeWitt può essere riscritta come [14]:

$$\left( -\frac{3}{8}\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta\zeta^2} + \frac{\hbar^2}{\zeta^2} \zeta_{ij} \zeta_{kl} \frac{\delta}{\delta\zeta_{ij}} \frac{\delta}{\delta\zeta_{kl}} + R - 2\Lambda \right) \Psi[\zeta, \zeta_{ab}] = 0, \quad (3.3.8)$$

per cui l'integrale in (3.3.7) consiste in un'integrazione sull'ipersuperficie  $\zeta = \text{costante}$  del superspazio. Analogamente a quanto accade per il campo di Klein-Gordon, tale prodotto non è positivo definito e, in particolare, si ha  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 0$  se  $\Psi$  è reale. Poiché l'equazione di Wheeler-DeWitt è reale ci aspettiamo che soluzioni reali esistano ed abbiano significato fisico, tuttavia il prodotto (3.3.7) non permette di dare un'interpretazione probabilistica del funzionale d'onda.

Benché non si riesca a trovare una soluzione generale dell'equazione di Wheeler-DeWitt, neanche a livello formale, è possibile analizzare modelli con particolari simmetrie o in cui vengono fatte alcune approssimazioni grazie alle quali il problema viene notevolmente semplificato e si può tentare di recuperare un'interpretazione del formalismo sviluppato.

### 3.4 Minisuperspazio dell'universo di Friedman

Data la difficoltà di risolvere i vincoli quantistici (3.3.5) nel caso generale, si può tentare di analizzare casi particolari in cui si richiede esplicitamente la presenza di certe simmetrie. D'altra parte lo stesso approccio si utilizza nel risolvere l'equazione di campo di Einstein quando si assume che esistano dei campi di Killing, che implementano, ad esempio, la simmetria sferica della metrica. Riducendo la dimensionalità dello spazio delle configurazioni (superspazio), si possono sviluppare dei modelli che, sebbene non descrivano la realtà fisica, possono far luce su aspetti della teoria indipendenti dal numero di gradi di libertà. È ad esempio possibile trattare il problema del tempo, il ruolo dell'osservatore e il limite semiclassico [14]. Si può inoltre discutere la struttura dell'equazione d'onda e l'implementazione delle condizioni al contorno.

In geometrodinamica quantistica il superspazio  $\mathfrak{M}$  [7] è costituito dal quoziente dello spazio Riem( $\mathcal{S}$ ) delle 3-metriche della varietà  $\mathcal{S}$  con il gruppo dei diffeomorfismi  $\text{Diff}(\mathcal{S})$  generati dal vincolo dei diffeomorfismi (2.4.25b)

$$\mathfrak{M} = \text{Riem}(\mathcal{S})/\text{Diff}(\mathcal{S}).$$

Richiedendo delle simmetrie che riducono gli infiniti gradi di libertà di  $\mathfrak{M}$  ad un numero finito, si ottiene uno spazio delle configurazioni detto *minisuperspazio*. Tale modello è spesso applicato in cosmologia. Consideriamo come esempio l'universo di Friedmann piatto con un campo scalare non massivo. Tale modello risulta caratterizzato dal fattore di scala  $a(t)$  e dal campo omogeneo nelle coordinate spaziali  $\phi(t)$ . L'omogeneità e l'isotropia di tale universo permettono di esprimere l'elemento di linea classico attraverso l'ansatz

$$ds^2 = -N(t)dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.4.1)$$

dove il lapse  $N(t)$  garantisce l'invarianza per riparametrizzazione della coordinata di tipo tempo. In unità tali che  $2G_N/3\pi = 1$  la parte gravitazionale dell'azione è data da

$$S_g = \frac{1}{2} \int dt N \left( -\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + a - \frac{\Lambda a^3}{3} \right), \quad (3.4.2)$$

con  $\Lambda$  costante cosmologica. Riscalando il campo  $\phi \rightarrow \phi/(\pi\sqrt{2})$  e ponendo  $m/\hbar \rightarrow m$ , il contributo all'azione dato dal campo scalare è

$$S_m = \frac{1}{2} \int dt N a^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - m^2 \phi^2 \right). \quad (3.4.3)$$

Se indichiamo con  $q^1 = a$  e  $q^2 = \phi$ , possiamo scrivere l'azione totale del modello di minisuperspazio come [14]

$$S = \int dt N \left( \frac{1}{2} G_{AB} \frac{\dot{q}^A \dot{q}^B}{N^2} - V(q) \right), \quad (3.4.4)$$

dove  $G_{AB}$  è la metrica di DeWitt del minisuperspazio 2-dimensionale delle configurazioni ed è data esplicitamente da

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Seguendo la procedura descritta nel Capitolo 1 osserviamo che si ha il vincolo primario

$$\pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (3.4.6)$$

mentre i momenti dinamici sono dati da

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{a\dot{a}}{N}, \quad (3.4.7a)$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 \dot{\phi}}{N}. \quad (3.4.7b)$$

Possiamo dunque scrivere l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \pi_N \dot{N} + \pi_a \dot{a} + \pi_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{N}{2} \left( -\frac{\pi_a^2}{a} + \frac{\pi_\phi^2}{a^3} - a + \frac{\Lambda a^3}{3} + m^2 a^3 \phi^2 \right) \\ &\equiv N \left( \frac{1}{2} G^{AB} \pi_A \pi_B + V(q) \right) \equiv N \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

dove  $G^{AB}$  è l'inverso della metrica di DeWitt che compare nell'azione (3.4.4). La richiesta che il vincolo primario sia preservato dal flusso hamiltoniano

$$\{\pi_N, H\} \approx 0, \quad (3.4.9)$$

conduce al vincolo hamiltoniano  $\mathcal{H} \approx 0$ . Poiché nell'ansatz (3.4.1) non compare il vettore di shift, non si hanno vincoli dei diffeomorfismi. Inoltre si può osservare che il vincolo hamiltoniano, esplicitando gli impulsi in funzione delle velocità, coincide con l'equazione di Friedmann

$$\dot{a}^2 = -1 + a^2 \left( \dot{\phi}^2 + \frac{\Lambda}{3} + m^2 \phi^2 \right). \quad (3.4.10)$$

La variazione dell'azione (3.4.4) rispetto al campo  $\phi$  dà

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{\phi} + m^2 \phi = 0, \quad (3.4.11)$$

che può essere risolta analiticamente solo nel caso in cui il campo sia non massivo [14].

Per quantizzare il modello di minisuperspazio dobbiamo risolvere il vincolo hamiltoniano per individuare gli stati ammessi, descritti dalla funzione d'onda  $\psi(a, \phi)$

$$\left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} \left( a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\hbar^2} V(q) \right] \psi(a, \phi) = 0, \quad (3.4.12)$$

dove l'ordinamento dei fattori è stato scelto in modo che il termine cinetico sia invariante per trasformazioni nello spazio delle configurazioni. Se consideriamo una lunghezza di riferimento  $a_0$ , tipicamente la lunghezza di Planck  $l_p$ , possiamo definire una nuova coordinata  $\alpha = \ln(a/a_0)$  e riscrivere la (3.4.12) come

$$\frac{e^{-3\alpha}}{2} \left[ \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - e^{-4\alpha} + e^{6\alpha} \left( m^2 \phi^2 + \frac{\Lambda}{3} \right) \right] \psi(\alpha, \phi) = 0, \quad (3.4.13)$$

dove per semplicità si è posto  $a_0 = 1$ . La variabile  $\alpha$  ha il vantaggio di prendere valori su tutta la retta reale, per cui non si pongono problemi riguardanti la restrizione dello spazio delle configurazioni. Si può poi notare che la (3.4.13) ha la forma dell'equazione di Klein-Gordon con un termine di massa non costante rappresentato dal potenziale

$$V(\alpha, \phi) = -e^{-4\alpha} + e^{6\alpha} \left( m^2 \phi^2 + \frac{\Lambda}{3} \right). \quad (3.4.14)$$

Poiché tale potenziale può essere anche negativo il sistema può sviluppare un comportamento “tachionico” rispetto alla supermetrica  $G_{AB}$ . Ciò non costituisce tuttavia una contraddizione, in quanto il minisuperspazio delle configurazioni non ha nulla a che vedere con lo spaziotempo. La (3.4.13) può essere riespressa come

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = h^2(\alpha) \psi, \quad (3.4.15)$$

da cui si può vedere che la variabile  $\alpha$  può essere interpretata come un tempo intrinseco del sistema. Poiché il potenziale (3.4.14) non è invariante rispetto all'inversione di  $\alpha$ , il sistema non è invariante rispetto all'inversione del tempo intrinseco. Ciò può essere messo in relazione con il problema dell'origine dell'irreversibilità [14].

Tale modello permette di mostrare un approccio al problema del tempo del tipo *tempus ante quantum*, sviluppato da Barvinski e Kamenchtchik in [4]. Supponiamo per semplicità di avere  $\Lambda = 0$  e  $m = 0$ . In tal caso l'azione (3.4.4) si riduce a

$$S = \frac{1}{2} \int dt \left[ \frac{e^{3\alpha}}{N} \left( -\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \right) + N e^\alpha \right] \quad (3.4.16)$$

da cui è immediato vedere che in tal caso l'impulso  $\pi_\phi$  legato al grado di libertà introdotto dal campo materiale è un integrale del moto

$$\pi_\phi = \frac{e^{3\alpha} \dot{\phi}}{N} = \text{cost.} \quad (3.4.17)$$

Inoltre variando tale azione rispetto al lapse si ottiene l'equazione di Friedmann

$$\dot{\alpha}^2 = -1 + a^2 \dot{\phi}^2. \quad (3.4.18)$$

Passando al formalismo hamiltoniano, la (3.4.16) diventa

$$S = \int dt \pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\phi \dot{\phi} - N \mathcal{H}, \quad (3.4.19)$$

dove il vincolo hamiltoniano  $\mathcal{H}$  che genera la dinamica del sistema può essere espresso come

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \pi_\phi^2 - \pi_\alpha^2 - e^{4\alpha} \right) \quad (3.4.20)$$

attraverso un'opportuna trasformazione  $\mathcal{H} \rightarrow e^{3\alpha}\mathcal{H}$ , permessa in quanto il suo effetto è solo di cambiare la base dello spazio dei vincoli [4, 12]. Per eliminare i gradi di libertà di gauge possiamo fissare

$$\chi = T(\alpha, \pi_\alpha) - t = 0, \quad (3.4.21)$$

dove  $T = T(\alpha, \pi_\alpha)$  è una nuova variabile canonica, che si richiede essere monotonamente crescente rispetto alla variabile di tipo tempo  $t$ , almeno nel limite classico. Nei modelli cosmologici che oltre ad una fase di espansione presentano anche una fase di contrazione, il fattore di scala  $a(t)$  non soddisfa tale requisito e non può dunque essere identificato con  $t$ . Possiamo scegliere allora una funzione che dipenda anche dal momento  $\pi_\alpha$ , detta *tempo estrinseco* [4]. Sia  $\lambda$  una costante reale, allora una scelta possibile è

$$T(\alpha, \pi_\alpha) = \lambda\pi_\alpha e^{-2\alpha}, \quad (3.4.22)$$

il cui momento coniugato  $\pi_T$  è dato da

$$\pi_T = -\frac{1}{2\lambda}e^{2\alpha}. \quad (3.4.23)$$

È immediato vedere che la trasformazione  $(\alpha, \pi_\alpha) \rightarrow (T, \pi_T)$  è canonica. Invertendo la (3.4.22) e la (3.4.23) e inserendo le espressioni per  $\alpha$  e  $\pi_\alpha$  così ottenute nella (3.4.20) si ottiene

$$\pi_T = \frac{\sigma|\pi_\phi|}{4\sqrt{T^2 + \lambda^2}}, \quad (3.4.24)$$

dove  $\sigma = \pm 1$ . L'Hamiltoniana che descrive la dinamica del sistema, una volta eliminati i gradi di libertà di gauge è data da [4]

$$H_{fis}(\pi_\phi, t) = -\pi_T \Big|_{T=t} = -\frac{\sigma|\pi_\phi|}{4\sqrt{t^2 + \lambda^2}}, \quad (3.4.25)$$

a cui corrisponde l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda fisica nella rappresentazione degli impulsi

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{fis}(t, \pi_\phi)}{\partial t} = H_{fis}(\hat{\pi}_\phi, t) \psi_{fis}(t, \pi_\phi). \quad (3.4.26)$$

Non è difficile vedere che una soluzione di tale equazione è data da

$$\psi_{fis}(t, \pi_\phi) = \psi_0(\pi_\phi) \exp \left[ \frac{i\sigma|\pi_\phi|}{4\hbar} \operatorname{arcsinh}(t/\lambda) \right], \quad (3.4.27)$$

dove  $\psi_0(\pi_\phi)$  è una funzione arbitraria, da fissare imponendo le condizioni iniziali per  $t = 0$  dell'equazione (3.4.26). A partire da tale funzione d'onda si può costruire una soluzione dell'equazione di Wheeler-DeWitt che rende lo schema di quantizzazione di Dirac consistente. Si rimanda a [4] per un'analisi approfondita.

### 3.5 Osservabili parziali

In [21] Reisenberg e Rovelli presentano una formulazione della meccanica quantistica ordinaria che prescinde dall'assegnazione di un ruolo speciale al tempo. Ciò può essere ottenuto ammettendo la possibilità che il processo di misura di un osservabile non sia istantaneo, come invece è prescritto dagli assiomi dell'interpretazione di Copenaghen.

Consideriamo una particella libera non relativistica in una dimensione spaziale, allora la sua funzione d'onda  $\psi(t, x)$  obbedisce all'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x). \quad (3.5.1)$$

Lo spazio di Hilbert della teoria può essere identificato con lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$  delle funzioni a valori complessi, con quadrato sommabile e definite sulla retta reale. La funzione d'onda generica  $\psi(t, x)$  è rappresentata attraverso le funzioni  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  che sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo. Sia  $|x\rangle$  un autostato dell'operatore di posizione  $\hat{q}$  e sia  $|x, t\rangle$  un autostato dell'operatore di posizione  $\hat{q}(t)$  nella rappresentazione di Heisenberg. Allora si ha  $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$  e  $\psi(t, x) = \langle x, t|\psi\rangle$  e il propagatore  $W(x, t; x', t')$  dell'equazione di Schrödinger può essere ottenuto da

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) W(x, t; x', t') = \delta(t - t') \delta(x - x'). \quad (3.5.2)$$

Possiamo dunque scrivere

$$\psi(t, x) = \int dx' W(x, t; x', 0) \phi(x'). \quad (3.5.3)$$

Sia ora  $f(t, x)$  una funzione sufficientemente regolare dello spaziotempo, è evidente che la funzione

$$\psi_f(t, x) = \int dt' \int dx' W(x, t; x', t') f(t', x') \quad (3.5.4)$$

è ancora soluzione dell'equazione di Schrödinger (3.5.1). Diremo che la  $\psi_f(t, x)$  è la funzione d'onda rappresentante uno *stato spaziotemporale*

$$|f\rangle = \int dt \int dx f(x, t) |x, t\rangle \quad (3.5.5)$$

e si può verificare che il prodotto scalare tra due di questi stati è definito dal propagatore, infatti

$$\langle f|g\rangle = \int dt \int dx \int dt' \int dx' f^*(x, t) W(x, t; x', t') g(x', t'). \quad (3.5.6)$$

Una classe di stati spaziotemporali di particolare utilità è quella degli stati associati a delle regioni di spaziotempo  $\mathcal{R}$  piccole rispetto alle scale di lunghezza e di tempo tipiche



del sistema. Tali stati sono definiti utilizzando come funzione  $f$  la funzione caratteristica  $\chi_{\mathcal{R}}(t, x)$  della regione  $\mathcal{R}$

$$|\mathcal{R}\rangle = C_{\mathcal{R}} \int dt \int dx \chi_{\mathcal{R}}(t, x) |x, t\rangle = C_{\mathcal{R}} \int dt \int dx |x, t\rangle, \quad (3.5.7)$$

dove  $C_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R} | \mathcal{R} \rangle^{1/2}$  è una costante di normalizzazione che dipende dalla regione  $\mathcal{R}$  e dal propagatore. Rimuovendo l'idealizzazione di misure istantanee, possiamo vedere che gli stati spaziotemporali costituiscono una rappresentazione più naturale rispetto a quella degli stati istantanei (3.5.3). Supponiamo di trovare al tempo  $t = 0$  una particella in  $x = 0$ , poiché nessun apparato può risolvere tale posizione con precisione infinita, possiamo rappresentare tale particella con un pacchetto d'onda che si estende in una regione spaziale di dimensioni pari alla risoluzione dello strumento

$$|\phi\rangle = \int dx f(x) |x\rangle, \quad (3.5.8)$$

dove  $f$  è una funzione “concentrata” intorno a  $x = 0$ . Analogamente possiamo dire che nessuno strumento può risolvere con precisione infinita l'intervallo di tempo in cui avviene l'interazione con la particella. Se questa viene rilevata in  $x = 0$  all'istante  $t = 0$  da un apparato caratterizzato da una risoluzione spaziale  $\xi$  e una temporale  $\eta$ , il suo stato può essere rappresentato [21] da

$$|f\rangle = \int dt \int dx f(t, x) |x, t\rangle, \quad (3.5.9)$$

con  $f$  rapidamente decrescente al di fuori del rettangolo  $[-\eta, \eta] \times [-\xi, \xi]$ . Sia  $\mathcal{E}$  lo spazio lineare delle funzioni di prova  $f$  e sia  $\hat{C} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  l'operatore di Schrödinger

$$\hat{C} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (3.5.10)$$

allora possiamo definire la forma bilineare su  $\mathcal{E}$

$$(f', f)_C = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dt dx f'^*(t, x) \left[ e^{i\tau \hat{C}} f \right] (t, x). \quad (3.5.11)$$

Utilizzando la trasformata di Fourier, si può mostrare coincidere con il prodotto scalare dei due stati spaziotemporali  $|f'\rangle$  e  $|f\rangle$  dato dalla (3.5.6)

$$(f', f)_C = \int dx' dt' dx dt f'^*(x', t') W(x', t'; x, t) f(x, t) = \langle f' | f \rangle, \quad (3.5.12)$$

per cui il propagatore costituisce il nucleo integrale della forma bilineare definita in (3.5.11).

Più in generale, sia  $\mathcal{C}$  lo spazio delle configurazioni di un sistema generalmente covariante. Se il sistema non è tale, può essere riparametrizzato come discusso nel Capitolo 1 e  $\mathcal{C}$  è detto spazio delle configurazioni esteso. Allora la descrizione quantistica del sistema è tutta contenuta nella coppia  $(\mathcal{C}, \hat{C})$ , dove  $\hat{C}$  è l'operatore di Wheeler-DeWitt<sup>5</sup> o Superhamiltoniano definito sullo spazio delle funzioni test  $\mathcal{E}$ . Allora definendo la forma bilineare  $(f', f)_C$ , per ogni  $f', f \in \mathcal{E}$ , in analogia alla (3.5.11), lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  degli stati quantici può essere ottenuto dal completamento del quoziente di  $\mathcal{E}$  con il nucleo della forma  $(\cdot, \cdot)_C$  [21]. Il propagatore  $W$ , rappresentante il nucleo integrale della forma, codifica invece la dinamica del sistema quantistico. Si ottiene così una teoria quantistica senza dover scegliere un parametro temporale di background.

Consideriamo una regione  $\mathcal{R}$  dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ . Possiamo associare a tale regione uno stato normalizzato

$$|\mathcal{R}\rangle = C_{\mathcal{R}} |\chi_{\mathcal{R}}\rangle, \quad (3.5.13)$$

dove  $\chi_{\mathcal{R}}$  è la funzione caratteristica della regione e  $C_{\mathcal{R}} = \langle \chi_{\mathcal{R}} | \chi_{\mathcal{R}} \rangle^{1/2}$  è il fattore di normalizzazione. Possiamo dare un'interpretazione della teoria postulando che se  $\mathcal{R}$  è una regione molto piccola, rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema, allora la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\psi\rangle$  nella regione  $\mathcal{R}$  è data da

$$P_{\mathcal{R}} = |\langle \mathcal{R} | \psi \rangle|^2. \quad (3.5.14)$$

In particolare la quantità

$$A_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'} = \langle \mathcal{R} | \mathcal{R}' \rangle = C_{\mathcal{R}} C_{\mathcal{R}'} \int_{\mathcal{R}} d\xi \int_{\mathcal{R}'} d\eta W(\xi, \eta) \quad (3.5.15)$$

rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare il sistema in una regione  $\mathcal{R}$  dopo che sia stato trovato in  $\mathcal{R}'$ .

## *Osservabili*

In meccanica quantistica definiamo un osservabile come una grandezza fisica misurabile, a cui corrisponde un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert nel formalismo matematico della teoria. Evidentemente, in tale contesto, il tempo costituisce un "osservabile" di tipo diverso, in quanto ad esso non può essere associato nessun operatore [26]. D'altra parte, per un sistema vincolato, è necessario richiedere anche che un osservabile sia

---

<sup>5</sup> L'operatore di Schrödinger definito in (3.5.10) è solo un caso particolare dell'operatore di Wheeler-DeWitt ottenuto dal vincolo superhamiltoniano che caratterizza i sistema invarianti per riparametrizzazione temporale.

gauge invariante ai fini della coerenza e del valore predittivo della teoria. Ciò implica, per un sistema generalmente covariante, che gli osservabili commutino con l'operatore di Wheeler-DeWitt, ovvero che restino invariati in seguito all'evoluzione del sistema rispetto al tempo coordinato  $t$ . Tuttavia questo non ha nulla a che vedere con il tempo misurato da un certo orologio (tempo proprio lungo la sua linea di mondo) e dunque tali conclusioni non implicano in alcun modo che la teoria descriva un sistema statico (*frozen time*). Inoltre bisogna notare che la presunta assenza del tempo (come delle coordinate spaziali) non è una peculiarità della teoria quantistica [24], ma è una caratteristica già presente nella formulazione classica della Relatività Generale. Ciò è evidente nella formulazione di Hamilton-Jacobi della teoria, riassunta nelle equazioni<sup>6</sup>

$$G_{ijkl} \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{kl}} + \gamma^{1/2} R = 0, \quad (3.5.16a)$$

$$D_k \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma_{kl}} = 0, \quad (3.5.16b)$$

dove  $G_{ijkl}$  è la metrica di DeWitt. Tali relazioni permettono di descrivere tutti sistemi solitamente trattati in Relatività Generale, benché non contengano in alcun modo il tempo coordinato  $t$ .

Dal punto di vista concettuale può essere utile definire come osservabile una quantità relativa che esprime la correlazione tra due o più variabili dinamiche [23]. In particolare possiamo distinguere due categorie di osservabili:

**Osservabili parziali** grandezze fisiche alle quali possiamo associare una procedura di misura che conduce ad un valore numerico della grandezza;

**Osservabili completi** grandezze i cui valori possono essere predetti da una teoria classica oppure, nell'ambito di una teoria quantistica, di cui è possibile prevedere la distribuzione di probabilità dei valori.

Per chiarire tale distinzione, consideriamo un semplice esempio classico, come può essere un grave di massa  $m$  nel campo gravitazionale approssimativamente uniforme in prossimità della superficie terrestre. Posta  $g$  l'accelerazione gravitazionale uniforme, la meccanica newtoniana fornisce la legge

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -g, \quad (3.5.17)$$

---

<sup>6</sup> È facile vedere che tali equazioni possono essere ottenute dall'equazione di Wheeler-DeWitt della geometrodinamica quantistica (3.3.5a) e dal relativo vincolo dei diffeomorfismi (3.3.5b) nell'approssimazione WKB

$$\Psi[\gamma] \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\gamma]\right).$$

dove  $x$  è la quota del grave rispetto alla superficie terrestre. Per verificare tale modello utilizzeremo uno strumento che misuri la posizione  $x$  e un orologio che misuri l'istante  $t$ . Il nostro modello teorico, tuttavia, non ci dice nulla sui valori di  $t$ , né su quelli di  $x$ , a meno che non si specifichi che il valore di  $x$  di cui si è interessati è quello ad un certo istante di tempo. In tal senso  $x$  e  $t$  sono osservabili parziali. D'altra parte abbiamo una famiglia  $x(t) \equiv \{x(t)\}_{t \in I \subset \mathbb{R}}$  di osservabili completi indicizzata dal parametro reale  $t$ . In tal senso la teoria prevede solo la correlazione tra gli osservabili parziali  $x$  e  $t$ , che per il grave in esame è data da

$$f(x, t; \alpha, \beta) = x - \alpha - \beta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0, \quad (3.5.18)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano la posizione e la velocità iniziali e indicano il fatto che la relazione predetta è di tipo parametrico. Da questo punto di vista gli osservabili parziali possono essere posti sullo stesso piano, benché la teoria non li tratti in modo simmetrico: possiamo, infatti, sempre risolvere la (3.5.18) per esprimere  $x$  in funzione di  $t$ , ma non è vero il contrario. Tale asimmetria ci porta a distinguere, nelle teorie dipendenti dal background, tra osservabili parziali dipendenti e indipendenti. Ciò non accade, però, nelle teorie indipendenti dal background.

Per vedere come il concetto di osservabilità fin qui esposto viene incorporato nella formulazione covariante della meccanica quantistica, passiamo dal grave a descrivere un sistema generico caratterizzato da  $n$  osservabili parziali  $q^\alpha$  che formano lo spazio delle configurazioni (*esteso*). La dinamica del sistema è descritta dall'equazione di Hamilton-Jacobi

$$C\left(q^\alpha, \frac{\partial S(q)}{\partial q^\alpha}\right) = 0, \quad (3.5.19)$$

di cui si cerca la famiglia a  $n$  parametri di soluzioni  $S(q^\alpha, Q^\alpha)$ , con  $Q^\alpha$  costanti di integrazione. La teoria allora permette di trovare  $n$  relazioni tra gli osservabili parziali date da

$$f(q^\alpha; Q^\alpha, P_\alpha) = \frac{\partial S(q, Q)}{\partial Q^\alpha} - P_\alpha = 0, \quad (3.5.20)$$

che rappresentano  $n$  relazioni parametrizzate da  $2n$  parametri non tutti indipendenti che etichettano le possibili storie del sistema. A ciascuna storia corrisponde una particolare relazione tra osservabili parziali. Nel caso particolare di sistemi non-relativistici, uno degli osservabili parziali è il tempo  $q^0 = t$  e la funzione  $C$  assume la forma particolare

$$C(q^\alpha, p_\alpha) = p_0 - H(q^i, p_i), \quad \text{con } i = 1, \dots, n-1 \quad (3.5.21)$$

da cui l'equazione di Hamilton-Jacobi (3.5.19) assume la forma consueta

$$\frac{\partial S(q^i, p_i)}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial S(q^i, p_i)}{\partial q^i}\right) = 0. \quad (3.5.22)$$

Da tale formulazione possiamo affermare che un sistema meccanico è interamente caratterizzato dallo spazio delle configurazioni esteso  $\mathcal{C}$  e dalla funzione  $C$  su di esso definita [23]. Ciò corrisponde in maniera diretta alla caratterizzazione del sistema generalmente covarianti attraverso il vincolo superhamiltoniano definito sul loro spazio delle configurazioni. Con l'operatore di derivazione opportunamente inteso, tale linguaggio si estende ai sistemi quantistici, in cui la funzione  $C$  è sostituita dall'operatore di Wheeler-DeWitt

$$\hat{C} = C \left( q^\alpha, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right). \quad (3.5.23)$$

Tutte le predizioni fisiche rilevanti possono essere estratte dal propagatore  $W(q^\alpha, Q^\alpha)$  ottenuto da

$$C \left( q^\alpha, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right) W(q^\alpha, Q^\alpha) = 0, \quad (3.5.24)$$

che fornisce le ampiezze di probabilità di trovare la combinazione di osservabili parziali  $q^\alpha$  in relazione al fatto che sia stata osservata la combinazione  $Q^\alpha$ .

# Bibliografia

- <sup>1</sup>R. L. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity”, *Phys. Rev.* **116**, 1322–1330 (1959).
- <sup>2</sup>A. Ashtekar, “On the relation between classical and quantum observables”, *Communications in Mathematical Physics* **71**, 59–64 (1980).
- <sup>3</sup>A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity* (WORLD SCIENTIFIC, 1991).
- <sup>4</sup>A. O. Barvinsky e A. Yu. Kamenshchik, “Selection rules for the Wheeler-DeWitt equation in quantum cosmology”, *Phys. Rev.* **D89**, 043526 (2014), arXiv:1312.3147 [gr-qc].
- <sup>5</sup>P. G. Bergmann e A. Komar, “The coordinate group symmetries of general relativity”, *Int. J. Theor. Phys.* **5**, 15–28 (1972).
- <sup>6</sup>S. M. Carroll, “The cosmological constant”, *Living Reviews in Relativity* **4**, 1 (2001).
- <sup>7</sup>B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory”, *Phys. Rev.* **160**, 1113–1148 (1967).
- <sup>8</sup>P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, monograph series (Dover Publications, 2001).
- <sup>9</sup>A. Einstein, “The Foundation of the General Theory of Relativity”, *Annalen Phys.* **49**, 769–822 (1916).
- <sup>10</sup>E.ourgoulhon, *3+1 formalism and bases of numerical relativity*, (2007) arXiv:gr-qc/0703035 [GR-QC].
- <sup>11</sup>S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1973).
- <sup>12</sup>M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton paperbacks (Princeton University Press, 1994).
- <sup>13</sup>C. J. Isham, “Canonical quantum gravity and the problem of time”, in 19th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (GROUP 19) Salamanca, Spain, June 29-July 5, 1992, [157(1992)] (1992), pp. 0157–288, arXiv:gr-qc/9210011 [gr-qc].

- <sup>14</sup>C. Kiefer, *Quantum gravity*, International Series of Monographs on Physics (OUP Oxford, 2007).
- <sup>15</sup>K. Kuchař, “Canonical quantization of gravity”, in *Relativity, astrophysics and cosmology*, a cura di W. Israel (1973), pp. 237–288.
- <sup>16</sup>C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler e D. I. Kaiser, *Gravitation* (Princeton University Press, 2017).
- <sup>17</sup>M. Nakahara, *Geometry, topology and physics* (Taylor & Francis, 2016).
- <sup>18</sup>E. Noether, “Invariant variation problems”, *Transport Theory and Statistical Physics* **1**, 186–207 (1971).
- <sup>19</sup>J. D. Norton, “General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute”, *Reports on Progress in Physics* **56**, 791–858 (1993).
- <sup>20</sup>T. Regge e C. Teitelboim, “Role of surface integrals in the hamiltonian formulation of general relativity”, *Annals of Physics* **88**, 286–318 (1974).
- <sup>21</sup>M. Reisenberger e C. Rovelli, “Space-time states and covariant quantum theory”, *Phys. Rev.* **D65**, 125016 (2002), arXiv:gr-qc/0111016 [gr-qc].
- <sup>22</sup>C. Rovelli, *Quantum gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2004).
- <sup>23</sup>C. Rovelli, “Partial observables”, *Phys. Rev.* **D65**, 124013 (2002), arXiv:gr-qc/0110035 [gr-qc].
- <sup>24</sup>C. Rovelli, “Space and Time in Loop Quantum Gravity”, (2018), arXiv:1802.02382 [gr-qc].
- <sup>25</sup>T. Thiemann, “Modern canonical quantum general relativity”, (2001), arXiv:gr-qc/0110034 [gr-qc].
- <sup>26</sup>W. G. Unruh e R. M. Wald, “Time and the interpretation of canonical quantum gravity”, *Phys. Rev. D* **40**, 2598–2614 (1989).
- <sup>27</sup>R. M. Wald, *General relativity* (Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984).